289. Bizonyítsuk be, hogy a Pascal-háromszög (**288.** feladat) n-edik sorának első, harmadik, ötödik, ... elemének összege 2^{n-1}.

VII. GRÁFELMÉLET

1. Gráfelméleti fogalmak kialakítása: csúcs, szögpont, él, fokszám. Egyszerű gráfok. Irányított gráfok.

1. Egy klubesten a fiúk és a lányok feljegyezték, hogy hány partnerrel táncoltak.

a) Igaz-e, hogy a fiúk által feljegyzett számok összege egyenlő a lányok által feljegyzett számok összegével?

b) Mi a válasz ugyanerre a kérdésre, ha mindenki azt jegyezte fel, hogy hányszor táncolt a klubesten?

2. Egy térképen pontokkal vannak feltüntetve a városok, amelyek páronkénti távolságai mind különbözőek. Mindegyik várost összekötjük a hozzá legközelebbi várossal (egy szakasszal).

a) Mutassuk meg, hogy nem jöhet létre zárt töröttvonal.

b) Mutassuk meg, hogy két szakasz nem metszheti egymást.

c) Mutassuk meg, hogy nem létezhet olyan város, amelyik ötnél több másikkal össze lenne kötve.

3. Öt város között telefon-összeköttetést akarunk létesíteni. Ennek érdekében bizonyos városok telefonközpontjai között kábelt fektetünk.

a) Legalább hány kábelt kell fektetni, hogy bármelyik városból bármelyik másikba lehessen telefonálni?

b) Legalább hány kábelt kell fektetnünk akkor, ha biztonsági okokból azt akarjuk, hogy bármely két város között legalább két független (közös kábel nélküli) vonalon is lehessen telefonálni?

Készítsünk tervrajzokat a hálózatok építéséhez.

4. Rajzoljuk meg a családfánkat ötödíziglen visszamenőleg, és döntsük el, hogy dédapáink nagyapjai és nagyapáink dédapjai ugyanazon személyek-e. (Feltesszük, hogy felmenő ágon legalább ötödíziglen nem volt rokonházasság.)

5. Be lehet-e járni
a) egy tetraéder,
b) egy kocka,
c) egy szabályos oktaéder
éleit egy-egy csúcsukból kiindulva úgy, hogy minden élen pontosan egyszer haladjunk végig és a végén visszatérjünk abba a csúcsba, amelyikből indultunk? Ha igen, rajzoljunk néhány ilyen bejárást.

6. Be lehet-e járni
a) egy tetraéder,
b) egy kocka,
c) egy szabályos oktaéder
csúcsait egy csúcsból kiindulva, az élek mentén haladva úgy, hogy minden csúcsot pontosan egyszer érintsünk és a végén visszatérjünk abba a csúcsba, amelyikből indultunk? Ha a bejárás lehetséges, rajzoljunk meg közülük néhányat.

7. Nyolc sakkozó körmérkőzést játszik, s már lezajlott az első két forduló. Feleltessünk meg a sakkozóknak a síkon egy-egy pontot. Egy mérkőzés lejátszását úgy jelöljük a rajzon, hogy a szóban forgó játékosoknak megfelelő pontokat összekötjük egy szakasszal. Figyeljük meg, hogy létrejön-e a rajzon zárt töröttvonal. Azt tapasztaljuk, hogy igen. Bizonyítsuk be, hogy ez törvényszerű.

8. Szervezzünk 8 csapat körmérkőzéses versenyéhez első három fordulót, ha az egyes fordulók mérkőzéseit egy időben kell lejátszani. Ábrázoljuk a tervezeteket gráf segítségével.

9. Egy n oldalú, konvex ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 4$) sokszögben húzzunk meg minden átlót. Maximálisan hány metszéspont jöhet létre?

10. Egy sakk csapatversenyen több csapat vett részt. (Minden játékos pontosan egyszer játszik minden, vele nem azonos csapatban levő játékossal.) A verseny végén a sakkozóknak ünnepi ebédet adnak. A szakácsnak elfelejtették leadni a csapatok létszámát. A szakács mindössze annyit tud, hogy a legnagyobb létszámú csapatban 12 versenyző van, és hogy a verseny során 42 sakkozó szerzett pontot. Hány ebédet kell főznie a szakácsnak, hogy biztosan jusson minden sakkozónak?

11. Egy négyzetet hat egyenessel felosztottunk 16 kisebb négyzetre. Hány úton juthatunk el a négyzet egyik csúcsából a szemközti

csúcsba, ha csak a kis négyzetek élein haladhatunk és mindig közeledni kell a célhoz? Készítsünk ábrát és rajzoljunk fel néhány különböző utat.

12. Egy négyzetet 6 egyenessel felosztunk 16 kisebb négyzetre. A négyzet két szemközti csúcsában van egy-egy állatka és helyet akarnak cserélni. Egyszerre indulnak el, mindig a kis négyzetek élein, egyenlő sebességgel haladnak, s mindig közelednek céljukhoz.
a) Összesen hány különböző módon mehet végbe ez a helycsere? (Két helycsere akkor és csak akkor számít különbözőnek, ha legalább az egyik állatka útja a két esetben különböző.)
b) Hány olyan helycsere lehetséges, melynek során a két állatka találkozik egymással?

13. Egy kockát 9 síkkal felosztottunk 64 kisebb kockára. Hány különböző úton juthatunk el a kocka egyik csúcsából a szemközti csúcsba, ha csak a kis kockák élein haladhatunk és mindig közelednünk kell a célhoz?

***14.** Egy kockát 9 síkkal felosztottunk 64 kisebb kockára. A kocka két szemközti csúcsában van egy-egy állatka, és helyet akarnak cserélni. Egyszerre indulnak el, mindig a kis kockák élein, egyenlő sebességgel haladnak és mindig közelednek a célhoz.
a) Összesen hány különböző módon mehet végbe ez a helycsere?
b) Hány olyan helycsere lehetséges, melynek során az állatkák találkoznak?

15. Egy gráf csúcsait azonosítjuk a 0; 1;. . .; 11; 12 számokkal. Az x csúcsot akkor és csak akkor kötjük össze az y csúccsal, ha 4 osztója $x^2 - y^2$-nek.
a) Rajzoljuk meg a gráfot.
b) Hogyan lehet egyszerűbben megadni ugyanezt a gráfot?
c) Hány éle van a megadott gráfnak?

16. Egy 5 tagú társaságban lehet-e mindenkinek pontosan 3 ismerőse? (Az ismeretségek kölcsönösek.)

17. 8 csapat körmérkőzéses versenye során előfordulhat-e, hogy az egyes csapatok eddig rendre 1; 2; 2; 2; 4; 5; 7; 7 mérkőzést játszottak?

18. Egy klubesten 7 fiú és 7 lány vett részt. Egy játék során mindenki felírta egy cédulára, hogy a klubesten hány partnerrel

táncolt. A felírt számok a következők voltak: 3; 3; 4; 4; 2; 1; 4; 5; 6; 2; 7; 4; 0; 6. Mutassuk meg, hogy valaki tévedett.

19. Egy táncmulatságon 7 fiú és 7 lány vett részt. Mindenki felírta egy cédulára, hogy hány partnerrel táncolt. A számok a következők voltak: 3; 3; 3; 3; 3; 5; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6. Mutassuk meg, hogy valaki tévedett.

20. Hat röplabdacsapat körmérkőzést játszik. Jelöljük a csapatokat *A*-, *B*-, *C*-, *D*-, *E*-, *F*-fel és feleltessünk meg nekik a síkon egy-egy pontot. Azt a tényt, hogy pl. az *A* csapat legyőzte a *B* csapatot, a rajzon úgy jelöljük, hogy meghúzzuk az *AB* szakaszt és arra egy *B* felé irányuló (mutató) nyilat helyezünk. Az egyes mérkőzések eredményét döntsük el pl. pénzfeldobással, és készítsük el a körmérkőzéseket reprezentáló rajzot, irányított gráfot.

a) Hányszor kellett feldobni a pénzt?

b) Hogyan jelentkezik a rajzon az a tény, hogy egy csapat mindig győzött, illetve hogy mindig kikapott?

c) Hogyan jelentkezik a rajzon, hogy nincs veretlen csapat?

d) Igaz-e, hogy ha *A*-ból vezet nyíl *B*-be és *B*-ből vezet nyíl *C*-be, akkor *A*-ból vezet nyíl *C*-be?

21. Igazoljuk, hogy ha n csapat ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 4$) körmérkőzéses versenyén (legalább) $n+1$ mérkőzést már lejátszottak, akkor van olyan csapat, amelyik már legalább háromszor játszott.

22. Hány olyan 5 szögpontú, egyszerű gráf van, melyben a szögpontok fokszámai 1; 2; 2; 2; 3? Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a szögpontokat megszámozzuk, és úgy is, hogy nem.

23. Rajzoljunk olyan 5 csúcsú, egyszerű gráfot, amelynek két harmadfokú és két negyedfokú csúcsa van. Hány ilyen gráf van, ha:

a) a csúcsokat nem számozzuk meg;

b) a csúcsokat megszámozzuk?

Határozzuk meg az ilyen gráfok éleinek a számát.

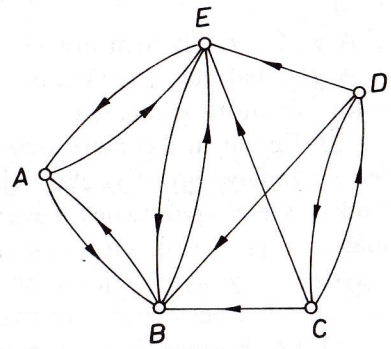
24. Egy 6 csúcsú, egyszerű gráf csúcsainak a fokszámai: 2; 2; 3; 3; 5; 5. Hány ilyen gráf van, ha a csúcsokat megszámozzuk, és hány van akkor, ha nem? Számítsuk ki a gráfok éleinek a számát.

25. Hány n csúcsú ($n \in \mathbf{N}$ és $n \neq 0$), különböző, egyszerű gráf van, ha a csúcsait megszámozzuk?

26. n vállalat közül ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 2$) bármelyik kettőnek van kapcsolata: legalább az egyik szállít árut a másiknak. Bizonyítsuk be, hogy sorba lehet rendezni a vállalatokat úgy, hogy bármely vállalat kap árut a sorrendben közvetlen előtte állótól, és szállít árut a sorrendben közvetlen utána állónak.

Adjuk meg a vállalatok közti kapcsolatokat $n = 5$ esetén egy irányított gráffal, és készítsünk el egy lehetséges sorbaállítást.

27. A *22. ábrán* 5 várost tüntettünk fel: *A*; *B*; *C*; *D*; *E*. A köztük vezető, nyíllal ellátott szakaszok a köztük fennálló hírközlési kapcsolatokat jelzik: az pl., hogy *A*-ból vezet nyíl *B*-be, azt jelenti, hogy az *A* városból hírt lehet továbbítani a *B* városba.



22. ábra

a) Egy *B* városban történt esemény híre eljuthat-e minden másik városba?

b) Van-e olyan város, amelyből minden másikba továbbítható egy hír?

28. A terepen n ($n \in \mathbf{N}^+$) megfigyelési pont van. Mindegyik távíróvonallal van összekötve minden másikkal, és minden vonalon csak az egyik irányban lehet táviratozni. Van-e olyan megfigyelési pont, amelynek a híreit bármelyik másik megfigyelési pontra el lehet juttatni?

29. A terepen n ($n \in \mathbf{N}^+$) megfigyelési pont van, és közülük bizonyos párok között egyirányú hírközlési lehetőség áll fenn. Igazoljuk, hogy a következő rájuk vonatkozó három állítás ekvivalens:

1. Bárhogyan jelöljük is ki a megfigyelési pontoknak egy nem üres, valódi részhalmazát, annak valamelyik pontjából legalább egy további (a kijelölt részhalmazokhoz nem tartozó) pontra tudunk továbbítani egy hírt.

2. Bárhogyan jelöljük is ki a megfigyelési pontoknak egy nem üres, valódi részhalmazát, annak valamelyik pontja tud hírt kapni egy további (a kijelölt részhalmazhoz nem tartozó) pontból.

3. Bármely megfigyelési pontból bármelyik másikba el lehet juttatni egy hírt.

30. Adott egy n csúcsú ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 2$) teljes, irányított gráf. (Minden élnek csak egy irányítása van.) Bizonyítsuk be, hogy a gráfra vonatkozó, következő három állítás ekvivalens.

1. A gráf csúcsainak bármely nem üres, valódi részhalmazából vezet ki él.
2. A gráf bármely nem üres, valódi részhalmazába vezet be él.
3. A gráf bármely X csúcsából bármely másik Y csúcsába el lehet jutni irányított út mentén.

31. Egy olyan körmérkőzéses versenyen, ahol nem lehet döntetlen eredmény, egy A játékost (játékos helyett csapatot is mondhatunk) pszeudogyőztesnek nevezünk, ha a verseny végén bármely másik X játékosról elmondhatja, hogy vagy legyőzte X-et, vagy legyőzött egy olyan Y játékost, amelyik legyőzte X-et. Bizonyítsuk be, hogy bármely ilyen versenyen van pszeudogyőztes.

32. Egy körmérkőzéses versenyen, ahol nem lehet döntetlen eredmény, egy A játékost (játékos helyett csapatot is mondhatunk) pszeudovesztesnek nevezünk, ha róla bármelyik X játékos elmondhatja, hogy vagy megverte A-t, vagy megvert egy olyan Y játékost, aki megverte A-t. Bizonyítsuk be, hogy bármely ilyen versenyen van pszeudovesztes.

33. n vívó ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 3$) egy körmérkőzésen vett részt. A verseny végén kiderült, hogy nincs veretlen játékos.

a) Bizonyítsuk be, hogy van két pszeudogyőztes.
b) Bizonyítsuk be, hogy van három pszeudogyőztes.
c) Igaz-e, hogy $n \geqq 4$ esetén mindig van 4 pszeudogyőztes?

34. Adott egy n szögpontú, teljes, irányított gráf ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 2$). Bizonyítsuk be, hogy van olyan szögpontja a gráfnak, amelyből bármelyik másik szögpontba vezet legfeljebb 2 hosszúságú, irányított út.

35. Egy 5 résztvevős körmérkőzéses versenyen:

a) pszeudogyőztes lehet-e egyúttal pszeudovesztes is;
b) lehet-e minden versenyző pszeudogyőztes?

2. Élek, csúcsok és fokszámok közti összefüggések. Gráf komplementere. Gráfok izomorfiája. Részgráfok

36. Igazoljuk, hogy bármely gráfban a páratlan fokú csúcsok száma páros.

37. Igazoljuk, hogy ha egy gráf csúcsainak a száma páratlan, akkor van páros fokú csúcsa.

38. Hány olyan 5 csúcsú, egyszerű gráf van, amelyben minden csúcs legalább harmadfokú, és a csúcsokat megkülönböztetjük egymástól?

