Ez az új feladatgyűjtemény megőrizte a régi egyedülálló geometria feladatgyűjteményünk értékeit.
A tananyag-feldolgozás módja egyszerre teszi lehetővé a középszintű és az emelt szintű érettségire való felkészülést. Példaanyaga felöleli a teljes középiskolai geometria tana[illegible]azaz a síkgeometria, térgeometria, vektorok, [illegible]s koordinátageometria témaköröket.
[illegible]artalmaz gyakorlópéldákat és számtalan e[illegible]eli, a matematika gyakorlati alkalmazását szolgáló feladatot. Szerzői és lektorai mindannyian a matematika tanításának kiváló, elismert szakemberei.
A feladatgyűjtemény CD-mellékletében található a feladatok megoldása.

2890
140937

I. Síkgeometria
II. Térgeometria
III. Vektorok
IV. Trigonometria
V. Koordinátageometria

Raktári szám: 16127/I
9 789631 941074

MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.

Czapáry Endre
Czapáry Endréné
Csete Lajos
Hegyi Györgyné
Iványiné Harró Ágota
Morvai Éva
Reiman István

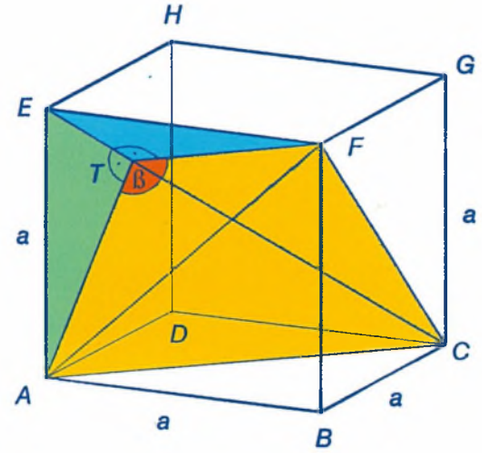
MEGOLDÁSOK a CD-mellékleten

MATEMATIKA

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.

Geometriai feladatok gyűjteménye

Középszint
Emelt szint



Nemzeti Tankönyvkiadó

Czapáry Endre
Czapáry Endréné
Csete Lajos
Hegyi Györgyné
Iványiné
Harró
Gota
Korvai
Iva
Reiman
Iván

MATEMATIKA

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.

Geometriai feladatok gyűjteménye

Középszint
Emelt szint

Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

Hasonló háromszögek ... 79
Bizonyítási feladatok ... 79
Számolási feladatok ... 80
Szögfelezőtétel ... 84
Magasságtétel, befogótétel ... 85
Aranymetszés ... 86
Menelaosz tétele, Ceva tétele ... 86
Hasonló négyszögek ... 88
Háromszögek hasonlóságával megoldható feladatok ... 90
Szelődarabok szorzata ... 93
Hasonlóságon alapuló szerkesztések ... 95
Euler-egyenes, Feuerbach-kör, Simson-egyenes, Apollonius-kör ... 97

Pitagorasz tételének alkalmazása ... 100

Területszámítás, területátalakítás és alkalmazásai ... 110

II. Térgeometria ... 121
(Hegyi Györgyné – Iványiné Harró Ágota – Morvai Éva – Reiman István munkája)

Térelemek ... 121
Illeszkedési feladatok ... 121
Térelemek távolsága és hajlásszöge ... 122

Kocka ... 127

Téglatest ... 130

Hasáb ... 132

Tetraéder ... 134

Gúla, csonkagúla ... 138
Gúla ... 138
Csonkagúla ... 141

Poliéderek, szabályos testek ... 142

Henger ... 147

Kúp, csonkakúp ... 151
Kúp ... 151
Csonkakúp ... 155

Gömb ... 157

Összetett térgeometriai alakzatok ... 160
Egymáshoz illesztett testek ... 160
Egymásba írt testek ... 162
Síkidomok forgatásával nyert testek ... 167

III. Vektorok ... 169
(A szerzők közös munkája)

Vektorok összege, különbsége és vektor szorzása számmal ... 169

Vektorműveletek alkalmazásával bizonyítható állítások ... 172

Vektorok felbontása összetevőkre ... 176

Vektorok elforgatásával megoldható feladatok ... 177
Műveletek koordinátákkal megadott vektorokkal ... 179
Két vektor skaláris szorzata ... 181
Két vektor vektoriális szorzata ... 183

IV. Trigonometria ... 185
(Csete Lajos munkája)

Szögek átváltása fokról radiánra és fordítva ... 185
Hegyesszögű trigonometriai alapfeladatok ... 185
Hegyesszög megszerkesztése valamely szögfüggvényének értékéből ... 188
Nevezetes hegyesszögek szögfüggvényei ... 189
Hegyesszögű trigonometriai feladatok ... 190
Egyenlő szárú háromszögek ... 190
Téglalapok, rombuszok, paralelogrammák ... 191
Szabályos sokszögek ... 191
Körök érintői, körívek, körcikkek, körszeletek, húrok ... 192
Trapézok ... 194
Térelemek hajlásszöge ... 195
Vegyes, illetve összetettebb hegyesszögű trigonometriai feladatok ... 197
Vegyes feladatok ... 197
Tornyok, hegycsúcsok és egyéb magasan levő tárgyak ... 198
Körívek, körcikkek, körszeletek ... 200
Egyenlő szárú háromszögek, derékszögű háromszögek, négyszögek ... 201
Trigonometrikus kifejezések ... 202
Szögfüggvények általánosítása ... 204
Trigonometrikus függvények grafikonjai ... 206
Trigonometrikus egyenletek I. rész ... 209
Bevezető alapfeladatok ... 209
Alapvető feladatok ... 209
Összetettebb feladatok ... 212
Trigonometrikus egyenlőtlenségek I. rész ... 214
Bevezető alapfeladatok ... 214
Alapvető feladatok ... 214
Összetettebb feladatok ... 215
Szélsőértékfeladatok ... 217
A szinusztétel alkalmazása ... 218
Bevezető alapfeladatok ... 218
Alapvető feladatok ... 218
Összetettebb feladatok ... 219
Nehezebb feladatok ... 221
A koszinusztétel alkalmazása ... 222
Alapvető feladatok ... 222
Összetettebb feladatok ... 223
Nehezebb feladatok ... 226

K1 **14.** A 42 cm hosszú AB szakaszt a C pont A-tól kezdve 2:5 arányban, a D pont pedig 3:4 arányban osztja. Számítsuk ki a C és D pont távolságát.

E1 **15.** Az A, B, C, D pontok ebben a sorrendben egy egyenesen vannak. Bizonyítsuk be, hogy az AB, BC, CD, AC és AD irányított szakaszok előjeles hosszára a következő összefüggés érvényes: $AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0$.

E2 **16.** Az A, B, C, D pontok egy egyenesen vannak (ilyen sorrendben). Bizonyítsuk be, hogy $AC^2 \cdot BD + CD^2 \cdot AB = BC^2 \cdot AD + AB \cdot BD \cdot AD$.

K1 **17.** Adjunk meg a síkon pontokat úgy, hogy közülük semelyik három ne legyen egy egyenesen. Hány egyenest határoz meg *a)* 4 pont; *b)* 5 pont; *c)* 212 pont; *d)* n pont?

K1 **18.** Hány átló húzható egy konvex *a)* ötszög; *b)* tizenhatszög; *c)* n-szög egyik csúcsából?

K1 **19.** Hány háromszögre bontják a konvex *a)* ötszöget; *b)* tizenkétszöget; *c)* n-szöget az egyik csúcsából kiinduló átlók?

K1 **20.** Hány oldalú a konvex sokszög, ha egy csúcsából 12 átló húzható?

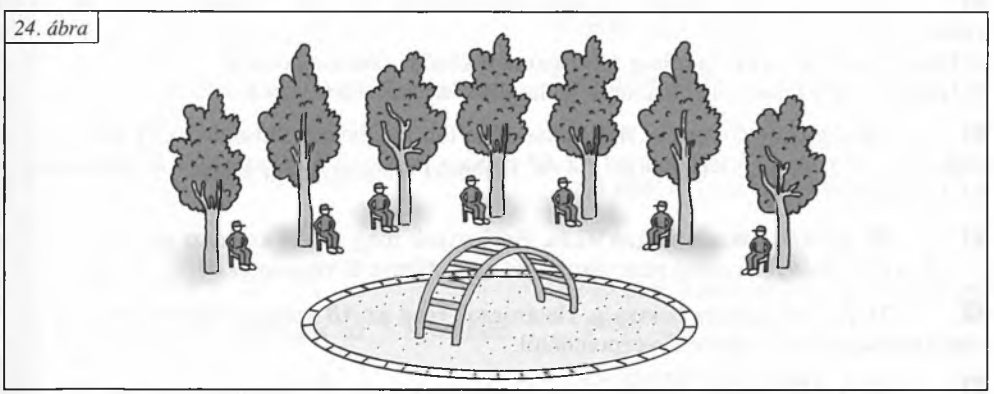
K1 **21.** Hány oldalú a konvex sokszög, ha az egy csúcsából kiinduló átlók 18 háromszögre bontják?

K1 **22.** Egy konvex sokszög oldalainak és egy csúcsából kiinduló átlóinak számát összeadva 17-et kapunk. Hány oldalú a sokszög?

K1 **23.** Hány oldalú a sokszög, ha 27 átlója van?

K1,GY **24.** Egy játszótéren hét fa áll, mindegyik mellett ül egy-egy gyerek. Játékukban időnként helyet cserélnek egymással. *(24. ábra)*
a) Hány cserepartnere lehet egy játékosnak?
b) Hány helycsere lehetséges összesen ?

24. ábra



K1 **25.** Hány oldalú az a konvex sokszög, aminek hatszor annyi átlója van, mint ahány oldala?

K1 **26.** Hány oldalú konvex sokszögnek van ugyanannyi átlója, mint ahány oldala?

Szögek, szögpárok

K1 **27.** Szerkesszünk szögeket, amelyeknek mértéke: 45°; 60°; 30°; 22,5°; 15°.

K1 **28.** Szerkesszünk szögeket, amelyeknek mértéke: 105°; 52,5°; 75°; 67,5°; 135°.

K1 **29.** Adjuk meg az α és β hegyesszögeket úgy, hogy $\alpha > \beta$ legyen! Szerkesszük meg az *a)* $\alpha+\beta$; *b)* $\alpha-\beta$; *c)* $\alpha-\frac{\beta}{2}$; *d)* $\frac{\alpha+\beta}{2}$; *e)* $180°-(\alpha+\beta)$; *f)* $180°-\alpha+\beta$ szögeket.

K1 **30.** Adott két különböző nagyságú konvex szög összege és különbsége. Szerkesszük meg a szögeket.

K1 **31.** Adott egy hegyesszög kétszeresének és egy másik hegyesszögnek az összege és különbsége. Szerkesszük meg a szögeket.

K1 **32.** Két szög aránya 7 : 3. A két szög közül az egyik 72°-kal nagyobb a másiknál. Bizonyítsuk be, hogy a két szög összege 180°.

K1 **33.** Két szög különbsége 54°, ugyanezen két szög aránya 5:2. Hány fokosak ezek a szögek?

K1 **34.** α és β egyik szára közös, és egyik sem tartalmazza a másikat. Összegük 216°, továbbá az α szög (β-val nem közös) szárának meghosszabbítása a β szöget felezi. Határozzuk meg az α és β szögek nagyságát.

K1 **35.** Négy szög együtt egyenesszöget alkot, továbbá mindegyik szög az előzőnél 10°-kal nagyobb. Számítsuk ki a szögek nagyságát.

K1 **36.** Egy körbe négy sugarat rajzoltunk. Az első a másodikkal feleakkora szöget zár be, mint a második a harmadikkal, az utóbbi két sugár szöge feleakkora, mint a harmadik és a negyedik által bezárt szög, ez pedig fele a negyedik és az első sugár szögének. Mekkorák ezek a szögek?

K1,GY **37.** Hány fokos szöget zárnak be az óramutatók 0 óra és 12 óra között minden egész órakor?

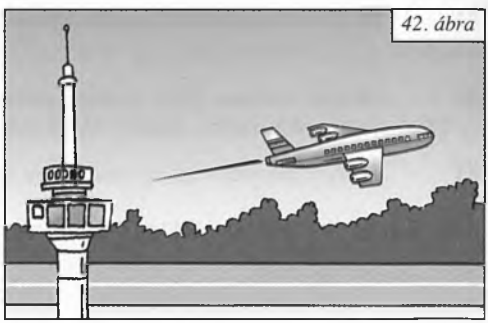
K2,GY **38.** Hány fokos szöget zár be a két óramutató *a)* negyed hétkor; *b)* fél tízkor; *c)* háromnegyed ötkor ?

K2,GY **39.** Mekkora szöget zár be a két óramutató *a)* 2 óra 20 perckor; *b)* 3 óra 32 perckor?

K1,GY **40.** Egy repülőgép észak-északkelet felé, egy másik délnyugat felé halad. Mekkora szöget zár be egymással a két kondenzcsík?

K1,GY **41.** Egy hajó északi irányban halad egy pontig, majd itt 67,5°-kal elfordul pozitív irányba. A szélrózsa milyen irányában halad ekkor?

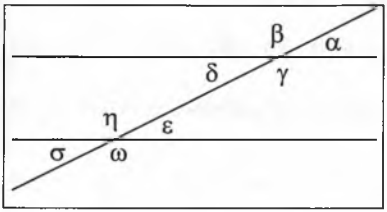
K1,GY **42.** Egy repülőgép keleti irányban hagyja el a repülőteret, majd északkeletnek fordul. Ezután egy célpontot elhagyva, az előző irányból 90°-kal dél felé fordul. Milyen égtáj felé halad ekkor? *(42. ábra)*



42. ábra

K1 **43.** Fejezzük ki fokokkal a következő szögek nagyságát:
a) 21°36′; *b)* 49°9′; *c)* 51°24′18″; *d)* 17°27′45″.

K1 **44.** Fejezzük ki fokokban, percekben, másodpercekben a következő szögeket:
a) 108,5°; *b)* 20,7°; *c)* 18,3°; *d)* 59,7°; *e)* 100,01°.



◀ *45. ábra*

K1 **45.** A *45. ábrán* az α szög 32°42′. Mekkora a többi jelölt szög? Indokoljuk meg állításainkat.

K1 **46.** Mekkora az a szög, amely a pótszögénél 16°28′-cel nagyobb?

K1 **47.** Mekkora az a szög, amely a mellékszögének ötödrésze?

K1 **48.** Melyik az a szög, amely egyenlő a mellékszögével?

K1 **49.** Lehet-e egy szög a társszögével egyenlő?

K1 **50.** Mekkora az a szög, amely a mellékszögének *a)* $\frac{2}{3}$-ával; *b)* $\frac{3}{7}$-ével; *c)* $\frac{3}{5}$-ével egyenlő?

K1 **51.** Mekkora az a szög, amely két mellékszögével együtt *a)* $1\frac{3}{16}$; *b)* $1\frac{5}{9}$ része az egyenesszögnek?

K1 **52.** Két merőleges szárú szög közül az egyik *a)* háromszorosa; *b)* négyszerese; *c)* ötszöröse a másik szögnek. Mekkora a két szög?

K1 **53.** Az α és β merőleges szárú szögek. Határozzuk meg az α és β szögek nagyságát, ha *a)* a β szög 11-szerese az α-nak; *b)* a β szög harmadrésze az α-nak; *c)* a β szög $\frac{7}{2}$ része az α-nak.

K1 **54.** Egy ABC háromszög C csúcsánál derékszög van. Bocsássunk merőlegest ebből a csúcsból az AB oldalra. A merőleges AB-vel való metszéspontja legyen T. Bizonyítsuk be, hogy $TCB\sphericalangle = \alpha$ és $TCA\sphericalangle = \beta$.

K1 **55.** Az α és β konvex szögek szárai párhuzamosak, továbbá tudjuk, hogy α 90°-kal nagyobb β-nál. Határozzuk meg az α és β szögek nagyságát.

K1 **56.** Két konvex szög szárai párhuzamosak. Az egyik *a)* 90°-kal; *b)* 120°-kal; *c)* 75°-kal nagyobb, mint a másik. Mekkorák az egyes szögek?

K1 **57.** Két párhuzamos egyenest egy harmadik metsz. A belső szögek közül az egyik a derékszög $1\frac{3}{5}$ része. Mekkora szögben metszi ennek a szögnek a szögfelezője a másik párhuzamos egyenest?

K1 **58.** Mutassuk meg, hogy egy szögnek és a mellékszögének szögfelezői merőlegesek egymásra.

K1 **59.** Bizonyítsuk be, hogy ha két konvex szög egyik szára közös, egyik sem tartalmazza a másikat, és a szögek felezői merőlegesek egymásra, akkor a másik két szögszár egy egyenesbe esik.

K2 **60.** Messünk el két párhuzamos egyenest egy harmadikkal, és szerkesszük meg a metszéspontokban keletkezett szögek szögfelezőit. Mutassuk meg, hogy a kapott négy szögfelező közül bármely kettő vagy párhuzamos egymással, vagy merőleges egymásra.

K1 **61.** α és β egyik szára közös, és egyik sem tartalmazza a másikat. A β szög az α-nál 130°-kal nagyobb, és a két szög szögfelezője merőleges egymásra. Határozzuk meg az α és β szögek nagyságát.

K1 **62.** Az ABC hegyesszögű háromszög a oldalának végpontjaiból bocsássunk merőlegeseket a háromszög másik két oldalára. A merőlegesek metszésénél keletkezett egyik szög nagysága 127°17′. Számítsuk ki a háromszög A csúcsnál levő szögét.

K2 **63.** Az ABC tompaszögű háromszög a oldalának végpontjaiból bocsássunk merőlegeseket a háromszög másik két oldalegyenesére. A merőlegesek metszésénél keletkezett egyik szög nagysága 47°6′42″. Számítsuk ki a háromszög A csúcsnál levő szögét.

Sokszögek szögösszege

K1 **64.** Egy n oldalú konvex sokszög belsejében tűzzünk ki egy pontot, és kössük össze a sokszög csúcsaival. A keletkezett háromszögek segítségével bizonyítsuk be, hogy a sokszög belső szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180°$.

K1 **65.** Mekkora a *a)* 4; *b)* 8; *c)* 13; *d)* 96; *e)* n oldalú konvex sokszög szögeinek összege?

K1 **66.** Bizonyítsuk be, hogy konkáv négyszögben is 360° a belső szögek összege.

K1 **67.** Hány oldalú az a konvex sokszög, melyben a szögösszeg *a)* 1620°; *b)* 18 540°?

K1 **68.** Mekkora az egyenlő szögű *a)* ötszög; *b)* hatszög; *c)* hétszög; *d)* tízszög; *e)* n-szög egy szöge?

K1 **69.** Igazoljuk, hogy egy négyszögnek nem lehet minden szöge hegyesszög.

K1 **70.** Rajzoljunk fel olyan *a)* hatszöget; *b)* nyolcszöget, amelyben bármely két szomszédos oldal merőleges egymásra.

E1 **71.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy sokszögben bármely két szomszédos oldal merőleges egymásra, akkor az oldalszám páros.

K1 **72.** Hogyan változik meg egy sokszög szögeinek összege, ha az oldalak számát négygyel növeljük?

K1 **73.** Egy sokszög szögösszege s. Hogyan változik a szögösszeg, ha az oldalak számát kétszeresére növeljük?

K1 **74.** Mekkora a *a)* háromszög; *b)* konvex ötszög; *c)* konvex n-szög külső szögeinek összege?

K1 **75.** Ha egy konvex sokszög belső szögeinek összegéhez hozzáadjuk egyik külső szögét, 1846°-ot kapunk. Hány oldalú a sokszög, és mekkora a külső szög?

K2 **76.** Mekkorák az ötszög belső szögei, ha azok úgy aránylanak egymáshoz, mint 1:2:3:4:5?

K1 **77.** Igazoljuk, hogy egy konvex négyszög egyik oldalegyenesén levő két külső szög összege a szemközti oldalegyenesen levő két belső szög összegével egyenlő.

K1 **78.** Hány oldalú a konvex sokszög, ha belső szögeinek összege háromszor akkora, mint a külső szögek összege ?

K1 **79.** Egy négyszögben $\alpha = 72°$, $\beta = 122°$, $\gamma = 68°$. Mekkora szöget zárnak be az *a)* A és C csúcsokhoz; *b)* A *és* B csúcsokhoz tartozó szögfelezők?

E1 **80.** Mutassuk meg, hogy egy háromszög külső szögei között legfeljebb egy hegyesszög lehet, de mindig van legalább két tompaszög.

E1 **81.** Melyik az a legkisebb oldalszámú konvex sokszög, amelynek a külső szögei között már biztosan van hegyesszög?

K1 **82.** Igazoljuk, hogy az egyenlő szárú háromszögben az alappal szemközti csúcsban szerkesztett külső szögfelező párhuzamos az alappal.

K1 **83.** Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög egyik külső szögének felezője párhuzamos a szemközti oldallal, akkor a háromszög egyenlő szárú.

K1 **84.** Igazoljuk, hogy az egyenlő szárú háromszög egyik szárához tartozó magasságának az alappal bezárt szöge mindig fele a szárszögnek.

K1 **85.** Egy háromszög γ szöge *a)* 32,6°; *b)* 90°; *c)* 150°14′. Határozzuk meg a másik két szög szögfelezője által alkotott szög nagyságát.

K1 **86.** Mutassuk meg, hogy ha egy háromszög egyik külső szöge az egyik nem szomszédos belső szög kétszerese, akkor a háromszög egyenlő szárú.

K1 **87.** Mutassuk meg, hogy ha egy egyenlő szárú háromszög egyik szöge 60°, akkor a háromszög egyenlő oldalú.

Háromszögek belső és külső szögei

K1 **88.** Egy háromszög két szögének aránya 5:7. A háromszög harmadik szöge $\frac{1}{18}$ egyenesszöggel nagyobb az elsőnél. Mekkorák a háromszög szögei?

K1 **89.** Egy háromszög egyik szöge 70°, a másik két szög aránya 5:6. Mekkorák a háromszög szögei?

K1 **90.** Egy háromszög szögei úgy aránylanak egymáshoz, mint *a)* 1:2:3; *b)* 3:4:5; *c)* 3:7:8. Határozzuk meg a háromszög szögeinek nagyságát.

K1 **91.** Egy háromszög egyik szöge 42°24′. A másik két szög közül az egyik 27,1°-kal nagyobb a másiknál. Határozzuk meg a háromszög szögeinek nagyságát.

K2 **92.** Mutassuk meg, hogy egy egyenesre egy külső pontból csak egy merőleges bocsátható.

K1 **93.** Egy háromszög egyik külső szöge 87°, egyik belső szöge pedig 27°. Mekkorák a háromszög szögei?

K1 **94.** Van-e olyan háromszög, amelyben az egyik szög kétszer akkora, a másik szög pedig háromszor akkora, mint a harmadik csúcsnál levő külső szög?

K1 **95.** Egy háromszög két külső szöge 128° és 116°. Mekkorák a háromszög szögei?

K1 **96.** Egy egyenlő szárú háromszög egyik külső szöge 87°. Mekkorák a háromszög szögei?

K1 **97.** Egy egyenlő szárú háromszög egyik külső szöge *a)* 96°; *b)* 64°. Mekkorák a szögei ?

K1 **98.** Igazoljuk, hogy a háromszög két belső szögfelezőjének hajlásszöge 90°-nál a harmadik szög felével kisebb.

E1 **99.** Számítsuk ki az ABC háromszög A és B csúcsából induló magasságvonalainak hajlásszögét, ha *a)* $\alpha = 22{,}5°$ és $\beta = 75°$; *b)* $\alpha = 15°$ és $\beta = 105°$; *c)* $\alpha = 30°$ és $\beta = 45°$; *d)* $\alpha = 90°$és $\beta = 20°$.

K2 **100.** Az ABC háromszögben $\alpha = 47°42'$, $\beta = 73°10'$. Mekkora szöget zárnak be egymással az A és B csúcsokhoz tartozó *a)* szögfelezők; *b)* magasságvonalak ?

K1 **101.** Mekkora szöget zár be az ABC háromszögben az A csúcshoz tartozó szögfelező a szemközti oldallal, ha $\alpha = 27°42'$ és $\beta = 83°10'$?

K1 **102.** Egy egyenlő szárú háromszög szárszöge 30°. Mekkora szöget zár be az egyik szárhoz tartozó magasságvonal *a)* az alappal; *b)* a másik szárral?

K2 **103.** Egy egyenlő szárú háromszög egyik szárához tartozó magassága a másik szárral 13°-kal kisebb szöget alkot, mint az alapon levő szög. Mekkorák a háromszög szögei?

K1 **104.** A derékszögű háromszög egyik szöge 27°. Mekkora szögekre bontja az átfogóhoz tartozó magasság a derékszöget?

E1 **105.** Igazoljuk, hogy bármely háromszögben az a oldal és az m_b magasság által bezárt szög egyenlő a b oldal és az m_a magasság által bezárt szöggel.

K2 **106.** Mutassuk meg, hogy derékszögű háromszögben a derékszög szögfelezője és az átfogóhoz tartozó magasság 45°-kal kisebb szöget zár be, mint a háromszög egyik hegyesszöge.

K1 **107.** Mekkora szöget zárnak be egymással az ABC háromszög A és B csúcshoz tartozó külső szögfelezői?

K2 **108.** Egy háromszög szögei α, β, γ. Bizonyítsuk be, hogy a külső szögfelezők által alkotott háromszög szögei és az $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$ szögek pótszögek.

K1 **109.** Egy háromszög két szöge 67° és 33°. Mekkora szöget zár be egymással a harmadik csúcshoz tartozó magasság és a belső szögfelező?

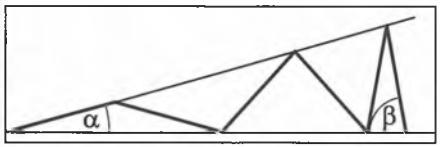
E1 **110.** Egy háromszög két szöge α és β, $\alpha > \beta$. Mekkora szöget zár be egymással a harmadik csúcshoz tartozó magasság és a belső szögfelező?

K2 **111.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egy csúcsához tartozó szögfelező a szemközti oldallal olyan két szöget zár be, amelyeknek különbsége a háromszög másik két szögének különbségével egyenlő.

K1 **112.** Egy egyenlő szárú háromszög szárszögének szögfelezője olyan két háromszögre bontja a háromszöget, amelyeknek a szögei ugyanakkorák, mint az eredeti háromszög szögei. Mekkorák az egyenlő szárú háromszög szögei?

K1 **113.** Egy egyenlő szárú háromszög szárszöge 36°. Bizonyítsuk be, hogy az alapon levő szög szögfelezője a háromszöget két egyenlő szárú háromszögre bontja.

K1 **114.** Egy egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögének szögfelezője és alapja egyenlő hosszú. Mekkorák a szögei?



◀ *115. ábra*

K1 **115.** A *115. ábrán* színessel húzott szakaszok egyenlők. Mekkora a β szög, ha $\alpha = 15°$?

E1 **116.** A *115. ábrán* hat egyenlő szakaszból áll a színes töröttvonal.
a) Bizonyítsuk be, hogy ez a töröttvonal már nem folytatható tovább az ábrán látható módon, ha $\alpha = 15°$.
b) Hogyan kellene megválasztani az α-t, hogy a töröttvonal tíz egyenlő szakaszt tartalmazzon?
c) Mutassuk meg, hogy ha a töröttvonal $n + 1$ számú szakaszból áll, akkor α kisebb $90°$ n-ed részénél.

K1 **117.** Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AB átfogóján vegyük fel az E és D pontokat úgy, hogy $BE = BC$ és $AD = AC$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett CDE háromszög egyenlő szárú, és szárszöge 45°.

K2 **118.** Az ABC háromszög leghosszabb oldala AC. Ezen vegyük fel a D és E pontokat úgy, hogy $AD = AB$ és $CE = CB$ legyen. Fejezzük ki a DBE háromszög szögeit az eredeti háromszög szögeivel.

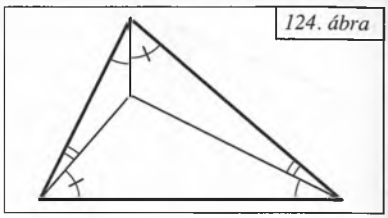
E2 **119.** Az ABC háromszög A csúcsából kiinduló belső szögfelező messe a BC oldalt a D pontban, a külső szögfelező pedig ugyanennek az oldalnak a meghosszabbítását messe az E pontban.
a) Milyen összefüggés van az ABC háromszög szögei között, ha $AD = AE$?
b) Mekkorák a háromszög szögei, ha $\gamma = 34°$?

K1 **120.** Az ABC háromszögben $AB = AC$. Hosszabbítsuk meg a BA oldalt A-n túl egy D pontig úgy, hogy $BA = AD$ legyen. Igazoljuk, hogy a DBC háromszög derékszögű.

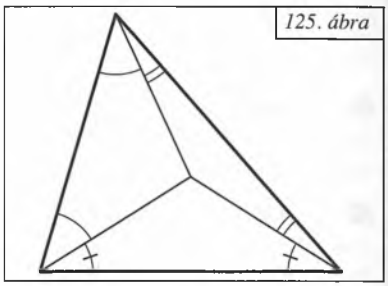
E1 **121.** Legyen BC az ABC háromszög leghosszabb oldala! Mérjük rá BC-re B-ből kiindulva AB-t és C-ből kiindulva AC-t. A felmért szakaszok végpontja E, illetve F. Mekkora az $EAF\sphericalangle$, ha a háromszög szögei α, β és γ?

K1 **122.** Húzzunk az ABC háromszög A csúcsából párhuzamost a C csúcsbeli belső szögfelezővel. Igazoljuk, hogy ez a BC oldal meghosszabbításából az AC oldallal egyenlő szakaszt vág le.

K1 **123.** Hosszabbítsuk meg az ABC háromszög BC oldalát a C csúcson túl az AC oldallal egyenlő szakasszal. Kössük össze ennek P végpontját az A csúccsal, és mutassuk meg, hogy az összekötő egyenes párhuzamos a γ szög szögfelezőjével.


124. ábra

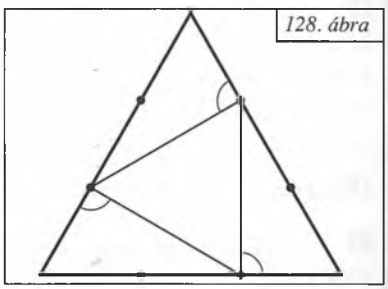
K2 **124.** A *124. ábrán* levő hegyesszögű háromszögben az egyformán jelölt szögek egyenlők. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögbe berajzolt szakaszok a magasságvonalak egyenesein vannak.


125. ábra

K2 **125.** A *125. ábrán* egyformán jelölt szögek egyenlők. Fejezzük ki a belső pontnál levő szögeket, ha ismerjük a háromszög szögeit.

K1 **126.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög egyik oldala kétszerese a hozzá tartozó súlyvonalnak, akkor a háromszög derékszögű.

K1 **127.** Egy egyenlő szárú háromszög egyik szárát az alappal szemközti csúcson túl hosszabbítsuk meg a kétszeresére, és az így nyert pontot kössük össze az alap másik csúcsával. Mutassuk meg, hogy ez az összekötő egyenes merőleges az alapra.


128. ábra

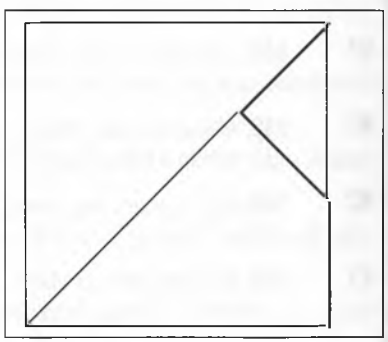
E1 **128.** Mutassuk meg, hogy az egyenlő oldalú háromszög oldalait három egyenlő részre osztó pontoknak a *128. ábrán* látható összekötésekor keletkező megjelölt szögek derékszögek.

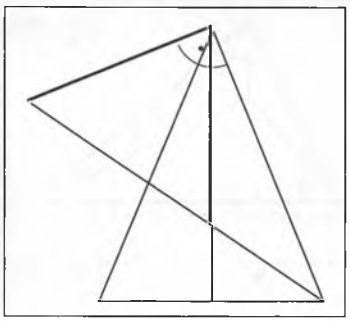
E1 **129.** Egy négyzet csúcsai körül az átló felével mint sugárral a négyzet középpontján átmenő negyedköröket rajzolunk. Bizonyítsuk be, hogy a negyedköröknek és a négyzet oldalainak metszéspontjai szabályos nyolcszöget határoznak meg.

K1 **130.** Hosszabbítsuk meg egy négyzet átlóit mindkét irányban annyival, amekkora a négyzet oldala. Az így kapott végpontok ismét négyzetet alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy e négyzet oldala az eredeti négyzet átlójának és oldalának összegével egyenlő.

E1 **131.** Hosszabbítsuk meg egy négyzet két átlóját egyik irányban annyival, amekkora a négyzet oldala. Bizonyítsuk be, hogy a meghosszabbítással nyert két pont a négyzet valamelyik csúcsával egyenlő szárú háromszöget alkot.

K2 **132.** Mérjük rá egy négyzet egyik átlójára az egyik csúcsból kiindulva a négyzet oldalát. A kapott végpontban emeljünk merőlegest az átlóra. Bizonyítsuk be, hogy a *132. ábrán* színessel jelölt három szakasz egyenlő.


132. ábra ▶



◄ *133. ábra*

E1 **133.** Egy egyenlő szárú háromszög szárszögének csúcsában emeljünk merőlegest az egyik szárra. Szerkesszük meg e szár és az alap szögének, majd a csúcsnál levő szögnek a szögfelezőjét is. Igazoljuk, hogy a *133. ábrán* színessel jelölt szakaszok egyenlők.

E1 **134.** Két egymást kívülről érintő körben szerkesszünk párhuzamos, de ellentétes irányú sugarakat. Igazoljuk, hogy a körök érintkezési pontja és e sugarak végpontjai egy egyenesen vannak.

K2 **135.** Az ABC háromszög AB oldalát A-n túl az AC szakasszal meghosszabbítva X-et, B-n túl pedig a BC-vel meghosszabbítva Y-t kapjuk. Mekkorák az XYC háromszög szögei, ha az eredeti háromszög szögei α, β és γ?

E1 **136.** Az ABC háromszög A és B csúcsához tartozó belső szögfelezők metszéspontján keresztül szerkesszünk párhuzamost az AB oldallal. Ennek metszéspontja AC-vel D, CB-vel E. Mutassuk meg, hogy a DE szakasz egyenlő az AC és BC oldalakból lemetszett kisebb szakaszok összegével.

Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között

K1 **137.** Bizonyítsuk be, hogy egy külső pontot egy egyenes pontjaival összekötő szakaszok közül az egyenesre merőleges szakasz a legrövidebb.

K1 **138.** Igazoljuk, hogy a derékszögű háromszög befogóinak az átfogóra való vetületei mindig kisebbek a befogóknál.

E2 **139.** Az ABC derékszögű háromszögben osszuk fel egyenlő részekre a BC befogót, és kössük össze az osztópontokat a hegyesszögű A csúccsal. Vizsgáljuk meg azokat az A-nál keletkezett szögeket, amelyeknek szárai két szomszédos osztóponton mennek át. Mutassuk meg, hogy ezek annál kisebbek, minél távolabb vannak az AC befogótól.

K2 **140.** Igazoljuk, hogy az egyenlő szárú háromszög alapján bárhol felvett pontnak a szemközti csúcstól való távolsága kisebb a szárak hosszánál.

K1 **141.** Igazoljuk, hogy a háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal bármely pontjával összekötő szakasz rövidebb a másik két oldal egyikénél.

E1 **142.** Mutassuk meg, hogy ha két háromszög megegyezik két oldalban, akkor a harmadik oldal abban a háromszögben nagyobb, amelyikben a két oldal nagyobb szöget zár be.

K2 **143.** Egy konvex négyszög a, b, c, d oldalaira fennáll az $a > b > c > d$ egyenlőtlenség. Igazoljuk, hogy az a és b által alkotott szög kisebb, mint a c és d által alkotott szög.

E1 **144.** Vegyünk fel az ABC háromszög belsejében egy P pontot, és bizonyítsuk be, hogy az APB szög mindig nagyobb, mint az ACB szög.

E1,GY **145.** Milyen irányban bocsássunk a tükör előtt álló A pontszerű fényforrásból fénysugarat a tükörre, hogy a visszavert fénysugár adott B ponton menjen át?

E2 **146.** Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő szárú háromszögben az alap bármelyik pontjára nézve a száraktól mért távolságok összege állandó.

E2 **147.** Igazoljuk, hogy ha bárhol is veszünk fel az egyenlő oldalú háromszög belsejében egy pontot, a három oldaltól mért távolságainak összege mindig ugyanakkora.

K1 **148.** Létezik-e olyan háromszög, melynek oldalai azonos egységgel mérve

a) 10, 12, 13; *b)* 1, 2, 3; *c)* $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$; *d)* 1911, 1918, 3826?

K1 **149.** Egy háromszög egyik oldala 1,8 m, a másik 0,7 m. Hány méter a harmadik oldal, ha mérőszáma egész szám?

K1 **150.** Egy egyenlő szárú háromszög két oldala 3 cm és 6 cm. Mekkora a harmadik oldal?

K2 **151.** Az egyenlő szárú háromszög egyik szárához húzott súlyvonal a háromszög kerületét 15 cm és 6 cm hosszúságú részekre osztja. Mekkorák a háromszög oldalai?

K1 **152.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög a, b, c oldalai közül a a legnagyobb, akkor a $2a, b, c$ oldalakból nem lehet háromszöget szerkeszteni.

K2 **153.** Igazoljuk, hogy a háromszög bármely oldala kisebb a fél kerületnél.

E1 **154.** *(A 141. feladatra épül.)* Igazoljuk, hogy az egyenlő oldalú háromszög bármely belső pontja és az egy-egy csúcs közti három szakaszból mindig lehet háromszöget szerkeszteni.

E2 **155.** Igazoljuk, hogy ha P az ABC háromszög belső pontja, akkor $PB + PC < AB + AC$.

E2 **156.** *(A 155. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egy belső pontjának a csúcsoktól mért távolságösszege a kerület és a fél kerület közé eső számérték.

E2 **157.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög bármelyik magassága kisebb, mint a vele azonos kezdőpontú oldalak összegének fele.

E2 **158.** *(A 157. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög magasságvonalainak összege kisebb a háromszög kerületénél.

E2 **159.** Legyen D az ABC háromszög AC oldalának tetszőleges pontja. Bizonyítsuk be, hogy $AB + BC - AC < 2BD$.

E2 **160.** Igazoljuk, hogy egy háromszög súlyvonalainak összege kisebb a háromszög kerületénél.

E2 **161.** Igazoljuk, hogy egy háromszög súlyvonalainak összege nagyobb a kerület háromnegyedénél.

V **162.** Az ABC háromszög A csúcsához tartozó külső szögfelezőn jelöljünk ki egy tetszőleges A_1 pontot. Mutassuk meg, hogy az A_1BC háromszög kerülete nagyobb, mint az ABC háromszögé.

E2 **163.** Igazoljuk, hogy a konvex négyszög szemközti oldalainak összege kisebb, mint az átlók összege.

E2 **164.** Igazoljuk, hogy a konvex négyszög átlóinak összege kisebb a négyszög kerületénél, de nagyobb a négyszög fél kerületénél.

E2 **165.** Mutassuk meg, hogy egy négyszögben bármelyik oldal kisebb a másik három összegénél.

K1 **166.** Egy négyszög oldalai (ebben a sorrendben) 2 cm, 6 cm, 3 cm és 8 cm hosszúak. Bizonyítsuk be, hogy egyik átló sem érheti el a 9 cm-t.

V **167.** Mutassuk meg, hogy egy konvex négyszög síkjában az átlók metszéspontjában legkisebb a csúcsoktól mért távolságok összege.

E2 **168.** Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges pontnak egy sokszög csúcsaitól mért távolságösszege nagyobb a sokszög fél kerületénél.

E2 **169.** Mutassuk meg, bárhogyan is adunk meg a síkon négy pontot (melyek közül semelyik három nem lehet egy egyenesen), mindig ki lehet választani közülük hármat úgy, hogy azok ne legyenek egy hegyesszögű háromszög csúcsai.

K1 **170.** Adjunk meg a síkon négy olyan pontot, hogy az általuk meghatározott négy háromszög mindegyike tompaszögű legyen.

E2 **171.** Adott a síkon az A, B, P és Q pont úgy, hogy közülük semelyik három nincs egy egyenesen, és $PA + PB = QA + QB = k$. Bizonyítsuk be, hogy a PQ szakasz F felezőpontjára fennáll az $FA + FB < k$ egyenlőtlenség.

Adott tulajdonságú pontok halmazának meghatározása a síkon

Ponthalmazok

K1 **172.** Adjuk meg az e egyenestől 3 cm távolságra levő pontok halmazát.

K1 **173.** Adjuk meg az e egyenestől 3 cm-nél kisebb távolságra levő pontok halmazát.

K1 **174.** Adjuk meg az e egyenestől legalább 3 cm távolságra levő pontok halmazát.

K1 **175.** Szerkesszünk adott egyenesen pontot, amely egy O ponttól 3 cm-re van. Mitől függ a megoldások száma?

K2 **176.** Adjuk meg a P ponttól 3 cm távolságra és az e egyenestől 2 cm távolságra levő pontok halmazát.

K2 **177.** Adjuk meg a P ponttól 3 cm távolságra és az e egyenestől legfeljebb 2 cm távolságra levő pontok halmazát.

K2 **178.** Adjuk meg a P ponttól 3 cm-nél nagyobb távolságra és az e egyenestől 2 cm-nél kisebb távolságra levő pontok halmazát.

K1 **179.** Adott a síkon az $AB = 8$ cm hosszú szakasz. Adjuk meg az A ponttól 4 cm távolságra, a B ponttól 2,5 cm távolságra levő pontok halmazát.

K1 **180.** Szerkesszünk pontot, amely két adott pont mindegyikétől 6 cm távolságra van.

K2 **181.** Adjuk meg a P ponttól 2 cm távolságra és a Q ponttól 3 cm távolságra levő pontok halmazát.

K2 **182.** Adjuk meg a P ponttól 2 cm-nél kisebb távolságra és a Q ponttól 3 cm-nél kisebb távolságra levő pontok halmazát.

K2 **183.** Adjuk meg a P ponttól legfeljebb 2 cm távolságra és a Q ponttól 3 cm-nél nagyobb távolságra levő pontok halmazát.

K1 **184.** Adjuk meg az e és f egyenesek mindegyikétől 1 cm távolságra levő pontok halmazát.

K1 **185.** Adjuk meg a P ponttól 4 cm-nél nem nagyobb és 3 cm-nél nagyobb távolságra levő pontok halmazát.

E1 **186.** Adott a síkon három egy ponton átmenő egyenes: a, b, c. Adjuk meg azon pontok halmazát, amelyek rajta vannak a c egyenesen, és a-tól 1 cm-nél nem nagyobb, b-től 2 cm-nél nem kisebb távolságra vannak.

K2 **187.** Adjuk meg az e egyenestől x, az f egyenestől y távolságra levő pontok halmazát, ha adott az x és az y távolság, és tudjuk, hogy $x > y$.

K1 **188.** Adjuk meg két egymásra merőleges adott egyenes mindegyikétől 3 cm-nél kisebb távolságra levő pontok halmazát.

K1 **189.** Adjuk meg az ABC háromszög csúcsaitól egyenlő távolságra levő pontok halmazát.

E1 **190.** *a)* Adjuk meg egy 5 cm oldalú négyzet minden oldalegyenesétől 2,5 cm-re levő pontok halmazát.
b) Adjuk meg egy 5 cm oldalú négyzet minden oldalegyenesétől 2 cm-nél nagyobb távolságra levő pontok halmazát.

K1 **191.** Adott két párhuzamos egyenes, e és f. Adjuk meg a két egyenestől egyenlő távolságra levő pontok halmazát.

K1 **192.** Adjuk meg egy négyzet minden oldalegyenesétől egyenlő távolságra levő pontok halmazát.

E1 **193.** Adott két párhuzamos egyenes, e és f. Adjuk meg azon pontok halmazát, amelyek az egyik egyenestől kétszer akkora távolságra vannak, mint a másiktól.

K1 **194.** Adott két metsző egyenes. Adjuk meg azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek egyenlő távolságra vannak e két egyenestől.

K2 **195.** Adjuk meg az ABC háromszög minden oldalegyenesétől egyenlő távolságra levő pontok halmazát.

E2 **196.** Hány olyan pont van, amely három adott egyenestől egyenlő távolságra van?

K1 **197.** Adjuk meg azon ABC háromszögek C csúcsainak halmazát, amelyeknek A és B csúcsa rögzített, és a C csúcshoz tartozó magasságuk m.

K2 **198.** Adjuk meg azon ABC háromszögek C csúcsainak halmazát, amelyeknek A és B csúcsa rögzített, és az ABC háromszög köré írt kör sugara r.

K2 **199.** Adjuk meg az ABC háromszög AB és AC oldalegyeneseitől, illetve az A és B csúcsoktól egyenlő távolságra levő pontok halmazát.

K1 **200.** Szerkesszünk egyenest, amely adott e egyenessel párhuzamos, és egy megadott P ponttól 4 cm-re van.

K1 **201.** Szerkesszünk egyenest, amely adott ponton átmegy, és adott egyenessel előre adott konvex szöget zár be.

K2 **202.** Szerkesszünk egyenest, amely adott egyenessel 30°-os szöget zár be, és egy megadott ponttól 4 cm-re van.

K2 **203.** Egy félegyenesre minden pontjában állítsunk merőlegest, és ezekre mérjük fel ugyanazon irányban a merőleges talppontjának a félegyenes kezdőpontjától mért távolságát. Adjuk meg az így nyert merőleges szakaszok végpontjainak halmazát.

K2 **204.** Egy konvex szög egyik szárának minden pontján át húzzunk párhuzamost a másik szárral, és mérjük rá a szögtartományban a pont és a csúcs távolságát. Adjuk meg az így kapott végpontok halmazát.

K1 **205.** Egy szög felezőjének egyik pontjából szerkesszünk párhuzamos egyeneseket a szögszárakkal. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett párhuzamos sávok egyenlő szélesek.

K2 **206.** Adjuk meg azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek két koncentrikus körtől egyenlő távolságra vannak.

K2 **207.** Adott egyenesen szerkesszünk pontot, amely két megadott ponttól egyenlő távolságra van.

K2 **208.** Szerkesszünk az ABC háromszög AB oldalán olyan P pontot, amely a B és C pontoktól egyenlő távolságra van.

K1 **209.** Egy háromszög egyik oldalán szerkesszünk olyan pontot, amely a másik két oldalegyenestől egyenlő távolságra van.

K1 **210.** Messünk el két párhuzamos egyenest egy harmadikkal, és szerkesszünk pontot, amely mindhárom egyenestől egyenlő távolságra van.

K1 **211.** Adjunk meg a síkon öt pontot úgy, hogy létezzék mind az öttől egyenlő távolságra levő pont.

K2 **212.** Hol a hiba a következő gondolatmenetben? Vegyük fel a síkon az A, B, C, D pontokat úgy, hogy ne legyenek egy körön, továbbá az A, B és C, D pontpárok ne legyenek párhuzamos egyeneseken. Ekkor az AB felező merőlegese és a CD felező merőlegese metszik egymást egy O pontban. Ez az O egyenlő távolságban van az A-tól és a B-től – hiszen rajta van AB felező merőlegesén –, és ugyanilyen oknál fogva C-től és D-től is. Így O egyenlő távolságra van mind a négy ponttól, ezért van olyan O középpontú kör, amely tartalmazza a pontokat, holott ezeket úgy vettük fel, hogy ne legyenek egy körön.

K2 **213.** Adott két szakasz. Szerkesszünk a szakaszok fölé egyenlő szárú háromszögeket, amelyeknek a harmadik csúcsa egybeesik.

K1 **214.** Egy szög szárai között adott egy P pont. Szerkesszünk a ponton át egyenest, amely a szög száraiból egyenlő darabokat metsz le.

K2 **215.** Adott egy konvex szög szárai között egy P pont. Szerkesszünk a szög belsejében a száraktól egyenlő távolságra pontokat, amelyek az adott ponttól 3 cm-re vannak.

K2 **216.** Szerkesszük meg az adott a egyenesen azt a pontot, amely egy b egyenestől t távolságra van.

K2 **217.** Adott egy e egyenes és egy P pont. Szerkesszünk pontot, amely e-től és P-től is a távolságra van.

K2 **218.** Legyen a és b két metsző egyenes. Adjuk meg azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek a-tól és b-től mért távolságának különbsége d.

K2 **219.** Adjuk meg azoknak a pontoknak a halmazát egy derékszög szögtartományában, amelyeknek a derékszög két szárától mért távolságösszege d.

E1 **220.** *(A 219. feladatra épül.)* Adott derékszögű háromszögbe szerkesszünk k kerületű téglalapot úgy, hogy annak két szomszédos oldala egy-egy befogón legyen.

E1 **221.** *(A 219. feladatra épül.)* Szerkesszünk r sugarú körbe k kerületű téglalapot.

E1 **222.** *(A 221. feladatra épül.)* Mutassuk meg, hogy az adott körbe írható téglalapok közül a négyzet kerülete a legnagyobb.

Háromszögek szerkesztése (I. rész)

K1 **223.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott két csúcsa, egy a harmadik csúcson átmenő egyenes, és ismerjük még a harmadik csúcshoz tartozó magasság hosszát is.

K2 **224.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott az egyik oldalának egyenese, az ehhez tartozó magasság, két másik oldalának a hossza, továbbá egy egyenes, amely átmegy az adott oldalegyenessel szemközti csúcson.

K1 **225.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a rajta fekvő egyik szög és az oldalhoz tartozó magasság.

K2 **226.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldala és az egyikhez tartozó magasság.

K2 **227.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a rajta levő egyik szög és az oldalhoz tartozó súlyvonal.

K2 **228.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a hozzá tartozó súlyvonal és magasság.

K1 **229.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy szöge és egy másik csúcshoz tartozó magassága és szögfelezője.

K1 **230.** Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, ha adott a magassága.

K1 **231.** Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, ha adott az egyik csúcsa és a szemközti oldalának egyenese.

K1 **232.** Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, ha adott a középpontja (szögfelezőinek metszéspontja) és az egyik oldalának egyenese.

K1 **233.** Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, ha ismerjük *a)* a köré írt kör sugarát, *b)* a beírt kör sugarát.

K1 **234.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapjának két csúcsa és az egyik szárának egyenese.

K1 **235.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alappal szemközti szöge és az alaphoz tartozó magassága.

K1 **236.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja és az alappal szemközti szöge.

K1 **237.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az egyik szára és az alapon fekvő szöge.

K1 **238.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja és a hozzá tartozó magassága.

K1 **239.** Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott az átfogója és az egyik befogója.

K2 **240.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja és az egyik szárhoz tartozó magassága.

K2 **241.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja, továbbá az alapnak az egyik szárhoz tartozó súlyvonallal bezárt szöge.

K1 **242.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja és az a szög, amelyet az alap egyik végpontjából kiinduló szögfelező az alaphoz tartozó magassággal bezár.

K2 **243.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az egyik szára és a hozzá tartozó magassága.

K1 **244.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az egyik szára és a hozzá tartozó súlyvonal.

K2 **245.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az egyik szára és annak egyenesén a szárhoz tartozó magasság talppontja.

K2 **246.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az egyik szára és a hozzá tartozó súlyvonalnak a szárral bezárt szöge.

K1 **247.** Szerkesszünk egyenlő szárú derékszögű háromszöget, ha adott az átfogója.

K1 **248.** Szerkesszünk egyenlő szárú derékszögű háromszöget, ha adott
a) a derékszögű csúcsa és az átfogójának egyenese;
b) az egyik hegyesszögű csúcsa és a szemközti oldalának egyenese.

E1 **249.** Szerkesszünk egyenlő szárú derékszögű háromszöget, ha adott
a) az átfogó és az egyik befogó összege;
b) az átfogó és az egyik befogó különbsége.

E1 **250.** Szerkesszünk egyenlő szárú derékszögű háromszöget, ha adott a kerülete.

E1 **251.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alap és a szár összege, valamint az egyik szög.

E2 **252.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alap és az egyik szár különbsége, valamint *a)* az alapon fekvő szög; *b)* a szárszög.

E1 **253.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott a kerülete és az alapon fekvő szöge.

E1 **254.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott $a + c$, β és m_c.

E1 **255.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott $a - b$, β és m_a.

E1 **256.** Szerkesszünk derékszögű háromszöget a következő adatokból (a és b a befogók, $a > b$, c az átfogó):
a) $a + b$, c; *b)* $a - b$, c; *c)* $a - b$, α; *d)* $c - a$, α; *e)* $a + b + c$, α.

E2 **257.** Szerkesszünk háromszöget a következő adatokból:
a) $b + c, a, \gamma$; *b)* $b + c, a, \alpha$; *c)* $b - c, \alpha, \beta$; *d)* $b + c, a, m_b$; *e)* $b - c, a, m_b$.

K2 **258.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldalának összege és különbsége, valamint a két oldal által bezárt szög.

E1 **259.** Egy O csúcsú szög egyik szárán jelöljünk ki egy P pontot, és adjunk meg egy t szakaszt. Szerkesszünk a másik száron olyan Q pontot, amelyre a $PQ + QO = t$ egyenlőség fennáll.

E1 **260.** Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, ha adott az egyik oldal és a magasság összege.

E1 **261.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az egyik szár és az alaphoz tartozó magasság összege, valamint az alap.

K2 **262.** Adott derékszögű háromszögbe szerkesszünk négyzetet úgy, hogy annak két szomszédos oldala egy-egy befogón legyen.

Egybevágóság

Háromszögek, sokszögek egybevágósága

K2 **263.** Mutassuk meg, hogy ha a háromszöget szét lehet vágni két egybevágó részre, akkor a háromszög egyenlő szárú.

K2 **264.** Bizonyítsuk be, hogy két háromszög egybevágó, ha megegyeznek
a) két oldalban és az egyikhez tartozó súlyvonalban;
b) két szögben és az egyikhez tartozó szögfelezőben;
c) két szögben és a harmadikhoz tartozó szögfelezőben;
d) két szögben és a harmadikhoz tartozó magasságban;
e) két szögben és az egyikhez tartozó magasságban;
f) egy oldalban, egy rajta fekvő szögben és az ehhez tartozó szögfelezőben.

K2 **265.** Bizonyítsuk be, hogy két egyenlő szárú háromszög egybevágó, ha megegyeznek
a) alapjukban és a vele szemközti szögben;
b) alapjukban és a hozzá tartozó magasságban;
c) alapjukban és a szárakhoz tartozó magasságban;
d) alapon fekvő szögükben és az alaphoz tartozó magasságban.

K1 **266.** Bizonyítsuk be, hogy két derékszögű háromszög egybevágó, ha
a) két-két befogójuk egyenlő;
b) átfogójuk és egyik befogójuk egyenlő;
c) egy befogójuk és az ezzel szemközti szögük egyenlő.

K1 **267.** Bizonyítsuk be, hogy két egyenlő szárú derékszögű háromszög egybevágó, ha átfogóik egyenlők.

K1 **268.** Igazoljuk, hogy két egyenlő oldalú háromszög egybevágó, ha magasságuk egyenlő.

K1 **269.** Mutassuk meg, hogy ha két háromszög egybevágó, akkor szükségképpen egyenlők a megfelelő oldalakhoz tartozó *a)* magasságok; *b)* szögfelezők; *c)* súlyvonalak.

K1 **270.** Mutassuk meg, hogy a következő állítás hamis: „Két háromszög egybevágó, ha megegyezik egy oldaluk és két szögük."

K1 **271.** Mutassuk meg, hogy két egyenlő szárú háromszög nem szükségképpen egybevágó, ha egy oldala és két szöge egyenlő.

K1 **272.** Vizsgáljuk meg a következő állítás helyességét: „Két háromszög egybevágó, ha két oldalban és a közös csúcsból kiinduló magasságban megegyeznek."

K2 **273.** Mutassuk meg, hogy ha két háromszög megegyezik két oldalban és az egyikkel szemközti szögben, továbbá tudjuk, hogy a másik egyező oldallal szemközti szög vagy mindkettőjükben hegyesszög, vagy mindkettőjükben tompaszög, akkor a két háromszög egybevágó.

K2 **274.** Mutassuk meg, hogy két konvex négyszög egybevágó, ha egymást követő oldalaikban és egy, a megfelelő oldalak által közrefogott átlóban megegyeznek.

E1 **275.** Igazoljuk, hogy két konvex négyszög egybevágó, ha megegyeznek három oldalukban és az azok által bezárt két szögben.

K1 **276.** Mutassuk meg, hogy két négyszög egybevágóságához általában nem elegendő az, hogy négy megfelelő oldaluk és egy megfelelő szögük megegyezzék.

K2 **277.** Mutassuk meg, hogy az egyenlő szárú háromszögben egyenlők
a) a szárakhoz tartozó súlyvonalak;
b) a szárakhoz tartozó magasságok;
c) az alapon levő szögek felezői.

K1 **278.** Mutassuk meg, hogy ha egy háromszögben az egyik csúcshoz tartozó magasságvonal és súlyvonal egybeesik, akkor a háromszög egyenlő szárú.

K2 **279.** *a)* Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög valamelyik oldalának felezőpontján át párhuzamost húzunk a másik két oldal egyikével, akkor az így kapott egyenes felezi a harmadik oldalt, és a háromszög belsejébe eső szakasza fele annak az oldalnak, amelyikkel párhuzamos.
b) Igazoljuk, hogy ha valamely háromszög két oldalának felezőpontján át egyenest rajzolunk, akkor az párhuzamos a harmadik oldallal, és a felezőpontok közé eső szakasza fele a harmadik oldalnak.

K1 **280.** *(A 279. feladatra épül.)* Rajzoljuk meg az ABC háromszög két súlyvonalát. Felezzük meg a súlyvonalak S metszéspontja és a csúcsok közötti távolságot. E felezési pontokat jelöljük S_1-, S_2-vel, a háromszög oldalfelező pontjait pedig F_1-, F_2-vel. Bizonyítsuk be, hogy az SF_1F_2 háromszög egybevágó az SS_1S_2 háromszöggel.

K1 **281.** *(A 280. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy a háromszög két súlyvonala a csúcsoktól számítva 2:1 arányban osztja egymást.

K2 **282.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben két súlyvonal egyenlő, akkor a háromszög egyenlő szárú.

K1 **283.** Igazoljuk, hogy ha egy háromszögben két magasságvonal egyenlő, akkor a háromszög egyenlő szárú.

K1 **284.** Igazoljuk, hogy egy konvex szög felezőjére emelt merőleges a szárakból egyenlő szakaszokat metsz ki.

K1 **285.** Mutassuk meg, hogy két párhuzamos egyenes pontjait összekötő szakaszok felezőpontjai a párhuzamosok középpárhuzamosán sorakoznak.

K1 **286.** Rajzoljunk fel két egyenlő szélességű és párhuzamos helyzetű párhuzamos sávot. Metsszük ezt el egy egyenessel, és bizonyítsuk be, hogy az egyenesnek a két sávon belüli szakaszai egyenlők.

K2 **287.** Mutassuk meg, hogy a háromszög két oldalfelező pontját összekötő egyenes egyenlő távolságra halad a háromszög mindhárom csúcsától.

K1 **288.** Mutassuk meg, hogy a háromszög bármely csúcsához tartozó súlyvonal egyenese egyenlő távolságra van a másik két csúcstól.

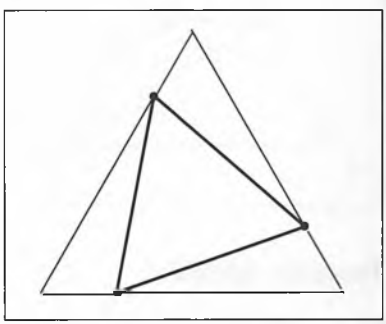
K1 **289.** Rajzoljunk párhuzamos egyeneseket egy háromszög csúcsain át a szemközti oldalakkal. Mutassuk meg, hogy így négy egybevágó háromszöghöz jutunk.

K1 **290.** Rajzoljunk egy derékszögű háromszög befogóira kifelé egy-egy négyzetet, és ezeknek egymástól legtávolabbi csúcsaiból bocsássunk egy-egy merőlegest az átfogó meghosszabbítására. Igazoljuk, hogy a merőlegesek talppontjai egyenlő távolságra vannak az átfogó megfelelő végpontjaitól.

E1 **291.** Az O csúcsú konvex szög egyik szárán jelöljük ki az A, B, másik szárán pedig a C, D pontokat úgy, hogy $OA = OC$ és $OB = OD$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy az AD és BC egyenesek a szög felezőjén metszik egymást. (Ezzel egy új módszert nyerünk a konvex szög felezőjének szerkesztésére.)

K1 **292.** Egy egyenlő oldalú háromszög minden oldalát hosszabbítsuk meg egyik irányban ugyanazzal a szakasszal úgy, hogy mindegyik csúcsnál csak egy meghosszabbítás kezdődjék. Bizonyítsuk be, hogy az új végpontok alkotta háromszög is egyenlő oldalú.

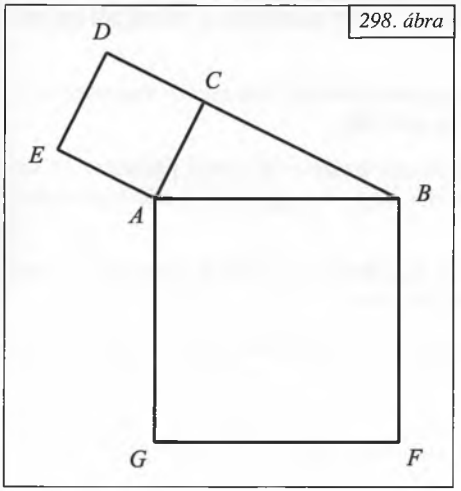
K1 **293.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenlő oldalú háromszög minden oldalát ugyanabban az arányban osztjuk két részre, akkor az osztópontok egy egyenlő oldalú háromszög csúcsai. *(293. ábra)*



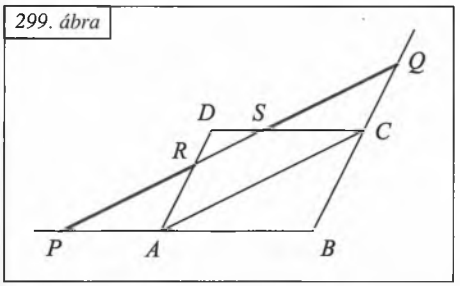
293. ábra ▶

K1 **294.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenlő oldalú háromszögbe egy másik egyenlő oldalú háromszöget írunk, akkor a háromszög csúcsai az eredeti háromszög mindhárom oldalát ugyanabban az arányban osztják két részre.

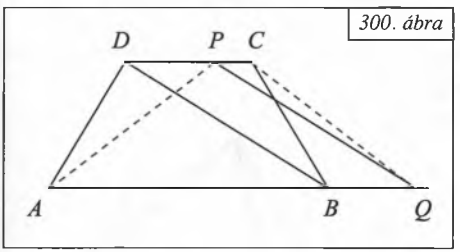
K2 **295.** Írjunk négyzetbe egyenlő oldalú háromszöget, melynek az egyik csúcsa egy négyzetcsúcsba, a másik két csúcsa a két nem ide befutó oldalra esik.
a) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög a négyzetből két egybevágó háromszöget vág le.
b) Szerkesszük meg a négyzetbe a szabályos háromszöget.



298. ábra



299. ábra



300. ábra

E1 **296.** Húzzunk két párhuzamos egyenest egy négyzet két átellenes csúcsán át, és emeljünk ezekre merőlegeseket a másik két csúcsból. Igazoljuk, hogy az így szerkesztett négy egyenes négyzetet határol.

K1 **297.** Mutassuk meg, hogy egy négyzet két szomszédos csúcsa és a szemközti oldalára állított egyenlő szárú háromszögnek az alappal szemközti csúcsa egyenlő szárú háromszöget határoznak meg.

E1 **298.** Rajzoljunk négyzetet egy derékszögű háromszög átfogójára és egyik befogójára. *(298. ábra)* Bizonyítsuk be, hogy az ábrán $EB = CG$.

E1 **299.** A *299. ábra* szerint párhuzamost húztunk egy paralelogramma egyik átlójával. Bizonyítsuk be, hogy $PR = SQ$.

E1 **300.** Toljuk el egy húrtrapéz egyik átlóját a párhuzamos oldalak mentén. *(300. ábra)* Új helyzetének végpontjait egy-egy trapézcsúccsal kötik össze a szaggatott szakaszok. Bizonyítsuk be, hogy $AP = CQ$.

K1 **301.** Egy kör minden érintőjére – az érintési pontból kiindulva – azonos irányban mérjünk fel egy adott szakaszt. Határozzuk meg a végpontok halmazát.

Tengelyes tükrözés

K1 **302.** Tükrözzünk egy pontot egy adott egyenesre csak körzőt használva.

K2 **303.** *a)* Tükrözzünk egy háromszöget az egyik oldalegyenesére. Milyen esetben alkot az eredeti és a tükörkép háromszög együtt négyzetet, rombuszt, egyenlő szárú háromszöget, szabályos háromszöget, konvex deltoidot, konkáv deltoidot?
b) Tükrözzünk egy háromszöget az egyik szögfelező egyenesére. Milyen alakzatot alkot az eredeti és a tükörkép háromszög együtt?
c) Tükrözzünk egy háromszöget az egyik magasságvonalára.

K1 **304.** Tükrözzünk egy kört egy a középpontját nem tartalmazó adott t egyenesre.

E1 **305.** Egy háromszög három oldalegyenese a, b és c. Tükrözzük a sík egy tetszőleges pontját a-ra, majd a tükörképet b-re, ezt a tükörképet c-re, és így tovább újra c-re, b-re végül a-ra. Mutassuk meg, hogy a tükrözéssorozattal visszajutunk az eredeti pontba.

K1 **306.** A sík mely egyenesei egyeznek meg tengelyes tükörképükkel?

K2 **307.** Mutassuk meg, hogy az egyenes és tükörképe a tengellyel ugyanakkora szöget zár be.

K2 **308.** Mutassuk meg, hogy egy pontnak és a tükörképének a tengely egy tetszőleges pontjától mért távolsága ugyanakkora.

K2 **309.** Legyen t_1 és t_2 két merőleges egyenes, és menjen át metszéspontjukon az a egyenes. Bizonyítsuk be, hogy ha a-t t_1-re tükrözzük, ugyanazt az egyenest nyerjük, mintha t_2-re tükröztük volna.

K1 **310.** Mutassuk meg, hogy két egyenlő sugarú körhöz mindig található olyan egyenes, amelyre nézve a két kör tükrös.

K1 **311.** Hány szimmetriatengelye lehet az egyenlő szárú háromszögnek?

K1 **312.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögnek két szimmetriatengelye van, akkor van három is.

K1 **313.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszögben az egyik szög 30°-os, akkor az ezzel szemközti befogó fele az átfogónak.

K1 **314.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszögben az egyik hegyesszög kétszerese a másiknak, akkor az átfogó is kétszerese az egyik befogónak.

K1 **315.** Nevezzünk meg olyan síkbeli alakzatokat, amelyeknek végtelen sok szimmetriatengelye van.

E1 **316.** Adott három egyenes: a, b, c. Szerkesszünk olyan e egyenest, amely merőleges b-re, és b felezi az e egyenes a és c közötti szakaszát.

K2 **317.** Adott három egyenes: a, b, c. Szerkesszünk négyzetet, amelynek két szemközti csúcsa az a, illetve c egyeneseken van, másik két csúcspontja pedig b-n.

K2 **318.** Adott az A és B pont továbbá egy t egyenes. Szerkesszünk a t-n olyan T pontot, hogy a TA és TB szakaszok a T pontban t-re állított merőleges különböző oldalán helyezkedjenek el, és mindkét szakasz ugyanakkora szöget zárjon be t-vel.

K2,GY **319.** Egy egyenes országút ugyanazon oldalán helyezkedik el két község. Mindkét községbe bevezetik a villanyt, és a két község számára közvetlenül az országút mellett közös transzformátorállomást létesítenek. Hol kell az állomást elhelyezni, hogy a lehető legrövidebb vezetékre legyen szükség?

K2,GY **320.** Mutassuk meg, hogy ha egy fénysugár egy A pontból kiindulva síktükörről való visszaverődés után egy B pontba jut, akkor az A pont, a tükör és a B pont között megtett út a lehető legrövidebb.

E1 **321.** Bizonyítsuk be, hogy ha az egyenlő szárú háromszögben összeadjuk az alap bármely pontjának a két szár egyenesétől mért távolságát, mindig ugyanazt az értéket kapjuk.

E1 **322.** *(A 321. feladatra épül.)* Igazoljuk, hogy az egyenlő oldalú háromszög bármely belső pontjának a három oldaltól mért távolságösszege mindig ugyanakkora.

E1 **323.** *(A 321. feladatra épül.)* Egy hegyesszögű háromszög egyik oldalán szerkesszünk olyan pontot, amelynek a másik két oldaltól mért távolsága együttvéve akkora, mint egy megadott szakasz.

E1 **324.** *(A 322. feladatra épül.)* A szabályos háromszög tetszőleges belső pontjából az oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjai az oldalakat két részre osztják. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott hat szakasz közül három-három egymáshoz nem csatlakozónak az összege független a belső pont választásától.

E2 **325.** Egy hegyesszög szárai között adott egy pont. Szerkesszük meg a ponttól kiinduló és oda visszatérő legrövidebb utat, amely érinti a szögszárakat.

E2 **326.** *(A 325. feladatra épül.) a)* Egy hegyesszögű háromszög egyik oldalán tűzzünk ki egy pontot. Írjunk a háromszögbe lehető legkisebb kerületű háromszöget úgy, hogy egyik csúcsa a kitűzött pont legyen.
b) Mutassuk meg, hogy az *a)* részben szereplő beírt háromszög kerülete akkor a legkisebb, ha a kitűzött pont a magasság talppontja.

E2 **327.** *(A 326. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy egy hegyesszögű háromszögbe írt háromszögek közül a talpponti háromszög kerülete a legkisebb. (A talpponti háromszög csúcsai a magasságok talppontjai.)

E2 **328.** Egy hegyesszög szárai között helyezkedik el az A és B pont. Szerkesszük meg az A és B között a legrövidebb utat, ha annak érintenie kell a két szögszárat is.

V,GY **329.** *(A 328. feladatra épül.)* Téglalap alakú biliárdasztalra két golyót helyezünk el. Milyen irányba kell ellökni az egyik golyót, hogy az mind a négy falat érintve eltalálja a másik golyót?

E2 **330.** Adott az e egyenes, és tőle különböző távolságra az A és a B pont. Szerkesszük meg e-nek azt a pontját, amelynek a két adott ponttól mért távolságkülönbsége a lehető legnagyobb.

E1 **331.** Egy téglalap átlóinak metszéspontján át fektessünk egy tetszőleges egyenest. Ez az AB, illetve a CD oldalt a P, illetve Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a legrövidebb út, amely P-től az egyik szomszédos oldalig és onnan a Q-ba vezet, egyenlő a téglalap átlójával.

E1 **332.** Adott az e egyenes, rajta a P pont és az e-re nem illeszkedő A pont. Szerkesszünk az egyenesen olyan X pontot, amelyre az $AX + XP$ összeg egy adott szakasszal lesz egyenlő.

E1 **333.** Adott az e egyenes, rajta a P pont és az e-re nem illeszkedő A pont. Szerkesszünk az egyenesen olyan X pontot, amelyre az $AX - XP$ különbség egy adott szakasszal lesz egyenlő.

E2 **334.** Megadunk egy a és b egyenest, az előbbin egy A pontot. Szerkesszünk az a egyenesen olyan X pontot, amely A-tól és b-től is egyenlő távolságra van.

E1 **335.** Adott az e egyenes és egyik oldalán két pont, A és B. Szerkesszük meg az e egyenesen az X pontot úgy, hogy AX felezze az e egyenes BX-szel alkotott valamelyik szögét.

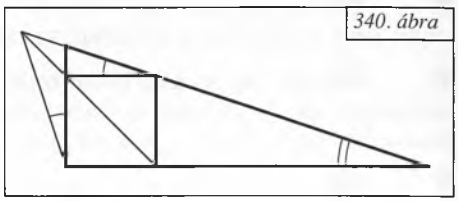
K1 **336.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott a szimmetriatengelye, az azon levő csúcs, továbbá a másik két csúcson átmenő egy-egy egyenes.

K2 **337.** Adott három egyenes: a, b, f. Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, amelynek f a szögfelezője, a és b pedig egy-egy csúcsán megy át.

K2 **338.** Adott két egymást nem metsző kör és közöttük egy egyenes. Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, amelynek egy-egy csúcsa a körökön, egyik magassága pedig az adott egyenesen van.

K2 **339.** Adott a P és Q pont. A P ponton átmenő minden egyenesre tükrözzük a Q pontot. Milyen ponthalmazt alkotnak a tükörképek?

E1 **340.** A *340. ábra* szerint négyzetet rajzoltunk egy derékszögű háromszögbe, majd meghosszabbítottuk a négyzet egyik átlóját és a háromszög átfogóját, metszéspontjukat pedig összekötöttük a derékszögű csúccsal. Igazoljuk, hogy a jelölt szögek egyenlők.


340. ábra

E1 **341.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egy csúcsának a másik két csúcshoz tartozó négy szögfelező egyenesre vonatkozó tükörképei egy egyenesen vannak.

E1 **342.** *(A 341. feladatra épül.)* Állítsunk merőlegeseket a háromszög egyik csúcsából a másik két csúcshoz tartozó két-két szögfelező egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy a négy merőleges talppontjai egy egyenesen vannak.

K1 **343.** Az ABC háromszög BC oldalának P pontját tükrözzük a γ szögfelezőjére, majd a tükörképet α szögfelezőjére, annak tükörképét pedig β szögfelezőjére. Mutassuk meg, hogy a végeredményül kapott pont az eredetivel egy oldalegyenesen van.

E2 **344.** *(A 343. feladatra épül.)* Adottak az egy ponton átmenő f, g és h egyenesek, valamint a P pont. Szerkesszünk háromszöget, amelynek f, g és h a szögfelezői, és P az egyik oldalegyenesének egy pontja.

K2 **345.** Adott egy háromszög két csúcsa és a harmadikból induló szögfelezője. Szerkesszük meg a háromszöget.

E1 **346.** *(A 343. feladatra épül.)* Adott egy kör és a középpontjából kiinduló három félegyenes. Szerkesszünk háromszöget, amelynek az adott félegyenesek szögfelezői, az adott kör pedig a beírt köre.

K1 **347.** Egy háromszög és az egyik oldalfelező merőlegesre vett tükörképe együtt trapézt alkotnak. Mutassuk meg, hogy e trapéz egyik szárának az átlóval bezárt szöge az eredeti háromszög két szögének különbsége.

E1 **348.** *(A 347. feladatra épül.)* Szerkesszünk háromszöget, ha ismert két oldala és az ezekkel szemközti szögek különbsége.

E1 **349.** *(A 347. feladatra épül.)* Adott egy háromszög egyik oldalegyenesének a szemközti csúcsból induló szögfelezővel bezárt szöge és a másik két oldal hossza. Szerkesszük meg a háromszöget.

E1 **350.** *(A 347. feladatra épül.)* Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott $\beta - \gamma$, m_a, b.

V **351.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a rajta levő szögek különbsége és a hozzá tartozó magasság.

E1 **352.** Szerkesszük meg az $ABCD$ négyszöget, ha ismerjük oldalait, és BD átlója felezi a B csúcsnál levő szöget.

E2 **353.** Mutassuk meg, hogy egy pontnak három különböző egyenesre vonatkozó tükörképe akkor és csak akkor lehet egy egyenesen, ha a pontból az egyenesre emelt merőlegesek talppontjai is egy egyenesen vannak.

E2 **354.** Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott három oldalfelező merőlegese és az egyik oldal egy pontja.

V **355.** Egy egyenes egyik partján két kör helyezkedik el. Szerkesszünk az egyenesen olyan pontot, amelyből a körökhöz húzott érintők egyenlő szöget zárnak be az egyenessel.

V **356.** Egy hegyesszög szárai között adott két pont. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, amelynek alapja az egyik szögszáron van, szárai átmennek egy-egy adott ponton, harmadik csúcsa pedig a másik szögszáron helyezkedik el.

V **357.** Szerkesszük meg az $ABCD$ négyszöget, ha adott annak AB és CD oldala, a BC és AD oldalak összege és az A csúcsnak a CD oldalegyenestől mért távolsága, továbbá tudjuk, hogy a C és D csúcsnál fekvő szögek egyenlők.

E2 **358.** Mutassuk meg, hogy ha egy sokszögnek több szimmetriatengelye van, akkor azok egy ponton mennek át.

V **359.** Osszunk fel egy félkört páratlan számú egyenlő részre. Az osztópontokon át szerkesszünk párhuzamosokat az átmérővel. Húzzuk meg a két középső osztóponthoz tartozó sugarakat, és bizonyítsuk be, hogy a párhuzamosok két sugár közé eső részeinek összege független az osztópontok számától.

Középpontos tükrözés

K1 **360.** Rajzoljunk fel egy tetszőleges négyszöget, és tükrözzük azt az egyik csúcsára.

K1 **361.** Mutassuk meg, hogy egy szakasz és egy pontra vonatkozó tükörképe vagy párhuzamosak, vagy egy egyenesbe esnek.

K1 **362.** Adjunk meg két egyenlő szakaszt. Szerkesszük meg azt a pontot, amelyre a szakaszokat tükrözve azok egymásba mennek át.

K1 **363.** Nevezzünk meg olyan síkbeli alakzatokat, amelyeknek végtelen sok szimmetriaközéppontja van.

K1 **364.** Mutassuk meg, hogy egy háromszög és az egyik oldalának felezőpontjára vett tükörképe együtt paralelogrammát alkot.

K2 **365.** Igazoljuk, hogy ha egy hatszög átellenes oldalai párhuzamosak és egyenlők, akkor a szemközti csúcsokat összekötő átlók egy pontban metszik egymást.

K2 **366.** Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög nem lehet középpontosan tükrös alakzat.

K1 **367.** Tükrözzünk egy egyenlő oldalú háromszöget a középpontjára. Mi lesz az eredeti és a tükrözött háromszög közös része?

K1 **368.** Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszöget az átfogóhoz tartozó súlyvonal két egyenlő szárú háromszögre bontja.

E1 **369.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög egyik szöge 15°-os, akkor az átfogóhoz tartozó magasság negyede az átfogónak.

K1 **370.** Mutassuk meg, hogy ha a középpontos tükrözésnél egy egyenes önmagába megy át, akkor a középpont rajta van az egyenesen.

E1 **371.** Tűzzünk ki egy e egyenest és rajta egy O pontot. A sík egy tetszőleges pontját tükrözzük az e-re, a tükörképet az O-ra, majd ismét az e-re és újra az O-ra. Mutassuk meg, hogy így mindig visszajutunk az eredeti pontba.

K1 **372.** Tűzzünk ki egy pontot, amely egyenlő távolságban van két párhuzamos egyenestől. Mutassuk meg, hogy a pont felezi minden rajta átmenő egyenesnek a két párhuzamos közötti szakaszát.

K1 **373.** Mutassuk meg, hogy ha két párhuzamos egyenest középpárhuzamosuk egy pontjára tükrözünk, akkor azok egymásba mennek át.

K1 **374.** Húzzunk egyenest egy paralelogramma átlóinak közös pontján át. Mutassuk meg, hogy ez az egyenes a paralelogrammát két olyan részre bontja, amelyek egymással középpontosan tükrösek.

E1 **375.** Igazoljuk, hogy ha egy négyzet köré paralelogrammát írunk, akkor a négyzet és a paralelogramma középpontja egybeesik.

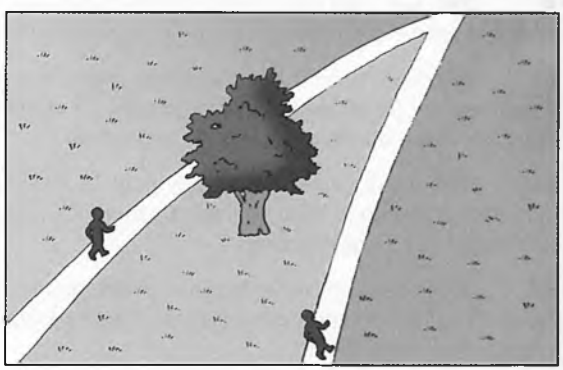
K2 **376.** Bizonyítsuk be, hogy egy egyenes csak úgy lehet két ponttól egyenlő távol, ha vagy párhuzamos a két pontot összekötő egyenessel, vagy átmegy a két pont határolta szakasz felezőpontján.

K1 **377.** Szerkesszünk egy háromszög síkjában olyan egyenest, amely annak három csúcsától egyenlő távolságban halad.

K1 **378.** Egy konvex szög szárai között kitűzünk egy pontot. Szerkesszünk ezen át olyan szelőt, amelynek a szárak közé eső szakaszát a pont felezi.

K2 **379.** *(A 378. feladatra épül.)* Egy konvex szög szárai között kitűzünk egy pontot. Szerkesszünk négyzetet, amelynek két átellenes csúcsa egy-egy szögszáron van, középpontja pedig az adott pont.

K2,GY **380.** *(A 378. feladatra épül.)* Két egyenes út szeli át a mezőt. A mezőn áll egy fa. Az egyik úton megy András, a másikon Barnabás. *(380. ábra)* Hol van a két útnak az a pontja, amelyekben állva a fiúk egyenlő távol vannak a fától, de attól nem láthatják egymást?



380. ábra ▶

K2 **381.** *(A 378. feladatra épül.)* Egy konvex szög tartományán kívül kitűzött pontból szerkesszünk olyan szelőt, amelynek a közelebbi szárig terjedő darabja egyenlő a szárak közé eső darabjával.

K2 **382.** *(A 378. feladatra épül.)* Adott egy négyszög és belsejében egy pont. Szerkesszünk olyan paralelogrammát, amelynek középpontja az adott pont, szemközti csúcsai pedig az adott négyszög szemközti oldalegyeneseire esnek.

E1 **383.** Rajzoljunk két pár párhuzamost, és tűzzünk ki egy pontot. Szerkesszünk a ponton át olyan szelőt, melynek a két-két párhuzamos közé eső darabjai egyenlők.

K2 **384.** Adjunk meg két párhuzamost, és tűzzünk ki rajtuk kívül egy pontot. A ponton át szerkesszünk szelőt úgy, hogy két metszéspontjának a kitűzött ponttól mért távolsága együttvéve akkora legyen, mint egy megadott szakasz.

K1 **385.** Igazoljuk, hogy ha egy kört egy pontjára tükrözünk, a tükörkép érinti az eredeti kört.

K2 **386.** Mutassuk meg, hogy két egymást metsző egyenlő sugarú kör középpontosan szimmetrikus a közös húr felezőpontjára.

E1 **387.** *(A 386. feladatra épül.)* Két egymást metsző egyenlő sugarú kör közös pontjain át párhuzamosokat húzunk. Bizonyítsuk be, hogy a két párhuzamos a körökből két-két egyenlő és párhuzamos húrt metsz ki.

K1 **388.** Tükrözzük két egymást metsző kör egyikét az egyik közös pontra, és szerkesszük meg a helyben maradt körnek és a tükörképként kapott körnek a közös húregyenesét. Mutassuk meg, hogy ebből az eredeti két kör egyenlő hosszú húrokat metsz ki.

K1 **389.** *(A 388. feladatra épül.)* Két egymást metsző kör egyik metszéspontján át szerkesszünk olyan szelőt, amelyből a két kör egyenlő húrokat metsz ki.

K1 **390.** Adott a k és l kör, valamint a P pont. Szerkesszünk a ponton át olyan szelőt, aminek k-val való A, B és l-lel való C, D metszéspontjaira teljesül, hogy P felezi az AC, AD, BC, BD szakaszok közül legalább az egyiket.

K2 **391.** Szerkesszünk két koncentrikus kört metsző egyenest, amelyből a két kör három egyenlő szakaszt metsz ki.

V **392.** Két kör közös pontján át húzzunk a körökhöz szelőt úgy, hogy a körök által kimetszett húrok különbsége egy adott szakasszal legyen egyenlő.

E1 **393.** *(A 378. és a 390. feladatra épül.)* Adott két kör, két egyenes továbbá egy pont. Szerkesszünk paralelogrammát, amelynek középpontja az adott pont, szemközti csúcsai pedig a körökön, illetve az egyeneseken vannak.

E1 **394.** Adott egy kör, rajta egy pont és a kör külső tartományában egy egyenes. Szerkesszünk a ponton át olyan egyenest, amelynek a pont és az egyenes közötti szakasza egyenlő a körön belüli szakaszával.

K1 **395.** Mutassuk meg, hogy az a kör, amely egy paralelogramma középpontján és az egyik oldalának végpontjain megy át, érinti a középponton és az előbbivel szemközti oldal végpontjain átmenő kört.

E1 **396.** Tűzzünk ki egy körön két pontot, A-t és B-t. Fussa be az X pont a kört, és szerkesszük meg minden helyzetben azt az Y pontot, amellyel az Y az $AXBY$ paralelogrammában az X-szel szemközti csúcs lesz. Milyen halmazt alkotnak az Y pontok?

E1 **397.** Egy egyenlő szárú háromszög alapjának egyik végpontjától kezdve mérjünk fel az egyik szárra egy távolságot. A másik szárat hosszabbítsuk meg az alapon túl egy ugyanakkora darabbal. Igazoljuk, hogy az alap felezi az így kapott két pontot összekötő szakaszt.

K2 **398.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott
a) két oldal és a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal;
b) egy oldalhoz tartozó súlyvonal, az oldallal szemközti szög és egy másik oldal;
c) egy oldal, a hozzá tartozó magasság és egy másik oldalhoz tartozó súlyvonal;
d) egy oldal, a másikhoz tartozó súlyvonal és a harmadikhoz tartozó magasság;
e) egy oldal, az oldalon fekvő egyik szög és annak csúcsából induló súlyvonal.

K2 **399.** Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög akkor és csakis akkor trapéz, ha egyik középvonala egyenlő az általa nem felezett oldalak számtani közepével.

E1 **400.** Szerkesszünk trapézt, ha adott a két párhuzamos oldal összege, továbbá
a) a szárak hossza és a trapéz magassága;
b) az alapon levő két szög és a trapéz magassága;
c) az átlók hossza és egyik szára.

E2 **401.** Szerkesszünk trapézt, ha ismerjük
a) két átlóját, az átlók hajlásszögét és az egyik alapot;
b) két átlóját, az átlók hajlásszögét és az alapok különbségét.

V **402.** Szerkesszünk négyszöget, ha megadott sorrendben ismert a négy oldala és az egyik középvonala.

Pont körüli forgatás

K1 **403.** Az ABC háromszögben $\alpha = 39°$, $\beta = 98°$. Mekkora szöggel kell elforgatni a B csúcs körül a BC oldalt, hogy az az AC oldallal párhuzamos legyen?

E1,GY **404.** Mutassuk meg, hogy ha egy mozdulatlan fénysugár útjába helyezett síktükröt a fénysugarak síkjára merőleges tengely körül α szöggel elforgatunk, akkor a visszavert fénysugár 2α szöggel fordul el. (Ez a módszer alkalmas arra, hogy a fizikában igen kis elmozdulást kimutathassanak.)

K1 **405.** Rajzoljunk egy háromszöget, és forgassuk el + 90°-kal az egyik csúcsa körül.

K1 **406.** Egy szögtartományban tűzzünk ki egy pontot, és forgassuk el e körül a szöget – 90°-kal.

K1 **407.** Adjunk meg egy irányított szöget, és forgassunk el egy adott egyenest az adott szöggel, ha a középpont *a)* az egyenesen van; *b)* nincs az egyenesen.

K1 **408.** Tűzzünk ki egy pontot és egy egyenest. Forgassuk el adott középpont körül
a) a pontot, hogy illeszkedjen az egyenesre; *b)* az egyenest, hogy illeszkedjen a pontra.

K2 **409.** Egy egyenest adott pont körül α szöggel elforgatunk. Mekkora szöget zár be az egyenes az elforgatottjával?

K2 **410.** *(A 409. feladatra épül.)* Adott a P pont és az e és f metsző egyenespár. Forgassuk el P körül az e egyenest úgy, hogy *a)* az f egyenessel párhuzamos legyen; *b)* az f egyenesre merőleges legyen.

K2 **411.** Szerkesszünk olyan középpontot, amely körül egy adott A pont egy adott B pontba forgatható.

K1 **412.** Igazoljuk, hogy ha két alakzat egymásba forgatható, akkor bármely két megfelelő pont által meghatározott szakasz felező merőlegese átmegy a középponton.

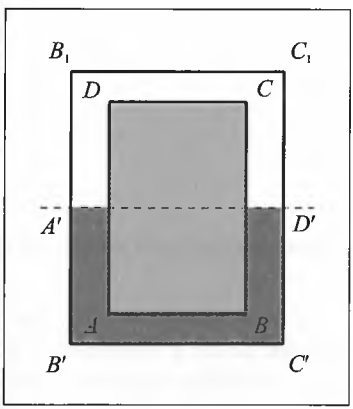
K1 **413.** Rajzoljunk fel két egyenlő (de nem párhuzamos) szakaszt. Szerkesszünk pontot, amely körül a két szakasz egymásba forgatható.

E1 **414.** Rajzoljunk fel két egybevágó, egyező körüljárású ABC és $A'B'C'$ háromszöget úgy, hogy megfelelő oldalaik ne legyenek párhuzamosak. Mutassuk meg, hogy az AA', BB', CC' felező merőlegesei egy ponton mennek át.

E1 **415.** Adott két egybevágó, egyező körüljárású, nem egyenlő szárú háromszög, amelyeknek megfelelő oldalaik nem párhuzamosak. Szerkesszünk olyan pontot, amely körül a két háromszög egymásba forgatható.

E1 **416.** Rajzoljunk két egybevágó egyenlő oldalú háromszöget (oldalaik ne legyenek párhuzamosak). Szerkesszünk pontot, amely körül a két háromszög egymásba forgatható.

E1 **417.** Rajzoljunk fel két egybevágó, egyező körüljárású téglalapot (oldalaik ne legyenek párhuzamosak). Szerkesszünk pontot, amely körül a téglalapok egymásba forgathatók.



◄ *418. ábra*

E1,GY **418.** *(A 417. feladatra épül.)* Összehajtható, téglalap alakú asztalt akarunk készíteni úgy, hogy az asztallap összehajtva az $ABCD$, derékszöggel elforgatva az $A'B'C'D'$ és szétnyitva a $B_1B'C'C_1$ helyzetet foglalja el. Hová kell elhelyeznünk a forgástengelyül szolgáló csapszeget? *(418. ábra)*

K1 **419.** Milyen forgatások visznek át egy négyzetet önmagába?

K1 **420.** Milyen forgatások visznek át egy szabályos háromszöget önmagába?

K1 **421.** Egy egyenlő oldalú háromszög csúcsai A, B és C. Húzzunk a C-n át egy egyenest és *a)* az A pont körül forgassuk el úgy, hogy menjen át a B ponton; *b)* a háromszög középpontja körül forgassuk el úgy, hogy az egyenes az A ponton menjen át.

K2 **422.** Tűzzünk ki egy egyenest és rajta kívül egy O pontot. Fussa be P az egyenes összes pontját, és tekintsük az összes azonos körüljárású POQ egyenlő oldalú háromszöget. Milyen ponthalmazt alkotnak a Q pontok?

K2 **423.** Rajzoljunk két párhuzamos egyenest és közöttük egy pontot. Szerkesszünk olyan egyenlő oldalú háromszöget, amelynek egyik csúcsa a kitűzött pont, másik két csúcsa pedig egy-egy párhuzamosra esik.

K2 **424.** Rajzoljunk három párhuzamos egyenest. Szerkesszünk olyan egyenlő oldalú háromszöget, amelynek egy-egy csúcsa egy-egy párhuzamosra esik.

E1 **425.** Adott két metsző egyenes és egy rájuk nem illeszkedő pont. Szerkesszünk olyan egyenlő oldalú háromszöget, amelynek egy-egy csúcsa az egyeneseken van és *a)* egyik csúcsa az adott pont; *b)* középpontja az adott pont.

E1 **426.** Írjunk egy adott háromszögbe szabályos háromszöget úgy, hogy egy csúcsa az egyik oldal adott pontja legyen.

E1 **427.** Rajzoljunk két egyenest, és tűzzünk ki egy pontot. Szerkesszünk egyenlő szárú derékszögű háromszöget úgy, hogy a derékszögű csúcs a pontban, a hegyesszögű csúcsok pedig egy-egy egyenesen legyenek.

E1 **428.** Rajzoljunk két párhuzamost és egy rájuk nem illeszkedő pontot. Szerkesszünk négyzetet, amelynek egyik csúcsa a kitűzött pont, két átellenes csúcsa pedig egy-egy párhuzamoson van.

E1 **429.** Forgassunk el egy kört *a)* egyik pontja körül derékszöggel; *b)* egy külső pont körül úgy, hogy érintse az eredetit.

E1 **430.** Rajzoljunk meg egy kört, egy egyenest és egy pontot. Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget úgy, hogy egy-egy csúcsa a körön, az egyenesen, és a pontban legyen.

E1 **431.** Adott két kör és egy pont. Szerkesszünk olyan egyenlő oldalú háromszöget, amelynek egy-egy csúcsa az egyik körön, a másik körön, ill. az adott pontban van.

E2 **432.** Rajzoljunk meg három koncentrikus kört. Szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek három csúcsa egy-egy körön van.

E1 **433.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyzet csúcsai egy paralelogramma egy-egy oldalegyenesén vannak, akkor a négyzet és a paralelogramma középpontja egybeesik.

E1 **434.** Rajzoljunk egy paralelogrammát, és szerkesszünk négyzetet, amelynek csúcsai a paralelogramma egy-egy oldalegyenesén helyezkednek el.

E2 **435.** Bizonyítsuk be, hogy egy négyzet két szemközti oldalegyenese közé eső tetszés szerinti szakasz ugyanakkora, mint a rá bárhol emelt merőlegesnek a másik két oldalegyenes közé eső szakasza.

E2 **436.** *(A 435. feladatra épül.)* Szerkesszünk négyzetet, ha adott mind a négy oldalegyenesének egy-egy pontja.

E2 **437.** Adott a P, Q, R pont. Szerkesszünk négyzetet, amelynek P a középpontja, a Q és az R pont pedig egy-egy szomszédos oldal egyenesére esik.

E1 **438.** Adott a P, Q, R pont. Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, amelynek középpontja a P pont, a Q és az R pedig egy-egy oldalegyenesére esik.

K2 **439.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott a szárak által bezárt szög nagysága, a szöghöz tartozó csúcs és két egyenes, amelyeken az alap egy-egy csúcsa fekszik.

K2 **440.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenlő oldalú háromszögbe beírunk egy egyenlő oldalú háromszöget, akkor a két háromszög középpontja egybeesik.

E1 **441.** *(A 440. feladatra épül.)* Szerkesszünk adott egyenlő oldalú háromszögbe adott oldalhosszúságú egyenlő oldalú háromszöget.

E1 **442.** Forgassunk el egy egyenlő oldalú háromszöget a középpontja körül, és jelöljük meg az eredeti és az elforgatott oldalegyenesek metszéspontjait (ha léteznek). Bizonyítsuk be, hogy a három metszéspont ismét egyenlő oldalú háromszöget határoz meg.

E1 **443.** Két koncentrikus kör között tűzzünk ki egy P pontot. A P ponton át szerkesszünk szelőt, amelynek a két kör közé eső darabja adott hosszúságú.

E2 **444.** Szerkesszük meg az *ABC* háromszög *AC* és *BC* oldalára kifelé az *ACPQ* és *CBRS* négyzeteket. Mutassuk meg, hogy a *PS* szakasz kétszer akkora, mint a háromszög *C*-hez tartozó súlyvonala és merőleges rá.

E2 **445.** Szerkesszük meg az *ABC* háromszög *AC* és *BC* oldalára kifelé az *ACPQ* és *CBRS* négyzeteket. Bizonyítsuk be, hogy a *BQ* és az *AR* egyenesek a *C*-hez tartozó magasságvonalon metszik egymást.

E2 **446.** Szerkesszünk egy paralelogramma oldalai fölé (kifelé) négyzeteket. Mutassuk meg, hogy a négyzetek középpontjai ismét négyzetet alkotnak.

Eltolás

K1 **447.** Rajzoljunk egy háromszöget, és adjunk meg egy vektort. Toljuk el a háromszöget az adott vektorral.

K1 **448.** Rajzoljunk egy tetszőleges négyszöget, és tűzzünk ki egy pontot. Toljuk el a négyszöget úgy, hogy egyik csúcsa az adott pontba kerüljön.

K1 **449.** Adjunk meg egy kört és egy négyzetet. Toljuk el a négyzetet úgy, hogy középpontja a kör középpontjába kerüljön.

K1 **450.** Adott két egyenes. Szerkesszünk az egyik egyenesen olyan szakaszt, amelynek a másik egyenesen levő merőleges vetülete adott hosszúságú.

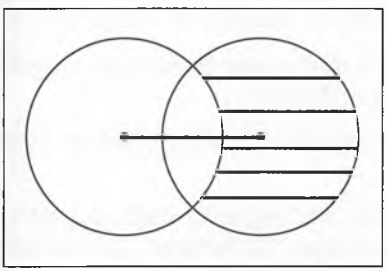
E1 **451.** Adott egy szakasz és rajta egy pont. Szerkesszünk a ponton át egy egyenest úgy, hogy a szakasznak az egyenesen levő merőleges vetülete adott hosszúságú legyen.

E1 **452.** Egy háromszög egyik csúcsán át szerkesszünk egyenest úgy, hogy a szemközti oldalnak az egyenesen levő merőleges vetülete adott hosszúságú legyen.

K2 **453.** Adjunk meg egy egyenest és rajta kívül két pontot. Illesszünk a pontokra párhuzamosokat úgy, hogy azok az egyenesből adott hosszúságú szakaszt messenek ki.

K2 **454.** Rajzoljunk egy háromszöget és két egyenest. Toljuk el a háromszöget az egyik egyenessel párhuzamosan úgy, hogy kijelölt csúcsa a másik egyenesre kerüljön.

K1 **455.** Rajzoljunk két egybevágó háromszöget olyan helyzetben, hogy a megfelelő oldalvektoraik egyenlők legyenek. Bizonyítsuk be, hogy a két háromszög eltolással egymásba vihető.



K1 **456.** A *456. ábrán* két egyenlő sugarú kört rajzoltunk. A színes szakaszok a két kör centrálisával párhuzamosak. Mutassuk meg, hogy ezek a szakaszok egyenlők is a centrálissal.

◀ *456. ábra*

K2 **457.** Adott két metsző egyenes és egy szakasz. Toljuk el a szakaszt úgy, hogy végpontjai egy-egy adott egyenesre kerüljenek.

E1 **458.** Szerkesszünk paralelogrammát úgy, hogy két szomszédos csúcsa két előre kitűzött pont legyen, másik két csúcsa pedig adott egyenesekre essék.

E1 **459.** Írjunk egy háromszögbe paralelogrammát úgy, hogy a paralelogramma minden csúcsa a háromszög valamelyik oldalára essen, és egyik oldala pedig egy adott szakasszal legyen párhuzamos és egyenlő.

K2 **460.** Adjunk meg egy kört és egy szakaszt. Toljuk el a szakaszt úgy, hogy a körnek húrja legyen.

E1 **461.** *(A 460. feladatra épül.)* Szerkesszünk paralelogrammát úgy, hogy két szomszédos csúcsa két adott pont legyen, másik két csúcsa pedig egy adott körön legyen.

E1 **462.** *(A 461. feladatra épül.)* Adott egy kör és egy szakasz. Szerkesszünk olyan pontot, amelyre az adott szakaszt tükrözve, végpontjai a körre kerülnek.

K2 **463.** Adjunk meg egy szakaszt és két kört. Toljuk el a szakaszt úgy, hogy végpontjai egy-egy körre kerüljenek.

K2 **464.** Rajzoljunk egy kört és egy egyenest, valamint adjunk meg egy irányt. Szerkesszünk egyenest, amely az adott iránnyal párhuzamos, és az egyenes és kör közötti szakasza adott hosszúságú.

E1 **465.** Egy konvex körcikkbe helyezzünk el az egyik határoló sugarával párhuzamosan egy d hosszúságú szakaszt úgy, hogy egyik végpontja a körívre, másik végpontja a határoló sugárra essék.

K2 **466.** Mutassuk meg, hogy az egyenlő szárú háromszög alapjának egy pontjából a szárakig húzott és a szárakkal párhuzamos szakaszok összege állandó.

E1 **467.** *(A 466. feladatra épül.)* Egy háromszög egyik oldalán szerkesszünk pontot, amelyből a másik két oldalig húzott és az oldalakkal párhuzamos szakaszok összege egy adott szakasszal egyenlő.

E2 **468.** Szerkesszünk trapézt négy adott oldalból.

E2 **469.** Szerkesszünk négyszöget, ha adottak előírt sorrendben az oldalai és két szemközti oldalegyenesének szöge.

E2 **470.** Szerkesszünk négyszöget, ha adottak a szögei és két szemközti oldala.

E2 **471.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyszög nem paralelogramma, és két szemközti oldala egyenlő, akkor a másik két oldalhoz tartozó középvonal vagy párhuzamos az első oldalpár szögét felező egyenessel, vagy rajta van azon.

K2 **472.** Adott ponton át szerkesszünk két párhuzamoshoz olyan szelőt, amelynek a párhuzamosok közé eső szakasza adott hosszúságú.

K2 **473.** *(A 472. feladatra épül.)* Adottak az a, b, c párhuzamos egyenesek (ebben a sorrendben) és az A pont. Szerkesszünk A-n át a párhuzamosokhoz szelőt úgy, hogy annak a és b közé, ill. b és c közé eső darabjainak különbsége előre adott szakasszal legyen egyenlő.

E1 **474.** Egy szög egyik szárán tűzzünk ki két pontot. Szerkesszünk a pontokon át párhuzamosokat, melyeknek a szögszárak közé eső darabjai összesen egy adott szakasszal egyenlők.

E1 **475.** Két egymást metsző kör M közös pontján átmenő szelőből a körök az AM és a BM húrokat metszik ki. Állítsunk merőlegeseket a húrokra a középpontokból. Mutassuk meg, hogy a merőlegesek talppontjainak távolsága egyenlő az AB szakasz hosszának felével.

E2 **476.** *(A 475. feladatra épül.)* Tekintsük két egymást metsző kör M metszéspontján át azokat a szelőket, amelyeknek a körökkel való további metszéspontjait az M pont elválasztja. Bizonyítsuk be, hogy ezek közül a centrálissal párhuzamos szelő esetén a legnagyobb a körök által kimetszett húrok összege.

E2 **477.** *(A 475. feladatra épül.)* Szerkesszünk két egymást metsző kör M metszéspontján át olyan szelőt, amelynek a körökkel való további metszéspontjait az M pont elválasztja, és a keletkezett két húr hosszának összege előre adott.

E1 **478.** Szerkesszünk paralelogrammát, amelynek két szomszédos csúcsa két (különböző sugarú) kör két közös pontja, harmadik csúcsa az egyik, negyedik pedig a másik körön van.

E1 **479.** Legyen egy kör két pontja A és B. Fussa be az X pont a kört, és szerkesszük meg minden helyzetben az Y pontot úgy, hogy az az $ABXY$ paralelogrammában a B-vel szemközti csúcs legyen. Milyen ponthalmazt alkotnak az Y pontok?

E1 **480.** Helyezzünk el egy háromszögben egy AB szakaszt úgy, hogy végpontjai egy-egy oldalegyenesen legyenek. Fussa be az X pont a harmadik oldal egyenesét. Szerkesszük meg X minden helyzetében az Y pontot úgy, hogy az az $ABXY$ paralelogrammában a B-vel szemközti csúcs legyen. Milyen ponthalmazt alkotnak az Y pontok?

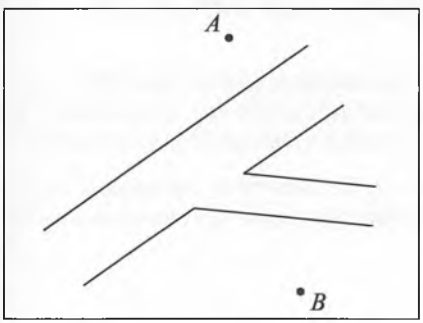
E2 **481.** Tűzzünk ki egy pontot és egy egyenest. Forgassunk a pont körül egy rajta átmenő kört, és minden helyzetében szerkesszük meg a körnek az egyenessel párhuzamos érintőit. Milyen ponthalmazt alkotnak az érintési pontok?

E2 **482.** Mozgassunk egy kört úgy, hogy középpontja egy kört írjon le, és minden helyzetében szerkesszünk hozzá adott irányú érintőket. Milyen ponthalmazt alkotnak az érintési pontok?

E2 **483.** Szerkesszünk az ABC háromszög BC oldalával párhuzamosan egyenest, amely AC-t B'-ben, AB-t C'-ben metszi úgy, hogy $AC' = CB'$.

V **484.** *(A 483. feladatra épül.)* Szerkesszünk az ABC háromszög AC oldalán B' és AB oldalán C' pontokat úgy, hogy $AC' = CB'$ legyen, illetve $B'C'$ egy adott szakasszal legyen egyenlő.

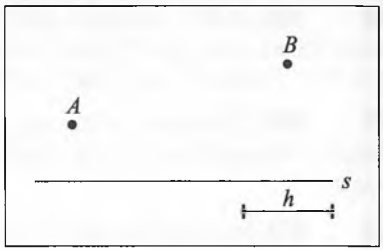
E1,GY **485.** Egy párhuzamos szélű úttesten csak az út irányára merőlegesen lehet átkelni, az utat szegélyező járdákon viszont tetszőleges irányban haladhatunk. Szerkesszük meg azt a legrövidebb utat, amelyen az egyik oldali járda egy pontjából a másik oldali járda egy pontjába lehet jutni.



◀ *486. ábra*

E1,GY **486.** A *486. ábrán* látható útelágazásnál az A pontból B-be szeretnénk eljutni, az úttesten azonban csak merőlegesen lehet átkelni. Szerkesszük meg a legrövidebb utat A és B között.

E1,GY 487. Egy repülőgép azt a feladatot kapja, hogy A-ból kiindulva *(487. ábra)* repüljön az s útig, majd fölötte 3 km-t repülve, a B pontban szálljon le. Szerkesszük meg a gép útját, ha 3 km-nek az ábrán egy h szakasz felel meg, és a gépnek egyenletes sebességgel a lehető legrövidebb idő alatt kell megtennie útját.



487. ábra ▶

E1 488. *a)* Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalait alkalmasan eltolva, azokból háromszög alkotható.
b) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonalaiból képzett háromszög súlyvonalai az eredeti háromszög oldalainak háromnegyedével egyenlők.

Egybevágósági transzformációk egymásutánja

K2 489. Adjunk meg két párhuzamos egyenest és egy háromszöget. Tükrözzük a háromszöget az egyik, majd a tükörképet a másik egyenesre. Mit állapíthatunk meg az eredményről?

K2 490. Igazoljuk, hogy két párhuzamos egyenesre való tükrözés egymásutánja helyettesíthető egy eltolással.

K2 491. Mutassuk meg, hogy két merőleges tengelyre vonatkozó tükrözés egymásutánja helyettesíthető a metszéspontjukra való tükrözéssel. Igazoljuk, hogy a két tengelyes tükrözés sorrendje felcserélhető.

E1 492. Legyen A és B két tetszőleges pont. Tükrözzük a sík egy P pontját A-ra, majd az eredményt B-re. Az így nyert pontot P'-vel jelöljük. Tükrözzük ezután P-t először B-re, majd a tükörképet A-ra. Az eredmény legyen P''. Milyen kapcsolatot találunk P, P' és P'' között?

K2 493. Jelöljük ki a síkon az A és B pontokat. Tükrözzük a sík egy tetszőleges P pontját az A-ra, majd a tükörképet B-re. Mutassuk meg, hogy így ugyanoda jutunk, mint ha a pontot az AB-vel párhuzamosan az AB szakasz kétszeresével eltoljuk. Az eltolás iránya A-ból B felé mutat.

E1 494. Az a, b, c egyenesek egy pontban metszik egymást. Tükrözzük a sík egy tetszőleges pontját a-ra, majd a tükörképet b-re, ezt a tükörképet c-re, és így tovább újra a-ra, b-re végül c-re. Mutassuk meg, hogy a tükrözéssorozattal visszajutunk az eredeti pontba.

E1 495. Végezzük el az előző feladatot abban az esetben, ha a, b, c párhuzamos egyenesek.

K2 496. Igazoljuk, hogy egy párhuzamos eltolás mindig helyettesíthető két darab pontra való tükrözés egymásutánjával.

E1 497. Igazoljuk, hogy a háromszög középvonala párhuzamos a nem felezett oldallal és feleakkora, mint ez az oldal.

K2 498. Adott az AB és CD egyirányú és egyenlő hosszú szakasz. Tükrözzünk egy P pontot A-ra, majd a tükörképét B-re, azután a P-t C-re és a tükörképet D-re. Mutassuk meg, hogy a kétféle tükrözés eredménye mindig ugyanaz a pont.

K2 **499.** *(A 493. feladatra épül.)* Adott az AB és CD egyirányú és egyenlő hosszú szakasz. Tükrözzünk egy P pontot A-ra, majd a tükörképét C-re, azután a P-t B-re és a tükörképet D-re. Mutassuk meg, hogy a kétféle tükrözés eredménye mindig ugyanaz a pont.

E1 **500.** Tükrözzünk végig egy tetszőleges P pontot egy ötszög oldalfelező pontjaira. Jelöljük a végeredményt P_5-tel. Mutassuk meg, hogy az ötszög egyik csúcsa felezi a PP_5 szakaszt.

E1 **501.** Szerkesszük meg az ötszöget, ha adottak az oldalfelező pontjai.

E2 **502.** Igazoljuk, hogy három középpontos tükrözés egymásutánja középpontos tükrözés. Mutassuk meg, hogy három nem egy egyenesen levő középpont esetén az új középpont a három régivel együtt paralelogrammát alkot úgy, hogy az új középpont a középsővel szemközti csúcs.

E2 **503.** Igazoljuk, hogy négy középpontos tükrözés szorzata eltolás vagy identitás.

E2 **504.** Adott egy hétszög hét oldalfelező pontja. Szerkesszük meg a hétszöget.

E2 **505.** *(Az 504. feladatra épül.)* Adott egy nyolcszög első hét oldalának oldalfelező pontja. Egyértelműen meghatározható-e a nyolcadik oldal felezőpontja?

K2 **506.** Tükrözzünk végig egy tetszőleges pontot sorban egy háromszög csúcsaira, majd az eredményül kapott pontot ismét sorban a három csúcsra. Bizonyítsuk be, hogy így mindig visszajutunk az eredeti pontba.

E1 **507.** Bizonyítsuk be, hogy két egymást metsző tengelyre való tükrözés egymásutánja a metszéspont körüli elforgatással helyettesíthető.

E2 **508.** *(Az 507. feladatra épül.)* Mutassuk meg, hogy minden elforgatás helyettesíthető két tengelyes tükrözéssel.

K1 **509.** *a)* Bizonyítsuk be, hogy egy adott pontra vonatkozó tükrözés a pont körüli 180°-os elforgatással helyettesíthető.
b) Bizonyítsuk be, hogy adott pont körüli 180°-os elforgatás a pontra vonatkozó tükrözéssel helyettesíthető.

A háromszög nevezetes vonalai és körei

Középvonal

K1 **510.** Egy háromszög oldalai

a) 7 cm, 9 cm, 12 cm; *b)* $\frac{2}{3}$ cm, $\frac{4}{5}$ cm, $\frac{7}{6}$ cm;

c) $2m$, $3n$, $\frac{l}{2}$; *d)* $2m + 3n$, $2m - 3n$, $\frac{3}{2}m$.

Mekkorák az oldalfelező pontok által alkotott háromszög oldalai?

K1 **511.** Egy háromszög oldalfelező pontjai olyan háromszög csúcsai, amelynek oldalai

a) 2 cm, 4 cm, 5 cm; *b)* $\frac{1}{2}$ cm, $\frac{2}{3}$ cm, $\frac{5}{4}$ cm; *c)* $\frac{m}{2}$, $\frac{2n}{3}$, $\frac{m+n}{2}$.

Mekkorák az eredeti háromszög oldalai?

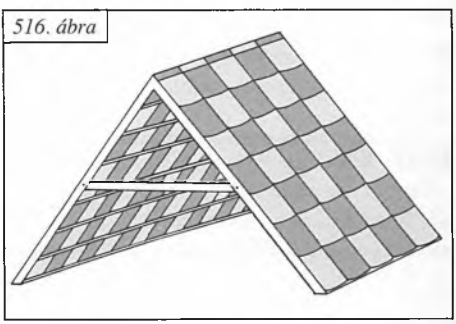
K1 **512.** Egy háromszöget középvonalai négy háromszögre bontanak. Ezek kerületeinek összege *a)* 20 cm; *b)* $\frac{15}{2}$ cm; *c)* d cm. Mekkora az eredeti háromszög kerülete?

K1 **513.** Egy O csúcsú szög szárai közötti P ponton át húzzunk párhuzamost az egyik szárral. Ez a másik szárat A pontban metszi. Mérjük fel O-tól erre a szárra az OA szakasz kétszeresét. Ennek B végpontját kössük össze P-vel. Mutassuk meg, hogy P felezi az így kapott egyenesnek a szög szárai közé eső BC szakaszát.

K1 **514.** *(Az 513. feladatra épül.)* Szerkesszünk egy szög szárai között levő P ponton át olyan egyenest, amelynek P felezi a szárak közötti részét.

K1 **515.** Egy derékszögű háromszög egyik befogója 12 cm. Milyen távolságra van az átfogó felezőpontja a másik befogótól?

K1,GY **516.** A tetőt tartó szarufák végpontjai 4,8 m-re vannak egymástól. Mekkora a felezőpontjaikat összekötő gerenda hossza? *(516. ábra)*


516. ábra

K1,GY **517.** Egy repülőtérről két repülőgép indul el ugyanabban az időpontban. Mindkettő állandó sebességgel, egyenes irányban halad, de útirányuk különböző. Fél óra alatt 180 km-re távolodnak el egymástól. Mekkora a távolságuk az indulástól számított egy óra múlva?

K1 **518.** Mutassuk meg, hogy ha két háromszög megfelelő középvonalai egyenlők, akkor a két háromszög egybevágó.

K2 **519.** Egy háromszög mindhárom csúcsát kössük össze a sík egy tetszőleges P pontjával. Bizonyítsuk be, hogy az összekötő szakaszok felezőpontjai által meghatározott háromszögek mind egybevágók, bárhol vesszük is fel a P pontot.

E1 **520.** Igazoljuk, hogy a háromszög köré írt kör középpontjának a háromszög bármelyik oldalától mért távolsága feleakkora, mint az ugyanazon oldalhoz tartozó magasságnak a csúcs és a magasságpont közé eső szakasza.

K2 **521.** Egy pontot kössünk össze egy rá nem illeszkedő egyenes minden pontjával, és az összekötő egyenesekre mérjük rá az egyenesen túl a metszéspont és az adott pont közötti szakaszt. Mi az így kapott végpontok halmaza?

K2 **522.** Egy szakasz két végpontját összekötjük a sík olyan két különböző pontjával, amelyek nem illeszkednek a szakasz egyenesére. Az összekötő szakaszokat megfelezzük. Mutassuk meg, hogy a felezőpontok által meghatározott szakaszok között van két-két egyenlő.

K2 **523.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy szakaszt merőlegesen vetítünk egy egyenesre, akkor a szakasz felezőpontjának vetülete a vetületnek is felezőpontja.

E1 **524.** Egy háromszög egyik oldalát rögzítjük, az ezzel szemközti csúcsot pedig egy adott egyenesen mozgatjuk. Mit írnak le ekkor az adott oldallal párhuzamos középvonalak végpontjai?

K2 **525.** Mutassuk meg, hogy egy háromszög oldalfelező pontjai által alkotott háromszög súlyvonalai egy egyenesbe esnek az eredeti háromszög súlyvonalaival.

Magasságvonal

K2 **526.** Mutassuk meg, hogy egy háromszög oldalfelező pontjai által alkotott háromszög magasságpontja egybeesik az eredeti háromszög köré írt kör középpontjával.

K2 **527.** Egy háromszög szögei 62° és 43°. Mekkora szögekben látszanak az oldalak *a)* a beírt kör középpontjából; *b)* a magasságpontból?

E1 **528.** Mutassuk meg, hogy ha A, B, C, D a sík olyan négy pontja, hogy D magasságpontja az ABC háromszögnek, akkor A, B és C pont magasságpont a másik három pont által meghatározott háromszögben.

E1 **529.** Mutassuk meg, hogy ha a síkon adott két derékszög szárai nem párhuzamosak, akkor egy egyenesre adott pontból merőlegest tudunk szerkeszteni csupán párhuzamosok húzásával.

E1,GY **530.** Egy P pontot össze kell kötnünk az a és b egyenesek M metszéspontjával, a metszéspont azonban nem fért rá a rajzlapra. Igazoljuk, hogy az MP egyenest megszerkeszthetjük M nélkül is a következő módon: a P-ből a-ra állított merőleges b-t A-ban, a b-re állított merőleges a-t B-ben metszi. A P pontból az AB egyenesre emelt merőleges a keresett PM.

Thalész-kör

K1 **531.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög két magasságának talppontja egyenlő távol van a harmadik oldal felezőpontjától.

K2 **532.** *(Az 531. feladatra épül.)* Szerkesszünk háromszöget, ha adott két magasságtalppontja és a harmadik oldal egyenese.

E1 **533.** Egy háromszögnek rögzítsük két csúcsát. A harmadik csúcs befutja a sík összes pontját. Adjuk meg az így kapott háromszögek másik két oldalegyenesén levő magasságtalppontok halmazát.

K2 **534.** Adott egy egyenes és egy rá nem illeszkedő szakasz. Szerkesszünk olyan derékszögű háromszöget, amelynek derékszögű csúcsa az egyenesen van, átfogója pedig az adott szakasz.

K2 **535.** Tűzzünk ki két pontot, és vegyünk fel egy távolságot. Szerkesszünk két párhuzamost, melyek egy-egy kitűzött ponton mennek át, és távolságuk akkora, mint a felvett szakasz.

K1 **536.** Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszög átfogója kétszer akkora, mint az átfogóhoz tartozó súlyvonal.

E1 **537.** Mutassuk meg, hogy egy háromszög három oldalfelező pontja és az egyik magasságtalppontja húrtrapézt vagy egyenlő szárú háromszöget határoznak meg.

K2 **538.** Egy d hosszúságú szakasz két végpontja egy derékszög egy-egy szárán mozog. Mit ír le a szakasz felezőpontja?

K1 **539.** Rajzoljuk meg valamely kör AB átmérőjét, AC húrját, és a húr meghosszabbítására mérjük fel a $CD = AC$ szakaszt. Igazoljuk, hogy az ABD háromszög egyenlő szárú.

K1 **540.** Egy körön kívüli P ponthoz szerkesszünk a körön olyan M pontot, amelynek P-től mért távolsága a kör átmérőjével egyenlő. Az M-en átmenő körátmérő másik végpontja N. Bizonyítsuk be, hogy a PN szakasz felezőpontja a körön van.

K1 **541.** Írjunk kört az egyenlő szárú háromszög egyik szára mint átmérő fölé. Bizonyítsuk be, hogy ez a kör felezi a háromszög alapját.

K2 **542.** Szerkesszünk kört egy egyenlő oldalú háromszög magassága mint átmérő fölé. Igazoljuk, hogy a másik két oldalának a negyedrésze esik a körön kívül.

E1 **543.** Mutassuk meg, hogy egy háromszög oldalai mint átmérők fölé szerkesztett körök közös húregyenesei egy pontban metszik egymást.

E1 **544.** Szerkesszünk Thalész-kört a háromszög magasságpontja és egyik csúcsa által meghatározott szakasz fölé. Hol metszi ez a kör a háromszög két oldalát?

E1 **545.** Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha adott a BC oldal felezőpontja, a B csúcsból induló magasság talppontja, valamint a C csúcs és az M magasságpont közötti szakasz felezőpontja.

E1 **546.** Két érintkező kör egyikében egy, az érintési pontra nem illeszkedő átmérő végpontjait kössük össze az érintési ponttal. Mutassuk meg, hogy ezek az egyenesek a másik körből egy átmérő végpontjait metszik ki.

K2 **547.** Kössük össze a háromszög köré írt kör középpontját az egyik csúccsal, és rajzoljunk kört az összekötő szakasz mint átmérő fölé. Bizonyítsuk be, hogy az így szerkesztett kör átmegy két oldal felezőpontján.

K2 **548.** Két egymást metsző kör egyik közös pontjából húzzuk meg mindkettőben az átmérőt. Bizonyítsuk be, hogy az átmérők végpontjait összekötő egyenes átmegy a körök másik közös pontján.

E1 **549.** Szerkesszük meg az $ABCD$ téglalapot, ha ismert az AB oldalegyenesének P, a BC oldalegyenesének Q, a CD oldalegyenesének R, a DA oldalegyenesének S pontja, és az AB oldal hossza.

E1 **550.** Adott a síkon két pont, T és P. A T-re illeszkedő e egyenest forgassuk T körül, és minden helyzetében állítsunk rá merőlegest a P pontból. Határozzuk meg az így kapott merőlegesek talppontjai által alkotott ponthalmazt.

K2 **551.** Egy rombusz alakú keret csuklósan összeszerelt pálcákból áll. Az egyik oldalt rögzítjük. Milyen ponthalmazt alkotnak az átlók metszéspontjai, ha a többi oldalt mozgatjuk?

K2 **552.** Egy kör valamely húrjának egyik végpontját kössük össze a kör középpontjával. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott sugár Thalész-köre felezi a húrt.

K2 **553.** Megrajzolunk egy kört, és kijelölünk egy pontot (belül vagy kívül). Adjuk meg a kijelölt ponton áthaladó húrok felezőpontjainak halmazát.

A háromszög beírt és hozzáírt körei

K2 **554.** Szerkesszünk egy adott körhöz tetszés szerint felvett egyenessel párhuzamos érintőt.

E1 **555.** *(Az 554. feladatra épül.)* Adott egy kör és egy négyszög. Szerkesszünk olyan négyszöget, melynek oldalai az előbbi négyszög oldalaival párhuzamosak, és érintik a kört.

K1 **556.** Tűzzünk ki két pontot egymástól 3 cm távolságban. Szerkesszünk az egyiken át olyan egyenest, amely a másiktól 2 cm távolságban halad.

K2 **557.** Tűzzünk ki két pontot, és vegyünk fel egy távolságot. Szerkesszünk kört az egyik pont köré úgy, hogy a másik pontból a körhöz húzott érintőszakasz a felvett távolsággal legyen egyenlő.

K2 **558.** Adott egy kör, ennek egy húrja és egy pont. Szerkesszünk az adott ponton át olyan szelőt, amelynek a körbe eső szakaszát az adott húr felezi.

K2 **559.** Adott körbe szerkesszünk egyenlő hosszúságú (körátmérőnél kisebb) húrokat. Határozzuk meg, milyen ponthalmazt alkotnak a húrfelező pontok.

K2 **560.** *(Az 559. feladatra épül.)* Egy körhöz egy rajta kívül kijelölt ponton át szerkesszünk olyan szelőt, amely megadott hosszúságú, az átmérőnél rövidebb húrt vág ki belőle.

E1 **561.** Adott egy kör és annak egy húrja. Szerkesszünk a körbe olyan adott hosszúságú húrt, amelyet az eredetileg adott húr felez.

E1 **562.** Tűzzünk ki egy pontot egy kör belsejében. Szerkesszünk a körbe beírt négyzetet, aminek egyik oldala átmegy a kitűzött ponton.

K2 **563.** Hosszabbítsuk meg egy kör valamelyik átmérőjét. Szerkesszünk ezen a meghosszabbításon olyan pontot, amelyből adott hosszúságú érintőszakasz húzható a körhöz.

K2 **564.** Rajzoljunk egy kört és egy egyenest. Szerkesszünk az egyenesen olyan pontot, amelyből adott hosszúságú érintőszakasz húzható a körhöz.

K1 **565.** Megrajzolunk egy kört. Milyen ponthalmazt alkotnak azok a pontok, melyekből a körhöz húzott érintők 60°-os szöget zárnak be egymással?

K2 **566.** Rajzoljunk egy kört és egy egyenest. Szerkesszünk az egyenesen olyan pontot, amelyből a körhöz húzott érintők 90°-os szöget zárnak be.

K1 **567.** Adott egy O középpontú r sugarú k kör és egy R szakasz. Keressük azon R sugarú körök középpontjainak halmazát, amelyeknek k-val közös húrja átmérő a k körben.

E1 **568.** Szerkesszük meg két kör *a)* közös külső érintőit; *b)* közös belső érintőit.

E1 **569.** Tűzzünk ki két pontot egymástól 4 cm-re. Szerkesszünk egyenest, amely az egyiktől 2 cm, a másiktól 1 cm távolságban halad.

E1 **570.** Rajzoljunk kört, és tűzzünk ki rajta kívül egy P pontot. A kitűzött pont köré úgy szerkesszünk kört, hogy a két kör közös külső érintőjének a két érintési pont közé eső szakasza adott hosszúságú legyen.

E1 **571.** *(Az 559. feladatra épül.)* Rajzoljunk két kört, és szerkesszünk egyenest, melyből a két kör adott hosszúságú húrokat metsz ki.

K2 **572.** Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő oldalú háromszögbe írt kör sugara a köré írt kör sugarának fele.

K2 **573.** Bizonyítsuk be, hogy a szabályos háromszög hozzáírt körének sugara háromszorosa a beírt kör sugarának.

K2 **574.** Mutassuk meg, hogy az egyenlő oldalú háromszög köré írt kör sugara kétharmada a hozzáírt kör sugarának.

K2 **575.** Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, ha adott az egyik hozzáírt köre.

E1 **576.** Igazoljuk, hogy a hozzáírt körök középpontjai által meghatározott háromszög magasságvonalai az eredeti háromszög szögfelezői.

Az 577. és az 578. feladatra több feladat is ráépül a következő részben. Megoldásukat javasoljuk.

E1 **577.** Egy háromszög oldalai a, b, c. Mekkora szakaszokra osztják az oldalakat a beírt kör érintési pontjai?

E1 **578.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egy hozzáírt köre a meghosszabbított oldalakat azok metszéspontjától félkerületnyi távolságra érinti.

E1 **579.** *(Az 578. feladatra épül).* Mekkora szakaszokra osztja a háromszög a oldalát az oldalt érintő hozzáírt kör érintési pontja?

E1 **580.** Mutassuk meg, hogy az ABC háromszög beírt körének E érintési pontja az a oldalon ugyanolyan messze van B-től, mint az a oldalhoz hozzáírt kör F érintési pontja C-től.

E2 **581.** Tekintsük egy háromszög ugyanazon oldalát érintő beírt és hozzáírt körét. Bizonyítsuk be, hogy az oldalon levő érintési pontok távolsága a másik két oldal különbségével egyenlő.

E2 **582.** Mutassuk meg, hogy a háromszög a oldalát érintő hozzáírt kör sugara és a kerület egyértelműen meghatározza az a-val szemközti szöget.

V **583.** Helyezzünk el egy adott hosszúságú szakaszt egy konvex szög szárai között úgy, hogy érintsen egy, a szög szárait érintő előre megrajzolt kört.

E2 **584.** *(Az 581. feladatra épül.)* Szerkesszünk háromszöget, ha adott a beírt kör és az egyik oldalt kívülről érintő kör sugara, valamint a másik két oldal különbsége.

E2 **585.** *(Az 577. és az 578. feladatra épül.)* A háromszög b oldalát a beírt kör az E_1 pontban, meghosszabbítását az a oldalhoz hozzáírt kör az E_2 pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy $E_1E_2 = a$.

E2 **586.** *(Az 577. és az 578. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszög átfogóját érintő hozzáírt kör és a beírt kör sugarának különbsége akkora, mint az átfogó.

E2 **587.** *(Az 577. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy ha derékszögű háromszögben a beírt kör átmérőjét és az átfogót összeadjuk, a befogók összegével egyenlő szakaszt kapunk.

E2 **588.** Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha ismert a befogók összege és a beírt kör sugara.

E2 **589.** *(Az 577. és az 578. feladatra épül.)* Egy derékszögű háromszög oldalai a, b, c. *a)* Mekkora a beírt kör sugara (r_o)? *b)* Mekkora a c átfogót kívülről érintő kör sugara (r_c)?

E2 **590.** Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott az átfogóhoz írt kör sugara, továbbá az egyik hegyesszög.

E2 **591.** *(Az 578. feladatra épül.)* Mekkora annak a derékszögű háromszögnek az átfogója, amelynél a befogók összege 8,2 cm, az átfogóhoz írt kör sugara 7,6 cm?

K2 **592.** Írjunk egy háromszögbe kört, és szerkesszünk ehhez három érintőt úgy, hogy azok mindegyike lemessen a háromszögből egy kis háromszöget. Mutassuk meg, hogy a lemetszett háromszögek kerületének összege az eredeti háromszög kerületével egyenlő.

E2 **593.** *(Az 577. feladatra épül.)* Egy háromszöget úgy választunk ketté, hogy megrajzoljuk a beírt kör egyik érintési pontját a szemközti csúccsal összekötő szakaszt. Igazoljuk, hogy ezt a szakaszt ugyanabban a pontban érinti a két részháromszögbe írt kör.

E2 **594.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott a beírt kör sugara, az egyik oldalhoz hozzáírt kör sugara és az oldallal szemközti szög.

E2 **595.** *(Az 578. feladatra épül.)* Szerkesszünk háromszöget, ha adott a kerülete, az egyik szöge és egy másik csúcsból induló magassága.

E2 **596.** *(Az 578. feladatra épül.)* Szerkesszünk háromszöget, ha adott a kerülete, a beírt kör sugara és egyik szöge.

E2 **597.** *(Az 578. feladatra épül.)* Szerkesszünk háromszöget, ha adott a kerülete, az egyik oldalához tartozó magassága és az oldallal szemközti szöge.

K2 **598.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egyik oldala a beírt kör érintési pontjával és a beírt kör sugara.

E2 **599.** *(Az 577. feladatra épül.)* Szerkesszünk háromszöget, ha adott a beírt kör sugara, egyik oldala és a másik két oldal különbsége.

E2 **600.** *(Az 578. feladatra épül.)* Adott egy konvex szög és egy pont a szögtartományban. Szerkesszünk a ponton át olyan egyenest, amely a szögből adott kerületű háromszöget metsz le.

E2 **601.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott a kerülete, valamint a beírt és az egyik hozzáírt kör sugara.

E2 **602.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott a kerülete, az egyik oldalt kívülről érintő kör sugara és az oldalon fekvő egyik szög.

E2 **603.** *(Az 577. és az 578. feladatra épül.)* Szerkesszünk háromszöget, ha adott a beírt kör sugara, két oldalának összege és a harmadik oldal.

Háromszögek szerkesztése (II. rész)

K1 **604.** Megrajzoltuk egy háromszög három (egy ponton átmenő) magasságvonal egyenesét, és megadtuk a b oldal egy P pontját. Szerkesszük meg a háromszöget.

K1 **605.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget
a) a szárszögből és a szárakhoz tartozó magasságból;
b) az alapból és a szárakhoz tartozó magasságból.

K1 **606.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott az egyik oldala, a köré írt kör sugara és az oldalhoz tartozó magassága.

K1 **607.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott az egyik oldala, a köré írt kör sugara és az oldalon levő egyik szöge.

K1 **608.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott az egyik oldala, a köré írt kör sugara és az oldalhoz tartozó súlyvonala.

K1 **609.** Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott a köré írt kör sugara és
a) az egyik hegyesszöge; *b)* az átfogóhoz tartozó magassága.

K1 **610.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott a köré írt kör sugara, továbbá
a) az alapja; *b)* az egyik szára;
c) az alaphoz tartozó magassága; *d)* az alappal szemközti szöge.

K2 **611.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott az egyik oldala, a köré írt kör sugara és egy másik oldalhoz tartozó magassága.

E1 **612.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a másik oldalhoz tartozó súlyvonala és a köré írt kör sugara.

K2 **613.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala és a másik két oldalhoz tartozó súlyvonal.

K2 **614.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a hozzá tartozó magasságvonal és súlyvonal.

K2 **615.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldala és az egyikhez tartozó súlyvonal.

K2 **616.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a hozzá tartozó súlyvonal és az oldalon levő egyik szög.

K2 **617.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a rajta levő egyik szög és e szög szögfelezője.

E1 **618.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, egy másik oldalhoz tartozó magasság és súlyvonal.

K2 **619.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott az a oldalhoz tartozó magasság és szögfelező, továbbá az a oldallal szemközti szög.

K2 **620.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott az a oldalhoz tartozó magasság és szögfelező, továbbá a b oldal.

K2 **621.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a másik oldalhoz tartozó magassága és a harmadikhoz tartozó szögfelezője.

K2 **622.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott az egyik oldallal szemközti szög, e szög felezője és egy másik oldalhoz tartozó magasság.

K2 **623.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a hozzá tartozó súlyvonal és egy másik oldalhoz tartozó súlyvonal.

E1 **624.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott három súlyvonala.

K2 **625.** Szerkesszünk háromszöget egy oldalból, a hozzá tartozó magasságból és valamelyik másik magasságból.

K2 **626.** Szerkesszünk adott szakasz mint átfogó fölé derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója adott ponton megy át.

K2 **627.** Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott az átfogó egyenese, befogóiból egy-egy pont, továbbá az átfogóhoz tartozó magasság.

K2 **628.** Adott egy kör belsejében két pont. Szerkesszünk a körbe olyan derékszögű háromszöget, amelynek egy-egy befogója az adott pontokon megy át.

K2 **629.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott a beírt kör sugara, továbbá *a)* az alapja; *b)* az alappal szemközti szöge.

E1 **630.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott a beírt kör sugara és az alaphoz hozzáírt köre.

K2 **631.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldala és a közbezárt súlyvonal.

K2 **632.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, annak egyik végpontjából induló súlyvonala, továbbá *a)* a közös csúcsban levő szög; *b)* az oldalhoz tartozó magasság.

K2 **633.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, annak egyik végpontjából induló súlyvonala és magassága.

E1 **634.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, annak egyik végpontjából induló súlyvonala és a másik végpontjából induló magassága.

Négyszögek

Paralelogrammák

K1 **635.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyszög szemközti szögei egyenlők, akkor a négyszög paralelogramma.

K1 **636.** Mutassuk meg, hogy ha egy négyszögben bármely két szomszédos szög összege 180°, akkor a négyszög paralelogramma.

K1 **637.** Egy paralelogramma egyik szöge 72°. Mekkora a többi szög? Lehet-e ez a paralelogramma rombusz?

K1 **638.** Mekkorák a paralelogramma szögei, ha egyik szöge 12,8°-kal nagyobb, mint a másik?

K1 **639.** Mutassuk meg, hogy egy paralelogramma szemközti csúcsaihoz tartozó belső szögfelezők vagy párhuzamosak, vagy egy egyenesbe esnek.

K2 **640.** Bizonyítsuk be, hogy egy paralelogramma belső szögfelezői vagy téglalapot határolnak, vagy egy ponton mennek át.

E1 **641.** Mutassuk meg, hogy a paralelogramma külső szögfelezői téglalapot zárnak közre.

E1 **642.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy paralelogramma két csúcsához tartozó belső és külső szögfelezők négyszöget határolnak, akkor a határolt négyszög téglalap.

K2 **643.** Igazoljuk, hogy két paralelogramma egybevágó, ha megegyeznek
a) két szomszédos oldalban és az általuk közbezárt szögben;
b) két szomszédos oldalban és egy átlóban;
c) két átlóban és egy oldalban;
d) két átlóban és az általuk közbezárt szögben.

K1 **644.** *a)* Lehet-e egy négyszög egyik átlója az egyik oldallal egyenlő? Van-e ilyen *b)* paralelogramma; *c)* rombusz; *d)* téglalap?

K1 **645.** Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma átlóinak metszéspontján átmenő minden egyenes a paralelogrammát két egybevágó részre osztja.

K1 **646.** Soroljunk fel *a)* tengelyesen szimmetrikus paralelogrammákat; *b)* középpontosan szimmetrikus paralelogrammákat.

K1 **647.** Az $ABCD$ paralelogramma átlóinak metszéspontján átmenő egyenes az AB oldalból egy 7 cm-es, a CD oldalból egy 4,5 cm-es darabot metsz le. Mekkora az AB oldal?

K2 **648.** Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma szemközti oldalainak felezőpontjait összekötő szakaszok – középvonalak – átmennek az átlók metszéspontján.

K2 **649.** Kössük össze az $ABCD$ paralelogramma A csúcsát a BC oldal E felezőpontjával, valamint a DC oldal F felezőpontjával. Igazoljuk, hogy AF és AE egyenesek harmadolják a DB átlót.

K1 **650.** Kössük össze az $ABCD$ paralelogramma A csúcsát a BC oldal E felezőpontjával. Igazoljuk, hogy az AE szakasz és a BD szakasz harmadolják egymást.

K1 **651.** Egy egyenlő szárú háromszög alapjának tetszőleges belső pontjából húzzunk párhuzamosokat a szárakkal. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett paralelogramma kerülete független a pont választásától.

K2 **652.** Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma egyik külső szögének felezője és az a két oldalegyenese, amely nem megy át a kiválasztott szög csúcsán, egyenlő szárú háromszöget határoz meg. Mekkorák ennek a szárai?

K1 **653.** Az $ABCD$ paralelogramma D csúcsából induló magasság felezi az AB oldalt. Mekkora a BD átló, ha $AD = 5$ cm?

K1 **654.** Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma csúcsaiból az átlók egyenesére emelt merőlegesek talppontjai vagy egybeesnek, vagy egy paralelogramma csúcsai.

E1 **655.** Rajzoljunk köröket a paralelogramma két szemközti oldala mint átmérő fölé. Mutassuk meg, hogy a köröknek az átlók egyenesével alkotott metszéspontjai vagy egybeesnek, vagy egy paralelogramma csúcsai.

E1,GY **656.** A szög csúcsa nem fér rá a rajzpapírunkra, csupán a szárainak egy része. Igaz-e, hogy ebben az esetben is meg tudjuk rajzolni egy kitűzött pont és a szögcsúcs összekötő egyenesét a következő módon: A kitűzött pontból párhuzamosokat szerkesztünk a szögszárakkal. Ezeknek a szögszárakkal képezett metszéspontjait összekötjük. Az összekötő szakasz felezőpontját az adott ponttal összekötő egyenes átmegy a szög csúcsán.

E1,GY **657.** A szög csúcsa nem fér rá a rajzpapírunkra, csupán a szárainak egy része. Igaz-e, hogy ebben az esetben is meg tudjuk rajzolni egy kitűzött pont és a szögcsúcs össze-

kötő egyenesét a következő módon: Tükrözzük a szögszárakat a kitűzött pontra. A tükörképek metszéspontját az adott ponttal összekötő egyenes átmegy a szög csúcsán.

K1 **658.** Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott két szomszédos oldal és
a) a közbezárt szög; *b)* az egyikhez tartozó magasság; *c)* az egyik átló.

K1 **659.** Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott az egyik oldala, valamint
a) az egyik szöge és az oldalhoz tartozó magassága; *b)* a két magassága; *c)* a két átlója.

K2 **660.** Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott két átlója és
a) az átlók szöge; *b)* az egyik magasság.

K2 **661.** Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott
a) az egyik oldala, az egyik átlója és ezek szöge;
b) az egyik oldala, az egyik átlója és az oldalhoz tartozó magassága;
c) két magassága és a magasságok szöge;
d) az egyik magassága, az egyik átlója és az átlók szöge.

K1 **662.** Adott egy paralelogramma három oldalfelező pontja (E, H és F). Szerkesszük meg a paralelogrammát.

E1 **663.** Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott két szomszédos oldalának összege, a két oldal közbezárt szöge és az egyik átló.

E1 **664.** Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott két szomszédos oldalának különbsége, a két oldal közbezárt szöge és a hosszabb oldalhoz tartozó magasság.

K1 **665.** Adjuk meg azon paralelogrammák középpontjainak halmazát, amelyeknek egyik oldala közös, és ehhez az oldalhoz tartozó magasságuk egyenlő.

K2 **666.** Adjuk meg azon paralelogrammák középpontjainak halmazát, amelyeknek egyik oldala és ezzel szomszédos oldalegyenese közös.

E1 **667.** Tekintsük azokat a paralelogrammákat, amelyeknek két szomszédos oldalegyenese közös, és kerületük egyenlő. Adjuk meg az egyenesekre nem illeszkedő csúcsok halmazát.

Deltoidok, rombuszok

K1 **668.** Egy rombusz egyik szöge 38°. Mekkora szögeket zárnak be az átlók az oldalakkal?

K1 **669.** A rombusz egyik átlója az oldallal 42°-os szöget zár be. Mekkorák a rombusz szögei?

K1 **670.** Mekkorák annak a rombusznak a szögei, amelynek tompaszögű csúcsából húzott magassága felezi a szemközti oldalt?

K1 **671.** Egy rombusz egyik szöge 60°, oldala 12 cm. Mekkora a rövidebb átlója?

K1 **672.** Mekkorák annak a rombusznak a szögei, amelynek 12 cm a kerülete és 1,5 cm a magassága?

K1 **673.** Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma rombusz, ha
a) átlói merőlegesek egymásra; *b)* az egyik átló szögfelező.

K1 **674.** Egy paralelogramma oldalai 3 cm és 9 cm. A hosszabbik oldalon fekvő szögek szögfelezői a szemközti oldalt három részre osztják. Mekkorák ezek a részek?

E1 **675.** Bizonyítsuk be, hogy ha a paralelogramma hosszabbik oldala a rövidebbnek kétszerese, akkor az egyik hosszabbik oldal végpontjaihoz tartozó belső szögfelezők a szemközti oldalon metszik egymást.

K1 **676.** Bizonyítsuk be, hogy ha a paralelogramma két szomszédos csúcsához tartozó belső szögfelezők az egyik oldalon metszik egymást, akkor az egyik oldal kétszerese a másiknak.

K2 **677.** Mutassuk meg, hogy két rombusz egybevágó, ha megegyeznek
a) oldalukban és egy szögükben; *b)* átlóikban; *c)* oldalukban és egy átlójukban.

K2 **678.** Szerkesszünk rombuszt, ha adott
a) az oldala és az egyik szöge; *b)* két átlója;
c) az oldala és a magassága; *d)* az egyik szöge és a magassága.

K2 **679.** Adott az A és K pont, valamint az e egyenes. Szerkesszünk olyan rombuszt, amelynek K a középpontja, A az egyik csúcsa, az A-val szomszédos egyik csúcsa pedig az e egyenesen van.

K2 **680.** Adott az a, b, c egyenes, valamint a K pont. Szerkesszük meg az $ABCD$ rombuszt, ha $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, K pedig a rombusz középpontja.

E2 **681.** Adott az f egyenes, rajta a K pont, valamint az f egyenes által elválasztott E és F pont. Szerkesszünk K középpontú rombuszt, amelynek az egyik átlóegyenese f, az E és az F pedig egy-egy oldalának pontja.

E2 **682.** Rajzoljunk két párhuzamos egyenest, és tűzzünk ki közöttük két pontot. Szerkesszünk rombuszt, amelynek két oldala a párhuzamosokon van, másik két oldala pedig egy-egy adott ponton megy át.

K1 **683.** Bizonyítsuk be, hogy a rombusz átlóinak metszéspontja egyenlő távol van az oldalaktól.

E1 **684.** Mutassuk meg, hogy a rombusz egy belső pontjának két szomszédos oldalegyenestől mért távolságkülönbsége egyenlő a másik két oldalegyenestől mért távolságok különbségével.

K1 **685.** Igazoljuk, hogy egy rombusz átlóinak metszéspontjából az oldalakra emelt merőlegesek talppontjai egy téglalap csúcsai.

K1 **686.** Egy deltoid két szemközti szöge 42° és 126°. Mekkora a másik két szög?

K1 **687.** Egy deltoidban két szemközti szög 39° és 100°. Mekkora szögeket zárnak be az átlók az oldalakkal?

K2 **688.** Szerkesszünk deltoidot, ha adott
a) két különböző hosszúságú oldala és az ezekkel közös csúcsból induló átlója;
b) két átlója és az egyik oldala;
c) két átlója és a szimmetriaátló egyik végpontjánál levő szöge.

K1 **689.** Soroljuk fel azokat a paralelogrammákat, amelyek deltoidok is egyúttal.

Téglalapok, négyzetek

K1 **690.** Igazoljuk, hogy ha egy paralelogramma egyik szöge derékszög, akkor a paralelogramma téglalap.

K1 **691.** Mutassuk meg, hogy ha a paralelogramma átlói egyenlők, akkor téglalap.

K1 **692.** Mutassuk meg, hogy egy kör két átmérőjének a végpontjai téglalapot határoznak meg.

K1 **693.** Igazoljuk, hogy a téglalap átlói által bezárt egyik szög kétszerese az átló és az oldal által alkotott egyik szögnek.

K1 **694.** A téglalap átlója az egyik oldallal 26°-os szöget alkot. Mekkora szöget zárnak be az átlók?

K1 **695.** Egy téglalap átlói által meghatározott szögek közül az egyik 124°. Mekkora szöget zárnak be az átlók az oldalakkal?

K2 **696.** Mutassuk meg, hogy két téglalap egybevágó, ha megegyeznek
a) két nem párhuzamos oldalukban;
b) átlójukban és az átlók szögében;
c) egy oldalukban és az átlójukban.

K2 **697.** Van-e a téglalap síkjában olyan pont, amely egyenlő távolságra van
a) minden oldaltól; *b)* minden csúcstól?

K1 **698.** Bizonyítsuk be, hogy ha a téglalap átlói 60°-os szöget zárnak be egymással, akkor az egyik oldal fele az átlónak.

K1 **699.** Mutassuk meg, hogy ha a téglalap átlója az egyik oldal kétszerese, akkor az átlók hajlásszöge 60°.

K1 **700.** A 30 cm kerületű téglalap egyik oldalának felezőpontját a szemközti oldal csúcsaival összekötő egyenesek merőlegesek egymásra. Mekkorák az oldalak?

K1 **701.** Egy egyenlő szárú derékszögű háromszögbe írjunk téglalapokat úgy, hogy egyik szögük a háromszög derékszögével essék egybe, ezzel szemközti csúcsa pedig az átfogón legyen. Igazoljuk, hogy az így szerkesztett téglalapok kerületei egyenlők.

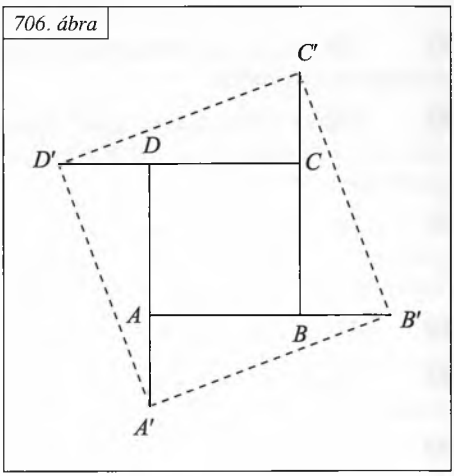
E1 **702.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy paralelogramma szomszédos oldalai a és b ($a > b$), akkor a belső szögfelezői által meghatározott téglalap átlóinak hossza $a - b$.

K2 **703.** Adott az a, b és c egyenes, valamint a K pont. Szerkesszük meg az $ABCD$ téglalapot, ha $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, K pedig a téglalap középpontja.

E1 **704.** Egy téglalapba olyan paralelogrammákat írunk, amelyeknek oldalai a téglalap átlóival párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy az ilyen paralelogrammák kerülete egyenlő.

E1,GY 705. Egy téglalap alakú biliárdasztalon az egyik átlóval párhuzamosan indítunk el egy golyót. Mutassuk meg, hogy a golyó az asztal négy oldaláról visszaverődve vissza fog térni kiindulási helyzetébe, és bármely helyzetből indul is ki, az eredeti helyzetbe való visszaérkezésig mindig ugyanakkora utat tesz meg.

K1 706. Az $ABCD$ négyzet oldalait a *706. ábra* szerint egyenlő szakaszokkal meghosszabbítjuk. Mutassuk meg, hogy az $A'B'C'D'$ négyszög négyzet.



E1 707. Húzzunk párhuzamosokat egy négyzet két szemközti csúcsán át, és állítsunk ezekre merőlegeseket a másik két csúcsból. Igazoljuk, hogy az így nyert négy egyenes négyzetet határol.

K2 708. Egy derékszögű háromszögben rajzoljuk meg a derékszög szögfelezőjének és az átfogónak a metszéspontját, és ebből húzzunk párhuzamosokat a befogókkal. Igazoljuk, hogy így négyzetet nyertünk.

K2 709. Egy a oldalú négyzet átlója fölé rajzoljunk ismét négyzetet. Mekkora lesz az új négyzet átlója?

E1 710. Bizonyítsuk be, hogy a téglalap szögfelezői (ha nem egy ponton mennek át) négyzetet alkotnak. Mekkora ennek a négyzetnek az átlója, ha a téglalap oldalai a és b $(a > b)$?

E1 711. Mérjünk fel egyenlő szakaszokat a négyzet oldalaira két szemközti csúcsból kiindulva. Mutassuk meg, hogy a végpontok olyan téglalapot határoznak meg, amelynek a kerülete független a felmért szakaszok hosszától.

K1 712. Szerkesszünk négyzetet, ha adott az átlójának hossza.

E1 713. Szerkesszünk négyzetet, ha adott
a) az oldal és az átló összege; *b)* az átló és az oldal különbsége.

K2 714. Adott az e, f, g egyenes. Szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek egyik átlója az e egyenesen van, a másik átló egy-egy végpontja pedig a másik két egyenesen.

Négyszögekről általában

E1 715. A négyszög átlóinak metszéspontja a négyszög csúcsaival négy háromszöget alkot. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögek köré írt körök középpontjai egy paralelogramma csúcsai.

E1 716. Az ABC háromszög A csúcsához tartozó szögfelezője a szemközti oldalt D-ben metszi. A D-ből AC-vel szerkesztett párhuzamos AB-t E-ben, az E-ből BC-vel húzott párhuzamos pedig AC-t F pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $AE = CF$.

K2 **717.** Egy négyszög átlói 27 cm és 19 cm, hajlásszögük 63°42′. Határozzuk meg annak a négyszögnek az oldalait és szögeit, amelynek csúcsai az eredeti négyszög oldalfelező pontjai.

K2 **718.** Igazoljuk, hogy egy négyszög két-két szomszédos oldalának felezőpontjait összekötve, párhuzamos és egyenlő hosszú szakaszokat nyerünk.

K2 **719.** *(A 718. feladatra épül.)* Igazoljuk, hogy a négyszög oldalfelező pontjai egy paralelogramma csúcsai.

K2 **720.** *(A 719. feladatra épül.)* Igazoljuk, hogy az olyan négyszögben, amelynek nincs párhuzamos oldalpárja, az átlók felezőpontjai és egy pár szemközti oldal felezőpontjai egy paralelogramma csúcsai.

K2 **721.** *(A 720. feladatra épül.)* Igazoljuk, hogy olyan négyszögben, amelynek nincs párhuzamos oldalpárja, a szemközti oldalak felezőpontjait összekötő egyenesek és az átlók felezőpontjait összekötő egyenes egy pontban metszik egymást.

K2 **722.** Bizonyítsuk be, hogy a deltoid oldalfelező pontjai téglalapot alkotnak.

K2 **723.** Mi a feltétele annak, hogy egy négyszög oldalfelező pontjai téglalapot határozzanak meg?

K2 **724.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyszög átlói egyenlők, akkor oldalfelező pontjai rombuszt alkotnak.

K2 **725.** Mutassuk meg, hogy ha egy négyszög átlói egyenlők és merőlegesek egymásra, akkor oldalfelező pontjai egy négyzet csúcsai.

K2 **726.** Igazoljuk, hogy ha egy paralelogramma oldalfelező pontjai
a) téglalapot alkotnak, akkor a paralelogramma rombusz;
b) rombuszt alkotnak, akkor a paralelogramma téglalap;
c) négyzetet alkotnak, akkor a paralelogramma négyzet.

K1 **727.** Bizonyítsuk be, hogy minden négyszög középvonalai felezik egymást.

K1,GY **728.** Vágjunk szét egy tetszőleges konvex négyszöget középvonalai mentén. Az így kapott négyszögekből rakjunk össze paralelogrammát.

K2 **729.** Mutassuk meg, hogy egy négyszög átlói akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha a középvonalai egyenlők.

K2 **730.** Mutassuk meg, hogy egy négyszög átlói akkor és csak akkor egyenlők, ha középvonalai merőlegesek egymásra.

E1 **731.** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges négyszög középvonala nem nagyobb, mint a középvonalat nem metsző oldalak számtani közepe. Mikor áll fenn egyenlőség?

K2 **732.** Szerkesszünk négyszöget, ha adott
a) három oldala és a közrefogott oldalon levő szögek;
b) három oldala és az egyik szélsőn fekvő két szög;
c) három oldala, két megadott oldal szöge és az ennek csúcsából induló átló;
d) három oldala és két átlója.

K2 **733.** Szerkesszük meg az $ABCD$ négyszöget, ha adott
a) AB és BC oldala, valamint α, β és γ szöge;

b) AB és BC oldala, BD átlója, valamint α és β szöge;
c) AB és BC oldala, α és β szöge, valamint az átlók szöge.

K2 **734.** Szerkesszünk négyszöget, ha adott két szemközti oldala, továbbá
a) az egyiken levő két szög és az egyik átló;
b) az egyiken levő egyik szög, az ezzel szemközti átló és az átlók szöge.

E1 **735.** Szerkesszük meg az $ABCD$ négyszöget, ha adott AB és CD oldala, továbbá α, β és γ szöge.

Trapézok

K1 **736.** Egy egyenlő szárú trapéz hegyesszögei 45°-osak. Hosszabbik alapja 10 cm, magassága 2 cm. Mekkora a rövidebb alap?

K1 **737.** Egy trapéz két szemközti szöge 73° és 108°. Mekkora a másik két szög?

K1 **738.** Egy egyenlő szárú trapéz szárai egyenlők az egyik alappal. Ezen az alapon levő szögei 120°-osak. Bizonyítsuk be, hogy a hosszabbik alap kétszerese a rövidebbnek.

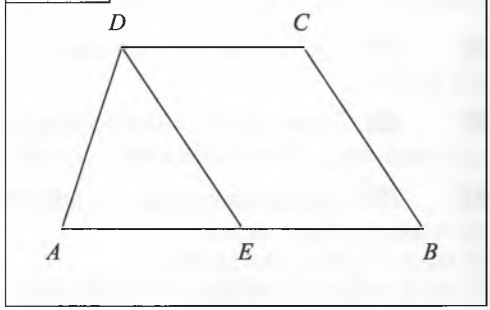
K1 **739.** Egy trapéz alapjai 16 cm és 7 cm hosszúak. Mekkora a középvonala?

K1 **740.** Egy trapéz egyik alapja 10 cm, középvonala 16 cm. Mekkora a másik alap?

K1 **741.** Egy trapéz alapjai 12 cm és 9 cm hosszúak. Az alapokkal szerkesztett párhuzamos trapézon belüli része 10,4 cm. Melyik alaphoz van ez közelebb?

K1 **742.** A *742. ábrán* vázolt trapézban DE párhuzamos CB-vel és $AE = 2$ cm. Mekkorák a trapéz alapjai, ha középvonala 13 cm?

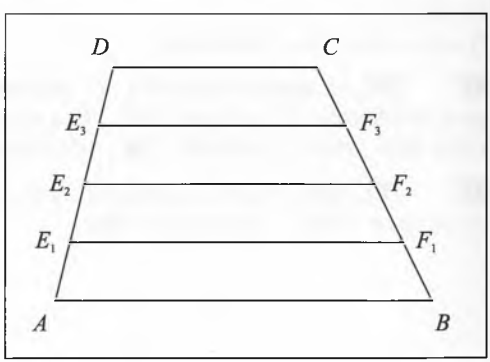
742. ábra



K1 **743.** Egy húrtrapéz hegyesszöge 60°, az átlói merőlegesek a szárakra. Mekkorák a trapéz oldalai, ha a szára 5 cm?

K1 **744.** Mekkorák a húrtrapéz szögei, ha *a)* egyik szöge 39°12′; *b)* a szárak meghosszabbításai 42°-os szöget zárnak be egymással?

K2 **745.** A *745. ábrán* látható trapéz szárait négy-négy egyenlő részre osztottuk. Milyen hosszú az E_1F_1, E_2F_2, illetve E_3F_3 szakasz, ha $AB = 17$ cm és $DC = 9$ cm?



745. ábra ▶

K1 **746.** Igazoljuk, hogy a trapéz egyik átlója a középvonalat két olyan részre osztja, amelyek hossza egy-egy alap felével egyenlő.

K2 **747.** Mutassuk meg, hogy a trapéz középvonalának a két átló közötti szakasza az alapok különbségének felével egyenlő.

K2 **748.** Igazoljuk, hogy a trapéz átlóinak felezőpontjait összekötő szakasz párhuzamos az alapokkal, és feleakkora, mint az alapok különbsége.

K2 **749.** Bizonyítsuk be, hogy a trapéz középvonala felezi az átlókat.

K1 **750.** Mutassuk meg, hogy ha a trapéz átlói felezik egymást, akkor az alapok egyenlők.

K2 **751.** Mutassuk meg, hogy ha a trapéz középvonala átmegy az átlók metszéspontján, akkor a trapéz paralelogramma.

K2 **751.** A trapéz rövidebb alapja a. Az átlók a középvonalat három egyenlő részre bontják. Mekkora a másik alap?

K2 **753.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy trapéz egyik alapja kétszerese a másiknak, akkor az átlók harmadolják a középvonalat.

K2,GY **754.** Egy folyó egyik partján levő két falut egyenes aszfaltút köt össze. A két falu lakói szeretnének építeni egy strandot és egy ahhoz vezető leágazást az aszfaltútról. Arra törekszenek, hogy a kiépítendő út a lehető legrövidebb legyen, és mindkét faluból ugyanolyan hosszú utat kelljen megtenni a strandig. Hány méter utat kell építeni, ha az egyik falu 5 km-re, a másik pedig 4 km-re van a folyótól?

E1 **755.** Egy szakasz egyik végpontja 10 cm-re, felezőpontja 8 cm-re van egy egyenestől. Mekkora a másik végpont távolsága az egyenestől?

K2 **756.** Egy paralelogramma egy egyenesnek az egyik oldalán helyezkedik el. Két szomszédos csúcsa az egyenestől 6 cm-re, illetve 9 cm-re, középpontja pedig 7 cm-re van. Határozzuk meg a másik két csúcsnak az egyenestől mért távolságát.

K2 **757.** Egy húrtrapéz hegyesszöge 45°, magassága m, középvonala k. Mekkorák a trapéz alapjai?