39. Rajzoljunk olyan 6 csúcsú, egyszerű gráfot, amelynek öt harmadfokú és egy elsőfokú csúcsa van. Hány megoldása van a feladatnak, ha

a) a csúcsokat megszámozzuk?
b) a csúcsokat nem számozzuk meg?

40. Hány csúcsú az a teljes, egyszerű gráf, amelynek kevesebb éle van, mint a csúcsok számának a 6-szorosa, de több, mint a csúcsok számának az 5-szöröse?

41. Hány csúcsa lehet annak a teljes, egyszerű gráfnak, amelyben az élek száma a csúcsok számának legalább 11-szerese, de legfeljebb 12-szerese?

42. Egy 5 csúcsú, egyszerű gráfnak 8 éle van. Mekkorák lehetnek a csúcsok fokszámai?

43. Öt sziget közül bármelyik kettőt hajó-, illetve repülőjárat köt össze (de csak az egyik) úgy, hogy egyik járattal sem lehet három szigetet körbejárni. Mutassuk meg, hogy minden szigetről két hajó- és két repülőjárat indul.

44. Egy körmérkőzéses sakkversenyen legalább 6 versenyző vesz részt. Bizonyítsuk be, hogy a verseny bármely pillanatában vagy van három olyan versenyző, akik az egymás elleni mérkőzéseiket már mind lejátszották, vagy van három olyan versenyző, akik közül még semelyik kettő nem játszott egymással.

45. Igaz-e a **44.** feladat állítása 6 versenyző helyett 5 versenyző esetén?

46. Egy sakkversenyen két iskola tanulói vesznek részt. Minden tanuló minden másikkal egyszer játszik. Tudjuk, hogy eddig minden tanuló páros számú mérkőzést játszott. Mutassuk meg, hogy akkor eddig a különböző iskolák tanulói között is páros számú mérkőzés fejeződött be.

47. A **46.** feladatban leírt verseny egy pillanatában számoljuk meg, hogy hány olyan mérkőzés fejeződött be, amelyet különböző iskola tanulói játszottak, és hogy az egyik iskolában hány olyan tanuló van, akik addig páratlan számú mérkőzést játszottak. Mutassuk meg, hogy az így kapott két szám azonos paritású.

48. Egy vívóversenyen 8 versenyző vesz részt. Az eredményjelző táblán megjelent, hogy az egyes versenyzők addig hány mérkőzést vívtak. Ezek a számok a következők: 2; 3; 1; 5; 7; 6; 4; 2. Az egyik szakember rápillant a táblára – s meg sem várva az eredmények további részletezését –, óvást jelent be. Elfogadnánk-e az óvást anélkül, hogy tudnánk, hogy a szakember miért óvott? Miért?

49. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n csúcsú ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 2$) egyszerű gráfban a 0 kivételével minden lehetséges fokszám előfordul, akkor a gráfban két $\left[\frac{n}{2}\right]$-fokú csúcs van.

50. Egy gráf csúcsai legyenek az $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ pontok. Két különböző A_i és A_j pontot akkor és csak akkor kötünk össze éllel, ha $|i-j| \geqq 3$. Rajzoljuk fel a gráf komplementerét. Számítsuk ki mindkét gráf éleinek a számát.

51. Hány 5 csúcsú, legalább 8 élű, egyszerű gráf van, ha:

a) a csúcsokat nem különböztetjük meg;

b) a csúcsokat megkülönböztetjük?

52. Hány 5 csúcsú 3, illetve 7 élű, egyszerű gráf van, ha:

a) a csúcsokat nem különböztetjük meg;

b) a csúcsokat megkülönböztetjük?

53. Rajzoljunk olyan 5 csúcsú, egyszerű gráfot, amelynek két harmadfokú és két másodfokú csúcsa van. Oldjuk meg a feladatot azzal a módosítással is, hogy a „két másodfokú" helyett „legalább két másodfokú"-t írunk.

54. Van-e olyan 6 csúcsú, egyszerű gráf, amely a csúcsok számozásától eltekintve, nem különböztethető meg a komplementerétől?

55. Hány 6 csúcsú, legalább 12 élű, egyszerű gráf van, ha a csúcsait megkülönböztetjük, és hány, ha nem?

56. Hány 7 csúcsú és legalább 18 élű, egyszerű gráf van. Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a csúcsokat megkülönböztetjük, és úgy is, hogy nem.

57. Bizonyítsuk be, hogy bármely legalább 5 szögpontú, egyszerű gráfban vagy a komplementerében van zárt töröttvonal.

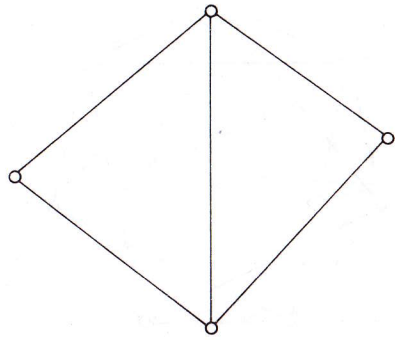
58. Mutassuk meg, hogy van olyan 6 szögpontú, egyszerű gráf, hogy benne is és a komplementerében is (pontosan) egy „háromszög" van.

***59.** Gráfok segítségével oldjuk meg a következő feladatot:
Tudjuk, hogy Tamás, János és István feleségei Judit, Mária és Zsuzsa, de nem feltétlenül ebben a sorrendben. Mindegyik házaspárnak van egy gyermeke. A gyerekek nevei: Emmi, András és Miska. Állapítsuk meg, hogy kik tartoznak egy-egy családba, ha tudjuk még a következő információkat:
1. Mária és István gyermekei együtt fociznak az iskola focicsapatában.
2. Tamás fiát nem Andrásnak hívják.
3. János feleségét nem Zsuzsának hívják.

60. Van-e olyan 4, illetve 5 csúcsú, egyszerű gráf, amely izomorf a komplementerével?

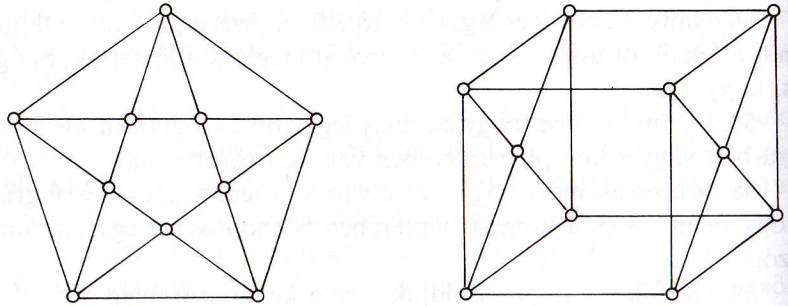
61. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű gráf csúcsainak a száma páros, de 4-gyel nem osztható, akkor nem lehet olyan részgráfja, amely izomorf a komplementerével.

62. Hány olyan számozott szögpontú gráf van, amely a *23. ábra* gráfjával izomorf?



23. ábra

63. A *24. ábrá*ról könnyen leolvasható az *a)* és *b)* gráf származtatása. Mindkét gráfnak 10 csúcsa van és minden csúcsuk negyedfokú, s így élszámuk is egyenlő. Izomorf-e a két gráf?



a) *b)*

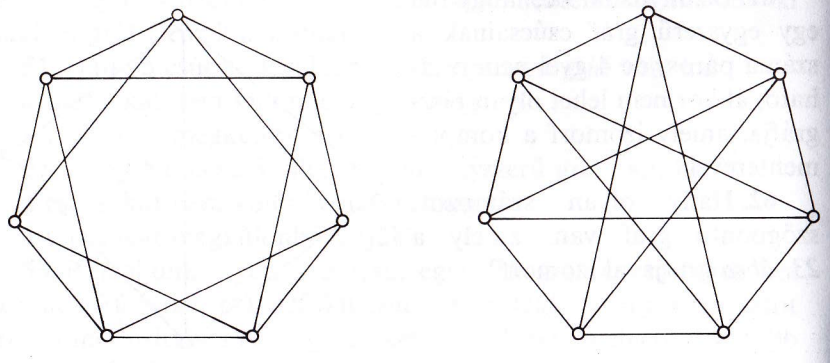
24. ábra

64. Rajzoljunk két 5 csúcsú, egyszerű gráfot, amelyekben a csúcsok fokszámai 1; 2; 2; 2; 3, de a két gráf nem izomorf.

65. Tekintsük egy kocka csúcsait egy gráf csúcsainak, éleit a gráf éleinek. Hagyjuk most el a kocka két szemközti (párhuzamos) élét, s helyettük húzzuk meg az elhagyott élek által meghatározott téglalap átlóit a gráf éleiként. Izomorf-e az így kapott gráf az eredetivel?

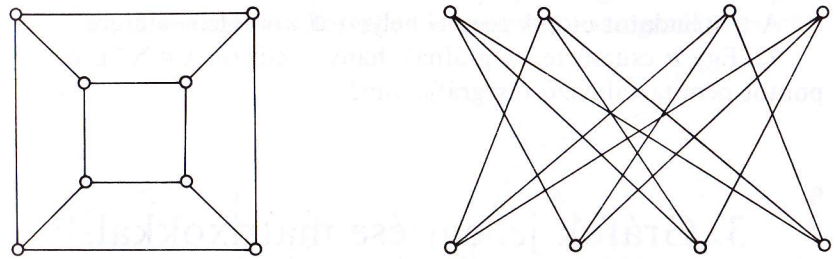
66. Izomorf-e bármely két olyan 8 csúcsú gráf, melyeknek minden csúcsa harmadfokú?

67. Izomorf-e a *25. ábra a)* és *b)* gráfja?



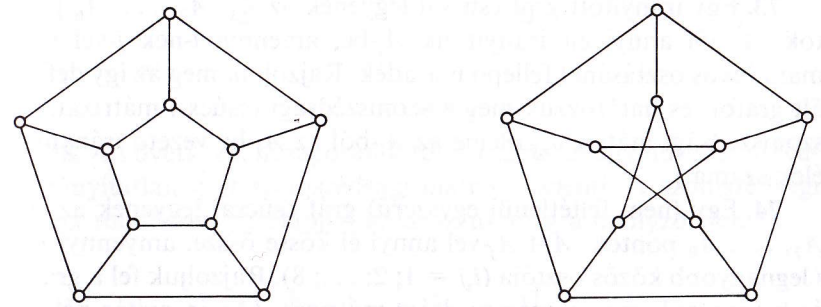
a) *25. ábra* *b)*

68. Izomorf-e a *26. ábra a)* és *b)* gráfja?



a) *26. ábra* *b)*

69. Izomorf-e a *27. ábra a)* és *b)* gráfja?

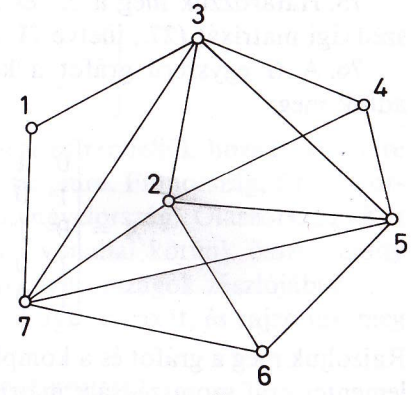


a) *27. ábra* *b)*

70. Bizonyítsuk be, hogy ha az n csúcsú G egyszerű gráf nem tartalmaz zárt töröttvonalat, akkor G komplementerének legalább $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ éle van.

71. A *28. ábrán* egy 7 csúcsú G gráfot adtunk meg.

a) Rajzoljuk meg G-nek az 1; 2; 3; 5; 6 csúcshalmaz által feszített részgráfját.



28. ábra

b) Maximálisan hány csúcsát lehet kijelölni G-nek, hogy azok teljes részgráfot feszítsenek ki?

c) A *b)* feladatot oldjuk meg G helyett G komplementerére.

72. Egy n csúcsú teljes gráfnak hány k élű ($n, k \in \mathbf{N}^+$), izolált pontot nem tartalmazó részgráfja van?

3. Gráfok jellemzése mátrixokkal. Szomszédsági mátrix

73. Egy irányított gráf csúcsai legyenek az $A_1, A_2, \ldots, A_6$ pontok. A_i-ből annyi élt irányítunk A_j-be, amennyi i-nek j-vel való maradékos osztásánál fellépő maradék. Rajzoljuk meg az így definiált gráfot, és határozzuk meg a szomszédsági (csúcs-) mátrixát. (A szomszédsági mátrix $a_{i,j}$ eleme az A_i-ből az A_j-be vezető irányított élek száma.)

74. Egy (nem feltétlenül egyszerű) gráf csúcsai legyenek az $A_1, A_2, \ldots, A_8$ pontok. A_i-t A_j-vel annyi él kösse össze, amennyi i és j legnagyobb közös osztója ($i,j = 1; 2; \ldots; 8$). Rajzoljuk fel a gráfot és határozzuk meg a szomszédsági mátrixát. (Az irányítás nélküli éleket úgy tekintjük, hogy azok mindkét módon irányítva vannak.)

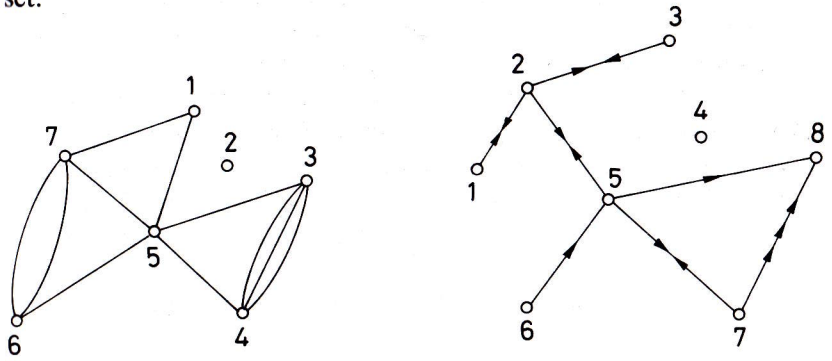
75. Határozzuk meg a *22.* és *28. ábrán* megadott gráfok szomszédsági mátrixát (**27.**, illetve **71.** feladat).

76. A G egyszerű gráfot a következő A-val jelölt mátrixával adtuk meg:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rajzoljuk meg a gráfot és a komplementerét, majd írjuk fel a komplementer gráf szomszédsági mátrixát.