K2 **758.** Szerkesszünk trapézt, ha adott az egyik alapja, az ezen levő szögek, továbbá
a) a magasság; *b)* az egyik szár; *c)* az egyik átló.

K2 **759.** Szerkesszünk trapézt, ha adott két alapja, továbbá
a) az alapon fekvő szögek;
b) egyik szöge és a magasság;
c) egyik szöge és a szöggel szemközti átló;
d) egyik szöge és az azzal közös csúcsból induló átló;
e) két átlója;
f) egyik átlója és a magassága.

E2 **760.** Szerkesszünk trapézt, ha adott a két átlója, továbbá
a) az átlók szöge és az egyik szár; *b)* a magasság és az egyik alap;
c) az átlók szöge és az egyik szög; *d)* a magasság és az egyik szög.

K2 **761.** Szerkesszünk trapézt, ha adott a középvonala, két átlója, továbbá
a) az egyik szöge; *b)* az egyik szára.

K2 **762.** Bizonyítsuk be, hogy a trapéz szárainak összege nagyobb az alapok különbségénél.

K2 **763.** Szerkesszünk húrtrapézt, ha ismert
a) két alapja és a szára;
b) az egyik alapja, az azon levő szöge és a szára;
c) két alapja és a magassága;
d) az egyik alapja, a szára és az átlója;
e) két alapja és az átlója.

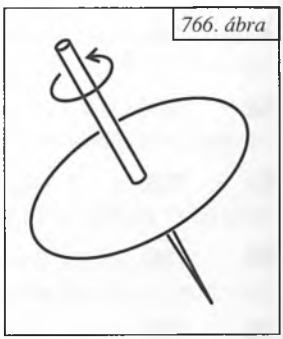
K2 **764.** Szerkesszünk derékszögű trapézt, ha adottak
a) az alapjai és a magassága;
b) az alapjai és a hosszabbik szára;
c) az alapjai és a hegyesszöge.

K2 **765.** Mutassuk meg, hogy ha a trapéz rövidebb alapja a szárak összegével egyenlő, akkor a hosszabb alapon levő szögek felezői a rövidebb alapon metszik egymást.

Körök

Kör és egyenesek

K1,GY **766.** Egy kerek poháralátétből pörgettyűt készítünk. Szerkesszük meg a körlap középpontját *(766. ábra)*.


766. ábra

K1 **767.** Bizonyítsuk be, hogy egy körben az egyenlő hosszúságú húrok egyenlő távol vannak a középponttól.

K1 **768.** Mi azon körök középpontjainak halmaza, amelyekből két adott párhuzamos egyenes egyenlő húrokat metsz ki?

K1 **769.** Mi azon körök középpontjainak halmaza, amelyekből két adott metsző egyenes egyenlő húrokat metsz ki?

K1 **770.** Adott egy r sugarú kör h hosszúságú húrja. Milyen messze van ez a húr a kör középpontjától?

K1 **771.** Igazoljuk, hogy különböző hosszúságú húrok közül az a rövidebb, amelyik távolabb van a kör középpontjától.

K1 **772.** *(A 771. feladatra épül.)* Igazoljuk, hogy a háromszög köré írt kör középpontja a leghosszabb oldalhoz van legközelebb.

K1 **773.** Szerkesszük meg a kör egy adott belső pontján át a kör *a)* legrövidebb húrját; *b)* leghosszabb húrját.

K1 **774.** *(A 773. feladatra épül.)* Igazoljuk, hogy a kör egy belső pontján átmenő legrövidebb és leghosszabb húr merőleges egymásra.

K1 **775.** Szerkesszünk egy kör belső pontján át olyan húrt, amelyet az adott pont felez.

K1 **776.** Határozzuk meg egy r sugarú körben elhelyezkedő h hosszúságú húrok felezőpontjainak halmazát.

K1 **777.** Húzzunk szelőt adott pontból egy körhöz úgy, hogy az a körből adott hosszúságú húrt messen ki.

K1 **778.** *(A 776. feladatra épül.)* A kör egy belső pontján át szerkesszünk adott hosszúságú húrt.

K2 **779.** *(A 778. feladatra épül.)* Szerkesszünk egy körbe szabályos hatszöget úgy, hogy az egyik oldala egy adott ponton menjen át.

E1 **780.** A kör egy belső pontján átmenő két merőleges húr a kört négy ívre bontja. Igazoljuk, hogy ezek közül két szemközti ív összege egy félkörrel egyenlő.

K2 **781.** Szerkesszünk adott körbe egy egyenessel párhuzamos, adott hosszúságú húrt.

K1 **782.** Írjunk egy körbe téglalapot, amelynek egyik oldala adott hosszúságú.

K1 **783.** Szerkesszünk egy körbe négyzetet úgy, hogy egyik oldala adott egyenessel legyen párhuzamos.

K1 **784.** Adott egy egyenes és egy pont. Szerkesszünk a pont körül kört, amely az adott egyenesből h hosszúságú húrt metsz ki.

K2 **785.** Adjuk meg azon r sugarú körök középpontjainak halmazát, amelyek egy egyenesből h hosszúságú húrt metszenek ki.

E1 **786.** *(A 785. feladatra épül.)* Szerkesszünk r sugarú kört, amelyből két adott metsző egyenes egyike h_1 hosszúságú húrt, a másik h_2 hosszúságú húrt metsz ki.

K2 **787.** Szerkesszünk kört, amely egy háromszög minden oldalegyeneséből ugyanakkora adott húrt metsz ki.

E1 **788.** *(A 778. feladatra épül.)* Szerkesszünk egy körbe négyzetet úgy, hogy egyik oldala adott ponton menjen át.

E1 **789.** *(A 778. feladatra épül.)* Szerkesszünk egy körbe egyenlő oldalú háromszöget úgy, hogy egyik oldala adott ponton menjen át.

K2 **790.** Határozzuk meg azoknak a pontoknak a halmazát, amelyekből egy adott r sugarú körhöz e hosszúságú érintőszakaszok húzhatók.

K2 **791.** Szerkesszünk adott körhöz érintőt, amely adott egyenessel adott szöget zár be.

K2 **792.** Rajzoljunk meg egy kört, és adjunk meg két egyenest. Szerkesszünk olyan érintőt a körhöz, amely mindkét egyenessel ugyanakkora szöget zár be.

K1 **793.** Szerkesszünk egy körívhez a felezőpontjában érintőt a kör középpontjának felhasználása nélkül.

E1 **794.** Egy körről akkor mondjuk, hogy adott pontból α szögben látszik, ha a pontból a körhöz szerkesztett két érintőszakasz α szöget zár be. Bizonyítsuk be, hogy azon pontok halmaza, amelyekből egy kör α szögben látszik, az adott körrel koncentrikus kör.

E1 **795.** *(A 794. feladatra épül.)* Szerkesszünk adott körhöz olyan pontot, amely egy előre kitűzött egyenesen van, és a kör belőle 45°-os szögben látszik.

E1 **796.** *(A 794. feladatra épül.)* Milyen távol vannak az r sugarú kör középpontjától az olyan pontok, amelyekből a kör 60°-os szögben látszik.

K2 **797.** Milyen ponthalmazt alkotnak azon körök középpontjai, amelyek egy egyenest adott pontban érintenek?

K1 **798.** A kör kerületének egy pontjából egy átmérőt és egy sugárral egyenlő húrt rajzolunk. Mekkora ezek szöge?

K1 **799.** A kör kerületének egy pontjából két sugárhosszúságú húrt rajzolunk. Mekkora szöget zárnak be ezek a húrok?

K2 **800.** Egy körben két egyenlő és egymásra merőleges húrt helyezünk el. Ezek egymást 8 cm-es és 4 cm-es darabokra vágják fel. Mekkora a húroknak a középponttól mért távolsága?

K2 **801.** Egy kör középpontjától 1,5 cm távolságra két 7 cm-es, egymásra merőleges húrt rajzolunk. Mekkora szakaszokra bontják egymást?

K2 **802.** Vetítsük merőlegesen a 4 cm sugarú körvonal tetszőleges pontját két merőleges átmérőre. Mekkora a vetületi pontok egymástól mért távolsága?

K2 **803.** A kör kerületének egy pontjában két merőleges húrt húzunk. Ezek távolsága a középponttól 4 cm és 6 cm. Mekkorák a húrok?

K2 **804.** Egy 3 cm sugarú kör két érintője merőleges egymásra. Mekkora a metszéspontjukból húzott érintőszakaszok hossza?

K1 **805.** Egy negyedkör ívének felezőpontjában szerkesszünk érintőt. Mekkora ennek a határoló egyenesek közötti része, ha a kör sugara 6 cm?

K1 **806.** Egy derékszög mindkét szárát érintő kör érintési pontjait összekötő szakasz 3 cm. Mekkora távolságra van a kör középpontja a szakasztól?

A kör mint ponthalmaz; körök szerkesztése

K1 **807.** Adjuk meg az adott ponton átmenő adott sugarú körök középpontjainak halmazát.

K1 **808.** Két egymásra merőleges egyenes egyikén tűzzünk ki két pontot, és szerkesszünk a pontokon átmenő kört, amely a másik egyenest érinti.

K2 **809.** Jelöljük meg a háromszög minden oldalán a beírt kör érintési pontját, és minden csúcs körül szerkesszünk kört, amely a csúcsból kiinduló oldalakat a megjelölt pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a három kör páronként érinti egymást.

K2 **810.** Szerkesszünk olyan kört, amelynek egy háromszög mindhárom csúcsától mért távolsága e hosszúságú szakasszal egyenlő, és a három csúcs vagy egyaránt a kör belsejében, vagy egyaránt a körön kívül van.

E1 **811.** Egy háromszög egyik csúcsa körül szerkesszünk kört, amely a másik két csúcstól egyenlő távolságra halad.

E1,GY **812.** Egy kertben kör alakú utat akarunk készíteni, amely a kert négy fájától egyenlő távolságra halad. Készítsük el az út tervrajzát, ha a négy fa helye már meg van jelölve a rajzpapíron, és semelyik három sincs egy egyenesen.

K1 **813.** Szerkesszünk adott sugárral kört, amely két adott ponton átmegy.

K1 **814.** Szerkesszünk kört, amely egy egyenest adott pontban érint, és átmegy egy kitűzött ponton.

K1 **815.** Szerkesszünk adott sugarú kört, amely egy szög szárait érinti.

K1 **816.** Szerkesszünk az ABC háromszögbe olyan félkört, amelynek átmérője az AB oldalon van, és érinti a háromszög másik két oldalának egyenesét.

E1 **817.** Adott egy kör és rajta kívül egy pont. Szerkesszünk adott sugarú kört, amely a kitűzött ponton átmegy és az adott kört érinti.

E1 **818.** Szerkesszünk r sugarú kört, amely két adott kört kívülről érint.

E1 **819.** Az R_2 sugarú kör belülről érinti az R_1 sugarú kört $(R_2 < R_1)$. Szerkesszünk olyan r sugarú kört, amely az R_1 sugarú kört belülről, az R_2 sugarú kört kívülről érinti.

K1 **820.** Egy 1 cm és egy 2 cm sugarú kör kívülről érinti egymást. Szerkesszünk olyan 3,5 cm sugarú kört, amely mindkettőt kívülről érinti.

K1 **821.** Szerkesszünk adott sugarú kört, amely átmegy egy kitűzött ponton, és egy adott egyenest érint.

K1 **822.** Szerkesszünk adott sugarú kört, amely egy egyenest adott pontban érint.

E1 **823.** Szerkesszünk adott kört és egyenest érintő r sugarú kört.

K2 **824.** Adott egy r sugarú kör és az egyik átmérőjének egyenese. Szerkesszünk olyan r sugarú kört, amely az adott kört és az adott egyenest is érinti.

K2 **825.** Rajzoljuk meg egy 3 cm sugarú kör egyik átmérőjét. Szerkesszünk egy 1 cm sugarú kört, amely ezt az átmérőt is és a kört is érinti.

E1 **826.** Rajzoljuk meg egy kör egyik érintőjét. Szerkesszünk kört, amely az érintőt is, az adott kört is érinti, és sugara az adott kör sugarának kétszerese.

K1 **827.** Szerkesszünk d sugarú kört, amely egy adott szög egyik száregyenesét érinti, középpontja pedig a másik száron van.

K2 **828.** Szerkesszünk kört, amely átmegy egy téglalap két szemközti csúcsán, és középpontja a téglalap egyik oldalának egyenesén van.

K1 **829.** Szerkesszünk egy adott szakasz végpontjain át kört úgy, hogy az egyik végponthoz húzott sugár a szakasszal 60°-os szöget zárjon be.

K1 **830.** Szerkesszünk egy háromszögbe olyan kört, amely mindhárom oldalától 1 cm-re halad.

K1 **831.** Szerkesszünk kört, amely egy szög szárait érinti, az egyiket adott pontban.

K1 **832.** Szerkesszünk két párhuzamos egyenest érintő kört, amely az egyik egyenest adott pontban érinti.

E1 **833.** Szerkesszünk két párhuzamost érintő kört, amely egy adott kört is érint.

K1 **834.** Szerkesszünk két párhuzamos egyenest érintő kört, amely egy kitűzött ponton átmegy.

K2 **835.** Egy külső P pontból a körhöz húzott érintők A-ban és B-ben érintik a kört. A kör B ponthoz húzott sugarát hosszabbítsuk meg a körön kívül önmagával, így a C ponthoz jutunk. Igazoljuk, hogy az AC szakasz P-ből háromszor akkora szög alatt látszik, mint a BC.

K2 **836.** Szerkesszünk adott szög szárait érintő és a szögfelező adott belső pontján átmenő kört.

K1 **837.** Szerkesszünk adott sugarú kört, amelynek egy adott szakasz a húrja.

K2 **838.** Határozzuk meg azon adott sugarú körök középpontjainak halmazát, amely körök átmennek egy adott kör egy-egy átmérőjének végpontjain.

Érintkező körök

K1 **839.** Adott két koncentrikus kör. Mutassuk meg, hogy a külső kört belülről, a belső kört kívülről érintő körök középpontjainak halmaza a két kör középköre.

K2 **840.** Adott két koncentrikus kör. A belső kör sugara r_1, a külső kör sugara r_2. Adjuk meg azon körök középpontjainak halmazát, amelyek a külső kört belülről érintik, miközben azokat a belső kör érinti belülről.

E1 **841.** *(A 839. és a 840. feladatra épül.)* Szerkesszünk kört, amely két koncentrikus kört érint, és egy adott ponton átmegy.

E1 **842.** *(A 839. feladatra épül.)* Adott két koncentrikus kör és egy egyenes, amely mindkettőt metszi. Szerkesszünk az adott köröket és az egyenest egyaránt érintő kört.

E2 **843.** Szerkesszünk kört, amely átmegy egy kitűzött ponton, egy adott kör középpontján, és érinti a kört.

K1 **844.** Két kör sugara 4 cm és 1 cm. Határozzuk meg a két kör viszonylagos helyzetét, ha a középpontok távolsága
a) 7 cm; *b)* 5 cm; *c)* 3,5 cm; *d)* 3 cm; *e)* 2,5 cm; *f)* 0 cm.

K1 **845.** Egyenlő szárú háromszögbe szerkesszünk két egyenlő sugarú kört úgy, hogy azok egymást, az alapot és egy-egy szárat is érintsenek.

K2 **846.** Szerkesszünk adott körcikkbe érintőkört.

K2 **847.** Szerkesszünk egy egyenlő oldalú háromszög minden csúcsa köré oldalnyi sugárral kört. A három kör közös része egy egyenlő oldalú ívháromszög. Szerkesszünk ebbe az ívháromszögbe az oldalíveket érintő kört.

K2 **848.** *(A 846. feladatra épül.)* Adott körbe szerkesszünk három egyenlő sugarú kört, amelyek egymást is és az adott kört is érintik.

K2 **849.** *(A 846. feladatra épül.)* Egy 3 cm sugarú körbe szerkesszünk hat egyenlő sugarú kört úgy, hogy azok mindegyike érintse az adott kört, és két beírt kis kört is érintsen. Mekkora lesz a beírt körök sugara?

K2 **850.** Egy r sugarú kör köré szerkesszünk hat egyenlő sugarú kört úgy, hogy azok mindegyike érintse az adott kört, és két szerkesztett kört is érintsen. Mekkora a szerkesztett körök sugara?

K2 **851.** Szerkesszünk olyan kört, amely egy egyenlő szárú háromszög szárait és beírt körét érinti.

E1 **852.** Adott egy kör, az egyik érintő egyenese és annak egy pontja. Szerkesszünk kört, amely az adott pontban érinti az egyenest, és érinti az adott kört is.

E1 **853.** Szerkesszünk adott egyenest érintő kört, amely még egy adott kört adott pontban is érint.

K2 **854.** Két egyenlő sugarú kör egymáson kívül helyezkedik el. Jelöljünk ki az egyiken egy P pontot. Tekintsük a P-n átmenő mindkét kört érintő köröket. Hol helyezkedhet el a P pont, ha tudjuk, hogy a fenti köröket az adott körök egyaránt kívülről vagy egyaránt belülről érintik.

K2 **855.** *(A 854. feladatra épül.)* Két egyenlő sugarú kör egymáson kívül helyezkedik el. Az egyiken kijelöltünk egy pontot. Szerkesszünk olyan kört, amely mindkét adott kört érinti, az egyiket az adott pontban, és az adott körök a szerkesztett kört
a) kívülről érintik;
b) belülről érintik.

E1 **856.** Két kör egymáson kívül helyezkedik el. Szerkesszünk olyan kört, amely mindkettőt érinti, az egyiket adott pontban.

K2 **857.** Adjunk meg két egymást metsző egyenlő sugarú kört, és válasszuk ki a közös részüket határoló egyik ív valamelyik belső pontját. Szerkesszünk kört, amely a két kör közös részében helyezkedik el, és mindkét kört érinti, méghozzá egyiket az adott pontban.

E1 **858.** Adjunk meg két egymást metsző egyenlő sugarú kört, és válasszuk ki a közös részüket határoló ív valamelyik belső pontját. Szerkesszünk olyan mindkét kört érintő kört, amely az adott pontban kívülről érinti az adott kört.

E1 **859.** *(A 857. és a 858. feladatra épül.)* Egy kör belsejében rajzoljunk meg egy kisebb kört, és tűzzünk ki rajta egy pontot. Szerkesszünk kört, amely mindkét kört érinti, mégpedig a belsőt a kitűzött pontban.

K1 **860.** Két, egymást kívülről érintő körben szerkesszünk párhuzamos, de ellentétes irányú sugarakat. Mutassuk meg, hogy a végpontokat összekötő egyenes átmegy az érintési ponton.

K1 **861.** Egy kör belülről érint egy másikat. Szerkesszünk bennük párhuzamos és egyező irányú sugarakat. Mutassuk meg, hogy a sugarak végpontjait összekötő egyenes átmegy az érintési ponton.

K1 **862.** Bizonyítsuk be, hogy két érintkező kör érintési pontbeli közös érintőjének minden pontjából egyenlő érintők húzhatók a két körhöz.

K2 **863.** Egy egyenesen tűzzünk ki két pontot. Milyen ponthalmazt alkotnak azon egymást érintő körök érintési pontjai, amely körök az adott pontokban érintik az egyenest?

K2 **864.** Két kívülről érintkező kör egyik külső érintőszakasza mint átmérő fölé rajzoljunk kört, és igazoljuk, hogy az átmegy a körök érintkezési pontján.

K2 **865.** *(A 860. feladatra épül.)* Két párhuzamos egyenes mindegyikén tűzzünk ki egy pontot. Szerkesszünk egyenlő sugarú érintkező köröket, amelyek a párhuzamosokat a kitűzött pontokban érintik.

K1 **866.** A négyzetet az átlói négy háromszögre bontják. Vegyük ezek beírt köreit. Mutassuk meg, hogy az átlókon levő érintési pontok ugyancsak egy négyzet csúcsai.

K2 **867.** Egy egyenesen tűzzünk ki két pontot. Szerkesszünk két egyenlő sugarú érintkező kört, amelyek az egyenest a kitűzött pontokban érintik.

E1 **868.** Egy körön tűzzünk ki két pontot. Szerkesszünk két egymást érintő, egyenlő sugarú kört, melyek az eredeti kört a kitűzött pontokban érintik.

E1 **869.** Szerkesszünk kört, amely három egyenlő sugarú kört kívülről érint.

E1,GY **870.** Az építészetben a következő módszerrel szoktak boltívet szerkeszteni: Az AB szakaszt a C és D pontok három egyenlő részre osztják. C és D körül AB harmadával köröket rajzolnak, ezek az E és F pontokban metszik egymást. Az F-ből $\frac{2}{3}AB$ sugárral szerkesztenek egy kört, ami kijelöli a boltívet. Bizonyítsuk be, hogy ez érinti a C és D középpontú köröket.

Körök és érintők

E1 **871.** Mutassuk meg, hogy két kívülről érintkező kör közös külső érintőinek érintési pontjai húrtrapézt határoznak meg, és e trapéz szárai egyenlők a szárakhoz tartozó középvonallal.

K1 **872.** Két adott pont egyikén át szerkesszünk olyan egyenest, amely a másik ponttól adott távolságra halad.

K2 **873.** Adott két pont. Szerkesszünk az egyik pont körül kört úgy, hogy a másik pontból a körhöz húzott érintőszakasz adott hosszúságú legyen.

K2 **874.** Rajzoljunk egy kört, és tűzzünk ki egy pontot. Szerkesszünk a pont körül kört, amely az adott körből egy adott hosszúságú húrt metsz ki.

E1 **875.** Egy kör belső pontján át szerkesszünk húrt úgy, hogy a húron levő szakaszok különbsége adott szakasszal legyen egyenlő.

K1 **876.** Szerkesszük meg két kívülről érintkező kör közös érintőit.

K1 **877.** Tűzzünk ki két pontot egymástól 5 cm-re. Szerkesszünk egyenest, amely az egyiktől 3 cm, a másiktól 2 cm távolságra halad.

K1 **878.** Szerkesszük meg két egyenlő sugarú kör közös belső érintőit.

K1 **879.** Adjuk meg annak a feltételét, hogy két kör közös érintőinek száma 0, 1, 2, 3, 4 legyen.

E1 **880.** *(Az 568. és a 776. feladatra épül.)* Adjunk meg két kört, és szerkesszünk egyenest, amelyből a körök adott hosszúságú húrokat metszenek ki.

E1 **881.** Az A és B pontok köré szerkesszünk köröket úgy, hogy közös külső érintőjüknek a két érintési pont közé eső szakasza, továbbá a sugarak összege előre adott szakaszokkal legyen egyenlő.

E1 **882.** Adjunk meg két koncentrikus kört, és rajzoljunk derékszöget, amelynek egyik szára az egyik kört, másik szára a másik kört érinti. Határozzuk meg a derékszögek csúcsainak halmazát.

A témához kapcsolódó további feladatok: 568., 569., 570., 1322., 1323., 1325.

Kerületi és középponti szögek

K1 **883.** Hány fokos középponti, illetve kerületi szög tartozik a kör $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{5}{6}$; 0,3 részéhez?

K1 **884.** Egy kerületi szög és a hozzá tartozó középponti szög összege 180°. Mekkorák ezek a szögek?

K1 **885.** Egy középponti szögnek és a hozzá tartozó kerületi szögnek a különbsége 36°42′16″. Mekkorák ezek a szögek?

K1 **886.** Egy 90°-os középponti szöghöz a körben 10 cm-es AB húr tartozik. Mekkora távolságra van a kör K középpontja a húrtól?

K1 **887.** Mekkora távolságra van a 4 cm sugarú kör K középpontjától a 120°-os középponti szögű ív végpontjait összekötő AB húr?

K1 **888.** Egy körszeletet 64°-os középponti szögű ív határol. Mekkora szögben látszik az ív pontjaiból a határoló AB húr?

K1 **889.** Egy háromszög két oldala a köré írt kör K középpontjából 126°-os, illetve 68°-os szögben látszik. Mekkorák a háromszög szögei?

K1 **890.** Mekkora szögben látszik a háromszög köré írt kör K középpontjából a háromszög α szögével szemközti oldala?

K1 **891.** A kört egy húrja két ívre vágja. Az egyik ív P pontjaiból a húr 128°-os szögben látszik. Mekkora a húr látószöge a másik ív Q pontjaiból?

K1 **892.** Egy P pontból a körhöz húzott két érintő 67°-os szöget zár be. Mekkora szögben látszik az érintési pontokat összekötő EF húr a kör pontjaiból?

K1 **893.** Helyezzünk el egy körben egy sugárhosszúságú húrt. Mekkora szögben látszik ez a kör pontjaiból?

K1 **894.** Mekkora az a kerületi szög, amelynek száraiból a kör egy-egy sugárnyi szakaszt vág ki?

K1 **895.** Mekkora az a kerületi szög, amelynek egyik szára a kör sugara, másik a kör átmérője?

K1 **896.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy húr és egy átmérő 30°-os szöget alkot, akkor az átmérő és a húr nem közös végpontját összekötő szakasz a kör sugarával egyenlő.

K1 **897.** A kör AB húrja és AC átmérője 30°-os szöget zár be. Igazoljuk, hogy a B pontbeli érintő az átmérő meghosszabbításából a kör sugarával egyenlő szakaszt metsz le.

E1 **898.** Mutassuk meg, hogy a szabályos háromszög köré írt kör egy pontját a csúcsokkal összekötő három szakasz közül az egyik egyenlő a másik kettő összegével.

K1 **899.** Rajzoljuk meg a háromszög egyik csúcsához tartozó belső szögfelező egyenesét. Mutassuk meg, hogy a szögfelező és a háromszög köré írt kör metszéspontja egyenlő távol van a másik két csúcstól.

E1 **900.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög bármelyik belső szögének szögfelező egyenese és a szemközti oldal felezőmerőlegese a háromszög köré írt körön metszik egymást.

E1 **901.** Mutassuk meg, hogy a háromszög bármelyik külső szögének szögfelező egyenese és a szemközti oldal felezőmerőlegese a háromszög köré írt körön metszik egymást.

E1 **902.** *(A 900. feladatra épül.)* Igazoljuk, hogy a háromszög beírt körének középpontja (O_0), egy oldalának két végpontja (A, B), valamint ehhez az oldalhoz hozzáírt körének középpontja (O_C) egy körön van, amelynek középpontja a körülírt kör és az adott oldal felező merőlegesének (f_{AB}) egyik metszéspontja.

E1 **903.** *(A 901. feladatra épül.)* Igazoljuk, hogy a háromszög egyik oldalának két végpontja *(A, B)*, valamint a másik két oldalhoz hozzáírt köreinek középpontja (O_b, O_a) egy körön van, amelynek középpontja a körülírt kör és az első oldal felező merőlegesének (f_{AB}) egyik metszéspontja.

E1 **904.** Igazoljuk, hogy a háromszög két magasságvonala a harmadik csúcstól egyenlő távolságra metszi a háromszög köré írt kört.

E1 **905.** *(A 904. feladatra épül.)* Tekintsük a háromszög két magasságvonalának a körülírt körrel vett metszéspontjait. A metszéspontokat összekötő húrra állítsunk merőlegest a harmadik csúcsból. Bizonyítsuk be, hogy ez a merőleges átmegy a háromszög köré írt kör középpontján.

E1 **906.** *(A 904. feladatra épül.)* Tekintsük a háromszög magasságvonalainak a körülírt körrel vett metszéspontjait. Mutassuk meg, hogy a magasságvonalak egyúttal a metszéspontok által alkotott háromszög szögfelezői.

E1 **907.** Hosszabbítsuk meg egy egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögeinek szögfelezőit a körülírt körig. Bizonyítsuk be, hogy a szögfelezőknek egymással, illetve a körrel vett metszéspontjai, valamint a háromszög harmadik csúcsa paralelogrammát határoznak meg.

K1 **908.** Legyenek α, β, γ egy hegyesszögű háromszög szögei. Szerkesszük meg a háromszög csúcsaiban a köré írt kör érintőit. Mekkorák az érintők által alkotott háromszög szögei?

K2 **909.** Egy háromszög szögei α, β, γ. Mekkorák annak a háromszögnek a szögei, amelyet a beírt kör érintési pontjai határoznak meg?

E1 **910.** Egy háromszög szögei α, β, γ. Az α–val szemközti oldalt kívülről érintő körön jelöljük meg az érintési pontokat. Mekkorák az érintési pontok által alkotott háromszög szögei?

K2 **911.** Írjunk kört egy egyenlő oldalú háromszög köré, és tűzzünk ki a kör kerületén egy, a csúcsoktól különböző pontot. Mekkora szögben látszanak ebből a pontból a háromszög oldalai?

K1 **912.** Adott körbe szerkesszünk adott egyenessel párhuzamos húrt, amelyhez egy előre adott kerületi szög tartozik.

K1 **913.** Szerkesszük meg azon pontok halmazát, amelyekből egy adott szakasz *a)* 45°-os szögben; *b)* 60°-os szögben; *c)* 150°-os szögben látszik.

K1 **914.** Tűzzünk ki egy AB szakaszt, és adjunk meg egy α szöget. Szerkesszünk kört, amelyben a szakasszal egyenlő húrhoz a szöggel egyenlő kerületi szög tartozik.

E1 **915.** Bontsunk két háromszögre egy egyenlő szárú háromszöget a szárak metszéspontján átmenő egyenessel. Mutassuk meg, hogy a két háromszög köré írt körök egyenlő sugarúak.

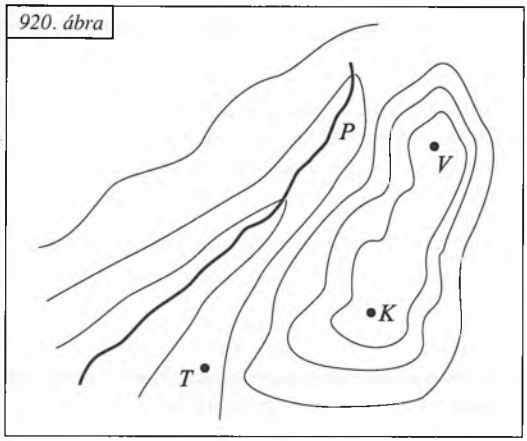
K2 **916.** Hány közös pontja lehet egy egyenesnek és egy adott szakasz α szögű látószögkörívének, ha *a)* α hegyesszög; *b)* α derékszög; *c)* α tompaszög?

K2,GY **917.** Egy parkban a kör alakú sétány minden pontjából látni lehet ugyanazt a hidat. A sétaút hány pontjából láthatjuk éppen 30°-os szög alatt a híd két végpontját?

K2 **918.** Egy szög két szárán adott egy-egy a hosszúságú szakasz. Az egyik szakasz α szögű látószögkörívének végtelen sok közös pontja van a másik szakasz β szögű látószögkörívével. Milyen α és β szög esetén lehetséges ez?

K1 **919.** Egy négyzet belsejében szerkesszünk pontot, amelyből két szomszédos oldal egyike 90°-os, másika 120°-os szögben látszik.

920. ábra



K1,GY **920.** A turistatérképen feltüntették a templom *(T)*, a kilátó *(K)*, a víztorony *(V)* és a patak *(P)* helyzetét. Egy forrástól a víztorony és a kilátó közötti egyenes utat 45°-os szögben, a kilátótól a templomhoz vezető utat 60°-os szögben látjuk. Adjunk szerkesztési eljárást a forrás helyének a térképen való bejelölésére, ha a forrást a patak elválasztja az építményektől *(920. ábra)*.

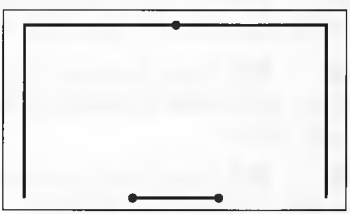
K2 **921.** Egy háromszög két szöge α és β. Mekkora szöget zár be a háromszög oldalegyeneseivel a körülírt kör harmadik csúcshoz tartozó érintője?

K2 **922.** *(A 921. feladatra épül.)* Szerkesszük meg a háromszög egy csúcsában a köré írt kör érintőjét anélkül, hogy a kört vagy középpontját megszerkesztenénk.

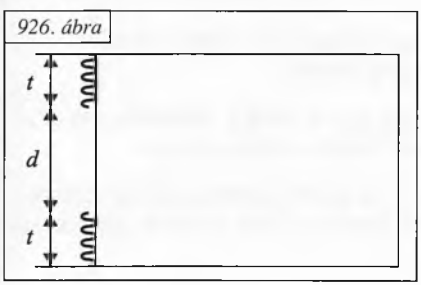
K2 **923.** Tűzzünk ki egy szakaszt, és adjunk meg a szakasszal párhuzamosan egy egyenest. Szerkesszük meg az egyenesen azt a pontot, amelyből a szakasz a legnagyobb szögben látszik. Indokoljuk meg a szerkesztést.

K2,GY **924.** *(A 923. feladatra épül.)* A labdarúgásnál a kapura lövő játékosok közül az van kedvezőbb helyzetben, aki „jobb szögből" lő kapura, azaz akinek a helyéről a kapu nagyobb szögben látszik. Mutassuk meg, hogy a *924. ábrán* kicsinyítésben felrajzolt pályán a vastagon kihúzott, ún. tizenhatos vonalon a jelölt pontban levő játékos látja legnagyobb szögben a kaputt.

924. ábra ▶



926. ábra



E1 **925.** Adott egy egyenes és az egyik félsíkjában egy rá merőleges szakasz. Szerkesszünk az egyenesen pontot, amelyből a szakasz a legnagyobb szögben látszik.

E1,GY **926.** *(A 925. feladatra épül.)* Milyen messze van a színpad vonalától a nézőtéren az az oldalpáholy, amelyből a színpad a legnagyobb szög alatt látszik? *(926. ábra)*

K1 **927.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott a szokásos jelölésekkel
a) a, α, m_a; *b)* a, α, s_a.

E1 **928.** *(A 927. a) feladatra épül.)* Húzzunk két félegyenest egy r sugarú kör középpontján át. Szerkesszünk érintőt a körhöz úgy, hogy a félegyenesek közötti része egy adott a szakasszal legyen egyenlő.

E2 **929.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, az ezzel szemközti szöge és
a) a másik két oldal összege;
b) a másik két oldal különbsége.

K2 **930.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott , α, m_a, s_a.

K2 **931.** Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott két átlója és egyik szöge.

E1 **932.** Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott egy oldala, egy szöge és az átlók hajlásszöge.

E1 **933.** Szerkesszünk négyszöget, ha ismert két átlója, két szomszédos oldala és a másik két oldal által határolt belső szöge.

E2 **934.** Szerkesszük meg az $ABCD$ négyszöget, ha adott az AC és a BD átló hossza, az átlók szöge és az A-nál, illetve a C-nél levő szög.

E2 **935.** Szerkesszünk négyszöget, ha ismert két átlója, az átlók szöge és két szomszédos szöge.

K2 **936.** Írjunk adott körbe háromszöget, ha ismert két szöge.

E1 **937.** Írjunk adott körbe háromszöget, ha ismert két oldal összege és az egyikkel szemközti szög.

E1 **938.** Szerkesszünk háromszöget, ha ismertek a szögfelezőinek a köré írt körrel való metszéspontjai.

E1 **939.** Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott az a három pont, amelyben az egy csúcsból kiinduló magasság, szögfelező és súlyvonal a köré írt kört metszi.

K2 **940.** Szerkesszünk háromszöget, ha adottak a köré írt körének a magasságegyenesekkel alkotott metszéspontjai.

K1 **941.** Szerkesszünk a hegyesszögű háromszögben olyan pontot, amelyből minden oldala egyenlő szögben látszik. Ez a pont a háromszög úgynevezett izogonális pontja.

K2 **942.** Hegyesszögű háromszög oldalai fölé szerkesszünk kifelé egyenlő oldalú háromszögeket, és írjunk ezek köré köröket. Mutassuk meg, hogy ez a három kör egy pontban metszi egymást, és ez a pont az eredeti háromszög izogonális pontja.

K2 **943.** Hegyesszögű háromszög oldalai fölé szerkesszünk kifelé egyenlő oldalú háromszögeket, és kössük össze a háromszög minden csúcsát a szemközti oldalra szerkesztett szabályos háromszög legtávolabbi csúcsával. Igazoljuk, hogy ezek az egyenesek a háromszög izogonális pontjában metszik egymást.

E1 **944.** Bizonyítsuk be, hogy hegyesszögű háromszög esetén a sík pontjai közül az izogonális pont rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy a csúcsoktól mért távolságainak összege a lehető legkisebb.

K2 **945.** Két érintkező kör E érintési pontján át szerkesszünk tetszőleges szelőt. Mutassuk meg, hogy a szelőn levő AE és EB húrokhoz mindkét körben ugyanakkora középponti szögek tartoznak.

K2 **946.** Két érintkező kör E közös pontján át szerkesszünk szelőt, és ennek végpontjaiban szerkesszük meg az érintőket. Bizonyítsuk be, hogy az így szerkesztett érintők párhuzamosak.

K2 **947.** Két metsző kör közös húrja AB. Az A ponton át húzott, B-t nem tartalmazó egyenes az egyik kört C pontban, a másikat D-ben metszi. Mutassuk meg, hogy a CD szakasz a B pontból az egyenes helyzetétől függetlenül ugyanakkora szögben látszik.

E1 **948.** *(A 947. feladatra épül.)* A k és l kör közös húrja AB. A k kör A-tól és B-től különböző P pontján átmenő PA egyenes C pontban, PB egyenes D pontban metszi újra az l kört. Bizonyítsuk be, hogy a CD szakasz hossza független a P pont helyzetétől.

E1 **949.** *(A 947. feladatra épül.)* Két metsző kör egyik metszéspontján át rajzoljunk a közös húr egyenesétől különböző egyenest. A két körrel alkotott újabb metszéspontjaikban rajzoljunk érintőket a körökhöz. Mutassuk meg, hogy a két érintő szöge független a kiinduló egyenes felvételétől.

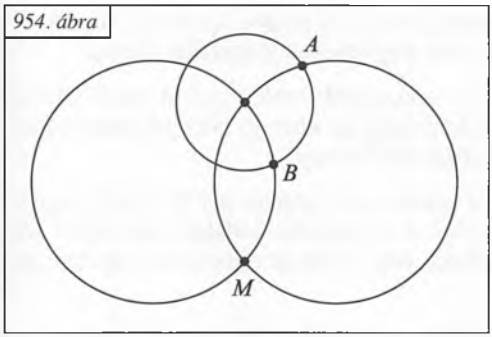
E1 **950.** Rajzoljunk két egyenlő sugarú, egymást metsző kört. Egyik metszéspontjukon át forgassunk egyenest, és minden helyzetben jelöljük meg az egyenes körökön belüli szakaszának felezőpontját. Mi az így kapott felezőpontok halmaza?

K1 **951.** Jelöljük meg egy egyenes A, B és C pontját. Rajzoljunk két egyenlő sugarú kört, amelyeknek a B pont közös pontja, és egyikük az egyik, másikuk a másik szélső kitűzött ponton is átmegy. Változtassuk a körök sugarát. Mi lesz az egyenesen kívüli metszéspontok halmaza?

K2 **952.** Rögzítsük egy kör két pontját, A-t és B-t. A kör egy tetszőleges X pontját kössük össze A-val, és az összekötő szakasz X-en túli meghosszabbítására mérjük fel XB-t. Mi lesz az így kapott B' pontok halmaza, ha X befutja a kört?

E2 **953.** Adott egy körön két pont. Forgassunk a középpont körül egy átmérőt, és egyes helyzeteiben kössük össze a végpontjait egy-egy kitűzött ponttal. Hol helyezkednek el az összekötő vonalak metszéspontjai?

954. ábra



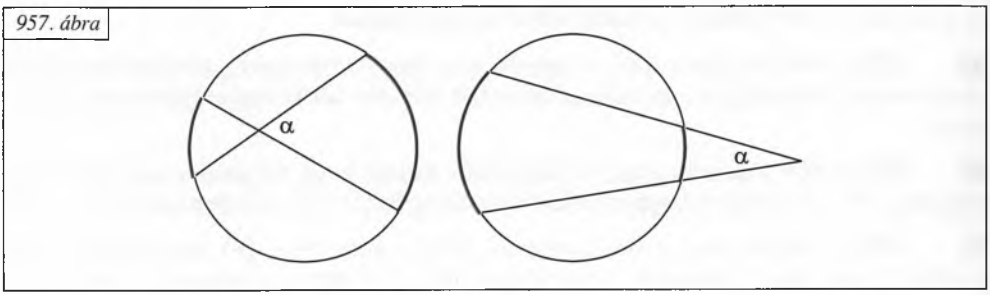
E1 **954.** Rajzoljunk kört két egyenlő sugarú kör egyik metszéspontja körül. Igazoljuk, hogy ennek a két körrel való A és B metszéspontja az eredeti körök M metszéspontjával egy egyenesre esik. *(954. ábra)*

K2 **955.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egyik csúcsából húzott szögfelező, a körülírt körhöz ugyanabban a csúcsban húzott érintő és a szemközti oldalegyenes egyenlő szárú háromszöget zár körül.

E1 **956.** *(A 955. feladatra épül.)* Húzzuk meg a háromszög egyik csúcsához tartozó szögfelezőjét. Rajzoljunk olyan kört, amelynek ez a szögfelező egy húrja, és érinti a szöggel szemközti oldalt. Mutassuk meg, hogy az így felvett kör érinti a háromszög köré írt kört.

K1 **957.** Az *957. ábrán* színessel húzott ívekhez tartozó kerületi szögeket ismerjük. Számítsuk ki ezek segítségével az α nagyságát.

957. ábra

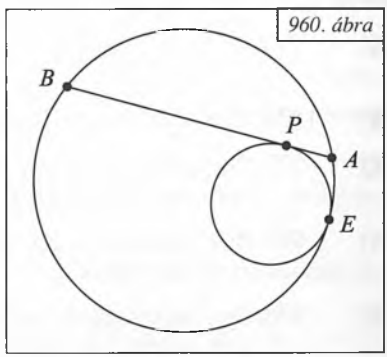


K1 **958.** Rajzoljunk két érintkező kört, és az érintési ponton át két szelőt. Bizonyítsuk be, hogy a szelők egy-egy körrel való második metszéspontjait összekötő húrok párhuzamosak.

K1 **959.** Rajzoljunk két olyan kört, amelyek közül az egyik belülről érinti a másikat, és messük el ezeket egy egyenessel. Bizonyítsuk be, hogy az egyenesnek a két kör közötti szakaszai az érintési pontból egyenlő szögekben látszanak.

K2 **960.** Rajzoljunk két olyan kört, amelyek közül az egyik E pontban belülről érinti a másikat. Legyen a belső kör egy P pontjához húzott érintőnek a külső körrel való metszéspontja A és B. Igazoljuk, hogy PE felezi az AEB szöget. *(960. ábra)*

960. ábra



K1 **961.** Egy háromszög szögei α, β, γ. Mekkora szöget zár be a háromszög köré írt körhöz az α szög csúcsában szerkesztett érintő a szemközti oldallal?

K2 **962.** Szerkesszünk négyzetet, ha ismert az A csúcsa, továbbá a szemközti C csúcsba futó oldalegyeneseknek egy-egy pontja, P és Q.

K2 **963.** Egy konvex α szög R csúcsától d távolságra szerkesszünk olyan egyenest, amelyből a szögszárak a hosszúságú szakaszt metszenek ki.

K2 **964.** Egy pontból három félegyenes indul ki. Szerkesszünk szelőt, amelyből a félegyenesek két adott hosszúságú szakaszt metszenek ki.

K2 **965.** Rajzoljunk egy kört, és tűzzünk ki egy P pontot. Szerkesszünk a körben olyan AB átmérőt, amely a kitűzött pontból ε szögben látszik.

K2 **966.** Rögzítsük egy háromszög köré írt körét és két csúcsát. Mit ír le a háromszögbe írt kör középpontja, ha a harmadik csúcs befutja a kört?

K2 **967.** Szerkesszünk háromszöget, ha ismert az AB oldala, az ezzel szemközti γ szöge és r a beírt kör sugara.

V **968.** Rajzoljunk egy szög szárai közé a szárakat érintő kört. Szerkesszünk érintőt a körhöz, amelynek a szárak közé eső darabja adott szakasszal egyenlő.

K2 **969.** Legyen F az ABC háromszög köré írt kör C-t nem tartalmazó AB ívének felezőpontja. Mutassuk meg, hogy F ugyanolyan távol van az A és B csúcsoktól, mint
a) a háromszögbe írt kör O_0 középpontjától;
b) a háromszög AB oldalához hozzáírt kör O_c középpontjától.

K2 **970.** *(A 969. feladatra épül.)* Mutassuk meg, hogy a háromszög köré írt kör felezi a háromszögbe írt kör O_0 középpontját és bármelyik hozzáírt kör középpontját összekötő szakaszt.

E1 **971.** *(A 969. feladatra épül.)* Szerkesszünk háromszöget, ha adott a köré írt kör középpontja *(K)*, a beírt kör középpontja *(L)* és az egyik hozzáírt kör középpontja *(M)*.

E2 **972.** Egy egyenes egyik oldalán tűzzünk ki két pontot, P-t és Q-t. Szerkesszünk adott γ szögű háromszöget, amelynek c hosszúságú oldala az adott egyenesen van, két másik oldalegyenese átmegy a P és Q ponton. P az AC oldalegyenes, Q a BC oldalegyenes pontja legyen.

Húrnégyszögek, érintőnégyszögek

K1 **973.** Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög akkor és csakis akkor húrnégyszög, ha egyik külső szöge egyenlő a szemközti belső szöggel.

K1 **974.** Mutassuk meg, hogy a paralelogrammák közül csak a téglalap lehet húrnégyszög.

K1 **975.** Mutassuk meg, hogy a húrtrapéz tengelyesen szimmetrikus.

K2 **976.** Bizonyítsuk be, hogy egy konvex négyszög szomszédos szögfelezőinek metszéspontjai húrnégyszöget határoznak meg, ha létrejön ez a négyszög.

K1 **977.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög két csúcsa és a belőlük kiinduló magasságok talppontjai egy körön vannak.

K2 **978.** Egy hegyesszögű háromszög egyik oldalán levő magasságtalppontból bocsássunk merőlegest a másik két oldalra. Igazoljuk, hogy ezek talppontjai és a kiindulásul vett oldal két végpontja egy körön helyezkednek el.

K2 **979.** Igazoljuk, hogy a háromszög magasságpontja, egyik csúcsa és a csúcsból induló két oldalon levő magasságtalppontok egy körön vannak.

E1 **980.** *(A 979. feladatra épül.)* Mutassuk meg, hogy a hegyesszögű háromszög talpponti háromszögének egyik oldala akkora szöget zár be a háromszög valamelyik oldalával, mint az eredeti háromszög egyik szöge.

E1 **981.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságvonalai a talpponti háromszög belső vagy külső szögfelezői.

E2 **982.** *(A 981. feladatra épül.)* Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott a talpponti háromszöge.

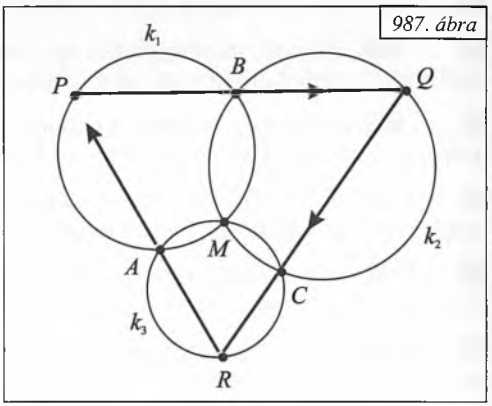
E1 **983.** Egy hegyesszögű háromszög szögei α, β, γ. Számítsuk ki a talpponti háromszög szögeit.

K1 **984.** Mutassuk meg, hogy a hegyesszögű háromszög egy belső pontjából az oldalakra állított merőleges szakaszok a háromszöget három húrnégyszögre bontják.

K1 **985.** Egy kör AB átmérőjének B-n túl levő meghosszabbítására C pontjában állítsunk merőlegest. Az A pontból egy másik egyenest húzunk, ami a kört E pontban, a merőlegest D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy BCDE húrnégyszög.

E2 **986.** Jelöljünk ki egy háromszög minden oldalán egy pontot és kössük össze ezeket egymással. Az összekötő szakaszok az eredeti háromszögből egy-egy kis háromszöget metszenek le. Bizonyítsuk be, hogy a kis háromszögek köré írt körök egy ponton mennek át.

K2 **987.** A *987. ábrán* látható három kör, k_1, k_2 és k_3 egy közös M pontban metszik egymást. A k_1 kör P pontjából kiindulva húzzunk egyenest B-n át, ez k_2-t Q-ban metszi. A QC egyenes k_3-at R-ben metszi. Mutassuk meg, hogy az R-et A-val összekötő egyenes átmegy a P ponton.

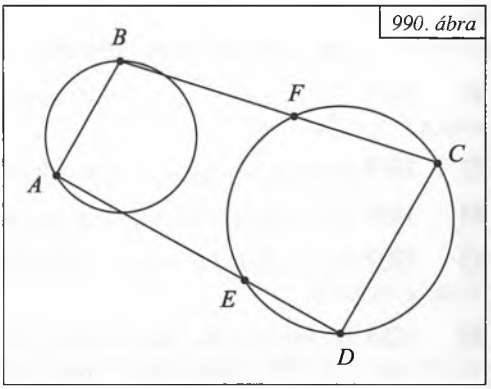


987. ábra

K1 **988.** Szerkesszünk húrnégyszöget, ha adott három oldala és egy átlója.

K1 **989.** Szerkesszünk húrnégyszöget, ha adott három oldala és közülük két szomszédos oldalának szöge.

K1 **990.** A *990. ábrán* látható két körben adott az AB és CD párhuzamos húr. Bizonyítsuk be, hogy $ABFE$ négyszög húrnégyszög.



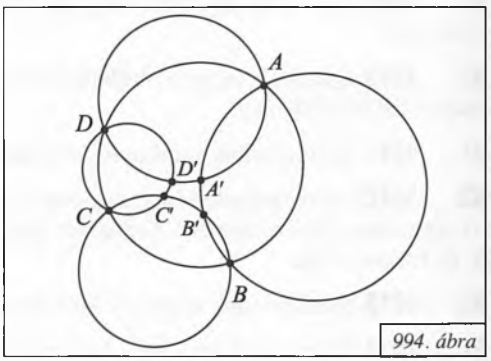
990. ábra

K1 **991.** Húzzunk két kör metszéspontjain át egy-egy szelőt. Ezek mindkét kört még egy pontban metszik. Kössük össze az ugyanabban a körben levő második metszéspontokat, és igazoljuk, hogy az így nyert két egyenes párhuzamos.

K1 **992.** Szerkesszünk érintőt a háromszög köré írt körhöz az egyik csúcsban, és metsszük el a csúcshoz tartozó két oldalt az érintővel párhuzamos egyenessel. Mutassuk meg, hogy a háromszögből így lemetszett négyszög húrnégyszög.

E1 **993.** Mutassuk meg, hogy ha négy kör bármelyike két másikat (és csak kettőt) kívülről érint, akkor a négy érintési pont egy körön van.

E1 **994.** Négy kör a *994. ábrán* látható módon metszi egymást úgy, hogy a külső A, B, C, D metszéspontok egy körön vannak. Igazoljuk, hogy a belső A', B', C', D' pontok is egy körön vannak.



994. ábra

E1 **995.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy húrnégyszög két pár szemközti oldalegyenese nem párhuzamos, akkor olyan két szöget zár közre, melyeknek felezői merőlegesek egymásra.

E2 **996.** Két kör A-ban és B-ben metszi egymást. Az A ponton át két szelőt húzunk, ezek másodszor a C és D, illetőleg E és F pontokban metszik a köröket. EC és DF metszéspontja G. Igazoljuk, hogy a G, C, D, B pontok egy körön vannak.

E2 **997.** *(A 996. feladatra épül.)* Négy egyenes négy háromszöget határoz meg. Igazoljuk, hogy a négy háromszög köré írt négy kör egy ponton megy át.

E2 **998.** Állítsunk merőlegeseket egy háromszög oldalegyeneseire a köré írt kör egy pontjából. Igazoljuk, hogy ezek talppontjai egy egyenesen vannak. (Simson-egyenes)

E2 **999.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságpontjának az oldalegyenesekre vonatkozó tükörképei a háromszög köré írt körön vannak.

E2 **1000.** *(A 999. feladatra épül.)* Tükrözzük a háromszög magasságpontját az egyik oldalegyenesre. Mekkora szögben látszik a tükörképből a szóban forgó oldal?

E2 **1001.** *(A 999. feladatra épül.)* Tükrözzük a háromszög magasságpontját az oldalfelező pontokra, és bizonyítsuk be, hogy a tükörképek a háromszög köré írt körön vannak.

E2 **1002.** *(A 999. feladatra épül.)* Kössük össze a háromszög magasságpontját a csúcsokkal. Így az eredetivel együtt négy háromszög keletkezik. Bizonyítsuk be, hogy az ezek köré írt körök egyenlő sugarúak.

E2 **1003.** Egy ABC háromszög belsejében szerkesszünk olyan P pontot, amelyre $PBC\sphericalangle = PCA\sphericalangle = PAB\sphericalangle$ teljesül. (Az ilyen pontot Brocard-féle pontnak nevezik.)

K1 **1004.** Egy érintőnégyszög három oldala (ebben a sorrendben) 3 cm, 4 cm, 5 cm. Mekkora a negyedik oldal?

K1 **1005.** Igazoljuk, hogy a konvex deltoid érintőnégyszög.

K1 **1006.** Mi a feltétele annak, hogy egy paralelogramma érintőnégyszög legyen?

K1 **1007.** Bizonyítsuk be, hogy az érintőhatszög három-három nem szomszédos oldalának összege egyenlő.

K2 **1008.** Bizonyítsuk be, hogy a páros oldalszámú érintősokszög páros sorszámú oldalainak összege egyenlő a páratlan sorszámú oldalainak összegével.

K1 **1009.** Mi a feltétele annak, hogy egy deltoid egyszerre húrnégyszög és érintőnégyszög is legyen?

K1 **1010.** Igazoljuk, hogy a rombusz beírt körének az oldalakkal való érintési pontjai téglalapot határoznak meg.

K1 **1011.** Szerkesszünk rombuszt, ha adott az oldala, és a beírt kör sugara.

K2 **1012.** Szerkesszünk érintőnégyszöget, ha adott a beírt kör sugara,
a) két szomszédos oldala és a közbezárt szögük;
b) és három szöge.

K2 **1013.** Szerkesszünk adott kör köré érintőtrapézt, ha adottak a szárai.

E1 **1014.** Bizonyítsuk be, hogy trapézba akkor és csak akkor írható az oldalakat érintő kör, ha a szárak mint átmérő fölé írt körök érintik egymást.

E1 **1015.** Adott egy körön három pont, A, B, C. Szerkesszünk D pontot a körön úgy, hogy $ABCD$ négyszög érintőnégyszög legyen.

E1 **1016.** Bizonyítsuk be, hogy egy érintőnégyszög akkor és csakis akkor húrnégyszög, ha a szemközti érintési pontokat összekötő egyenesek merőlegesek egymásra.

Hasonlóság

Kicsinyítés, nagyítás

K1 **1017.** Nagyítsunk egy háromszöget a sík egy adott pontjából *a)* kétszeresére; *b)* háromszorosára; *c)* háromkettedszeresére.
Kicsinyítsünk egy háromszöget a sík egy adott pontjából öthetedszeresére.

K1 **1018.** *a)* Nagyítsunk egy háromszöget a súlypontjából kétszeresére.
b) Kicsinyítsünk egy háromszöget a súlypontjából kétharmadszorosára.

K1 **1019.** Rajzoljunk hatszöget, és vegyünk fel a belsejében egy pontot. E pontból *a)* nagyítsuk az idomot háromszorosára; *b)* kicsinyítsük az idomot felére.

K1 **1020.** Adott az $ABCD$ négyzet és annak AD oldalán az O pont. Szerkesszük meg a négyzet O középpontú *a)* háromszoros nagyítását; *b)* felére kicsinyített képét.

K1 **1021.** Legyen az $ABCD$ négyszög AB oldalának B-n túli meghosszabbítása a BB' szakasz. Szerkesszük meg a négyszög A középpontú nagyított képét úgy, hogy B képe B' legyen.

K1 **1022.** Rajzoljunk derékszögű trapézt. Az egyik alapon a derékszögű csúcsból kiindulva jelöljünk ki egy szakaszt. Szerkesszük meg a trapéz kicsinyített képét úgy, hogy az így kapott kép egyik alapja az adott szakasszal legyen egyenlő.

K1 **1023.** Legyen a sík két pontja O és P. Szerkesszük meg egy háromszög O középpontú hasonló képét úgy, hogy egyik oldalegyenese a P ponton menjen át.

K1 **1024.** Legyen adott a sík O pontja és e egyenese. Szerkesszük meg egy négyszög O középpontú hasonló képét úgy, hogy egyik csúcsa az e egyenesre essen.

K1 **1025.** Legyenek az $ABCDE$ ötszög AE oldalán fekvő szögek derékszögek. Legyen $P \in AE$ tetszőleges belső pont. Szerkesszük meg az ötszög kicsinyített képét először úgy, hogy EA szakasz képe EP, másodszor pedig EA szakasz képe PA legyen.

K1 **1026.** Adott egy O pont és egy e egyenes, továbbá az AB szakasz. Szerkesszük meg az AB szakasz O középpontú hasonló képét úgy, hogy egyik végpontja e-re essék.

E1 **1027.** Adott egy kör, rajta kívül egy O pont, továbbá a kör belsejében egy AB szakasz. Szerkesszük meg az AB szakasz O középpontú hasonló képét úgy, hogy egyik végpontja a körön legyen.

K1 **1028.** Adott egy négyzet és rajta kívül egy egyenes, ami párhuzamos a négyzet egyik oldalával. Vegyünk fel *a)* a négyzet belsejében; *b)* a négyzet kerületén; *c)* a négyzeten kívül egy pontot, és ebből szerkesszük meg a négyzetnek azt a hasonló képét, amelynek egyik oldala a megrajzolt egyenesre esik.

K2 **1029.** Adott egy négyzet és rajta kívül két egyenes, amelyek a négyzet két szomszédos oldalával párhuzamosak. Szerkesszünk az átlóegyeneseken olyan pontot, amelyből a négyzet középpontos hasonló képét megszerkesztve a kép két szomszédos oldala az adott egyenesekre esik.

K2 **1030.** Egy téglalap belsejében rajzoljunk négyzetet, melynek oldalai sorra párhuzamosak a téglalap oldalaival. Szerkesszünk olyan hasonlósági középpontot, melyből a négyzet hasonló képének három oldala a téglalap három oldalegyenesére esik.

E1 **1031.** Rajzoljunk négyzetet, és vegyünk fel akkora szakaszt, amekkorára az egyik oldalát kicsinyíteni akarjuk. Helyezzük el a szakaszt ezzel az oldallal párhuzamosan. Szerkesszük meg a hasonlósági középpontot, és hajtsuk végre a kicsinyítést.

E1 **1032.** Rajzoljunk ötszöget és a belsejében vegyünk fel az egyik oldalával párhuzamosan egy, az oldalnál rövidebb szakaszt. Szerkesszük meg az ötszög kicsinyített képét úgy, hogy a felvett szakasz a vele párhuzamos ötszögoldal képe legyen.

E1 **1033.** Rajzoljunk háromszöget, majd az egyik oldallal párhuzamosan egy szakaszt. Szerkesszük meg a hasonlóság középpontját úgy, hogy az adott szakasz a vele párhuzamos háromszögoldal hasonló képe legyen, majd szerkesszük meg a harmadik csúcs képét is.

E2 **1034.** Adott az ABC háromszög, az O pont és egy d távolság. Szerkesszük meg a háromszög O középpontú hasonló képét úgy, hogy az AB szakasz képe d hosszúságú legyen.

K2 **1035.** Adott egy O középpontú kör, az A pont és az OA egyenes tetszőleges O' pontja. Szerkesszük meg a kör A középpontra vonatkozó hasonló képét úgy, hogy O képe O' legyen.

K2 **1036.** Adott egy ABC háromszög és egy egyenes. Az egyenesen vegyünk fel tetszés szerinti A' és B' pontokat. Szerkesszünk az ABC háromszöghöz hasonló $A'B'C'$ háromszöget úgy, hogy az $A'B'C'$ körüljárási iránya egyenlő, illetve ellenkező legyen az ABC körüljárási irányával.

K2 **1037.** Rajzoljunk egy háromszöget és egy téglalapot. Szerkesszünk a háromszög oldalaira kifelé a megadotthoz hasonló téglalapokat, amelyeknek hosszabbik oldala egy-egy háromszög oldal.

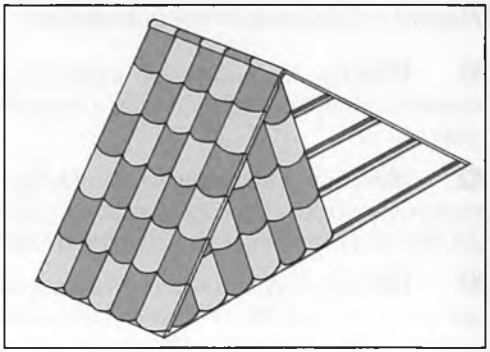
K1 **1038.** Adottak az a, b és a' szakaszok. Szerkesszük meg a b' szakaszt úgy, hogy eleget tegyen az $a:b = a':b'$ összefüggésnek.

K1 **1039.** Adott szakaszt osszunk fel olyan részekre, amelyeknek aránya

a) 2:3; *b)* 5:7; *c)* $2\frac{2}{3}:5\frac{1}{3}$; *d)* 2:3:4; *e)* 5:7:8; *f)* $1\frac{1}{5}:\frac{2}{5}:2\frac{2}{3}$.

K1 **1040.** Rajzoljunk háromszöget, és mindhárom oldalát osszuk fel
a) 3 egyenlő részre; *b)* 6 egyenlő részre; *c)* 2:3 arányú részekre.

K1,GY 1041. A háztetőt fedő cserepeket az eresszel párhuzamosan futó, egymástól egyenlő távolságban levő lécekre rakják. Milyen hosszúak az egyes lécek azon a háromszög alakú tetősíkon, amelynek ereszvonala 6,8 m, és a tetősíkon nyolc cseréptartó léc van? *(1041. ábra)*



1041. ábra ▶

K1 1042. Rajzoljunk téglalapot, jelöljük ki egy csúcsát. Határozzuk meg a kerület két pontját úgy, hogy a három pont a kerületen mérve egymástól egyenlő távol legyen.

K1 1043. Rajzoljunk egy négyzetet és egy téglalapot. Szerkesszünk az adott téglalappal hasonló téglalapot úgy, hogy a kerülete a négyzet kerületével legyen egyenlő.

K1 1044. Adott egy trapéz és egy téglalap. Szerkesszünk az adott trapézzal hasonló trapézt úgy, hogy kerülete a téglalap kerületével legyen egyenlő.

K1 1045. Adott egy téglalap és egy háromszög. A téglalap egyik oldalán vegyünk fel egy pontot, a kerületen pedig szerkesszünk másik kettőt úgy, hogy a kerület három darabjának aránya megegyezzék a háromszög oldalainak arányával.

K1 1046. Adott háromszög egyik csúcsához határozzuk meg a kerületnek egy olyan pontját, hogy a két pont a kerületet az alábbi arányban ossza két részre: *a)* 2:3; *b)* $2\frac{1}{2}:3\frac{1}{2}$; *c)* $\sqrt{2}:2$.

K1 1047. Adott háromszöghöz szerkesszünk hasonlót úgy, hogy a kerülete adott szakasszal legyen egyenlő.

K2 1048. Szerkesszünk háromszöget, ha adott α és β ($\alpha > \beta$), továbbá *a)* $2s$; *b)* $a + b$; *c)* $a - b$.

K2 1049. Szerkesszünk c átfogójú derékszögű háromszöget, ha adott *a)* $a + b$, α; *b)* $c - b$, α.

K2 1050. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget a szárszögből és
a) a kerületből;
b) az alap és egy szár összegéből;
c) az alap és egy szár különbségéből.

K2 1051. Szerkesszük meg egy négyzet hasonló képét úgy, hogy adott szakasszal legyen egyenlő *a)* az átló és az oldal összege; *b)* az átló és az oldal különbsége.

K2 1052. *(A 1051. feladatra épül.)* Szerkesszünk négyzetet, ha adott *a)* az átló és az oldal összege; *b)* az átló és az oldal különbsége.

Hasonló síkidomok beírása, levágása

K1 **1053.** Egy háromszög AB oldalára kifelé szerkesszünk $ABPQ$ négyzetet. Az oldallal szemközti csúcsból kicsinyítsük le a négyzetet úgy, hogy csúcsai a háromszög oldalegyeneseire essenek.

K2 **1054.** Egy háromszög egyik oldalára kifelé szerkesszünk az eredeti háromszöggel egybevágó háromszöget. Az oldallal szemközti csúcsból kicsinyítsük le az utóbbi háromszöget úgy, hogy csúcsai az eredeti háromszög oldalegyeneseire essenek.

K1 **1055.** Egy egyenlő szárú háromszög alapjára kifelé szerkesszünk szabályos háromszöget. Az alappal szemközti csúcsból kicsinyítsük le a szabályos háromszöget úgy, hogy csúcsai az eredeti háromszög oldalegyeneseire essenek.

K2 **1056.** Az ABC derékszögű háromszögbe szerkesszünk olyan egyenlő szárú háromszöget, aminek csúcsai egy-egy oldalra esnek, alapja párhuzamos az AB átfogóval és szára másfélszerese az alapnak.

E1 **1057.** Szerkesszünk az ABC háromszögbe szabályos háromszöget úgy, hogy csúcsai egy-egy oldalegyenesre essenek, és egyik oldala párhuzamos legyen AB-vel.

E1 **1058.** Adott az $ABCD$ téglalap. Egy egyenessel vágjunk le belőle olyan $PQDA$ téglalapot, amely az eredetihez hasonló.

E2 **1059.** Adott $ABCD$ paralelogrammához illesszünk hozzá egy $PQBA$ paralelogrammát úgy, hogy a kettő együtt az eredetihez hasonló legyen.

K2 **1060.** Adott hegyesszögű háromszög egyik csúcsán át szerkesszünk egyenest úgy, hogy az eredetihez hasonló háromszöget messen le a háromszögből.

K2 **1061.** Egy háromszög egyik oldalához illesszünk egy olyan háromszöget, mely az elsővel együtt az eredetihez hasonló háromszöget ad.

K2 **1062.** Szerkesszünk adott háromszögbe négyzetet úgy, hogy a négyzet csúcsai a háromszög oldalegyenesein legyenek.

K2 **1063.** Szerkesszünk adott háromszögbe téglalapot, melyben az oldalak aránya 2:3.

K2 **1064.** Adott egy kör és három irány. Szerkesszük meg azt a háromszöget, melynek oldalai az adott irányokkal párhuzamosak, csúcsai pedig a kör kerületére esnek.

K2 **1065.** Adott egy tetszőleges négyszög. Szerkesszünk olyan rombuszt, melynek csúcsai a négyszög oldalaira esnek, oldalai pedig az átlókkal párhuzamosak.

K2 **1066.** Adott egy négyzet és egy téglalap. Szerkesszünk téglalapot, melynek csúcsai a négyzet különböző oldalaira esnek, és amely hasonló a megrajzolt téglalaphoz.

E1 **1067.** Adott az ABC és az XYZ háromszög. Szerkesszünk az XYZ háromszöghöz párhuzamos helyzetű hasonló háromszöget úgy, hogy csúcsai az ABC háromszög oldalegyeneseire essenek.

K2 **1068.** Egy konvex körcikkbe szerkesszünk négyzetet, melynek két csúcsa a köríven, másik kettő a határoló sugarakon helyezkedik el.

K2 **1069.** Adott körszeletbe szerkesszünk négyzetet úgy, hogy két csúcsa a határoló köríven, kettő pedig a határoló húron legyen.

K2 **1070.** Egy konvex körcikkbe szerkesszünk kört, mely a határoló sugarakat és a körívet is érinti.

K2 **1071.** Adott egy konvex szög és szárai között egy P pont. Szerkesszünk kört, amely a szögszárakat érinti, és átmegy az adott P ponton.

E1 **1072.** *(Az 1071. feladatra épül.)* Adott egy e egyenes és rajta kívül egy pont. Szerkesszünk egy adott f egyenesen olyan pontot, amely egyenlő távol van a kitűzött ponttól és egyenestől.

Hasonló háromszögek

Bizonyítási feladatok

K1 **1073.** Cáfoljuk meg a következő állításokat.
a) Két egyenlő szárú háromszög hasonló, ha egyik szögük egyenlő.
b) Két egyenlő szárú háromszög hasonló, ha száraik aránya egyenlő.

K1 **1074.** Bizonyítsuk be, hogy létezik két olyan hasonló, de nem egybevágó háromszög, amelyeknek két oldala egyenlő.

K2 **1075.** Bizonyítsuk be, hogy két háromszög hasonló, ha
a) egyenlő egy szögük, és páronként egyenlő a szöghöz tartozó szögfelezőjük, valamint a szöget közrefogó egyik oldaluk aránya;
b) páronként egyenlő két-két oldaluk és a harmadikhoz tartozó súlyvonaluk aránya.

K2 **1076.** Bizonyítsuk be, hogy két háromszög hasonló, ha egyenlő egy szögük, és a szög csúcsából kiinduló magasságvonal mindkét háromszögben egyenlő szögeket zár be a szögszárakkal.

K2 **1077.** Egy háromszög oldalainak aránya $4:5:6$. Igazoljuk, hogy a legnagyobb szög a legkisebb kétszerese.

K1 **1078.** Mutassuk meg, hogy két négyszög hasonlóságához általában nem elegendő a szögeik egyenlősége.

K1 **1079.** Igazoljuk, hogy két téglalap hasonló, ha szomszédos oldalaik aránya egyenlő.

K1 **1080.** Bizonyítsuk be, hogy két négyzet mindig hasonló.

K1 **1081.** Bizonyítsuk be, hogy két téglalap hasonló, ha átlóik egyenlő szöget zárnak be.

K1 **1082.** Mutassuk meg, hogy két rombusz hasonló, ha egyik szögük egyenlő.

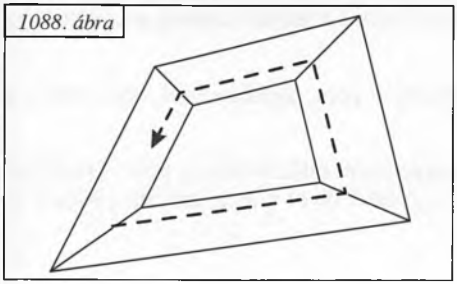
K1 **1083.** Mutassuk meg, hogy két paralelogramma hasonló, ha két szomszédos oldaluk aránya és a közbezárt szögük páronként egyenlő.

K1 **1084.** Mutassuk meg, hogy két paralelogramma hasonló, ha az átlóik aránya és az átlók szöge páronként egyenlő.

K2 **1085.** Mutassuk meg, hogy a háromszög egyik oldalával a háromszög belsejében párhuzamosan húzott szakaszokat az oldalhoz tartozó súlyvonal felezi.

K2 **1086.** Igaz-e, hogy két szimmetrikus trapéz hasonló, ha megegyeznek szögeikben?

E1 **1087.** Ha egy trapéz szárait az alapokkal párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor a metszéspontok az egyik alap végpontjától mérve ugyanolyan arányban osztják a szárakat.


1088. ábra

E2 **1088.** Az *1088. ábrán* látható két négyszög egy-egy oldala párhuzamos. Kössük összse a megfelelő csúcsokat. Az egyik ilyen összekötő vonal egy tetszés szerinti pontjából induljunk az oldallal párhuzamosan, míg a legközelebbi összekötő vonalig nem érünk. Innen a következő oldallal párhuzamosan és így tovább. Bizonyítsuk be, hogy ilyen módon a kiindulási ponthoz jutunk vissza.

Számolási feladatok

K1 **1089.** Egy háromszög oldalainak aránya 4:5:6, a hozzá hasonló háromszög legrövidebb oldala 0,8 cm. Határozzuk meg az utóbbi háromszög másik két oldalának hosszát.

K1 **1090.** Felnagyítottuk a háromszöget, melynek oldalai $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $c = 2{,}5$ cm. A nagyításban az a oldalnak megfelelő a' oldal 8,4 cm hosszú. Mekkora a másik két oldal a nagyításban?

K1 **1091.** Két hasonló háromszög közül az egyik oldalai 9 cm, 12 cm és 16 cm. A másik háromszög leghosszabb oldala 1 cm. Mekkora a másik két oldal?

K2 **1092.** Két egyenlő szárú háromszög szárszöge egyenlő. Az egyik háromszög alapja 10 cm, szára 17 cm, a másik háromszög alapja pedig 8 cm. Határozzuk meg a másik háromszög szárának hosszát.

K1,GY **1093.** Egy gyárkémény árnyéka 35,8 m. Ugyanakkor a merőlegesen, 10 cm mélyen földbe szúrt 2 m hosszú karónak az árnyéka 1,62 m. Határozzuk meg a gyárkémény magasságát.

K1,GY **1094.** Egy ház tervrajzán egy 5 m hosszú szoba 2 cm. Hány cm felel meg a szoba 3,8 m szélességének a tervrajzon?

K1 **1095.** Egy háromszög oldalainak aránya 3:4:5. Határozzuk meg annak a hozzá hasonló háromszögnek az oldalait, melynek leghosszabb oldala 3 cm-rel hosszabb a legrövidebbnél.

K1 **1096.** Egy háromszög oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint 2:4:5. A hozzá hasonló háromszög kerülete 55 m. Határozzuk meg a háromszög oldalainak hosszát.

K1 **1097.** Egy háromszög oldalai 0,8 m, 1,6 m és 2 m, a hozzá hasonló háromszög kerülete 5,5 m. Határozzuk meg az utóbbi háromszög oldalainak hosszát!

K1 **1098.** Az ABC háromszögben $c = 15$ m, $b = 20$ m. A c oldalra A-ból kiindulva 9 m-t, a b oldalra A-ból kiindulva 12 m-t mérünk rá. Az így kapott $AB'C'$ háromszög hasonló-e az eredeti ABC háromszöghöz?

K1 **1099.** Egy háromszög kerülete a hozzá hasonló háromszög kerületének $\frac{11}{13}$-a. Két megfelelő oldal különbsége 1 m. Határozzuk meg a két háromszög fent említett megfelelő oldalainak hosszát.

K1 **1100.** Az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögekről azt tudjuk, hogy $\beta = \beta_1$ és a β-t közrefogó oldalak 2,5-szer nagyobbak a β_1-et közrefogó oldalaknál. Határozzuk meg a b és b_1 oldalak hosszát, ha tudjuk, hogy összegük 4,2 cm.

K1 **1101.** Az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek szögei megegyeznek.
a) Határozzuk meg a b' és c oldalak hosszát, ha $a = 10$ cm, $b = 14$ cm, $a' = 25$ cm, $c' = 20$ cm;
b) Határozzuk meg a c' és c oldalak hosszát, ha $a = 35$ cm, $a' = 21$ cm, $c - c' = 8$ cm.

K2 **1102.** Hasonlók-e az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek, ha oldalaik hossza:
a) $a = 1$ m, $b = 1{,}5$ m, $c = 2$ m; $a' = 10$ cm, $b' = 15$ cm, $c' = 20$ cm;
b) $a = 1$ m, $b = 2$ m, $c = 15$ dm; $a' = 12$ dm, $b' = 8$ dm, $c' = 16$ dm;
c) $c = 1$ m, $b = 2$ m, $c = 1{,}25$ m; $a' = 10$ cm, $b' = 9$ cm, $c' = 16$ cm.

K1 **1103.** Egy négyszög oldalai $a = 1{,}2$ cm, $b = 1{,}8$ cm, $c = 2{,}4$ cm, $d = 3{,}3$ cm. Kicsinyített képén $d' = 2{,}2$ cm. Mekkora a kicsinyített kép többi oldala?

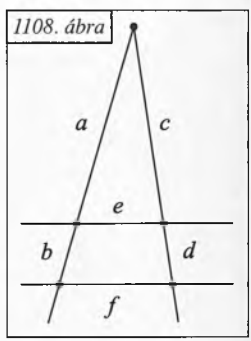
K1 **1104.** Egy négyszög oldalai 10 cm, 15 cm, 20 cm és 25 cm. A hozzá hasonló négyszögben a legnagyobb és legkisebb oldal összege 28 cm. Határozzuk meg ez utóbbi négyszög oldalainak hosszát.

K1 **1105.** Egy négyszög oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint $1:\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:2$. A hozzá hasonló négyszög kerülete 75 cm. Határozzuk meg az utóbbi négyszög oldalainak hosszát.

K1 **1106.** Egy ötszög oldalai 35 cm, 14 cm, 28 cm, 21 cm és 42 cm. A hozzá hasonló ötszög legkisebb oldala 12 cm. Határozzuk meg a többi oldal hosszát.

K1 **1107.** Két hasonló sokszög leghosszabb oldala 35 mm , illetve 14 mm, kerületük különbsége 60 mm. Határozzuk meg a két sokszög kerületének hosszát!

E1 **1108.** Egy szög szárait párhuzamosokkal metszettük el. A keletkezett szakaszokat az *1108. ábra* szerint *a*-, *b*-, *c*-, *d*-, *e*-, *f*-fel jelöltük. Számítsuk ki a mellékelt táblázat üresen hagyott adatait.



1108. ábra

a	7 cm	10 cm		10 cm
b	4 cm		5 cm	
c	9 cm	11 cm		11 cm
d		6 cm	4 cm	3 cm
e	6 cm	8 cm	7 cm	
f			10 cm	9 cm

K2,GY **1109.** Egy repülőtérről két repülőgép indul el ugyanabban az időpontban. Mindkettő állandó sebességgel, egyenes irányban halad, de útirányuk különböző. Fél óra alatt 180 km-re távolodnak el egymástól. Mekkora a távolságuk az indulástól számított *a)* $\frac{5}{4}$ óra, *b)* l óra múlva?

K2 **1110.** Egy P pontot kössünk össze egy rá nem illeszkedő egyenes minden pontjával.
a) Keressük az összekötő szakaszok P-hez közelebbi H harmadoló pontjaiból , illetve N negyedelő pontjaiból álló halmazt.
b) Határozzuk meg a 2:3, illetve $m:n$ arányban osztó pontok halmazát.

K2 **1111.** Adjuk meg az a oldalú m_a magasságú háromszögek súlypontjainak halmazát.



K2,GY 1112. Egy festőlétra két szárát szétnyitjuk úgy, hogy az alátámasztási pontok 1 méterre vannak egymástól, a létra legmagasabb pontja pedig a talajtól 2 méterre. A szárak szétcsúszását egy-egy azokhoz rögzített lánc akadályozza meg, ami a létra nyitott állapotában a talajtól 60 cm távolságban van. Milyen hosszú ez a lánc? *(1112. ábra)*

◀ *1112. ábra*

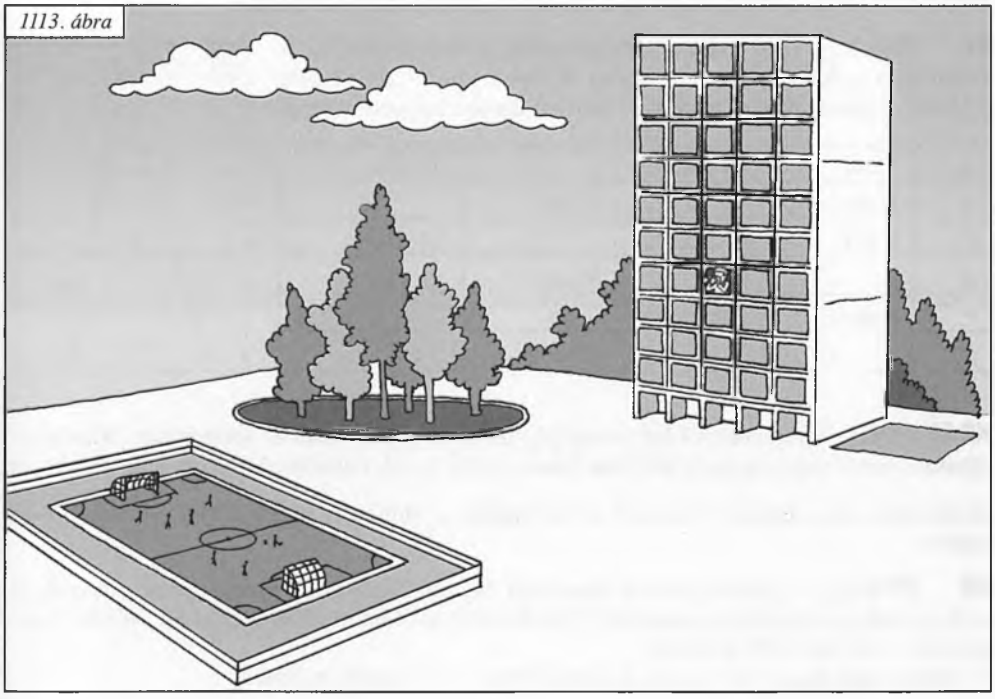
K2,GY 1113. Egy 50 m széles sportpályát 2 méter magas kerítés vesz körül. A kerítéstől 500 méterre áll egy tízemeletes ház, aminek minden szintje 3 méter magas. A ház hányadik emeletéről lehet belátni a pályára? *(1113. ábra)*

K2 **1114.** Adott az ABC háromszögben az AC-vel párhuzamos DE szakasz (D az AB-n, E a CB-n helyezkedik el).

a) Mekkora az AD szakasz, ha $AB = 16$ cm, $AC = 2$ dm és $DE = 15$ cm?

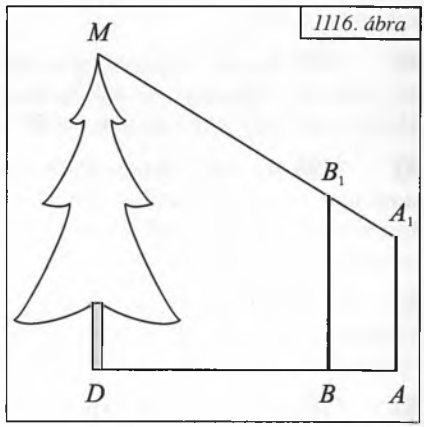
b) Határozzuk meg az $AD : BD$ arányt, ha $AC : DE = \frac{5}{7} : \frac{4}{11}$.

1113. ábra



E2 **1115.** Négy párhuzamos egyenes távolságainak aránya sorra 2:3:4. Az adott egyeneseket két – nem párhuzamos – egyenessel elmetszve, a keletkezett párhuzamos metszetek közül a szélsők hossza 60 cm és 96 cm. Határozzuk meg a középső metszetek hosszát.

E1,GY **1116.** Egy fa magasságát akarjuk megmérni. A fa törzsétől ugyanazon irányban két karót szúrunk a földbe úgy, hogy azok A_1 és B_1 végpontjai a fa M tetőpontjával egy egyenesbe essenek *(1116. ábra)*. Számítsuk ki a fa magasságát, ha $AD = 22$ m, $AB = 1{,}5$ m , a karók 2 m és 2,5 m magasak.



1116. ábra

K2 **1117.** Egy paralelogramma oldalai $a = 7$ cm, $b = 4$ cm hosszúak. A b oldallal párhuzamos szelő a paralelogrammából az eredetihez hasonló paralelogrammát metsz le. Határozzuk meg az új paralelogramma oldalainak hosszát.

K2 **1118.** Egy téglalapot az egyik középvonala az eredetivel hasonló téglalapokra vág szét. Határozzuk meg a téglalapok oldalainak arányát.

K2 **1119.** Adott háromszögbe paralelogrammát rajzoltunk úgy, hogy egyik szögük közös legyen. Határozzuk meg a paralelogramma oldalainak hosszát, ha a szöget közrefogó háromszögoldalak 20 cm és 25 cm hosszúak, és az ezen oldalakra illeszkedő paralelogrammaoldalak aránya 6:5.

K2 **1120.** Egy háromszög egyik oldala 48 cm, a hozzá tartozó magassága 16 cm. A háromszög 48 cm-es oldalára olyan téglalapot rajzoltunk, melyben az oldalak aránya 5:9. Számítsuk ki a téglalap oldalainak hosszát.

E2 **1121.** Egy háromszög egyik oldala a, a hozzá tartozó magassága h. A háromszög a oldalára olyan, a háromszögbe írt téglalapot rajzoltunk, melyben az oldalak aránya $m:n$. Határozzuk meg a téglalap oldalainak hosszát.

E1 **1122.** Egy háromszög egyik oldala a, a hozzá tartozó magassága h. A háromszög a oldalára a háromszögbe írt négyzetet rajzoltunk. Határozzuk meg a négyzet oldalának hosszát.

K2 **1123.** Az ABC derékszögű háromszög BC befogója 12 cm, AC befogója 6 cm hosszú. Az A csúcson keresztül a BC oldallal α szöget bezáró szelőt húztunk. Mekkora részekre bontja ez a szelő a BC oldalt?

K2 **1124.** Az ABC háromszög B csúcsán keresztül szerkesztett szelő a b oldalt D pontban, β szög alatt metszi. A D pont a b oldalt 7 cm és 9 cm hosszú szakaszokra osztja. Határozzuk meg a háromszög c oldalának hosszát, továbbá a BD és BC szakaszok arányát.

E1 **1125.** Egy ABC háromszög B csúcsán keresztül szerkesztett szelő a b oldalt D pontban metszi és a c oldallal γ szöget zár be.
a) Határozzuk meg az AD és DC szakaszok hosszát, ha $c = 2$ cm és $b = 4$ cm.
b) Oldjuk meg a feladatot általánosan is.

K2 **1126.** Két, egymást kívülről érintő kör E érintési pontján keresztül szelőt húzunk.
a) Határozzuk meg a sugarak hosszát, ha a középpontok távolsága $K_1K_2 = 36$ cm, és a kimetszett húrok aránya $P_1E : P_2E = 13:5$.
b) Oldjuk meg a feladatot általánosan is, ha a középpontok távolsága d, és a kimetszett húrok aránya $a:b$.

K2 **1127.** Az ABC háromszögbe félkört szerkesztünk úgy, hogy az átmérő párhuzamos a BC oldallal, végpontjai az AB, illetve AC oldalon vannak, és a félkör érinti a BC egyenest. Határozzuk meg a kör sugarát, ha $BC = a$ és a hozzá tartozó magasság h.

K2 **1128.** Az ABC háromszögbe PQR egyenlő szárú derékszögű háromszöget szerkesztünk úgy, hogy a PQ átfogó párhuzamos a BC oldallal, végpontjai az AB , illetve AC oldalon vannak, a derékszögű R csúcs pedig a BC egyenesen. Határozzuk meg a derékszögű háromszög oldalainak hosszát, ha $BC = 30$ cm és a hozzá tartozó magasság 10 cm.

K2 **1129.** Egy háromszögbe $ARPQ$ rombuszt szerkesztettünk oly módon, hogy annak két szomszédos oldala (AR és AQ) a háromszög AC és AB oldalára esik. Határozzuk meg a rombusz oldalának hosszát a háromszög adataival.

E1 **1130.** Adott ABC háromszögben szerkesszünk az AC oldallal párhuzamos MN szakaszt úgy, hogy $AM = BN$ legyen. Fejezzük ki az MN szakasz hosszát a háromszög a, b, c oldalaival.

K2 **1131.** Az ABC háromszög AC oldalával húzott párhuzamos az AB oldalt D, a BC-t E pontban metszi. Határozzuk meg DE hosszát, ha $AB = 24$ cm, $BC = 32$ cm, $AC = 28$ cm és $AD + CE = 16$ cm.

Szögfelezőtétel

K2 **1132.** Egy háromszög oldalainak hossza $a = 7$ cm, $b = 6$ cm, $c = 5{,}5$ cm. Határozzuk meg, hogy az f_γ szögfelező mekkora részekre osztja a c oldalt.

K2 **1133.** Az ABC háromszög oldalai a, b és c. Határozzuk meg, mekkora részekre osztja a c oldalt a C csúcshoz tartozó szögfelező.

E1 **1134.** *a)* Bizonyítsuk be, hogy a háromszög külső szögfelezőjének a szemközti oldal meghosszabbításával való metszéspontja és az oldal végpontjai által meghatározott szakaszok aránya a másik két oldal arányával egyenlő.
b) Számítsuk ki a szemközti oldalon létrejött szeletek hosszát.

E1 **1135.** Az ABC háromszög CC_1 súlyvonalának C_1 végpontjából szögfelezőket húzunk, melyek a másik két oldalt D, illetve E pontban metszik. Bizonyítsuk be, hogy a DE egyenes párhuzamos AB-vel.

E1 **1136.** Az ABC háromszög AB oldalának F felezőpontján át húzzunk párhuzamost a szemközti szög felezőjével. Ez az AC egyenest B'-ben, BC egyenest A'-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy $AB' = BA'$.

K2 **1137.** Az ABC háromszögben a C csúcshoz tartozó szögfelező szemközti oldallal alkotott metszéspontján át rajzoljunk a b oldallal párhuzamos egyenest. Határozzuk meg e párhuzamos háromszög belsejébe eső részének hosszát, ha ismert a háromszög a és b oldalának hossza.

E1 **1138.** Az ABC háromszög α szögének szögfelezője a szemközti oldalt E pontban metszi. Az E pontból a b oldalra bocsátott merőleges talppontja F. Határozzuk meg EF hosszát, ha $m_b = 30$ cm és $c : b = 7:8$.

E1 **1139.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög szögfelezőjét a szögfelezők metszéspontja a következő arányban osztja: a csúcs melletti rész úgy aránylik a másik részhez, mint a szögfelezőt közrefogó két oldal összege a harmadik oldalhoz.

A témához kapcsolódó további feladatok: 1379–1385.

Magasságtétel, befogótétel

K1 **1140.** Derékszögű háromszög egyik befogója *a)* háromszorosa; *b)* négyszerese; *c) n-szerese*; *d)* $\frac{p}{q}$-szorosa a másik befogónak. Hogyan aránylanak egymáshoz az átfogónak a rábocsátott magasságvonal által levágott szeletei?

K2 **1141.** Egy derékszögű háromszög befogóinak aránya 5:6, az átfogó 122 cm hosszú. Határozzuk meg az átfogón a magasságtalppont által levágott szeletek hosszát.

K2 **1142.** Egy derékszögű háromszög befogóinak aránya 3:2. Az átfogónak a hozzá tartozó magasságvonal által levágott szeletei közül az egyik 2 cm-rel hosszabb a másiknál. Határozzuk meg az átfogó hosszát.

K1 **1143.** Egy derékszögű háromszög befogói úgy aránylanak egymáshoz, mint 3:7, az átfogóhoz tartozó magasság hossza 42 cm. Határozzuk meg az átfogó szeleteinek hosszát.

K1 **1144.** Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság az átfogót egy 4 cm-es és egy 12 cm-es darabra osztja. Mekkorák a befogók és a magasság?

K1 **1145.** Egy derékszögű háromszögben az egyik befogó 5 cm, ennek vetülete az átfogón 2 cm. Mekkora a másik befogó, az átfogó és az átfogóhoz tartozó magasság?

K1 **1146.** Egy derékszögű háromszög egyik befogója 5 cm, az átfogóhoz tartozó magasság 3 cm. Mekkora az átfogó és a másik befogó?

K1 **1147.** Szerkesszük meg két adott távolság mértani közepét.

K1 **1148.** Szerkesszünk adott téglalappal egyenlő területű négyzetet.

K2 **1149.** Adott két távolság összege és mértani közepe. Szerkesszük meg a távolságokat.

V **1150.** Adott két távolság különbsége és mértani közepe. Szerkesszük meg a távolságokat.

K2 **1151.** Bizonyítsuk be, hogy derékszögű háromszögben a befogók négyzeteinek aránya megegyezik a befogók átfogóra eső vetületeinek arányával.

K2 **1152.** Legyen egy kör A pontjából induló húrja AB, átmérője AC. Igazoljuk hogy AB mértani közepe AC-nek, és az AB húr AC átmérőre vetett merőleges vetületének.

E1 **1153.** Az AB átmérőjű félkörbe az OA sugár, mint átmérő fölé újabb félkört írunk. Az OA sugár tetszőleges P pontjában merőlegest állítunk az átmérőre. Ez az egyenes a kisebb félkört K-ban, a nagyobbat L-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy $AL^2 = 2AK^2$.

Aranymetszés

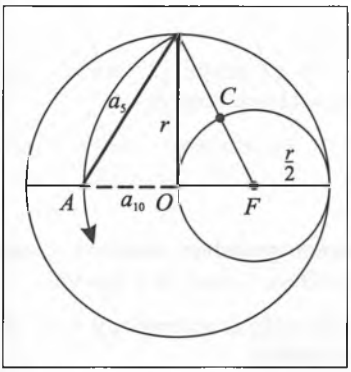
K2 **1154.** Az x szakaszt az a szakasz aranymetszetének nevezzük, ha $a:x=x:(a-x)$, vagy $a^2=(x+a)x$. Szerkesszük meg egy adott a szakasz aranymetszetét.

K2 **1155.** Mekkorák annak az egyenlő szárú háromszögnek a szögei, amelyből az alap egyik szögének felezője az eredetihez hasonló háromszöget metsz le?

K2 **1156.** Bizonyítsuk be, hogy ha az egyenlő szárú háromszög szárszöge 36°, akkor az alap a szárnak aranymetszete.

K2 **1157.** *(Az 1156. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tízszög köré írt kör sugarának aranymetszete a tízszög oldala.

E1 **1158.** *(Az 1156. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy a szabályos ötszög oldala az átlójának aranymetszete.



◀ *1160. ábra*

V **1159.** *(Az 1156. feladatra épül.)* Az r sugarú körbe írt szabályos ötszög oldala a_5, a szabályos tízszögé a_{10}. Mutassuk meg, hogy $a_{10}^2+r^2=a_5^2$.

V **1160.** Az *1160. ábrán* eljárást adtunk meg az r sugarú körbe írt szabályos ötszög, illetve tízszög oldalának szerkesztésére. Igazoljuk a szerkesztés helyességét.

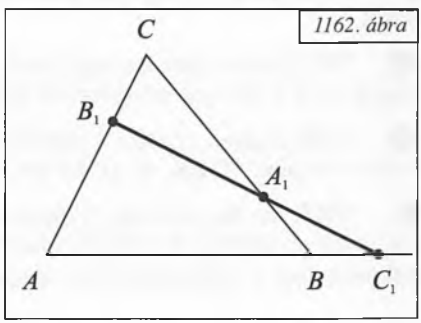
V **1161.** A 36°-os szárszögű egyenlő szárú háromszög AB alapegyenese a B középpontú, $r=BC=AC$ sugarú kört D és E pontban metszi (a pontok sorrendje: E, A, B, D). Az A csúcsból induló belső szögfelező F pontban metszi a BC szárat.

a) Igazoljuk, hogy AC oldal a BCD, és BA oldal az AFC háromszög körülírt körének érintője.

b) Igazoljuk, hogy a körbe írható szabályos tízszög, szabályos hatszög és szabályos ötszög oldala derékszögű háromszöget alkot.

Menelaosz tétele, Ceva tétele

V **1162.** Jelölje az ABC háromszög oldalegyeneseinek egy adott egyenessel alkotott metszéspontjait A_1, B_1, C_1. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1$ *(1162. ábra)*. A távolságokon előjeles távolságokat értünk. (Ez az állítás Menelaosz tétele. Gyakran a tétel megfordítását vagy a tétel és a megfordítás együttesét is Menelaosz tételének nevezik.)



1162. ábra

V 1163. *(Az 1162. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be Menelaosz tételének megfordítását: Ha az ABC háromszög oldalegyenesein fekvő A_1, B_1, C_1 pontokra érvényes az $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = -1$ összefüggés, akkor az A_1, B_1, C_1 pontok egy egyenesen fekszenek.

V 1164. *(Az 1163. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be Menelaosz tételének segítségével, hogy a háromszög szögfelezőjét a beírt kör középpontja a következő arányban osztja: a csúcs melletti rész úgy aránylik a másik részhez, mint a szögfelezőt közrefogó két oldal összege a harmadik oldalhoz.

V 1165. Legyenek A_1, B_1, C_1 az ABC háromszög BC, CA, AB egyenesein fekvő pontok. Bizonyítsuk be, hogy ha az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek egy pontban metszik egymást, akkor $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. A távolságokon előjeles távolságokat értünk. (Ez az állítás Ceva tétele. Gyakran a tétel megfordítását vagy a tétel és a megfordítás együttesét is Ceva tételének nevezik.)

V 1166. *(Az 1165. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be Ceva tételének megfordítását : Ha A_1, B_1, C_1 az ABC háromszög BC, CA, AB oldalegyenesein fekvő pontok, és $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, akkor az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek vagy egy pontban találkoznak vagy párhuzamosak.

V 1167. *(Az 1166. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be Ceva tételének megfordítása segítségével, hogy bármely háromszögben *a)* a súlyvonalak; *b)* a belső szögfelezők; *c)* a magasságvonalak egy pontban metszik egymást.

V 1168. *(Az 1166. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszögbe írt kör érintési pontjait a szemközti csúcsokkal összekötjük, akkor ezek az egyenesek egy pontban metszik egymást.

V 1169. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög egyik hozzáírt körének három érintési pontját a szemközti csúcsokkal összekötjük, akkor ez a három egyenes egy pontban metszi egymást.

V 1170. *(Az 1165. és az 1166. feladatra épül.)* Legyen A_1, B_1 és C_1 az ABC háromszög egy-egy oldalának olyan pontja, amelyre az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek egy pontban metszik egymást. Az A_1, B_1, C_1 pontokon áthaladó kör másodszor az A_2, B_2, C_2 pontokban metszi a háromszög oldalait. Mutassuk meg, hogy az AA_2, BB_2 és CC_2 egyenesek is egy pontban találkoznak.

Hasonló négyszögek

K2 **1171.** *a)* Az $ABCD$ paralelogramma két szomszédos oldala $AB = 20$ cm és $BC = 5$ cm. Az AB-t hosszabbítsuk meg B-n túl 5 cm-rel, így az E pontot kapjuk. A DE egyenes a BC oldalt P-ben metszi. Mekkora a CP szakasz?
b) Fejezzük ki a CP távolság hosszát, ha a paralelogramma oldalai a, illetve b cm hosszúak.

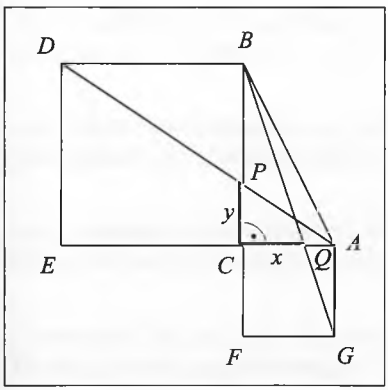
K2 **1172.** Egy $ABCD$ paralelogramma AB oldala 4,2 cm. A P pont a BC oldal 5:7 arányú osztópontja. Az AB oldalt mennyivel kell meghosszabbítani, hogy a meghosszabbítás E végpontjából húzott PE szelő átmenjen a paralelogramma D csúcsán?

K2 **1173.** Az $ABCD$ paralelogramma AC átlójának E pontjából húzzunk párhuzamost a BC oldallal. Határozzuk meg, hogy ez a párhuzamos mekkora részekre osztja az $AB = a$ oldalt, ha az E pont az AC átlót $m : n$ arányú részekre osztja.

K2 **1174.** Legyen az E pont az $ABCD$ paralelogramma AC átlójának $m : n$ arányú osztópontja. Határozzuk meg, hogy a DE szelő mekkora szakaszt metsz le az AB oldal meghosszabbításából, ha $AB = a$.

E1 **1175.** Legyen C_1 az ABC háromszög AB oldalának tetszőleges belső pontja. Húzzunk párhuzamost A-n és B-n át a CC_1 egyenessel. A párhuzamosok a BC egyenest A_1 pontban, az AC egyenest B_1 pontban metszik. Határozzuk meg a CC_1 szakasz hosszát, ha $AA_1 = p$ és $BB_1 = q$.

E1 **1176.** Egy 120°-os szög száraiból egy egyenes p, illetve q hosszúságú szakaszokat metsz ki. Milyen hosszú a szögfelezőből lemetszett szakasz?



◄ *1177. ábra*

E1 **1177.** Egy derékszögű háromszög befogói fölé kifelé négyzeteket rajzolunk. Kössük össze az átfogó két végpontját a szemközti négyzet távolabbi csúcsával. Igazoljuk, hogy az *1177. ábrán* x-szel és y-nal jelölt szakaszok egyenlők.

K1 **1178.** Egy egyenlő szárú trapéz hosszabbik alapja 6 cm, szára 2 cm hosszú. Határozzuk meg a másik alap hosszát, ha tudjuk, hogy a trapéz kiegészítő háromszögének szára 5 cm hosszú.

K1 **1179.** Egy trapéz párhuzamos oldalainak aránya 5:9. Az egyik szár 16 cm hosszú. Mennyire kell ezt a szárat meghosszabbítani, hogy a másik szár meghosszabbítását metssze?

K1 **1180.** Egy trapéz alapjainak hossza 2 cm és 3 cm. A szárak meghosszabbításával keletkezett kiegészítő háromszög oldalai 5 és 4 cm hosszúak. Határozzuk meg a trapéz szárainak hosszát.

E1 **1181.** Egy trapéz alapjai $a = 10$ cm és $c = 3$ cm, szárai $b = 6$ cm és $d = 4$ cm hosszúak.
a) Számítsuk ki a kiegészítő háromszög ismeretlen oldalait.
b) Végezzük el a számítást általánosan is.

K1 **1182.** Egy trapéz alapjai 12 cm és 27 cm hosszúak. Az egyik szár a hosszabbik alappal ugyanakkora szöget alkot, mint amekkorát a másik szár a hosszabbik alappal való metszéspontjából induló átlóval bezár. Határozzuk meg az utóbbi átló hosszát.

K1 **1183.** Egy trapéz hosszabbik alapja 5 cm. Az egyik átló a másikat 3 : 1 arányú részekre osztja. Határozzuk meg a másik alap hosszát.

K1 **1184.** A trapéz 27 cm-es átlója a másik átlót 8 cm-es és 1 cm-es részekre osztja. Határozzuk meg, hogy az utóbbi átló mekkora részekre osztja a 27 cm-es átlót.

K1 **1185.** Bizonyítsuk be, hogy egy trapéz átlói a párhuzamos oldalak arányában osztják egymást.

K2 **1186.** Egy trapéz egyik átlója a másikat $0{,}3:\frac{2}{3}$ arányú részekre osztja. A trapéz középvonala 29 cm hosszú. Határozzuk meg az alapok hosszát és a másik átló szeleteinek arányát.

E1 **1187.** Egy trapéz szárait az egyik alap végpontjaiból kiindulva osszuk fel azonos arányban, majd az osztópontokat kössük össze. Bizonyítsuk be, hogy az összekötő szakasz párhuzamos az alapokkal.

E1 **1188.** *(Az 1187. feladatra épül.)* Egy trapéz párhuzamos oldalai 9 cm és 12 cm hosszúak. Egy ezekkel párhuzamos szakasz a szárakat a hosszabb alaptól számítva 1 : 2 arányban osztja. Milyen hosszú részekre osztja a trapéz egyik átlója ezt a szakaszt?

E2 **1189.** *(Az 1187. feladatra épül.)* Egy adott trapéz szárait a hosszabb alap végpontjából kiindulva osszuk fel 2 : 3 arányú részekre. A szárakon kapott osztópontokat kössük össze. Bizonyítsuk be, hogy az osztópontokat összekötő szakasz hossza $\frac{3a+2b}{5}$, ha a a hosszabb, b a rövidebb alap.

K2 **1190.** *(Az 1187. feladatra épül.)* Egy trapéz alapjainak hossza a és b. A szárakat négy egyenlő részre osztjuk. Milyen hosszúak a szemközti osztópontokat összekötő szakaszok?

K2 **1191.** *(Az 1187. feladatra épül.)* Egy trapéz alapjai 16 cm és 12 cm hosszúak. Hosszabbítsuk meg a szárakat mindkét irányban hosszuk felével. Milyen hosszúak az így kapott nagyobb trapéz párhuzamos oldalai?

E1 **1192.** *(Az 1187. feladatra épül.)* A trapéz párhuzamos oldalai 12 cm és 8 cm, szárai 4 cm és 3 cm hosszúak. Számítsuk ki azoknak a szakaszoknak a hosszát, amelyek az alapokkal párhuzamosak, és a trapéz szárait hat egyenlő részre osztják.

E1 **1193.** *(Az 1187. feladatra épül.)* Egy trapéz párhuzamos oldalainak hossza a és b. Egy ezekkel párhuzamos szakasz a szárakat $m:n$ arányban osztja (m az a oldalhoz közelebb eső osztásrészt jelöli).
a) Milyen hosszú részekre osztja a trapéz egyik átlója ezt a szakaszt?
b) Milyen hosszú az összekötő szakasz?

E1 **1194.** Egy trapéz párhuzamos oldalainak hossza 5 cm és 8 cm. A trapéz átlóinak metszéspontján át húzzunk párhuzamost az alapokkal. Határozzuk meg, hogy ezt a szakaszt az átlók metszéspontja mekkora részekre osztja.

E1 **1195.** Hosszabbítsuk meg egy trapéz szárait. Metszéspontjukon át húzzunk párhuzamos egyenest az alapokkal. Mutassuk ki, hogy ennek az egyenesnek egyenlő az a két szelete, amely az oldalegyenesek metszéspontja és az átlóegyenesek közé esik.

E1 **1196.** Igazoljuk, hogy a trapéz átlóinak metszéspontján át a párhuzamos oldalakkal szerkesztett párhuzamos szakaszt az átlók metszéspontja felezi.

E1 **1197.** *(Az 1196. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy a trapéz szárainak metszéspontját az átlók metszéspontjával összekötő egyenes felezi a trapéz párhuzamos oldalait.

E2 **1198.** Egy trapéz párhuzamos oldalai a és b.
a) A szárak hosszabbik alaphoz közelebbi harmadolópontjait összekötő szakaszból mekkora szeletet fog közre a két átló?
b) Oldjuk meg a feladatot általánosan is, ha a két szárat $m:n$ arányban osztjuk.

E2 **1199.** Igazoljuk, hogy ha egy trapéz alapjaival párhuzamos egyenes metszi a trapéz szárait, akkor ennek az egyenesnek egyenlő az a két darabja, mely az átló és a szár között van.

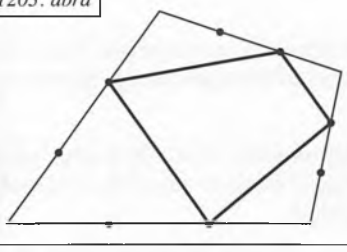
V **1200.** Bizonyítsuk be, hogy egy húrnégyszög átlóinak szorzata a szemközti oldalak szorzatának összegével egyenlő (Ptolemaiosz tétele).

Háromszögek hasonlóságával megoldható feladatok

K2 **1201.** Válasszuk ki egy négyszög két szemközti csúcsát. Mutassuk meg, hogy ezen csúcsokból induló oldalak csúcshoz közelebbi harmadolópontjai paralelogrammát határoznak meg.

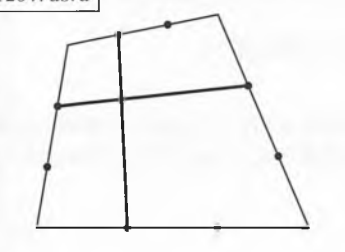
K2 **1202.** Osszuk egy négyszög oldalait három-három egyenlő részre, és a szomszédos oldalak közös csúcsához közelebbi osztópontokat kössük össze egy-egy egyenessel.
Igazoljuk, hogy ez a négy egyenes paralelogrammát határoz meg.

1203. ábra



K2 **1203.** Egy négyszög oldalait három-három egyenlő részre osztottuk, és az osztópontok közül négyet az *1203. ábrán* látható módon kötöttünk össze. Igazoljuk, hogy az összekötő vonalak trapézt alkotnak. Állapítsuk meg a párhuzamos oldalak arányát.

1204. ábra



K2 **1204.** Egy négyszög oldalait három-három egyenlő részre osztjuk. Milyen arányban osztják egymást az *1204. ábrán* látható összekötő vonalak?

K2 **1205.** Két háromszögnek közös az egyik oldala. Osszuk a másik két oldalpárt három-három egyenlő részre. Igazoljuk, hogy a közös oldaltól távolabbi osztópontok vagy paralelogrammát alkotnak, vagy egy egyenesre esnek.

K2 **1206.** Egy konvex négyszög átlóinak M metszéspontján át párhuzamos egyenest rajzolunk két szomszédos oldallal. Legyen ezeknek a másik két oldallal való metszéspontja P és Q. Igazoljuk, hogy PQ párhuzamos az egyik átlóval.

K1 **1207.** Egy trapéz egyik alapja a másiknak háromszorosa. Milyen arányban osztják egymást az átlók?

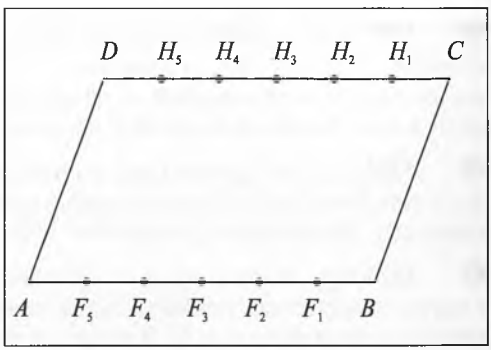
K2 **1208.** Igazoljuk háromszögek hasonlóságának felhasználásával, hogy a háromszög bármely két súlyvonala a csúcstól számítva 2 : 1 arányban osztja egymást.

K2 **1209.** Egy derékszögű háromszög egyik befogója kétszerese a másiknak. Bizonyítsuk be, hogy az átfogóra bocsátott magasság talppontja 1 : 4 arányban osztja az átfogót.

K1 **1210.** Az ABC háromszög AB oldala 3 cm, AC oldala 2 cm hosszú. Írjunk a háromszögbe $ADEF$ paralelogrammát úgy, hogy $D \in AB$, $E \in BC$, $F \in AC$ és $AD = 1$ cm legyen. Mekkora a DE oldal?

K2 **1211.** Az ABC háromszög AC és BC oldalát három-három egyenlő részre osztjuk. Az AC oldal C-től távolabbi A_1 osztópontjából és a BC oldal C-hez közelebbi B_2 osztópontjából merőlegest bocsátunk az AB egyenesre. Ezek talppontja T_1 és T_2. Mutassuk meg, hogy $B_2T_2 = 2A_1T_1$.

K2 **1212.** Egy paralelogramma két szemközti oldalát hat-hat egyenlő részre osztottuk az *1212. ábra* szerint. Milyen arányban osztja az AC átló *a)* a H_1F_4 szakaszt; *b)* a H_3F_5 szakaszt?



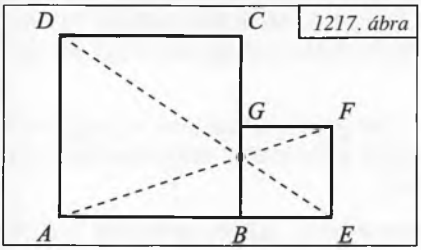
1212. ábra ▶

K1 **1213.** Egy téglalap egyik csúcsát összekötjük az egyik szemközti oldal felezőpontjával, és meghúzzuk a csúccsal szemközti átlót. Milyen arányban osztja egymást ez a két szakasz?

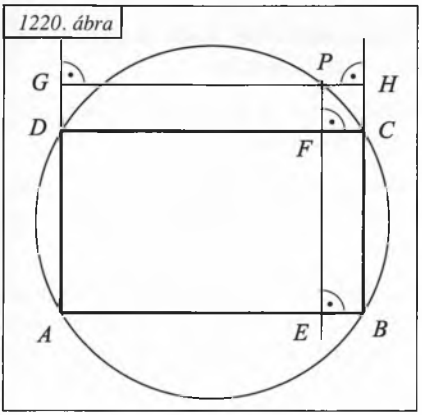
E1 **1214.** Az $ABCD$ téglalap BC oldalának felezőpontját kössük össze a D csúccsal, CD oldalának felezőpontját az A csúccsal. Milyen arányban osztja egymást a két összekötő szakasz?

K2 **1215.** Egy a alapú egyenlő szárú háromszög két szárát három-három egyenlő részre osztjuk. Mekkora darabot vág le az alap meghosszabbításából az egyik szár alaptól távolabbi és a másik szár alaphoz közelebbi osztópontjának egyenese?

K2 **1216.** Egy $ABCD$ paralelogramma AD oldalát osszuk n egyenlő részre, az A-hoz legközelebbi osztópont P. Mutassuk meg, hogy a BP egyenes az AC átlóból annak $(n + 1)$-ed részét metszi le.



1217. ábra



1220. ábra

E1 **1217.** Rajzoljunk az *1217. ábra* szerint egymás mellé két négyzetet, és kössük össze egymással a négyzetek távolabbi csúcspontjait. Igazoljuk, hogy ez a két összekötő vonal a közös oldalon metszi egymást.

E1 **1218.** Legyen P az $ABCD$ húrnégyszög körülírt körének tetszőleges pontja. Bizonyítsuk be, hogy $d(P;AB) \cdot d(P;CD) = d(P;BC) \cdot d(P;DA)$.

K2 **1219.** Bizonyítsuk be, hogy bármely hegyesszögű háromszögben a magasságpont a magasságokat két olyan szakaszra bontja, amelyek hosszának szorzata független a választott magasságtól.

E1 **1220.** Az $ABCD$ téglalap köré kört írunk, és ennek P pontjából merőlegest bocsátunk az oldalegyenesekre az *1220. ábra* szerint. Bizonyítsuk be, hogy az $AEPG$ és az $FCHP$ téglalapok hasonlók.

K1 **1221.** Egy egyenlő szárú háromszög alapja 6 cm, szárai 8 cm hosszúak. Mekkora részekre bontja a szárakat a hozzájuk tartozó magasság?

K2 **1222.** Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóit három-három egyenlő részre osztjuk (A_1, A_2, B_1, B_2), és a derékszög csúcsával szomszédos osztópontokat összekötjük. Az összekötött osztópontokból merőlegeseket bocsátunk az átfogóra. Bizonyítsuk be, hogy az ily módon keletkező derékszögű négyszög négyzet.

K2 **1223.** Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszögben a C csúcsnál van a derékszög. Az A csúcsból induló súlyvonalát meghosszabbítjuk a háromszög köré írt körrel való D metszéspontig. Bizonyítsuk be, hogy $AD = 3BD$.

K2 **1224.** Egy rombusz egyik csúcsán keresztül húzzunk egy, a rombuszon kívül haladó e egyenest. A csúccsal szemközti oldalak meghosszabbításából az e egyenes p, illetve q hosszúságú szakaszokat metsz ki. Bizonyítsuk be, hogy a rombusz oldala mértani közepe a p és q szakaszoknak.

K2 **1225.** Adott egy r sugarú kör és benne h hosszúságú húr. A húr egyik végpontjában húzzunk érintőt. A húr másik végpontjának az érintőtől való távolságát jelöljük m-mel. Bizonyítsuk be, hogy a h húr mértani közepe az átmérőnek és az utóbbi m szakasznak.

K2 **1226.** Egy r sugarú körből egy egyenes m magasságú körszeletet vág ki. Számítsuk ki a körszeletet határoló húr hosszát.

E1 **1227.** Egy kör egyik átmérőjének két végpontjában érintőket szerkesztünk a körhöz. Ezenkívül egy tetszés szerinti harmadik érintőt is megrajzolunk. Igazoljuk, hogy a kör sugara mértani közepe az első két érintőből az utóbbi érintő által lemetszett szakaszoknak.

K2 **1228.** Az ABC háromszög B csúcsán keresztülhaladó szelő a b oldalt D pontban, a háromszög β szögével egyenlő szög alatt metszi. Bizonyítsuk be, hogy AB mértani közepe az AD és AC szakaszoknak.

E1 **1229.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy húrtrapéz érintőtrapéz is, akkor a beírt kör érintési pontokba húzott sugarai hasonló négyszögekre bontják a trapézt.

K2 **1230.** Egy derékszögű háromszögbe négyzetet írunk, amelynek két csúcsa az átfogón van. Bizonyítsuk be, hogy az átfogón létrejött három szelet közül a négyzetoldal mértani közepe a másik két szeletnek.

E1 **1231.** Az ABC egyenlő szárú háromszög AB szárának felező merőlegese a BC alapegyenest P pontban metszi. Igazoljuk, hogy az AB oldal mértani közepe a BC és BP szakaszoknak.

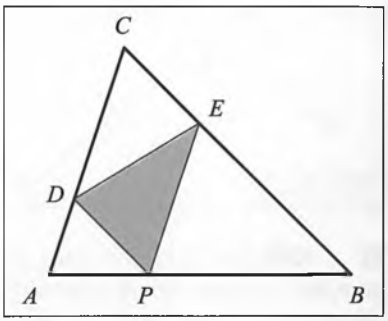
K2 **1232.** Egy kör egyik átmérőjének két végpontjában érintőket szerkesztünk a körhöz. Igazoljuk, hogy ha a körvonal bármely pontját összekötjük az átmérő végpontjaival, ezek az összekötő egyenesek olyan szeleteket vágnak le a két érintőből, amelyeknek mértani közepe az átmérő.

V **1233.** Igazoljuk, hogy a kör egy pontjának egy húr egyenesétől mért távolsága mértani közepe a húrvégpontokhoz tartozó érintőktől mért távolságoknak.

K2 **1234.** Az ABC háromszögben $\alpha - \beta = 90°$. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög AB oldalához tartozó magassága mértani közepe a magasságtalppont A-tól és B-től vett távolságainak.

E2 **1235.** Az ABC háromszögben meghúzzuk az AB oldallal párhuzamos DE szakaszt. Igazoljuk, hogy a BDC háromszög területe az ABC és DEC háromszögek területének mértani közepe.

E2 **1236.** Az *1236. ábra* szerinti ABC háromszögben PE párhuzamos AC-vel és PD párhuzamos BC-vel. Igazoljuk, hogy a PDE háromszög területe mértani közepe az APD és PEB háromszögek területének.



1236. ábra ▶

Szelődarabok szorzata

Tudnivaló az alábbi feladatok elé: Szelődarabon a szelőnek egy P ponttól a körrel való metszéspontig terjedő szakaszát értjük.

K2 **1237.** Húzzunk egy körhöz egy külső P pontból szelőt és érintőt. Bizonyítsuk be, hogy az érintőszakasz a szelődarabok mértani közepe. Ez a szám a P külső pont körre vonatkozó hatványa.

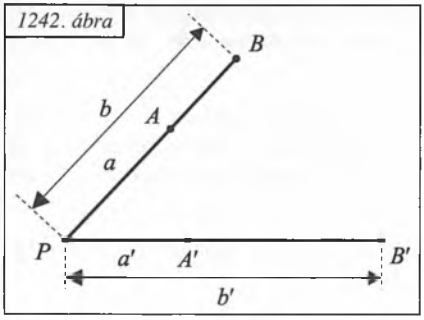
K2 **1238.** Bizonyítsuk be, hogy külső P pontból a körhöz húzott szelők szelődarabjainak szorzata állandó.

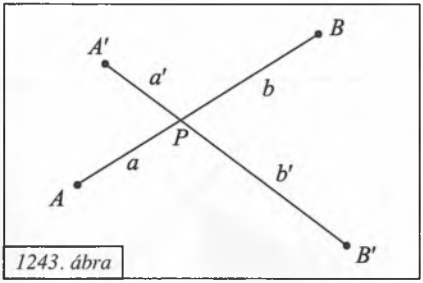
K2 **1239.** Rajzoljunk egy kör belső P pontján át egy szelőt és egy átmérőt. Bizonyítsuk be, hogy az átmérőre P-ben állított merőleges húr fele mértani közepe a szelő szelődarabjainak. Ez a szám a P belső pont körre vonatkozó hatványa.

K2 **1240.** Bizonyítsuk be, hogy egy kör belső P pontján át húzott egyenesek szelődarabjainak szorzata állandó.

E1 **1241.** A h húr F felezőpontján átmenő átmérő két szakasza AF és BF. Igazoljuk, hogy a húrra rajzolt négyzet területe négyszer akkora, mint azé a téglalapé, melynek oldalai AF-fel és BF-fel egyenlők.

1242. ábra





1243. ábra

E2 **1242.** Egy adott szög száraira a csúcstól számítva úgy mérjünk rá szakaszokat, hogy $a \cdot b = a' \cdot b'$ legyen *(1242. ábra)*. Bizonyítsuk be, hogy a szakaszok A, B, illetve A', B' végpontjai egy körön helyezkednek el.

E2 **1243.** Egy szög mindkét szárát hosszabbítsuk meg a szög P csúcsán túl, és egy-egy szögszárra, illetve meghosszabbítására az *1243. ábrán* látható módon mérjünk rá a, b és a', b' szakaszokat úgy, hogy $a \cdot b = a' \cdot b'$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a szakaszok A, B, illetve A', B' végpontjai egy körön helyezkednek el.

K2 **1244.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy k kör két másik kört az A, B, illetve A', B' pontokban metsz úgy, hogy AB nem párhuzamos $A'B'$-vel, akkor az AB és $A'B'$ húregyenesek közös H pontjára fennáll a $HA \cdot HB = HA' \cdot HB'$ egyenlőség.

E1 **1245.** *(Az 1242. feladatra épül.)* Két egymást érintő kör közös belső érintőjének egy pontjából húzzunk mindkét körhöz egy-egy szelőt. Bizonyítsuk be, hogy a szelők és a körök alkotta négy metszéspont egy körön van.

E1 **1246.** *(Az 1242. feladatra épül.)* A k és k' érintkező körök. A k-n válasszunk ki egy A és egy B pontot. Szerkesszünk az A és B pontokon át egy a k'-t metsző k'' kört. Bizonyítsuk be, hogy a k' és k'' közös húregyenese k'' tetszőleges választása esetén ugyanabban a pontban metszi k és k' közös belső érintőjét.

E2 **1247.** Adott egy egyenes és rajta kívül (az egyenes egyik oldalán) két pont. Szerkesszünk a két ponton átmenő kört úgy, hogy az az egyenest érintse.

E2 **1248.** *(Az 1246. feladatra épül.)* Adott egy kör és rajta kívül két pont. Szerkesszünk a két ponton át kört úgy, hogy az az adott kört érintse.

E2 **1249.** Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben a magasságpontot az egyik csúccsal összekötő szakasz és a magasságpontot ugyanabból a csúcsból induló magasság talppontjával összekötő szakasz hosszának szorzata független a választott csúcstól.

V **1250.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög szögfelezőjének négyzete egyenlő a közrefogó oldalak szorzatának és azon két szakasz szorzatának a különbségével, amelyekre a szögfelező a szemközti oldalt osztja.

V **1251.** *(Az 1250. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben a szögfelező rövidebb, mint a mellette fekvő oldalak mértani közepe.

Hasonlóságon alapuló szerkesztések

K1 **1252.** *a)* Szerkesszünk háromszöget, ha adott két szöge és a beírt kör sugara.
b) Szerkesszünk háromszöget, ha adott az egyik oldalt kívülről érintő kör sugara és az oldalon fekvő két szög.

K1 **1253.** Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük egy oldalát, a szemközti szöget és a másik két oldal arányát.

K1 **1254.** Szerkesszünk egyenlő szárú derékszögű háromszöget, ha ismert az egyik szárhoz tartozó súlyvonal hossza.

K1 **1255.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott az oldalak aránya és a beírt kör sugara.

K2 **1256.** Adott egy szög és szárai között egy pont. Szerkesszük meg azt a háromszöget, melynek az adott szög egyik szöge, az ezzel szemközti oldala átmegy az adott ponton, és ismert a szöget közrefogó két oldal aránya.

K2 **1257.** Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük egy szögét, a szög csúcsából húzott magasságot és annak a két résznek az arányát, melyekre a magasság osztja a szemközti oldalt.

K2 **1258.** Szerkesszünk háromszöget úgy, hogy két oldal összege adott távolsággal legyen nagyobb a harmadiknál, és a két oldal adott nagyságú szögeket zárjon be a harmadikkal.

E2 **1259.** Egy egyenlő szárú háromszög egyik szára adott e egyenessel párhuzamos, és végpontjai az O csúcsú δ szög szárain fekszenek, harmadik csúcsa pedig adott B pontba esik. Szerkesszük meg a háromszöget!

E2 **1260.** Szerkesszünk háromszöget, ha az egyik csúcsa adott pontba esik, adott az e csúcsnál fekvő szöge, a csúccsal szemközti oldal adott egyenessel párhuzamos, végpontjai pedig adott szög szárain fekszenek.

K2 **1261.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alap és a szár különbsége, továbbá a szárszög.

K2 **1262.** Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha ismerjük az átfogóját, és tudjuk, hogy az egyik befogó és a derékszög szögfelezője egyenlő hosszú.

K2 **1263.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, az oldallal szemközti szög, továbbá tudjuk, hogy az adott szög szögfelezője egyenlő hosszú a szöget közrefogó egyik oldallal.

K2 **1264.** Hosszabbítsuk meg egy egyenlő szárú háromszög szárait egyenlő darabokkal úgy, hogy a meghosszabbítások az új végpontjukat összekötő szakasszal egyenlő hosszúak legyenek.

K2 **1265.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha a szárakhoz tartozó súlyvonal hossza s_a és φ az a szög, ami alatt a szár felezőpontjából az alap látszik.

E1 **1266.** Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük az egyik szögét, az ennek csúcsából kiinduló magasságot és súlyvonalat.

E1 **1267.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha ismerjük a szárakhoz tartozó magasság és súlyvonal hosszát.

K2 **1268.** Az a, b, c és az egységszakasz birtokában szerkesszük meg a következő szakaszokat *a)* ab; *b)* $\frac{1}{a}$; *c)* $\frac{b}{a}$; *d)* a^2; *e)* $\frac{ab}{c}$; *f)* $\frac{a^2}{b}$; *g)* $\sqrt{a}$; *h)* $\sqrt{ab}$.

K2 **1269.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságainak aránya a hozzá tartozó oldalak reciprokainak arányával egyenlő.

E2 **1270.** *(Az 1269. feladatra épül.)* Adott egy háromszög három magassága. Szerkesszük meg a háromszöget.

E2 **1271.** *(Az 1269. és az 1270. feladatra épül.)* Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük magasságainak arányát és a beírt kör sugarát.

E2 **1272.** *(Az 1269. feladatra épül.)* Szerkesszük meg a háromszöget, ha ismert a köré írt kör sugara, két oldal összege és az ezekre az oldalakra bocsátott magasságok aránya.

E2 **1273.** Írjunk adott körbe egyenlő szárú háromszöget, ha ismerjük az alap és a hozzá tartozó magasság összegét.

V **1274.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott a hozzáírt érintőkörök sugara, r_a, r_b és r_c.

K2 **1275.** Szerkesszünk trapézt, ha ismerjük a párhuzamos oldalakat és azt a két szöget, amit az egyik szár zár be az átlókkal.

K2 **1276.** Adott egy szög és a szögtartományán kívül egy P pont. Szerkesszünk a P ponton át a szög szárait metsző egyenest úgy, hogy a ponttól a közelebb eső szögszárig terjedő szakasz *a)* ugyanakkora; *b)* feleakkora legyen, mint a szelőből a szögszárak által kimetszett szakasz.

K2 **1277.** Adott külső pontból adott körhöz szerkesszünk szelőt úgy, hogy a ponttól a körig terjedő szakasz *a)* ugyanakkora; *b)* kétszer akkora legyen, mint a szelőből kimetszett húr.

E2 **1278.** Két egymást metsző kör egyik metszéspontján át húzzunk szelőt úgy, hogy a nagyobb és kisebb közbeeső húrok aránya 3 : 2 legyen.

K2 **1279.** Adott egy kör és benne két sugár. Hosszabbítsuk meg mindkettőt ugyanannyival úgy, hogy a végpontjukat összekötő szakaszt a körrel való metszéspontok három egyenlő részre bontsák.

K2 **1280.** Adott egy kör és benne két sugár. Szerkesszük meg azt a húrt, amit a két sugár három egyenlő részre vág.

E1 **1281.** Körhöz adott külső ponton át szerkesszünk szelőt úgy, hogy a ponttól a körig terjedő szakasz és a körbe eső húr a kör középpontjából egyenlő szög alatt látszódjék.

E2 **1282.** Egy kör belsejében rajzoljunk meg egy kisebb kört, és tűzzünk ki rajta egy pontot. Szerkesszünk kört, amely mindkét kört érinti, mégpedig a belsőt a kitűzött pontban.

K2 **1283.** Adott egy háromszög két csúcsa, az egyiken átmenő oldalegyenes és az ugyanazon csúcson átmenő súlyvonal egyenese. Szerkesszük meg a háromszöget.

K2 **1284.** Egy háromszögből ki van jelölve két csúcs, az egyiken átmenő súlyvonal egyenese, és ismert a harmadik csúcsnál levő szög. Szerkesszük meg a háromszöget.

E1 **1285.** Adott körbe rajzoljunk húrt. Milyen ponthalmazt alkotnak a húr fölé a körbe írható háromszögek súlypontjai?

E2 **1286.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldala és a közbezárt szög felezője.

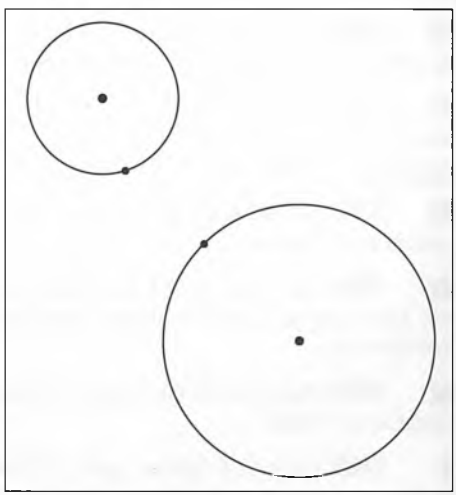
E2,GY **1287.** Egy A faluból két út indul ki, az egyik B-be, a másik C-be. B-ből C-be nem vezet közvetlen út. Ha B-ből C-be szeretnénk jutni, nem kell A-ig elmennünk, mert útközben van egy P elágazás. A B-ből P-ig vezető út hossza éppen annyi, mint azé az útszakaszé, melyen P-ből az A-tól C-ig vezető utat elérjük, és ugyanannyi, mint amennyit ez esetben az A-ból C-be vezető úton még meg kell tenni C-ig. Rajzunkon adott A, B és C. Adjunk eljárást a B-ből C-be vezető fenti útvonal megszerkesztésére.

K2 **1288.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott
a) egy oldala, szemközti szöge és egy másik oldalhoz tartozó súlyvonala;
b) egy oldala, az oldalon fekvő egyik szöge, és annak csúcsából induló súlyvonal;
c) egyik oldala, egy másikhoz tartozó súlyvonala és a harmadikhoz tartozó magassága.

E1 **1289.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott két súlyvonala és a harmadik oldalhoz tartozó magassága.

V **1290.** Adott egy szög és szárain egy-egy pont. A szögtartományban szerkesszünk két egyenlő sugarú kört úgy, hogy érintsék egymást, és érintsék a szög egy-egy szárát az adott pontokban.

V **1291.** *(Az 1290. feladatra épül.)* Szerkesszünk két egymást érintő egyenlő sugarú kört úgy, hogy az *1291. ábrán* megadott körök közül egyet-egyet érintsenek a megadott pontokban.



1291. ábra ▶

Euler-egyenes, Feuerbach-kör, Simson-egyenes, Apollonius-kör

K2 **1292.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszöget középpontos hasonlósággal át lehet vinni az oldalfelező pontok meghatározta háromszögbe. Mi a hasonlóság középpontja?

E1 **1293.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságpontja, súlypontja és a háromszög köré írt kör középpontja egy egyenesen vannak (ez az ún. Euler-féle egyenes), és a súlypont harmadolja a magasságpont és a köré írt kör középpontja közti szakaszt.

E1 **1294.** *(Az 1292. feladatra épül.)* Húzzunk párhuzamost a háromszög minden oldalfelező pontjából a szemközti csúcshoz tartozó szögfelezővel. Mutassuk meg, hogy a három egyenes egy ponton megy át.

E2 **1295.** *(Az 1293. feladatra épül.)* Adott egy háromszög magasságpontja, súlypontja és egyik csúcsa. Szerkesszük meg a háromszöget.

E2 **1296.** Mutassuk meg, hogy a háromszög oldalfelező pontjai, a magasságok talppontjai és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai egy körön vannak. A kör sugara fele a háromszög köré írt kör sugarának, középpontja felezi a magasságpont és a köré írt kör középpontja közti szakaszt. Ezt a kört a háromszög Feuerbach-körének, kilenc pont körének, Euler-féle körének is nevezik.

E2 **1297.** *(Az 1296. feladatra épül.)* Tekintsük azt a négy háromszöget, melyet egy nem derékszögű háromszög három csúcsa és magasságpontja határoz meg. Mutassuk meg, hogy e négy háromszögnek közös a Feuerbach-köre.

E2 **1298.** Tekintsük azt a négy háromszöget, melyet egy nem derékszögű háromszög három csúcsa és magasságpontja határoz meg. Mutassuk meg, hogy e négy háromszög Euler-egyenesei egy ponton mennek át.

E2 **1299.** *(Az 1293. és az 1296. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy a Feuerbach-kör oldalfelező pontbeli érintője párhuzamos a szemközti csúcsban a köré írt körhöz húzott érintővel.

E2 **1300.** Mutassuk meg, hogy a háromszög hozzáírt köreinek középpontján átmenő kör sugara kétszerese a körülírt kör sugarának.

E2 **1301.** *(Az 1300. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy a háromszög köré írt kör felezi az oldalegyeneseket érintő körök középpontjait összekötő szakaszokat.

E2 **1302.** *(Az 1296. és az 1300. feladatra épül.)* Igazoljuk, hogy a háromszöghöz írt körök középpontjain átmenő kör középpontja, valamint a beírt és köré írt körök középpontjai egy egyenesen vannak.

E2 **1303.** Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott az oldalakat érintő négy kör középpontja közül három.

E2 **1304.** *(Az 1301. feladatra épül.)* Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott a köré írt kör középpontja és *a)* két hozzáírt körének középpontja; *b)* a beírt és egy hozzáírt körének középpontja.

E2 **1305.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszögbe írt kör sugara nem nagyobb a köré írt kör sugarának felénél.

V **1306.** *(A 999. feladatra épül.)* Tükrözzük a háromszög magasságpontján átmenő tetszőleges egyenest a háromszög oldalegyeneseire. Bizonyítsuk be, hogy a három tükörkép a köré írt kör egy pontjában metszi egymást.

V **1307.** *(A 999. és az 1306. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög köré írt kör tetszőleges pontját tükrözzük az oldalegyenesekre, a tükörképként kapott három pont egy, a magasságponton átmenő egyenesen van.

V **1308.** *(Az 1307. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy a háromszög köré írt kör tetszőleges pontjából az oldalegyenesekre állított merőlegesek talppontjai egy egyenesen vannak (Simson-egyenes).

V **1309.** *(Az 1306. és az 1308. feladatra épül.)* Szerkesszük meg egy háromszög adott irányú Simson-egyenesét.

E1 **1310.** Adott két pont. Bizonyítsuk be, hogy kört alkotnak azok a pontok, amelyekre a két adott ponttól mért távolságok aránya 1-től különböző állandó. Ez a kör a két adott ponthoz és az arányhoz tartozó úgynevezett Apollonius-kör.

E1 **1311.** *(Az 1310. feladatra épül.)* Szerkesszük meg azokat a pontokat, amelyeknek egy A, illetve B ponttól mért távolságaik úgy aránylanak egymáshoz, mint két adott szakasz.

E2 **1312.** Húzzunk két párhuzamos egyenest, és tűzzük ki rajtuk az A és B pontokat, valamint az egyeneseken kívül a C pontot. Szerkesszünk a C ponton át olyan egyenest, amely az A-t tartalmazó egyenest a P pontban, a B-t tartalmazó egyenest a Q pontban metszi, és az $AP:BQ$ arány adott érték legyen.

E1 **1313.** *(Az 1311. feladatra épül.)* Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha ismerjük azt a két szeletet, amikre az egyik hegyesszög felezője vágja szét a szemközti befogót.

E1 **1314.** *(Az 1311. feladatra épül.)* Szerkesszünk háromszöget egy szögből és abból a két szakaszból, amelyre az adott szög felezője bontja a szemközti oldalt.

E1 **1315.** Egyenlő szárú háromszögben adott a szárszög és a szárakhoz tartozó súlyvonal. Szerkesszük meg a háromszöget.

E1 **1316.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldal, a hozzá tartozó magasság, továbbá a másik két oldal aránya.

E1 **1317.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy szöge és az a két szakasz, amely az adott szög külső szögfelezőjének a szemközti oldalegyenessel való metszéspontja és az oldalvégpontok között van.

V **1318.** Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott
a) az egyik csúcshoz tartozó szögfelező, a szemközti oldalhoz tartozó magasság és a másik két oldal aránya;
b) az egyik csúcshoz tartozó külső szögfelező, a szemközti oldalhoz tartozó magasság és a másik két oldal aránya.

E2 **1319.** Adjuk meg azoknak a pontoknak a halmazát, amelyekből két adott kör egyenlő szög alatt látszik. (Kör látószögén egy külső pontból a hozzá húzott két érintő félegyenes szögét értjük.)

E2 **1320.** Adott egy szög és szárai között egy pont. Szerkesszük meg azt a háromszöget, melynek egyik oldala adott irányú, az oldallal szemközti csúcsa az adott pont, a másik két csúcsa az adott szög szárain fekszik, ha ismerjük az adott pontból induló oldalak arányát.

E2 **1321.** *(Az 1197. feladatra épül.)* Szerkesszünk trapézt, ha adottak a szögei és az átlói.

E2 **1322.** Egy a és b sugarú kör középpontjainak távolsága c $(c > a + b)$.
a) Rajzoljunk mindkét körben párhuzamos sugarakat, majd kössük össze az egyirányú párhuzamos sugarak végpontjait. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott egyenesek a két kör centrálisát ugyanabban a pontban metszik.
b) Rajzoljuk meg a két kör közös külső érintőit. Bizonyítsuk be, hogy ezek metszéspontja a centrálison az előbb említett pontban van.

E2 **1323.** Egy a és b sugarú kör középpontjainak távolsága c $(c > a + b)$.
a) Rajzoljunk mindkét körben párhuzamos sugarakat, majd kössük össze a különböző irányú párhuzamos sugarak végpontjait. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott egyenesek a centrálist ugyanabban a pontban metszik.
b) Rajzoljuk meg a két kör közös belső érintőit. Bizonyítsuk be, hogy ezek metszéspontja a centrálison, az előbb említett pontban van.

E2 **1324.** Szerkesszük meg két kör hasonlósági pontjait, ha az egyik kör a másik belsejében helyezkedik el.

E2 **1325.** Hol helyezkednek el két kör hasonlósági pontjai, ha
a) a két kör kívülről érinti egymást; *b)* a két kör egyike belülről érinti a másikat?

E2 **1326.** Szerkesszük meg két egymást metsző kör hasonlósági pontjait.

V **1327.** *(Az 1322., az 1323. és az 1325. feladatra épül.)* Adott egy egyenes, rajta egy pont, továbbá egy, az egyenest nem metsző kör. Szerkesszünk kört, amely az adott kört és az egyenest érinti, az utóbbit az adott pontban.

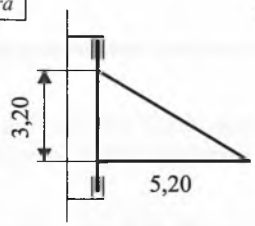
E2 **1328.** Szerkesszünk kört, amely érint egy adott f egyenest, továbbá egy adott k kört adott E pontban.

E2 **1329.** *(Az 1325. feladatra épül.)* Adott egy k kör és egy azt metsző e egyenes, továbbá az egyenes körbe eső szakaszán egy E pont. Szerkesszünk olyan kört, amely a k kört és az e egyenest érinti, utóbbit a megadott E pontban.

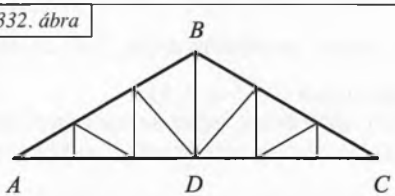
Pitagorasz tételének alkalmazása

K1,GY1330. Egy 2 km hosszúságú útszakasz két végpontjában rögzítünk egy 2001 m hosszúságú kötelet. A kötél középpontját emeljük fel, amennyire csak lehet. Át tud-e alatta menni így egy felnőtt ember anélkül, hogy lehajolna?

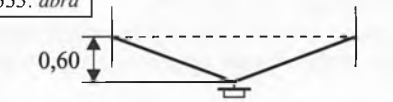
1331. ábra



1332. ábra



1333. ábra



K1,GY1331. Falra erősített forgódarunak *(1331. ábra)* a fallal párhuzamos vasrúdja 3,20 m, rá merőleges forgórúdja 5,20 m. Milyen hosszú az ezeket összekötő húzórúd?

K1,GY1332. Határozzuk meg az *1332. ábrán* látható tetőszerkezet BD magasságát, ha az AB, illetve BC szarufák 9 m hosszúak, az AC keresztfa pedig 15 m hosszú.

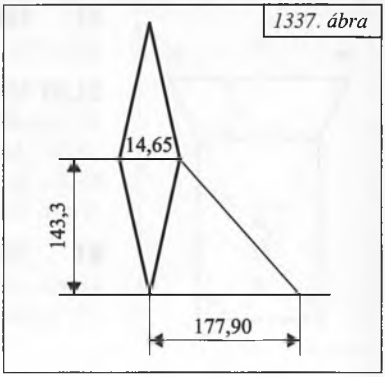
K1,GY1333. Egy 20 m széles úton két szemközti ház közé egy acélhuzal közepére villanylámpát függesztettek. A lámpa 60 cm-rel van lejjebb a felfüggesztési pontok által meghatározott vízszintes egyenesnél *(1333. ábra)*. Milyen hosszú a huzal?

K1,GY1334. Egy 1,2 m széles és 1,9 m magas vasajtóra átlóvasat kell tenni. Mekkora ennek hossza?

K1,GY1335. Két gyárépület között anyagszállításhoz lejtős csúszdát építettek. Határozzuk meg a csúszda hosszát, ha a gyárépületek távolsága 10 m, és a csúszda végeit 8 m, illetve 4 m magasan helyezték el.

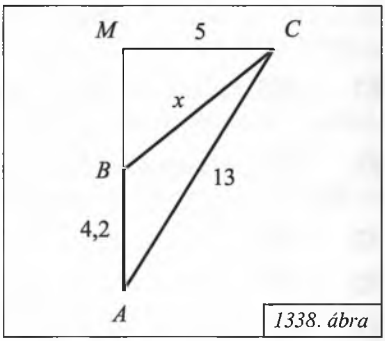
K2 1336. Egy derékszög szárai között levő P pont a száraktól a cm, illetve b cm távol van. Milyen távol van a derékszög csúcsától?

K2,GY1337. Egy 317 m magas rádió-adótorony kifeszítése a földtől 143,3 m magasságból induló sodronykötelekkel történik. A torony szélessége itt 14,65 m. A feszítőkötelek a torony körül írt 177,9 m sugarú kör kerületén vannak leerősítve *(1337. ábra)*. Milyen hosszú egy ilyen feszítőkötél?



1337. ábra

K2,GY1338. Egy falra szerelt forgódaru alsó rúdja 13 m, a rúd végpontjának távolsága a tengelytől 5 m *(1338. ábra)*. Mekkora a felső rúd hossza, ha a rúdnak a tengelyen forgó végei 4,2 méterre vannak egymástól?



1338. ábra

K1 1339. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 16 cm, szárai 17 cm hosszúak. Határozzuk meg az alaphoz tartozó magasság hosszát.

K2 1340. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának és szárának aránya 48 : 25. Az alaphoz tartozó magasság hossza 35 cm. Határozzuk meg a háromszög oldalainak hosszát.

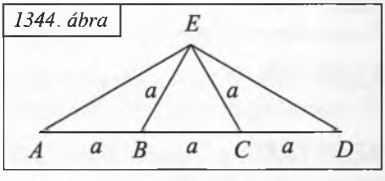
K2 1341. Mekkora az a oldalú szabályos háromszög magassága, valamint beírt, illetve köré írt körének sugara?

K2 1342. Mekkora az R sugarú körbe írt szabályos háromszög oldala?

K2 1343. Határozzuk meg a h magasságú szabályos háromszög oldalának hosszát.

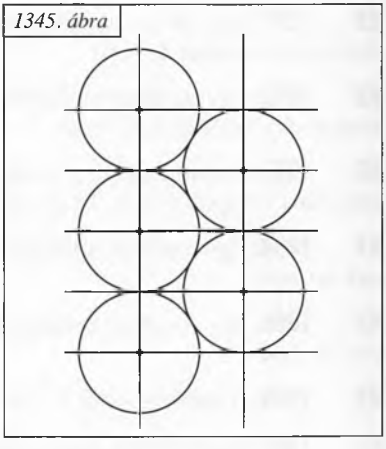
K2,GY1344. Az *1344. ábrán* levő tetőszerkezeten mindegyik a-val jelölt gerenda egyenlő hosszú: 3,6 m. Milyen hosszú a nem jelölt két gerenda?

1344. ábra



K1,GY1345. Vaslemezből 28 mm átmérőjű körlapokat kell kivágni. Határozzuk meg az *1345. ábrán* látható rácshálózat egyeneseinek távolságát.

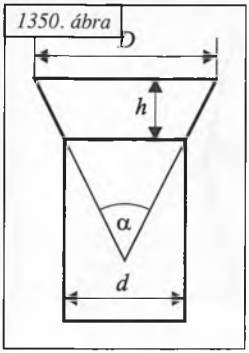
1345. ábra



K2 1346. A derékszögű háromszög egyik szöge 60°-os, a mellette levő befogó hossza a. Mekkora a másik befogó?

K2 1347. A derékszögű háromszög egyik szöge 30°-os, a mellette levő befogó hossza b. Mekkora a másik befogó?

K2 1348. Mekkora a szabályos háromszög oldala, ha magassága d-vel kisebb, mint az oldala?



1350. ábra

K1 1349. Egy 30°-os derékszögű háromszög hosszabbik befogója 6 m. Mekkora a másik befogó és az átfogó?

E1,GY 1350. Az *1350. ábrán* egy zseblámpa oldalnézetét láthatjuk. A szög 60°-os. Számítsuk ki
a) D-t, ha $d = 16{,}5$ cm és $h = 7{,}5$ cm;
b) d-t, ha $D = 30$ cm, és $h = 9{,}5$ cm;
c) h-t, ha $D = 35$ cm, és $d = 22$ cm.

K1 1351. Mekkorák annak az egyenlő szárú háromszögnek a szárai, amelynek alapja 4 cm hosszú, és az alapon fekvő szögek 45°-osak?

K1 1352. Az ABC háromszög AB oldalán levő nagyobbik szög 45°-os. Ezt az oldalt a hozzá tartozó magasság T talppontja 20 cm-es és 21 cm-es részekre osztja. Számítsuk ki a nagyobbik oldal hosszát.

K1 1353. Az ABC háromszög két oldalának hossza $a = 25$ cm, $b = 30$ cm, a harmadik oldalhoz tartozó magasság $m = 24$ cm. Számítsuk ki a c oldal hosszát.

K1 1354. *a)* Határozzuk meg az a oldalú négyzet átlójának hosszát.
b) Határozzuk meg annak a négyzetnek az oldalhosszát, amelynek átlója d.

K2 1355. Mekkora a négyzet oldala, ha átlója 2 cm-rel hosszabb az oldalánál?

K2 1356. Mekkora az r sugarú körbe írt négyzet oldala?

K2 1357. Mekkora a téglalap köré írt kör sugara, ha oldalai a, illetve b hosszúságúak?

K2,GY 1358. Egy henger alakú farönkből téglalap keresztmetszetű gerendát vágnak ki. Mekkora a farönk átmérője, ha a téglalap oldalai 35 cm és 20 cm hosszúak?

K2,GY 1359. Milyen szélesnek kell lennie egy egyenes körhenger alakú vasrúdnak, ha belőle 32 mm alapélű négyzetes hasábot akarunk kiesztergálni?

K2,GY 1360. Egy henger alakú farönk átmérője 12 cm. Lehet-e belőle 10 cm élű négyzet alapú gerendát készíteni?

K2 1361. Egy 34 cm sugarú körbe írt téglalap oldalainak aránya 8 : 15. Határozzuk meg a téglalap oldalainak hosszát.

K2 1362. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 8 dm és 18 dm. Számítsuk ki a köré írt kör sugarának hosszát.

K2 1363. Határozzuk meg a derékszögű háromszög átfogójához tartozó súlyvonal hosszát, ha a befogók hossza 12 cm, illetve 16 cm.

K1 1364. Egy rombusz átlóinak hossza 24 cm és 70 cm. Számítsuk ki a rombusz oldalainak hosszát.

K2 1365. Egy rombusz kerülete 1 m hosszú, átlóinak aránya 3 : 4. Határozzuk meg az átlók hosszát.

K2 1366. A rombusz átlói 14 cm és 48 cm. Mekkora a magassága?

K1 1367. Egy rombusz egyik átlója 20 cm, oldala 17 cm. Mekkora a másik átlója?

K1 **1368.** Egy húrtrapéz alapjai 7 cm, illetve 4 cm hosszúak, szárainak hossza 2,5 cm. Mekkora a trapéz magassága?

K2 **1369.** Egy húrtrapéz középvonala 45 cm, magassága 40 cm. A trapéz szára 41 cm hosszú. Számítsuk ki a párhuzamos oldalak hosszát.

K2 **1370.** Az *ABCD* húrtrapézba 3 cm sugarú érintőkört lehet írni. Mekkorák a trapéz oldalai, ha hosszabbik alapja 10 cm?

K2 **1371.** Mekkora sugarú kör írható abba a húrtrapézba, amelynek alapjai 10 cm és 36 cm?

K2 **1372.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy húrtrapéz érintőtrapéz is, akkor a beírt kör átmérője az alapok mértani közepe.

K1 **1373.** Mekkora a húrtrapéz átlóinak hossza, ha alapjai 4 m és 6 m, szára 5 m?

K2 **1374.** Egy derékszögű trapéz rövidebbik alapja és ferde szára egyenlő hosszú. Határozzuk meg a hosszabbik átló hosszát, ha a ferde szár a és a hosszabbik alap b.

K2 **1375.** Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű trapézban az átlók négyzeteinek különbsége megegyezik az alapok négyzeteinek különbségével.

K2 **1376.** Egy P pontból az e egyeneshez három szakaszt húztunk. Közülük egy merőleges az egyenesre, a másik kettő nem. Ez utóbbiak 41 cm , illetve 50 cm hosszúak, és az e-re eső vetületeik aránya 3 : 10. Határozzuk meg a merőleges szakasz hosszát.

K2 **1377.** Egy egyenlő szárú háromszög alapja 32 cm, a szárak hossza 20 cm. Az alappal szemközti csúcsban merőlegest állítunk az egyik szárra. Mekkora részekre osztja ennek meghosszabbítása az alapot?

E1 **1378.** Az *ABC* derékszögű háromszög derékszögű csúcsa köré kört írunk, melynek sugara a rövidebb befogóval egyenlő. A kör az átfogót 98 cm-es és 527 cm-es szakaszokra bontja. Mekkorák a befogók?

K2 **1379.** Egy derékszögű háromszögben a derékszög szögfelezője $2\frac{1}{7}$ cm és $2\frac{6}{7}$ cm hosszú részekre osztja az átfogót. Határozzuk meg a befogók hosszát.

K2 **1380.** Határozzuk meg, mekkora részekre osztja az egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóját a szemközti szög szögfelezője.

K2 **1381.** Egy derékszögű háromszögben az egyik hegyesszög szögfelezője a szemközti befogót m és n hosszúságú szeletekre ($m > n$) osztja. Határozzuk meg a másik befogó és az átfogó hosszát.

E1 **1382.** Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 15 cm és 20 cm. Mekkora részekre osztja az átfogót a derékszög csúcsából húzott magasság?

E1 **1383.** Egy derékszögű háromszög átfogóját a derékszög szögfelezője 7 : 9 arányú részekre osztja. Milyen arányban osztja a magasság az átfogót (a részeket ugyanolyan sorrendben véve)?

E1 **1384.** Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 15 cm, illetve 20 cm. A derékszög csúcsából meghúzzuk a magasságot, valamint a magasság és a befogók által közrefogott szögek szögfelezőit. Határozzuk meg az átfogóból a két szögfelező által kimetszett szelet hosszát.

K2 **1385.** Az ABC egyenlő szárú háromszög alapon levő szögeinek szögfelezői a D pontban metszik egymást. Határozzuk meg a D pontnak az alappal szemközti csúcstól való távolságát, ha a háromszög alapja 12 cm, a szárak hossza 10 cm.

K1 **1386.** Határozzuk meg, milyen távol van a 89 mm sugarú kör középpontjától annak 16 cm hosszúságú húrja.

K1 **1387.** Milyen távol van a 4 cm sugarú kör középpontjától egy 5 cm hosszú húr?

K2 **1388.** Két egymást metsző kör közös húrja 24 cm. Határozzuk meg a középpontok távolságát, ha a körök 13 cm, illetve 15 cm sugarúak.

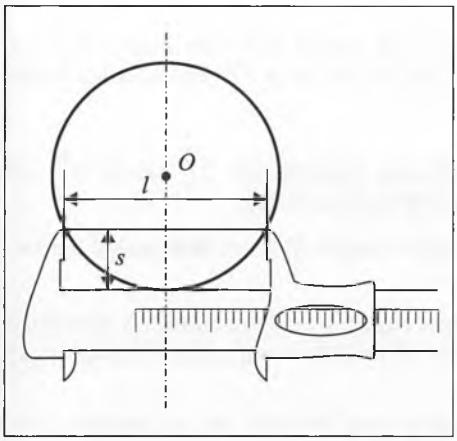
K1 **1389.** Egy 15 cm sugarú kör két párhuzamos húrja 18 cm, illetve 24 cm hosszú. Határozzuk meg ezek távolságát, ha tudjuk, hogy a kör középpontja a párhuzamosok között van.

K1 **1390.** Egy 30 cm sugarú kör két párhuzamos húrja 36 cm, ill. 48 cm hosszú. Határozzuk meg ezek távolságát, ha tudjuk, hogy a kör középpontja a párhuzamosok közötti sávon kívül helyezkedik el.

K2 **1391.** Egy 25 cm sugarú kör két párhuzamos húrja 14 cm és 40 cm hosszú. Határozzuk meg a közöttük levő távolságot.

E1 **1392.** Mekkora a kör sugara, ha benne egymástól 22 cm távolságra egy 40 cm-es és egy 48 cm-es párhuzamos húrpár helyezhető el?

E2 **1393.** Egy h magasságú körszeletet határoló húr hossza a. Határozzuk meg a körszelet sugarának hosszát.



◄ *1394. ábra*

K2,GY 1394. Kör alakú tárgyak átmérőjének meghatározásához az *1394. ábrán* látható tolómérőt használják. A tolómérő szárainak hossza: $s = 25$ mm.
a) Határozzuk meg az átmérő hosszát, ha a tolómérő végpontjainak távolsága: $l = 200$ mm.
b) Határozzuk meg, hogyan függ a d átmérő s-től és l-től.

K2 **1395.** Egy kör átmérőjének egyik végpontja a vele párhuzamos húr végpontjaitól 18 cm, illetve 84 cm távol van. Mekkora a kör sugara?

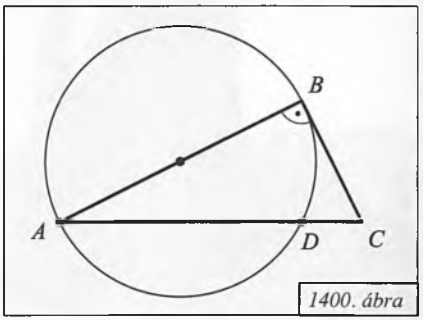
K1 **1396.** Egy 36 cm sugarú kör O középpontjától 85 cm távol levő P pontból a körhöz érintőt húzunk. Határozzuk meg az érintőszakasz hosszát.

K1 **1397.** Egy 11 cm sugarú körhöz adott P pontból érintőt húzunk. Határozzuk meg a P pontnak a kör középpontjától való távolságát, ha az érintőszakasz 60 cm hosszú.

K1 **1398.** Egy 7 cm sugarú körhöz a kör középpontjától 25 cm távol levő P pontból két érintőt húzunk. Határozzuk meg az érintési pontok távolságát.

K1 **1399.** Mekkora annak a körnek a sugara, amelyhez egy pontból 156 cm hosszú érintők húzhatók, és az érintési pontok távolsága 120 cm.

K2 **1400.** Egy kör adott B pontbeli érintőjének C pontját összekötjük a kör B-vel átellenes A pontjával *(1400. ábra)*. Az AC egyenes a kört D pontban metszi. Határozzuk meg a kör sugarának hosszát, ha $AD = 32$ cm, és $DC = 18$ cm.



1400. ábra

K2 **1401.** Határozzuk meg az *1400. ábrán* levő AD és DC szakaszok arányát, ha a BC érintőszakasz egyenlő a kör sugarával.

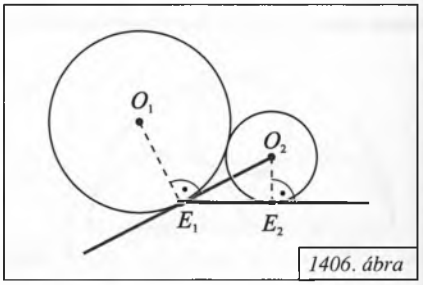
K2 **1402.** Adott P pontból adott körhöz húzott érintő és szelő merőlegesek egymásra. Az érintőszakasz 12 cm, a szelő P ponthoz közelebb eső szelete 10 cm. Határozzuk meg a kör sugarát.

K1 **1403.** Két kör sugara 1 cm, illetve 3 cm. A középpontjukat összekötő szakasz 8 cm. Milyen hosszúak *a)* a közös külső érintők; *b)* a közös belső érintők?

K1 **1404.** Egy 27 cm és egy 13 cm sugarú kör középpontjainak távolsága 50 cm. Határozzuk meg *a)* a közös külső érintők hosszát; *b)* a közös belső érintők hosszát.

K1 **1405.** Határozzuk meg két, egymást kívülről érintő kör közös külső érintőjének hosszát, ha a körök 16 cm és 25 cm sugarúak.

E1 **1406.** Két kör kívülről érinti egymást. Az egyik kör középpontjából a másik körhöz érintőt húzunk. Az érintési pontból az első körhöz ismét érintőt húzunk. Adjuk meg az utóbbi érintőszakasz hosszát a körök sugarainak segítségével *(1406. ábra)*.

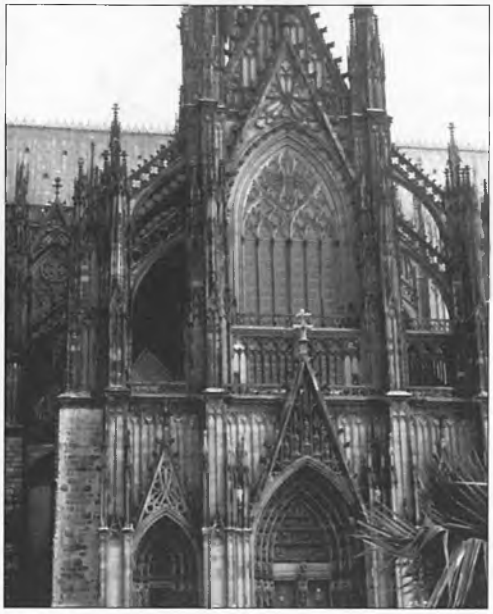


1406. ábra

K2,GY **1407.** Egy félhenger alakú bolthajtásos pincében a falaktól egyenlő távolságra két állványt kell felállítani. Határozzuk meg az állványok magasságát, ha a pince szélessége alul 4 m, és az állványok 2 m-re vannak egymástól.