77. A *29. ábrán* két gráfot adtunk meg (*a)* és *b)*). Írjuk fel mindkét gráf szomszédsági mátrixát, és adjuk meg a mátrixok egyes soraiban, illetve egyes oszlopaiban lévő elemek összegének a jelentését.



a) *b)*

29. ábra

78. A következő, hézagosan kitöltött táblázat egy hurokél nélküli, irányítatlan gráf szomszédsági mátrixát jelenti. A szomszédsági mátrix tulajdonságai alapján határozzuk meg a hiányzó elemeit.

$$\begin{bmatrix} . & 1 & . & 2 & . & 0 \\ . & . & . & 2 & . & 1 \\ 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . & . & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 2 & . \end{bmatrix}$$

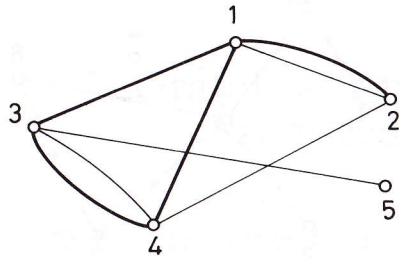
79. Vegyünk fel a síkon 8 pontot és rendeljük hozzájuk rendre a következő országokat: Ausztria, Belgium, Finnország, Franciaország, Hollandia, Magyarország, Lengyelország, Olaszország. Két különböző pontot (országot) annyi vonallal kötünk össze, ahány közös szín szerepel a pontokhoz rendelt országok zászlójában.

a) Irjuk fel a kapott gráf szomszédsági mátrixát, és rajzoljuk meg a gráfot.

b) Döntsük el, hogy helyes-e a következtetés:

Ha a kapott mátrix i-edik sorának j-edik eleme, valamint a j-edik sorának a k-adik eleme pozitív, akkor az i-edik sorának k-adik eleme is pozitív.

80. Legyen A egy egyszerű gráf szomszédsági mátrixa. Bizonyítsuk be, hogy az $A \cdot A(= A^2)$ mátrix főátlójának elemei éppen a gráf csúcsainak a fokszámai.



30. ábra

81. A *30. ábrán* 5 várost ábrázoltunk 1-től 5-ig számozott pontokkal. Két várost vékony vonallal kötöttünk össze, ha van köztük autóbuszjárat, és vastag vonallal, ha van köztük vasúti összeköttetés. Irjuk fel mindkét gráf (vékony vonalas és vastag vonalas) szomszédsági mátrixát és jelöljük őket A-val, illetve B-vel.

a) Mit jelentenek az $A+B$ mátrix elemei?

b) Mit jelentenek az $A \cdot B$, illetve $B \cdot A$ mátrixok elemei?

c) Mit jelentenek az A^2, illetve B^2, valamint az A^2+B^2 mátrix elemei?

82. Készítsünk egy 5 csúcsú, teljes, irányított gráfot. Az élek irányítását pl. pénzfeldobással döntsük el.

a) Határozzuk meg a gráf A szomszédsági mátrixát.

b) Határozzuk meg az A^2 mátrixot, és keressük meg elemeinek a jelentését.

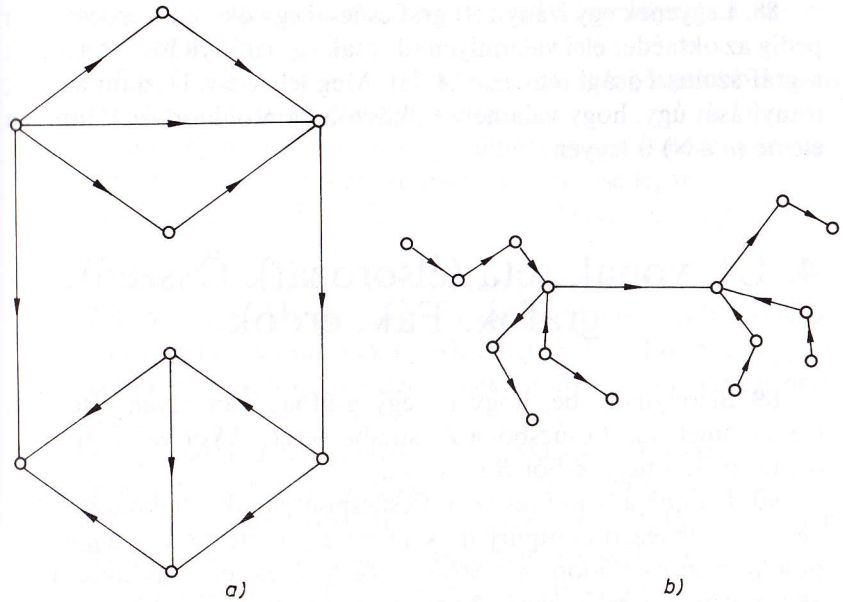
c) Határozzuk meg az A^3 mátrixot, és keressük meg elemeinek a jelentését.

d) Adjuk meg az $A+A^2+A^3+A^4$ mátrix elemeinek a jelentését.

83. Bizonyítsuk be, hogy ha A egy teljes, irányított gráf (többszörös él is megengedett) szomszédsági mátrixa, akkor az $A+A^2$ mátrixának van olyan sora és olyan oszlopa, amelynek minden eleme pozitív.

84. Határozzuk meg a *31. ábrán* megadott *a)* és *b)* gráfok szomszédsági mátrixának a 10. hatványát.

85. Egy 3 szögpontú teljes gráf éleinek tetszés szerinti irányítása

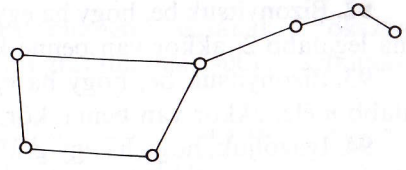


31. ábra

esetén adjuk meg a gráf szomszédsági mátrixának n-edik hatványát ($n \in \mathbf{N}^+$).

86. Lássuk el egy fagráf minden élét egy (és csak egy) irányítással, és jelöljük A-val az így kapott irányított gráf szomszédsági mátrixát. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $n_0(\in \mathbf{N})$ küszöbszám, hogy ha $n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq n_0$, akkor az A^n mátrix minden eleme 0. Milyen felső korlátot tudunk adni n_0-ra? Igaz-e a feladat állítása fa helyett erdőre, s ha igen, akkor hogyan módosul az n_0-ra adott felső korlát?

87. Adjunk tetszés szerinti irányítást a *32. ábrán* megadott gráf minden élének (de csak egyet). Határozzuk meg az így kapott irányított gráf szomszédsági mátrixának n-edik hatványát ($n \in \mathbf{N}^+$).


32. ábra

88. Legyenek egy irányított gráf csúcsai egy oktaéder csúcsai, élei pedig az oktaéder élei valamilyen (de csak egy) irányítással, s jelöljük a gráf szomszédsági mátrixát A-val. Meg lehet-e választani az élek irányítását úgy, hogy valamely n_0 küszöbszámtól kezdve A^n minden eleme ($n \in \mathbf{N}$) 0 legyen?

4. Út, vonal, séta (élsorozat). Összefüggő gráfok. Fák, erdők

89. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban van olyan élsorozat (séta), amely az A csúcsból a B csúcsba vezet, akkor van a gráfban olyan út is, amely A-ból B-be vezet.

90. Jelöljük a nem üres G gráf csúcspontjainak a halmazát $S(G)$-vel. $S(G)$ rendezett pontpárjainak a halmazán értelmezzük a ϱ relációt a következő módon: $A \in S(G)$ és $B \in S(G)$ esetén A akkor és csak akkor van a ϱ relációban B-vel, ha A-ból vezet út B-be vagy ha $A = B$. Vizsgáljuk meg az alábbi következtetéseket:

$$A \in S(G) \Rightarrow A \varrho A;$$
$$A \in S(G),\ B \in S(G),\ A \varrho B \Rightarrow B \varrho A;$$
$$A \in S(G),\ B \in S(G),\ C \in S(G),\ A \varrho B,\ B \varrho C \Rightarrow A \varrho C.$$

Értelemszerű módosítással vizsgáljuk meg az analóg kérdéseket irányított gráfok esetén is.

91. Bizonyítsuk be, hogy ha egy kör két különböző pontját olyan út köt össze, amelynek nincs közös éle a körrel, akkor a kör és az út együtt legalább három kört határoz meg. Igaz-e hasonló állítás irányított gráfok esetén?

92. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf minden csúcsának a fokszáma legalább 2, akkor van benne kör.

93. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n szögpontú gráfnak van legalább n éle, akkor van benne kör.

94. Igazoljuk, hogy ha egy gráf minden csúcsának a fokszáma 2, akkor az vagy egyetlen kör, vagy több, közös csúcs nélküli (pontfüggetlen) körre esik szét.

95. Milyen szerkezetűek azok a gráfok, amelyekben minden csúcs fokszáma legfeljebb 2?

96. Egy öttagú társaság minden tagja a társaság legalább 3 másik tagjával (kölcsönös) ismeretségben van.

a) Bizonyítsuk be, hogy a társaság leülhet egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenkinek mindkét szomszédja ismerőse legyen.

b) Igaz-e a feladat állítása öttagú társaság helyett hattagú társaság esetén is?

c) Igaz-e a feladat állítása héttagú társaság esetén is?

97. Egy öttagú társaságban mindenkinek van legalább 3 ismerőse (az ismeretségek kölcsönösek). Leültethető-e közülük négy egy kerek asztal köré úgy, hogy mindegyiknek mindkét szomszédja ismerőse legyen?

98. Egy hattagú társaságban mindenkinek pontosan 3 barátja van. Egy alkalommal 6 mozijegyet kaptak, három moziba, mindegyikbe kettőt. Mindenki csak valamelyik barátjával együtt hajlandó moziba menni. Meg tudják-e szervezni a mozilátogatást?

99. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n szögpontú, egyszerű gráf minden pontjának a fokszáma legalább k, akkor van a gráfban legalább $k+1$ hosszúságú kör ($n, k \in \mathbf{N}$, $n \geqq 3$, $k \geqq 2$).

100. Igaz marad-e az előző feladat állítása, ha benne a „legalább $k+1$" helyett csak „$k+1$"-et írunk?

101. Bizonyítsuk be, hogy bármely összefüggő gráf két leghosszabb útja metszi egymást.

102. Van-e olyan gráf, amelynek minden csúcsa legalább harmadfokú, és minden körének hossza osztható egy, 2-nél nagyobb egész számmal?

103. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf nem tartalmaz hurokélt, és minden pontjának a fokszáma legalább 3, akkor van benne páros hosszúságú kör.

104. Igaz-e, hogy ha egy gráf minden csúcsának a fokszáma legalább k ($k \in \mathbf{N}$ és $k \geqq 2$), akkor a gráf minden csúcsát tartalmazza legalább egy kör?

105. Egy 5, illetve 6 csúcsú teljes gráfban hány olyan kör van, amely tartalmazza a gráfnak egy kijelölt csúcsát?

106. Egy n csúcsú ($n \in \mathbf{N}$; $n \geqq 3$) teljes gráfban hány olyan kör van, amely tartalamzza a gráfnak egy kijelölt csúcsát?

107. Egy n csúcsú, teljes gráfnak ($n \in \mathbf{N}$; $n \geqq 3$) hány különböző köre van?

108. Adott egy n szögpontú ($n \in \mathbf{N}$, $n \geqq 3$), teljes gráf. Lehet-e úgy irányítani az éleit (mindegyiket csak egyik irányban), hogy az így kapott irányított gráfban egyetlen irányított kör se legyen?

109. Bizonyítsuk be, hogy összefüggő gráf bármely körének egy tetszőleges élét elhagyva, összefüggő gráf marad vissza.

110. Legyen e a G összefüggő gráfnak olyan éle, amelyet elhagyva G-ből, a kapott részgráf nem összefüggő. Bizonyítsuk be, hogy e nem lehet G-beli kör éle.

111. Bizonyítsuk be, hogy ha az összefüggő G gráfban nincs olyan kör, amely a G-beli e élt tartalmazná, akkor G-ből e-t elhagyva, a kapott gráf nem lehet összefüggő.

112. Bizonyítsuk be, hogy ha az n csúcsú ($n \in \mathbf{N}$, $n \geqq 2$), összefüggő gráfnak n-nél kevesebb éle van, akkor van a gráfnak elsőfokú csúcsa.

113. Van-e olyan, legfeljebb 6 csúcsú, egyszerű gráf, amely nem összefüggő, és minden csúcsa másodfokú?

114. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő gráf minden csúcsa másodfokú, akkor a gráf egyetlen kör.

115. Az összefüggő G gráf csúcsait piros és kék színnel kiszíneztük. (Mindkét színt használtuk.) G éleit a következőképpen színezzük: ha az él két végpontja azonos színű, akkor az él is ugyanazt a színt kapja, ellenkező esetben feketére színezzük. Mutassuk meg, hogy a gráfnak van fekete éle.

116. Igazoljuk, hogy ha egy összefüggő G gráfnak egy nem üres G' részgráfja nem tartalmazza G-nek minden pontját, akkor van G-nek olyan éle, amely nem éle G'-nek és egyik végpontja G'-beli, a másik nem.

117. Bizonyítsuk be, hogy az n szögpontú ($n \in \mathbf{N}^+$), összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van.

118. Egy nemzetközi konferencián az n résztvevő meg tudja érteni egymást, esetleg közülük felkért tolmácsok segítségével. Mutassuk meg, hogy akkor legalább $n-1$ különböző pár résztvevő tolmács nélkül is tud beszélgetni.

119. Rajzoljunk 7 szögpontú, nem összefüggő, 15 élű, egyszerű gráfot.

120. Hány olyan 8, illetve 9 csúcsú, nem összefüggő, egyszerű gráf van, amelynek minden csúcsa legalább harmadfokú? (A csúcsok számozásától tekintsünk el.)

121. Egy nemzetközi konferencián 20 küldött vett részt. Minden küldött legalább 10 társával címet váltott (megadták egymásnak a címüket). Később bármelyikük tudja-e értesíteni egy eseményről az összes többit, ha:

a) minden küldött hajlandó közvetítésre;

b) egy küldött nem hajlandó közvetítésre?

122. Egy felügyelő nyomoz. A teremben 12 gyanús személy van. A felügyelő tudja, hogy a gyanús társaság minden tagja legalább 6 másik taggal ismeretségben van. A felügyelő a társaság névsorát odateszi egyikük elé és megkéri, hogy azon jelölje meg, akiket ismer, majd a megjelölt személyeket kéri ugyanerre. A felügyelő ezután ránéz a névsorra, látja, hogy van rajta megjelöletlen név, s ebből tudja, hogy valami nincs rendben. Honnan tudhatta?