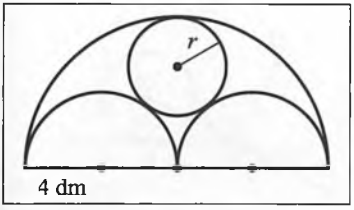
K2 **1408.** Egy 8 dm széles körgyűrű belső körének érintő egyeneséből a külső kör 4 m hosszú húrt metsz ki. Határozzuk meg a két kör sugarának hosszát.

K2 **1409.** Egymástól 8 cm távolságban húzódó párhuzamos egyenesek között két egymást és egy-egy egyenest is érintő egyenlő sugarú kör van. A körök középpontjából a párhuzamosokra állított merőlegesek távolsága 3 cm. Mekkora a két kör sugara?



Gótikus templom részlete

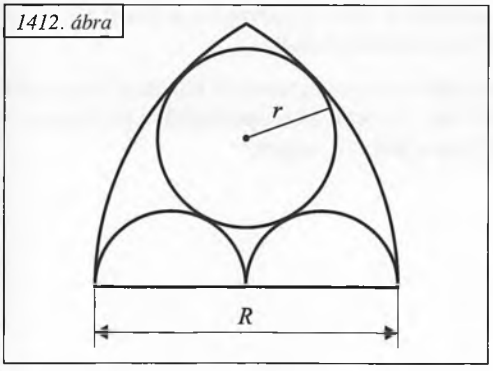
K2,GY 1411. Számítsuk ki az *1411. ábra* román ablak vázlatán levő legkisebb kör sugarát.



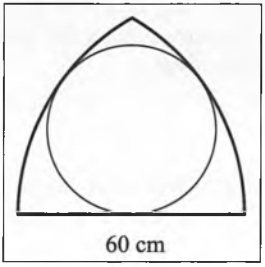
◀ *1411. ábra*

E1,GY 1412. Számítsuk ki az *1412. ábrán* r-rel jelölt kör sugarát, ha R-et ismertnek tételezzük fel.

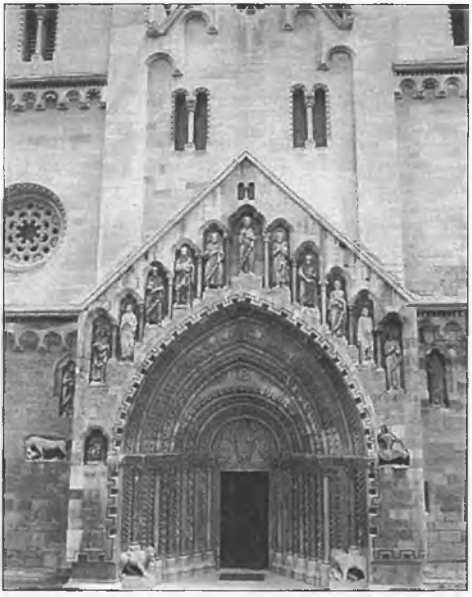
1412. ábra



K2,GY 1410. Egy gótikus ablak felső része két körívből áll *(1410. ábra)*. Ezek sugara egyenlő az ablak 60 cm szélességével. Mekkora annak a körnek a sugara, amely a két körívet és a vízszintes keresztfát érinti?

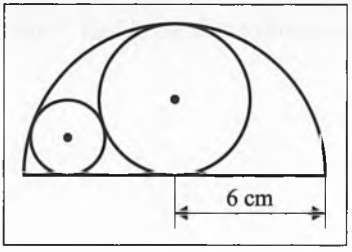


◀ *1410. ábra*



Román stílusú templom részlet

E1 1413. Számítsuk ki az *1413. ábrán* levő kis kör sugarát.



◀ *1413. ábra*

E1 **1414.** Egy 9 cm sugarú kör ívét és az ívhez tartozó húrt egy 3 cm sugarú kör azok felezőpontjában érinti. Mekkora annak a két körnek a sugara, amely érinti a körívet, a 3 cm sugarú kört és a húrt?

K2 **1415.** Egy egyenlő szárú háromszögben az alaphoz 3 cm-es, a szárhoz 4 cm-es magasság tartozik. Mekkorák a háromszög oldalai?

K2 **1416.** Egy egyenlő szárú háromszög alapja 30 cm, alaphoz tartozó magassága 20 cm. Mekkora a szárhoz tartozó magasság?

E1 **1417.** Egy egyenlő szárú háromszög alapja 8 cm, köré írt körének sugara 5 cm. Mekkorák a szárai?

E2 **1418.** Egy körben két egymást metsző, egymásra merőleges húrt rajzoltunk. Igazoljuk, hogy a húr négy szeletének négyzetösszege mindig ugyanakkora.

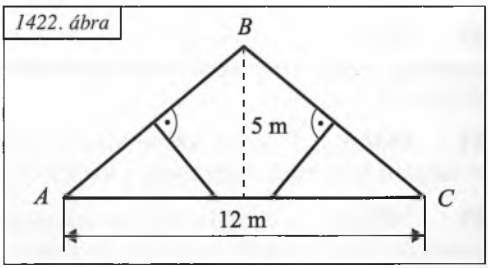
K2 **1419.** Egy egyenlő szárú háromszög alapja és ahhoz tartozó magassága egyaránt 6 cm. Mekkora a háromszög köré írt kör sugara?

K2 **1420.** Határozzuk meg az egyenlő szárú háromszögbe írt kör sugarának hosszát, ha a háromszög alapja 30 cm, a szárak hossza 39 cm.

K2 **1421.** Egy egyenlő szárú háromszögbe írt kör középpontja a magasságot 17 : 15 arányban osztja. Határozzuk meg a kör sugarát, ha a háromszög alapja 60 cm.

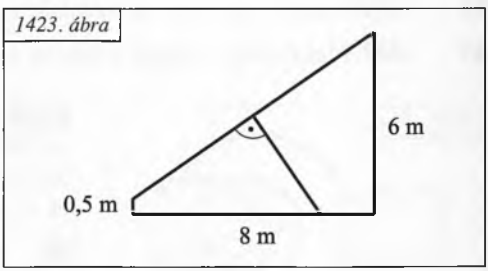
K2,GY 1422. Egy tetőszerkezet 12 m széles és 5 m magas. Mindegyik tetőgerendát egy rá merőleges gerenda támasztja alá középen *(1422. ábra)*. Milyen hosszúak ezek?

1422. ábra



E1,GY 1423. Az *1423. ábrán* levő tetőszerkezet 8 m hosszú gerendája 0,5 m-rel lejjebb van, mint az eresz. A tetőszerkezet 6 m magas. A tető közepét a födémmel egy, a tetőre merőleges támasztó gerenda köti össze. Milyen hosszú ez a támasztófa?

1423. ábra



K2,GY 1424. Mekkora annak az ingának a hossza, amely 20 cm-es kitérésnél 2 cm-t emelkedik?

K2 **1425.** Egy háromszög oldalai 25 cm, 52 cm és 63 cm. Határozzuk meg a leghosszabb oldalhoz tartozó magasságot.

K2 **1426.** Számítsuk ki annak a háromszögnek a magasságait, amelynek oldalai 13 cm, 20 cm, 21 cm.

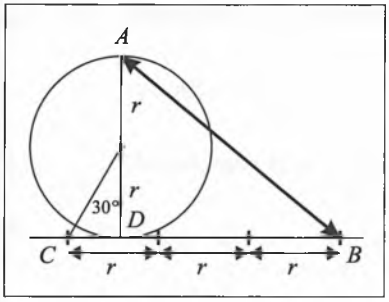
K2 **1427.** Egy trapéz alapjai 23 cm és 13 cm, szárai 9 cm és 17 cm hosszúak. Mekkora a magassága?

K2 **1428.** Egy hegyesszögű háromszög belsejében levő P pontból az oldalakra állított merőleges az oldalakat az a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 szakaszokra osztja (ebben a sorrendben). Bizonyítsuk be, hogy $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$.

K2 **1429.** Mutassuk meg, hogy ha egy derékszögű háromszög befogói a és b, átfogója c, és a hozzá tartozó magasság m_c, akkor $a + b$, m_c és $c + m_c$ szintén egy derékszögű háromszög oldalai.

K2 **1430.** Egy derékszög mindkét szárára a csúcsból egyenlő a távolságot mérünk fel. Jelöljük a kapott végpontoknak a derékszög csúcsán áthaladó tetszés szerinti egyenestől való távolságát x-szel, illetve y-nal. Mutassuk meg, hogy $x^2 + y^2$ értéke csak a-tól függ.

K2 **1431.** Egy egyenlő szárú hegyesszögű háromszög alapja a, szárai b hosszúságúak. Az alap egyik végpontjához tartozó m magasság a szemközti szárat c és d hosszúságú darabokra osztja (c esik az alaphoz közelebb). Bizonyítsuk be, hogy $c^2 + 2d^2 + 3m^2 = a^2 + 2b^2$.



K2 **1432.** A XVII. században *Kochansky* a kör kerületével egyenlő szakasz szerkesztésére az *1432. ábráról* leolvasható közelítő szerkesztést adta. Eszerint az r sugarú kör kerületének fele közelítőleg AB-vel egyenlő. Adjuk meg AB hosszát r függvényében.

◀ *1432. ábra*

K2 **1433.** Egy r sugarú körbe kereszt alakban öt egyenlő nagyságú a oldalú négyzetet írtunk úgy, hogy azok egymással legfeljebb egy-egy oldalukban érintkeznek. Mekkorák a négyzetek oldalai?

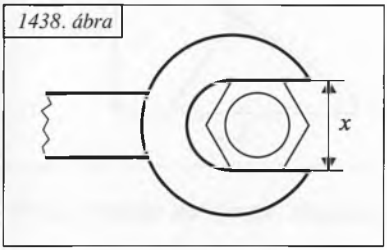
E1 **1434.** Egy r sugarú körbe három egyenlő nagyságú, egymást és az eredetit is érintő r' sugarú kört írunk. Mekkorák a kis körök sugarai?

E1 **1435.** Egy a oldalú szabályos háromszögbe három egyenlő sugarú, egymást és a háromszög két-két oldalát is érintő kört írtunk. Mekkora a sugaruk?

E1 **1436.** Mekkora az r sugarú körbe írt szabályos nyolcszög oldala?

E1 **1437.** Mekkora az r sugarú körbe írt szabályos tizenkétszög oldala?

1438. ábra



K1,GY 1438. Egy csavaranya oldala 2,5 cm hosszú *(1438. ábra)*. Milyen x nyílású csavarkulcs kell hozzá, ha a csavar és a csavarkulcs között 0,5 mm hézagra is szükség van?

K2 **1439.** Az a oldalú négyzet egyik oldalán az egyik csúcstól b távolságra kijelölünk egy P pontot. Mekkora ennek a pontnak az átlóktól mért távolsága?

E1 **1440.** *(Az 1437. feladatra épül.)* Az ABC egyenlő oldalú háromszög AB oldalára B végpontjában egy AB-vel egyenlő hosszúságú BD merőlegest állítunk. D és C az AB egyenes azonos oldalán van. Mekkora a D pontnak a háromszög csúcsaitól mért távolsága?

K2 **1441.** Egy négyzet átlóira a csúcsokból mérjük rá sorra a négyzet oldalait. Az így kapott pontokat kössük össze.
a) Bizonyítsuk be, hogy a keletkezett négyszög ismét négyzet.
b) Határozzuk meg az új négyzet oldalának hosszát.

E1 **1442.** Egy a oldalú $ABCD$ négyzet két szomszédos csúcsa körül egy-egy a sugarú negyedkört írunk. Milyen messze van ezek E metszéspontja a csúcsoktól?

E1 **1443.** Egy a oldalú $ABCD$ négyzetben minden csúcs körül a sugarú negyedkört rajzolunk. Mekkora az oldala annak a négyzetnek, melyet a negyedkörök metszéspontjai határoznak meg?

E1 **1444.** Egy a oldalú négyzet minden csúcsa köré a sugarú kört rajzolunk. Mekkora a körök négyzeten kívül eső metszéspontjai által meghatározott négyzet oldala?

K1 **1445.** Az ABC háromszög AB oldala 60 cm, a hozzá tartozó s_c súlyvonal, illetve m_c magasság 13 cm, illetve 12 cm. Mekkora a másik két oldal?

E1 **1446.** Mutassuk meg, hogy azokban a derékszögű háromszögekben, amelyekben az átfogók egyenlők, a súlyvonalak négyzetösszege is egyenlő.

K2 **1447.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex négyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor két-két szemközti oldalának négyzetösszege egyenlő.

E1 **1448.** Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével.

E1 **1449.** *(Az 1448. feladatra épül.) a)* Egy paralelogramma oldalai 6 cm és 10 cm, egyik átlója 7 cm. Mekkora a másik átló?
b) Egy paralelogramma átlói 12 cm és 18 cm, egyik oldala 9 cm. Mekkora a másik oldal?
c) Egy paralelogramma átlói 40 cm és 74 cm hosszúak, egyik oldala 51 cm. Határozzuk meg az ehhez az oldalhoz tartozó magasságát.

E1 **1450.** Bizonyítsuk be, hogy bármely négyszögben az átlók négyzetösszege a középvonalak négyzetösszegének kétszeresével egyenlő.

E2 **1451.** *(Az 1448. feladatra épül.) a)* Egy háromszög oldalai a, b, c. Mekkorák a súlyvonalai?
b) A háromszög két oldala 7 cm és 11 cm, a harmadikhoz tartozó súlyvonal 6 cm. Mekkora a harmadik oldal?

E2 **1452.** *(Az 1448. feladatra épül.)* Mutassuk meg, hogy a háromszög súlyvonalainak négyzetösszege az oldalak négyzetösszegének háromnegyedével egyenlő.

V **1453.** *(Az 1451/a. feladatra épül.)* Mutassuk meg, hogy tetszőleges négyszögben az oldalak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetének és az átlók felezőpontjait összekötő szakasz négyszeres négyzetének összegével.

E2 **1454.** *(Az 1451/a. feladatra épül.)* A sík egy pontjának egy téglalap négy egymás utáni csúcsától mért távolságai: a, b, c, d. Mutassuk meg, hogy $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

V **1455.** *(Az 1451/a. feladatra épül.)* Adott a sík A és B pontja, valamint egy d hosszúságú szakasz. Milyen ponthalmazt alkotnak azok a P pontok, amelyekre $PA^2 + PB^2 = d^2$?

Területszámítás, területátalakítás és alkalmazásai

K1 **1456.** Mekkora a téglalap területe, ha átlója $e = 13$ m, egyik oldala $b = 5$ m?

K1 **1457.** Mekkora annak a négyzetnek az oldala, amely egyenlő területű a 17 cm és 8 cm oldalú téglalappal?

K1 **1458.** Hányszorosára nő egy négyzet területe, ha minden oldalát háromszorosára növeljük?

K1 **1459.** Hányszorosára nő a téglalap területe, ha egyik oldalát ötszörösére, másik oldalát háromszorosára növeljük?

K1 **1460.** Hányszorosára kell növelnünk a négyzet oldalait ahhoz, hogy területe ötszörösére növekedjék?

K1,GY **1461.** Egy földdarab területe az 1:75 000 méretarányú térképen 4 cm^2. Mekkora a területe a valóságban?

K1 **1462.** A paralelogramma két szomszédos oldala 12 cm és 8 cm, a nagyobbikhoz tartozó magasság 5 cm. Mekkora a másik magasság?

K2 **1463.** Egy paralelogramma kerülete 48 cm, magasságainak aránya 5:7. Mekkorák az oldalak?

K2 **1464.** Egy paralelogramma és egy téglalap oldalai egyenlők. Mekkorák a paralelogramma szögei, ha területe fele a téglalap területének?

K1 **1465.** Mekkora annak a paralelogrammának a területe, amelynek oldalai 8 cm és 7 cm, egyik hegyesszöge *a)* 60°; *b)* 30°; *c)* 45°?

K2 **1466.** Mutassuk meg, hogy az adott oldalakkal rendelkező paralelogrammák közül a téglalap területe a legnagyobb.

K1 **1467.** Bizonyítsuk be, hogy a rombusz területe átlói szorzatának felével egyenlő.

K1 **1468.** Mekkora a rombusz területe, ha átlói 16 cm és 5 cm hosszúak?

K1 **1469.** Mekkora a rombusz magassága, ha átlói 16 m és 12 m hosszúak?

K1 **1470.** Mekkora a rombusz területe, ha oldala 9 cm, egyik átlója 7 cm hosszú?

K1 **1471.** A rombuszba írt kör sugara 3 cm, egyik oldala 7 cm. Mekkora a rombusz területe?

K1 **1472.** Mekkora az a oldalú szabályos háromszög területe?

K2 **1473.** Mekkora annak a szabályos háromszögnek az oldala, aminek a területe 1 területegység?

K2 **1474.** Mekkora az egyenlő oldalú háromszög területe, ha magassága m?

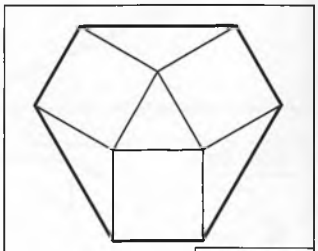
K2 **1475.** Mekkora az átfogója a t területű egyenlő szárú derékszögű háromszögnek?

K1 **1476.** Határozzuk meg az egyenlő szárú háromszög területét,
a) ha alapja 42 cm és egyik szára 72 cm;
b) ha alapja 18 cm és egyik szára 49 cm;
c) ha alapja 26 cm és egyik szára 18 cm.

K2 **1477.** Határozzuk meg a háromszög területét, ha egyik oldala a, a rajta fekvő szögek pedig 30° és 45°.

K1 **1478.** Mekkora annak az egyenlő szárú háromszögnek a területe, amelynek szára a hosszúságú, a szárszöge pedig 120°-os?

K2 **1479.** Az a oldalú szabályos háromszög minden oldala fölé négyzetet szerkesztve az *1479. ábrán* látható hatszöget nyerjük. Mekkora a hatszög területe?



1479. ábra

K2 **1480.** Mekkora annak a háromszögnek a területe, amelynek oldalai a, b, és az általuk bezárt szög 60°-os?

K2 **1481.** Mekkora annak a háromszögnek a területe, amelynek oldalai a, b, és az általuk bezárt szög 120°-os?

K2 **1482.** Egy ABC háromszög a oldalának hossza 5 cm, b oldalának hossza 4 cm. Határozzuk meg a b oldalhoz tartozó magasság hosszát, ha az a oldalhoz tartozó magasság 2 cm hosszú.

K2 **1483.** Egy ABC háromszög két oldalának hossza $a = 16$ cm, $b = 12$ cm. Az a oldalhoz és b oldalhoz tartozó magasságok összege 14 cm. Határozzuk meg a két magasság hosszát.

K2 **1484.** Bizonyítsuk be, hogy két háromszög egyenlő területű, ha két oldaluk egyenlő és a két oldal által bezárt szög α vagy $180° - \alpha$.

K1 **1485.** Határozzuk meg a trapéz területét, ha alapjai 6 cm és 14 cm, magassága 8 cm.

K1 **1486.** Határozzuk meg a húrtrapéz területét, ha alapjai 7 cm és 9 cm, szárai pedig 5 cm hosszúak.

K2 **1487.** Egy húrtrapéz párhuzamos oldalai 4 cm és 2 cm, a szárak hossza 3 cm. Mekkora a trapéz kiegészítő háromszögének területe?

K1 **1488.** Határozzuk meg a húrtrapéz területét, ha alapjai 42 cm, illetve 54 cm, a hosszabbik alapon fekvő szögei pedig 45°-osak.

K2 **1489.** Határozzuk meg a húrtrapéz területét, ha nagyobbik alapja 44 m, szára 17 m és átlója 39 m.

E1 **1490.** Határozzuk meg a húrtrapéz területét, ha átlói merőlegesek egymásra, és magassága m.

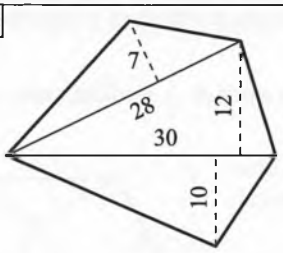
K2 **1491.** Határozzuk meg a húrtrapéz területét, ha alapjai 10 cm és 26 cm, átlói pedig a szárakra merőlegesek.

E1 **1492.** Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges konvex négyszög oldalfelező pontjai által meghatározott paralelogramma területe fele a négyszög területének.

E1 **1493.** Mutassuk meg, hogy ha két konvex négyszögben az átlók és az általuk bezárt szögek páronként egyenlők, akkor a két négyszög területe is egyenlő.

K1 **1494.** Határozzuk meg annak a konvex négyszögnek a területét, amelynek átlói 8 cm és 12 cm, és az átlók merőlegesek egymásra.

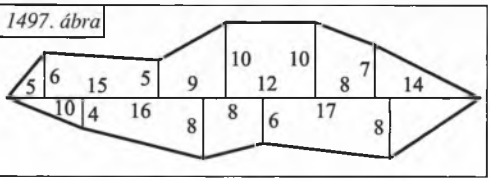
1496. ábra



K2 **1495.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex négyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor területe az átlók szorzatának felével egyenlő.

K1 **1496.** Számítsuk ki az *1496. ábrán* látható sokszög területét. (A jelölt mérőszámok centiméterben értendők.)

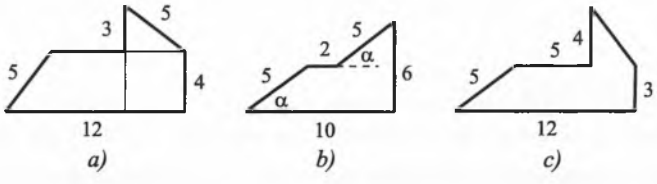
1497. ábra



K1,GY 1497. Számítsuk ki az *1497. ábrán* látható földdarab területét. (A jelölt mérőszámok méterben értendők.)

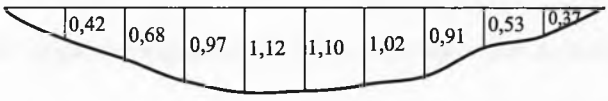
K1 **1498.** Számítsuk ki az *1498. ábrán* látható sokszögek területét. (A jelölt mérőszámok centiméterben értendők.)

1498. ábra

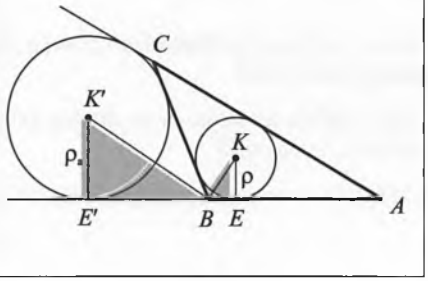


K1,GY 1499. Egy folyó vízhozamának meghatározására keresztmetszetéről rajzot készítenek *(1499. ábra)*. Mekkora a keresztmetszet területe, ha két szomszédos mérési pont távolsága 2 m? (A jelölt mérőszámok méterben értendők.)

1499. ábra



1501. ábra



E2 **1500.** Egy háromszög oldalai *a*, *b*, *c*, területe *t*.
a) Mekkora a beírt kör sugara?
b) Mekkora a köré írt kör sugara?
c) Mekkora az *a* oldalt kívülről érintő hozzáírt kör sugara?

E2 **1501.** *(Az 1500. feladatra épül.)* Mutassuk meg, hogy a háromszög beírt és hozzáírt köreinek középpontjai, a körök egyik oldalon levő érintési pontjai és az azok között fekvő csúcs, két hasonló háromszöget határoznak meg *(1501. ábra)*.

E2 **1502.** *(Az 1501. feladatra épül.)* Az előző feladat alapján bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög oldalai a, b, c, területe t és $a + b + c = 2s$, akkor $t = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$. (Heron képlete)

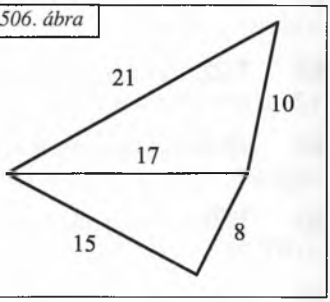
K2 **1503.** *(Az 1502. feladatra épül.)* Mekkora a háromszög területe, ha oldalainak hossza *a)* 5 cm, 6 cm, 9 cm; *b)* 29 cm, 25 cm, 6 cm; *c)* 27 cm, 36 cm, 45 cm?

K2 **1504.** *(Az 1502. feladatra épül.)* Határozzuk meg a háromszög legkisebb magasságát, ha oldalai 25 cm, 29 cm, 36 cm hosszúak.

K2 **1505.** *(Az 1502. feladatra épül.)* Mekkora annak a paralelogrammának a területe, amelynek oldalai 12 cm és 8 cm, egyik átlója 6 cm?

K2 **1506.** *(Az 1502. feladatra épül.)* Határozzuk meg az *1506. ábrán* látható négyszög területét. (Az ábrán szereplő mérőszámok centiméterben értendők.)

1506. ábra

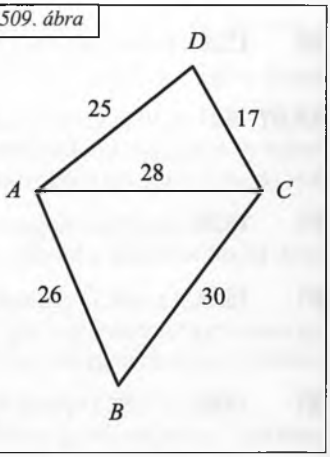


K2 **1507.** *(Az 1502. feladatra épül.)* Két metsző kör sugara 17 cm, illetve 39 cm, a középpontok közötti távolság $K_1K_2 = 44$ cm. Mekkora a két kör közös AB húrja?

K2 **1508.** Számítsuk ki a paralelogramma területét, ha átlói 40 cm és 74 cm, egyik oldala 51 cm.

K2 **1509.** Az *1509. ábrán* levő négyszögnek ismerjük az oldalait és az egyik átlóját. Mekkora a négyszög területe? (Az ábrán szereplő mérőszámok cm-ben értendők.)

1509. ábra



K2 **1510.** Mekkora annak a trapéznak a területe, amelynek alapjai $a = 60$ cm, illetve $c = 20$ cm, szárai $d = 13$ cm, illetve $b = 37$ cm?

K2 **1511.** Egy érintőnégyszög három oldala (ebben a sorrendben) 9 cm, 12 cm, 7 cm, területe 48 cm^2. Mekkora a beírt körének sugara?

K2 **1512.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszöget bármelyik súlyvonala két egyenlő területű részre osztja.

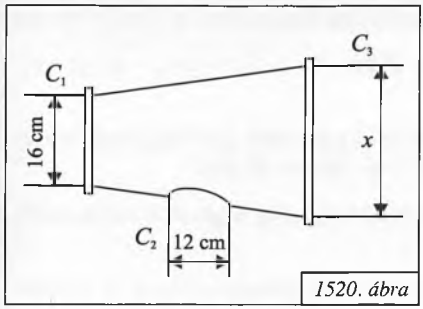
K2 **1513.** Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma átlóinak metszéspontján átmenő minden egyenes két egyenlő területű részre vágja a paralelogrammát.

E1 **1514.** *(Az 1513. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes két egyenlő területű részre vág egy paralelogrammát, akkor szükségképpen át kell mennie az átlók metszéspontján.

K1 **1515.** Mekkora a kör sugara, ha a kerület és a terület mérőszáma megegyezik?

K1 **1516.** Mekkora a kör sugara, ha területe *a)* 2 cm^2; *b)* 50 cm^2; *c)* 17 dm^2?

K1 **1517.** Határozzuk meg a kör területét, ha a kerülete 8 cm.



1520. ábra

K1 1518. Határozzuk meg a kör kerületét, ha a területe 18 cm^2.

K1 1519. Egy henger alakú tárgy tengelyre merőleges keresztmetszetének területe 12,56 cm^2. Mekkora az átmérője?

K2,GY 1520. Az *1520. ábrán* látható C_1 és C_2 csövek szállítják a vizet a C_3 csőbe. Mekkora C_3 átmérője, ha a víz áramlási sebessége mindenütt egyforma?

K1 1521. Egy körlap területe 4,3 m^2-rel kisebb, mint a körülírt négyzet területe. Mekkora a körlap területe?

K2 1522. Egy körgyűrű külső és belső sugarának különbsége 2 m, középkörének kerülete 12 m. Mekkora a területe?

K2 1523. Két koncentrikus kör körgyűrűt határol. A nagyobbikban elhelyezett a hosszúságú húrt érinti a kisebbik kör. Mekkora a körgyűrű területe?

K1 1524. Határozzuk meg a körcikk területét, ha sugara r, középponti szöge pedig *a)* 67°30′; *b)* 15,75°.

K2 1525. Határozzuk meg annak a körszeletnek a területét, amelynek sugara r, középponti szöge pedig *a)* 90°; *b)* 60°.

K2 1526. Határozzuk meg annak a körszeletnek a területét, amelynek húrja a, és középponti szöge *a)* 120°; *b)* 90°; *c)* 60°.

K2,GY 1527. A 10 m széles úttest kanyarodó szakaszát aszfaltburkolattal kell ellátni. A kanyar belső és külső íve két koncentrikus kör azonos középponti szögéhez tartozik. Az útszakasz két sávját elválasztó terelővonal hossza 310 m. Mekkora a burkolandó úttest területe?

E1 1528. Igazoljuk, hogy a trapéz átlói a trapézt négy olyan háromszögre bontják, amelyek közül kettőnek a területe egyenlő.

K1 1529. Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsát és a DC oldal F felezéspontját összekötő egyenes egy háromszöget vág le a paralelogrammából. Igazoljuk, hogy az így keletkezett háromszög területe negyedrésze a paralelogramma területének.

K1 1530. Az $ABCD$ paralelogramma DC oldalának P pontját kössük össze az A és B csúcsokkal. Igazoljuk, hogy az ABP háromszög területe fele a paralelogramma területének.

K2 1531. *(Az 1530. feladatra épül.)* Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalának E és DC oldalának F felezőpontját kössük össze a másik két oldal egy-egy tetszés szerinti P, illetve Q pontjával. Igazoljuk, hogy a négy összekötő szakasz által határolt $EQFP$ négyszög területe fele a paralelogramma területének.

E1 1532. A trapéz egyik szárának végpontjaiban állítsunk a szárra merőlegeseket, és a másik szár felezőpontjából messük el ezeket az első szárral párhuzamos egyenessel. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett téglalap egyenlő területű a trapézzal.

E1 1533. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ trapéz AD szárának F felezőpontja és a másik szár B és C végpontja olyan háromszöget határoznak meg, amely feleakkora területű, mint a trapéz.

K2 **1534.** Mutassuk meg, hogy egy konvex négyszögben az az átló, amely a másikat felezi, a négyszög területét is felezi.

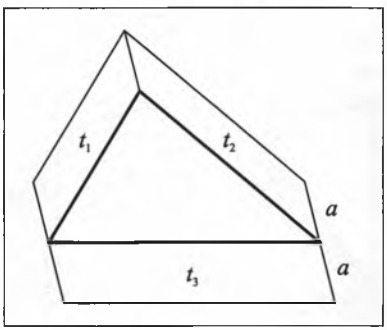
K2 **1535.** Az ABC háromszög C-ből induló súlyvonalának P pontját kössük össze A-val és B-vel. Igazoljuk, hogy az APC és BPC háromszögek egyenlő területűek.

E1 **1536.** Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő szárú háromszögben az alap bármelyik pontjára nézve a száraktól mért távolságok összege állandó.

E1 **1537.** Igazoljuk, hogy ha bárhol is veszünk fel az egyenlő oldalú háromszög belsejében egy pontot, a három oldaltól mért távolságainak összege mindig ugyanakkora.

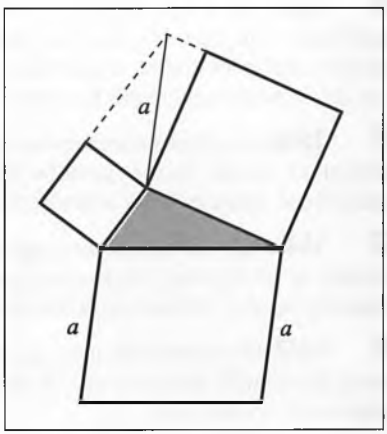
K2 **1538.** Tetszőleges konvex négyszög csúcsain át húzzunk párhuzamosakat az átlókkal. Igazoljuk, hogy a négyszög köré írt paralelogramma területe a négyszög területének kétszerese.

K2 **1539.** Bizonyítsuk be, hogy az *1539. ábrán* jelölt területekre fennáll a $t_1 + t_2 = t_3$ összefüggés.



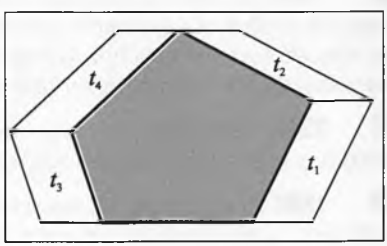
1539. ábra ▶

E1 **1540.** Egy háromszög két oldalára kifelé négyzetet állítunk, harmadik oldalára pedig egy paralelogrammát. A paralelogramma másik oldala az *1540. ábrán* a-val jelölt szakasszal egyenlő és egyező irányú. Mutassuk meg, hogy a négyzetek területének összege a paralelogramma területével egyenlő.

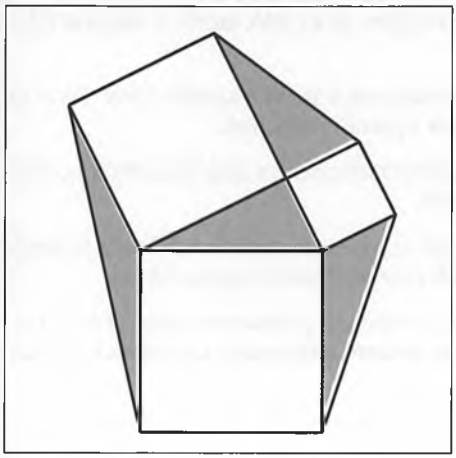


1540. ábra ▶

K2 **1541.** Egy ötszög négy oldalára egy-egy oldalban megegyező paralelogrammákat szerkesztünk *(1541. ábra)*. Mutassuk meg, hogy $t_1 + t_2 = t_3 + t_4$.

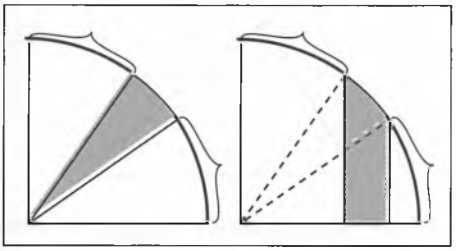


1541. ábra ▶



E1 **1542.** Egy derékszögű háromszög oldalaira kifelé szerkesszünk négyzeteket *(1542. ábra)*. Mutassuk meg, hogy a színezett háromszögek területei egyenlők.

◀ *1542. ábra*



E1 **1543.** Az *1543. ábrán* kapcsos zárójellel megjelölt körívek egyenlők. Mutassuk meg, hogy a színezett területek is egyenlők.

◀ *1543. ábra*

K2 **1544.** Egy körön kijelölünk két pontot, és a kört eltoljuk a két pontot összekötő húrra merőleges irányban úgy, hogy az eltolt kör az eredetit messe. Igazoljuk, hogy az a terület, melyet a két pont közötti körív súrol, ugyanakkora, mint annak a téglalapnak a területe, melyet a két pontot összekötő húr súrol.

E1 **1545.** Húzzunk párhuzamost egy négyszög egyik átlójának felezéspontján át a másik átlóval, és viszont. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott egyenesek metszéspontját a négyszög oldalfelező pontjaival összekötő szakaszok a négyszöget egyenlő területű részekre bontják.

K2 **1546.** Hosszabbítsuk meg egy háromszög mindegyik oldalát egyik irányba (egy meghatározott körüljárási irányt tartva) saját hosszával. A végpontok összekötésével nyert háromszög területe hányszorosa az eredetinek?

E1 **1547.** Hosszabbítsuk meg egy négyszög minden oldalát saját hosszával (egy meghatározott körüljárási irányt tartva). A végpontok összekötésével nyert új négyszög területe hányszorosa az eredetinek?

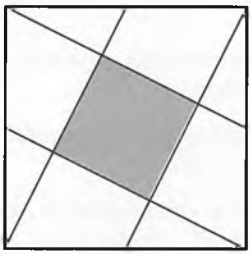
K2 **1548.** Az ABC háromszög C csúcsát kössük össze a szemközti oldal egy tetszés szerinti P pontjával. Az összekötő szakaszt az R és Q pontokkal osszuk fel három egyenlő részre. Kössük össze az oldalhoz közelebbi Q osztópontot az oldal két végpontjával. Hányadrésze a keletkezett háromszög területe az eredetinek?

K2 **1549.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyszög átlói egyenlő területű háromszögekre bontják a négyszöget, akkor a négyszög paralelogramma.

K2 **1550.** Egy négyzet átlóján szerkesszük meg azt a P pontot, amelyet a négyzet három csúcsával összekötve, három egyenlő területű idomot kapunk.

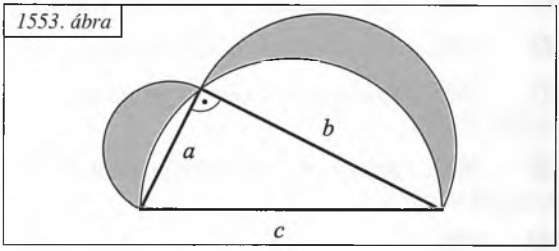
K2 **1551.** Az ABC háromszög AB oldalát osszuk három egyenlő részre az E_1, E_2 pontokkal. Az A-hoz közelebbi E_1 osztópontot kössük össze az AC oldal F felezőpontjával. Az összekötő szakasz hányadrészét metszi le a háromszög területének?

1552. ábra



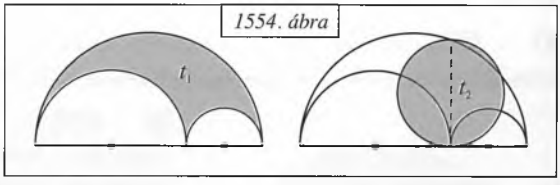
E1 **1552.** Kössük össze a négyzet csúcsait egy-egy szemközti oldal felezőpontjával az *1552. ábrán* látható módon. Hányadrésze a négyzet közepén így körülzárt kis négyzet területe az eredeti négyzet területének?

1553. ábra



E1 **1553.** Az *1553. ábrán* látható holdacskákat (Hippokratész holdacskái) a derékszögű háromszög oldalai fölé szerkesztett félkörök határolják. Bizonyítsuk be, hogy a holdacskák területének összege a háromszög területével egyenlő.

1554. ábra



E1 **1554.** Bizonyítsuk be, hogy az *1554. ábrán* a színessel jelölt területek egyenlők.

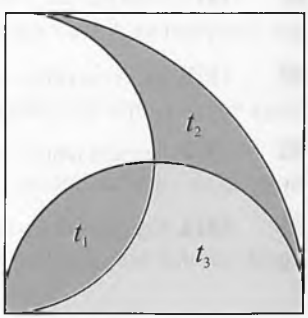
K2 **1555.** Mutassuk meg, hogy ha a derékszögű háromszög oldalaira hasonló sokszögeket szerkesztünk úgy, hogy a hasonlóságnál a háromszögoldalak egymásnak feleljenek meg, akkor a befogók fölé szerkesztett sokszögek területének összege az átfogó fölé szerkesztett sokszög területével egyenlő.

E1 **1556.** *(Az 1555. feladatra épül.)* Szerkesszünk szabályos háromszöget, amelynek területe két adott szabályos háromszög területének összegével egyenlő.

E1 **1557.** *(Az 1555. feladatra épül.)* A háromszög két oldalára t_1, illetve t_2 területű négyzetet rajzolunk, és a közös csúcsból merőlegest bocsátunk a harmadik oldalra. Ennek két szeletére szintén rajzolunk négyzeteket, melyeknek területe t_3, illetve t_4. (A t_1 és t_3 területűeknek közös csúcsuk van.) Igazoljuk, hogy $t_1 - t_3 = t_2 - t_4$.

E1 **1558.** Rajzoljunk egy hegyesszögű háromszög két oldalára kifelé egy-egy négyzetet. Igazoljuk, hogy ezeknek a négyzeteknek egyenlő területűek azok a közös csúcsú darabjai, melyeket a háromszög megfelelő magasságvonalainak meghosszabbítása levág belőlük.

E1 **1559.** Bizonyítsuk be, hogy az *1559. ábrán* a t_1 és t_2 területrészek egyenlők, a t_3 területrész pedig a négyzet területének negyede.



1559. ábra ▶

K2 **1560.** Osszunk egy háromszöget egyik oldalával párhuzamos egyenessel két egyenlő területű részre.

K2 **1561.** Szerkesszünk négyzetet, melynek területe akkora, mint két megadott négyzet területének különbsége.

E1 **1562.** Szerkesszünk négyzetet, melynek területe egy adott négyzet területének harmadrészével egyenlő.

E2 **1563.** Adott egy négyzet és az oldalánál hosszabb szakasz. Erre a szakaszra szerkesszünk egymás mellé két négyzetet, melyek területének összege akkora, mint az adott négyzeté.

K2 **1564.** Szerkesszünk kört, melynek területe kétszer akkora, mint egy adott köré.

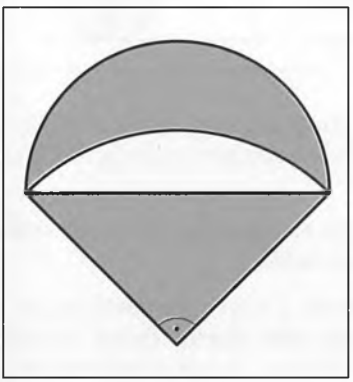
K2 **1565.** Adott kör területét bontsuk koncentrikus körrel két egyenlő területű részre.

K1 **1566.** Vágjunk egy háromszöget az egyik csúcsán átmenő egyenesekkel n egyenlő területű részre.

K2 **1567.** Vágjunk egy paralelogrammát egyik csúcsán átmenő egyenesekkel n egyenlő területű részre.

K2 **1568.** Osszunk egy háromszöget egy oldalának felezőpontjából kiinduló egyenesekkel három egyenlő területű részre.

E1 **1569.** Egy háromszög belsejében szerkesszünk olyan pontot, amelyet a háromszög csúcsaival összekötve három egyenlő területű háromszöget kapunk.



◀ *1570. ábra*

K2 **1570.** Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójára félkört, a derékszögű csúcsból pedig a befogókkal negyedkört rajzolunk. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett holdacska területe a háromszög területével egyenlő *(1570. ábra)*.

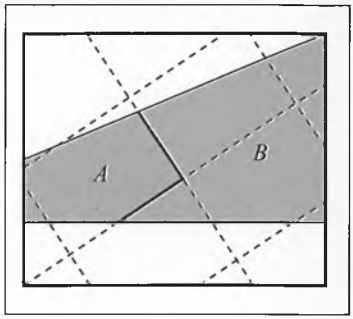
K2 **1571.** Adott az ABC háromszög. Szerkesszünk vele egyenlő területű ABC' háromszöget, melyben az A csúcsnál adott α' szög van.

K2 **1572.** Szerkesszünk egy adott paralelogrammával egyenlő területű rombuszt úgy, hogy egyik átlójuk hossza egyenlő legyen.

K2 **1573.** Szerkesszünk egy adott paralelogrammával egyenlő területű rombuszt úgy, hogy egyik oldaluk hossza egyenlő legyen.

E1 **1574.** Szerkesszünk egy adott négyszöggel egyenlő területű háromszöget úgy, hogy egyik oldaluk hossza egyenlő legyen.

E1,GY 1575. Egy korábban szabályos parcellákra osztott területen az újabb építkezések során megváltoztak a telekhatárok. Például az *1575. ábrán* lévő A és B telek közös határa még a régi felosztást követve töröttvonal alakú (Az ábrán a telkek egy-egy részlete látható vastag vonallal kiemelve). Hogyan lehetne kiegyenesíteni a határvonalat úgy, hogy sem az A sem a B telek területe ne változzon?



1575. ábra ▶

E1 1576. Vágjunk egy konvex négyszöget az egyik csúcsán átmenő egyenessel két egyenlő területű részre.

E2 1577. Osszuk a trapézt az egyik szárának felezőpontjából induló egyenessel két egyenlő területű részre.

V 1578. Rajzoljunk a háromszög egyik oldala fölé kifelé egy tetszés szerinti körívet. Ennek felezőpontjából húzott egyenessel osszuk a háromszögből és a körszeletből álló idomot két egyenlő területű részre.

E2 1579. Adott egy ABC háromszög. Szerkesszünk vele egyenlő területű $AB'C'$ háromszöget úgy, hogy $\alpha' = \alpha$ és AB' adott c' hosszúságú szakasz legyen.

E2 1580. *(Az 1579. feladatra épül.)* Szerkesszünk egy adott háromszöggel egyenlő területű egyenlő szárú háromszöget, ha adott a szerkesztendő háromszög alapjának hossza.

E2 1581. Adott egy a, b oldalú paralelogramma és egy d hosszúságú szakasz. Szerkesszünk olyan d oldalú paralelogrammát, amelynek egyik szöge és területe az eredetiével egyenlő.

E2 1582. *(Az 1581. feladatra épül.)* Szerkesszünk egy adott téglalappal egyenlő területű adott oldalú és adott szögű paralelogrammát.

E2 1583. *(Az 1581. feladatra épül.)* Szerkesszünk egy adott háromszöggel egyenlő területű téglalapot, melynek adott az egyik oldala.

V 1584. Alakítsunk át egy négyzetet vele egyenlő területű szabályos háromszöggé.

II. Térgeometria

Térelemek

Illeszkedési feladatok

K1 **1585.** Hány egyenest húzhatunk a tér *a)* 4; *b)* 5; *c)* 6; *d)* n olyan pontján át, melyek között nincs három egy egyenesbe eső?

K1 **1586.** Adott a térben 7 különböző pont; ezek közül 3 egy egyenesen, 4 egy másik egyenesen helyezkedik el. Hány egyenest határoznak meg a 7 pont közül kiválasztható pontpárok?

K1 **1587.** Adott a térben n különböző pont: ezek közül a egy egyenesen, b egy másik egyenesen helyezkedik el ($a + b = n$, $a > 1$, $b > 1$). Hány különböző egyenest határoznak meg az n pont közül kiválasztható pontpárok?

K2 **1588.** Vegyük fel a térnek *a)* 4; *b)* 5; *c)* 6; *d)* n olyan pontját, melyek közül bármely négy nem esik egy síkba. Hány síkot határoznak meg a belőlük kiválasztható ponthármasok?

K1 **1589.** Adott a térben m egyenes és rajtuk kívül n pont. Legfeljebb hány síklap fektethető ezeken át úgy, hogy minden sík tartalmazzon egy egyenest és egy pontot?

K1 **1590.** Adott a térben négy párhuzamos egyenes, melyek közül bármely három nem esik egy síkba és egy egyenes, amelyik a párhuzamosok közül kettőt metsz. Hány síkot határoznak meg az öt egyenesből kiválasztható párok?

K1 **1591.** Adott a térben *a)* 3; *b)* 4; *c)* 5; *d)* 6; *e)* n egy ponton átmenő olyan egyenes, melyek közül bármelyik három nincs egy síkban. Hány síkot határoznak meg az ezekből kiválasztható párok?

K1 **1592.** Legfeljebb hány metszésvonala van *a)* 3; *b)* 4; *c)* 5; *d)* 6; *e)* n síknak?

K2 **1593.** Hány metszésvonala van n adott síknak, ha közülük a darab párhuzamos, b darab ugyanazon egyenesben metszi egymást, és az utóbbiak között nincs az előbbiekkel párhuzamos, továbbá $a + b = n$?

K2 **1594.** Bizonyítsuk be, hogy két kitérő egyenes bármelyikén át felvehető a másikkal párhuzamos sík.

K2 **1595.** Bizonyítsuk be, hogy ha metszősíkok egy-egy egyenese egymással párhuzamos, akkor a két sík metszésvonalával is párhuzamosak.

E2 **1596.** *(Az 1594. és az 1595. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes két metszősík mindegyikével párhuzamos, akkor a metszésvonallal is párhuzamos.

K2 **1597.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes egy síkot metsz, akkor ez a metszéspont rajta van az egyenesen átmenő bármely sík és az eredeti sík metszésvonalán.

K2 **1598.** Bizonyítsuk be, hogy ha három sík páronként metszi egymást, és a páronkénti metszésvonalak közül kettőnek van metszéspontja, akkor a harmadik is átmegy ezen a metszésponton.

K2 **1599.** Bizonyítsuk be, hogy ha két párhuzamos síkot metszünk egy harmadik síkkal, akkor a metszésvonalak párhuzamosak.

K2 **1600.** Adott két kitérő egyenes és egy pont, amely nincs rajta az egyenesek egyikén sem. Keressünk olyan egyenest, amely átmegy az adott ponton, és mindkét egyenest metszi.

E1 **1601.** Adott két kitérő egyenes és egy harmadik. Keressünk a harmadik egyenessel párhuzamos, mindkét adott egyenest metsző egyenest.

E1 **1602.** Adott a térben egy metsző egyenes-pár, továbbá két, egymáshoz és az előbbi egyenesekhez képest kitérő egyenes. Keressünk olyan egyenest, amely mind a négy egyenest metszi.

E1 **1603.** *(Az 1600. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy három olyan egyeneshez, amelyek közül bármely kettő kitérő, számtalan olyan egyenes vehető fel, amelyik mindhármat metszi.

E1 **1604.** *(Az 1601. feladatra épül.)* Keressünk olyan egyenest, amelyik két adott síkkal párhuzamos, és két adott kitérő egyenest metsz.

K2 **1605.** Bizonyítsuk be, hogy ha több egyenes közül bármely kettő metszi egymást, akkor vagy valamennyi egy ponton megy át, vagy mindannyian egy síkban vannak.

E2 **1606.** *(Az 1605. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy ha ABC és $A'B'C'$ különböző síkban fekvő háromszögek és a BC, $B'C'$ oldalak egyenesei metszik egymást, hasonlóan a CA, $C'A'$, valamint az AB, $A'B'$ oldalak egyenesei is, akkor
a) ezek a metszéspontok egy egyenesen vannak;
b) az AA', BB', CC' egyeneseknek vagy egy közös pontjuk van vagy párhuzamosak.

E2 **1607.** *(Az 1605. feladatra épül.)* Az ABC és az $A'B'C'$ legyenek különböző síkban fekvő olyan háromszögek, hogy AB párhuzamos $A'B'$-vel, hasonlóan BC párhuzamos $B'C'$-vel, és CA párhuzamos $C'A'$-vel. Bizonyítsuk be, hogy akkor az AA', BB', CC' egyenesek vagy egy ponton mennek át vagy párhuzamosak.

E2 **1608.** *(Az 1606. feladatra épül.)* Adott két háromszög: ABC és $A'B'C'$. Síkjuk legyen különböző. Adott továbbá egy ezektől különböző S sík. Határozzunk meg az S síkban olyan $A''B''C''$ háromszöget, hogy az AA'', BB'', CC'' egyenesek vagy egy pontban találkozzanak vagy párhuzamosak legyenek, és ugyanezt mondhassuk az $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ egyenesekről is.

Térelemek távolsága és hajlásszöge

K2 **1609.** Bizonyítsuk be, hogy egy síknak valamely pontjában csak egy merőleges egyenes állítható a síkra.

K1 **1610.** Bizonyítsuk be, hogy egy síkon kívül fekvő bármely pontból csak egy merőleges egyenes állítható a síkra.

K2 **1611.** *a)* Két térbeli pontnak egy síktól való távolsága: $a = 3{,}7$ m és $b = 5{,}8$ m; a pontokból a síkra bocsátott merőlegesek talppontjainak távolsága $c = 4{,}2$ m. Határozzuk meg a térbeli pontok távolságát.

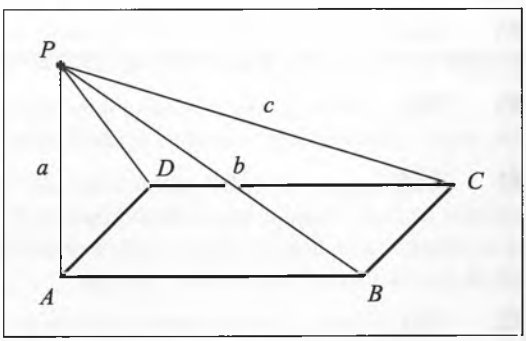
b) Mekkora egy A pontnak egy α síktól való távolsága, ha az A pont a sík egy A' pontjától a távolságban van, és az A' pontnak az A pontból húzott merőleges T talppontjától való távolsága b? Határozzuk meg a távolságot, ha $a = 11{,}38$ m, $b = 4{,}62$ m.
c) Az A pont a, a B pont b távolságra van egy adott síktól. Milyen távol van az AB szakasz F felezőpontja az adott síktól?
d) Az A pont a, a B pont b távolságra van egy adott síktól, a sík ugyanazon oldalán. Legyen C az AB szakaszt $p:q$ arányban osztó pont. Milyen távolságra van a C pont a síktól?

K1 **1612.** *(Az 1611. c) és d) feladatra épül.)* Az ABC háromszög csúcspontjai egy adott Σ sík ugyanazon oldalán a síktól a, b, c távolságra vannak. Határozzuk meg a háromszög S súlypontjának a Σ síktól való távolságát.

K1 **1613.** Egy $ABCD$ paralelogramma A, B, C, D csúcsai egy sík ugyanazon oldalán a síktól a, b, c, d távolságra vannak. Határozzuk meg, hogy milyen összefüggés van az a, b, c, d értékek között.

K1 **1614.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy síkon kívül levő pontból a síkra egy merőlegest és több ferde egyenest húzunk, akkor
a) ezek közül a merőleges távolság a legrövidebb;
b) két ferde szakasz akkor és csak akkor egyenlő, ha talppontjaik egyenlő távol esnek a merőleges talppontjától;
c) két ferde szakasz közül az a nagyobbik, amelynek talppontja távolabb esik a merőleges talppontjától.

K2 **1615.** Egy $ABCD$ téglalap A csúcsában állítsunk merőlegest a téglalap síkjára. Legyen a P pont a merőleges azon pontja, amelyre $PA = a$ adott. Adott még a $PB = b$ és $PC = c$ távolság. Határozzuk meg a PD távolságot és a téglalap méreteit. *(1615. ábra)*



1615. ábra ▶

K2 **1616.** Egy a oldalú szabályos háromszög csúcsaitól egy P pont b távolságra van. Milyen távol van a P pont a háromszög síkjától?

K2 **1617.** Adott két metsző sík és egy rájuk nem illeszkedő pont. Állítsunk a pontból a síkokra merőleges egyeneseket. Bizonyítsuk be, hogy a merőlegesek talppontjait összekötő egyenes merőleges a két sík metszésvonalára.

E2 **1618.** Adott két kitérő egyenes. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan egyenes van, amely mindkettőt metszi, és mindkettőre merőleges. Ezt az egyenest a két kitérő egyenes normál transzverzálisának nevezik.

E2 **1619.** Bizonyítsuk be, hogy két kitérő egyenes normál transzverzálisának az egyenesek közé eső szakasza a legrövidebb a két egyenes egy-egy pontját összekötő szakaszok között.

K1 **1620.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes egy síkkal párhuzamos, akkor ugyanakkora távolságra van a sík bármely vele nem párhuzamos egyenesétől.

E2 **1621.** Adott ponton át vegyünk fel olyan egyenest, amelyik három adott egyenessel egyenlő szögeket zár be.

K2 **1622.** Legyen adott a térben két pont. Vegyünk fel a két pont által meghatározott szakasz felezőpontján át egy tetszőleges síkot. Bizonyítsuk be, hogy a szakasz végpontjai a síktól egyenlő távolságra vannak.

K1 **1623.** *(Az 1622. feladatra épül.)* Illesszünk egy paralelogramma egyik átlójához tetszőleges síkot. Bizonyítsuk be, hogy a másik átló végpontjai e síktól egyenlő távolságra vannak.

K1 **1624.** *(Az 1622. feladatra épül.)* Adott a térben az e egyenes és a rá nem illeszkedő A és B pont. Fektessünk az e egyenesen át olyan síkot, amelyik az A és B ponttól egyenlő távolságban van.

E2 **1625.** *(Az 1622. feladatra épül.)* Legyen adott a térben négy pont. Meghatározandó egy sík úgy, hogy két pont a sík egyik, kettő pedig a sík másik oldalán legyen, de mind a négy pont ugyanolyan távolságra a síktól.

K2 **1626.** Adott egy sík ugyanazon oldalán az A és a B pont. Keressük a sík olyan P pontját, amelyre $AP + PB$ a lehető legkisebb.

K2 **1627.** Adott egy sík különböző oldalán, attól különböző távolságra az A és a B pont. Keressük a sík P pontját úgy, hogy e pontoktól mért távolságainak különbsége a lehető legnagyobb legyen.

K1 **1628.** Adottak a térben az A, B pontok és az e egyenes. Keressük az e egyenes olyan pontját, amely az A és B pontoktól egyenlő távolságra van.

K1 **1629.** Adott egy ABC háromszög és egy tetszőleges S sík. Keressük a sík azon pontját, amely a háromszög csúcsaitól egyenlő távolságra van.

E1 **1630.** Legyen adott két párhuzamos sík: α_1 és α_2. A tér tetszőleges pontját tükrözzük először az α_1-re, majd a kapott tükörképet az α_2-re. Bizonyítsuk be, hogy ugyanazon ponthoz jutunk, ha az eredeti pontot a síkokra merőlegesen α_1-ből az α_2 felé mutató irányban a síkok távolságának kétszeresével eltoljuk.

E2 **1631.** Legyen adott két metsző sík: α_1 és α_2. Egy A pontnak az α_1-re vonatkozó tükörképét jelöljük A'-vel, A'-nek az α_2-re vonatkozó tükörképét A''-vel. Bizonyítsuk be, hogy A, A', A'' egy az α_1 és α_2 metszésvonalára merőleges síkon vannak. Jelöljük ezen sík és az eredeti síkok metszésvonalának közös pontját O-val. Bizonyítsuk be, hogy $OA = OA' = OA''$, továbbá, hogy az $AOA''\sphericalangle$ az α_1 és α_2 síkok hajlásszögének kétszerese.

E2 **1632.** A térben tetszőlegesen elhelyezett, egymással egyenlő AB és $A'B'$ szakaszokhoz keressünk olyan t egyenest, amelyet forgástengelyként használva A az A'-be, B a B'-be megy át.

E1 **1633.** Bizonyítsuk be, hogy az olyan félegyenes, amely egy sík három közös kezdőpontú félegyenesével egyenlő szögeket zár be, merőleges a síkra.

E2 **1634.** Bizonyítsuk be, hogy annak a két szögnek az összege, amelyeket egy tetszőleges egyenes két egymásra merőleges síkkal bezár, kisebb egy derékszögnél, hacsak az egyenes nem merőleges a két sík metszésvonalára.

K2 **1635.** Bizonyítsuk be, hogy két sík lapszögét, illetve lapszögének mellékszögét felező síkok merőlegesek egymásra.

K1 **1636.** Bizonyítsuk be, hogy két sík szögét felező sík bármely pontja egyenlő távol van a síkoktól.

K1 **1637.** Bizonyítsuk be, hogy ha két sík szögfelező síkjának egy pontjában a szögfelező síkra merőleges egyenest állítunk, ez a síkokat a talpponttól egyenlő távolságban metszi.

E2 **1638.** *a)* Bizonyítsuk be, hogy két metsző síkkal egyenlő szögeket bezáró egyenes a síkokat a metszésvonaltól egyenlő távolságban levő pontokban metszi.
b) Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenesnek két metsző síkkal való metszéspontjai a metszésvonaltól egyenlő távolságra vannak, akkor a két síkkal az egyenes ugyanakkora szöget zár be.

E2 **1639.** Bizonyítsuk be, hogy az olyan lapszögek, amelyeknek az élei párhuzamosak, lapjaik pedig egymásra kölcsönösen merőlegesek, vagy egyenlők vagy kiegészítő szögek.

K2 **1640.** Két félsík által meghatározott lapszög élének egy pontjában állítsunk mindkét szárlapra merőleges félegyenest úgy, hogy vagy mindkettő a másik szárlappal közös féltérben vagy mindkettő ellentétes féltérben legyen. Bizonyítsuk be, hogy a félegyenesek szöge a lapszög kiegészítő szöge.

K1 **1641.** Keressünk egy adott sík adott pontján át olyan egyenest, amely az adott síkhoz adott szögben hajlik. Hány megoldás van?

E1 **1642.** Egy P pont egy síktól m távolságra van. A P ponton átmegy két egyenes, melyek egymással és a síkkal is 60°-os szöget zárnak be. Határozzuk meg ezen két egyenes és a sík metszéspontjainak távolságát.

E1 **1643.** Keressünk olyan egyenest, amelyik egy sík adott egyenesének egy adott pontján átmegy, az egyenesre merőleges, és a síkkal adott szöget zár be. Hány megoldás van?

E2 **1644.** Keressünk adott ponton át olyan síkot, amelyik egy adott síkkal adott szöget zár be. Hány megoldás van?

E1 **1645.** Keressünk adott ponton átmenő, két adott síkra merőleges síkot.

E1 **1646.** Keressünk két adott ponton átmenő, adott síkra merőleges síkot.

E1 **1647.** Legyen egy sík egyik pontjából egy másik síkra bocsátott merőleges szakasz fele az ugyanazon pontból a két sík metszésvonalára bocsátott merőleges szakasznak. Mekkora a két sík hajlásszöge?

E2 **1648.** Adott két metsző sík és a metszésvonaluk egy pontján átmenő e egyenes. Fektessünk az e egyenesen át olyan síkot, hogy ezt az adott síkok olyan egyenesekben messék, melyek szögfelezője az e egyenes.

E1 **1649.** Adott a térben két nem párhuzamos sík, S_1 és S_2, két párhuzamos egyenes, a és b és egy P pont. Keressünk a P ponton átmenő olyan egyenest, amely egyenlő szögeket zár be az adott síkokkal, és egyenlő távolságra van az adott egyenesektől.

E1 **1650.** Adott a térben három egyenes a, b, és c, továbbá egy P pont. Keressünk a P ponton át olyan síkot, amely egyenlő szögeket zár be az a, a b és a c egyenesekkel.

E2 **1651.** *(Az 1606. feladatra épül.)* Adott egy S sík és három rajta kívül elhelyezett (nem egy egyenesen sorakozó) pont: A, B, C. Keressünk olyan P pontot, hogy a PA, PB, PC egyenesek egy adott háromszöghöz hasonló háromszög csúcsait messék ki az S síkon.

E1 **1652.** Vetítsünk merőlegesen egy térbeli pontot két egymást metsző síkra. Bizonyítsuk be, hogy a vetületekből a két sík metszésvonalára bocsátott merőlegesek talppontjai egybeesnek.

E1 **1653.** Legyen adott két metsző sík és mindegyiken egy-egy pont oly módon, hogy a pontokból a két sík metszésvonalára bocsátott merőlegesek talppontjai egybeessenek. Bizonyítsuk be, hogy a két adott pont egy térbeli pontnak a síkokon való merőleges vetülete.

E1 **1654.** Bizonyítsuk be, hogy egy egyenes pontjainak egy síkra való merőleges vetületei egyenest alkotnak, ha az egyenes nem merőleges a síkra. Igazoljuk, hogy síkra merőleges egyenes vetülete egyetlen pont.

E1 **1655.** Milyen megszorítással érvényes az az állítás, hogy ha egy vonal merőleges vetülete két egymást metsző sík mindegyikén egyenes, akkor maga a vonal is egyenes?

E1 **1656.** Bizonyítsuk be, hogy párhuzamos egyeneseknek egy síkra eső merőleges vetületei vagy párhuzamosak, vagy egy egyenest alkotnak, vagy a vetületük két pont.

E1 **1657.** *(Az 1655. feladatra épül.)* Igaz-e mindig a következő állítás: „Ha két egyenes merőleges vetületei két egymást metsző sík mindegyikén párhuzamosak, akkor maguk is párhuzamosak"?

K2 **1658.** Bizonyítsuk be, hogy egy szakasz merőleges vetületének hossza az eredeti hosszúság és a síkkal bezárt szöge cosinusának szorzata.

K2 **1659.** *(Az 1658. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy két párhuzamos és egyenlő hosszú szakasz ugyanazon síkra eső merőleges vetülete vagy egybeesik vagy párhuzamos és egyenlő.

K2 **1660.** Bizonyítsuk be, hogy szakasz felezőpontjának egy síkra való merőleges vetülete vagy a szakasz vetületének a felezőpontja, vagy a három vetületi pont egybeesik.

E1 **1661.** Bizonyítsuk be, hogy egymásra merőleges egyeneseknek az egyikkel párhuzamos síkra való merőleges vetületei is merőlegesek egymásra (esetleg az egyik szár merőleges vetülete pont) és megfordítva, ha két egyenes közül az egyik párhuzamos egy síkkal, és a síkon való merőleges vetületeik merőlegesek, akkor a két egyenes merőleges.

E1 **1662.** *(Az 1661. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy hegyesszögnek, illetve tompaszögnek az egyik szárával párhuzamos síkon való merőleges vetülete is hegyesszög, illetve tompaszög.

E1 **1663.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor egy másik (az előbbivel nem párhuzamos) síkra való merőleges vetülete merőleges a két sík metszésvonalára.

E1 **1664.** *(Az 1662. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszöget olyan síkra vetítünk merőlegesen, amely annak szárait metszi, vagy olyan síkra, amely a szög szárainak meghosszabbításait metszi, a vetülete tompaszög; ezzel szemben hegyesszög lesz a vetülete, ha a sík, amelyre vetítünk, a derékszög egyik szárát és a másiknak a meghosszabbítását metszi.

E2 **1665.** *(Az 1660. és az 1661. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy ha egy AOB szöget egy, az OC szögfelezővel párhuzamos síkra merőlegesen rávetítünk, a vetülete olyan szög lesz, amelynek felezője az OC szögfelező vetülete.

E1 **1666.** *(Az 1661. és az 1658. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy egy szög szögfelezőjének egy síkra eső merőleges vetülete akkor és csak akkor lesz e szög vetületének szögfelezője, ha a szög szárai ugyanakkora szöget zárnak be a síkkal (amelyre vetítünk).

E1 **1667.** *(Az 1661. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy két kitérő egyenesnek a normál transzverzálisukkal párhuzamos síkon való merőleges vetülete vagy párhuzamos egyenespár, vagy egy egyenes és egy rajta kívül fekvő pont. Mikor következik be az utóbbi eset?

E1 **1668.** Legyen a és b két egymásra merőleges kitérő egyenes. Normál transzverzálisuk a-val, illetve b-vel való metszéspontja legyen A, illetve B. Mozogjon egy adott hosszúságú CD szakasz C végpontjával az a, D végpontjával pedig a b egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy $AC^2 + AD^2 + BD^2 + BC^2$ független a szakasz helyzetétől.

E2 **1669.** Legyen a és b két egymásra merőleges kitérő egyenes. Normál transzverzálisuk a-val, illetve b-vel való metszéspontja legyen A, illetve B. Mozogjon egy adott hosszúságú CD szakasz C végpontjával az a, D végpontjával pedig a b egyenesen. Legyen E az AC, F pedig a BD szakasz felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy az EF szakasz hossza állandó.

K1 **1670.** Egy 12 m hosszú rúd egy síkkal 30°-os szöget zár be. Mekkora a rúd síkra eső merőleges vetülete?

K1 **1671.** Mekkora szöget zár be a 102 m hosszú szakasz egy síkkal, ha a síkra eső merőleges vetülete *a)* fele a szakasz hosszának; *b)* egyenlő a két végpont síktól való távolságának különbségével?

E1 **1672.** Adott egy sík és rajta kívül egy P pont. A P pont a sík A, illetve B pontjától a, illetve b távolságra van. A két távolság vetületének aránya $m : n$. Milyen távol van a P pont a síktól? Oldjuk meg a feladatot abban az esetben is, ha $a = 143$ m; $b = 157$ m; $m : n = 11 : 17$.

E1 **1673.** Egy a egyenes egy S síkkal 45°-os szöget zár be. Húzzunk az S síkban az a egyenes talppontján át az a egyenes vetületével 45°-os szöget bezáró b egyenest. Határozzuk meg az a és b egyenesek hajlásszögét.

K2 **1674.** Az ABC háromszög oldalai: $AB = 40$ m, $BC = 25$ m, $AC = 25$ m. Az AB oldal egy S síkon van, a C pont az S-től 7 m távolságban. Mekkora a háromszög merőleges vetületének területe?

K2 **1675.** Egy szabályos háromszög középpontjában a háromszög síkjára merőlegesen áll egy b hosszúságú szakasz. Felső végpontjának távolsága a háromszög csúcspontjaitól c. Mekkora a háromszög területe?

Kocka

K1 **1676.** Hány részre osztja a teret a kocka lapjainak hat síkja?

K1 **1677.** Hányféleképpen tudunk kiválasztani a kocka 8 csúcsa közül hármat úgy, hogy az ezeken átfektetett sík ne menjen át egy negyedik csúcsponton?

K1 **1678.** Hány átlóssíkja van egy kockának? (Átlóssíknak nevezünk minden olyan síkot, amely tartalmazza a kocka négy csúcsát, de lapját nem.)

K1 **1679.** Milyen hosszú az a élű kocka lapátlója, testátlója, körülírt gömbjének sugara és beírt gömbjének sugara?

K2 **1680.** Határozzuk meg egy kocka csúcsainak az egyik testátlótól való távolságát, ha az élhossza a.

K2 **1681.** Egy kocka éle a. Mekkora két kitérő él felezőpontjának távolsága?

E1 **1682.** Egy kocka éle a. Mekkora az egyik testátlójának egy hozzá kitérő éltől való távolsága?

K1 **1683.** Mekkora szöget zár be a kocka két testátlója?

K2 **1684.** Mekkora szöget zár be a kocka testátlója egy éllel?

K1 **1685.** Mekkora szöget zár be a kocka testátlója egy lappal?

E1 **1686.** Mekkora szöget zár be a kocka két különböző irányú élére támaszkodó két átlóssíkja?

E1 **1687.** Egy S és egy S' sík hajlásszöge 45°, metszésvonaluk m. Vegyük fel az S síkban az m egyenessel 45°-os szöget bezáró e egyenest. Határozzuk meg az e és az S' hajlásszögét.

E2 **1688.** Egy a élű kocka két párhuzamos négyzetlapja legyen $ABCD$ és $EFGH$. Az utóbbi lap középpontja legyen M. Határozzuk meg az MA és a BC egyenesek távolságát.

E1 **1689.** Egy a élű kocka egyik élén (nem csúcsponton) ül egy légy. A lehető legrövidebb útvonalat keresi, amely a kocka minden lapján áthaladva visszavezet a kiindulási ponthoz. Mekkora ez a legrövidebb útvonal?

E2 **1690.** Vegyük egy kocka egyik testátlójára illeszkedő síkmetszeteit. Melyiknek a területe lesz a legkisebb?

E2 **1691.** Tekintsük egy kocka két szemközti csúcsát és az ezekbe a csúcsokba be nem futó élek felezőpontjait. Bizonyítsuk be, hogy ezek egy szabályos hatszög csúcspontjai.

E2 **1692.** *(Az 1690. és az 1691. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy a kocka középpontján átmenő, valamelyik testátlójára merőleges sík szabályos hatszögben metszi a kockát. Mekkora ennek a hatszögnek egy oldala?

E1 **1693.** *(Az 1692. feladatra épül.)* Keressük meg a kocka felszínén azokat a pontokat, amelyek valamelyik testátló két végpontjától egyenlő távolságra vannak.

K1 **1694.** Vegyük egy kocka szabályos háromszög síkmetszeteit. Határozzuk meg a legnagyobb területű háromszög oldalát.

E1 **1695.** Bizonyítsuk be, hogy a kocka valamelyik csúcsából kiinduló három él végpontjai által kifeszített sík a csúcsból kiinduló testátlóra merőleges, és harmadolja azt.

E1 **1696.** *(Az 1695. feladatra épül.)* Határozzuk meg az a élű kocka két nem metsző lapátlójának távolságát.

K2 **1697.** Mutassuk meg, hogyan lehet felosztani egy kockát három egybevágó gúlára.

E2 **1698.** *(Az 1695. feladatra épül.)* Vetítsük a kockát merőlegesen az egyik testátlóra merőleges síkra. Bizonyítsuk be, hogy a vetület szabályos hatszög.

K1 **1699.** Mekkora az a élű kocka testátlója és felszíne?

a) $a = 8$ dm; *b)* $a = 12{,}6$ cm; *c)* $a = 423$ mm; *d)* $a = \frac{1}{2}$ m.

K2 **1700.** Mekkora az a élű kocka egyik lapjának középpontján és a szemközti lap egyik élén átmenő síkmetszetének területe?

a) $a = 8$ dm; *b)* $a = 12{,}6$ cm; *c)* $a = 423$ mm; *d)* $a = \frac{1}{2}$ m.

K1 **1701.** Egy kocka testátlója d. Mekkora az éle és a felszíne?

a) $d = 24$ dm; *b)* $d = 18$ cm; *c)* $d = 36$ mm; *d)* $d = \frac{1}{2}$ m.

K1 **1702.** Mekkora a kocka éle, ha felszíne

a) 18 816 dm^2; *b)* 31 104 cm^2; *c)* 15,36 m^2; *d)* 28 644 mm^2.

K1 **1703.** Mekkora a térfogata

a) a 32 kg-os ólom kockának (az ólom sűrűsége 11,35 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$);

b) az 1 kg-os arany kockának (az arany sűrűsége 19,3 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$);

c) az 5 kg-os alumínium kockának (az alumínium sűrűsége 2,7 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$);

d) a 3 kg-os márványkockának (a márvány sűrűsége 2,83 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$)?

K1 **1704.** Két darab parafa kockánk van. Az egyik tömege 100 kg, a másiké 1 kg. Mekkorák az élek (a parafa sűrűsége 0,25 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$)?

K1 **1705.** Mekkora az éle annak a vörösréz kockának, amelynek sűrűsége 8,8 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$, tömege pedig 5 kg?

K1 **1706.** Mekkora a kocka alakú hektoliteres edény belső éle?

K1 **1707.** Mekkora a térfogata annak a kockának, amelynek felszíne

a) 73,5 cm^2; *b)* 100 cm^2; *c)* 1 m^2?

K1 **1708.** Mekkora a kocka felszíne, ha térfogata *a)* 2197 cm^3; *b)* 30 dm^3; *c)* 2 m^3?

K1 **1709.** Mekkora a kocka átlós síkmetszetének területe, ha éle

a) a; *b)* 24,6 cm; *c)* 6,8 dm?

K2 **1710.** Határozzuk meg a kocka élét, lapátlóját, testátlóját, felszínét és térfogatát, ha átlós síkmetszetének területe *a)* t; *b)* 250 cm^2; *c)* 64 mm^2.

K1 **1711.** A görög aranykor matematikájának egyik híres feladata a déloszi probléma: Délosz szigetén pestis dühöngött. A délosziak a delphoi jósdához fordultak tanácsért. Azt a választ kapták, hogy ha a pestistől meg akarnak szabadulni, cseréljék ki Apolló kocka alakú oltárkövét kétszer akkorára. Határozzuk meg az olyan kocka élét, melynek térfogata kétszer akkora, mint egy adott kockáé.

K1 **1712.** Egy kocka éle 2 méterrel hosszabb, mint egy másiké. Térfogatuk különbsége 26 m^3. Mekkorák az élek?

K1 **1713.** Vágjuk ketté az a élű kockát egy átlóssíkkal. Mekkora az egyik rész térfogata és felszíne?

K1 **1714.** Egy zárt, kocka alakú láda falvastagsága mindenütt 2 cm, külső élhossza 1 m, anyagának sűrűsége 0,8 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$. Mekkora a tömege? Legfeljebb mennyi lehet a rakománya, hogy vízben el ne süllyedjen?

Téglatest

E1 **1715.** Milyen hosszú a téglatest egy élének és egy hozzá kitérő testátlójának a normál transzverzálisa?

K1 **1716.** Bizonyítsuk be, hogy a téglatest testátlójának négyzete egyenlő az egy csúcsban találkozó három él négyzetének összegével.

E1 **1717.** Húzzuk meg egy téglatest egyik testátlóját. Bizonyítsuk be, hogy ha a testátló az élekkel α, β és γ szögeket zár be, akkor $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

K1 **1718.** Mekkora az a, b, c oldalélű téglatest a élére illeszkedő átlós síkmetszet területe?

K1 **1719.** Igazoljuk geometriai úton a két pozitív tag összegének köbére vonatkozó képletet.

K1 **1720.** Igazoljuk geometriai úton a két pozitív tag különbségének köbére vonatkozó képletet.

K1 **1721.** Egy kocka belsejében adott a P_1 és a P_2 pont. Vegyük fel azt a téglatestet, amelynek lapjai párhuzamosak a kocka lapjaival, és testátlója a P_1P_2 szakasz. Mekkorák a téglatest élei, ha a P_1 pontnak a kocka egyik csúcsában találkozó három lapsíkjától mért távolsága a_1, b_1, c_1, a P_2 ponté pedig a_2, b_2, c_2. Mekkora a két pont távolsága?

K1 **1722.** Egy P pontnak három páronként egymásra merőleges síktól mért távolsága a, b és c. Milyen távolságra van a P pont a síkok közös pontjától?

K1 **1723.** Határozzuk meg a V térfogatú téglatest éleinek hosszát, ha tudjuk, hogy a, b, c számokkal arányosak.

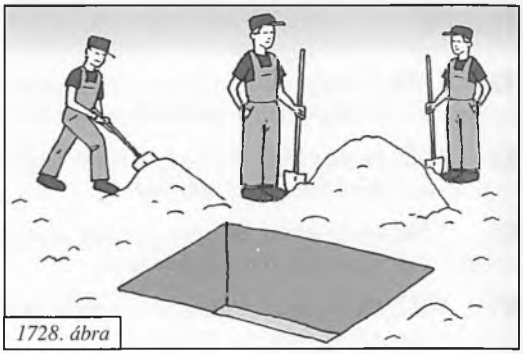
K1 **1724.** Egy téglatest élei:
a) 4,2 dm, 3,6 dm, 2,8 dm; *b)* 36 cm, 27,5 cm, 18,2 cm; *c)* 124 m, 216 m, 487 m.
Mekkora a testátlója, a felszíne és a térfogata?

K1 **1725.** Egy öntöttvasból készült téglatest tömege 100 kg, éleinek aránya 1:2:3. Mekkorák az élek? (Sűrűsége 7,5 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.)

K1 GY **1726.** Hány darab kisméretű tégla vethető 1 m^3 agyagból, ha a kiégetett tégla mérete 25 cm × 12 cm × 6,5 cm, és az agyag térfogatvesztesége az égetéskor 2 %?

K1 GY **1727.** Hány tégla szükséges 10 m^2, 40 cm vastag falhoz? (A kisméretű tégla mérete 25 cm × 12 cm × 6,5 cm.)

K1 GY 1728. Hány kg égetett mészből készíthetünk annyi oltott meszet, amennyivel egy 3,5 m hosszú, 2,5 m széles, 2 m mély meszesgödör megtelik? (1 m^3 oltott mész készítéséhez 400 kg égetett mészre van szükség.) *(1728. ábra)*



1728. ábra

K1 1729. Milyen vastag egy 1,2 gramm tömegű sztaniollap, amely 35 cm hosszú, és 18 cm széles? (Sűrűsége $7\frac{g}{cm^3}$.)

K1 1730. Egy négyzetes oszlop két szemben fekvő oldalélén átmenő síkmetszete négyzet, amelynek területe 283 cm^2. Mekkora a térfogata?

K1 1731. Egy négyzetes oszlop térfogata 627,4 cm^3. A két szemben fekvő oldalélén átmenő síkmetszet területe 116,8 cm^2. Mekkorák az élek?

E1 1732. Mekkora a térfogata annak a téglatestnek, amelynél a három átlós síkmetszet területe 32 cm^2, 43,5 cm^2, illetve 52 cm^2?

E1 1733. Egy téglatest két éle 7 dm és 11 dm hosszú. Ezek valamelyikéhez illeszkedő átlóssík négyzetben metszi a téglatestet. Mekkora a felszíne és a térfogata?

K1 1734. Mekkorák a téglatest élei, ha oldallapjainak területe 55 cm^2, 105 cm^2 és 231 cm^2?

E1 1735. Egy téglatest egyik lapjának átlója 52 m, és ez a síkjában levő egyik éllel 22°37′ szöget zár be. Egy másik lap átlója 101 m. Mekkora a téglatest térfogata?

K1 1736. Egy téglatest térfogata 5856 cm^3, éleinek aránya 3:4:5. Mekkorák az élei?

K1 1737. Egy téglatest felszíne 1400 cm^2, éleinek aránya 2:3:4. Mekkorák az élei?

K1 1738. Egy téglatest testátlója 26 cm, éleinek aránya 4:5:6. Mekkorák az élei?

K1 1739. Egy téglatest két élének aránya $a:b = 3:4$. A b élhez illeszkedő átlós metszet 16 m^2 területű négyzet. Mekkora a felszíne és a térfogata?

K1 1740. Egy téglatest éleinek aránya 1:3:5. Felszínének és térfogatának mérőszáma megegyezik. Mekkorák az élei?

K1 1741. Ha egy téglatest egy-egy élét 6 cm-rel, illetve 4 cm-rel meghosszabbítjuk, kockát kapunk. A kapott kocka térfogata 2059,2 cm^3-rel nagyobb a téglatest térfogatánál. Mekkorák az élei?

E1 1742. Egy téglatest lapjainak területei úgy aránylanak egymáshoz, mint 16:21:28. A testátló 29 cm. Mekkorák az élek?

E1 1743. Egy téglatest egyik csúcsából kiinduló három élének összege 42 cm, testátlója 27 cm. Mekkora a felszíne?

Hasáb

K2 **1744.** Bizonyítsuk be, hogy a paralelepipedon középpontosan szimmetrikus test. (A szimmetria középpontját a paralelepipedon középpontjának nevezzük.)

K2 **1745.** Bizonyítsuk be, hogy a paralelepipedon testátlói egy pontban metszik egymást, és a metszéspont felezi a testátlókat.

E1 **1746.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyoldalú hasáb testátlói egy ponton mennek keresztül, akkor a hasáb paralelepipedon.

K1 **1747.** Bizonyítsuk be, hogy *a)* a téglatest testátlói egyenlők; *b)* ha egy paralelepipedon testátlói egyenlők, akkor az téglatest.

E1 **1748.** Bizonyítsuk be, hogy a paralelepipedon testátlóinak négyzetösszege egyenlő az élek négyzetösszegével.

E2 **1749.** Bizonyítsuk be, hogy a paralelepipedon egy csúcsból kiinduló három élének és testátlójának négyzetösszege egyenlő az ugyanazon csúcsból kiinduló három lapátló négyzetének összegével.

K1 **1750.** Mekkora a paralelepipedon térfogata, ha két éle 21 cm és 28 cm, a közbezárt szögük 53°24′15″, és a testmagasság 32 cm?

K1 **1751.** Egy paralelepipedon két éle 13 cm és 9 cm, hajlásszögük 48,6°. A harmadik él 25 cm, és a másik kettő által kifeszített síkkal 68,3°-os szöget zár be. Mekkora a térfogata?

E1 **1752.** Egy paralelepipedon két éle 8 cm és 11 cm, hajlásszögük 46,7°. A harmadik 16 cm hosszú él a 8 cm-es éllel 62,5°-os szöget zár be. A 8 cm-es élhez illeszkedő két lap hajlásszöge 53°. Mekkora a térfogata?

E1 **1753.** Egy paralelepipedon lapjai egybevágó rombuszok. A rombuszok oldala 11 cm, és hegyesszögük 52,3°. Határozzuk meg a felszínét és a térfogatát.

K1 **1754.** Bizonyítsuk be, hogy a háromoldalú hasáb legnagyobb területű oldallapjának kisebb a területe, mint a másik két oldallap területének összege.

K2 **1755.** Bizonyítsuk be, hogy minden n oldalú hasábban az oldallapok hajlásszögeinek összege: $(n-2)\cdot 180°$.

E2 **1756.** Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő térfogatú téglatestek között a kockának van a legkisebb felszíne.

K1 **1757.** Az n oldalú egyenes hasáb AA' élének egy adott P pontjából ugyanezen él egy adott P' pontjába kell a hasáb palástjának körüljárásával a legrövidebb úton eljutni. Határozzuk meg az utat.

K1 **1758.** Szabályos háromszög alapú egyenes hasábot olyan síkkal metszünk, amelyik átmegy egy alapélen, és az alaplappal 45°-os szöget zár be. Mekkora a kimetszett síkidom területe, ha az alaplap területe $\sqrt{50}$ cm^2?

E1 **1759.** Számítsuk ki az egyenes hasáb térfogatát, ha a magassága m, és az alaplapja n oldalú szabályos sokszög, melynek oldala a.

K1 **1760.** Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alapéle 0,4 cm, magassága 23 cm. Mekkora a térfogata?

K1 **1761.** Egy szabályos nyolcszög alapú egyenes hasáb alapéle 3,4 cm, oldaléle 8,02 cm. Mekkora a térfogata?

K2 **1762.** Egy 82 cm magasságú háromoldalú hasáb alapéleinek hossza 33 cm, 42 cm, illetve 54 cm. Mekkora a felszíne és a térfogata?

E1 **1763.** Egy háromoldalú hasáb alapélei 2,18 m és 1,7 m, az alaplap hosszabb oldallal szemközti szöge 58°23′. A hasáb térfogata 26,75 m^3. Mekkora a magassága?

K1 **1764.** Egy hasáb tömege 175,8 kg, anyagának sűrűsége 0,3 $\frac{kg}{dm^3}$, magassága 3 dm. Mekkora az alapterülete?

E1 **1765.** Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle 18 dm. Az egyik alapélen és a vele nem közös lapon fekvő szemközti csúcsponton átmenő síkmetszet az alaplappal 62,7°-os szöget zár be. Mekkora a térfogata?

K1 **1766.** Egy egyenes hasáb valamennyi éle egyenlő hosszú. Az alaplap 5 cm élű, 63° szögű rombusz. Mekkora a felszíne és a térfogata?

K2 **1767.** Egy 43 cm magasságú egyenes hasáb alaplapja egyenlő szárú trapéz, amelynek párhuzamos oldalai 21 cm és 16 cm, szárai pedig 9 cm hosszúak. Mekkora a felszíne és a térfogata?

K1 **1768.** Milyen tömegű az a szabályos hatszög alapú, egyenes hasáb alakú bazalttömb, amelynek alapéle 0,24 m, magassága 2,46 m, és a bazalt sűrűsége 2,85 $\frac{kg}{dm^3}$?

E1 **1769.** Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasábból az oldalélekkel párhuzamosan lehasítunk részeket úgy, hogy a lehető legnagyobb térfogatú szabályos 12 oldalú hasáb maradjon meg. Számítsuk ki a két hasáb térfogatának arányát.

K1 **1770.** Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle 8 cm. A palást területe az alaplap területének hatszorosa. Mekkora a hasáb felszíne és a térfogata?

E1 GY **1771.** Egy csatorna keresztmetszete olyan egyenlő szárú trapéz, amelynek két párhuzamos oldala 3 m és 2 m, magassága 1,6 m. Mennyi víz folyik rajta keresztül óránként, ha a víz folyásának sebessége 1,4 m másodpercenként, és a víz magassága mindenütt 1 m?

K1 **1772.** Egy 6 m magas vasúti töltés felül 8 m széles. Keresztmetszete olyan húrtrapéz, amelynek szárai 7,3 m hosszúak. Hány m^3 földmunkát kíván egy 50 m hosszú szakasza?

K2 **1773.** Egy egyenes hasáb alaplapja 8 m^2 területű egyenlő szárú háromszög, melynek magassága az alapél fele. A hasáb felszíne 25 m^2. Mekkora a térfogata?

K2 **1774.** Egy egyenes hasáb alaplapja egyenlő szárú háromszög, melynek szára 9,3 dm hosszú, és a csúcsnál levő szöge 37,8°. A hasáb magassága 23,6 dm. Mekkora a hasáb felszíne és a térfogata?

K2 **1775.** Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb felszíne 518,2 dm^2, magassága 22 m. Mekkora az alapéle és a térfogata?

K1 **1776.** Egy 40 dm magas egyenes hasáb alaplapja egy 12 dm sugarú körbe írt szabályos ötszög. Mekkora a felszíne és a térfogata?

K1 **1777.** Egy 50 cm magas egyenes hasáb alaplapja egy 15 cm sugarú kör köré írt szabályos nyolcszög. Mekkora a felszíne és a térfogata?

K1 **1778.** Határozzuk meg annak a háromoldalú ferde hasábnak a térfogatát, melynek alaplapja 8 dm oldalú szabályos háromszög, oldalélei 15 dm hosszúak, és az oldalélek az alaplappal 48°16′ szöget zárnak be.

K1 **1779.** Mekkora a háromoldalú ferde hasáb térfogata, ha alapélei 20 dm, 26 dm, 33 dm, az oldalélek hossza 52 dm, és az alaplappal 69,6° szöget zárnak be?

K1 **1780.** Egy háromoldalú hasáb alapja egy 3 dm sugarú körbe írt háromszög, melynek szögei 50°7′ és 70°13′. A hasáb oldaléle 7 dm hosszú, és az alaplappal 60° szöget zár be. Mekkora a térfogata?

Tetraéder

II

K1 **1781.** Hány részre osztja a teret a tetraéder négy lapjának síkja?

E2 **1782.** Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder súlyvonalai egy ponton mennek át, és egymást 1:3 arányban osztják (egy csúcsot a szemközti lap súlypontjával összekötő szakasz a tetraéder súlyvonala).

E2 **1783.** *(Az 1782. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder két szemközti élének felezőpontját összekötő szakasz átmegy a tetraéder súlypontján, és a súlypont felezi a szakaszt.

E2 **1784.** *(Az 1782. feladatra épül.)* Az $ABCD$ tetraéder BCD, CDA, DAB, ABC lapjainak súlypontjai rendre az A', B', C', D' pontok. Ezek egy újabb tetraéder csúcspontjai. Milyen a két tetraéder kölcsönös helyzete? Határozzuk meg a két tetraéder éleinek arányát.

E2 **1785.** Tekintsük egy tetraéder három lapjának súlypontját. Vetítsük rá ezeket merőlegesen a negyedik lapra. Bizonyítsuk be, hogy a vetületek a negyedik laphoz hasonló és vele hasonló helyzetű, harmadára kicsinyített háromszög csúcspontjai.

E2 **1786.** Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder éleit merőlegesen felező síkok egy ponton mennek át, és ez a pont a tetraéder köré írható gömb középpontja.

E2 **1787.** Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder két-két oldallap síkjának belső szögfelező síkjai egy ponton mennek át, és ez a pont a tetraéderbe írható gömb középpontja.

K2 **1788.** Tekintsük egy tetraéderbe írt gömbnek a lapokkal való érintési pontjait. Ezek egy újabb tetraéder csúcspontjai. Bizonyítsuk be, hogy az újabb tetraéder bármelyik éle merőleges az eredeti tetraéder valamelyik élére.

K2 **1789.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéderhez található élérintő gömb (olyan gömb, amelyik mind a hat élt érinti), akkor a tetraéder szemközti éleinek összege mindhárom élpárra ugyanakkora.

E1 **1790.** Bizonyítsuk be, hogy ha a tetraéder rendelkezik élérintő gömbbel, akkor a tetraéder két lapjának síkja olyan körökben metszi a gömböt, melyek a lapháromszögbe írt körök, és a két lap közös oldala ugyanabban a pontban érinti a két kört.

E2 **1791.** Bizonyítsuk be, hogy ha a tetraéder szemközti éleinek összege mindhárom élpárra ugyanakkora, akkor a tetraédernek van élérintő gömbje.

E2 **1792.** *(Az 1791. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéderben bármely két szemközti él összege egyenlő, akkor a tetraéder csúcsai mint középpontok köré lehet olyan gömböket felvenni, amelyek kölcsönösen érintik egymást.

E2 **1793.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder szemközti élei egymásra merőlegesek, akkor bármelyik csúcspontnak a szemközti lapon levő merőleges vetülete a lap magasságpontja.

E2 **1794.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder két-két szemközti éle merőleges egymásra, akkor a harmadik szemközti élpár is merőleges egymásra.

E2 **1795.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder két csúcsából kiinduló magasság egyenese metszi egymást, akkor a két csúcsot összekötő él merőleges a szemközti élre.

E2 **1796.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder két szemközti éle merőleges egymásra, akkor az egyiknek a végpontjaiból kiinduló magasságegyenesek metszik egymást.

E2 **1797.** *(Az 1795. és az 1796. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy ha a tetraéder két magassága metszi egymást, akkor a másik kettő is metszi egymást.

V **1798.** *(Az 1795. és az 1796. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy egy tetraédernek akkor és csak akkor van magasságpontja, ha a tetraéder szemközti élpárjai merőlegesek egymásra. (A magasságponttal rendelkező tetraédert ortocentrikusnak nevezik.)

V **1799.** *(Az 1794. és az 1798. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy az ortocentrikus tetraéder szemközti éleinek négyzetösszege állandó.

V **1800.** *(Az 1798. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy az ortocentrikus tetraéder két szemközti élének normál transzverzálisa átmegy a tetraéder magasságpontján.

V **1801.** *(Az 1798. és az 1800. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy az ortocentrikus tetraéder szemközti élei normál transzverzálisainak az élekkel alkotott metszéspontjai a tetraéderlapok magasságainak az illető éleken levő talppontjai.

V **1802.** *(Az 1798. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy ha $ABCD$ ortocentrikus tetraéder, és magasságpontja M, akkor az $ABCM$ is ortocentrikus tetraéder, és magasságpontja D. Hasonló tulajdonságúak az $ABDM$, $ACDM$ és $BCDM$ tetraéderek is.

E2 **1803.** Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder akkor és csak akkor ortocentrikus, ha a szemközti élek felezőpontjait összekötő szakaszok egyenlők.

E2 **1804.** *(Az 1803. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy az ortocentrikus tetraéder éleinek felezőpontjai egy gömbön helyezkednek el. (Ezt a gömböt nevezik az ortocentrikus tetraéder második Feuerbach-gömbjének.)

E2 **1805.** Bizonyítsuk be, hogy az ortocentrikus tetraéder élfelező pontjain áthaladó gömböt a tetraéder bármelyik lapjának síkja a háromszöglap Feuerbach-féle körében metszi.

V **1806.** *(Az 1296. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy ortocentrikus tetraéder élfelezőpontjainak a tetraéder bármelyik lapjára eső merőleges vetületei egy körön fekszenek.

V **1807.** *(Az 1293. és az 1806. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy az ortocentrikus tetraéder M magasságpontja, S súlypontja és a körülírt gömbjének O középpontja egy egyenesen vannak; a súlypont a másik kettő által meghatározott szakasz felezőpontja. (Ezt az egyenest a tetraéder Euler-egyenesének nevezzük.)

V **1808.** *(Az 1293. és az 1807. feladatra épül.)* Emeljünk egy ortocentrikus tetraéder minden lapjának súlypontjában a lapra merőleges egyenest. Bizonyítsuk be, hogy ezek a tetraéder Euler-egyenesén egy R pontban metszik egymást úgy, hogy $RM = 2OR$, továbbá az R pont távolsága egy-egy oldallaptól harmadakkora, mint az M pont távolsága az illető lappal szemben fekvő csúcstól.

V **1809.** *(Az 1789., az 1791. és az 1799. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy az ortocentrikus tetraédernek akkor és csak akkor van élérintő gömbje, ha egy lapja szabályos háromszög, és az ezzel szemben fekvő csúcsában összefutó élek egyenlők.

E2 **1810.** Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tetraéder valamely belső pontjának az oldallapoktól mért távolságait összegezve a test magasságával egyenlő értéket kapunk.

E2 **1811.** Egy tetraéder egy csúcsból kiinduló három élének hossza a, b, c. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder térfogata akkor lesz a legnagyobb, ha az adott hosszúságú élek páronként merőlegesek.

E2 **1812.** Az $ABCD$ tetraéder D csúcsából kiinduló élek legyenek páronként merőlegesek, és $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder térfogata $\frac{1}{6}\sqrt{\left(s^2-a^2\right)\left(s^2-b^2\right)\left(s^2-c^2\right)}$, ahol $s^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

E2 **1813.** Egy tetszőleges tetraéder három lapjának magasságpontjában állítsunk merőlegest a lap síkjára. Vetítsük rá merőlegesen a negyedik lap síkjára ezeket az egyeneseket. Bizonyítsuk be, hogy ezek a vetületek egy ponton mennek át.

E2 **1814.** *(Az 1813. feladatra épül.)* Egy tetszőleges tetraéder három lapjának súlypontjában állítsunk merőlegest a lap síkjára. Vetítsük rá merőlegesen a negyedik lap síkjára ezeket az egyeneseket. Bizonyítsuk be, hogy ezek a vetületek egy ponton mennek át.

K2 **1815.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder egy csúcsból kiinduló három éle egyenlő, akkor ennek a csúcsnak a negyedik lapon való merőleges vetülete a körülírt kör középpontja.

K1 **1816.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder egy csúcsból kiinduló élei egyenlők, akkor az élek a negyedik lappal egyenlő szögeket zárnak be.

E2 **1817.** Legyen egy tetraéderbe írt gömb sugara r, a tetraéder magasságai m_1, m_2, m_3, m_4. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{r} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}$.

E2 **1818.** Jelöljük d_1, d_2, d_3, d_4-gyel egy tetraéderen belül felvett P pontnak a tetraéder lapjaitól való távolságát és m_1, m_2, m_3, m_4-gyel a tetraéder megfelelő magasságait. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{d_1}{m_1} + \frac{d_2}{m_2} + \frac{d_3}{m_3} + \frac{d_4}{m_4} = 1$.

E2 **1819.** Kössük össze egy $ABCD$ tetraéder belsejének valamelyik O pontját a csúcspontokkal. Jelöljük az OA, OB, OC, OD egyeneseknek a szemközti lappal való metszéspontját A'-, B'-, C'-, D'-vel. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1$.

E2 **1820.** Az $ABCD$ tetraéder ABC lapjának valamely O pontjából húzzuk meg a DA, DB, DC élekkel párhuzamos OA', OB', OC' egyeneseket a DBC, DCA, illetve a DAB lapokig. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{OA'}{DA}+\frac{OB'}{DB}+\frac{OC'}{DC}=1$.

K2 **1821.** Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder egyik éle és a szemközti él felezőpontja által kifeszített sík a tetraédert két egyenlő térfogatú részre osztja.

E2 **1822.** Mutassuk meg, hogy a tetraéder súlypontja és két-két csúcsa által meghatározott háromszögek a tetraédert négy egyenlő térfogatú részre bontják.

E1 **1823.** Két tetraéder megegyezik az egyik csúcsnál levő oldallapjának szögében és az ide befutó harmadik élnek a lappal bezárt szögében. Bizonyítsuk be, hogy a két tetraéder térfogatának aránya egyenlő a fenti csúcsba futó élek szorzatának arányával.

E1 **1824.** Bizonyítsuk be, hogy ha két tetraéder egy élben és a hozzá tartozó lapszögben megegyezik, akkor térfogataik úgy aránylanak egymáshoz, mint a közös élhez tartozó oldallapok területének szorzatai.

E2 **1825.** Egy tetraéder minden csúcsához a szemközti lapjával párhuzamos síkot illesztünk. E síkok is tetraédert határolnak. Határozzuk meg a két tetraéder térfogatának arányát.

K1 **1826.** Egy tetraédert az egyik lapjával párhuzamosan úgy vágjunk szét, hogy a levágott tetraéder teljes felszíne az adott tetraéder felszínének felével legyen egyenlő. A közös csúcstól milyen távolságban kell elmetszeni a tetraédert?

K1 **1827.** Egy tetraédert az egyik lapjával párhuzamosan úgy vágjunk szét, hogy a levágott tetraéder és a csonka gúla térfogatának aránya q legyen. Határozzuk meg a két tetraéder magasságának arányát.

E1 **1828.** *(Az 1823. feladatra épül.)* Egy tetraéder egyik csúcsból kiinduló éleinek hossza a_1, b_1, c_1. Elmetsszük egy olyan síkkal, amely ezen élekből (a közös csúcsból számítva) a_2, b_2, c_2 darabokat vág le. Számítsuk ki a maradék test és az eredeti test térfogatának arányát.

K1 **1829.** Adott egy paralelepipedon. Húzzuk meg az egyik csúcsból kiinduló lapátlókat. Bizonyítsuk be, hogy ezek végpontjai olyan tetraédert határoznak meg, melynek mindegyik éle a paralelepipedon egy lapátlója. (Az ilyen tetraédert paralelepipedonba írt tetraédernek és az ilyen paralelepipedont a tetraéder köré írt paralelepipedonnak nevezzük.)

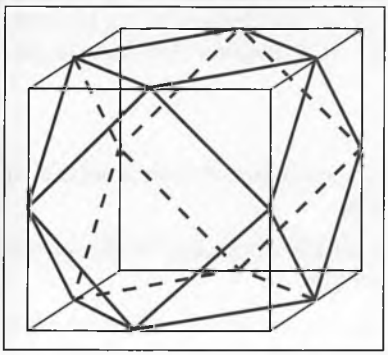
K1 **1830.** Bizonyítsuk be, hogy minden paralelepipedonba két tetraéder írható.

K2 **1831.** Fektessünk egy tetraéder mindegyik élén át a szemközti éllel párhuzamos síkot. Bizonyítsuk be, hogy ezek a síkok egy, a tetraéder köré írt paralelepipedont határoznak meg.

K1 **1832.** *(Az 1831. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy minden tetraéder köré csak egy paralelepipedon írható.

K1 **1833.** Bizonyítsuk be, hogy a kockába írt tetraéder szabályos.

E1 **1834.** Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tetraéder köré írt paralelepipedon kocka.



◀ *1835. ábra*

K1 **1835.** Egy 6 cm élű kocka csúcsait az élek felezőpontján átmenő síkokkal levágjuk. Mekkora lesz a megmaradt test térfogata? *(1835. ábra)*

K2 **1836.** Számítsuk ki az a élű szabályos tetraéder felszínét és térfogatát, ha

a) $a = 8{,}6$ cm; *b)* $a = \frac{1}{4}$ m.

E1 **1837.** Számítsuk ki az a élű szabályos tetraéder köré írható gömb sugarát.

II

K2 **1838.** Számítsuk ki az a élű szabályos tetraéderbe írható gömb sugarát.

E1 **1839.** Adott négy R sugarú gömb, melyek páronként érintik egymást. Egy ötödik gömb érinti mindegyiket belülről, egy hatodik pedig mindegyiket kívülről. Határozzuk meg az ötödik és a hatodik gömb térfogatának arányát.

K1 **1840.** *(Az 1836. feladatra épül.)* Számítsuk ki a szabályos tetraéder térfogatát, ha adott az M magassága.

K2 **1841.** Mekkora szöget zár be a szabályos tetraéder magassága egy éllel?

K1 **1842.** Mekkora a szabályos tetraéder lapszöge?

E2 **1843.** *(Az 1836. és az 1838. feladatra épül.)* Egy kőgúla 30 cm élű szabályos tetraéder. Mindegyik lapját 3 cm-es vastagságban le kell csiszolni. Mennyivel csökken a tömege? (Sűrűsége $2{,}8\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.)

Gúla, csonkagúla

Gúla

E1 **1844.** Bizonyítsuk be, hogy minden gúlában az oldallapok területeinek az összege nagyobb, mint az alaplap területe.

K2 **1845.** Legyen a gúla a oldalélének az alaplap síkjával bezárt szöge α, a b oldalélének pedig β! Bizonyítsuk be, hogy $a : b = \sin\beta : \sin\alpha$.

K2 **1846.** Hány oldalú lehet az a gúla, amelynek alaplapja szabályos sokszög, és az összes éle egyenlő?

K2 **1847.** Bizonyítsuk be, hogy a gúla alaplappal párhuzamos síkmetszetei hasonlók.

K2 **1848.** *(Az 1847. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy a gúla alaplappal párhuzamos metszetei területének aránya megegyezik a síkoknak a csúcstól számított távolságai négyzetének arányával.

K2 **1849.** *(Az 1848. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy ha két egyenlő alapterületű és egyenlő magasságú gúlát az alaplapoktól egyenlő távolságban az alaplappal párhuzamos síkkal metszünk, a metszési idomok területe egyenlő.

K2 **1850.** *(Az 1848. feladatra épül.)* Egy gúla alapterülete 900 cm^2. A magasságot három egyenlő részre osztjuk, és az osztópontokon az alaplappal párhuzamos síkokat fektetünk. Mekkora területű idomokat metszenek ki ezek a síkok a gúlából?

K1 **1851.** *(Az 1848. feladatra épül.)* A csúcstól mekkora távolságban kell egy 60 cm magas gúlát az alaplappal párhuzamosan metszeni, hogy a kimetszett idom területe az alaplap területének *a)* fele; *b)* harmada legyen?

E1 **1852.** Mozogjon egy pont egy szabályos sokszög alapú, egyenlő oldalélű gúla alaplapján. (Az ilyen gúlát szabályos gúlának nevezzük.) Bizonyítsuk be, hogy az oldallapoktól mért távolságainak összege állandó marad.

E1 **1853.** Szabályos háromoldalú gúla magasságából (m) és alapéléből (a) számítsuk ki az oldalélt.

K2 **1854.** Szabályos négyoldalú gúla magasságából (m) és oldaléléből (b) számítsuk ki az alapélt.

K2 **1855.** Szabályos háromoldalú gúla alapéle 13 cm, oldaléle 21 cm. Milyen magas a gúla?

K1 **1856.** Szabályos hatoldalú gúla magassága 18 cm, oldaléle 23 cm. Mekkora az alapél?

K1 **1857.** Négyzetes gúla alapéle 22 cm, az oldallapok az alaplappal 63,6°-os szöget zárnak be. Mekkora a gúla magassága és oldaléle?

E2 **1858.** Háromoldalú gúla oldallapjai egyenlő szárú derékszögű háromszögek. Az alapél a. Mekkora a gúla magassága, oldallapjának és oldalélének az alaplappal bezárt szöge?

E2 **1859.** Szabályos négyoldalú gúla oldallapjai szabályos háromszögek, az oldaléle a. Számítsuk ki a gúla *a)* magasságát; *b)* oldallapjának az alaplappal bezárt szögét; *c)* oldalélének az alaplappal bezárt szögét.

K2 **1860.** Egy gúlának az alaplapja szabályos háromszög, oldallapjai egyenlő szárú, egybevágó háromszögek, melyek területe az alaplap területének $\frac{2}{3}$-szorosa.

Mekkora az oldallapnak az alaplappal bezárt szöge?

E1 **1861.** Szabályos négyoldalú gúla felszínének és alapterületének aránya 2,56. Számítsuk ki *a)* az oldallap és az alaplap hajlásszögét; *b)* két oldallap hajlásszögét.

E1 **1862.** Szabályos négyoldalú gúla alapéle 32 cm, a szomszédos oldallapok 120°-os szöget zárnak be egymással. Milyen magas a gúla?

E2 **1863.** Egy ötoldalú szabályos gúla élei egyenlők. Mekkora szöget zár be egy oldalél az alapélekkel?

K2 **1864.** Egy $ABCD$ téglalap alapú gúla E csúcspontjának az alaplapra eső merőleges vetülete az A pont. $AB = 4$ cm, $AD = AE$, és $BCE\sphericalangle = 60°$. Mekkora a gúla magassága?

E2 **1865.** Egy $ABCDES$ ötoldalú szabályos gúlát elmetszünk egy síkkal, amely átmegy az alap A és C csúcsain, továbbá az ES oldalél felezőpontján. Számítsuk ki a metszet területét, ha a gúla alapéle a, oldaléle b.

K1 **1866.** Mekkora a felszíne a szabályos sokszög alapú egyenes gúlának, ha az
a) alaplapja 13 cm oldalú négyzet, magassága 16 cm;
b) alaplapja 7 cm oldalú szabályos hatszög, magassága 12 cm;

c) alaplapja 15 cm oldalú négyzet, oldaléle 22 cm;
d) alaplapja 12,6 cm oldalú szabályos hatszög, oldaléle 32,7 cm?

K1 GY 1867. Egy torony csúcsa hatoldalú szabályos gúla, melynek alapéle 2 m, magassága 5,6 m. Hány m^2 ónlemez szükséges a befedésére?

K1 1868. Mekkora a térfogata annak a szabályos gúlának, amelynek
a) alaplapja 17 cm oldalú négyzet, magassága 28 dm;
b) alaplapja 6,7 dm oldalú szabályos hatszög, magassága 8,28 dm;
c) alaplapja 34,6 cm oldalú szabályos nyolcszög, magassága 52,7 cm;
d) alaplapja 56 cm oldalú négyzet, oldaléle 78 cm;
e) alaplapja 5,9 cm oldalú szabályos hatszög, oldaléle 12,3 cm?

K1 1869. Négyzet alapú gúla alaplapjának átlója 6 cm. Az oldallapok szabályos háromszögek. Számítsuk ki a gúla felszínét és térfogatát.

K1 1870. Egy gúla alaplapja derékszögű háromszög, amelynek befogói 12 cm és 18 cm. A gúla csúcspontjának az alapsíkra eső merőleges vetülete a derékszög csúcsában van. A gúla magassága 32 cm. Számítsuk ki a gúla felszínét és térfogatát.

K1 1871. Mekkora a négyoldalú szabályos gúla térfogata, ha palástját kiterítve egy 8 cm oldalú szabályos nyolcszög „felét" kapjuk?

K2 1872. Mekkora a szabályos gúla térfogata, ha felszíne 272 cm^2, alaplapja
a) 7 cm oldalú négyzet; *b)* 5,5 cm oldalú szabályos hatszög; *c)* 4,7 cm oldalú szabályos nyolcszög?

E1 1873. Mekkora a szabályos gúla oldaléle, ha térfogata 533,7 cm^3, alaplapja
a) 6,3 cm oldalú négyzet; *b)* 7,8 cm oldalú szabályos ötszög; *c)* 5,9 cm oldalú szabályos hatszög?

V 1874. Szabályos négyoldalú gúla térfogatát felezzük meg az egyik alapéléhez illeszkedő síkkal. Határozzuk meg a kimetszett síkidom alaplaptól legtávolabb fekvő élének az alaplaptól való távolságát.

K1 1875. Szabályos négyoldalú gúla alapéle 2,56 m, oldaléle az alaplappal 72°28′ szöget zár be. Mekkora a térfogata?

K1 1876. Szabályos gúla alaplapja 2,54 cm oldalú szabályos háromszög, oldalélei egymásra merőlegesek. Mekkora a felszíne és a térfogata?

E2 1877. Szabályos nyolcoldalú gúla alapéle 4 dm, az alapél és az ezt metsző oldalél hajlásszöge 75°. Mekkora a felszíne és a térfogata?

K1 1878. Szabályos gúla magassága 37,65 m, alaplapja pedig egy 3,15 m sugarú körbe írt szabályos nyolcszög. Mekkora a térfogata?

E1 1879. Szabályos gúla alaplapja 1,9 cm oldalélű szabályos 24 oldalú sokszög. Oldallapja az alaplappal 87°11′ szöget zár be. Mekkora a térfogata?

K2 1880. Szabályos négyoldalú gúla térfogata 864 cm^3, alapélének és magasságának aránya 2:3. Mekkora a felszíne?

K2 **1881.** Szabályos négyoldalú gúla térfogata 49,905 m^3, magassága pedig kétszer akkora, mint az alaplap átlója. Mekkora a felszíne?

K2 **1882.** Szabályos négyoldalú gúla oldallapjai szabályos háromszögek. Térfogata 51 cm^3. Mekkora az alapéle?

K2 **1883.** Szabályos négyoldalú gúla térfogata 4,86 m^3. Oldaléle az alaplappal 46°20′ szöget zár be. Mekkora az alapél?

K2 **1884.** Téglalap alapú, egyenlő oldalélű gúla alapélei 7 dm és 5 dm, oldaléle 15 dm. Mekkora a térfogata?

K2 GY **1885.** Egy acélból készült szabályos ötszög alapú gúlát levélnehezéknek használunk. Mekkora a tömege, ha az alapéle 1,56 cm és az oldaléle 72°45′ szöget zár be az alaplappal? (Az acél sűrűsége 7,2 $\frac{g}{cm^3}$.)

K1 **1886.** Szabályos négyoldalú gúla alaplapjának területe 1024 cm^2, a gúla térfogata 5622 cm^3. Mekkora a gúla magassága és palástjának területe?

K1 **1887.** Öntöttvasból készült szabályos négyoldalú gúla tömege 1012,2 kg, alapéle 45 cm. Mekkora a magassága? (Sűrűsége 7,5 $\frac{kg}{dm^3}$.)

K1 **1888.** Szabályos hatoldalú gúla alapéle 4,5 cm, oldallapjának magassága 9 cm. Mekkora a térfogata?

K2 **1889.** Rombusz alapú gúla magasságának talppontja a rombusz középpontjában van, magassága 9 cm, térfogata 62,52 cm^3. Az egyik átlóra illeszkedő tengelymetszetének területe 36,7 cm^2. Számítsuk ki az alapélt és az alaplap egyik szögét.

K2 **1890.** Egy gúla magassága 14 cm, az alaplaptól 4,2 cm távolságban levő, az alaplappal párhuzamos síkmetszet területe 60 cm^2. Számítsuk ki a gúla térfogatát.

K2 **1891.** Egy 6 cm és 8 cm hosszú oldalakkal rendelkező téglalap alapú egyenes gúla oldalélei 13 cm hosszúak. Az alapsíktól milyen távol kell a gúlát az alappal párhuzamos síkkal metszenünk, hogy két egyenlő térfogatú részre osszuk?

E1 **1892.** Egy 45 cm magas gúlát az alappal párhuzamos síkokkal három egyenlő térfogatú részre osztunk. Számítsuk ki az egyes részek magasságát.

E2 **1893.** Egy négyoldalú szabályos gúla alapéle 4 dm, magassága 6 dm. Írjunk a gúlába kockát úgy, hogy négy csúcsa az alaplapon, a másik négy pedig egy-egy oldalélen legyen. Számítsuk ki a kocka térfogatát.

Csonkagúla

E2 **1894.** Szabályos csonkagúla alaplapjai a és b oldalú négyzetek. A négy oldallap területének összege megegyezik a két alaplap területének összegével. Számítsuk ki a csonkagúla magasságát.

E2 **1895.** Egy 52 cm magas négyzetes csonkagúla alapéle 55 cm, fedőéle 32 cm. Számítsuk ki a felszínét és a térfogatát.

E2 **1896.** Egy 20 cm magas, 49,5 cm oldalú szabályos háromszög alapú csonkagúla oldallapjai az alaplappal 60°-os szöget zárnak be. Számítsuk ki a felszínét és a térfogatát.

K1,GY 1897. A kovács tűzhelye fölött csonkagúla alakú négyzetes füstfogó van. Hány m^2 bádog kell a négy oldallap és a fedőlap elkészítéséhez, ha az alapél és az oldalél 1,8 m, a fedőél 1,2 m?

E2 1898. Szabályos hatoldalú csonkagúla alapéle 3,7 cm, fedőéle 2,4 cm, magassága 7,4 cm. Számítsuk ki a felszínét és a térfogatát.

K1 1899. Egy 12 m magasságú csonkagúla térfogata 916 m^3, az alaplap területe 25 m^2. Számítsuk ki a fedőlap területét.

K2 1900. Négyzet alapú szabályos csonkagúla felszíne 2873 cm^2. Az alapél 32 cm, a fedőél 9 cm. Számítsuk ki a térfogatát.

E1 1901. Négyzet alapú egyenes csonkagúla alapéle 12 cm, fedőéle 8 cm, magassága 10 cm. Az alaplaptól milyen távolságban kell az alaplappal párhuzamos síkkal metszenünk a csonkagúlát, hogy a két rész egyenlő térfogatú legyen? Mekkora a síkmetszet oldala?

K2 1902. Egy vízgyűjtő medence lefelé keskenyedő csonkagúla alakú. Felső lapja 14 m, az alsó 7 m oldalú négyzet, mélysége 6 m. Mennyi víz fér bele? Mennyi víz van benne, ha csak fele magasságig van töltve?

E2 GY 1903. Csonkagúla alakú, 65 cm magasságú virágláda négyzetes aljának éle 32 cm, felső éle 52 cm. Hány kg a benne levő virágföld, ha a ládát 50 cm magasságig töltik meg, és 1 m^3 föld tömege 1400 kg?

Poliéderek, szabályos testek

E2 1904. Egy kocka lapjaira négyoldalú gúlákat helyezünk, melyek oldallapjai szabályos háromszögek. Szabályos test keletkezik-e így?

K2 1905. Bizonyítsuk be, hogy a kocka lapjainak középpontjai egy szabályos test csúcspontjai. (Ezt a testet nevezik szabályos oktaédernek.)

E2 1906. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos oktaéder lapjainak középpontjai egy kocka csúcspontjai.

E1 1907. *(Az 1905. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tetraéder éleinek felezőpontjai egy szabályos oktaéder csúcspontjai.

E1 1908. *(Az 1905. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy egy kockába írt két tetraéder közös része a kockába írt szabályos oktaéder.

K2 1909. *(Az 1905. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy a szabályos oktaéder testátlói páronként merőlegesek.

E2 1910. *(Az 1906. feladatra épül.)* Egy kocka minden csúcsán át vegyünk fel egy síkot a három szomszédos csúcs síkjával párhuzamosan! Bizonyítsuk be, hogy ezek egy szabályos oktaéder lapsíkjai.

E2 1911. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos oktaédert lehet szabályos hatszögben metszeni.

E2 1912. Bizonyítsuk be, hogy négy egybevágó szabályos tetraéderből és egy velük egyező élű szabályos oktaéderből egy kétszer akkora élű szabályos tetraéder építhető.

E2 **1913.** Bizonyítsuk be, hogy hat egybevágó szabályos oktaéderből és nyolc, velük egyező élű szabályos tetraéderből egy kétszer akkora élű szabályos oktaéder építhető.

E2 **1914.** Írjunk egy kockába két tetraédert, és tekintsük a kockának azokat a részeit, amelyek nem tartoznak egyik tetraéderhez sem. Bizonyítsuk be, hogy ezekből a részekből összerakható három szabályos oktaéder, amelyek egybevágók a két tetraéder közös részével.

E2 **1915.** *(Az 1914. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy egybevágó szabályos tetraéderekkel és velük egyező élű szabályos oktaéderekkel a tér hézagtalanul kitölthető.

E2 **1916.** *(Az 1912., az 1913. és az 1914. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy két egybevágó kocka szétdarabolható két egybevágó szabályos tetraéderbe és egy velük egyező élű szabályos oktaéderbe.

K2 **1917.** Bizonyítsuk be, hogy a szabályos oktaéder köré lehet gömböt írni.

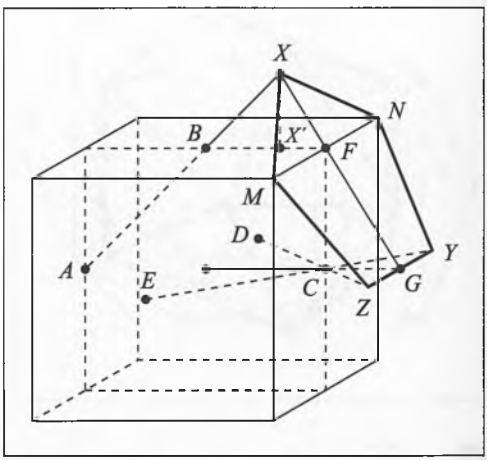
E1 **1918.** Bizonyítsuk be, hogy a szabályos oktaéderbe lehet gömböt írni.

V **1919.** Bizonyítsuk be, hogy a kockába írt szabályos oktaéder egy élét a kocka köré írt gömbig meghosszabbítva, a meghosszabbítás az oktaéder élének a nagyobbik aranymetszetével egyenlő.

V **1920.** Tekintsünk egy kockát és a beírt szabályos oktaédert. Az oktaéder egyik csúcspontjánál hosszabbítsuk meg az oktaéder két egymásra merőleges élét a kocka köré írt gömbig. Bizonyítsuk be, hogy a két gömbi pont távolsága a kockaél nagyobbik aranymetszete. Mutassuk meg továbbá, hogy a két gömbi pontot összekötő szakasz az alatta levő kockalaptól olyan távolságra van, mint a szakasz fele (tehát ez a távolság a fél kockaél nagyobbik aranymetszete).

V **1921.** *(Az 1920. feladatra épül.)* Tekintsünk egy kockát és a beírt szabályos oktaédert, továbbá az AB, DC és EC éleknek a rajzon látható módon a kocka köré írt gömbig való meghosszabbítását. *(1921. ábra)* Bizonyítsuk be, hogy az M, X, N, Y, Z pontok

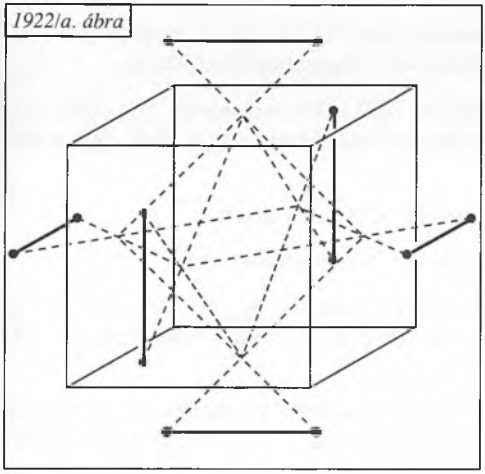
a) egy síkon vannak; *b)* egy körön vannak;
c) egy szabályos ötszög csúcspontjai.



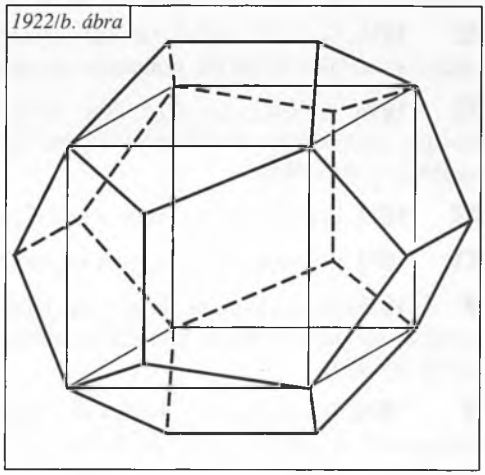
1921. ábra ▶

V **1922.** *(Az 1921. feladatra épül.)* Tekintsünk egy kockát és a beírt szabályos oktaédert. Hosszabbítsuk meg az oktaéder éleit a *1922/a. ábrán* látható módon a kocka köré írt gömbig. Úgy 12 pontot kapunk a gömbön. Bizonyítsuk be, hogy ez a 12 pont és a kocka 8 csúcspontja egy szabályos dodekaéder csúcspontjai *(1922/b. ábra).*

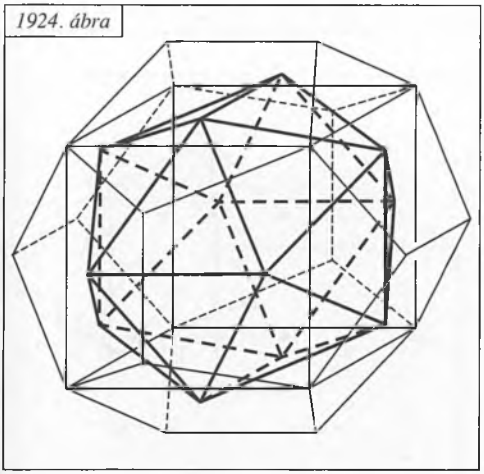
1922/a. ábra



1922/b. ábra



1924. ábra



V **1923.** *(Az 1922. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy a szabályos dodekaéderbe kocka írható. Határozzuk meg a beírható kockák számát is.

E2 **1924.** Bizonyítsuk be, hogy a szabályos dodekaéder lapközéppontjai egy szabályos ikozaéder csúcspontjai. *(1924. ábra)*

E2 **1925.** Adjunk meg olyan síkot, amely szabályos tízszögben metszi *a)* a szabályos dodekaédert; *b)* a szabályos ikozaédert.

E2 **1926.** Bizonyítsuk be, hogy egy szabályos ikozaéder lapközéppontjai egy szabályos dodekaéder csúcspontjai.

K2 **1927.** Tekintsük a szabályos dodekaéder egy lapjának csúcsaiba érkező azon éleket, amik nem illeszkednek e lap síkjára. Bizonyítsuk be, hogy az öt él egyenese egy ponton megy át.

E2 **1928.** Bizonyítsuk be, hogy egy szabályos dodekaéder élegyeneseinek metszéspontjai egy szabályos ikozaéder csúcspontjai.

K2 **1929.** Készítsük el az öt szabályos test hálóját.

K2 **1930.** Számítsuk ki az *a* élű szabályos oktaéder *a)* két párhuzamos élének felezőpontját összekötő szakasz hosszát; *b)* testátlójának hosszát.

K2 **1931.** Határozzuk meg a szabályos oktaéder két szomszédos lapjának szögét.

E2 **1932.** Számítsuk ki az a élű szabályos oktaéder két kitérő éle felezőpontjának távolságát.

K2 **1933.** Számítsuk ki az a élű szabályos oktaéder köré írható gömb sugarát.

E2 **1934.** Számítsuk ki az a élű szabályos oktaéderbe írható gömb sugarát.

E2 **1935.** *(Az 1934. feladatra épül.)* Határozzuk meg az a élű szabályos oktaéder két kitérő éle normál transzverzálisának hosszát.

E2 **1936.** Egy a élű kockába oktaédert írunk, majd az oktaéderbe újabb kockát. Határozzuk meg a két kocka élének arányát.

E2 **1937.** *(Az 1934. feladatra épül.)* Egy r sugarú gömbbe beírunk egy kockát és egy szabályos oktaédert. Bizonyítsuk be, hogy az ezekbe írt gömbök sugara egyenlő.

E2 **1938.** *(Az 1920. feladatra épül.)* Számítsuk ki az a élű szabályos dodekaéder két szomszédos lapjának szögét.

E2 **1939.** *(Az 1920. feladatra épül.)* Számítsuk ki az a élű szabályos ikozaéder két szomszédos lapjának szögét.

K2 **1940.** Egy kocka éleinek összege $12a$. Mekkora az éle az ugyanilyen élösszegű többi szabályos testnek?

K2 **1941.** Egy szabályos oktaéder két átellenes csúcsának távolsága d. Számítsuk ki a térfogatát!

E1 **1942.** Egy szabályos test felszíne $6a^2$. Mekkora az éle?

E2 **1943.** Egy szabályos tetraédernek, egy szabályos oktaédernek és egy kockának a felszíne egyenlő. Hogyan aránylanak egymáshoz a térfogatok?

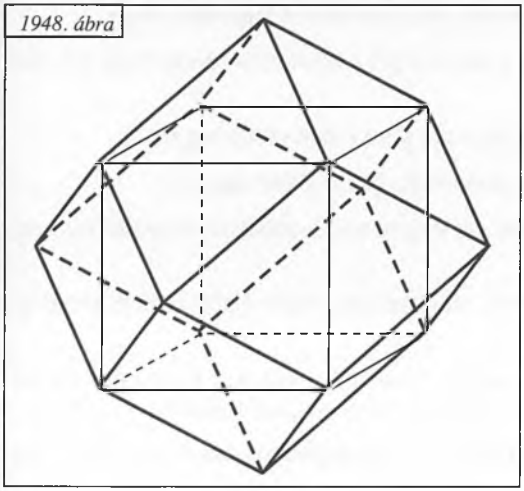
E2 **1944.** Egy szabályos tetraédernek, egy szabályos oktaédernek és egy kockának a térfogata egyenlő. Hogyan aránylanak egymáshoz a felszínek?

K2 **1945.** Egy szabályos tetraédernek, egy szabályos oktaédernek és egy kockának az élei egyenlők. Hogyan aránylanak egymáshoz *a)* a felszínek; *b)* a térfogatok?

K2 **1946.** Egy a élű szabályos oktaéder csúcsait az élek felezőpontján átmenő síkokkal levágjuk. Mekkora lesz a megmaradó rész térfogata?

K1 **1947.** Egy szabályos tetraéder, egy szabályos oktaéder és egy szabályos ikozaéder élei egyenlők. Hogyan aránylanak egymáshoz a felszínek?

E2 **1948.** Vegyünk egy kockát, és tükrözzük a testet minden lapjára. Újabb hat kockát nyerünk. Tekintsük azt a konvex testet, amelynek csúcspontjai az eredeti kocka csúcsai és a kapott hat kocka középpontja. (Ezt a testet rombdodekaédernek nevezik.) *(1948. ábra)*


1948. ábra

a) Mennyi a csúcsok, a lapok és az élek száma?
b) Milyen lapok határolják?
c) Szabályos test-e?
d) Mekkorák az élek, ha a kocka éle a?
e) Mekkora két szomszédos él hajlásszöge?
f) Mekkora két szomszédos lap szöge?
g) Mekkora a felszíne?
h) Mekkora a térfogata?

E1 **1949.** *(Az 1948. feladatra épül.)* Fektessünk egy kocka élein át a hozzá illeszkedő lapokkal 45°-os szöget bezáró síkokat. Milyen test keletkezik?

E1 **1950.** Bizonyítsuk be, hogy egybevágó rombdodekaéderekkel a tér hézagtalanul kitölthető.

K1 **1951.** Vegyük egy paralelepipedon lapátlói által meghatározott beírt tetraédereket. Adjuk meg a két tetraéder közös részét képező test csúcsainak, éleinek, lapjainak számát.

E2 **1952.** Vegyünk egy paralelepipedon lapközéppontjai által alkotott testet! Határozzuk meg, hogy térfogata hányadrésze a paralelepipedon térfogatának.

E2 **1953.** *(Az 1951. és az 1952. feladatra épül.)* Egy paralelepipedon minden csúcsához illesszünk síkot, amelyik párhuzamos a szomszédos három csúcson átmenő síkkal. Milyen testet határoznak meg ezek a síkok? Mekkora a két test térfogatának aránya?

E2 **1954.** Vegyük fel egy kocka összes átlóssíkját. Milyen testekre osztják ezek a kockát? Mekkora egy résznek a felszíne és a térfogata?

K2 **1955.** Hány részre osztja a teret egy konvex négyszög alapú gúla lapjainak öt síkja?

K2 **1956.** Hány részre osztja a teret a szabályos oktaéder lapjainak nyolc síkja?

E1 **1957.** Két egybevágó, szabályos gúlát úgy illesszünk össze, hogy alaplapjaik fedjék egymást, és egy csupa háromszöglappal határolt konvex poliéder keletkezzék. Legfeljebb hány oldalú lehet a keletkezett test síkmetszete, ha a gúla *a)* 4; *b)* 6; *c)* 8; *d)* $2n$ oldalú volt?

K2 **1958.** Adott egy a élű kocka. Egyik csúcsát kössük össze a szemközti csúcson átmenő lapok középpontjával. Számítsuk ki a keletkezett tetraéder éleit.

V **1959.** Egy négyzet alapú gúla oldallapjai legyenek szabályos háromszögek! Legyenek az oldallapok egy-egy szabályos tetraéder lapjai. (A tetraéder negyedik csúcsa kifelé van.) Számítsuk ki két szomszédos tetraéder külső csúcsainak a távolságát, ha az alapél a.

K2 **1960.** Tekintsük egy hasáb oldallapjait olyan gúlák alaplapjának, amelyek közös csúcsa a hasáb belsejének tetszőleges pontja. Bizonyítsuk be, hogy e gúlák térfogatának összege állandó. Hogyan aránylik ez az összeg a hasáb térfogatához?

E2 **1961.** Adott hasábot az alaplapjaival párhuzamos síkkal metszünk. Tekintsük azokat a gúlákat, amelyek csúcsa a hasáb fedőlapjának egy pontja, alaplapjuk a hasáb alaplapjának

síkjába esik, oldaléleik pedig a síkmetszet csúcsaihoz illeszkednek. A fedőlaptól milyen távolságban kell felvenni a metszősíkot ahhoz, hogy a gúla a hasábbal egyenlő térfogatú legyen?

E1 **1962.** Egy *ABCS* tetraéder *SBC*, *SCA*, *SAB* lapjaira mint alaplapokra kifelé egy-egy hasábot állítunk. Legyen *SM* e hasábok közös éle. Állítsunk a tetraéder *ABC* lapjára mint alaplapra olyan hasábot, amelynek oldalélei párhuzamosak és egyenlők *SM*-mel. Bizonyítsuk be, hogy e hasáb térfogata az előző három hasáb térfogatának összegével egyenlő.

E1 **1963.** Bizonyítsuk be, hogy ha hasábot vagy gúlát olyan síkkal metszünk, amely nem párhuzamos az alaplappal, és a metszésidom oldalait az alaplap megfelelő oldalegyenesével való metszésig meghosszabbítjuk, akkor a kapott metszéspontok egy egyenesen vannak.

E2 **1964.** Forgassunk el egy *a* élű kockát két szemközti lapközéppontját összekötő egyenes körül 45°-kal.
a) Határozzuk meg az eredeti és az elforgatott kocka közös részének térfogatát.
b) Határozzuk meg a két kocka együttes térfogatát.

V **1965.** Forgassunk el egy *a* élű kockát az egyik testátlója körül 60°-kal. Határozzuk meg az eredeti és az elforgatott kocka közös részének térfogatát.

E2 **1966.** Forgassunk el egy *a* élű szabályos tetraédert az egyik magasságvonala körül 60°-kal. Határozzuk meg az eredeti és az elforgatott tetraéder közös részének térfogatát.

E2 **1967.** Egy *a* élű szabályos tetraédert tükrözzünk az egyik magasságvonal felezőpontján átmenő, a hozzá tartozó lappal párhuzamos síkra. Határozzuk meg az eredeti és a tükörkép-tetraéder közös részének térfogatát.

E2 GY **1968.** Mennyi gitt kell egy *a*, *b* oldalú, téglalap alakú ablaktábla begitteléséhez, ha a gitt-hasáb keresztmetszete egyenlő szárú derékszögű háromszög, 1 cm-es befogókkal?

K2 **1969.** Adott egy *a* élű szabályos négyoldalú gúla, amelynek magassága *m*. Írjunk bele kockát úgy, hogy a kocka négy csúcsa a gúla alaplapján, a másik négy pedig egy-egy oldalélen legyen. Mekkora a kocka térfogata?

K2 **1970.** Adott egy *a* élű szabályos négyoldalú gúla, amelynek magassága *m*. Írjunk bele kockát úgy, hogy a kocka négy csúcsa a gúla alaplapján, a másik négy pedig egy-egy oldalmagasságon legyen. Mekkora a kocka térfogata?

Henger

K1 **1971.** Hányszorosa az egyenes körhenger magassága az alaplap sugarának, ha a tengelymetszet területe megegyezik az alap területével?

K1 **1972.** Számítsuk ki az egyenes körhenger felszínét, ha
a) alaplapjának sugara 3 cm, magassága 5 cm;
b) alaplapjának sugara 6,5 dm, magassága 7,9 dm;
c) alaplapjának sugara 72,33 m, magassága 83,16 m.

K1 **1973.** Az egyenes körhenger alaplapjának kerülete 20,33 cm, a magasságnak és az alaplap sugarának különbsége 11,6 cm. Mekkora a felszíne?

E1 **1974.** Egyenes körhenger felszíne 659,6 cm^2. Ha az alaplap sugarát 4 cm-rel, a magasságot pedig 3 cm-rel növeljük, akkor a felszíne 923,4 cm^2-rel növekszik. Mekkora az alaplap sugara és a henger magassága?

K1 **1975.** Egyenes körhenger felszíne 21 356,62 cm^2, az alaplap sugarának és a magasságnak az aránya 4:5. Mekkora az alaplap sugara és a testmagasság?

K1 **1976.** Egyenes körhenger felszíne 1 111 cm^2. Az alaplap sugarának és a henger magasságának az összege 26,8 cm. Mekkora a sugár és a magasság?

K1 GY **1977.** A 15 méter hosszú pince dongaboltozata egy 5,6 m átmérőjű félhenger palástja. Mennyi idő alatt készíthető el a belső felület vakolása, ha 1 óra alatt 4,5 m^2-t lehet bevakolni?

K1 GY **1978.** Mennyi bádoglemez szükséges 50 db 12 cm átmérőjű, 1 m hosszú kályhacső elkészítéséhez? (Takarásra számítsunk 1,5 cm-t.)

K1 GY **1979.** Mennyi festék kell egy 6,5 m hosszú, 45 cm átmérőjű oszlop befestéséhez, ha 1 m^2-re 20 dkg festéket számítunk?

K1 **1980.** Mekkora az egyenes körhenger térfogata, ha
a) alaplapjának sugara 3,5 m, magassága 15 m;
b) alaplapjának sugara 32,72 dm, magassága 26,18 dm;
c) alaplapjának sugara 45,7 cm, magassága 62,15 cm?

K1 **1981.** Mekkora a henger palástjának területe és a henger térfogata, ha átmérője 30 m, magassága 2,8 m?

K1 **1982.** Egyenes körhenger térfogata V, alaplapjának sugara r. Mekkora a magassága?
a) $V = 5\,025{,}72$ cm^3, $r = 8{,}7$ cm; *b)* $V = 62\,584{,}84$ cm^3, $r = 33{,}4$ m.

K1 **1983.** Egy 5,6 cm és 7,9 cm oldalú téglalapot egyszer az egyik, majd a másik oldala körül megforgatunk. Számítsuk ki a keletkezett hengerek felszínét.

K1 **1984.** Egy 7,8 cm oldalú négyzetet megforgatunk az egyik oldala körül. Mekkora lesz a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

K2 **1985.** Egy 21,7 cm és 36,8 cm oldalú téglalapot forgatunk egyszer az egyik, majd a másik oldala, végül az egyik és a másik szimmetriatengelye körül. Határozzuk meg a keletkezett testek felszínét és térfogatát.

K2 **1986.** Egy 26 cm és 33 cm oldalú téglalapot kétféleképpen csavarhatunk hengerré. Hogyan aránylik egymáshoz ennek a két hengernek a térfogata?

K2 GY **1987.** Hány cm^2 lemez kell annak a henger alakú literméréknek a készítéséhez, amely kétszer olyan magas, mint amilyen széles? (Fogóra, hulladékra, forrasztásra számítsunk még 20 %-ot.)

K1 GY **1988.** Mekkora a kétliteres, henger alakú edény magassága, ha kétszer olyan magas, mint amilyen széles?

K1 GY **1989.** Henger alakú víztartály belső átmérője 2,3 m. Mennyit emelkedik a víz felszíne, ha a tartályba 10 hl vizet engednek?

K1 GY **1990.** Hengeres üveg kémcső cm^3-ekre van beosztva. A kémcső belső átmérője 0,9 cm. Milyen távol vannak egymástól a beosztások?

K1 GY 1991. Mekkora a kapilláris cső belső átmérője, ha 100 mg higany 6 mm magasságig töltötte meg a csövet? (A higany sűrűsége $13{,}6\ \frac{g}{cm^3}$.)

K1 GY 1992. Hány hl víz van egy 1,6 m széles kútban, ha a víz 3,2 m magasan áll benne?

K1 GY 1993. Egy malomkő külső és belső sugara 0,5 m és 0,1 m, vastagsága 0,2 m. Mekkora a tömege, ha sűrűsége $2{,}5\ \frac{kg}{dm^3}$?

K1 1994. Egyenes körhenger térfogata 9 628,17 cm^3, palástjának felszíne 2 128,29 cm^2. Mekkora az alaplap sugara és a testmagasság?

K1 1995. Két egyenes körhenger palástja egyenlő területű. Határozzuk meg a térfogatuk arányát.

K1 1996. Két egyenes körhenger egyenlő térfogatú. Határozzuk meg a palástjaik területének arányát.

E2 1997. Egyenlő térfogatú egyenes körhengerek palástjának és egyik alaplapjának területösszegét vizsgáljuk. Milyen hengerre lesz ez az összeg a legkisebb?

V 1998. Egyenlő felszínű egyenes körhengerek között melyik az, melynek a térfogata a legnagyobb?

K2 1999. Egyenes körhenger térfogata 3280 cm^3, az alaplap sugara és a magasság úgy aránylik egymáshoz, mint 5:6. Mekkora a henger felszíne?

K1 2000. Egyenes körhenger kiterített palástja egy négyzet, melynek átlója 10 cm. Mekkora a henger térfogata?

K2 2001. Egyenes körhenger felszíne 4 532,6 cm^2, a tengelymetszet területe 969,5 cm^2. Mekkora a térfogata?

K1 2002. Egyenes körhenger felszíne 62 528,7 cm^2, palástjának területe 51 983,8 cm^2. Mekkora a térfogata?

K1 2003. Egyenes körhenger tengelymetszete olyan négyzet, aminek területe 628,7 cm^2. Mekkora a felszíne és a térfogata?

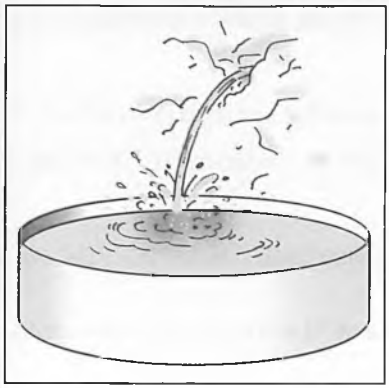
K1 2004. Egyenes körhenger alaplapjának sugara 6 cm, a magassága 11 cm. A tengelyre illeszkedő, egymással 40°-os szöget bezáró két félsíkkal kivágunk egy részt. Mekkora a kisebbik rész térfogata?

E1 GY 2005. Egy 5,2 m átmérőjű, kör keresztmetszetű alagút fenekén vízszintes felületű betonréteget építenek. A betonréteg körszelet-keresztmetszetének magassága 1 m. Hány tonna cementre van szükség, ha az alagút 2,5 km hosszú, és 1 m^3 beton 150 kg cementet tartalmaz?

K1 GY 2006. Egy 80 dm^2 területű, téglalap alakú bádogból csövet akarunk készíteni. A téglalap egyik oldala a másik oldal $\frac{5}{8}$ része. A rövidebb oldal legyen a cső tengelyével párhuzamos. Ráhajtásra 2 cm-t szánjunk. Mekkora lesz a cső átmérője és magassága?

K1 GY 2007. Milyen magas legyen a henger alakú víztartály, ha az alaplapja 5 m átmérőjű kör, és a befogadóképessége 25 m^3?

K1 GY 2008. Egy 200 liter űrtartalmú, henger alakú edény magassága háromszor akkora, mint az alapkör sugara. Mekkora a sugár és a magasság?



◀ *2011. ábra*

K1 2009. Egyenlő oldalú egyenes körhenger palástja 25 m^2. Mekkora a térfogata? (Egyenlő oldalú a henger, ha ugyanolyan magas, mint amilyen széles.)

K1 2010. Egyenlő oldalú egyenes körhenger térfogata 785,25 m^3. Mekkora a felszíne?

K2 GY 2011. Egy óránként 82 hl vizet adó forrás egy 7,5 m átmérőjű henger alakú medencébe folyik. Menynyit emelkedik a vízszint 4 óra alatt? *(2011. ábra)*

II

K1 GY 2012. Hány m^3 a gőzszükséglete percenként egy gőzgép hengerének, ha a henger belső átmérője 42 cm, a dugattyú lökethossza 80 cm, és percenként 60-szor szív és nyom?

K1 GY 2013. Szivattyú dugattyújának átmérője 18 cm, lökethossza 46 cm. Percenként 100-szor szív és nyom. Hatásfoka 0,9. (A hatásfok a valóságos teljesítmény és az elméletből adódó teljesítmény hányadosa.) Mennyi vizet szállít percenként ez a szivattyú?

K1 GY 2014. Hány másodperc alatt tölthető tele az 500 literes olajtartály a 20 mm átmérőjű csövön át, ha az ömlés sebessége 10 m percenként?

K1 GY 2015. 100 m hosszú rézdrót tömege 7,26 kg. Mekkora az átmérője? (8,8 $\frac{kg}{dm^3}$ a réz sűrűsége.)

K1 GY 2016. Határozzuk meg a henger alakú vasedény tömegét, ha a magassága 0,9 m, fenekének átmérője 0,7 m, és falának vastagsága 0,09 m. (A vas sűrűsége 7,42 $\frac{kg}{dm^3}$.)

K2 2017. Erősáramú kábelben 3 darab 6,6 mm átmérőjű rézdrót van. Kívül 2 mm falvastagságú, 3 cm-es belső átmérőjű ólomköpeny veszi körül, amelyen belül a fennmaradó részt szigetelőanyag tölti ki. Mekkora a tömege 1 m kábelnek? (A réz sűrűsége 8,9 $\frac{kg}{dm^3}$, az ólomé 11,4 $\frac{kg}{dm^3}$, a szigetelőanyagé 0,9 $\frac{kg}{dm^3}$.)

K1 2018. Mekkora a falvastagsága annak az üreges henger alakú öntöttvas oszlopnak, melynek külső keresztmetszete 90 cm kerületű kör, magassága 3,6 m, tömege 650 kg, sűrűsége 7,5 $\frac{kg}{dm^3}$?

K2 2019. Körhenger alakú fekvő kazán belső átmérője 150 cm, hossza 5 m. Mennyi víz van benne, ha a magasságának $\frac{4}{5}$ részéig áll a víz?

K2 2020. 15 cm sugarú hengeres fatörzs fekve úszik a vízben, és merülésének mélysége 12 cm. Mekkora a sűrűsége?

E1 **2021.** Mennyi víz önthető egy egyenes körhenger alakú, a függőleges helyzetből 36,57° szöggel elfordított literes edénybe, ha az edény magassága az átmérő kétszerese?

K1 **2022.** Egy ferde henger alkotója 3,42 m, az alkotónak az alapsíkkal bezárt szöge 32°16′, az alapkör sugara 1,57 m. Mekkora az alapsíkra merőleges, az alapkör és a fedőkör középpontjait tartalmazó metszet területe?

K1 **2023.** Egy ferde körhenger alkotói 30 cm hosszúak, az alkotók az alapsíkkal 57°28′ szöget zárnak be. Az alaplap sugara 5 cm. Mekkora a henger térfogata?

K2 **2024.** Egy ferde körhenger alkotói 15 dm hosszúak, az alkotók az alaplappal 67°34′ szöget zárnak be. Az alaplap kerülete a magasság ötszöröse. Mekkora a henger térfogata?

K1 **2025.** Egy ferde körhenger alkotói 36 dm hosszúak, az alkotók az alaplappal 32°48′ szöget zárnak be. Az alaplapra merőleges, az alapkör egy átmérőjén átmenő metszet területe 354,5 dm^2. Mekkora a henger térfogata?

II

Kúp, csonkakúp

Kúp

K2 **2026.** Adott három, nem egy síkban fekvő, egy ponton átmenő egyenes. Van-e olyan forgáskúp, melynek ezek alkotói?

K1 **2027.** Mekkora az egyenes körkúp magassága, ha
a) alkotója 10 cm, alaplapjának sugara 6 cm;
b) alkotója 128,9 cm, alaplapjának sugara 89,2 cm;
c) alkotója 0,09 m, alaplapjának sugara 0,02 m?

K1 **2028.** Mekkora az egyenes körkúp alkotója, ha
a) alaplapjának sugara 2,5 cm, magassága 4,6 cm;
b) alaplapjának sugara 11,5 dm, magassága 22,3 dm;
c) alaplapjának sugara 113,6 cm, magassága 86,7 cm?

K1 **2029.** Mekkora az egyenes körkúp alaplapjának sugara, ha
a) alkotója 7,9 dm, magassága 5,8 dm;
b) alkotója 7,28 cm, magassága 6,17 cm;
c) alkotója 132,7 mm, magassága 87,52 mm?

K1 **2030.** Mekkora a forgáskúp nyílásszöge, ha
a) alkotója 16,4 cm, az alapkör sugara 7,8 cm;
b) alkotója 111,6 mm, magassága 79,6 mm;
c) az alapkör sugara 7,82 cm, magassága 9,37 cm?

K1 **2031.** Mekkora a forgáskúp kiterített palástjának középponti szöge, ha
a) alkotója 8 cm, az alapkör sugara 5 cm;
b) alkotója 12,56 cm, magassága 9,28 cm?

K2 **2032.** Ferde körkúp alapkörének középpontja a csúcstól 10 cm-re van, és a kettőt összekötő szakasz az alaplappal 60°-os szöget zár be. Az alapkör sugara 5 cm. Számítsuk ki a magasságot, a leghosszabb alkotót és a legrövidebb alkotót.

K2 **2033.** Ferde körkúp leghosszabb alkotója 52 cm, legrövidebb alkotója 39 cm, az alapkör középpontját a csúccsal összekötő szakasz 42,4 cm. Mekkora az alaplap sugara?

K2 **2034.** Ferde körkúp leghosszabb alkotója 92,6 cm, legrövidebb alkotója 52,6 cm, az alapkör sugara 31,7 cm. Milyen távolságra van az alapkör középpontja a csúcstól?

K2 **2035.** Metsszük az r alapsugarú körkúpot az alaplappal párhuzamosan olyan síkkal, mely a kúp magasságát
a) felezi;
b) a csúcstól számítva 1 : 3 arányban osztja;
c) a csúcstól számítva $m : n$ arányban osztja.
Mekkora a metszet területe?

K1 **2036.** Mekkora az egyenes körkúp felszíne, ha
a) alaplapjának sugara 11,5 cm, alkotója 22,3 cm;
b) alaplapjának sugara 9 dm, magassága 12 dm;
c) magassága 112,5 mm, nyílásszöge 52°?

E1 **2037.** Egyenes körkúp felszíne 1346,52 cm^2, tengelymetszetének területe 203,6 cm^2. Mekkora az alaplap sugara (r), a kúp magassága (m) és alkotója (a)?

K1 **2038.** Egyenes körkúp kiterített palástja 10 cm sugarú félkör. Mekkora a kúp magassága, alapkörének sugara és nyílásszöge?

K1 **2039.** Negyedkörből kúppalástot alakítunk. Milyen kapcsolat van a kúp magassága és alapkörének sugara között?

K1 **2040.** 16,5 cm magas kúp nyílásszöge 47,6°. Mekkora a kiterített palást középponti szöge és területe?

K1 **2041.** 50 cm^2 területű negyedkörből kúppalástot alakítunk. Mekkora az alapkör területe?

K1 **2042.** Milyen magas az egyenes körkúp, ha az alapkör sugara 9,7 cm, és a kiterített palást középponti szöge 100°?

K1 GY **2043.** Egy sátorlap területe 8 m^2. Az egyenes körkúp alakú sátor alapkörének átmérője 2,2 m. Milyen magas a sátor?

K2 **2044.** 46 cm magas egyenes körkúpot a csúcstól számítva mekkora távolságban kell az alaplappal párhuzamos síkkal elmetszeni, hogy a palást területét felezzük?

E1 **2045.** 33 cm magas egyenes körkúpot a csúcstól számítva mekkora távolságban kell az alaplappal párhuzamos két síkkal metszeni, hogy a palást területét három egyenlő részre osszuk?

E1 **2046.** Adott egyenes körkúp palástját az alaplappal párhuzamos síkkal a csúcstól számítva $a : b$ arányban kell osztani. Milyen távolságra lesz a metszősík a csúcstól, ha a kúp magassága m?

E2 **2047.** Osszuk fel egy egyenes körkúp palástját az alaplappal párhuzamos $(n - 1)$ síkkal n egyenlő részre. A csúcstól milyen távolságra kell ezeket a síkokat felvenni, ha a kúp magassága m?

K1 **2048.** Mekkora egy egyenes körkúp felszíne és térfogata,
a) alaplapjának sugara 1,56 cm, magassága 0,25 cm;
b) alaplapjának sugara 3,1 dm, alkotója 4,8 dm;
c) magassága 91 cm, alkotója 109 cm;
d) magassága 20 cm, nyílásszöge 26°?

K1 **2049.** Két egyenes körkúp magasságainak, illetve alapkör sugarainak aránya 2:1. Hogyan aránylik egymáshoz a két test felszíne, illetve térfogata?

K1 **2050.** Mekkora az egyenes körkúp felszíne és térfogata, ha alkotója 72 cm, magasságának és az alaplap sugarának különbsége pedig 33 cm?

K1 **2051.** Egyenlő oldalú kúp (olyan egyenes körkúp, amelynek a tengelymetszete szabályos háromszög) magassága 0,7 m. Mekkora a felszíne és a térfogata?

K1 **2052.** Mekkora az egyenlő oldalú kúp alkotója, ha a felszíne 1 m^2?

K1 **2053.** Mekkora az egyenlő oldalú kúp alkotója, ha a térfogata 1 m^3?

K2 **2054.** Mekkora az egyenes körkúp felszíne, ha térfogata 247 cm^3, alkotója pedig háromszor akkora, mint az alapkör sugara?

E1 **2055.** Egyenes körkúp tengelymetszetének területe 1,56 m^2, alkotója 2,1 m. Mekkora a térfogata?

K1 **2056.** Mekkora a térfogata annak az egyenes körkúpnak, amelynek palástja kiterítve egy 16 cm sugarú harmadkör?

K1 **2057.** Forgassunk meg a szimmetriatengelye körül egy egyenlő szárú háromszöget, amelynek alapja 88 cm, szárai 125 cm hosszúak. Mekkora lesz a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

K1 **2058.** Egyenes körkúp palástja kiterítve a sugarú félkör. Mekkora a felszíne és a térfogata?

K2 **2059.** Egyenes körkúp palástja kiterítve 12 cm sugarú, 240° középponti szögű körcikk. Mekkora a térfogata?

K1 **2060.** Egyenes körkúp alapkörének sugara 6 cm. A palást területe kétszer akkora, mint az alapköré. Mekkora a kúp térfogata?

K1 **2061.** Egyenes körkúp tengelymetszetének területe 400 cm^2, az alkotók az alaplappal 65°-os szöget zárnak be. Mekkora a kúp felszíne és térfogata?

K1 **2062.** Egyenes körkúp felszíne 20 m^2, az alkotók az alaplappal 35°-os szöget zárnak be. Mekkora a kúp térfogata?

K1 **2063.** Egyenes körkúp térfogata 4,05 m^3, alkotói az alaplappal 72°18′ szöget zárnak be. Mekkora a kúp felszíne?

K2 **2064.** Egyenes körkúp magassága 42,6 cm, alaplapjának sugara 12,7 cm. A csúcstól milyen távolságban kell a kúpot az alaplappal párhuzamos síkkal metszeni, hogy a két rész térfogata egyenlő legyen. Mekkora a síkmetszet sugara?

K1 **2065.** A csúcstól számítva milyen távolságban kell az egyenes körkúpot az alaplappal párhuzamos síkkal elmetszeni, hogy térfogatát felezzük, ha a magassága m?

E1 **2066.** Egyenes körkúp magassága 53,4 dm, alaplapjának sugara 21,8 dm. A csúcstól milyen távolságban kell a kúpot az alaplappal párhuzamos síkkal metszeni, hogy az alsó rész térfogata 7 972,8 dm^3 legyen?

V **2067.** Az adott alkotójú egyenes körkúpok között melyiknek a térfogata a legnagyobb?

V **2068.** *(Az 1998. feladatra épül.)* Egyenlő felszínű egyenes körkúpok között melyiknek a térfogata a legnagyobb?

V **2069.** *(A 2068. feladatra épül.)* Egyenlő térfogatú egyenes körkúpok között melyiknek a felszíne a legkisebb?

K2 **2070.** Két egyenes körkúpnak közös az alaplapja. A csúcsok az alapsík ugyanazon oldalán vannak. Az egyiknek az alkotói az alaplappal 78°50′, a másikéi 25°40′ szöget zárnak be. Az alapkör sugara 5 cm. Mekkora a két palást közt levő térrész felszíne és térfogata?

K2 **2071.** 10 cm alapsugarú és 18 cm magasságú egyenes körkúpból egy 8 cm alapsugarú, egyenes körkúp alakú részt kivágnak. A két kúpnak közös a tengelye és egyenlő a nyílásszöge. Mekkora a megmaradt rész térfogata?

K2 **2072.** Két egyenes körkúpnak közös az alapja. A csúcsok távolsága 3,2 dm. Egyiknek a nyílásszöge 90°, a másiké 60°. Mekkora a palástok közti térrész térfogata?

E1 **2073.** 14 cm magas egyenes körkúp alaplapjának sugara 8 cm, a kúp csúcsán áthaladó sík az alapkör síkjával 78°-os szöget zár be. Mekkora a sík által lemetszett kúprész térfogata?

E1 **2074.** Mekkora egy ferde körkúp térfogata, ha az alaplap sugara 10 cm, a leghosszabb alkotója 32 cm, a legrövidebb alkotója 26 cm?

E1 **2075.** Ferde körkúp leghosszabb és legrövidebb alkotójának összege 8 dm, ezek hajlásszöge 45°, és az általuk meghatározott háromszög területe $\frac{15\sqrt{2}}{4}$ dm^2. Mekkora a kúp térfogata?

E1 **2076.** Ferde körkúp legrövidebb alkotója 32 cm, és az alaplappal 65°15′ szöget zár be. A leghosszabb alkotója 58 cm. Mekkora a kúp térfogata?

E1 **2077.** Egyenes körkúp palástjának területe k-szorosa az alaplap területének. Mekkora a kiterített palást középponti szöge?

E1 **2078.** Egyenes körkúp palástjának területe t. A kiterített palást középponti szöge 36°. Mekkora a kúp térfogata?

K1 GY **2079.** A kiöntött homok egyenes körkúp alakú, melynek alkotói az alaplappal 31°-os szöget zárnak be. Milyen magas és széles az a homokkúp, amelyben 15 m^3 homok van?

E1 **2080.** Mennyi a vízen úszó kúp alakú jégtömb tömege, ha a víz színén kirajzolódó metszésvonal kerülete 25,12 m, és a kiálló, kúp alakú rész alkotója 5 m? (A víz sűrűsége $1\frac{kg}{dm^3}$, a jégé $0{,}9\frac{kg}{dm^3}$.)

E1 **2081.** Egyenes körkúp alakú test a csúcsával lefelé úszik a vízen. Magassága 2,5 cm, sűrűsége $0{,}73\frac{kg}{dm^3}$. Mennyire merül a víz alá?

Csonkakúp

K1 **2082.** Egyenes csonkakúp alapkörének sugara 26 cm, a fedőlap sugara 17 cm, a magasság 7,8 cm. Mekkorák az alkotók, és mekkora szöget zárnak be az alaplappal?

K1 **2083.** Egyenes csonkakúp alapkörének sugara 3,9 cm, a fedőlap sugara 1,7 cm, az alkotók 2,3 cm hosszúak. Mekkora a magasság, és mekkora szöget zárnak be az alkotók az alaplappal?

K1 **2084.** Egyenes csonkakúp alapkörének sugara 33,42 cm, magassága 21,16 cm, alkotója 30,17 cm. Mekkora a fedőlap sugara, és mekkora szöget zárnak be az alkotók az alaplappal?

K1 **2085.** Egyenes csonkakúp alapkörének sugara 113,5 m, a fedőlap sugara 92,8 m, az alkotók az alaplappal 45°-os szöget zárnak be. Mekkora a magassága és mekkorák az alkotói?