123. Igazoljuk, hogy ha egy $2n$ csúcsú G, egyszerű gráf minden csúcsának a fokszáma legalább n ($n \in \mathbf{N}^+$), akkor G összefüggő. Igaz-e, hogy G bármely csúcsából bármely másik csúcsába vezet legfeljebb 2 hosszúságú út?
Igaz-e, hogy G bármely csúcsából bármely másik csúcsába vezet 2 hosszúságú út?

124. Adott a síkon $2n$ pont ($n \in \mathbf{N}^+$), s ezeket lefedjük körlapokkal. Mutassuk meg, hogy ha minden körlap legalább $n+1$ megadott pontot fed, akkor a $2n$ pont közül bármelyik kettő összeköthető körlapokkal lefedett töröttvonallal.

125. Egy ország n városa közül ($n \in \mathbf{N}$, $n \geqq 2$) bármely kettőt vagy közvetlen repülőjárat, vagy közvetlen hajójárat köt össze. Bizonyítsuk be, hogy vagy a hajójáratokat, vagy a repülőjáratokat meg lehet szüntetni úgy, hogy bármely két város között fennmaradjon az összeköttetés.

126. Igaz-e bármely egyszerű gráfra, hogy vagy (maga) a gráf, vagy a komplementere összefüggő? Állításunkat indokoljuk.

127. Legyen $n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 4$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan n csúcsú, összefüggő gráf, amelynek a komplementere is összefüggő.

128. Bizonyítsuk be, hogy ha a G összefüggő gráf egy G' nem üres

részgráfja nem tartalmazza G minden élét, akkor van G-nek olyan éle, amely nincs benne G'-ben, de legalább az egyik végpontja G'-ben van.

129. Legyen G összefüggő gráf. Mutassuk meg, hogy létezik olyan élsorozat (séta), amely G minden élét pontosan kétszer tartalmazza.

130. Az egyik megye 22 települése közül ötben van kórház. Legalább hány olyan utat kell megépíteni, amely két-két települést köt össze azért, hogy bármely településről legalább az egyik kórházba el lehessen jutni kiépített úton?

131. Legalább hány élük van az n csúcsú és k komponensű $(n,k \in \mathbf{N}^+)$ gráfoknak?

132. 4, 5, illetve 6 város között összefüggő vasúthálózatot akarunk kiépíteni. Hány különböző módon tehetjük ezt meg, ha felesleges vonalat nem akarunk megépíteni?

133. Bizonyítsuk be, hogy ha egy k komponensű gráf csúcsainak a száma n, éleinek a száma e, $(e,n,k \in \mathbf{N}^+)$, akkor van benne legalább $e-n+k$ kör.

134. Tudjuk, hogy az n szögpontú $(n \in \mathbf{N},\ n \geqq 2)$, egyszerű gráf bármely két, nem szomszédos csúcsának a fokszámösszege legalább n. Mutassuk meg, hogy a szóban forgó gráf összefüggő.

135. Igazoljuk, hogy ha az n csúcsú, egyszerű, G gráf egy G' részgráfja az alább felsorolt négy tulajdonság közül hárommal rendelkezik, akkor a negyedik tulajdonsággal is rendelkezik:

1. összefüggő;
2. körmentes;
3. csúcsainak száma n;
4. éleinek a száma $n-1$, $(n \in \mathbf{N}^+)$.

136. Bizonyítsuk be, hogy bármely legalább 2 csúcsú fagráfnak van elsőfokú csúcsa. Igaz-e, hogy legalább két elsőfokú csúcsa is van?

137. Mutassuk meg, hogy ha egy vegyület molekuláris modellje fagráf, akkor minden molekula tartalmaz legalább két egyvegyértékű atomot.

138. Bizonyítsuk be, hogy bármely, legalább 2 csúcsú fagráfban

legalább 2-vel több az elsőfokú csúcsok száma, mint a legalább harmadfokúaké.

139. Milyenek azok a fagráfok, amelyekben az elsőfokú csúcsok száma pontosan 2-vel nagyobb a legalább harmadfokú csúcsok számánál?

140. Bizonyítsuk be, hogy bármely összefüggő gráfnak van olyan fa részgráfja, amely a gráf minden csúcsát tartalmazza (faváza).

141. Mutassuk meg, hogy ha egy egyszerű, összefüggő gráfban van kör, akkor annak legalább három különböző faváza van.

142. Igazoljuk, hogy bármely fagráf két összefüggő részgráfjának közös éleiből és azok végpontjaiból álló gráf ugyancsak fa.

***143.** Bizonyítsuk be, hogy bármely fagráfnak van olyan csúcsa, amelyen az összes leghosszabb útja áthalad (van lefogó pontja).

144. Tudjuk, hogy egy egyszerű gráfnak minden csúcsa legfeljebb másodfokú. Jellemezzük a gráfot.

145. Bizonyítsuk be, hogy az n csúcsú és n élű, egyszerű, összefüggő gráfban $(n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 3)$ pontosan egy kör van.

146. Rajzoljuk meg negyedíziglen visszamenőleg a családfánkat piros vonalakkal, majd rajzoljuk meg kék vonalakkal a kapott gráf komplementerét. (Feltesszük, hogy rokonházasság nem volt.)

a) Hány csúcsa van a felrajzolt gráfnak?

b) Hány piros, illetve hány kék éle van a felrajzolt gráfnak?

c) Hány olyan kör van a felrajzolt piros-kék gráfban, amelynek egyetlen kék éle van, a többi éle piros?

d) Általánosítsuk a feladatot n-edíziglen felrajzolt $(n \in \mathbf{N}^+)$ családfára.

147. Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány csúcsa van az erdőnek?

148. Hány különböző, 5 csúcsú fa van, ha a csúcsait nem különböztetjük meg?

149. Rajzoljuk meg az összes lehetséges 5 csúcsú erdőt, ha a csúcsokat nem különböztetjük meg. Hány különböző „látványt" nyújthat az erdő?

150. Hány éle van egy 4 fából álló, 12 szögpontú erdőnek? Soroljuk fel, hogy hány szögpontja lehet egy-egy fának, ha mindegyiknek van legalább egy éle.

151. Hány olyan erdő van, amelynek 5 éle van és minden fájának van legalább egy éle? (A fáknak sem a sorrendjét, sem a szögpontjait nem különböztetjük meg.)

152. Rajzoljuk meg azokat a 6, illetve 7 szögpontú, összefüggő gráfokat, amelyben nincs kör.

153. Hány különböző erdőt képezhet négy, 6 szögpontú fa, ha a fák sorrendjétől eltekintünk és csúcsaikat sem különböztetjük meg?

154. Egy 20 szögpontú fának 18 elsőfokú pontja van.

a) Hányadfokú lehet a további két pont?

b) Hány élt tartalmaz a leghosszabb útja?

c) Hány megoldása van a feladatnak, ha a csúcsokat nem különböztetjük meg?

155. Hány olyan 8 csúcsú egyszerű gráf van, amelynek minden csúcsa másodfokú, ha a csúcsokat nem különböztetjük meg?

156. Egy társaságban mindenkinek két ismerőse van. A társaság egyik tagja megsúg egy hírt egyik ismerősének. Mindenkinek, aki a hírt megtudja, tovább kell adnia.

a) A hír elindítója visszahallja-e az általa elindított hírt?

b) Eljut-e a társaság minden tagjához a hír?

c) Módosulnak-e az *a)*, illetve *b)* kérdésre adott válaszok, ha a feladatban a „két ismerőse" helyett azt írjuk, hogy „legalább két ismerőse"?

157. Egy 5 csúcsú gráf csúcsait az 1; 2; . . .; 5 számokkal jelöltük, élei az 1; 2 és a 2; 3 csúcsokat kötik össze. Egészítsük ki az 1; 2; 3 csúcsok által feszített részgráfot az öt csúcs által meghatározott, teljes gráf favázává. Hány különböző módon tehetjük ezt meg?

158. Az 1; 2; . . .; 8 számokkal számozott, 8 csúcsú teljes gráf egy körmentes részgráfja legyen az a G' gráf, melynek csúcsai 1; 2; 3; 5; 6; 7; 8 csúcsok, élei pedig az (1; 2), (2; 3), (5; 6), (7; 8) élek. Egészítsük ki G'-t a teljes gráf favázává. Hány különböző módon tehetjük ezt meg?

159. Bizonyítsuk be, hogy összefüggő gráf minden körmentes részgráfja a gráf favázává bővíthető.

160. Bináris fák segítségével keressük meg a következő infix kifejezések prefix és postfix alakját.

a) $(a+b)c$; *b)* $ac+b$; *c)* $a+(b+c)d-e$; *d)* $ac+b(d+e)-f$.

161. A $P(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ polinom ($a,b,c,d,e \in \mathbf{R}$) helyettesítési értékét szokás a $P(x) = [((ax+b)x+c)x+d]x+e$ alakból (Horner-elrendezés) számítani. Írjuk fel $P(x)$-et, utóbbi alakjából kiindulva, prefix és postfix alakban, bináris fájának felhasználásával.

162. Bináris fa segítségével írjuk fel az $ax^2+bx+c = 0$ egyenlet (a, b, $c \in \mathbf{R}$) gyökeit prefix és postfix alakban.

163. Készítsünk bináris fát egy 4-résztvevős, körmérkőzéses ping-pongverseny abszolút győztesének a keresésére.

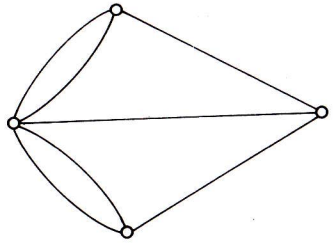
164. Írjuk le bináris fával azt az algoritmust, amely az x_1, x_2, x_3, x_4 valós számok közül kiválaszt egy legnagyobbat.

165. Írjuk le bináris fával azt az algoritmust, amely az x_1, x_2, x_3 valós számokat nemcsökkenő sorozatba rendezni.

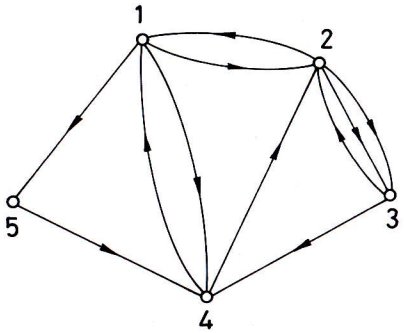
166. 6 szál gyufa van az asztalon. *A* és *B* felváltva vesz el belőle legalább 1-et, de legfeljebb 3-at. Az nyer, aki az utolsó gyufát veszi el. Rajzoljuk meg a játék fáját, és döntsük el, hogy a kezdőnek vagy a másiknak van nyerő stratégiája. Oldjuk meg a feladatot 6 helyett 7 gyufaszál esetére is.

5. Gráf éleinek és csúcsainak bejárása: Euler-vonal, Hamilton-út és Hamilton-kör

167. Legalább hány hidat kellene építeni a „königsbergi hidak" mellé, hogy lehessen olyan körsétát tenni, amelynek során minden hídon pontosan egyszer haladunk át (*33. ábra*)?



33. ábra



34. ábra

168. Egy éjjeliőrnek az 1; 2; 3; 4; 5 számokkal jelölt pontokat kell ellenőriznie. Egy alkalommal a szállásáról indulva a *34. ábrán* látható utat járta be a nyilakkal jelzett irányban. Hol van a szállása, és hol van most?

169. Bizonyítsuk be, hogy ha a G gráfnak minden csúcsa páros fokszámú, és A_0 nem izolált pontja G-nek, akkor a G tartalmaz A_0-on áthaladó kört.

170. Rajzoljunk a síkban egy 7 csúcsú, teljes gráfot a ceruza felemelése nélkül.

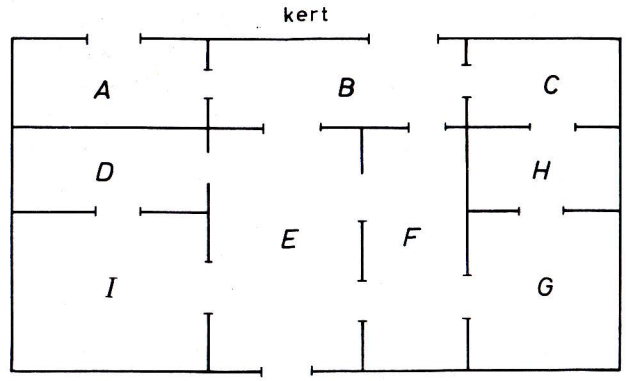
171. Igazoljuk, hogy ha egy nem üres gráf minden csúcsának a fokszáma páros, akkor kijelölhetők a gráfban körök úgy, hogy a gráf minden éle a kijelölt körök közül pontosan egyben szerepeljen.

172. Bizonyítsuk be, hogy ha a G gráf összefüggő és minden csúcsának a fokszáma páros, akkor van olyan zárt vonala, amely a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza (Euler-vonal). Fogalmazzuk meg a tétel megfordítását és bizonyítsuk be, feltéve, hogy G nem tartalmaz izolált pontot.

173. Mutassuk meg, hogy ha G összefüggő gráf, és pontosan két páratlan fokú csúcsa van, akkor van olyan nyitott vonala, amely a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza. (Nyitott Euler-vonal.) Fogalmazzuk meg a tétel megfordítását és bizonyítsuk be, feltéve, hogy G nem tartalmaz izolált pontot.

174. Kovács úr házának az alaprajzát a *35. ábra* mutatja. Kovács úr elégedetten nézegeti a tapétát a falon. Éppen most fejezte be szokásos ellenőrző körútját, amelynek során minden ajtón pontosan egyszer haladt át. Hol van most?

175. A dominólapokra a 0; 1; . . .; 8 számokból képezett számpárok vannak felírva, és minden lehetséges számpár csak egy lapon szerepel. Hány lap van egy készletben?

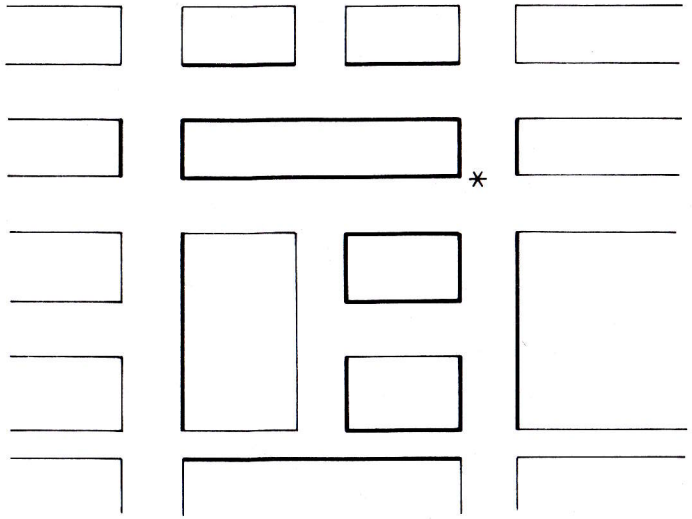


35. ábra

176. A 0-tól 8-ig számozott dominókészlet minden lapja elhelyezhető-e, a kirakás szabályai szerint, egyetlen „körben"? („Nyaklánccá" lehet-e „fűzni" a dominókészlet minden tagját, a szomszédos lapokra előírt szabályok szerint?)