K1 **2086.** Mekkora az egyenes csonkakúp felszíne, ha
a) az alapkör sugara 11,3 cm, a fedőlapé 8,9 cm, alkotója 21,7 cm;
b) az alapkör sugara 112,5 mm, a fedőlapé 97,3 mm, magassága 86,5 mm?

K1 GY **2087.** Egyenes csonkakúp alakú papír lámpaernyő alkotója 35 cm, a felső nyílás átmérője 6 cm, az alsóé 45 cm. Mekkora a palást területe?

E1 **2088.** Egyenes csonkakúp felszíne 628,17 cm^2, alkotója 12,6 cm, az alaplap sugara 6 cm-rel nagyobb a fedőlap sugaránál. Mekkora az alap- és a fedőlap sugara?

E1 **2089.** Egyenes csonkakúp palástjának területe 1933,2 cm^2, az alkotók az alaplappal 74,7°-os szöget zárnak be. A fedőlap sugara harmadrésze az alap sugarának. Mekkora az alap- és a fedőlap sugara?

K2 **2090.** Egyenes csonkakúp alapterülete 25 cm^2, a fedőlap területe 17 cm^2, az alkotók 12 cm hosszúak. Mekkora a palást területe?

K1 **2091.** Egyenes csonkakúp alapkörének sugara 1,25 cm, a fedőlapé 0,6 cm. Palástjának területe 29,045 cm^2. Mekkora a magassága?

K1 **2092.** Egyenes csonkakúp alapkörének sugara 4 dm, a fedőlapé 2 dm. A felszíne 107,89 dm^2. Mekkora a magassága?

E2 **2093.** Egyenes csonkakúp alaplapjának sugara 16,5 cm, a fedőlapé 11,7 cm. Az alkotók hossza 19,3 cm. A fedőlaptól milyen távolságban kell a csonkakúpot az alaplappal párhuzamos síkkal metszenünk, hogy a két rész palástjának területe egyenlő legyen? Mekkora a síkmetszet sugara?

K1 **2094.** Számítsuk ki az egyenes csonkakúp térfogatát, ha
a) az alaplap sugara 11 cm, a fedőlapé 7 cm, a magasság 1,7 cm;
b) az alaplap sugara 0,9 cm, a fedőlapé 0,09 cm, a magasság 0,02 cm;
c) az alaplap sugara 113,7 mm, a fedőlapé 86,9 mm, alkotója 142,8 mm;
d) az alaplap sugara 45,16 mm, magassága 28,9 mm, alkotója 35,42 mm.

K1 GY **2095.** Egyenes csonkakúp alakú vízgyűjtő felső átmérője 102 cm, alsó átmérője 84 cm, magassága 72 cm. Hány liter víz fér bele?

K1 **2096.** Húrtrapéz forog a szimmetriatengelye körül. A trapéz párhuzamos oldalai 22 cm, illetve 8 cm, a nem párhuzamos oldalak 13 cm hosszúak. Mekkora a forgás közben keletkezett csonkakúp térfogata?

K2 **2097.** Egyenes csonkakúp térfogata 347,13 m^3, az alapkör kerülete 50 m, a fedőlap kerülete 30 m. Mekkora szöget zárnak be a csonkakúp alkotói az alaplappal?

E1 **2098.** Egyenes csonkakúp térfogata 2021,6 dm^3, az alapkör sugara 5,7 dm, a magassága 32,5 dm. Mekkora a fedőlap sugara?

E1 **2099.** Egy egyenes henger és egy egyenes csonkakúp egyforma magas, és alaplapjuk sugara is egyenlő. Számítsuk ki a csonkakúp alap- és fedőköre sugarának arányát, ha tudjuk, hogy a csonkakúp térfogata fele a henger térfogatának.

E1 GY **2100.** Tutajt állítottak össze 36 db fenyőfatörzsből, amelyek mindegyike 12 m hosszú. Vastagabb végüknél 28 cm, vékonyabb végüknél 20 cm az átmérőjük. A fenyőfa sűrűsége $0{,}6\ \frac{kg}{dm^3}$. Mekkora terhet bír el a tutaj?

K1 GY **2101.** Egyenes csonkakúp alakú edény magassága 0,2 m, alapkörének sugara 0,2 m, fedőkörének sugara 0,15 m. Teleöntjük 1,82 $\frac{kg}{dm^3}$ sűrűségű folyadékkal. Mennyi a folyadék tömege?

E1 **2102.** Egyenes csonkakúp fedőlapjának területe 3 m^2, az alaplapé négyszer akkora. Az alaplap középpontjának távolsága a fedőlap kerületének tetszőleges pontjától akkora, mint a fedőlap átmérője. Mekkora a térfogata?

K1 GY **2103.** Egy parkban öt egyforma, csonkakúp alakú virágágyat készítenek. Az alapkör sugara 5,2 m, a fedőlap sugara 4,8 m, a magassága 0,4 m. Hány m^3 földet kell hozatni?

E1 **2104.** Egy 3 m magasságú egyenes csonkakúp fedőlapjának átmérője és alkotója egyenlő. Tengelymetszetének kerülete 15 m. Mekkora a felszíne és a térfogata?

E1 GY **2105.** Egy egyenes csonkakúp alakú bádogvödör alapjának átmérője 26 cm, felső körének átmérője 42 cm, a magassága 38 cm. Mennyi víz fér bele? Mennyi bádog kell az elkészítéséhez? Összeillesztésre és hulladékra 6%-ot számítunk.

K2 **2106.** Egyenes csonkakúp palástja 128,64 dm^2, az alkotók az alaplappal 59,5°-os szöget zárnak be. Az alap- és fedőlap sugarainak különbsége 33 cm. Mekkora a térfogata?

E1 **2107.** Egyenes csonkakúp felszíne 527,5 dm^2, palástjának területe 314,2 dm^2, és alkotója 10,3 dm. Mekkora a térfogata?

K2 **2108.** Egyenes csonkakúp palástja 502,7 dm^2, magassága 6,3 dm, és alkotója 9,7 dm. Mekkora a térfogata?

K2 **2109.** Csonkakúp palástja kiterítve olyan körgyűrűcikk, amelynek sugarai 6 cm és 2,5 cm hosszúak, középponti szöge pedig 120°. Mekkora a csonkakúp felszíne és térfogata?

E1 **2110.** Csonkakúp palástja kiterítve olyan körgyűrűcikk, melynek területe 202 cm^2, a középponti szöge 120,6°, és a külső sugár a belsőnek kétszerese. Mekkora a csonkakúp térfogata?

E1 **2111.** Egyenes csonkakúp alapkörének sugara 8,6 m, a fedőlap sugara 5,8 m, magassága 7 m. Messük a csonkakúpot az alaplaptól 2 m távolságra az alaplappal párhuzamos síkkal. Mekkora a keletkezett két rész térfogata?

E2 **2112.** Egyenes csonkakúp alaplapjának sugara 8 dm, a fedőlapé 6 dm, magassága 14 dm. A fedőlaptól milyen távolságban kell a csonkakúpot az alaplappal párhuzamos síkkal metszeni, hogy a két rész térfogata egyenlő legyen. Mekkora a síkmetszet sugara?

E2 **2113.** Egyenes körkúp magassága 10 m, alaplapjának sugara 5 m. Az alaplaptól milyen távolságban kell a kúpot az alaplappal párhuzamosan metszeni, hogy a kapott csonkakúp térfogata 20 m^3 legyen?

E2 **2114.** Egyenes csonkakúp alapkörének sugara 5 dm, a fedőlap sugara 3 dm, magassága 4 dm, sűrűsége 0,6 $\frac{kg}{dm^3}$. Mennyire merül el a vízben, ha az 5 dm sugarú lapja van alul?

E2 **2115.** Egyenes csonkakúp magassága 3 m, az alapkör sugara 2 m, a fedőlap sugara 1 m. Osszuk fel a testet az alaplappal párhuzamos síkokkal három olyan részre, melyek térfogatának aránya a fedőlaptól az alaplap felé haladva 2:3:7. Mekkora lesz a kimetszett körök sugara?

II

Gömb

K1 **2116.** Milyen összefüggés van a gömb R sugara, egy körmetszetének r sugara és a kör síkjának a gömb középpontjától való d távolsága között?

E1 **2117.** Bizonyítsuk be, hogy ha két különböző síkú kör két pontban metszi egymást, akkor pontosan egy olyan gömb van, amelynek mindkét kör síkmetszete.

E1 **2118.** Bizonyítsuk be, hogy ha két párhuzamos síkú kör középpontjait összekötő egyenes merőleges a síkokra, akkor pontosan egy olyan gömb van, amelynek mindkét kör síkmetszete.

E1 **2119.** Bizonyítsuk be, hogy ha két különböző síkú kör érintkezik, akkor pontosan egy olyan gömb van, amelynek mindkét kör síkmetszete. (Két kör érintkezik, ha egy közös pontjukban közös az érintőjük.)

E1 **2120.** Adott egy kör és egy pont, amelyik nincs rajta a kör síkján. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan gömb van, melynek az adott kör síkmetszete, és az adott pont pontja.

K1 **2121.** Bizonyítsuk be, hogy egy külső pontból egy adott gömbhöz húzott érintő egyenesek egy forgáskúp alkotói, és a ponttól az érintési pontig terjedő szakaszok egyenlők.

E1 **2122.** Adott síkot érint három R sugarú gömb, melyek páronként egymást is érintik. Egy negyedik gömb érinti mindhárom gömböt és a síkot. Határozzuk meg a negyedik gömb sugarát.

K2 **2123.** Egy tetraéder egy csúcsból kiinduló a, b, c élei páronként merőlegesek egymásra. Határozzuk meg a körülírt gömb sugarát.

K1 **2124.** Mekkora a gömb síkmetszetének sugara, ha
a) a gömb sugara 3,49 cm, a metszősíknak a gömb középpontjától való távolsága 1,8 cm;
b) a gömb sugara 125 m, a metszősíknak a gömb középpontjától való távolsága 117 m.

K1 **2125.** Mekkora a területe annak a körnek, amelyet egy R sugarú gömbből metsz ki egy olyan sík, amely a gömb középpontjától feleakkora távolságra van, mint a gömb sugarának hosszúsága?

K1 **2126.** Milyen távolságra van az R sugarú gömb középpontjától az a sík, amelyik a gömbből feleakkora sugarú kört metsz ki, mint amekkora a gömb főkörének sugara?

K2 **2127.** Milyen távolságra van az R sugarú gömb középpontjától az a sík, amelyik a gömbből feleakkora területű kört metsz ki, mint amekkora a gömb főkörének területe?

K2 **2128.** Mekkora a gömb sugara, ha két körmetszetének sugara 7 cm és 15 cm, és a középponttól mért távolságaik aránya 6 : 5?

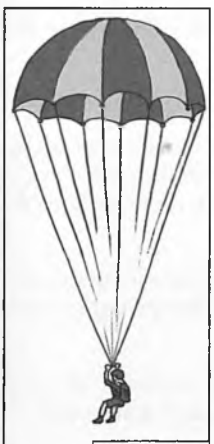
E1 **2129.** Egy gömb két párhuzamos, egymástól 6 cm távolságban levő metszősíkja a gömböt 20 cm, illetve 25 cm sugarú körökben metszi. Mekkora a gömb sugara?

K1 GY 2130. Milyen hosszú az egyfoknyi távolság a Budapesten átvonuló szélességi körön? (Budapest földrajzi szélessége 47,5° az Egyenlítőtől északra; a Föld sugara 6370 km.)

K1 **2131.** Mekkora a gömb felszíne, ha sugara *a)* 35 cm; *b)* 1,2 cm; *c)* 16,449 m?

K1 **2132.** Mekkora a gömb sugara, ha felszíne *a)* 50 m^2; *b)* 257,47 dm^2; *c)* 1124,5 cm^2?

K1 **2133.** Hogyan változik a gömb felszíne, ha a sugara *a)* kétszeresére; *b)* háromszorosára; *c)* k-szorosára változik?



2134. ábra

K1 GY 2134. Hány m^2 selyem kell egy ejtőernyőhöz, ha azt 6,5 m sugarú félgömbnek vehetjük? Hulladékra, ráhajtásra még 10 %-ot számolunk. *(2134. ábra)*

K1 GY 2135. Mekkora területet tesz ki a Földön a szárazföld? (A Földet vegyük 6 370 km sugarú gömbnek, és a szárazföldet a földfelszín $\frac{1}{3}$ részének.)

K1 **2136.** Egy üres gömb külső sugara 16 cm, a falvastagság 6 mm. Mennyivel nagyobb a külső gömb felszíne a belsőénél?

K2 GY 2137. Hány százalékkal csökkent a csapágygolyó felszíne, ha az eredetileg 12 mm-es átmérője a kopás következtében 0,8 mm-rel lett kevesebb?

K2 **2138.** Adott két koncentrikus gömb. Vegyük fel a kisebbiknek egy érintő síkját, ez a nagyobbik gömböt egy körben metszi. Legyen ez a kör egy újabb gömb főköre. Bizonyítsuk be, hogy e gömb felszíne megegyezik a két koncentrikus gömb felszínének különbségével.

K1 **2139.** Három gömb sugarai egy derékszögű háromszög oldalai. Bizonyítsuk be, hogy a legnagyobb gömb felszíne egyenlő a másik két gömb felszínének összegével.

K1 **2140.** Mekkora a gömb térfogata, ha a sugara *a)* 1,2 mm; *b)* 0,03 m; *c)* 7,816 dm; *d)* 12,22 cm?

K1 **2141.** Mekkora a gömb sugara, ha a térfogata *a)* 533,6 m^3; *b)* 964,78 dm^3; *c)* 1536,77 cm^3?

K1 **2142.** Mennyi a 12 cm külső sugarú és 1 cm falvastagságú üres golyó térfogata?

K1 GY 2143. Hány 5 cm sugarú gömb önthető 20 kg ólomból? (Az ólom sűrűsége 11,38 $\frac{kg}{dm^3}$.)

E1 GY 2144. Mekkora a 7,2 $\frac{kg}{dm^3}$ sűrűségű, 37,5 kg-os, 4 cm falvastagságú üres vasgolyó külső átmérője?

K1 2145. Hányszorosára változik a gömb térfogata, ha a sugara kétszeresére, háromszorosára, n-szeresére változik?

K1 GY 2146. Mekkora a tömege a 12 cm átmérőjű tekegolyónak, ha a sűrűsége 0,8 $\frac{kg}{dm^3}$?

K1 GY 2147. A hajdani 24 cm-es mozsárágyú lövedéke 23,6 cm átmérőjű tömör vasgolyó volt. Mekkora volt a lövedék tömege, ha a sűrűsége 7,8 $\frac{kg}{dm^3}$ volt?

K1 GY 2148. Egy üres vasgolyó külső sugara R, sűrűsége 7,5 $\frac{kg}{dm^3}$. Tiszta vízben teljesen elmerülve lebeg. Mekkora a belső sugara?

K1 GY 2149. Egy 16 cm külső sugarú 3 mm falvastagságú gömb félig merülve úszik a vízen. Milyen sűrűségű anyagból készítették?

K2 GY 2150. Mekkora a 20 000 m^3-es gömb alakú gáztartály átmérője? Milyen vastag acéllemezből készült, ha tudjuk, hogy a tömege 260 000 kg, a sűrűsége 7,5 $\frac{kg}{dm^3}$?

K2 2151. Mekkora a gömb térfogata, ha a felszíne *a)* 314,16 m^2; *b)* 12,564 cm^2; *c)* 10 dm^2; *d)* 0,06 m^2?

K2 2152. Mekkora a gömb felszíne, ha a térfogata *a)* 64 cm^3; *b)* 1229 m^3; *c)* 128,2 dm^3; *d)* 0,08 m^3?

K1 2153. Mekkora egy 0,6 $\frac{kg}{dm^3}$ sűrűségű 4 kg-os fagolyó felszíne és térfogata?

K1 GY 2154. Hány csepp köd képződik 1 cm^3 vízből, ha 1 csepp köd átmérője $3 \cdot 10^{-3}$ mm?

K2 GY 2155. A Hold sugara $\frac{3}{11}$ része a Föld sugarának. Hányadrésze a Hold felszíne és térfogata a Földének? (Mindkét égitestet gömbnek tekintjük.)

K1 2156. Egy gömb felszíne 40 cm^2. Mekkora a felszíne annak a gömbnek, amelynek térfogata kétszer akkora, mint az első gömbé?

K1 2157. Egy gömb térfogata 30 cm^3. Mekkora a térfogata annak a gömbnek, amelynek felszíne fele az első gömb felszínének?

E1 2158. Ha egy gömb sugarát 2 dm-rel megnöveljük, akkor a térfogata 1 132,5 dm^3-rel növekszik. Mekkora a gömb sugara?

E1 2159. Két gömb felszínének összege 5 672,8 dm^2, a sugaruk különbsége 0,9 dm. Mekkora a két gömb sugara?

E1 2160. Két gömb térfogatának különbsége 1 683,72 dm^3. A két sugár különbsége 1,3 dm. Mekkora a két gömb sugara?

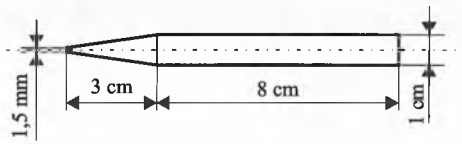
K1 2161. Egy gömböt két, egymástól 3 cm távolságban levő párhuzamos síkkal elmetszünk. A középpont a metsző síkokat nem választja el egymástól. A metszetek sugarai 9 cm és 12 cm. Mekkora a gömb térfogata?

Összetett térgeometriai alakzatok

Egymáshoz illesztett testek

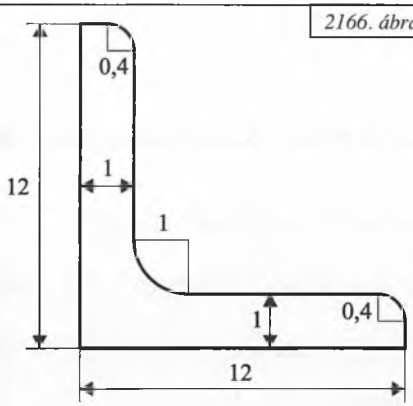
K1 GY 2162. Egy acél lyukasztó hengeres része csonkakúpban végződik. Tengelymetszetét a *2162. ábra* mutatja. A hengeres rész átmérője 1 cm, hossza 8 cm, a csonkakúp magassága 3 cm, kisebbik alapkörének átmérője 1,5 mm. Mekkora a tömege? (Sűrűsége 7,85 $\frac{g}{cm^3}$.)

2162. ábra

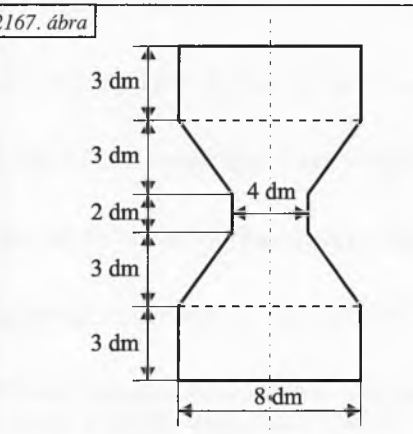


K1 GY 2163. Egy víztartály alakja henger, és mindkét végét egy-egy félgömb zárja le. A henger átmérője 40 cm, hossza 1,5 m. Mekkora a tartály térfogata?

2166. ábra



2167. ábra



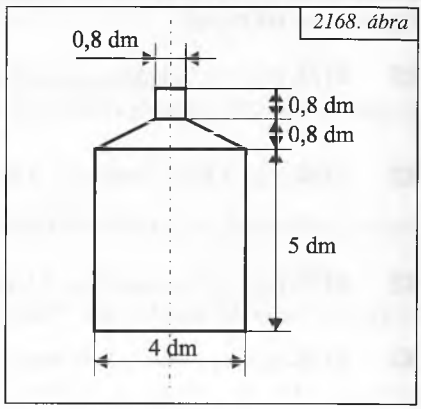
K1 GY 2164. Egy üveg kémcső alul 1,6 cm átmérőjű félgömbben végződik. A hengeres cső hossza 16 cm. Mekkora a térfogata?

K1 GY 2165. Az anyacsavar szabályos hatszög alapú egyenes hasáb, oldallapjai négyzetek. Hengeres (csavarmenetes) furatának közepes átmérője egyenlő az élekkel. Számítsuk ki 1000 db anyacsavar tömegét, ha az élhossza 2 cm, és a sűrűsége 7,8 $\frac{g}{cm^3}$.

K2 GY 2166. Mekkora a tömege a felrajzolt keresztmetszetű sarokvas 1 méterének? (Sűrűsége 7,8 $\frac{g}{cm^3}$; a *2166. ábrán* a méretek cm-ben értendők.)

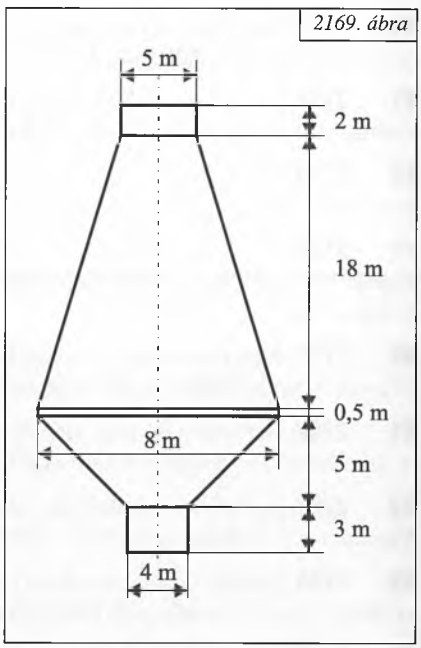
K1 GY 2167. Mennyi lemezre van szükség a felrajzolt tengelymetszetű csőidom készítéséhez? (A cső henger- és csonkakúppalástokból tevődik össze.) *(2167. ábra)*

K2 GY 2168. Hány liter olaj fér a felrajzolt tengelymetszetű kannába, ha színültig töltjük? Mennyi bádog szükséges a kanna elkészítéséhez, ha az összeillesztésre, a peremre és a hulladékra még 5%-ot hozzászámítunk? *(2168. ábra)*



2168. ábra

K1 GY 2169. Egy vas nagyolvasztó méretekkel megjelölt tengelymetszetét mutatja a *2169. ábra*. Az olvasztó henger és csonkakúp részekből van összerakva. Mekkora a térfogata?

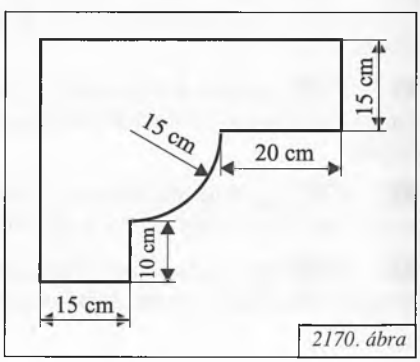


2169. ábra

K2 GY 2170. Egy betonpárkány keresztmetszetét mutatja a *2170. ábra*. Mekkora az 1 m magas párkány tömege, ha 1 m^3 betoné 2440 kg?

K1 GY 2171. Egy 0,6 cm vastag, kettős domború lencse mindkét felülete egy-egy egyenlő sugarú gömb süvege. A közös alapkör sugara 4 cm. Mekkora a gömbök sugara?

K1 GY 2172. Mekkora a szabályos nyolcszög alapú egyenes gúla alakú tető magassága, ha alapéle $\frac{11}{3}$ m, beburkoltatására pedig ugyanannyi lemez szükséges, mint egy $\frac{31}{3}$ m sugarú félgömb alakú kupolához?



2170. ábra

Egymásba írt testek

K2 **2173.** Egy háromoldalú egyenes hasábba egyenes hengert írunk. Mekkora a henger térfogata, ha a hasáb térfogata 19 850 cm^3, és a hasáb alaplapjának oldalai 44 cm, 39 cm, 17 cm?

K2 **2174.** Egy 4,6 dm átmérőjű, 5 dm magasságú, 7,2 $\frac{kg}{dm^3}$ sűrűségű hengerből a lehető legnagyobb szabályos nyolcoldalú oszlopot kell készíteni. Mekkora lesz az oszlop tömege?

K2 **2175.** Egy 0,3 m átmérőjű, 3,5 m hosszú henger alakú rönkfából a lehető legnagyobb négyzetes gerendát kell kivágni. Mekkora lesz a gerenda, illetve a hulladék térfogata?

K2 **2176.** Egy egyenlő oldalú henger (alapkörének átmérője egyenlő a testmagassággal) térfogata 785,4 m^3. Mekkora a belőle faragható legnagyobb szabályos nyolcszög alapú egyenes hasáb alap- és oldaléle?

K1 **2177.** Mekkora az r sugarú és m magasságú egyenes hengerbe írt lehető legnagyobb négyzetes oszlop oldallapjának területe?

K1 **2178.** Írjunk az a élű kocka köré olyan egyenes körhengert, amelynek alapkörei egy szemközti lappár köré írt körök. Mekkora a henger térfogata?

E2 **2179.** Írjunk az a élű szabályos tetraéder köré egyenes körhengert úgy, hogy két szemközti éle a henger alap- és fedőkörének átmérője legyen. Mekkora e henger térfogata?

K2 **2180.** Mekkora az egyenes csonkakúpba írt szabályos nyolcszög alapú egyenes csonkagúla térfogata, ha a csonkakúp alap- és fedőlapjának sugara 6 dm és 3,5 dm, magassága pedig 12 dm?

K2 **2181.** Egyenes körkúp alaplapjának átmérője 3 dm, magassága 8 dm. Mekkora a kúp és a kúpba írt szabályos nyolcszög alapú gúla térfogatának a különbsége?

E1 **2182.** Háromoldalú gúla alapélei 16 cm, 30 cm és 34 cm, a magassága 36 cm. Mekkora a beleírható és a köréje írható kúp térfogata?

K2 **2183.** Szabályos tizenkétszög alapú gúla alapélei 12 cm hosszúak, magassága 22 cm. Mekkora a beleírható és a köréje írható kúp térfogata?

K2 **2184.** Szabályos hatszög alapú egyenes gúlát a lehető legnagyobb térfogatú kúppá csiszolunk. A gúla térfogatának hányadrésze lesz a hulladék?

K1 **2185.** Egy csonkakúp alap- és fedőkörének sugara R és r, magassága m. Vágjuk ki belőle a lehető legnagyobb térfogatú négyzet alapú csonkagúlát. Mekkora lesz a csonkagúla térfogata?

E1 **2186.** Egyenes körkúp köré 671,6 m^3 térfogatú háromoldalú gúlát írunk. A gúla alaplapja olyan egyenlő szárú háromszög, aminek az alapon fekvő szöge 58°. Mekkora a kúp térfogata?

K2 **2187.** Egy kúp alapkörének sugara 3 cm, tengelymetszete szabályos háromszög. Mekkora a beleírható négyzet alapú gúla felszíne és térfogata?

K2 **2188.** Egy 7 cm sugarú kör alapú, 6 cm magasságú egyenes kúp köré szabályos háromszög alapú gúlát írunk. Mekkora az oldallapok területe?

K1 **2189.** Milyen magas az az r sugarú egyenes körhenger, amelybe írt kúp palástjának területe egyenlő a henger palástjának területével?

K2 **2190.** Egy R sugarú gömbbe hengert írunk, melyben a palást területe háromszorosa az alaplap területének. Határozzuk meg a henger térfogatát.

K2 **2191.** Egy egyenlő oldalú henger (tengelymetszete négyzet) felszíne $\frac{3}{5}$ része egy gömb felszínének. Hányadrésze a térfogata?

E1 **2192.** Az egységsugarú gömbbe írt henger palástja félakkora területű, mint a gömb legnagyobb köre. Mekkora a henger magassága?

E1 **2193.** Egy gömb térfogata 122,6 cm^3. A gömbbe egyenes körkúpot írunk, melynek tengelymetszetében a kúp csúcsánál levő szög 56,7°. Mekkora a kúp térfogata?

K2 **2194.** Határozzuk meg a közös alaplapon álló félgömb és az egyenes kúp palástja területének arányát, ha a kúp magassága akkora, mint az alapkör átmérője?

E2 **2195.** Határozzuk meg a közös alaplapon álló félgömb és egyenes kúp metszésvonalának sugarát, ha a kúp magassága és a gömb átmérője is $2R$.

E2 **2196.** Közös alaplapon áll egy félgömb és egy egyenes körkúp. A kúp magassága a félgömb sugarának kétszerese. Milyen arányban osztja a gömb a kúp palástját?

E1 **2197.** Egy gömb felszíne 1000 cm^2. Mekkora a beírt 45°-os nyílásszögű egyenes körkúp térfogata?

K1 **2198.** Számítsuk ki a 3,69 dm alapsugarú és 8 dm magasságú egyenes körkúpba írt gömb felszínét.

E2 **2199.** Egy r alapsugarú egyenes körkúpba írt gömb felszíne kétharmada a kúppalást területének. Mekkora a gömb sugara?

K2 **2200.** Egyenes körkúp alaplapjának sugara 2 m, alkotója az alaplappal 54°-os szöget zár be. Számítsuk ki a körülírt és a beírt gömb sugarát.

K2 **2201.** Mekkora a gömb térfogata, ha a gömbbe írható egy 12 cm alapsugarú, 32 cm alkotójú egyenes körkúp?

K1 **2202.** Mekkora az egyenlő oldalú kúpba írt gömb térfogata, ha a kúp magassága 12 cm? (Az egyenlő oldalú kúp tengelymetszete szabályos háromszög.)

E2 **2203.** Egy R sugarú gömbbe egyenes körkúpot írunk, melyben a palást területe $\sqrt{5}$-szöröse az alaplap területének. Határozzuk meg a kúp térfogatát.

K2 **2204.** Egyenlő oldalú kúp alapköre ugyanakkora, mint egy gömb főköre. Határozzuk meg a felszínek és a térfogatok arányát.

K2 **2205.** Egy egyenlő oldalú kúp és egy gömb felszíne egyenlő. Határozzuk meg a térfogatok arányát.

K2 **2206.** Határozzuk meg egy egyenlő oldalú kúp és a beírt gömb felszínének és térfogatának arányát.

E2 **2207.** Írjunk egy gömb köré és a gömbbe egyenlő oldalú kúpot. Határozzuk meg a három test felszínének és térfogatának arányát.

II

V **2208.** Egymást kívülről érintő két gömb sugara 5 cm és 8 cm. Vegyünk egy kúpot, amelyik mindkét gömböt érinti. Mekkora a kúp palástjának az a része, amelyik a két érintési kör között van?

K2 **2209.** Írjunk egy 10 cm sugarú gömb köré egyenes körkúpot, amelynek alapköre 20 cm sugarú. Mekkora a kúp felszíne és térfogata?

K2 **2210.** Egy 12 cm sugarú gömb köré írjunk egyenes körkúpot, amelynek magassága 72 cm. Mekkora a kúp felszíne és térfogata?

E2 **2211.** Adott ρ sugarú gömb köré írjunk olyan egyenes körkúpot, hogy annak teljes felszíne és a gömb felszínének aránya adott k legyen. Határozzuk meg a kúp alapkörének sugarát.

E2 **2212.** Adott ρ sugarú gömb köré írjunk olyan egyenes körkúpot, hogy térfogatának és a gömb térfogatának aránya adott k legyen. Határozzuk meg a kúp alapkörének sugarát.

K2 **2213.** Egyenes körkúp alapköre fölé félgömböt emelünk. Mekkora a kúp nyílásszöge, ha a kúp felszínének és a félgömb felszínének aránya 18:5?

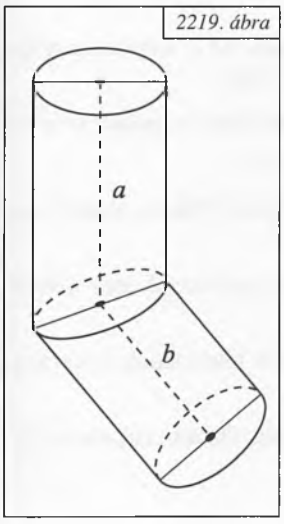
K2 **2214.** Egyenes körkúpba gömböt írunk. Határozzuk meg a kúp nyílásszögét, ha a gömb felszínének és a kúp alapterületének aránya 4:3.

E2 **2215.** Határozzuk meg a gömb és a köréje írható egyenes körkúp térfogatának arányát, ha a kúp felszíne n-szerese a gömb felszínének.

E2 **2216.** Egy gömbbe két egybevágó egyenes körkúpot írunk, melyeknek tengelye közös, de a csúcsok az átmérő különböző végpontjaiba esnek. Határozzuk meg, hogyan aránylik a két kúp közös részének térfogata a gömb térfogatához, ha a kúp magasságának és a gömb sugarának aránya k $(1 < k < 2)$.

E2 **2217.** Egyenes körkúpba két érintkező gömböt írhatunk úgy, hogy az egyik gömb térfogata nyolcszorosa a másiknak. A kisebbik gömb sugara r. Határozzuk meg a kúp felszínét és térfogatát.

K1 **2218.** Egyenes körkúp palástjának területe háromszorosa az alapterületének. A kúpba ρ sugarú gömb írható. Számítsuk ki a kúp magasságát.



2219. ábra

K1 **2219.** Vegyünk két r sugarú egyenes körhengert, és mindkettőt az egyik végénél messük el egy a tengellyel $\alpha < 90°$-os szöget bezáró síkkal. Illesszük össze a két csonka hengert e metszetüknél úgy, hogy könyökcsövet kapjunk. Mekkora a könyökcső térfogata, ha az egyes darabok tengelyeinek hossza a és b? *(2219. ábra)*

V **2220.** Egy R sugarú gömbbe 8 gömböt írunk, amelyek mindegyike érinti a nagy gömböt úgy, hogy az érintési pontok egy főkörön vannak. A beírt gömbök mindegyike érinti a vele szomszédos két beírt gömböt is. A nagy gömbbe írunk még egy gömböt, amely érinti mind a 8 kis gömböt és az eredetit is. Határozzuk meg az utolsó gömb sugarát.

E2 **2221.** Legyen $ABCS$ olyan tetraéder, amelyben az SA, SB, SC élek páronként merőlegesek egymásra, továbbá $AB = BC = a$, és $BS = b$. Fejezzük ki a és b segítségével a tetraéderbe írható gömb sugarát.

K2 **2222.** Hogyan aránylik egymáshoz annak a három gömbnek a sugara, amelyek közül az első egy kocka köré van írva, a második átmegy e kocka éleinek felezőpontjain, és a harmadik ebbe a kockába van beírva?

E2 **2223.** Szabályos háromszög alapú egyenes hasáb köré gömböt írunk. A hasáb oldallapjának területe megegyezik az alaplap területével. Mekkora a gömb sugara, ha a hasáb alapéle a?

V **2224.** A játékkocka úgy készül, hogy egy tömör kocka csúcsait legömbölyítik azzal a gömbbel, amelynek középpontja a kocka középpontja, és érinti a kocka éleit. Mekkora a játékkocka felszíne és térfogata, ha a élű kockából készült?

E2 **2225.** Egy a alapélű, M magasságú szabályos n-szög alapú egyenes gúlába gömböt írunk. Határozzuk meg a gömb sugarát.

K1 **2226.** Számítsuk ki a gömb felszínét és térfogatát, ha sugara akkora, mint a $10 \cdot \sqrt{75}\ \text{cm}^2$ felszínű szabályos oktaéder egy éle.

V **2227.** Egy R sugarú gömbbe 8 gömböt írunk, melyek mindegyike érint ezek közül hármat, és érinti az eredeti gömböt is. Határozzuk meg ezen gömbök sugarát, ha középpontjaik egy kocka csúcspontjai.

K2 **2228.** Egy gömbbe és köré kockát írunk. Az élük különbsége d. Mekkorák az élek és a gömb sugara?

K2 **2229.** *(A 2228. feladatra épül.)* Egy r sugarú gömbbe és köré írjunk kockát. Mekkora a kockák térfogata közötti különbség?

K2 **2230.** *(A 2228. feladatra épül.)* Egy r sugarú gömbbe és köré írjunk kockát. Mekkora a kockák felszíne közötti különbség?

E2 **2231.** *(A 2229. feladatra épül.)* Egy gömbbe és köré kockát írunk. A két kocka térfogatának különbsége V. Mekkora a kockák éle és a gömb sugara?

E2 **2232.** Egy gömbbe és köré kockát írunk. A két kocka felszínének különbsége F. Mekkora a kockák éle és a gömb sugara?

E2 **2233.** Egy kocka köré írt és a beírt gömb sugarának különbsége d. Mekkora a kocka felszíne és térfogata?

E1 **2234.** Egy r sugarú félgömbbe kockát írunk. Mekkora a kocka éle, felszíne és térfogata?

E1 **2235.** Egy félgömbbe írt kocka térfogata V. Mekkora a félgömb sugara?

K1 **2236.** Egy r sugarú gömbbe írjunk be téglatestet. A téglatest éleinek aránya legyen $1:2:3$. Mekkorák az élek?

E1 **2237.** Egy r sugarú gömbbe írjunk be téglatestet. A téglatest oldallapjai területének aránya legyen $1:2:3$. Mekkorák az élek?

E2 **2238.** Egy r sugarú gömbbe írjunk be négyzetes oszlopot. Az élek összege legyen s. Mekkorák az élek?

E2 **2239.** Egy r sugarú gömbbe írjunk be téglatestet. Az élek összege legyen s. Mekkora a felszíne?

E2 **2240.** Egy téglatest felszíne F, éleinek összege s. Mekkora a körülírt gömb sugara?

E2 **2241.** *(Az 1837. és az 1838. feladatra épül.)* Határozzuk meg a gömbbe és köréje írt szabályos tetraéderek térfogatának arányát.

V **2242.** Egy gömbbe írt szabályos oktaéder térfogata V. Mekkora az ugyanebbe a gömbbe írt szabályos tetraéder térfogata?

E1 **2243.** Egy gömbbe szabályos tetraédert írunk, majd ebbe ismét gömböt. Határozzuk meg a két gömb felszínének arányát.

E2 **2244.** Egy r sugarú gömbbe beírunk egy kockát, ebbe egy gömböt és a gömbbe egy szabályos tetraédert. Mekkora a tetraéder felszíne és térfogata?

V **2245.** Egy kocka éle a. A kocka köré gömböt írunk, a gömb köré szabályos tetraédert, a köré megint gömböt és végül a gömb köré szabályos oktaédert. Mekkora az oktaéder térfogata?

II

E2 **2246.** *(Az 1691. feladatra épül.)* Tekintsük a kocka két átellenes csúcsát és az ezekbe a csúcsokba nem befutó élek felezőpontját. Ezek egy síkban vannak, és ez a sík két részre osztja a kockát. Írjunk egy ilyen részbe a kocka három lapját és a metszősíkot érintő gömböt. Határozzuk meg a gömb sugarát.

V **2247.** Határozzuk meg a szabályos négyoldalú gúla alap- és oldallapjának hajlásszögét, ha a gúla köré írt gömb sugara háromszorosa a beírt gömb sugarának.

E2 **2248.** *a)* Bizonyítsuk be, hogy a gömbbe írt egyenlő oldalú henger felszíne mértani közepe a gömb felszínének és a gömbbe írt egyenlő oldalú kúp felszínének.
b) Bizonyítsuk be, hogy a gömbbe írt egyenlő oldalú henger térfogata mértani közepe a gömb térfogatának és a gömbbe írt egyenlő oldalú kúp térfogatának.

E2 **2249.** *a)* Bizonyítsuk be, hogy a gömb köré írt egyenlő oldalú henger felszíne mértani közepe a gömb felszínének és a köré írt egyenlő oldalú kúp felszínének.
b) Bizonyítsuk be, hogy a gömb köré írt egyenlő oldalú henger térfogata mértani közepe a gömb térfogatának és a gömb köré írt egyenlő oldalú kúp térfogatának.

E2 **2250.** Egyenlő oldalú hengerbe gömböt írunk. A henger alapköre egyúttal egy olyan kúp alapköre is, aminek a csúcsa a gömb középpontja. A három testet egy, az alappal párhuzamos síkkal elmetsszük. Bizonyítsuk be, hogy a hengerből kimetszett kör területe a gömbből illetve a kúpból kimetszett körök területének összege.

E2 **2251.** Bizonyítsuk be, hogy egy gömb körül írt összes poliéder térfogatának és felszínének aránya ugyanaz.

E2 **2252.** Egy gömb köré egyenes körhengert, egyenes kúpokat és egyenes csonkakúpokat írunk. Bizonyítsuk be, hogy a körülírt henger felszínének és térfogatának aránya egyenlő bármely körülírt kúp felszínének és térfogatának arányával, illetve bármely körülírt csonkakúp felszínének és térfogatának arányával.

K2 **2253.** *a)* Egy henger alakú pohárban, melynek alapsugara 4 cm, bizonyos magasságig víz van. Mennyivel fog emelkedni a víz szintje, ha egy 5 cm élű szabályos tetraédert teszünk bele, amelyik egészen alámerül?
b) Egy 2 dm átmérőjű, henger alakú edényben 8 dm magasságig víz van. Hány dm-rel emelkedik a vízszint, ha az edénybe egy 1,5 dm átmérőjű gömböt merítünk?

E1 **2254.** Egy csúcsával lefelé fordított egyenlő oldalú kúpban m magasságig víz van. Mennyivel emelkedik a víz felszíne, ha az edényben egy r sugarú gömb egészen elmerül?

K1 **2255.** Egy 10 cm átmérőjű hengeres edényben 12 cm magasan áll a víz. Egy beledobott golyó a víz felszínét 1 cm-rel emeli. Mekkora a golyó átmérője?

E1 GY **2256.** Egy csúcsával lefelé fordított egyenlő oldalú üres kúpba beleteszünk egy 2 cm sugarú gömböt. Mennyi vizet kell a kúpba öntenünk, hogy a gömböt a víz befedje (a víz a gömb alá is befolyik)?

E1 GY **2257.** Egy csúcsával lefelé fordított egyenlő oldalú kúpba egy r sugarú gömböt teszünk, majd megtöltjük vízzel, hogy a gömböt éppen ellepje. Mekkora lesz a víz magassága, ha a gömböt kivesszük?

Síkidomok forgatásával nyert testek

E1 **2258.** Egy a oldalú szabályos háromszöget megforgatunk az egyik oldala körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

E1 **2259.** Egy 16 cm oldalú szabályos háromszöget megforgatunk az egyik csúcsán átmenő és a szemközti oldallal párhuzamos egyenes körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

E2 **2260.** Egy egyenlő szárú háromszög alapja 30 cm, szárai 25 cm-esek. Forgassuk először az alap körül, majd az egyik szára körül. Határozzuk meg az így keletkezett két forgástest felszínének és térfogatának arányát.

E1 **2261.** Egy háromszög két oldala 62 cm és 74 cm, a közbezárt szögük 46,7°. Forgassuk a háromszöget a 62 cm-es oldala körül. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

E1 **2262.** Egy háromszög oldalai 34 cm, 42 cm, 61 cm. Forgassuk a háromszöget a leghosszabb oldal körül. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

K2 **2263.** Egy derékszögű háromszög befogói 2,31 dm és 5,2 dm. Forgassuk meg ezt a háromszöget az átfogója körül. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

K1 **2264.** Egy a alapú, b magasságú egyenlő szárú háromszöget forgatunk az alapja körül. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

E1 **2265.** Egy a, b, c oldalú háromszöget mindhárom oldala körül megforgatunk. Igazoljuk, hogy a keletkezett forgástestek térfogatának aránya egyenlő a háromszög magasságainak arányával.

K2 **2266.** Forgassunk egy a oldalú négyzetet az átlója körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

E1 **2267.** Egy a oldalú szabályos hatszöget forgassunk meg két szemközti csúcsát összekötő egyenes körül. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata? Adjuk meg a felszínt és a térfogatot $a = 10$ cm esetén.

E1 **2268.** Egy a oldalú szabályos hatszöget egy oldala körül megforgatunk. Számítsuk ki az így keletkezett forgástest felszínét és térfogatát.

K2 **2269.** Egy a oldalú szabályos hatszöget forgassunk meg két szemközti oldalának felezőpontját összekötő egyenes körül. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

E1 **2270.** Egy a oldalú szabályos háromszög egyik oldalát egy a szakasszal meghosszabbítjuk, és erre a végpontjában merőlegest emelünk. Forgassuk meg a háromszöget az így kapott egyenes körül. Mekkora az így keletkezett forgástest térfogata?

E1 **2271.** Kössük össze egy háromszög két oldalának a felezőpontját, majd forgassuk meg a háromszöget a harmadik oldala körül. Mi a háromszög két része által leírt forgástestek térfogatának aránya?

E1 **2272.** Egy rombusz oldalai 25 cm-esek, egyik átlója 40 cm. Forgassuk a rombuszt az egyik oldala körül. Mekkora lesz az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

E1 **2273.** Egy rombusz oldala és egyik átlója a. A másik átló egyik végpontjában húzzunk merőlegest erre az átlóra, és forgassuk e körül a rombuszt. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

E1 **2274.** Egy paralelogrammát egyszer a hosszabb, majd a rövidebb oldala körül forgatunk meg. Mekkora a keletkezett forgástestek térfogatának aránya?

E1 **2275.** Egy deltoid oldalai 61 cm és 87 cm. Forgassuk meg az 54 cm-es szimmetriaátlója körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

K2 **2276.** Egy félkör átmérője fölé egyenlő szárú derékszögű háromszöget emelünk. Forgassuk meg a háromszöget és a félkört az átmérő egyenese körül. Határozzuk meg a háromszög forgatásából keletkezett forgástest felszínének, illetve térfogatának és a félkör által leírt gömb felszínének, illetve térfogatának arányát.

K2 **2277.** Egy egyenlő szárú trapéz párhuzamos oldalai 20 cm és 40 cm, a szárak 26 cm hosszúak. Forgassuk meg a 40 cm-es oldal körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

K2 **2278.** Egy derékszögű trapéz párhuzamos oldalai 30 cm és 45 cm, a két derékszög melletti oldal 36 cm. Forgassuk meg a trapézt a 45 cm-es oldal körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

K2 **2279.** Szabályos háromszög köré kört írunk, és az egész idomot megforgatjuk a háromszög egyik magasságvonala körül. Határozzuk meg a forgatás közben keletkezett gömb és kúp térfogatának arányát.

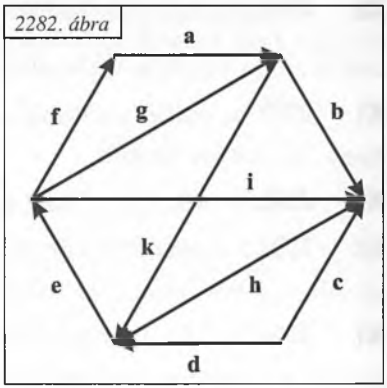
K2 **2280.** Szabályos háromszögbe kört írunk, és az egész idomot megforgatjuk a háromszög egyik magasságvonala körül. Határozzuk meg a forgatás közben keletkezett gömb és kúp térfogatának arányát.

E2 **2281.** Legyen $ABCDEF$ az O középpontú és R sugarú kör szabályos érintő hatszöge. Húzzuk meg az FC átlót és az AC, BF egyeneseket. Ezek az FC-re merőleges OH sugár I pontjában metszik egymást. Számítsuk ki R függvényeként az IHA és IOF háromszögek forgatásával keletkezett forgástestek felszínét és térfogatát, ha az OH egyenes körül forgatunk.

III. Vektorok

Vektorok összege, különbsége és vektor szorzása számmal

K1 **2282.** *a)* A *2282. ábrán* jelölt vektorok közül válasszuk ki az egyenlőket, illetve az ellentetteket.
b) Adjunk meg a *2282. ábráról* olyan vektorokat, amelyeknek összege **0**.



K1 **2283.** Egy négyzetnek rajzoljuk be mindkét átlóját. Az oldalakat és az átlókat irányítsuk úgy, hogy összesen 6 vektort kapjunk. Válasszuk ki ezek közül azokat, amelyeknek az összege **0**.

K1 **2284.** A *2282. ábra* vektorai közül állítsuk elő *a)* a **g**-t az **a** és **f** segítségével; *b)* a **h**-t az **a** és **f** segítségével: *c)* a **k**-t a **g** és **i** segítségével.

K1 **2285.** Egy téglalap csúcsai legyenek A, B, C, D. Szerkesszük meg a következő vektorokat:
a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; *b)* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$; *c)* $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$; *d)* $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AC}$; *e)* $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

K1 **2286.** Egy szabályos hatszög egyik csúcsából a többi öt csúcsba mutató vektorok legyenek rendre **a**, **b**, **c**, **d**, **e**. Szerkesszük meg a következő vektorokat:
a) **c** – **a**; *b)* **a** + **b** – **c**; *c)* **a** + **d** – **c** – **b**; *d)* **a** + **b** – **d** – **e**.

K2 **2287.** Legyen S az ABC háromszög súlypontja. Adjuk meg a következő vektorokat:
a) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$; *b)* $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}$; *c)* $\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}$; *d)* $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}$.

K1 **2288.** Legyen O az ABC háromszög köré írt kör középpontja. Szerkesszük meg a következő vektorokat:
a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$; *b)* $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$.

K1 **2289.** Adjunk meg két olyan **0** vektortól különböző vektort, amelyeknek összege az egyik vektorral egyenlő hosszú.

K1 **2290.** Adjunk meg két olyan **0** vektortól különböző vektort, amelyeknek különbsége az egyik vektorral egyenlő hosszú.

K1 **2291.** Vegyünk fel a füzetünkben egy tetszőleges **v** vektort.
a) Szerkesszünk olyan **a**, **b**, **c** vektorokat, amelyeknek összege **v**.
b) Szerkesszünk olyan **a**, **b**, **c** vektorokat, amelyek összegét **v**-hez hozzáadva **0**-t kapunk.

K2 **2292.** Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor egyenlő hosszú, akkor összegük és különbségük merőleges egymásra.

K2 **2293.** Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor összege és különbsége merőleges egymásra, akkor a két vektor egyenlő hosszú.

K2 **2294.** Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor merőleges egymásra, akkor összegük és különbségük egyenlő hosszú.

K2 **2295.** Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor összege és különbsége egyenlő hosszú, akkor a két vektor merőleges egymásra.

K2 **2296.** Egy szög csúcsából kiindulva, a szárakon vegyünk fel egy **a**, illetve egy **b** vektort úgy, hogy hosszuk egyenlő legyen. Az **a** és **b** segítségével állítsunk elő olyan vektort, amely a szög felezőjének irányába mutat.

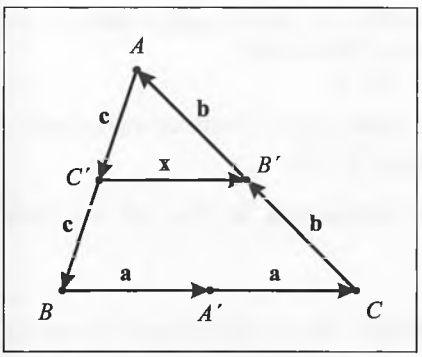
K1 **2297.** Az $ABCD$ paralelogramma síkjában O egy tetszőleges pont. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

K1 **2298.** Melyik vektorra igaz az, hogy egyenlő az ellentettjével?

K2 **2299.** Legyen $ABCD$ egy tetszőleges paralelogramma. Bizonyítsuk be, hogy
a) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$; *b)* $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}$; *c)* $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}$.

K1 **2300.** Az $ABCD$ paralelogramma A, B, C csúcsaihoz egy tetszőleges O pontból rendre az **a**, **b**, **c** vektorok vezetnek. Állítsuk elő ezek segítségével az $\overrightarrow{OD}$ = **d** vektort.

K1 **2301.** Az ABC háromszög A csúcsához egy tetszőleges O pontból az **a**, B csúcsába a **b**, a BC szakasz felezőpontjához pedig a **p** vektor vezet. Állítsuk elő **a**, **b**, **p** segítségével *a)* az O-ból a C-hez vezető vektort; *b)* az $\overrightarrow{AC}$ vektort.



◀ *2302. ábra*

K2 **2302.** Egy háromszög minden oldalvektorát állítsuk elő a *2302. ábrán* látható módon két egyenlő vektor összegeként. Mutassuk meg, hogy *a)* **a** + **b** + **c** = **0**; *b)* **x** = **a**.
Fogalmazzuk meg ennek elemi geometriai jelentését.

E1 **2303.** Egy háromszög oldalaira kifelé szerkesszünk négyzeteket. Két különböző négyzet egy-egy csúcsát szomszédosnak nevezzük, ha össze vannak kötve ugyanazzal a háromszögcsúccsal. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan háromszög, amelynek oldalai párhuzamosak és egyenlők az egy-egy szomszédos csúcspárt összekötő szakaszokkal.

E1 **2304.** Egy négyszög oldalai között nincs két párhuzamos. Hány olyan négyszög van, amelynek minden oldala párhuzamos és egyenlő az eredeti négyszög egy-egy oldalával? (Itt egymást metsző oldalakat is megengedünk.)

K1 **2305.** Az **a** vektor hossza kétszerese a **b** vektor hosszának. Mekkora a két vektor szöge, ha (**a** – **b**) merőleges **b**-re?

K1 **2306.** Három egyenlő hosszú vektor (nem **0** vektorok) összege **0**. Mekkora szöget zárnak be egymással?

E1 **2307.** Legyen O az ABC háromszög köré írt kör középpontja, M a háromszög magasságpontja. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}$.

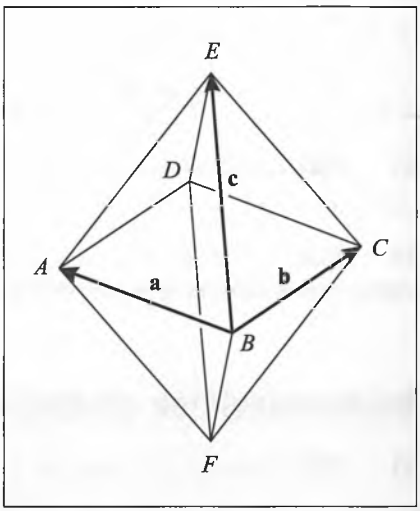
K1 **2308.** Egy kocka egyik csúcsából kiinduló élvektorok **a**, **b**, **c**. Állítsuk elő ezek segítségével (összegként, illetve különbségként) *a)* az összes lapátló vektort; *b)* a testátló vektorokat.

E2 **2309.** Egy kocka A csúcsából kiinduló és az A-t tartalmazó lapok középpontjaiba mutató vektorok **x**, **y**, **z**. Állítsuk elő ezek segítségével *a)* az A csúcsból kiinduló élvektorokat; *b)* a testátló vektorokat.

E2 **2310.** Bizonyítsuk be, hogy az előző feladatban szereplő **x**, **y**, **z** vektorok közül bármelyik kettő 60°-os szöget zár be egymással.

K1 **2311.** Jelöljük **a**-, **b**- és **c**-vel egy tetraéder egyik csúcsából a másik három csúcsba mutató vektorokat. Állítsuk elő ezek segítségével a másik három élvektort.

K1 **2312.** Egy szabályos oktaéder egyik csúcsából kiinduló három élvektor **a**, **b**, **c**. Állítsuk elő ezek segítségével a többi élvektort. (*2312. ábra*)



2312. ábra ▶

K1 **2313.** Egy kocka A csúcsából kiinduló élvektorok **a**, **b**, **c**. Állapítsuk meg, hogy az alábbi vektorok közül melyek mutatnak az A-ból kiindulva valamelyik kockacsúcsba.
a) **a** + **b** + **c**; *b)* **a** + **b** – **c**; *c)* **a** + **c**; *d)* **b** – **b**; *e)* **a** – **b**; *f)* **a** + **b** + **c** – **a**.

K1 **2314.** Az **a**, **b**, **c** nem egysíkú vektorok olyanok, hogy közülük bármelyik merőleges a másik kettő összegére. Adjunk meg ilyen vektorokat.

K1 **2315.** Egy paralelepipedon középpontjából egy lap három csúcsához az **a**, **b**, **c** vektorok mutatnak. (**a** és **c** egy lap szemközti csúcsaihoz tartozó vektorok.) Határozzuk meg a többi öt csúcsba mutató vektorokat.

E1 **2316.** Legyen $ABCD$ egy szabályos tetraéder és rajta kívül O olyan pont, hogy az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ vektorok páronként merőlegesek egymásra, továbbá az O és D pontok az $[ABC]$ sík különböző oldalán vannak. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$.

K1 **2317.** Adott az **a** vektor. Szerkesszük meg a

a) $2\mathbf{a}$, *b)* $-2\mathbf{a}$; *c)* $1{,}5\mathbf{a}$; *d)* $3\mathbf{a}$; *e)* $-2{,}5\mathbf{a}$; *f)* $\frac{\mathbf{a}}{2}$ vektorokat.

K1 **2318.** Adott a **b** vektor. Szerkesszük meg a

a) $-\frac{4}{3}\mathbf{b}$; *b)* $2\mathbf{b}$; *c)* $0{,}5\mathbf{b}$; *d)* $\frac{\mathbf{b}}{3}$; *e)* $\frac{4\mathbf{b}}{5}$; *f)* $-\mathbf{b}$; *g)* $\frac{\mathbf{b}}{4}$ vektorokat.

K1 **2319.** Adottak az **a** és **b** vektorok. Szerkesszük meg az

a) $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$; *b)* $\mathbf{a}-2\mathbf{b}$; *c)* $2\mathbf{a}-3\mathbf{b}$; *d)* $-0{,}5\mathbf{a}+\frac{1}{3}\mathbf{b}$;

e) $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$; *f)* $\frac{\mathbf{a}}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{b}$; *g)* $\frac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3}$; *h)* $\frac{1}{2}(2\mathbf{a}-3\mathbf{b})$ vektorokat.

K1 **2320.** Adottak az **a**, **b**, **c** egysíkú vektorok. Szerkesszük meg az

a) $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$; *b)* $2(\mathbf{a}+\mathbf{b})-\mathbf{c}$; *c)* $2\mathbf{a}+\frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{c})$; *d)* $\frac{\mathbf{a}+2\mathbf{b}}{3}+\mathbf{c}$;

e) $\mathbf{a}-\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$; *f)* $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\frac{\mathbf{c}}{2}$ vektorokat.

K1 **2321.** Legyenek A, B, C, D, E adott pontok. Mekkora λ értéke, ha $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\lambda\cdot(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA})$?

III

E1 **2322.** Az **a** és **b** vektorok nem párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbf{c}=|\mathbf{b}|\cdot\mathbf{a}+|\mathbf{a}|\cdot\mathbf{b}$ vektor párhuzamos az **a** és **b** vektorok szögének szögfelezőjével.

Vektorműveletek alkalmazásával bizonyítható állítások

K1 **2323.** Mutassuk meg, hogy ha az AB szakasz végpontjainak a helyvektorai **a** és **b**, akkor felezőpontjának helyvektora $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$.

K2 **2324.** Egy O pontból az AB szakasz végpontjaihoz az **a** és **b** vektorok vezetnek. Bizonyítsuk be, hogy az AB szakasz harmadolópontjaihoz vezető vektorok $\frac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3}$ és $\frac{\mathbf{a}+2\mathbf{b}}{3}$.

K2 **2325.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy O pontból az AB szakasz végpontjaihoz az **a** és **b** vektorok vezetnek, akkor az AB szakaszt $\lambda:\mu$ arányban osztó P pontba a $\frac{\mu\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}{\mu+\lambda}$ vektor vezet.

K2 **2326.** A sík egy O pontjából egy P pontjához vezető vektor az adott **a** és **b** vektorok segítségével $(3\mathbf{a}-2\mathbf{b})$ alakban adható meg, egy Q pontba vezető vektor pedig $(-2\mathbf{a}+\mathbf{b})$ alakban. Határozzuk meg a PQ szakasz felezőpontjához mutató vektort.

K2 **2327.** Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan háromszög, amelynek az oldalai párhuzamosak és egyenlők az ABC háromszög $\overrightarrow{AF_a}$, $\overrightarrow{BF_b}$, $\overrightarrow{CF_c}$ súlyvonal vektoraival.

K2 **2328.** Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges pontból egy háromszög csúcsaiba vezető vektorok összege egyenlő az ugyanabból a pontból az oldalfelező pontokhoz vezető vektorok összegével.

E1 **2329.** Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges pontból egy sokszög csúcsaiba vezető vektorok összege egyenlő az ugyanabból a pontból az oldalfelező pontokhoz vezető vektorok összegével.

E2 **2330.** Jelöljünk ki egy sokszögön egy körüljárási irányt, és minden oldalon jelöljük meg az első harmadolópontot. Bizonyítsuk be, hogy a sokszög csúcsaiba vezető vektorok összege egyenlő a harmadolópontokba vezető vektorok összegével.

K2 **2331.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög csúcsainak helyvektorai $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, akkor súlypontjának helyvektora $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

K2 **2332.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlypontjából a csúcsokba vezető vektorok összege $\mathbf{0}$.

K2 **2333.** Legyen az ABC háromszög súlypontja S, az XYZ háromszögé pedig Q. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{BY}+\overrightarrow{CZ}=3\overrightarrow{SQ}$.

K2 **2334.** Az ABC háromszög minden oldalát osszuk fel három egyenlő részre, és jelöljük meg az AB, BC, CA oldalon rendre az A, B, C pontokhoz közelebbi harmadolópontot. Bizonyítsuk be, hogy ezek a pontok olyan háromszöget határoznak meg, amelynek súlypontja egybeesik az ABC háromszög súlypontjával.

E2 **2335.** Egy tetszőleges hatszög oldalfelező pontjai valamilyen körüljárási sorrendben legyenek A, B, C, D, E, F. Bizonyítsuk be, hogy az ACE és BDF háromszögek súlypontja azonos.

E2 **2336.** *(A 2307. és a 2331. feladatra épül.)* A súlypontba mutató helyvektort felhasználva igazoljuk, hogy a háromszög köré írt kör középpontja, súlypontja és magasságpontja egy egyenesen, a háromszög Euler-egyenesén van, és a súlypont harmadolja a magasságpont és a körülírt kör középpontja közötti szakaszt.

E2 **2337.** *(A 2307. feladatra épül.)* Jelölje F a háromszög köré írt kör középpontja és a magasságpont által meghatározott szakasz felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy F a háromszög minden oldalfelező pontjától egyenlő távolságra van.

E2 **2338.** *(A 2307. feladatra épül.)* Jelölje F a háromszög köré írt kör középpontja és a magasságpont által meghatározott szakasz felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög tetszőleges oldalfelező pontját F pontra tükrözve olyan pontot kapunk, amely felezi a szemközti csúcs és a magasságpont közötti szakaszt.

E2 **2339.** *(A 2307. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy a háromszög köré írt kör középpontjának egy oldaltól mért távolsága feleakkora, mint a magasságpontnak a szemközti csúcstól mért távolsága.

E2 **2340.** *(A 2337. és a 2338. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be vektorok segítségével, hogy egy háromszög magasságtalppontjai, oldalfelezéspontjai, valamint a magasságpont és a csúcsok közti szakaszok felezéspontjai egy körön vannak. (Ez a kör a háromszög Feuerbach-köre.)

E2 **2341.** Legyen $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ két tetszőleges háromszög, súlypontjaik S_1, illetve S_2. Jelöljük S-sel annak a háromszögnek a súlypontját, amit a megfelelő csúcsok összekötő szakaszainak felezéspontjai alkotnak (ha van ilyen háromszög). Bizonyítsuk be, hogy S felezi az S_1S_2 szakaszt.

K2 **2342.** Egy négyszög súlypontjának nevezzük azt a pontot, amelynek helyvektora a csúcsokhoz tartozó helyvektorok összegének a negyede. Bizonyítsuk be, hogy a súlypont független a kezdőpont választásától, azaz tetszőleges kezdőpont esetén a fentebb definiált vektor végpontja mindig ugyanaz.

K2 **2343.** *(A 2342. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges négyszög középvonalai felezve metszik egymást, és metszéspontjuk a négyszög súlypontja.

K2 **2344.** Bizonyítsuk be, hogy a négyszög súlypontja felezi az átlók felezőpontját összekötő szakaszt.

E2 **2345.** *(A 2342. és a 2343. feladatra épül.)* Egy paralelogramma belsejében fekvő M ponton át húzzunk párhuzamosokat az oldalakkal; ezek az A, C, illetve B, D pontokban metszik az oldalakat. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ négyszög középvonalainak metszéspontja felezi az M-et a paralelogramma középpontjával összekötő szakaszt.

K2 **2346.** AB és $A'B'$ tetszőleges szakaszok, ezek felezőpontjai F és F'. Bizonyítsuk be, hogy az AA', BB', FF' szakaszok felezési pontjai egy egyenesen vannak.

III

K1 **2347.** Az $ABCD$ négyszög oldalvektorai legyenek: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}$. Állítsuk elő ezek segítségével az átlók felezőpontjait összekötő vektort.

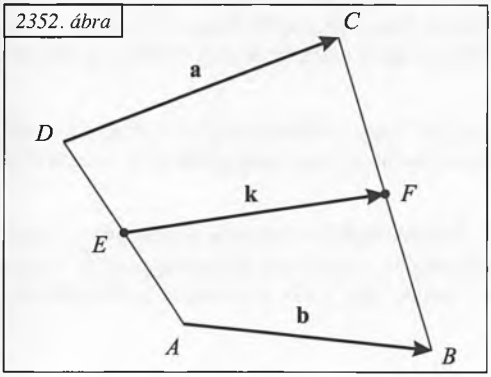
K1 **2348.** Egy C pont helyvektora $\mathbf{c}$, egy tetszőleges P ponté $\mathbf{p}$. Határozzuk meg a P pont C-re vonatkozó tükörképének helyvektorát.

K2 **2349.** *(A 2348. feladatra épül.)* Egy tetszőleges P pontot tükrözzünk egy paralelogramma egy csúcsára, majd az eredményt egy vele szomszédos csúcsra és így körbe a paralelogramma minden csúcsára. Bizonyítsuk be, hogy a negyedik tükrözés visszavisz az eredeti pontba.

K2 **2350.** *(A 2348. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges pontot egy síknégyszög oldalfelező pontjaira tükrözve, a tükörképek egy paralelogramma csúcsai.

E1 **2351.** *(A 2348. feladatra épül.)* Egy tetszőleges P pontot tükrözzünk először egy A pontra, majd a tükörképet egy B pontra, az így nyert képet pedig egy C pontra; tovább folytatva újra A-ra, B-re és végül C-re. Bizonyítsuk be, hogy a hatodik tükrözés visszaviszi a P pontot az eredeti helyzetbe.

2352. ábra



K2 **2352.** Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok egy négyszög szemközti oldalvektorai. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbf{k}$ középvonalvektorra fennáll a $\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ egyenlőség. *(2352. ábra)*

K2 **2353.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy trapéz átlóinak felezőpontjai különböző pontok, akkor összekötő egyenesük párhuzamos az alapokkal.

E2 **2354.** Feleltessük meg egymásnak két tetszőleges paralelogramma csúcsait úgy, hogy az egymásnak megfelelő csúcsok mindkét paralelogrammánál azonos sorrendben kövessék egymást. Bizonyítsuk be, hogy a megfelelő csúcsok összekötő szakaszainak felezőpontjai ugyancsak paralelogramma csúcsai.

V **2355.** *(A 2307. feladatra épül.)* Tekintsük az *ABCD* húrnégyszög *ABC*, *BCD*, *ABD*, *ACD* részháromszögének magasságpontjait. Bizonyítsuk be, hogy ezek a magasságpontok az *ABCD* négyszöggel egybevágó négyszöget alkotnak.

V **2356.** *(A 2342. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges húrnégyszög körülírt körének középpontját a súlypontjára tükrözve olyan pontot kapunk, amely rajta van bármely oldalfelező pontból a szemközti oldalra állított merőlegesen (a tükörképpont a húrnégyszög magasságpontja).

K2 **2357.** Egy kocka *A* csúcsából kiinduló élvektorok legyenek **a**, **b**, **c**. Határozzuk meg az *A*-ból a lapközéppontokba vezető vektorokat.

K1 **2358.** Válasszuk ki a kocka egyik csúcsát és az erre illeszkedő három oldallapot. Legyenek a kocka középpontjából e lapok középpontjaiba mutató vektorok **x**, **y** és **z**. Határozzuk meg a csúcsokba vezető vektorokat.

E1 **2359.** Válasszuk ki egy paralelepipedon egyik testátlóját. Ennek egyik végpontjából kiinduló élek második végpontjai *A*, *B* és *C*, a másik végpontjából induló élek pedig az *X*, *Y*, *Z* pontokban végződnek. Bizonyítsuk be, hogy az *ABC* és *XYZ* síkok három egyenlő részre osztják a testátlót.

E1 **2360.** Egy tetraéder egyik lapjának súlypontját kössük össze a szemközti csúccsal, és az összekötő szakaszt osszuk négy egyenlő részre. A laphoz legközelebbi negyedelőpont a tetraéder súlypontja. Bizonyítsuk be, hogy ha a tetraéder csúcsainak helyvektorai **a**, **b**, **c**, **d**, akkor a súlypont helyvektora (bármely lapból indulunk is ki) $\frac{1}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})$.

E2 **2361.** *(A 2360. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder súlypontjából a csúcsokhoz vezető vektorok összege **0**.

E2 **2362.** Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder súlypontja és a négy lapsúlypont által meghatározott tetraéder súlypontja egybeesik.

E2 **2363.** Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder súlypontja felezi a szemközti élek felezőpontjait összekötő szakaszokat.

E1 **2364.** Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder két szemközti élpárjának felezőpontjai paralelogrammát alkotnak.

K2 **2365.** Bizonyítsuk be, hogy ha *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* egy hatszög egymás utáni oldalfelező pontjai, akkor $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\mathbf{0}$.

K2 **2366.** Legyen *ABCDEF* egy szabályos hatszög. Bizonyítsuk be, hogy

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}$.

E2 **2367.** Legyen az $A_1A_2\ldots A_n$ szabályos *n*-szög középpontja *O* és síkjának egy pontja *Q*. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{QO}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{QA_1}+\overrightarrow{QA_2}+\ldots+\overrightarrow{QA_n})$.

III

K2 **2368.** Legyen $ABCD$ és $A_1B_1C_1D_1$ két négyzet. Igazoljuk, hogy

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{BD_1}+\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{DB_1}.$$

E1 **2369.** Adottak az A és B pontok és egy λ szám. Adjunk meg olyan P pontot, hogy $\overrightarrow{AP}$ és $\lambda\overrightarrow{BP}$ egyenlő legyen.

K2 **2370.** Létezik-e egy ABC háromszög síkjában olyan P pont, hogy $(\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC})$ vektor egyenlő legyen $\mathbf{0}$-ral?

E1 **2371.** Legyen $A_1A_2\ldots A_n$ és $B_1B_2\ldots B_n$ két tetszőleges n-szög. Jelölje $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_n}$ a második sokszög csúcsainak tetszőleges sorrendjét. Bizonyítsuk be, hogy

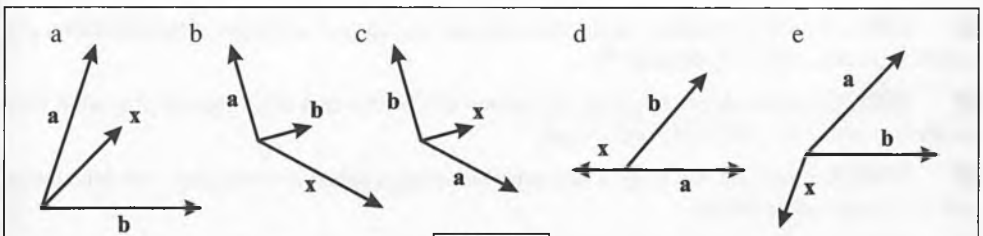
$$\overline{A_1B_1}+\overline{A_2B_2}+\ldots+\overline{A_nB_n}=\overline{A_1B_{i_1}}+\overline{A_2B_{i_2}}+\ldots+\overline{A_nB_{i_n}}.$$

K2 **2372.** Az O középpontú kör AB és CD húrjai merőlegesek egymásra, egyeneseik metszéspontja M. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OM}$.

Vektorok felbontása összetevőkre

K1 **2373.** Egy háromszögnél jelöljünk meg két közös kezdőpontú oldalvektort és az ezekkel közös kezdőpontú súlyvonalvektort. Bontsuk fel a súlyvonalvektort az oldalvektoroknak megfelelő irányú összetevőkre.

K1 **2374.** A *2374. ábrán* adottak az **a**, **b**, **x** vektorok. Bontsuk fel rajzban az **x**-et **a** és **b** irányú összetevőkre.



2374. ábra

K1 **2375.** Adott egy négyzet egyik oldalvektora és a vele közös kezdőpontú átlóvektor. Bontsuk fel a négyzet többi oldalvektorát a két adott vektorral párhuzamos összetevőkre.

E2 **2376.** *a)* Bontsuk fel egy háromszög egyik szögfelező vektorát a kezdőpontjából kiinduló oldalvektorokkal párhuzamos összetevőkre.
b) Legyen a háromszög oldalainak hossza a, b, c. Határozzuk meg a fenti párhuzamos összetevők együtthatóit is.

K2 **2377.** Az **a** és **b** vektorok nem párhuzamosak, és egyik sem nullvektor. Határozzuk meg α és β értékét, ha

a) $3\mathbf{a}+5\mathbf{b}=\alpha\,\mathbf{a}+(2\beta+1)\mathbf{b}$;
b) $(\alpha+\beta-1)\mathbf{a}-(2\alpha-\beta)\mathbf{b}=\mathbf{0}$;
c) $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}=(\beta+1)\mathbf{a}-(\alpha-1)\mathbf{b}$;
d) $(2\alpha-\beta-1)\mathbf{a}-(3\alpha+\beta+10)\mathbf{b}=\mathbf{0}$.

K2 **2378.** Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja legyen D. Szerkesszük meg azt a D' pontot, amelyre $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD'}=\mathbf{0}$, és állítsuk elő a $\overrightarrow{D'A}$ és $\overrightarrow{D'B}$ vektorokat az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok segítségével.

K1 **2379.** Egy szabályos háromszög két közös kezdőpontú oldalvektora $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. Állítsuk elő ezek segítségével a b oldalhoz tartozó magasságvonal-vektort.

E1 **2380.** Bizonyítsuk be, hogy ha az egy pontból kiinduló $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok végpontjai egy egyenesbe esnek, és $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem egyállásúak, akkor $\mathbf{c}$ előállítható $\mathbf{c}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ alakban, ahol $\alpha+\beta=1$.

E1 **2381.** Bizonyítsuk be, hogy ha az egy pontból kiinduló $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok olyanok, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem egyállásúak, és $\mathbf{c}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$, ahol $\alpha+\beta=1$, akkor az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok végpontjai egy egyenesbe esnek.

E2 **2382.** *(A 2380. feladatra épül.)* Az O pontból két félegyenes indul ki. Az egyik félegyenesen levő A_1, illetve A_2 pontba O-ból az $\mathbf{a}$, illetve $\lambda\mathbf{a}$ vektor vezet ($\lambda\neq 0$), a másikon levő B_1, illetve B_2 pontba viszont a $\mathbf{b}$, illetve $\mu\mathbf{b}$ vektor ($\mu\neq 0$). Határozzuk meg az A_1B_2 és B_1A_2 egyenesek metszéspontjába mutató $\mathbf{v}$ vektort (az A_1 és A_2, illetve a B_1 és B_2 pontok különbözők; az A_1B_2 egyenes nem párhuzamos a B_1A_2-vel).

E2 **2383.** *(A 2381. és a 2382. feladatra épül.)* Az $ABCD$ négyszögben nincsenek párhuzamos oldalak. Legyen az AB és CD egyenesek metszéspontja E, az AD és BC egyeneseké F. Bizonyítsuk be, hogy az AC, BD, EF szakaszok felezéspontjai egy egyenesen vannak.

V **2384.** Legyen az $ABCDEF$ olyan hatszög, hogy minden második oldala párhuzamos egymással. Bizonyítsuk be, hogy az AD, BE és CF átlók egyenesei egy pontban metszik egymást. *(A 2381. és a 2382. feladatra épül.)*

V **2385.** Az $ABCD$ konvex négyszög AB, illetve CD oldalán vegyünk fel egy X, illetve Y pontot úgy, hogy azok az AB, illetve DC oldalakat ugyanabban a $\lambda:\mu$ arányban osszák. Legyen az AD oldal felezéspontja V, a BC oldalé pedig Z. Jelöljük az XY egyenesnek a négyszög VZ középvonalával való metszéspontját P-vel. Milyen arányban osztja a P pont a VZ, illetve az XY szakaszt?

Vektorok elforgatásával megoldható feladatok

E1 **2386.** Egy háromszög két oldala fölé (kifelé) szerkesszünk négyzeteket. Mutassuk meg, hogy ezeknek a háromszögcsúcsoktól különböző két legközelebbi csúcsát összekötő szakasz kétszer akkora, mint a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal, és e két szakasz merőleges egymásra.

K2 **2387.** Az $ABCD$ négyszög belsejében O olyan pont, hogy az ABO és CDO egyenlő szárú derékszögű háromszögek (a derékszögű csúcsok O-nál vannak). Bizonyítsuk be, hogy
a) a négyszög átlói merőlegesek és egyenlők;
b) a négyszög oldalfelező pontjai négyzetet határoznak meg.

V **2388.** Tetszőleges ABC háromszög oldalaira szerkesszünk kifelé négyzeteket. Legyenek ezek (pozitív körüljárással) $BAEF$, $CBGH$, $ACJK$; a négyzetek középpontjai rendre X, Y, Z. Szerkesszük meg ezeken kívül a $BFPG$, $CHQJ$, $AKRE$ paralelogrammákat. Így egy összetett alakzatot nyerünk. Bizonyítsuk be, hogy érvényesek a következő állítások:
a) Az FG, HJ, KE szakaszok kétszer akkorák, mint az ABC háromszög súlyvonalai, és merőlegesek azokra.
b) Az A, B, C csúcsokból rendre a KE, FG, HJ szakaszokra állított merőlegesek egy pontban, az ABC háromszög súlypontjában metszik egymást.
c) Az AR, BP, CQ szakaszok merőlegesek az ABC háromszög egy-egy oldalára, és egyenlők velük.
d) Az XYZ háromszög oldalaira befelé szerkesztett négyzetek középpontjai felezik az ABC háromszög oldalait.
e) Az X, Y, Z pontok a PQR háromszög oldalfelező pontjai.
f) Az XQ, YR, PZ egyenesek egy pontban metszik egymást.
g) Az ABC, XYZ, EGJ, FHK háromszögek súlypontjai egybeesnek.
h) Az AH és BJ; BK és CE; CF és AG szakaszok páronként egyenlők, és merőlegesek egymásra.

K2 **2389.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyszög átlói egyenlők és merőlegesek egymásra, akkor oldalfelező pontjai négyzetet határoznak meg.

E2 **2390.** *(A 2389. feladatra épül.)* Egy négyszög oldalai fölé kifelé szerkesszünk négyzeteket. Jelöljük meg a szomszédos négyzetközéppontok összekötő szakaszainak felezéspontjait. Bizonyítsuk be, hogy ezek négyzetet alkotnak.

E2 **2391.** Egy paralelogramma oldalai fölé szerkesszünk kifelé négyzeteket. Bizonyítsuk be, hogy ezek középpontjai négyzetet alkotnak.

E2 **2392.** Egy ABC háromszög AB, BC, CA oldalai fölé szerkesszünk kifelé négyzeteket. Legyenek ezek középpontjai rendre X, Y, Z.
a) Mutassuk meg, hogy az XY és BZ szakaszok egyenlők és merőlegesek egymásra.
b) Igazoljuk, hogy az AY, BZ és CX egyenesek egy ponton mennek át.

E2 **2393.** Legyenek ABC és $A_1B_1C_1$ azonos körüljárású egyenlő szárú derékszögű háromszögek. Bizonyítsuk be, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok felezőpontjai ugyancsak egyenlő szárú derékszögű háromszöget alkotnak.