177. A dominókészlet lapjait jellemezzük a koordinátasík bizonyos rácspontjaival, és annak alapján is adjunk algoritmust a dominókészlet lapjainak egyetlen körbe való beillesztésére.

178. A *36. ábrán* egy városrész térképe látható. Az újságkihordónak a vastag vonallal megjelölt járdákon kell végighaladnia. Készít-



36. ábra

sünk számára leggazdaságosabb bejárási tervet, ha a „*”-gal megjelölt helyről kell indulnia és oda is kell visszatérnie. (Az útkereszteződésekben az úttesten való áthaladást hagyjuk figyelmen kívül.)

179. Igazoljuk, hogy ha egy gráf minden csúcsa negyedfokú, akkor élei megszínezhetők pl. pirossal és kékkel (minden él egy és csak egy színnel) úgy, hogy minden csúcshoz két piros és két kék él illeszkedjen.

180. Igaz-e, hogy ha egy összefüggő gráf minden csúcsa negyedfokú, akkor a gráfban két, közös él nélküli Euler-vonal létezik?

181. A G gráfot úgy konstruálták, hogy egy m csúcsú teljes gráfból elhagytuk az XY élt, az n csúcsú teljes gráfból pedig az UV élt, majd meghúztuk az UX és VY éleket ($m,n \in \mathbf{N}^+$).
m és n milyen értékei esetén lesz G-ben
a) Euler-vonal?
b) csak nyitott Euler-vonal?

182. Lehet-e a königsbergi hidakon olyan körsétát tenni, hogy minden hídon pontosan kétszer haladjunk át, egyszer az egyik, egyszer a másik irányban?
A feladat általánosításaként bizonyítsuk be, hogy bármely összefüggő gráf éleit be lehet járni úgy, hogy minden élen pontosan kétszer haladjunk át, egyszer az egyik, egyszer a másik irányban, és a végén visszatérjünk abba a pontba, amelyikből indultunk.

183. Egy 3 egységnyi élű kockát 6 síkkal 27 egységkockára osztottunk fel. A szomszédos egységkockák közös lapjain egy-egy ajtót vágunk. Lehet-e olyan körsétát tenni, amelynek során minden ajtón pontosan egyszer haladunk át, s a szomszédos egységkockák között csak ajtón közlekedünk?

184. Egy kocka minden lapjára mint alaplapra helyezzünk egy gúlát. Az így kapott poliéder csúcsai és élei értelemszerűen egy gráfot határoznak meg. Van-e ennek a gráfnak Euler-vonala, illetve Hamilton-köre?

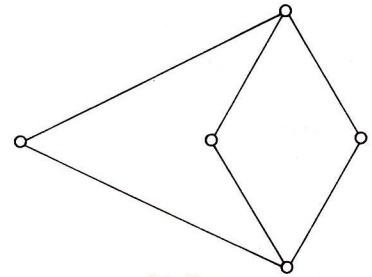
185. Oldjuk meg a **46.** feladatot az Euler-vonal segítségével.

186. Adjunk meg olyan 5 csúcsú gráfot, melynek minden csúcsa legalább másodfokú, de nincs Hamilton-köre.

187. Egy 7 tagú társaságban mindenkinek van legalább 4 ismerőse. Leültethető-e közülük 6 egy kerek asztal köré úgy, hogy mindegyiknek mindkét szomszédja ismerőse legyen?

188. Igaz-e, hogy ha egy 7 tagú társaságban mindenkinek van legalább 4 ismerőse, akkor közülük bármelyik 6 leültethető kerek asztal köré úgy, hogy mindegyiknek mindkét szomszédja ismerőse legyen?

189. A *37. ábrán* egy 5 csúcsú gráfot adtunk meg, amelynek nincs Hamilton-köre. Lesz-e Hamilton-köre a gráfnak, ha a komplementerének:
a) egy tetszés szerinti élét hozzácsatoljuk;
b) két tetszés szerinti élét hozzácsatoljuk?



37. ábra

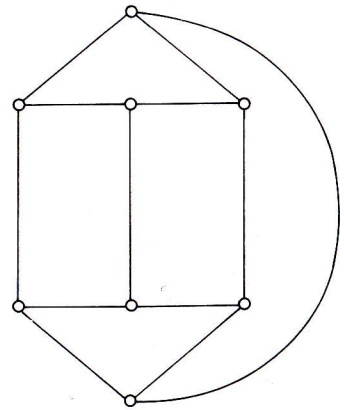
190. Igaz-e, hogy bármely 5 csúcsú és 8 élű gráfban van Hamilton-kör?

191. Legalább hány élt kell csatolni ahhoz az 5 csúcsú gráfhoz – a saját komplementeréből –, amelynek 4 éle van, hogy biztosan legyen benne Hamilton-kör?

192. Adjunk meg olyan 6 csúcsú és 11 élű, egyszerű gráfot, amelynek nincs Hamilton-köre.

193. Van-e Hamilton-köre bármely 6 csúcsú és 12 élű, egyszerű gráfnak?

194. Van-e Hamilton-köre a *38. ábrán* megadott gráfnak?



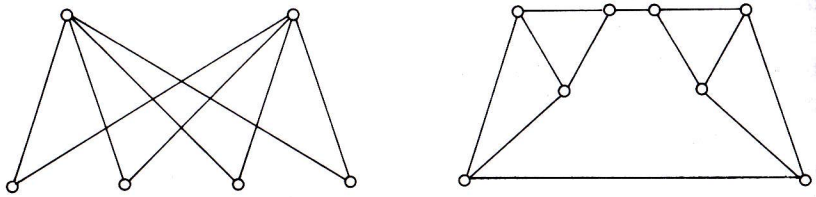
38. ábra

195. Jelentsék az előző feladatban megadott gráf élei egy körmérkőzéses verseny eddig lejátszott mérkőzéseit. Le lehetett-e bonyolítani a mérkőzéseket három fordulóban úgy, hogy az egyes fordulók mérkőzéseit egy időben kellett lejátszani?

196. Hány Hamilton-köre van a tetraéder, illetve a hexaéder csúcsai és élei által meghatározott egyszerű gráfnak?

197. Van-e Hamilton-köre az oktaéder, a dodekaéder, illetve az ikozaéder csúcsai, valamint élei által meghatározott egyszerű gráfnak?

198. Hány Hamilton-körük van a *39. ábrán* megadott *a)*, illetve *b)* gráfoknak?



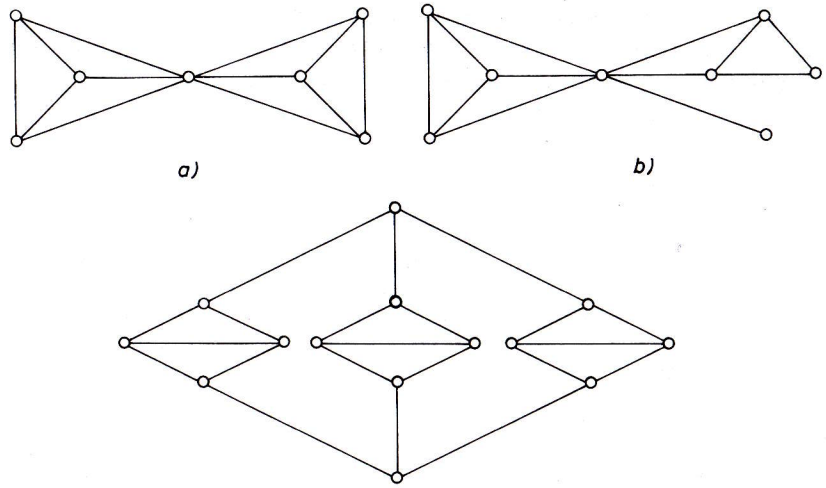
39. ábra

199. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő gráf egy K körének bármely élét törölve a gráf egy leghosszabb útját nyerjük, akkor K Hamilton-köre a gráfnak.

200. Bizonyítsuk be, hogy ha az összefüggő G gráfból k számú pontjának törlése révén k-nál több komponensből álló gráfot kapunk, akkor G-nek nincs Hamilton-köre; ha pedig $k+1$-nél is több komponensből álló gráfot kapunk, akkor G-nek nincs Hamilton-útja sem.

201. Van-e Hamilton-körük, illetve Hamilton-útjuk a *40. ábrán* megadott *a)*, *b)*, *c)* gráfoknak?

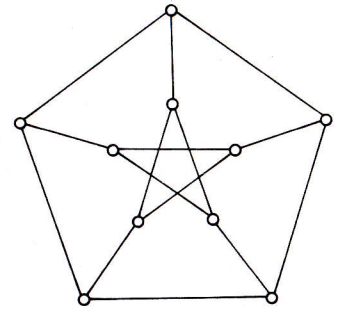
202. Be lehet-e járni a 4×4-es sakktáblát a huszárral (a sakk szabályai szerint) úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépjünk, és a végén visszatérjünk arra a mezőre, amelyikről indultunk? Elvégezhető-e a bejárás, ha nem kell visszatérnünk arra a mezőre, amelyről indultunk?



40. ábra

203. Bizonyítsuk be, hogy ha $n(\in \mathbf{N})$ páratlan, akkor az $n \times n$-es sakktábla nem járható be huszárral úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépjünk, és a végén visszatérjünk arra mezőre, amelyről indultunk.

***204.** Határozzuk meg a *41. ábrán* megadott gráfban (Petersen-gráf) található körök hosszának a minimumát és maximumát. Ábrázolhatja-e a szóban forgó gráf egy 10 résztvevős, körmérkőzéses verseny első három fordulóját, ha az egyes fordulók mérkőzéseit egy időben kell lejátszani?



41. ábra

205. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n csúcsú ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 2$), egyszerű gráf egy leghosszabb útja két végpontjának fokszámösszege legalább n, akkor van a gráf leghosszabb útjai között olyan, amelynek végpontjai szomszédosak.

206. Bizonyítsuk be, hogy ha az n csúcsú ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 3$), egyszerű gráf bármely két, nem szomszédos csúcsának fokszámösszege legalább n, akkor van a gráfnak Hamilton-köre.

***207.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy n csúcsú ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 3$), egyszerű gráfnak legalább $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ éle van, akkor van Hamilton-köre.

***208.** Bizonyítsuk be, hogy ha az n csúcsú ($n \geqq 3$), egyszerű gráf minden csúcsának a foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor van a gráfnak Hamilton-köre. (Lásd a **199.** és **205.** feladatot!)

209. Legyen $\vec{G}$ egy tetszőleges teljes gráf éleinek tetszés szerinti irányításával nyert irányított gráf. Mutassuk meg, hogy $\vec{G}$-ben van irányított Hamilton-út.

210. Bizonyítsuk be, hogy ha egy legalább 2 szögpontú teljes gráfnak egy élét töröljük, akkor az így kapott gráfnak van olyan irányítása (minden élt egy és csak egy módon irányítunk), amely nem tartalmaz (irányított) Hamilton-utat.

211. Igazoljuk, hogy ha egy élt is tartalmazó, irányított gráf minden pontjába annyi él fut be, mint amennyi abból kifut, akkor kijelölhetők a gráfban irányított körök úgy, hogy a gráf minden éle e körök közül pontosan egyben szerepeljen.

212. Igazoljuk, hogy ha a G összefüggő gráf élei úgy vannak irányítva, hogy bármely csúcsába ugyanannyi él fut be, amennyi onnan ki, akkor az így nyert irányított gráfnak van olyan irányított zárt vonala, amely a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza. (Irányított Euler-vonal.)

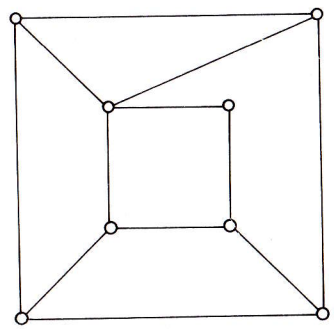
213. Egy irányított gráfot erősen összefüggőnek nevezünk, ha bármely csúcsából bármely másik csúcsába vezet irányított út. Igaz-e, hogy erősen összefüggő gráf bármely irányított körének egy tetszőleges élét elhagyva, erősen összefüggő gráf marad vissza?

214. Legyen $\vec{G}$ a G összefüggő gráf éleinek tetszőleges irányítása révén kapott irányított gráf, $\vec{G}'$ pedig $\vec{G}$-nek olyan részgráfja, amely nem tartalmazza $\vec{G}$-nek minden élét. Bizonyítsuk be, hogy van $\vec{G}$-nek $\vec{G}'$-be nem tartozó, olyan irányított éle, melynek kezdőpontja vagy végpontja $\vec{G}'$-ben van.

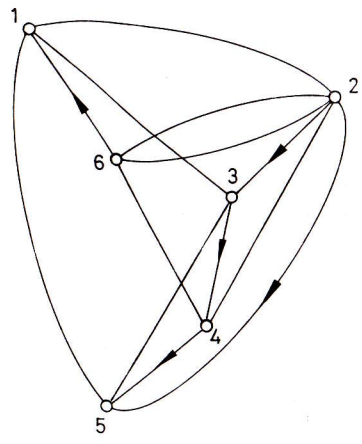
215. Legyen $\vec{G}$ erősen összefüggő gráf, $\vec{G}'$ pedig egy olyan részgráfja, amely nem tartalmazza $\vec{G}$ minden csúcsát. Bizonyítsuk be, hogy akkor van $\vec{G}$-nek olyan, $\vec{G}'$-be nem tartozó éle, amelynek kezdőpontja $\vec{G}'$-ben van, de végpontja nem, és van olyan is, amelynek a végpontja van $\vec{G}'$-ben, de a kezdőpontja nem.

216. Bizonyítsuk be, hogy ha a G összefüggő gráfnak nincs olyan éle, amelyet elhagyva az összefüggőség megszűnne (hídja), akkor G éleit lehet úgy irányítani (mindegyiket csak egyik irányban), hogy a kapott, irányított gráf erősen összefüggő legyen.

217. Irányítsuk a *42. ábrán* megadott gráf éleit (csak egyik irányban) úgy, hogy a gráf erősen összefüggő legyen.



42. ábra



43. ábra

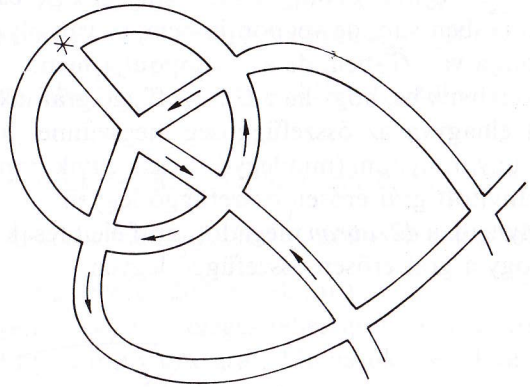
218. A *43. ábrán* látható gráf néhány élét már irányítottuk. Lehet-e a további éleket is – mindegyiket csak az egyik irányban – irányítani úgy, hogy a kapott irányított gráf:

a) tartalmazzon irányított Euler-vonalat;

b) erősen összefüggő legyen?

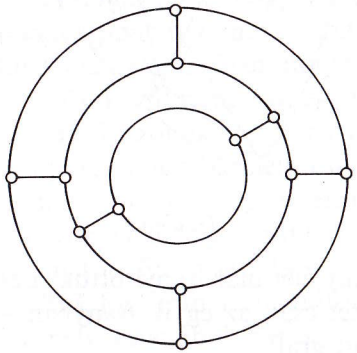
219. A *44. ábrán* látható városrész utcáit egy locsolóautónak végig kell locsolnia. Az egyirányú utcákon csak egyszer kell végighaladnia, a kétirányúakon viszont kétszer. A locsolóautónak is be kell tartania a közlekedési szabályokat. A „*”-gal jelölt helyről kell

indulnia és oda is kell visszatérnie. Tervezzük meg a bejárás gazdaságos útvonalát.



44. ábra

220. Egyirányúsítsuk az előző feladatban szereplő, kétirányú utcákat is úgy, hogy bármelyik útkereszteződésből bármelyik másikba el lehessen jutni a közlekedési szabályok megsértése nélkül.



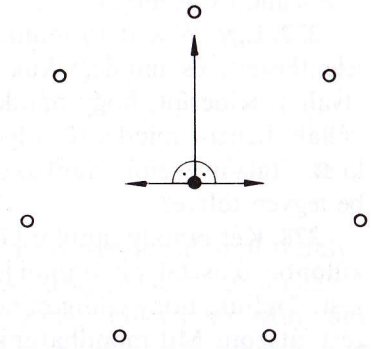
45. ábra

221. Egyirányúsítsuk a *45. ábrán* látható „térképen" az utakat úgy, hogy minden útkereszteződésből minden másikba el lehessen jutni a közlekedési szabályok megsértése nélkül. Vannak-e olyan utak, amelyeket tetszésünk szerint irányíthatunk?

222. Legyen $\vec{G}$ egy legalább 3 szögpontú, teljes gráf irányítása során nyert irányított gráf. Bizonyítsuk be, hogy $\vec{G}$ akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha van irányított Hamilton-köre.

6. Páros gráfok, teljes részgráfok

223. A *46. ábrán* egy 7 oldalú, szabályos sokszög középpontja és csúcsai vannak feltüntetve. A középpont körül forgatni tudjuk (a síkban) a merev, *T* betű alakú „mutatót". A leírt szerkezet segítségével szervezzük meg 8 csapat körmérkőzéses versenyének a párosítását.

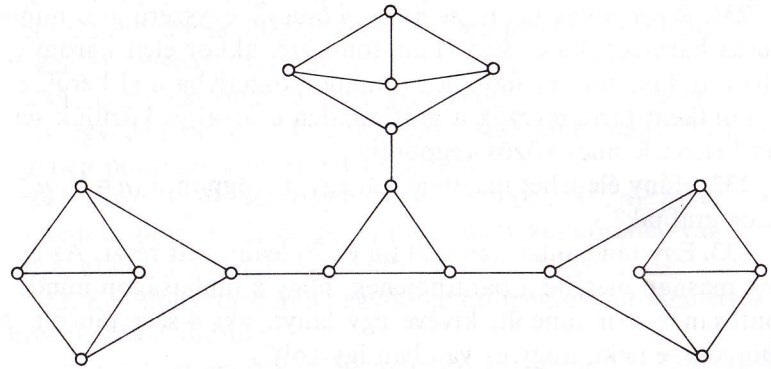


46. ábra

224. Az előző feladatban leírt szerkezettel hogyan lehet megszervezni körmérkőzéses verseny párosítását páratlan számú csapat esetén? Vissza lehet-e vezetni a párosítás megszervezését a páros számú csapat esetén kapott megoldásra?

225. Szervezzük meg 6, illetve 7 csapat körmérkőzéses versenyét 5, illetve 7, egy időben lejátszandó fordulóban.

226. A *47. ábrán* egy 18 csúcsú gráfot adtunk meg.



47. ábra

a) Van-e olyan részgráfja, amely egy 18 résztvevős, körmérkőzéses verseny egy fordulóját rögzítheti?
b) Rögzítheti-e a gráf az *a)*-ban leírt verseny három, egy időben lejátszandó fordulóját?

227. Egy vállalat 10 munkakörbe keres dolgozókat. 10 dolgozó jelentkezett, és mindegyikük két munkakört jelölt meg, amelyet elvállal. Kiderült, hogy minden munkakört pontosan két dolgozó vállalt. Lehet-e mind a 10 dolgozót foglalkoztatni úgy, hogy mindenki az általa megjelölt munkakörben dolgozzon és minden munkakör be legyen töltve?

228. Két osztály tanulói között sakkversenyt rendeznek. Csak a különböző osztályok tanulói játszanak egymás ellen egy-egy mérkőzést. Tudjuk, hogy eddig minden tanuló pontosan $k(\in \mathbf{N}^+)$ mérkőzést játszott. Mit mondhatunk az osztályok létszámáról?

229. 5 fiúból és 5 leányból álló társaságban minden fiúnak 4 leányismerőse, és minden leánynak 4 fiúismerőse van. Tudnak-e egyszerre táncolni párosával úgy, hogy mindenki ismerősével táncoljon?

230. Egy folyóiratban kitűzött 8 feladat mindegyikére 2-2 közlésre alkalmas megoldás érkezik. A szerkesztő észreveszi, hogy a 16 megoldás 8 megoldótól származik, mégpedig úgy, hogy mindegyiküknek 2-2 megoldása szerepel a kiválasztottak között. Közölhet-e a szerkesztő minden feladatra egy-egy megoldást úgy, hogy minden megoldónak is közölje egy megoldását?

231. Bizonyítsuk be, hogy ha a $2n$ csúcsú, egyszerű gráf minden csúcsa harmadfokú és van Hamilton-köre, akkor éleit három osztályba tudjuk sorolni úgy, hogy minden osztályba n él kerül, ezek végpontként tartalmazzák a gráf minden csúcsát és közülük semelyik kettőnek sincs közös végpontja.

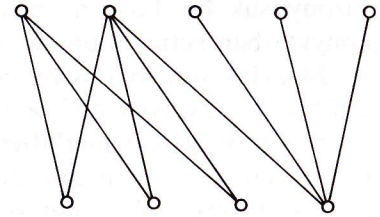
232. Hány éle lehet maximálisan egy n szögpontú ($n \in \mathbf{N}$, $n \geqq 2$), páros gráfnak?

233. Egy táncmulatságon 20 fiú és 20 leány vett részt. Az egyik lány másnap mesélte a barátnőjének, hogy a mulatságon mindenki pontosan 8-szor táncolt, kivéve egy lányt, aki 4-szer táncolt. Mi elhinnénk-e neki, hogy ez valóban így volt?

234. Van-e olyan páros gráf, amely nem tartalmaz izolált pontot

és egy kivétellel minden pont foka egyenlő, a kivételes pont foka pedig kevesebb a többi fokszámánál?

235. Van-e 4 független éle (közös végpont nélküli éle) a *48. ábrán* megadott gráfnak?



48. ábra

236. Egy városrészben, az egyik utcakereszteződésből indulva, olyan körsétát tettünk, amelynek során páratlan számú utcán haladtunk végig (minden utca két kereszteződést köt össze). Mutassuk meg, hogy közben bejártunk egy páratlan számú utcából álló kört is. Fogalmazzuk meg az állítást gráfokra vonatkozó tétel formájában.

237. Tudjuk, hogy egy gráfban nincs páratlan hosszúságú kör. Mutassuk meg, hogy akkor csúcsainak a halmazát két diszjunkt részhalmazra lehet bontani úgy, hogy az azonos részhalmazba tartozó csúcsok a gráfban nem szomszédosak.

238. Bizonyítsuk be, hogy az összefüggő páros gráfok feszítő csúcshalmazai – sorrendtől eltekintve – egyértelműen meghatározottak.

239. Mutassuk meg, hogy van olyan 6 csúcsú, egyszerű gráf, amely nem tartalmaz háromszöget, a komplementere pedig pontosan két háromszöget tartalmaz.

240. Igazoljuk, hogy ha egy gráf nem tartalmaz háromszöget, akkor egyetlen pontjának a fokszáma sem lehet nagyobb a gráf független pontjainak maximális számánál.

***241.** Bizonyítsuk be, hogy ha az n pontú ($n \in \mathbf{N}^+$, $n \geqq 5$), egyszerű gráf nem tartalmaz háromszöget és bármely két körének van közös pontja, akkor a gráfnak legfeljebb $3n-9$ éle lehet.

242. Egy könyvtárban az egyik napon megfordult személyekről a következőket tudjuk:
a) bármely 8 látogató között található két olyan személy, akik a könyvtárban találkoztak egymással;

b) két olyan személy nem találkozott egymással a könyvtárban, akiknek mindegyike találkozott egy harmadikkal is.
Bizonyítsuk be, hogy azon a napon senki sem találkozhatott a könyvtárban hétnél több személlyel.

243. Hat iskolából összesen 34 tanulót kell behívni egy sakkversenyre. A versenyen csak a különböző iskolák tanulói játszanak egymás ellen egy-egy mérkőzést. Hány tanulót kell behívni az egyes iskolákból, hogy a lehető legtöbb mérkőzésre kerüljön sor?

244. 38 sakkozót 5 csoportra kell osztani úgy, hogy az egyes csoportokon belüli körmérkőzéses versenyek során lejátszandó mérkőzések száma (együttesen) minimális legyen. Milyen létszámú csoportokba osztanánk a sakkozókat?

245. Fiatal, tehetséges bokszolókat toboroznak. Egy alkalommal 4 súlycsoportból összesen 15-en jelentkeztek. Az egyes súlycsoportokon belül körmérkőzést rendeznek. Minimálisan hány mérkőzésre kell számítani?

246. Maximálisan hány élük lehet az n csúcspontú és k komponensű ($n,k \in \mathbf{N}^+$, $k \leqq n$), egyszerű gráfoknak?

247. Egy 5 csúcsú gráfban a független pontok maximális száma kisebb 3-nál. Mutassuk meg, hogy a gráfnak van legalább 4 éle.

248. Legfeljebb hány éle lehet egy n szögpontú ($n \in \mathbf{N}^+$), nem összefüggő, egyszerű gráfnak?

249. Legfeljebb hány éle lehet egy n szögpontú, egyszerű gráfnak ($n \in \mathbf{N}^+$), ha nincs benne páratlan hosszúságú kör?

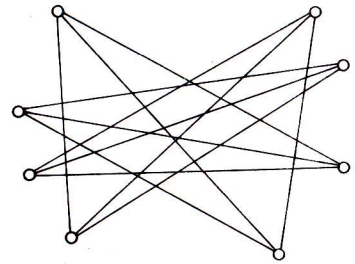
250. Maximálisan hány éle lehet egy n szögpontú, egyszerű gráfnak, ha:
a) nem tartalmaz 2 hosszúságú utat;
b) nem tartalmaz 3 hosszúságú utat?

***251.** Bizonyítsuk be, hogy bármely 6 szögpontú gráfban és a komplementerében együtt legalább két háromszög van.

252. Mekkora lehet maximálisan egy egyszerű gráf csúcspontjainak a száma, ha sem a gráf, sem a komplementere nem tartalmaz háromszöget?

253. Legyen G egy n csúcsú, egyszerű gráf, s jelöljük $\bar{G}$-sal a komplementerét. Adjunk meg továbbá két pozitív egész számot: k, l. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan k-tól és l-től függő $f(k,l)$ küszöbszám, hogy ha $n \geqq f(k, l)$, akkor vagy van G-ben k csúcsú teljes gráf, vagy van $\bar{G}$-ban l csúcsú teljes gráf.

254. A *49. ábrán* látható gráf felhasználásával bizonyítsuk be, hogy $f(3, 4) \geqq 9$.



49. ábra

255. Mutassuk meg, hogy $f(3, 4) = 9$.

256. Igazoljuk, hogy
a) $f(3, 4) < f(2, 4) + f(3, 3)$;
b) $f(k-1, l) + f(k, l-1) \geqq f(k, l)$.

257. Egy egységnyi élű kocka csúcsai közül kössük össze azokat, amelyek távolsága $\sqrt{2}$. Van-e az így kapott gráfban, illetve a komplementerében háromszög? Van-e az így kapott gráfban, illetve a komplementerében teljes négyszög?

258. Igazoljuk, hogy ha S a G egyszerű gráf maximális független ponthalmaza, akkor G bármely X pontjára igaz, hogy vagy X, vagy X-nek valamely szomszédja S-ben van.

259. Bizonyítsuk be, hogy a G gráf bármely pontjához van olyan maximális független ponthalmaz, amely vagy tartalmazza a szóban forgó pontot, vagy tartalmazza annak legalább két szomszédját.

***260.** Mutassuk meg, hogy ha egy összefüggő, egyszerű gráf csúcsainak a száma legalább $2k + 1$ és minden csúcsa legalább k-adfokú ($k \in \mathbf{N}^+$), akkor van a gráfban $2k$ hosszúságú út.

7. Poliéderek, síkgráfok, Euler-formula

261. Bizonyítsuk be konvex poliéderekre a következő állításokat:
1. Páros azoknak a csúcsoknak a száma, amelyekhez páratlan számú él csatlakozik.
2. A páratlan oldalú lapok száma páros.
3. Van legalább két lap, amelyet ugyanannyi él határol.

262. Bizonyítsuk be, hogy bármely konvex poliédernek van háromszög lapja, vagy van olyan csúcsa, amelyből három él indul ki.

***263.** Jelöljük egy konvex poliéder lapjainak a számát l-lel, csúcsainak számát c-vel, éleinek számát e-vel. Bizonyítsuk be, hogy

$$c+l = e+2.$$

264. Két gráfról tudjuk, hogy izomorfok és síkba rajzolhatók. Tetszés szerinti módon síkba rajzolva őket, azonos számú részre osztják-e a síkot?

265. Síkba rajzolható-e az a gráf, amelyet úgy kapunk, hogy a teljes 5 csúcsú gráfból egy élt elhagyunk?

266. Bizonyítsuk be, hogy az 5 szögpontú teljes gráf nem rajzolható síkba.

267. Sík terepen három ház és három kút van. Minden házból minden kúthoz egy-egy utat szeretnénk építeni úgy, hogy az utak ne keresztezzék egymást. Lehetséges ez?

268. Ki lehet-e színezni az előző feladatban szereplő gráf éleit három színnel úgy, hogy három-három él legyen azonos színű és egyik csúcshoz se csatlakozzon két azonos színű él?

269. Maximálisan hány éle lehet egy 7 szögpontú, síkba rajzolható gráfnak? Rajzoljunk meg egy ilyen, maximális élszámú gráfot.

270. Egy sík terepen 20 sátor van. A sátrakat utakkal akarják összekötni úgy, hogy az utak ne keresztezzék egymást. Maximálisan hány út építhető ki?

271. Bizonyítsuk be, hogy ha az n csúcsú gráf síkba rajzolható, akkor maximálisan $3n-6$ éle lehet.

272. Igaz-e, hogy ha az n csúcsú egyszerű gráf éleinek a száma legfeljebb $3n-6$, akkor a gráf síkba rajzolható?

273. Síkba rajzolható-e az a gráf, amelynek csúcsai egy kocka csúcsai és a kocka éleinek felezőpontjai, éleit pedig úgy kapjuk, hogy a kocka csúcsait összekötjük a csúcshoz nem illeszkedő élek felezőpontjaival?
Síkba rajzolható-e a gráf komplementere?

274. Adott a síkon 6 pont. Össze lehet-e kötni mindegyiket másik néggyel úgy, hogy az összekötő (esetleg görbe) vonalak ne messék egymást?

275. Bizonyítsuk be, hogy az előző feladat síkba rajzolható gráfjának minden „országát" (tartományát) három él határolja.

***276.** Igazoljuk, hogy az olyan 7 csúcsú gráf, amelynek minden csúcsa negyedfokú, nem síkgráf.

277. Létezik-e 8 csúcsú és 18, illetve 19 élű, síkba rajzolható gráf?

278. Tudjuk, hogy egy térképen n csomópont van. Hány ország lehet rajta maximálisan?

279. Bizonyítsuk be, hogy bármely konvex poliéder esetén érvényesek az

$$a)\ \frac{e}{3} < l \leqq \frac{2}{3}e \quad \text{és} \quad b)\ \frac{e}{3} < c \leqq \frac{2}{3}e$$

egyenlőtlenségek, ahol e a konvex poliéder éleinek, l a lapjainak, c pedig a csúcsainak a száma.

280. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan konvex poliéder, amelynek 7 éle van.

281. Jelentsen e egy tetszés szerinti, 7-nél nagyobb egész számot. Igaz-e, hogy ha $c \geqq 4$, $l \geqq 4$, $c,l \in \mathbf{N}^+$, továbbá

$$c+l = e+2,$$

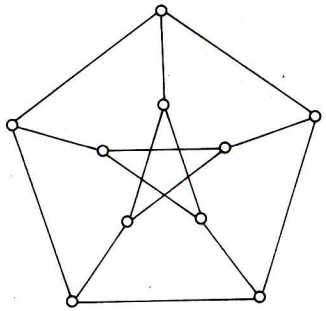
akkor létezik c szögpontú, l lapú és e élű poliéder?

282. Bizonyítsuk be, hogy bármely konvex poliédernek van legfeljebb ötoldalú lapja.

283. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan konvex poliéder, melynek minden csúcsába 5-nél több él futna be.

***284.** Síkba rajzolható-e az *50. ábrán* látható (ún. Petersen-féle) gráf?

285. Keressünk az *50. ábrán* adott gráfnak olyan részgráfját, amely a három ház–három kút gráffal izomorf gráffá húzható



50. ábra

össze. Mit mondhatunk ennek alapján a Petersen-féle gráf síkba rajzolhatóságáról?
(Egy gráf összehúzásán a következő átalakítás véges számú alkalmazását értjük: A gráf egy másodfokú csúcsát töröljük és a belőle kiinduló élek addig össze nem kötött végpontjait éllel összekötjük.)

286. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan térkép, amelyen 5 ország páronként szomszédos lenne.

287. Bizonyítsuk be, hogy ha az n szögpontú gráfot ($n \geqq 5$) síkon ábrázoljuk, akkor az élek nem szögpontbeli metszéspontjainak a száma legalább $\frac{\binom{n}{5}}{n-4}$. (A metszéspontokat többszörösségükkel együtt kell számolni.)

288. Jelentsen e egy tetszés szerinti, 7-től különböző, 5-nél nagyobb egész számot. Mutassuk meg, hogy létezik olyan poliéder, amelynek éppen e éle van.

289. Legyen a G gráf egy legalább 11 csúcsú konvex poliéder élhálózata. Bizonyítsuk be, hogy G komplementere nem síkgráf.

290. Az Euler-formula felhasználásával bizonyítsuk be, hogy pontosan öt szabályos, konvex poliéder létezhet. Mindegyikkel kapcsolatban határozzuk meg a lapok, a csúcsok és az élek számát, valamint a lapok oldalainak és az egy csúcsból kiinduló éleknek a számát.

291. Döntsük el, hogy melyik szabályos poliéder élhálózatában van:

a) Euler-vonal; *b)* nyitott Euler-vonal;
c) Hamilton-kör; *d)* Hamilton-vonal.

292. Készítsük el a szabályos poliéderek élhálózatának, mint síkgráfnak a duális gráfját. Milyen kapcsolatokat fedezünk fel köztük?

8. Színezési feladatok

293. Húzzunk a síkon egyeneseket. Igazoljuk, hogy a kapott síkrészek két színnel kiszínezhetők úgy, hogy két síkrész különböző színű legyen, ha van közös határoló vonaluk.

294. Bizonyítsuk be, hogy ha a síkra tetszés szerint köröket rajzolunk, a kapott síkrészek két színnel kiszínezhetők.

***295.** Bizonyítsuk be, hogy egy térkép akkor és csak akkor színezhető ki két színnel, ha minden csomópontjában páros számú határvonal találkozik.

296. Egy térkép bármely csomópontjában páros számú határvonal találkozik. Egy utazó bejárt néhány országot és visszatért abba az országba, amelyből indult. Bizonyítsuk be, hogy páros számú határátkelést végzett. (Csomópontban nincs határátkelőhely.)

297. A **295**. feladat segítségével bizonyítsuk be, hogy az a 7 csúcsú gráf, melynek minden csúcsa negyedfokú, nem síkgráf.

298. Mutassuk meg, hogy bármely fagráf csúcsai legfeljebb két színnel kiszínezhetők úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek.

***299.** Színezzük ki a 6 csúcsú teljes gráf éleit két színnel. Mutassuk meg, hogy legalább két olyan háromszög van, amelynek oldalai azonos színűek (egy-egy háromszögön belül).

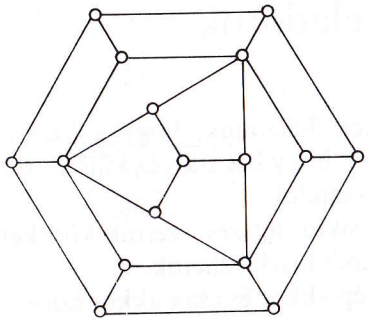
300. Adott a síkban egy tízszög. Tekintsük azt a gráfot, amelynek csúcsai a tízszög csúcsai, élei a tízszög élei és a tízszög minden második csúcsát összekötő vonal.

a) Igazoljuk, hogy a gráf síkgráf.

b) Határozzuk meg, hogy a gráf mint síkgráf által létrehozott térkép minimálisan hány színnel színezhető ki.

301. Ki lehet-e színezni az előző feladatban adott gráf éleit 4 színnel úgy, hogy 5–5 él legyen azonos színű, és azonos csúcsra illeszkedő élek mind különböző színűek legyenek?

302. Igaz-e, hogy ha egy térkép két színnel kiszínezhető, akkor a duálja páros gráf?



51. ábra

303. Színezzük ki az *51. ábrán* adott gráf csúcsait úgy, hogy bármely él két végpontja különböző színű legyen. Minimálisan hány színre van szükségünk? Van-e a gráfnak Hamilton-köre vagy Hamilton-vonala?

***304.** Adott a síkon egy sokszög. Daraboljuk fel a belsejét háromszögekre úgy, hogy két háromszögnek vagy ne legyen közös pontja, vagy csak egy csúcsuk, vagy csak egy oldaluk legyen közös. Mutassuk meg, hogy ha a háromszögek csúcsait meg lehet számozni a 0, 1, 2 számokkal úgy, hogy bármely oldal két végpontja különböző számot kapjon, akkor a kapott háromszögek két színnel helyesen színezhetők.

305. Bizonyítsuk be, a **304.** feladatban szereplő tétel megfordítását.

***306.** Tekintsünk egy olyan térképet, amelynek minden csomópontjából három határvonal indul ki. Mutassuk meg, hogy a térkép akkor és csak akkor színezhető helyesen három színnel, ha minden országot páros számú határvonal vesz körül.

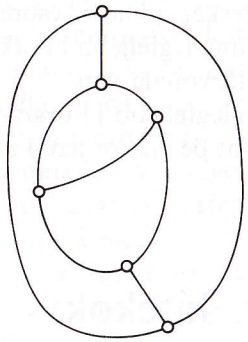
***307.** Helyezzünk a síkra köröket és mindegyikbe egy húrt úgy, hogy két különböző kör húrjainak legfeljebb egy közös pontja legyen. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott térkép három színnel helyesen színezhető.

308. Minimálisan hány színnel lehet kiszínezni a szabályos testek lapjait, illetve csúcsait úgy, hogy ne legyen két szomszédos lap, illetve szomszédos csúcs azonos színű?

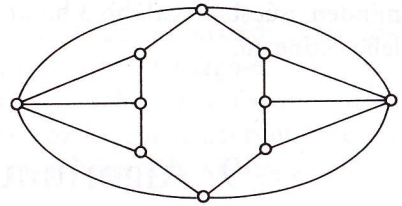
309. Legalább hány színre van szükség az *52. ábrán* lévő térkép színezéséhez?

310. Legalább hány szín szükséges az *53. ábrán* lévő térkép színezéséhez?

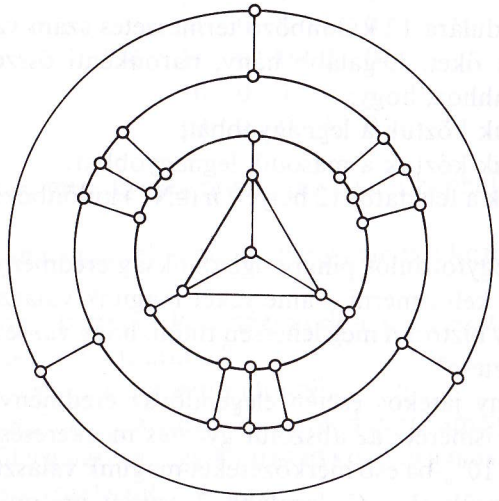
311. Legalább hány színnel lehet kiszínezni az *54. ábrán* adott térképet?



52. ábra



53. ábra



54. ábra

312. Minimálisan hány színnel lehet kiszínezni az egyes szabályos testek éleit úgy, hogy az egy csúcshoz illeszkedő élek mind különböző színűek legyenek?

313. Bizonyítsuk be, hogy minden térkép legfeljebb 6 színnel helyesen kiszínezhető.

314. Legyen egy poligonháló minden lapja háromszög. Színezzük ki a csúcsait tetszés szerint három színnel. Bizonyítsuk be, hogy páros azoknak a lapoknak a száma, amelyeknek mindhárom csúcsa különböző színű.

315. Bizonyítsuk be, hogy ha egy térkép minden csomópontja legalább harmadfokú és az országok száma legfeljebb 11, akkor van olyan ország, amelynek legfeljebb 4 határvonala van.

***316.** Igazoljuk, hogy ha egy térképen legfeljebb 11 ország van, és minden csúcsba legalább 3 határvonal fut be, akkor azt 4 színnel ki lehet színezni.

9. Algoritmusok. Játékok

317. 12 cédulára 12 különböző természetes szám van felírva, de nem ismerjük őket. Legalább hány, páronkénti összehasonlításra van szükség ahhoz, hogy:

a) megtaláljuk köztük a legnagyobbat;

b) megtaláljuk köztük a második legnagyobbat?

Általánosítsuk a feladatot 12 helyett n ($\in \mathbf{N}^+$) különböző természetes számra.

318. Egy egyfordulós pingpongbajnokság eredményei közül legalább hányat kell ismerni – amelyeket magunk választhatunk meg – ahhoz, hogy biztosan meg lehessen tudni, hogy van-e a versenynek abszolút győztese?

Legalább hány játékos esetén elegendő az eredmények legfeljebb 10%-ának az ismerete az abszolút győztes megkereséséhez, feltéve, hogy van? (A 10%-ba eső mérkőzéseket magunk választhatjuk meg.)

319. Végezzük el a G, legalább 2 csúcsú gráfon a következő átalakítást: Válasszuk ki G két, tetszés szerinti, szomszédos csúcsát, s jelöljük őket X-szel, illetve Y-nal.

1. X-et kössük össze G minden olyan Z csúcsával, amely Y-nal össze van kötve, de X-szel nincs összekötve.
2. Töröljük G-ből Y-t és a belőle induló éleket.

(A leírt átalakítást szokás a gráf összehúzásának nevezni.)

Igazoljuk, hogy az így kapott gráf akkor és csak akkor összefüggő, ha G összefüggő. Hogyan módosul a gráf szomszédsági mátrixa az átalakítás folytán?

320. Vegyünk fel a síkon 8 pontot és pénzdobással döntsük el, hogy két-két pontot összekötünk-e. A **321.** feladatban leírt átalakítás ismételt alkalmazásával döntsük el, hogy a kapott gráf összefüggő-e. Kísérjük figyelemmel az egyes átalakítások során kapott gráfok szomszédsági mátrixát is.

321. Írjunk le olyan algoritmust, amely egy szomszédsági mátrixával adott, egyszerű gráfról eldönti, hogy összefüggő-e.

322. Adjunk meg olyan algoritmust, amely egy gráf szomszédsági mátrixának ismeretében két csúcs között legrövidebb utat keres.

323. Az A mátrix 5 megfigyelési pont közötti hírközlési lehetőséget rögzíti.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Van-e olyan megfigyelési pont, amely nem kaphat hírt semelyik másiktól?

b) Van-e olyan megfigyelési pont, amely nem tud közölni hírt semelyik másikkal?

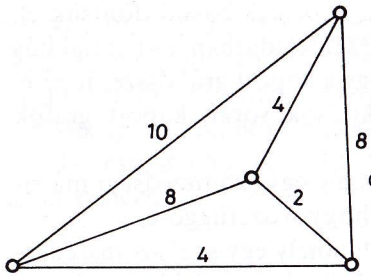
c) Igaz-e, hogy bármely két megfigyelési pont között kölcsönös hírközlési kapcsolat létesíthető?

Állításainkat a mátrix alapján indokoljuk meg.

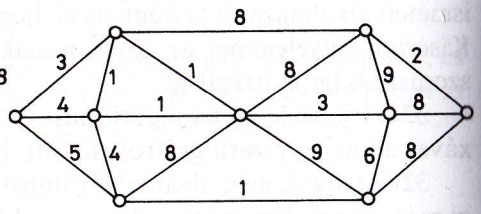
324. Tekintsünk olyan hírközlési rendszert, amelyben bármely két pont közül legalább az egyik hírt tud közölni a másikkal. Jelöljük C-vel a rendszer mátrixát.

Írjunk le olyan algoritmust, amely C ismeretében eldönti, hogy a két pont között létesíthető-e egyirányú, illetve kétirányú hírközlési kapcsolat.

325. Négy város között telefon-összeköttetést kell létesíteni. Biztonsági okokból szükséges, hogy bármely két város között legalább két független úton is lehessen kapcsolatot teremteni. Az egyes városok között fektetett telefonvonalakat és azok költségeit (valamilyen egységben) az *55. ábra* mutatja. Tervezzük meg a legolcsóbb hálózatot.



55. ábra

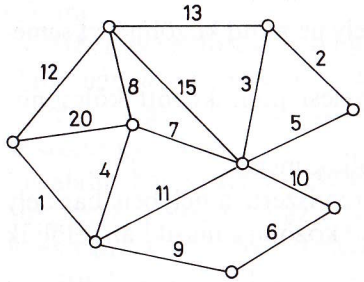


56. ábra

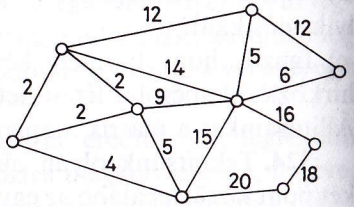
***326.** Igazoljuk, hogy ha egy összefüggő gráf minden éle különböző költségű, akkor egy és csak egy gazdaságos faváza van.

327. Keressünk maximális és minimális költségű favázakat az *56. ábrán* megadott gráfban. (Az élekre ráírtuk azok költségeit.)

328. Keressünk minimális költségű favázakat az *57. a)*, illetve *b) ábrán* megadott gráfokban. Milyen lényeges különbség van a két feladat megoldása között?



a)

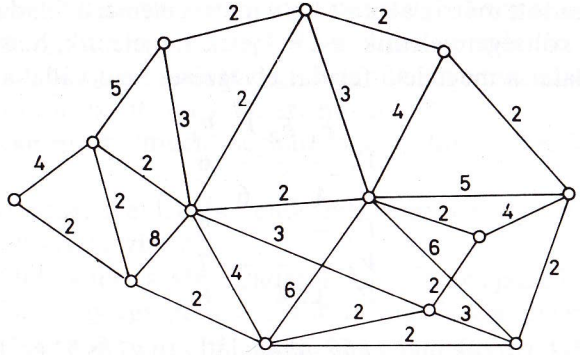


b)

57. ábra

329. Bizonyítsuk be, hogy ha a G összefüggő gráf egy l hosszúságú körének minden éle k költségű és nincs a gráfban k-nál kisebb költségű él, akkor van G-nek legalább l különböző, minimális költségű faváza.

330. Legalább hány különböző, minimális költségű faváza van az *58. ábrán* (az élek költségeivel együtt) megadott gráfnak?



58. ábra

331. 8 várost összekötő úthálózat megépítésére két vállalat, A és B nyújtott be pályázatot. Mindkét vállalat egy-egy költségmátrixot mellékelt, amelyek magyarázataként a városokat A_i-vel jelölték ($i = 1, 2, \ldots, 8$). A mátrix elemeként használt „$-$” jel azt jelenti, hogy a megfelelő városok közt nem építhető út.

Készítsük el a megfelelő gráfokat és döntsük el, hogy melyik ajánlat az olcsóbb. Rajzoljuk fel mindkét javaslat egy-egy legolcsóbb megvalósítását.

A

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_1	0	4	–	–	6	–	–	5
A_2	4	0	–	8	3	6	–	4
A_3	–	–	0	4	–	7	3	1
A_4	–	8	4	0	2	–	2	8
A_5	6	3	–	2	0	–	–	5
A_6	–	6	7	–	–	0	–	6
A_7	–	–	3	2	–	–	0	5
A_8	5	4	1	8	5	6	5	0

B

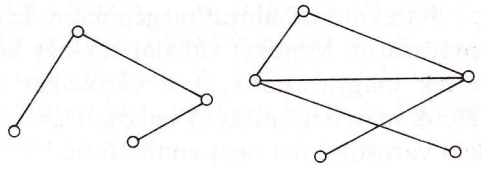
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_1	0	6	–	–	6	–	–	4
A_2	6	0	–	6	4	5	–	4
A_3	–	–	0	5	–	6	4	2
A_4	–	6	5	0	2	–	3	6
A_5	6	4	–	2	0	–	–	6
A_6	–	5	6	–	–	0	–	5
A_7	–	–	4	3	–	–	0	4
A_8	4	4	2	6	6	5	4	0

332. El lehet-e végeztetni az F_1, F_2, F_3, F_4 feladatokat a V_1, V_2, …, V_5 vállalatokkal, ha a vállalatok által beadott pályázatokból az

alább megadott mátrix alakult ki (*a* mátrix elemei a feladatok elvégzésének a költségeit jelentik, a „ – ” jelek azt jelentik, hogy a szóban forgó vállalat a megfelelő feladat elvégzését nem vállalja el.)

	F_1	F_2	F_3	F_4
V_1	–	–	–	6
V_2	4	5	6	–
V_3	–	–	–	8
V_4	–	–	–	7
V_5	3	4	7	6

333. Határozzuk meg az *59. ábrán* látható *a)* és *b)* gráfok független pontjainak a maximális számát.



59. ábra *a)* *b)*

334. *A* és *B* játszanak. Felvesznek a síkon 5 pontot és felváltva összekötnek két-két pontot egy síkbeli görbe vonallal úgy, hogy egyetlen, addig már meghúzott vonalat sem szabad metszeni. Az veszít, aki előbb nem tud két csúcsot összekötni, amikor sorra kerülne. Van-e nyerő stratégiája a kezdőnek? Függ-e a játék kimenetele attól, hogy a pontokat hogyan helyezik el a síkon?

335. Adott n oldalú konvex sokszög belsejében vegyünk fel k pontot (n, $k \in \mathbf{N}$, $n \geqq 3$) úgy, hogy az $n+k$ pont közül semelyik három ne legyen egy egyenesen. A pontokat kössük össze egymással és a sokszög csúcsaival szakaszokkal úgy, hogy az összekötő szakaszok ne messék egymást, és több pontpárt már ne lehessen összekötni (metszés nélkül).

a) Bizonyítsuk be, hogy így a sokszöget háromszögekre daraboltuk fel.

b) Hány háromszög keletkezett a sokszögben?

c) Hány éle van az így kapott gráfnak?

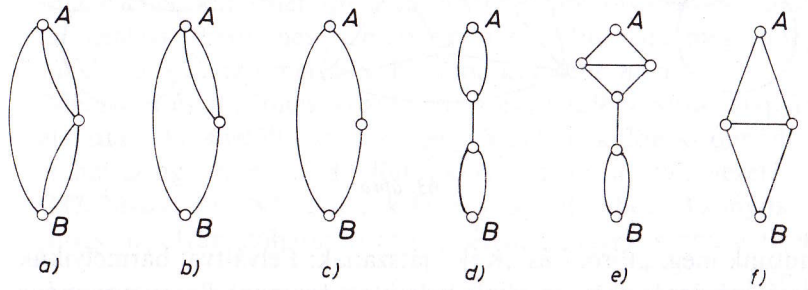
336. Adott a síkon n ($n \in \mathbf{N}$, $n \geqq 3$) pont úgy, hogy semelyik három ne legyen egy egyenesen. *A* és *B* játszanak: Felváltva összekötnek két-két pontot egy szakasszal úgy, hogy azok ne messék egymást. Az nyer, aki utolsóként tud szakaszt húzni.

a) n értéke egyértelműen meghatározza-e, hogy a kezdő nyer vagy veszít?

b) Adott n esetén el lehet-e rendezni a pontokat úgy, hogy a kezdő nyerjen, illetve veszítsen?

337. Oldjuk meg a **336.** feladatot, ha 4 játékos játszik, és felváltva kötnek össze egy-egy pontpárt. Előre megadott n esetén bármelyik játékos el tudja-e rendezni a pontokat úgy, hogy ő nyerjen?

338. A *60. ábrán* összefüggő gráfokat adtunk meg, amelyeknek két csúcsát *A*-val, illetve *B*-vel jelöltük. Két játékos, „Nyit” és „Zár” felváltva „lép”. Nyit, ha a lépésben sorra kerül, törli a gráf egy élét, Zár pedig „lefoglalja” a gráf egy élét. (Nyit nem törölhet már lefoglalt élt és Zár nem foglalhat le addig már törölt élt.) Zár nyer, ha sikerül lefoglalnia egy *A*-t *B*-vel összekötő utat (Nyit nyer, ha ezt meg tudja akadályozni).



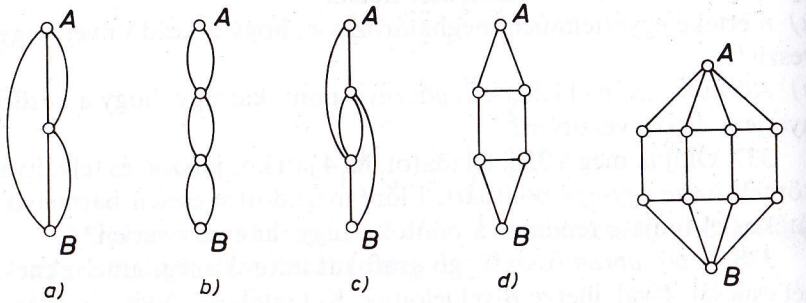
60. ábra

Döntsük el, hogy a *60. ábrán* megadott gráfok esetén melyiknek van nyerő stratégiája, illetve hogy melyik esetben nyer és melyik esetben veszít a kezdő.

339. Oldjuk meg a **338.** feladatot a *61. ábrán* megadott gráfokra vonatkoztatva.

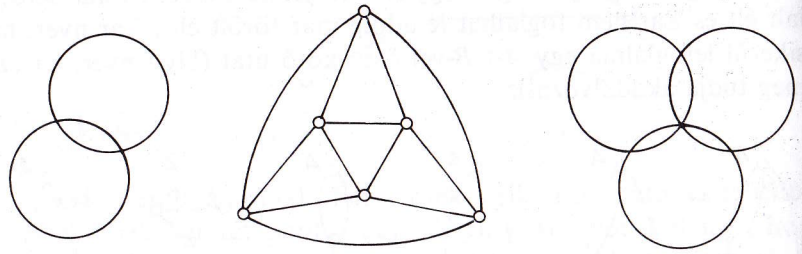
340. Mutassuk meg, hogy a *62. ábrán* megadott gráf esetén a „Nyit-Zár játékban" Zárnak van nyerő stratégiája.

341. A *63. ábrán* két színnel helyesen kiszínezhető térképeket



61. ábra

62. ábra



63. ábra

adtunk meg. „Piros" és „Kék" játszanak: Felváltva, bármelyikük a saját színére festhet egy általa választott országot, ügyelve arra, hogy közös határvonallal rendelkező országok nem lehetnek azonos színűek. Az veszít, aki már nem tud országot festeni az előírás szerint, amikor rá kerülne a sor. Döntsük el, hogy a *63. ábra* térképei közül melyik esetben van nyerő stratégiája a kezdőnek, illetve a másiknak.

10. Vegyes feladatok

342. Fessük ki négy egybevágó kocka lapjait négy színnel úgy, hogy minden kockán mind a négy szín előforduljon, és minden kocka egyik csúcsához illeszkedő három lapja pl. piros legyen. Egymásra lehet-e helyezni a kockákat úgy, hogy a kapott négyzet alapú hasáb minden oldallapján mind a négy szín szerepeljen?

343. Egy új sakkfigurát vezetünk be, amely egy lépésben a tábla egyik élével párhuzamosan 3, a rá merőleges irányban pedig 1 mezővel mozdul el. Eljuthat-e ez a figura a 8×8-as sakktábla egyik sarkából a többibe?

344. Bizonyítsuk be, hogy ha egy szerelőlapon legalább négy forrcsúcs van és bármely négy forrcsúcs között van olyan, amelyik a másik hárommal össze van kötve, akkor van olyan forrcsúcs, amely a szerelőlap minden forrcsúcsával össze van kötve.

***345.** Egy $2n$ tagú társaságról a következőket tudjuk:
Van olyan d szám, hogy a társaság minden tagja a társaságban legfeljebb d másikat ismer, továbbá van d-nél több olyan ember, akik közül semelyik kettő nem ismeri egymást. Mutassuk meg, hogy bármekkora is d, az ismeretségek száma kevesebb n^2-nél.

346. Az A és B jelöltek közül kell az egyiket 9 szavazat alapján kiválasztani. Az A jelölt 1 szavazattal győz. Hány különböző módon történhet ez úgy, hogy az A jelölt a szavazás során végig vezet?

***347.** $2n$-szer ($n \in \mathbf{N}^+$) dobunk fel egy pénzdarabot. Bizonyítsuk be, hogy az olyan dobássorozatok száma, amelyek során a fejek száma egyetlen alkalommal sem haladja meg az írások számát $\binom{2n}{n}$.

***348.** Jelöljük $g(m, k)$-val ($m, k \geqq 1$) azt a legkisebb egész számot, amelyre fennáll, hogy bármely $g(m, k)$ pontú, egyszerű gráf tartalmaz m hosszúságú utat, vagy a komplementere tartalmaz k hosszúságú utat. Mutassuk meg, hogy $g(m, k) \leqq m+k$.

***349.** Egy város autóbuszhálózatáról a következőket tudjuk:
1. Bármelyik megállóból bármelyik másikba eljuthatunk átszállás nélkül.