E2 **2394.** *(Az 2393. feladatra épül.)* Legyenek ABC és $A_1B_1C_1$ azonos körüljárású egyenlő szárú hasonló háromszögek. Bizonyítsuk be, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok felezőpontjai ugyancsak egyenlő szárú, az előzőekhez hasonló háromszöget alkotnak.

K1 **2395.** Jelentse $\mathbf{a}'$ azt a vektort, amely $\mathbf{a}$-ból 60°-os pozitív irányú elforgatással származik, és legyen $(\mathbf{a}')' = \mathbf{a}''$, azaz **$\mathbf{a}''$-vel** jelöljük $\mathbf{a}'$ +60°-os elforgatottját. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{a}'' = \mathbf{a}' - \mathbf{a}$.

K2 **2396.** Legyenek ABC és AB_1C_1 azonos körüljárású szabályos háromszögek. Bizonyítsuk be, hogy az A pont, valamint a BB_1 és CC_1 szakaszok felezőpontjai egy szabályos háromszög csúcsai.

K2 **2397.** Bizonyítsuk be, hogy ha ABC és $A_1B_1C_1$ egyező körüljárású szabályos háromszögek, akkor az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok felezőpontjai szabályos háromszög csúcsai.

K2 **2398.** *(A 2395. feladatra épül.)* Az $ABCD$ paralelogramma BC és CD oldalai fölé kifelé szabályos háromszögeket szerkesztünk. Bizonyítsuk be, hogy az A pont, továbbá a szabályos háromszögeknek a paralelogrammán nem levő csúcsai szabályos háromszöget alkotnak.

E2 **2399.** *(A 2395. feladatra épül.)* Egy körben helyezzünk el három sugár hosszúságú húrt, legyenek ezek *AB*, *CD*, *EF*. Bizonyítsuk be, hogy a *BC*, *DE*, *FA* szakaszok felezéspontjai szabályos háromszög csúcsai.

E2 **2400.** *(A 2395. feladatra épül.)* Legyenek *OAB*, *OCD*, *OEF* tetszőleges szabályos háromszögek. Bizonyítsuk be, hogy a *BC*, *DE*, *FA* szakaszok felezéspontjai szabályos háromszög csúcsai.

E2 **2401.** *(A 2395. feladatra épül.)* Egy háromszög oldalai fölé (vagy mind kifelé vagy mind befelé) rajzoljunk szabályos háromszögeket. Bizonyítsuk be, hogy ezek középpontjai ismét szabályos háromszöget alkotnak.

E2 **2402.** *(A 2395. feladatra épül.)* Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex hatszög minden második csúcsánál 120°-os szög van, és egy-egy 120°-os szöget közrefogó oldalpár egyenlő oldalakból áll, akkor ezek a csúcsok szabályos háromszöget alkotnak.

E2 **2403.** Az *AB* szakaszon jelöljünk ki egy tetszőleges *C* pontot. A szakasz egyik oldalára *AC* és *CB* fölé, másik oldalára pedig *AB* fölé szerkesszünk szabályos háromszöget. Bizonyítsuk be, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak.

Műveletek koordinátákkal megadott vektorokkal

K1 **2404.** Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben a következő vektorokat:

$\mathbf{a}(4; 6)$, $\mathbf{b}(-5; 3)$, $\mathbf{c}(-8; -3)$, $\mathbf{d}(0; -4)$,

$\mathbf{e}(12; -3)$, $\mathbf{f}\left(\frac{2}{3}; -3{,}2\right)$, $\mathbf{g}\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{8}\right)$, $\mathbf{h}\left(\frac{\sqrt{20}-1}{2}; \frac{\sqrt{18}+3}{2}\right)$.

A vektorok kezdőpontja legyen az origó, majd legyen az (5; 5) pont. Számítsuk ki a vektorok abszolútértékét. Fejezzük ki a vektorokat az **i**, **j** egységvektorokkal.

E1 **2405.** Az **i**, **j**, **k** egységvektorokkal meghatározott jobbrendszerben adottak a következő vektorok:
$\mathbf{a}(5; 2; 4)$, $\mathbf{b}(-3; 4; 2)$, $\mathbf{c}(-6; -3; 8)$, $\mathbf{d}(-12; -5; -16)$.
Fejezzük ki a vektorokat az **i**, **j**, **k** egységvektorokkal és számítsuk ki a vektorok abszolútértékét!
Legyenek **i**, **j**, **k** egységvektorok és legyenek páronként egymásra merőlegesek. Helyezzük **i**-t a jobb kezünk hüvelykujjára, **j**-t a mutatóujjára és **k**-t a középsőujjra. Ekkor azt mondjuk, hogy az (**i**, **j**, **k**) vektorhármas jobbrendszert alkot.

K1 **2406.** Ábrázoljuk azt a háromszöget, amelynél a (0, **i**, **j**) rendszerben a csúcsok helyvektorai:
a) (7; 14), (–3; 8), (12; –6); *b)* (–8; 0), (6; 0), (0; 3).
(A (0, **i**, **j**) szimbólum azt fejezi ki, hogy az adott vektorok kezdőpontja az origó. A további feladatokban, amikor helyvektorokról van szó, a vektorok kezdőpontjának mindig az origót tekintjük).

K2 **2407.** Az $\mathbf{m}(a; b)$ és az $\mathbf{n}(b; a)$ helyvektorok hogyan helyezkednek el egymáshoz viszonyítva? $(a, b \in \mathbf{R})$

III

K2 **2408.** Határozzuk meg a (3; 4), (–4; 2), (4; –5), (5; 0), (0; –3), (p; q) koordinátákkal adott helyvektorok tükörképeinek koordinátáit, ha azokat
a) az x tengelyre; *b)* az y tengelyre; *c)* az origóra; *d)* az origón áthaladó és az x tengely pozitív felével 45°-os szöget bezáró egyenesre; *e)* az x tengely pozitív irányával –45°-os szöget bezáró és az origón áthaladó egyenesre tükrözzük.

K2 GY **2409.** Négy darab egybevágó, egyenlő szárú háromszög alakú parcella úgy helyezkedik el, hogy az alap egyenese közös és alapjuk egyik csúcspontja is azonos. Az alap 10, a hozzá tartozó magasság 6 egység. Adjuk meg a csúcspontok koordinátáit, ha az alap az x tengelyen van és a közös csúcs az origó. Hány megoldás van? Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha az alap 12, a szár hossza 8 egység és csúcsa az origó.

K2 GY **2410.** Egy a egység oldalú négyzet alakú kertet csúcspontjainak koordinátáival akarjuk jellemezni. A négyzet középpontja az origóban van. Adjuk meg a csúcspontok koordinátáit, ha
a) a négyzet csúcsai a tengelyekre illeszkednek;
b) a négyzet oldalai párhuzamosak a tengelyekkel.

E2 **2411.** Az (**i**, **j**, **k**) egységvektorokkal meghatározott rendszerben egy a élhosszúságú kocka középpontja az origóban van. Oldallapjai merőlegesek a tengelyekre. Határozzuk meg a kocka csúcsainak helyvektorait.

E2 GY **2412.** A szabályos hatszög alakú virágágyás oldalának hossza 4, illetve $2a$ egység, a középpontja az origóban van. Adjuk meg a csúcsok koordinátáit, ha
a) az egyik csúcsa az x tengelyen; *b)* az egyik csúcsa az y tengelyen van.

III

K2 **2413.** Szerkesszük meg azoknak a pontoknak a halmazát a koordináta-rendszerben, amelyeknél a helyvektorok koordinátái:

a) (x; 5); *b)* (–4; y); *c)* (x; x); *d)* $(|x|;|x|)$; $(x, y \in \mathbf{R})$.

K1 **2414.** Az **a**(2; 3), **b**(4;–5), **c**(–10; 8), **d**$\left(-5;-\frac{3}{4}\right)$, **e**($a$; b), **f**(sin α; cos α) vektorokat +90°-kal, illetve –90°-kal elforgatjuk. Határozzuk meg a kapott vektorok koordinátáit.

K1 **2415.** Legyen **a**(3; 5), **b**(–4; 2), **c**(–2; –5), **d**(0; 3), **e**(5; –2). Számítsuk ki a következő vektorok koordinátáit:

1. $\mathbf{a}+\mathbf{b}$; 2. $\mathbf{a}-\mathbf{c}$; 3. $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{d}+\mathbf{e}$; 4. $\mathbf{a}-2\mathbf{b}$;
5. $\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{2}{3}\mathbf{b}$; 6. $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$; 7. $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{3}$.

Ábrázoljuk a kapott vektorokat.

K1 **2416.** Egy háromszög csúcsainak koordinátái: A(8; 2), B(6; 9), C(–2; 4). Határozzuk meg az $\overrightarrow{AB}$, a $\overrightarrow{BC}$ és a $\overrightarrow{CA}$ vektorok koordinátáit. Mivel egyenlő $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$? Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ nullvektor.

K1 **2417.** Számítsuk ki az $ABCD$ négyszög $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ oldalvektorainak koordinátáit, ha A(6; 4), B(–2; 8), C(–6; –3), D(1; –12).

K2 **2418.** Egy $ABCD$ négyzet K középpontjának koordinátái (7; –4). A középpontból az egyik oldal felezőpontjába vezető vektor koordinátái (–10; 4). Határozzuk meg a négyzet csúcspontjainak koordinátáit.

K1 GY 2419. Egy négyszög alakú telek csúcspontjainak koordinátái: $A(1; 3)$, $B(3; 8)$, $C(8; 6)$, $D(6; 1)$. Igazoljuk, hogy a négyszög négyzet.

K2 2420. Adjuk meg az $\mathbf{a}(8; 3)$, a $\mathbf{b}(-2; 6)$, a $\mathbf{c}(5; -9)$, a $\mathbf{d}(-7; -3)$ vektorokkal egyirányú egységvektorok koordinátáit.

K2 2421. Az $ABCD$ rombusz AC átlója kétszerese a BD átlónak. Számítsuk ki a B, C, D csúcsok koordinátáit, ha az A csúcs koordinátái $(-3; 7)$ és a rombusz K középpontjának koordinátái $(1; 9)$.

E2 2422. Három pont $A(1; a)$, $B(3; b)$, $C(4; c)$ második koordinátájáról tudjuk, hogy $a = -\frac{\sin 39° + \sin 13°}{\sin 26° \cdot \cos 13°}$, $b = \sqrt{10^{2+\lg 25}}$, $c = \left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)^3$. Igaz-e, hogy A, B, C egy egyenesre illeszkednek?

E1 2423. Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ vektor hosszát, ha
a) $\mathbf{a}(1; 2; 3)$; *b)* $\mathbf{a}(-2; -4; 3)$.

E2 2424. Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ vektorral egyirányú egységvektor koordinátáit, ha
a) $\mathbf{a}(1; 4; 5)$; *b)* $\mathbf{a}(-3; -2; -4)$; *c)* $\mathbf{a}(2; -2; 2)$.

Két vektor skaláris szorzata

Két vektor skaláris szorzatán a két vektor hosszának és a hajlásszögük koszinuszának a szorzatát értjük. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor skaláris szorzatát $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$-vel jelöljük. A definíció szerint:
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszögét jelöli.

K2 2425. Az ABC szabályos háromszögben tekintsük az $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$ vektorokat. Határozzuk meg az $\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}$ értékét.

K2 2426. Határozzuk meg az $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ szorzatot, ha az ABC háromszögben $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $CA = 10$ cm.

K2 2427. Tekintsük az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamos vektorokat. Van-e olyan k szám, hogy $\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ merőleges a $\mathbf{b}$-re?

E1 2428. Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét, ha $3\mathbf{b} - 5\mathbf{b}$ és $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, illetve $\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$ és $-\mathbf{a} + \mathbf{b}$ egymára merőleges vektorok.

K1 2429. Számítsuk ki az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatát, ha
$|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 5$, és $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 40°$.

K2 2430. Számítsuk ki az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatát és a két vektor hajlásszögét, ha
a) $\mathbf{a}(4; 3)$, $\mathbf{b}(6; 8)$; *b)* $\mathbf{a}(4; -3)$, $\mathbf{b}(2; 5)$; *c)* $\mathbf{a}(-2; 8)$, $\mathbf{b}(12; 9)$; *d)* $\mathbf{a}(-4; -5)$, $\mathbf{b}(6; -5)$.

E1 2431. Határozzuk meg az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ skaláris szorzatot, ha
a) $\mathbf{a}(1; 2; 5)$, $\mathbf{b}(-1; 3; -7)$; *b)* $\mathbf{a}(0; 2; 3)$, $\mathbf{b}(-2; 1; 3)$;
c) $\mathbf{a}(2; 3; 4)$, $\mathbf{b}(5; 7; -1)$; *d)* $\mathbf{a}(\sqrt{2}; 5; 1)$, $\mathbf{b}(\sqrt{3}; -12; 2)$.

E2 **2432.** Mekkora szöget zárnak be az **a** és a **b** vektorok, ha
a) **a**(–1; 3; 7), **b**(2; 5; –4); *b)* **a**(2; –3; 5), **b**(–1; –2; 5); *c)* **a**(–2; 3; –6), **b**(–1; 4; 8).

K1 **2433.** Határozzuk meg az y értékét úgy, hogy az **a**(–12; 4) és a **b**(6; y) vektorok merőlegesek legyenek egymásra.

E2 **2434.** Az A, B, C pontok koordinátái: $A(3; 7)$, $B(9; 14)$ és $C(13; 2)$. Hogyan kell a k valós számot megválasztani, hogy az $\overrightarrow{AC}$ és az $\overrightarrow{AB} - k \cdot \overrightarrow{AC}$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra?

K2 **2435.** Igazoljuk, hogy az $A(7; 4)$, $B(0; -5)$ és a $C(-2; 1)$ pontok derékszögű háromszög csúcsai.

K2 **2436.** Az $ABCD$ téglalapban $AB = 2BC$ és $A(-2; 4)$, $B(8; 16)$. Számítsuk ki a C és a D csúcsok koordinátáit.

E1 **2437.** Az **a**(–2; 1; –3) és a **b**(5; –2; z) vektorok merőlegesek egymásra. Mekkora a z értéke?

E2 **2438.** Igazoljuk, hogy ha $p \neq 0$ és $p \in \mathbf{R}$, akkor az
a $(p; -(p+1); -p(p+1))$, **b**$(-p(p+1); p; -(p+1))$, és a
c $(-(p+1); -p(p+1); p)$ vektorok egy kocka egyik csúcsából induló élvektorok.

K1 **2439.** Számítsuk ki a háromszög szögeit, ha a csúcspontok koordinátái:
a) $A(-1; -2)$, $B(2; 3)$, $C(4; -1)$; *b)* $A(0; 2)$, $B(2; 2)$, $C(3; 1)$;
c) $A(4; 2)$, $B(1; 4)$, $C(2; -3)$; *d)* $A(1; 1)$, $B(9; 7)$, $C(4; -2)$.

III

E1 **2440.** Számítsuk ki a háromszög szögeit, ha a csúcsok koordinátái:
$A(-4; 1; 2)$, $B(1; 3; 5)$, $C(0; 0; 2)$.

E1 **2441.** Adott két vektor: **a**(5; –1; 2) és **b**(–2; 3; 1). Keressünk olyan **x** vektort, amelyik merőleges **a**-ra is és **b**-re is.

V **2442.** Igazoljuk, hogy ha $a,b,c,d \in \mathbf{R}^+$, akkor $\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} \geq ac+bd$.

E2 GY **2443.** Az $ABCD$ trapéz alakú kertünk párhuzamos oldalai AB és CD. $AB = 3 \cdot CD$, $BC = AD$ és $AC \perp BD$. Számítsuk ki az A és a B csúcsok koordinátáit, ha $C(6; 4)$ és $D(3; 3)$.

E2 **2444.** Adjunk meg olyan **b** vektort, amely az **a** vektorral 60°-os szöget zár be, ha az **a** vektor koordinátái (8; 6).

E1 **2445.** Bontsuk fel a **v**(6; 4) vektort az **a**(4; 1) és a **b**(2; 8) vektorokkal párhuzamos összetevőkre.

E2 **2446.** Bontsuk fel a **v**(1; –5) vektort az **a**(2; –1) és a **b**(1; 1) vektorokkal párhuzamos összetevőkre; és a **v**(2; 3) vektort az **a**(1; –1) és a **b**(4; 2) vektorokkal párhuzamos összetevőkre.

E1 **2447.** Bontsuk fel a **v**(4; 2) vektort az **a**(2; 3) és a **b**(1; –1) vektorokkal párhuzamos összetevőkre. Határozzuk meg a **v** vektorral ellentétes irányú 5 egység hosszúságú vektor koordinátáit.

E2 **2448.** Adjunk meg olyan **v** vektort, amely az **a**(3; 4) és a **b**(5; 12) vektorok által bezárt szög szögfelezőjével párhuzamos.

Két vektor vektoriális szorzata

Az **a** és a **b** vektorok vektoriális szorzata olyan vektor, amely merőleges az **a**, **b** vektorokra és iránya megegyezik jobb kezünk középső ujjának irányával, ha a jobb kezünk hüvelykujja az **a**, a mutatóujja a **b** vektor irányába mutat. – A vektoriális szorzat **a**, **b** vektorai és a szorzat úgynevezett „jobbrendszert" alkotnak. – A vektoriális szorzat jelölése: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. A szorzat abszolútértéke (a vektoriális szorzat hossza): $|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})$, ahol $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ a két vektor hajlásszögét jelenti.

E2 **2449.** Igazoljuk, hogy ha $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ akkor $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ az *OACB* paralelogramma területével egyenlő.

E2 **2450.** Legyenek **i**, **j**, **k** egységvektorok és **i**(1; 0; 0), **j**(0; 1; 0), **k**(0; 0; 1). Igazoljuk, hogy $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$.

E2 **2451.** Igazoljuk, hogy az $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ és a $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$ vektoriális szorzata $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$.

E2 **2452.** Határozzuk meg $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$-t és $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$-t, ha
a) **a**(1; 2; 1) **b**(2; 3; –2); *b)* **a**(2; 0; 1) **b**(0; 0; 1); *c)* **a**(5; 7; –3) **b**(–1; –2; 5).

E2 **2453.** Számítsuk ki az *ABCD* paralelogramma területét, ha
a) $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(1; 1; 1)$;
b) $A(1; 2; 3)$, $B(2; -1; 3)$, $C(5; -2; -3)$.

E2 **2454.** Számítsuk ki az *ABC* háromszög területét, ha
a) $A(-1; 1; 2)$, $B(1; -1; -2)$, $C(1; 1; 1)$; *b)* $A(2; 1; 1)$, $B(1; 2; 3)$, $C(4; 1; -5)$.

V **2455.** Igazoljuk a következő tételek helyességét.
a) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} \neq \mathbf{b}\times\mathbf{a}$; *b)* $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$; *c)* $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

IV. Trigonometria

Szögek átváltása fokról radiánra és fordítva

K1 **2456.** Hány fokosak a következő, radiánban (ívmértékben) megadott szögek?

a) π; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{8}$; *b)* $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{6}$.

K1 **2457.** Hány fokosak a következő, radiánban megadott szögek?

a) $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{\pi}{5}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{4}$; *b)* 1; 2,5; 0,52; 2,84; 0,111.

K1 **2458.** Számítsuk át radiánról fokra a következő szögeket:

a) 2; 3,55; 0,285; 1,451; 5,36; *b)* 3,24; 2,419; 54,62; 100; 0,75.

K1 **2459.** Számítsuk át radiánba (ívmértékbe) a következő fokokban megadott szögeket, π radiánnal kifejezve:

a) 180°; 90°; 45°; 60°; 30°; *b)* 360°; 270°; 150°; 135°; 120°.

K1 **2460.** Számítsuk át fokról ívmértékbe a következő szögeket:

a) 40°; 15°; 115°; 240°; 300°; *b)* 12°; 55°; 118°; 152,6°; 105,24°.

K1 **2461.** Számítsuk át radiánba a következő szögeket:

a) 36°15′; 45°38′; 118°17′; 238°49′; 316°57′;

b) 15°42′; 67°35′; 88°26′; 50°46′; 8°23′.

K1 **2462.** Számítsuk át fokra a következő szögeket:

$\frac{4\pi}{5}$; 0,4; $\frac{11\pi}{9}$; 1,256; $\frac{7\pi}{5}$; 2.

K1 **2463.** Számítsuk át radiánba a következő szögeket:

15,2°; 100,45°; 24° 37′; 16° 40′; 300°.

K1 **2464.** Számítsuk át radiánba a következő szögeket π radiánnal kifejezve:

a) 75°; 25°; 80°; 105°; 215°; *b)* 36°; 10°; 315°; 5°; 420°.

Hegyesszögű trigonometriai alapfeladatok

K1 **2465.** Egy derékszögű háromszög átfogója 18,2 cm hosszúságú, egyik szöge 21°. Számítsuk ki a megadott szöggel szemközti befogó hosszát.

K1 **2466.** Egy derékszögű háromszög átfogója 26,7 dm, egyik szöge 19,3°. Számítsuk ki a megadott szög melletti befogó hosszát.

K1 **2467.** Egy derékszögű háromszög átfogója 12 cm-es és az egyik szöge 23°-os. Számítsuk ki a befogóinak a hosszát.

K1 **2468.** Valamely derékszögű háromszög átfogója 46,5 cm hosszú és egyik szöge 12°25′-es. Számítsuk ki a befogóinak a hosszát.

K1 **2469.** Egy derékszögű háromszög egyik szöge 36,18°-os és ezzel a szöggel szemközt 8,3 cm hosszúságú befogó található. Számítsuk ki háromszög átfogójának és a másik befogójának a hosszát.

K1 **2470.** Valamely derékszögű háromszög átfogójának és egyik befogójának a hosszát keressük. Ismert, hogy a háromszög egyik szöge 42°53′ és ezzel a szöggel szemközt 16,2 m-es befogó található.

K1 **2471.** Egy derékszögű háromszögben ismert a 26 dm-es befogó és a mellette levő 18,6°-os szög. Határozzuk meg a másik befogó hosszát.

K1 **2472.** Egy derékszögű háromszög egyik szöge 41°17′, e szöggel szemközt 10,6 cm hosszú befogó van a háromszögben. Határozzuk meg a másik befogó hosszát.

K1 **2473.** Valamely derékszögű háromszög egyik szöge 14°27′, e szög mellett 26,2 cm hosszú befogó található. Határozzuk meg a háromszög ismeretlen oldalainak a hosszát.

K1 **2474.** Egy derékszögű háromszög egyik befogója 17,3 dm hosszú, ezen befogóval szemben 43°18′-es szög található a háromszögben. Határozzuk meg a háromszög ismeretlen oldalainak a hosszát.

K1 **2475.** Adott egy derékszögű háromszög 35,2 cm-es befogója és a mellette levő 67°24′-es szöge. Számítsuk ki a háromszög ismeretlen oldalainak a hosszát.

K1 **2476.** Adott egy derékszögű háromszög 72°15′-es szöge és a vele szemközti 58,7 m hosszú oldal. Határozzuk meg a háromszög ismeretlen oldalainak a hosszát.

K1 **2477.** Egy derékszögű háromszög átfogója 24 cm, míg egyik befogója 12 cm hosszú. Határozzuk meg az adott befogóval szemközti szöget.

K1 **2478.** Valamely derékszögű háromszögben ismert az 5 cm-es befogó és a 15 cm-es átfogó. Számítsuk ki az 5 cm-es befogóval szemközti szöget.

IV

K1 **2479.** Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszögét keressük, ha ismert, hogy a szög melletti két oldal hosszúsága 13,6 cm illetve 32,7 cm.

K1 **2480.** Egy derékszögű háromszög átfogója 27,2 cm és az egyik befogója 9,6 cm. Határozzuk meg az ismert befogóval szemközti szöget.

K1 **2481.** Ismert egy derékszögű háromszög két befogójának a hossza, az egyik 3 egység, a másik $\sqrt{3}$ egység. Számítsuk ki a háromszög ismeretlen szögeit.

K1 **2482.** Egy derékszögű háromszög két oldala 6 cm, illetve 54 cm hosszú. Számítsuk ki a háromszög ismeretlen oldalával szemközti szögét.

K1 **2483.** Valamely derékszögű háromszög egyik befogója egységnyi, míg a másik befogó $\sqrt{3}$ egység hosszú. Számítsuk ki a háromszög ismeretlen szögeit.

K1 **2484.** Egy derékszögű háromszög 10 cm-es befogójával szemközti szöget keressük, ha ismert, hogy az átfogó hossza 15 cm.

K1 GY 2485. Egy pincébe vezető lejárat mélysége 132 cm, míg a lejárat vízszintesre való merőleges vetülete 244 cm. Mekkora a lejárat hajlásszöge a vízszinteshez képest?

K1 GY 2486. Egy 400 m hosszú egyenes útszakasz emelkedése 10 m. Mekkora az emelkedés szöge?

K1 GY 2487. Egy lejtő a vízszintessel 18°-os szöget zár be, a vízszintesre eső merőleges vetülete 4,6 m. Milyen magasról érkezik a lejtő?

K1 GY 2488. Egy lejtő a vízszintessel 24°-os szöget zár be és 1,8 m magasra visz. Mekkora a lejtő hossza és a vízszintesre eső merőleges vetülete?

K1 GY 2489. Egy létrát támasztunk a falhoz. A létra hossza 3,2 m és a létra lábai a faltól 75 cm-re vannak. Mekkora szöget zár be a fallal a létra?

K1 GY 2490. Egy torony teteje a talpától 60 m távolságból 22°37′-es szög alatt látszik. Milyen magas a torony?

K1 GY 2491. Milyen magasra visz a 8,7 m hosszú lejtő, ha az a vízszintessel 15°-os szöget zár be?

K1 GY 2492. Lejtős feljárót kell készíteni, amelynek 1,5 m magasra kell vezetnie. A vízszintes talajon milyen távol kezdődjön a feljáró, ha a hajlásszöge 12°-os lesz?

K1 GY 2493. Egy ház teraszára vezető lépcsősor vízszintesre eső merőleges vetülete 230 cm. Egy lépcső magassága 14 cm és a teraszra 8 lépcső vezet. Mekkora a lépcsősor hajlásszöge a vízszinteshez képest?

K1 GY 2494. Egy hegyre az út átlagosan 5°42′-es szög alatt emelkedik. Hány százalékos az emelkedő?

K1 GY 2495. Egy hegyi út emelkedése 12%. Mekkora szöggel hajlik az út a vízszinteshez képest?

K1 GY 2496. Egy utca közepe fölött egy lámpát függesztettek fel. A két felfüggesztési pont távolsága 15 m az utca két oldalán. A lámpa a huzal felezőpontjában lóg, belógása 20 cm. Mekkora szöget zár be a huzal a vízszintessel?

K1 2497. Egy téglalap egyik oldala 6,8 cm. Az átlói a megadott oldallal 32°20′-es szöget zárnak be. Határozzuk meg a téglalap ismeretlen oldalának a hosszát.

K1 2498. Egy téglalap átlója 14,3 cm-es és az egyik oldallal 23°18′-es szöget zár be. Mekkorák a téglalap oldalai?

K1 GY 2499. Egy templomtorony árnyéka 42,5 m hosszú. A Nap sugarai a talajhoz képest 38,6°-os beesési szögben érkeznek. Milyen magas a templomtorony?

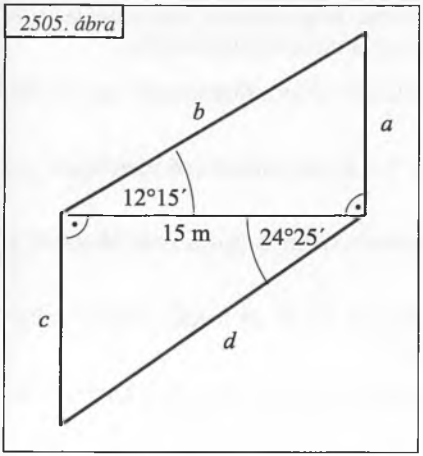
K1 GY 2500. Mekkora szöget zárnak be a Nap sugarai a talajjal, ha valamely függőleges rúd árnyéka az adott pillanatban 2,8-szor akkora, mint a rúd hossza?

K1 GY 2501. Mekkora a Nap sugarainak a beesési szöge a talajhoz képest, ha valamely karó árnyéka az adott pillanatban 2,4-szer akkora, mint a karó hossza?

K1 GY 2502. Közvetlenül a folyó partján áll egy épület, amelynek 15 m magasan levő ablakából a folyó szélessége 74°44′-es szög alatt látszik. Milyen széles a folyó?

K1 GY 2503. Egy folyó szélességét szeretnénk meghatározni úgy, hogy a folyó túlsó partján kiszemelünk egy közvetlenül a folyóparton levő fát, ez lesz az A pont. A B pont az innenső

2505. ábra



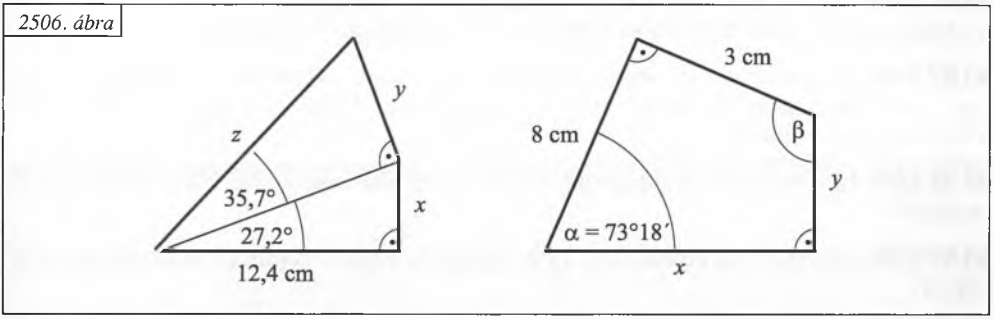
parton az A ponttal szemközt leütött karó úgy, hogy AB merőleges a folyóra. Az innenső parton felvesszük a BC = 300 m hosszú alapvonalat, párhuzamosan a folyóval, közvetlenül a partján. A C pontból az AB szakasz 26°34′-es szög alatt látszik. Mekkora az AB szakasz, vagyis a folyó szélessége?

K1 GY 2504. A Balaton szintje fölötti 120 m magasságból egy vitorlás 4°50′-es lehajlási szög (depressziószög) alatt látszik. Milyen távol van tőlünk a vitorlás légvonalban?

K1 2505. Határozzuk meg a *2505. ábrán* lévő négyszög oldalainak a hosszát.

K1 2506. Határozzuk meg az ábrán szereplő négyszög ismeretlen oldalait.

2506. ábra



IV Hegyesszög megszerkesztése valamely szögfüggvényének értékéből

K1 2507. Szerkesszük meg azt a hegyesszöget, amelynek szinusza

a) $\frac{1}{2}$; *b)* $\frac{1}{4}$; *c)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$; *d)* 2.

K1 2508. Szerkesszük meg azt a hegyesszöget, amelynek koszinusza

a) $\frac{1}{2}$; *b)* $\frac{1}{3}$; *c)* $\frac{3}{2}$; *d)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

K1 2509. Szerkesszük meg azt a hegyesszöget, amelynek tangense

a) $\frac{1}{2}$; *b)* 1; *c)* 2; *d)* $\sqrt{5}$.

K1 **2510.** Szerkesszük meg azt a hegyesszöget, amelynek kotangense

a) 1; *b)* 2; *c)* $\sqrt{2}$; *d)* $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

K1 **2511.** Szerkesszük meg az α hegyesszöget, ha tudjuk, hogy

a) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$; *b)* $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; *c)* $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; *d)* $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

e) $\operatorname{tg}\alpha = 3$; *f)* $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$; *g)* $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$; *h)* $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Nevezetes hegyesszögek szögfüggvényei

A következő feladatoknál ne használjunk közelítő értékeket, amelyeket számológépből vagy táblázatból nyerhetnénk. Ha az egyszerűsítések után a végeredményben gyökök vannak, akkor azok értékeit nem kell kiszámolnunk, ha nem racionális szám az értékük, hanem a végeredményben hagyhatjuk a gyököket.

K1 **2512.** Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét:

a) $\cos 60° + \sqrt{3}\cdot\cos 30°$; *b)* $2\cdot\sin 60° - \operatorname{tg} 45°$;

c) $3\cdot\sin 30° + 5\cdot\cos 60° - 3\cdot\operatorname{ctg} 45°$; *d)* $\frac{\operatorname{tg}60°}{\sin 60°}$.

K1 **2513.** Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét:

a) $2\cdot\sin 60°\cdot\operatorname{ctg} 60°$; *b)* $8\cdot\operatorname{tg} 30°\cdot\operatorname{ctg} 30°$;

c) $4\cdot\sin^2 45° - \operatorname{tg}^3 45°$; *d)* $6\cdot\operatorname{ctg} 60° - 2\cdot\sin 60°$.

K1 **2514.** Számítsuk ki a következő kifejezések pontos értékét:

a) $4\cdot\sin 30° - 2\cdot\cos 60° + 3\cdot\operatorname{tg} 45°$;

b) $6\cdot\operatorname{tg} 30° + 2\cdot\operatorname{ctg} 45° - \operatorname{tg} 45° - 4\cdot\sin 60°$;

c) $(\operatorname{tg} 60°)^2 + (\sin 60°)^2 - (\operatorname{tg} 45°)^2 + (\sin 30°)^2$.

K1 **2515.** Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét:

a) $\sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{3}$; *b)* $\cos^2\frac{\pi}{6} - \cos^2\frac{\pi}{4}$;

c) $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; *d)* $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\cos^2\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{3}$.

K1 **2516.** Számítsuk ki a következő kifejezések pontos értékét:

a) $\frac{\cos 30° - \sin 30°}{\cos 30° + \sin 30°}$; *b)* $\frac{3 - 2\cdot\operatorname{tg} 45°}{\sin 45°\cdot\cos 45°}$.

K1 **2517.** Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét:

a) $6\cdot\sin 60°\cdot\sin 45° - 4\cdot\cos 45°\cdot\cos 30°$; *b)* $\frac{\sin 60° - \sin 45°}{\cos 30° + \cos 45°}$.

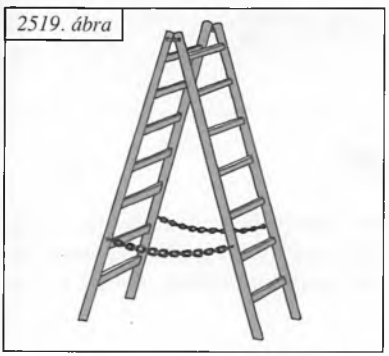
IV

Hegyesszögű trigonometriai feladatok

Egyenlő szárú háromszögek

K1 2518. Mekkora az egyenlő szárú háromszög alapja, ha a szára 3,8 cm és az alapon fekvő szögei 68° 24′-esek?

2519. ábra



K1 GY 2519. Egy kettőslétra egyik szárának hossza 195 cm. A kettőslétrát felállítottuk, mégpedig úgy, hogy a lábai a talajon 95 cm távolságra vannak egymástól. Mekkora a kettőslétra nyílásszöge? (Vagyis mekkora a szárak hajlásszöge?)

K2 GY 2520. Egy kettőslétra egyik szára 195 cm hosszúságú. A kettőslétra legfelső fokai a szárakon 180 cm-nél vannak. Teljesen kinyitjuk a kettőslétrát, amennyire a biztonsági láncok engedik. Ekkor a kettőslétra nyílásszöge 28,5°. Ha felmászunk a kettőslétrán és felállunk a legmagasabb fokaira, akkor milyen magasan állunk a talajhoz képest?

K1 GY 2521. Egy fonálon lengő kis pontszerű test két szélső helyzete közötti távolság 24 cm. A fonál hossza 95 cm. Határozzuk meg, hogy mekkora szöget zár be a fonálinga a két szélső helyzete között.

K1 2522. Egy egyenes körkúp nyílásszöge 46°, magassága 24,6 cm. Határozzuk meg a kúp alapkörének átmérőjét.

K1 2523. Egy forgáskúp alkotói 22,4 cm hosszúak. Az alapkörének átmérője 10,4 cm. Mekkora a kúp nyílásszöge?

K1 2524. Egy forgáskúp alkotója 18,4 cm, nyílásszöge 62°12′. Mekkora az alapkörének a sugara?

K2 2525. Valamely egyenlő szárú háromszög alapja 15 cm-es, míg szárai 12 cm hosszúak. Mekkora annak a körnek a sugara, amely a szárakat az alap végpontjaiban érinti?

K1 2526. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 6,4 cm, a beírt körének sugara 1,7 cm. Mekkorák a háromszög szögei?

K1 2527. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának hossza 8 cm, míg szára 10 cm hosszú. Számítsuk ki a háromszögbe írható kör sugarát.

K2 2528. Valamely egyenlő szárú háromszög szárai 8 cm hosszúak és az alapon fekvő szögei 72,48°-osak. Mekkora a háromszög köré írt körének sugara?

K2 2529. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 15 cm hosszú, az alapon fekvő szögei 68°-osak. Mekkora a körülírt és a beírt körének a sugara?

Téglalapok, rombuszok, paralelogrammák

K1 **2530.** Egy téglalap egyik oldala 4,6 m, az átlóinak a hajlásszöge 37°40′. Mekkora a téglalap ismeretlen oldala?

K2 **2531.** Egy téglalap átlója 23,60 cm, az átlók hajlásszöge 35°30′. Mekkorák a téglalap oldalai?

K2 **2532.** Egy téglalap területe 245,6 m^2, az egyik átlója 19°42′-es szöget zár be a téglalap egyik oldalával. Határozzuk meg, hogy mekkorák a téglalap oldalai.

K1 **2533.** Egy rombusz átlói 8,6 cm, illetve 12,4 cm hosszúak. Mekkorák a szögei és az oldala?

K1 **2534.** Egy rombusz egyik átlója 56 cm. Ez az átló a 44°-os szögek csúcsait köti össze a rombuszban. Milyen hosszú a másik átló és a rombusz oldala?

K1 **2535.** Mekkorák a rombusz szögei, ha az átlóinak az aránya $1:\sqrt{3}$?

K1 **2536.** Egy rombusz oldalának és a rövidebb átlója hosszúságainak az összege 59,4 dm, a rombusz hegyesszöge 41°30′ . Mekkora a rombusz oldala?

K1 **2537.** Mekkora a rombusz oldala, ha a hosszabbik átlója 24,6 cm és az ezzel szemközti szöge 128°42′?

K2 **2538.** Egy rombuszba írható kör sugara 2 cm. A rombusz egyik átlója két szabályos háromszögre bontja a rombuszt. Mekkora a rombusz oldala?

K2 **2539.** Egy rombusz egyik átlója 8 cm, a beírt körének sugara 2,4 cm. Mekkorák a rombusz szögei, oldala és területe?

K2 **2540.** Egy rombusz kerülete 116 m, területe 840 m^2. Mekkorák az átlói és a szögei?

K1 **2541.** Egy paralelogramma egyik oldalának hossza 7,2 cm és az ehhez tartozó magassága 5,7 cm hosszú. A paralelogramma egyik szöge 63,7°. Határozzuk meg a paralelogramma másik oldalának a hosszát.

K1 **2542.** Egy paralelogramma átlói 46 cm, illetve 54 cm hosszúak. Az átlók hajlásszöge 62,4°. Határozzuk meg a paralelogramma területét.

K2 **2543.** A paralelogramma átlói e, illetve f hosszúságúak, az átlóinak a hajlásszöge φ. Határozzuk meg a paralelogramma területét ezekkel az adatokkal kifejezve.

Szabályos sokszögek

K1 **2544.** Mekkora a 8 cm sugarú körbe írt szabályos háromszög oldala?

K1 **2545.** Mekkora a 7 cm sugarú körbe írt szabályos ötszög oldala?

K1 **2546.** Mekkora sugarú körbe írhatunk egy 10 cm oldalú szabályos hétszöget?

K1 **2547.** Mekkora sugarú körbe írhatunk egy 5 cm oldalú szabályos kilencszöget?

K1 **2548.** Mekkora a szabályos ötszög területe, ha oldala 7 cm?

K1 **2549.** Egy szabályos nyolcszög oldala 15 cm, mekkora a területe?

K1 **2550.** Mekkora a szabályos tízszög területe, ha oldala 8 cm?

K1 **2551.** Mekkora a 15 cm sugarú körbe írt szabályos tizenegyszög kerülete és területe?

K1 **2552.** Mekkora a 10 cm sugarú körbe írt szabályos tizenháromszög kerülete és területe?

K1 **2553.** Mekkora a 12 cm sugarú körbe írt szabályos hétszög területe és a kerülete?

K1 **2554.** Egy szabályos kilencszög oldala 15 cm. Mekkora a beírt és a körülírt kör sugara?

K1 **2555.** Egy szabályos ötszög területe 540 cm^2. Mekkora a beírt és a körülírt kör sugara?

K1 **2556.** Mekkora a szabályos hétszög oldala, ha a területe 241,5 cm^2?

K1 **2557.** Egy szabályos tizenkétszög területe 618 cm^2. Mekkora az oldala?

K1 **2558.** Mekkora a szabályos ötszög kerülete és a területe, ha átlója 14 cm hosszú?

K2 **2559.** Egy kör sugara 5 cm. Mekkora az oldala, a kerülete és a területe
a) a körbe rajzolt szabályos hétoldalú húrsokszögnek;
b) a kör köré írt szabályos hétoldalú érintősokszögnek?

K2 E1 **2560.** Legyen adva egy kör r sugara. Határozzuk meg a kerületét és a területét

a) a körbe írt n oldalú szabályos húrsokszögnek;
b) a kör köré írt n oldalú szabályos érintősokszögnek.
c) Az előzőleg kiszámított eredményeket felhasználva fogjuk korlátok közé a kör kerületét illetve területét.
d) Az előzőleg kapott egyenlőtlenségeket felhasználva adjunk számszerű becslést a π értékére, például az $r = 1$ m és $n = 180$ esetét felhasználva.

K2 E1 **2561.** Számítsuk ki a szabályos n-szögbe és a köré írható körök által meghatározott körgyűrű területét, ha az n mellett adott még a szabályos n-szög T_n területe.

Körök érintői, körívek, körcikkek, körszeletek, húrok

K1 GY **2562.** Egy gömb alakú lámpa a középpontjától 6,5 m távolságból 3,7°-os szög alatt látszik. Mekkora a lámpa átmérője?

K1 GY **2563.** Mekkora a Hold átmérője, ha a Holdat körülbelül 31′-es szög alatt látjuk és a Hold Földtől való közepes távolsága körülbelül 384 000 km?

K1 **2564.** Egy körhöz érintőket húzunk egy külső pontból, a kör sugara 6,2 cm és az érintési pontokat összekötő szakasz hossza 11 cm. Mekkora az érintők hajlásszöge? Mekkora az érintőszakaszok hossza?

K1 **2565.** Egy 15 cm sugarú körhöz egy külső P pontból érintőket húzunk. Az érintők hajlásszöge 38°46′. Mekkora távolságra van a P pont a kör középpontjától? Mekkorák az érintőszakaszok és mekkora az érintési pontok távolsága?

K2 **2566.** Két kör középpontjának távolsága 18 cm. A körök sugarai 7 cm, illetve 4 cm hosszúak.
a) Mekkora szöget zárnak be a körök közös külső érintői?
b) Mekkora szöget zárnak be a körök közös belső érintői?

K2 **2567.** Két kör kívülről érinti egymást az A pontban. Az egyik kör AB átmérője 10, a másik kör AC átmérője 8 egység. Húzzunk a B és C pontokból egy-egy érintőt a másik körhöz a középpontokat összekötő egyenesek ugyanazon oldalán! Mekkora szöget zárnak be egymással az érintők?

K1 **2568.** Egy 7,5 cm sugarú körben mekkora húr tartozik egy 116°-os középponti szöghöz?

K1 **2569.** Egy körben 68,42° középponti szöghöz 8,15 m hosszú húr tartozik. Mekkora a kör sugara?

K1 **2570.** Egy 42 cm sugarú körben levő 68,5 cm sugarú húrhoz mekkora középponti szög tartozik?

K1 **2571.** Egy körben 14 cm hosszú húrhoz 122°-os középponti szög tartozik. Mekkora a kör sugara?

K1 **2572.** Valamely kör húrja a sugár $\frac{3}{4}$ része. Mekkora középponti szög tartozik a húrhoz?

K1 **2573.** Egy 4,8 cm sugarú körben levő 6,2 cm-es húrhoz mekkora kerületi szög tartozik?

K1 **2574.** Egy 15 cm sugarú körben 76°45′ –es kerületi szög tartozik egy húrhoz. Számítsuk ki ezen húr hosszát.

K1 **2575.** Egy háromszög egyik oldala 6,8 cm és a vele szemközti szöge 48°15′. Mekkora a háromszög köré írt kör sugara?

K1 **2576.** Egy 9,5 cm sugarú körben egy 12,6 cm hosszúságú húrhoz mekkora kerületi szög tartozik?

K1 **2577.** Egy körben 6,4 m hosszúságú húrhoz 124°20′ kerületi szög tartozik. Határozzuk meg a kör sugarát.

K1 **2578.** Egy körben 246,7 m ívhosszhoz 34,52° kerületi szög tartozik. Határozzuk meg az ívhez tartozó húr hosszát.

K1 **2579.** Egy 12,4 dm sugarú körben 26,3 dm hosszúságú ívhosszhoz mekkora húr tartozik?

K1 **2580.** Egy 5,8 m sugarú körcikk területe 35,2 m^2. Mekkora a körcikkhez tartozó húr?

K1 **2581.** Egy kör sugara 4,2 m, egy ívéhez tartozó középponti szöge 64,2°. Mekkora az ívhez tartozó körszelet területe?

K1 **2582.** Mekkora a 16 cm sugarú körben levő 20 cm hosszú húr által lemetszett kisebbik körszelet területe?

K1 **2583.** Egy körben a középponttól 8,2 cm-re levő húrhoz 104,68° középponti szög tartozik. Mekkora a húr hossza és a húrhoz tartozó körszelet területe?

K1 **2584.** Egy 15 cm sugarú kört mekkora területű részekre bontja a $15 \cdot \sqrt{2}$ cm hosszúságú húrja?

K1 **2585.** Egy 18 cm sugarú körlemezből a középponttól 13 cm távolságra levágjuk a kisebbik körszeletet. E kisebb körszelet területe hány százaléka a körlemez területének?

Trapézok

K1 2586. Egy derékszögű trapéz egyik alapja 24 cm-es, az erre merőleges szára 18 cm-es. A megadott alapon levő másik szög 125°. Mekkorák a trapéz ismeretlen oldalai?

K1 2587. Egy derékszögű trapéz alapjai 12,4 cm, illetve 8,3 cm és egyik szöge 42°54′. Határozzuk meg a trapéz szárainak a hosszát és a trapéz területét.

K1 2588. Egy derékszögű trapéz hosszabbik párhuzamos oldala 17,5 cm, a rá merőleges szár hossza 8,6 cm. A másik szár 42,35°-os szöget zár be az alappal. Milyen hosszú ez a szár és a másik alap?

K1 2589. Egy derékszögű trapéz hosszabbik alapja 36 cm, másik alapjának egyik szöge 134°, merőleges szára 15 cm. Számítsuk ki a trapéz ismeretlen oldalait és a területét.

K1 2590. Egy derékszögű trapéz rövidebb átlójának hossza megegyezik a hosszabbik alap hosszával. A trapéz területe 42,5 cm^2, egyik szöge 53,13°. Mekkorák a trapéz oldalai?

K1 2591. Egy szimmetrikus trapéz két párhuzamos oldala 6 cm, illetve 14 cm, és a magassága 9 cm. Mekkorák a trapéz szögei?

K1 2592. Egy egyenlő szárú trapéz két párhuzamos oldala 5 cm, illetve 12 cm, a magassága pedig 7 cm. Mekkorák a trapéz szögei?

K1 GY 2593. Egy szimmetrikus trapéz keresztmetszetű vasúti töltés szélessége felül 8 m, alul pedig 18 m, a töltés magassága 3 m. Mekkora a töltés oldalának a hajlásszöge a vízszintes-hez képest?

K1 2594. Egy szimmetrikus trapézban az egyik alap 24 m-es, a trapéz egyik szöge 42,5°, a szárai 11,5 m hosszúak. Mekkora a másik alap?

K1 2595. Egy egyenlő szárú trapézban az egyik alap 30 cm, a trapéz egyik szöge 52,6°, a szárai 18 cm hosszúak. Mekkora a trapéz másik alapja?

K1 2596. Egy szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja 190 m, átlója 170 m, magassága 80 m. Mekkorák a szárai, a másik alapja és a szögei?

K1 2597. Egy szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja 17,5 cm, az átlója merőleges a szárra, az átló hossza 16,5 cm. Számítsuk ki a trapéz területét és az átló alapokkal bezárt szögét.

K1 2598. Egy szimmetrikus trapéz területe 432 cm^2, magassága 18 cm, egyik szöge 62°48′. Mekkorák a trapéz oldalai?

K1 2599. Egy egyenlő szárú trapéz területe 252 dm^2, magassága 12 dm, egyik szöge 58°20′. Mekkorák a trapéz oldalai?

K1 GY 2600. Egy olyan csonkakúpot kell esztergályozni, amely fedőlapjának az átmérője 65 mm, míg alaplapjának az átmérője 124 mm és a csonkakúp magassága 82 mm. Mekkora a csonkakúp félkúpszöge?

K1 GY 2601. Egy csonkakúp esztergályozásánál a fedőlap sugara 12 mm, a félkúpszög 6°42′. A csonkakúp magassága 54 mm. Hány százalékkal nagyobb az alaplap sugara, mint a fedőlapé?

K1 2602. Egy szimmetrikus trapéz rövidebbik alapja 45 cm, szárai 63 cm hosszúak. A két szár egyeneseinek hajlásszöge 43,22°. Mekkora a trapéz másik alapja és a területe?

K2 **2603.** Az R sugarú körbe írt trapéz egyik alapja R hosszúságú, szárai $R \cdot \sqrt{2}$ hosszúságúak. Határozzuk meg a trapéz negyedik oldalának a hosszát R-rel kifejezve és a trapéz szögeit.

K2 **2604.** Mekkorák annak a szimmetrikus trapéznak a szögei és oldalai, amelybe 8 egység sugarú kör írható és a rövidebbik alapja szintén 8 egység hosszú?

K1 **2605.** Egy trapéz hosszabbik alapja 15 cm, a rajta fekvő szögek 74° és 46°. A 74°-os szög mellett levő szára 6 cm hosszú. Mekkora a trapéz másik két oldala?

K1 **2606.** Egy trapéz egyik alapja 420 m, a rajta levő szögek 38,2° és 58,45°. A trapéz magassága 65 m. Mekkora a trapéz területe?

K2 **2607.** Egy trapéz egyik alapja 26,4 cm, az egyik szára 42 cm. A másik alapon fekvő szögei 73,6° és 54,15°. Mekkorák a trapéz ismeretlen oldalai és a területe?

K2 **2608.** Egy trapéz egyik párhuzamos oldala 38,6 cm, az egyik szár hossza 81,2 cm. A másik párhuzamos oldalon fekvő szög 48,6°, illetve 45°. Mekkorák a trapéz ismeretlen oldalai és a területe?

K2 **2609.** Egy trapéz alapjai 58 cm és 42 cm hosszúak. Egyik szára 26 cm hosszú és ez a megfelelő alappal 67°-os szöget zár be. Számítsuk ki a trapéz ismeretlen oldalának a hosszát és a trapéz ismeretlen szögeit.

K2 **2610.** Egy trapéz alapjai 52,6 cm és 18,4 cm hosszúak. A nagyobbik alapon fekvő szögek 72,8° és 65,46°. Mekkorák a trapéz szárai?

K2 **2611.** Egy trapéz alapjai 86 m, illetve 28 m, szárai pedig 35,4 m, illetve 57,3 m hosszúak. Mekkorák a szögei és a területe?

K2 **2612.** Egy trapéz egyik alapja 58 cm, a rajta fekvő két szög 65,3° és 72°45′. Ha a szárakat nagyságukkal meghosszabbítjuk, éppen háromszöget kapunk. Mekkora a trapéz területe?

K2 **2613.** Egy trapéz párhuzamos oldalai d és $3d$, a másik két oldal d, illetve $2d$ hosszúságú. Mekkorák a trapéz szögei?

Térelemek hajlásszöge

K1 **2614.** Határozzuk meg egy kocka egyik testátlójának hajlásszögét az oldallapokkal.

K1 **2615.** Egy négyzetes oszlop alapéle 5 cm hosszúságú, míg magassága 17 cm. Határozzuk meg
a) az egy csúcsból kiinduló testátlójának és alapélének hajlásszögét;
b) az egy csúcsból kiinduló testátlójának és oldalélének hajlásszögét;
c) a testátló hajlásszögét az alaplappal;
d) a testátló hajlásszögét az oldallappal.

K1 **2616.** Egy téglatest egy csúcsából kiinduló éleinek hossza 3 cm, 5 cm, illetve 10 cm. Határozzuk meg az ugyanebből a csúcsból kiinduló testátlójának
a) a három ugyanebből a csúcsból kiinduló éllel való hajlásszögeit;
b) az oldallapokkal való hajlásszögeit.

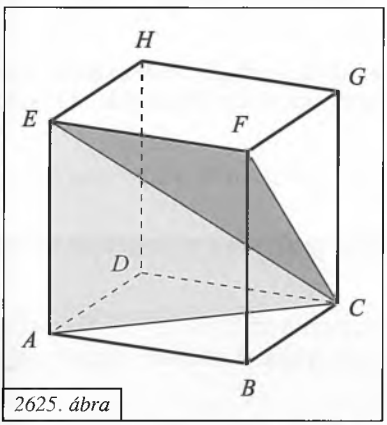
K1 **2617.** Egy szabályos négyoldalú gúla oldaléle 9,5 cm, az oldalél az alaplap síkjával 68°-os szöget zár be. Határozzuk meg a gúla magasságát.

K1 2618. Egy szabályos négyoldalú gúla oldaléle 14 cm és a magassága 9 cm. Mekkora szöget zár be
a) az oldalél az alaplap síkjával;
b) az oldallap az alaplappal?

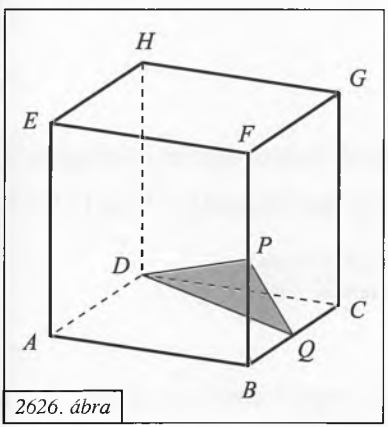
K1 2619. Egy négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúla alapéle 14 cm. A gúla felszíne 616 cm^2.
a) Mekkora az oldalélnek az alaplappal való hajlásszöge?
b) Mekkora egy oldallap alaplappal való szöge?

K1 2620. Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle 8 cm, magassága 10 cm. Határozzuk meg
a) egy alapélnek egy szomszédos oldaléllel bezárt szögét;
b) az oldallapnak az alaplappal bezárt szögét;
c) az oldalélnek az alaplappal bezárt szögét;
d) két szomszédos oldallap hajlásszögét.

K1 2621. Számítsuk ki egy szabályos tetraéder két oldallapjának hajlásszögét.



2625. ábra



2626. ábra

K2 2622. Egy szabályos háromoldalú gúla alapéle 10 cm, magassága 18 cm. Számítsuk ki
a) az alapélnek a szomszédos oldaléllel bezárt hajlásszögét;
b) az alaplap és egy oldallap hajlásszögét;
c) az oldalél és az alaplap hajlásszögét;
d) két oldallap hajlásszögét.

K2 2623. Egy szabályos háromoldalú gúla oldallapjának a területe az alaplap területének $\frac{3}{4}$ része. Mekkora az oldallapnak az alaplappal bezárt szöge?

K2 2624. Egy szabályos hatoldalú gúla alapéle 15 cm, magassága 22 cm. Határozzuk meg
a) az alapél egy szomszédos oldaléllel bezárt szögét;
b) az oldalél alaplappal bezárt szögét;
c) az alaplap oldallappal bezárt szögét;
d) két szomszédos oldallap hajlásszögét.

K2 E1 2625. Az ábrán látható *ABCDEFGH* kockánál számítsuk ki az *ACE* és a *CEF* síkok hajlásszögét.

K2 E1 2626. Az ábrán látható *ABCDEFGH* kockánál legyen *P* a *BF* él felezőpontja, míg *Q* legyen a *BC* él felezőpontja. Határozzuk meg az *ABCD* és *DPQ* síkok hajlásszögét.

Vegyes, illetve összetettebb hegyesszögű trigonometriai feladatok

Vegyes feladatok

K1 GY 2627. Egy lejtős út három szakaszból áll. Az első szakasz emelkedő, hossza 250 m és a hajlásszöge 4°, majd a lejtő következik, amely 320 m hosszú, hajlásszöge 5°. A harmadik szakasz ismét emelkedő, 350 m hosszú és hajlásszöge 7°-os. Mennyi a kiindulási és a végpont szintkülönbsége?

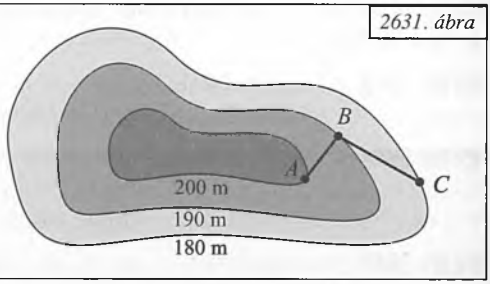
K1 GY 2628. Egy út hossza a térképről leolvasva 450 m. Ismerjük, hogy az út egyenletesen emelkedik, emelkedési szöge 8°15′. Mekkora az út valódi hossza?

K1 GY 2629. Egy térképen levő 1 cm-es szakasznak a valóságban 1 km felel meg. A térképen két tereppont távolságát 6 mm-nek mérjük. A két tereppont között egyenes út vezet. A tereppontok szintkülönbsége 80 m. Mekkora a tereppontok közötti út hossza és mekkora az út emelkedési szöge?

K1 GY 2630. Egy térkép méretaránya 1:10 000. Egy út hossza a térképen lemérve 28 mm. Tudjuk, hogy az út hajlásszöge 7°-os. Mekkora az út valódi hossza?

K2 GY 2631. Egy térkép méretaránya 1:10 000. Az ábrán láthatjuk egy domb szintvonalas ábrázolását a térképen, egy *A*,*B*,*C* út részletével. A térképen lemérve $AB = 6$ mm, $BC = 14$ mm. Határozzuk meg a terepen levő *ABC* út hosszát, az *AB* és a *BC* utak hajlásszögeit.

2631. ábra



K1 GY 2632. Egy pontra két erő hat, amelyek iránya merőleges egymásra. Az erők nagysága 24 N, illetve 45 N. Határozzuk meg, hogy mekkora az eredő erő nagysága. Mekkora szöget zár be az eredő erő iránya a 24 N-os erő irányával?

K1 GY 2633. Egy csavar menetének középátmérője 5,35 mm, menetemelkedése 1 mm. Mekkora a menetemelkedés szöge?

K1 GY 2634. Egy csavar menetének középátmérője 21,5 mm. A csavarmenet menetemelkedési szöge 4°11′. Számítsuk ki a csavarmenet emelkedését.

K1 GY 2635. Egy gépezetben levő csavarmenet középátmérője 29 mm, a menetemelkedés 6 mm. Mekkora a menetemelkedés szöge?

K1 GY 2636. Határozzuk meg annak az épületnek a magasságát, amely a tőle 120 m-re felállított 1,6 m magas szögmérő műszerrel (teodolit) mérve 14°12′-es emelkedési szög alatt látszik.

K1 GY 2637. Egy 45 m magas épület egy 25 m magas épület tetejéről 14°2′-es emelkedési szög alatt látszik. Milyen messze van a két épület egymástól?

K1 2638. Egy 100 cm oldalú négyzet egyik oldalát osszuk fel *a*) két egyenlő részre; *b*) három egyenlő részre! Az osztópontokat kössük össze az egyik szemközti csúccsal! Mekkora részekre osztják az így kapott szakaszok az átló és az oldal közötti szöget?

K1 2639. Egy 100 cm oldalú négyzet átlójának az egyik oldallal bezárt szögét osszuk fel *a)* két egyenlő részre; *b)* három egyenlő részre.
Majd számítsuk ki, hogy mekkora részekre osztják a szögek szárai a négyzet szemközti oldalát.

K2 GY 2640. Győr központja az északi szélesség 47°41′-en fekszik. Határozzuk meg a Föld tengelye körüli forgásának a sebességét, ha a körülfordulási idő körülbelül 23 óra 56 perc és a Föld sugara körülbelül 6378 km.

K2 GY 2641. Egy folyó szélességét fogjuk meghatározni úgy, hogy az egyik parton felveszünk egy 70 m hosszúságú alapvonalat párhuzamosan a folyóval. A folyó másik partján közvetlenül a folyó mellett áll egy fa. Az alapvonal két végpontjából megmérjük a fa felé mutató irány és az alapvonal közötti szögeket. Azt kaptuk, hogy a két szög 68°11′ illetve 51°20′. Milyen széles a folyó?

Tornyok, hegycsúcsok és egyéb magasan levő tárgyak

K1 GY 2642. Milyen magas az a toronyantenna, amelyet a közepén sodronykötelekkel kötöttek le a talajhoz? A sodronykötelek hossza 140 m és a sodronykötél a vízszintessel 51°47′-es szöget zár be.

K2 GY 2643. A kisalföldi Rábaközben egy nyárfától 32 m távolságra állunk és 1,7 m magasságból 33°-os szögben látjuk a nyárfát. Milyen magas a nyárfa?

K2 GY 2644. A kisalföldi Rábaközben (még pontosabban a Tóközben) levő Markotabödöge község templomtornyától 100 méterre áll egy ember. Az ember szeme 168 cm magasságban van és 19°-os szög alatt látja a templomtornyot. Milyen magas a torony?

K2 GY 2645. Egy épülettől 32 m távolságra az épület egyik ablakának felső széle 16°32′ , míg az alsó széle 14°2′ emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas az ablak?

K2 GY 2646. Egy domb tetején levő kápolnához 120 m hosszú egyenes út vezet. Az út emelkedési szöge 15°. Az út elejéről a kápolna 7°-os szög alatt látszik. Milyen magas a kápolna?

2647. ábra



K2 GY 2647. Egy hegy tetején egy 24 m magas kilátótorony van. A völgy valamely pontjából a kilátótorony alja 48°52′, míg a kilátótorony teteje 50°43′-es emelkedési szögben látszik. Milyen magasan van a hegytető a völgy fölött?

K2 GY 2648. Egy antenna 48,5 m hosszú drótkötéllel van kikötve és a drótkötél hajlásszöge a talajhoz képest 67,5°. Ha az antennát 24 m-rel távolabbról akarjuk kikötni, akkor milyen hosszú drótkötélre van szükségünk?

K2 GY 2649. Egy folyó partjától 50 m-re áll egy épület. Az épületből egy ablakon kinézve 18 m magasságból, a folyó túlsó partját 8°14′ lehajlási szög alatt látjuk. Milyen széles a folyó?

K2 GY 2650. Egy hegy csúcsáról egy folyó két átellenes pontját 25°1′, illetve 37°22′ lehajlási szög alatt látjuk. A folyó szélessége 350 m. Milyen magasan van a hegycsúcs a folyó felett, ha a két átellenes pontot összekötő egyenes átmegy a hegycsúcs síkra való merőleges vetületi talppontján?

K2 GY 2651. Egy antenna magasságát akarjuk meghatározni a következő módon. Az antenna talppontját nem tudjuk elérni, de a talppontjának az irányába felveszünk egy 30 m hosszú szakaszt. Majd a szakasz végpontjaiból megmérjük, hogy az antenna csúcsa 54°43′, illetve 42° 58′ emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas az antenna?

K2 GY 2652. Egy lejtős út végén levő templomtorony magasságát kell meghatározni. Az úton a torony aljától felfelé mérünk egy 60 m hosszúságú szakaszt. A szakasz végpontjából a torony csúcsa 4°28′ emelkedési szögben látszik, míg az alja 22°15′ lehajlási szög alatt látszik. Milyen magas a templomtorony?

K2 GY 2653. Közvetlenül egy folyó partján áll egy épület, amelynek két, egymás felett levő ablaka 9 méterre van egymástól. Milyen széles a folyó, ha az egyik ablakból 14°25′ lehajlási szög, míg a másik ablakból 8°12′ lehajlási szög alatt látjuk a folyó túlsó partját?

K2 GY 2654. Egy sík terepen levő kilátótorony egyik ablakából egy tereppont 1°19′, míg a 10 m-rel magasabban fekvő másik ablakából 2°39′ lehajlási szög alatt látszik. Milyen messze van a tereppont a kilátótorony aljától és milyen magasan vannak az ablakok?

K2 GY 2655. Egy domb tetejéről nézve, a mellette levő völgyben álló 25 m magas templomtorony csúcsa 20°47′, míg az alja 25°1′ lehajlási szög alatt látszik. Milyen magasan van a dombtető a völgy fölött?

K2 GY 2656. Egy észak felé tartó hajóról két világítótorony – amelyek egymástól 40 km-re vannak –, egy nyugatra irányuló egyenesben látszik. Kétórás hajózás után az egyik világítótorony délnyugati, míg a másik világítótorony dél-délnyugati irányban látszik. Mekkora a hajó sebessége?

K2 GY 2657. Egy észak felé tartó hajóról két világítótorony – amelyek egymástól 40 km-re vannak –, egy nyugatra irányuló egyenesben látszik. Egyórás hajózás után az egyik világítótorony délnyugati, míg a másik világítótorony nyugat-délnyugati irányban látszik. Mekkora a hajó sebessége?

K2 GY 2658. Egy hőlégballont a vízszintes terepen levő A pontból kelet felé 30°, míg a B pontból észak felé 25°-os emelkedési szög alatt látnak. Az A és B pontok távolsága 6 km. Milyen magasan van a hőlégballon?

K2 GY 2659. Vízszintes terep T pontja fölött lebeg egy léggömb az L pontban. Ez a terep A pontjából 37°-os, míg a terep B pontjából 45°-os emelkedési szög alatt látszik. Milyen magasan lebeg a léggömb, ha az AB távolság 500 m és $ATB \sphericalangle = 90°$?

K2 GY 2660. Sík terepen levő A és B pontok közötti távolság kiszámításához a következő adatokat ismerjük: Az A ponttól 100 m-re álló gyárkémény az A pontból 45°-os, a B pontból 30°-os emelkedési szög alatt látszik. Az A pontot a kémény aljával összekötő egyenes 60°-os szöget zár be az AB egyenessel. Mekkora az AB távolság?

K2 GY 2661. Egy tőlünk keletre fekvő hegy csúcsát 21°48′ emelkedési szög alatt látjuk. Ha vízszintes talajon 1 km-t délre megyünk, innen a hegy csúcsa 18°26′ emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas a hegy és milyen távol vagyunk mindkét helyen a hegy csúcsától?

K2 GY 2662. Egy tó mellett levő kilátótorony 25 m magasan levő ablakából egy hőlégballont figyelünk meg. A hőlégballon 32°44′ emelkedési szög alatt látszik, míg a tó tükréről visszavert képe 38°9′ lehajlási szög alatt látszik. Milyen magasan van a hőlégballon a tó fölött?

K2 GY 2663. Egy 670 méter magas hegyről egy felhő 60°-os emelkedési szög alatt látszik. A hegy tövében levő tóban a felhő tükörképe 70°-os lehajlási szög alatt látszik. Milyen magasan van a felhő a hegycsúcs felett?

K2 GY 2664. Egy tenger melletti dombtetőről egy felhőben levő villámlás 18°-os emelkedési szögben látszik. Míg a villámlás képe a tengerben 26°-os lehajlási szög alatt látszik. Milyen magas a domb és milyen magasan volt a villámlás a víz színe fölött? A hang terjedési sebessége legyen 340 m/s és a mennydörgés a villámlás után 8 s múlva hallatszik.

Körívek, körcikkek, körszeletek

K1 GY 2665. Egy köríves közúti híd körívének sugara 85 m, a híd nyílásmagassága 15 méter. Mekkora a két hídpillér távolsága és milyen hosszú a körív?

K1 GY 2666. Egy köríves vasúti híd két pillérének egymástól való távolsága 125 m, a híd nyílásmagassága 18 m. Mekkora a híd ívének hossza?

K2 GY 2667. Két tárcsa átmérője 20 cm, illetve 8 cm. Egyenes szíjhajtás esetén mekkora a tárcsákon a tapadási felületek összhossza, ha a tárcsák középpontjai 50 cm-re vannak egymástól?

K2 GY 2668. Két tárcsa sugara 6 cm, illetve 15 cm, középpontjaik távolsága 54 cm. Milyen hosszúságú szíj feszíthető rájuk egyenes szíjhajtás esetén?

K2 GY 2669. Két tárcsa átmérője 20 cm, illetve 8 cm. Keresztezett szíjhajtás esetén mekkora a tárcsákon a tapadási felületek összhossza, ha a tárcsák középpontjai 50 cm-re vannak egymástól?

K2 GY 2670. Két tárcsa sugara 6 cm, illetve 15 cm, középpontjaik távolsága 54 cm. Milyen hosszúságú szíj feszíthető rájuk keresztezett szíjhajtás esetén?

K1 2671. Határozzuk meg egy 15 cm sugarú körben levő 24 cm-es húr és a vele párhuzamos átmérő közötti körlaprész területét.

K2 2672. Egy 32 cm sugarú kör egyik félkörében két párhuzamos húrt húzunk, amelyek hossza 12 cm, illetve 34 cm. Mekkora a körlap két húr közötti részének a területe?

K1 2673. Egy külső pontból érintőket húzunk egy 8 cm sugarú körhöz. Az érintők által bezárt szög 42,38°. Mekkora a kör és az érintők közötti terület?

K2 2674. Egy síkon levő két, egyenként 18 cm sugarú körlap középpontja 24 cm-re van egymástól. Mennyi a körlapok által kétszeresen fedett rész területe?

K2 GY 2675. Egy körszelet keresztmetszetű alagút magassága 3,5 m, az alagút alapszélessége 10 m, míg az alagút hossza 32 m. Mekkora térfogatú kőzetet termeltek ki az alagútból, mire kivájták?

K2 GY 2676. Egy olajoshordó belső átmérője 56,5 cm, belső hossza 78 cm. A fekvő olajoshordóba függőlegesen egy pálcát dugunk az oldalnyílásán át a hordó aljáig. Majd a pálcát kihúzva megmérjük, hogy a pálca 17,5 cm hosszúságban olajos. Hány liter olaj van a tartályban?

K2 GY 2677. Egy 84 cm belső átmérőjű, fekvő körhenger alakú olajtartályból elfogyott az olaj egy része. A tartály oldalán levő mérce azt jelzi, hogy a tartályban 65 cm magasan áll az olaj. A tartály belső hossza 315 cm. Hány liter olaj van a tartályban?

K2 GY 2678. Egy körhenger alakú fekvő víztartály belső sugara 87 cm, belső hossza 210 cm. Hány liter víz van a tartályban, ha a tartály belső magasságának $\frac{2}{3}$ részéig ér a víz?

Egyenlő szárú háromszögek, derékszögű háromszögek, négyszögek

K2 2679. Egy egyenlő szárú háromszögben az alap és a szár hosszának különbsége 6,5 cm, az alapon fekvő szögek 25°42′-esek. Mekkorák a háromszög oldalai és a területe?

K2 2680. Egy egyenlő szárú háromszögben az alap és a szár hosszának összege 16 cm, az alapon fekvő szögek 57°26′-esek. Mekkorák a háromszög oldalai és a területe?

K2 2681. Egy egyenlő szárú háromszög területe 72 cm^2, az alappal szemközti szöge 32°44′. Mekkorák a háromszög oldalai?

K2 2682. Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 48,6 cm, az alappal szemközti szöge 34°18′. Mekkorák a háromszög oldalai és a területe?

K2 2683. Egy egyenlő szárú háromszög alapjához tartozó magassága 16 cm, míg a szárához tartozó magassága 7 cm. Mekkorák a háromszög szögei?

K2 2684. Egy derékszögű háromszög 20 cm-es átfogóját a hozzá tartozó magasság 1:4 arányú részekre osztja. Mekkorák a befogók és a háromszög szögei?

K2 2685. Egy derékszögű háromszög átfogója 10 cm, az átfogóhoz tartozó magassága 4 cm. Mekkorák a befogók és a háromszög szögei?

K2 2686. A C csúcsánál derékszögű ABC háromszög egyik szöge 30°-os, a C csúcspont a beírható kör középpontjától $2 \cdot \sqrt{2}$ egység távolságra van. Mekkora a háromszög köré írható kör sugara?

K2 2687. Egy derékszögű háromszög átfogójának hossza 13 cm, beírt körének sugara 2 cm. Határozzuk meg befogóinak hosszát és a hegyesszögeinek nagyságát.

K2 2688. Egy derékszögű háromszög körülírt körének sugara 20 cm, beírt körének sugara 8 cm. Határozzuk meg a háromszög oldalait és hegyesszögeit.

K2 2689. Egy derékszögű háromszög köré írt kör sugara a háromszögbe írt kör sugarának a $\frac{13}{4}$-szerese. Mekkorák a háromszög hegyesszögei?

K2 2690. Egy négyszög 15 cm-es oldalán fekvő egyik szög derékszög, a másik 37,5°. Az utóbbi szög melletti oldal 11,5 cm, a derékszög melletti másik oldal 4,7 cm. Mekkora a négyszög ismeretlen oldala?

K2 **2691.** Egy négyszög két szemközti szöge derékszög, egy harmadik szöge 134,6°. Az egyik derékszöge mellett levő oldalai 8,5 cm, illetve 21,6 cm hosszúak. Mekkorák a négyszög ismeretlen oldalai?

K2 **2692.** Egy trapéz területe 643 cm^2, két szára 32,8 cm és 37,5 cm. A hosszabbik szár 52,6°-os szöget zár be a hosszabbik alappal. Mekkorák a trapéz alapjai?

K2 **2693.** Egy egyenlő szárú trapéz átlója 54,68 cm, a szárai 40 cm hosszúak. Az átló és a szár által bezárt szög 65°. Mekkorák a trapéz szögei és alapjai?

K2 **2694.** Egy négyszög három oldala 18 cm, 13 cm és 7 cm. Ezen oldalak közötti szögek rendre 85,4° és 62,8° nagyságúak. Mekkora az ismeretlen oldal és a másik két szög?

K2 **2695.** Mekkorák az $ABCD$ négyszög oldalai, ha $AC = 42$ m ; $DAC \sphericalangle = 28{,}6°$; $CAB \sphericalangle = 54{,}15°$; $ACD \sphericalangle = 19{,}6°$; $ACB \sphericalangle = 46{,}85°$?

Trigonometrikus kifejezések

K1 **2696.** Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket:
a) $1 - \cos^2 \alpha$; *b)* $\sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$; *c)* $2 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$.

K1 **2697.** Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket:

a) $\dfrac{1}{\sin^2 \alpha} - 1$; *b)* $(1 + \sin \alpha) \cdot (1 - \sin \alpha)$; *c)* $1 - \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$.

K1 **2698.** Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket:

a) $1 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$; *b)* $\sin \beta + \cos \beta \cdot \operatorname{tg} \beta$; *c)* $\dfrac{\sin^2 \gamma - 1}{1 - \cos^2 \gamma}$.

K1 **2699.** Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket:

a) $\operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot (\cos^2 \alpha - 1) + 1$; *b)* $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$; *c)* $\dfrac{1}{1 + \cos \alpha} + \dfrac{1}{1 - \cos \alpha}$.

K1 **2700.** Legyen α hegyesszög, ekkor határozzuk meg a többi szögfüggvény értékét, ha

a) $\sin \alpha = \dfrac{4}{5}$; *b)* $\sin \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; *c)* $\sin \alpha = \dfrac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$, ahol $t > 0$ valós szám.

d) $\sin \alpha = \dfrac{1}{3}$; *e)* $\cos \alpha = \dfrac{1}{2}$; *f)* $\cos \alpha = \dfrac{12}{13}$; *g)* $\cos \alpha = \dfrac{2}{3}$; *h)* $\operatorname{tg} \alpha = 1$;

i) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$; *j)* $\operatorname{tg} \alpha = 2$; *k)* $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; *l)* $\operatorname{ctg} \alpha = 1$; *m)* $\operatorname{ctg} \alpha = 4$.

K1 **2701.** Számítsuk ki tg α értékét közelítő számítások nélkül, ha $\sin(90° - \alpha) = \dfrac{1}{4}$, ahol $0 < \alpha < 90°$.

IV

K1 **2702.** Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket.

a) $\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\cdot\frac{\mathrm{tg}^2\alpha-1}{\sin\alpha-\cos\alpha}$; *b)* $\frac{\sin^2\alpha-1}{\cos^2\alpha-1}+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha$.

K1 **2703.** Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket.

a) $\frac{1+2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$; *b)* $\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+1}{\sin^2\alpha}$; *c)* $\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

K1 **2704.** Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket.

a) $\frac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$; *b)* $\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}+\sin x\cdot\cos x$.

K1 **2705.** Igazoljuk, hogy

a) $2\cdot(1+\sin\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)=(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2$; *b)* $\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$.

K1 **2706.** Igazoljuk, hogy $\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$.

K1 **2707.** Bizonyítsuk be, hogy
$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$.

K1 **2708.** Igazoljuk, hogy fennáll a következő egyenlőség minden $0<x<\frac{\pi}{2}$ valós számra.
$(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x)^2-(\mathrm{tg}\,x-\mathrm{ctg}\,x)^2=4$.

K1 **2709.** Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget, ha $0<x<\frac{\pi}{2}$ valós szám.

$(1+\mathrm{tg}\,x)^2+(1-\mathrm{tg}\,x)^2=\frac{2}{\cos^2 x}$.

K1 **2710.** Igazoljuk, ha $0<\alpha<90°$, akkor

a) $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$; *b)* $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

K1 **2711.** Igazoljuk, hogy a következő kifejezések nem függenek az x értékétől, mindazon valós x értékekre, amelyekre a kifejezések értelmezve vannak.

a) $\sin^4 x+\cos^4 x+2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x$; *b)* $\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}+\sin x$;

c) $\cos^4 x-\sin^4 x+2\cdot\sin^2 x$; *d)* $\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}+\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 x}$.

K1 **2712.** Egyszerűsítsük a következő kifejezést, ha $0<x<\frac{\pi}{2}$ valós szám.

$\frac{\mathrm{tg}^2 x-1}{\mathrm{tg}^2 x+1}+\cos^2 x$.

K1 **2713.** Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$ valós szám:

a) $\frac{\cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x}$; *b)* $\frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x$;

c) $\frac{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x}$; *d)* $\frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{\operatorname{ctg} x}$.

K1 **2714.** Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$ valós szám:

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^3 x + 1}{\operatorname{tg}^3 x - 1}.$$

K2 **2715.** Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:
a) $\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x$; *b)* $2 \cdot (\sin^6 x + \cos^6 x) - 3 \cdot (\sin^4 x + \cos^4 x)$.

K2 **2716.** Legyen $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = m$. Fejezzük ki m segítségével a következő kifejezéseket, ahol $0 < x < \frac{\pi}{2}$ valós szám:
a) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$; *b)* $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x$.

K2 **2717.** Számítsuk ki a következő kifejezés pontos értékét:
$(1 - \cos 15°) \cdot (1 + \sin 75°) + \cos 75° \cdot \cos 15° \cdot \operatorname{ctg} 15°$.

K2 **2718.** Számítsuk ki a következő kifejezés pontos értékét:
$\sin^2 17° + \sin^2 37° + \sin^2 53° + \sin^2 73°$.

K2 **2719.** Számítsuk ki a következő kifejezés pontos értékét:

$$\frac{\sin^2 \frac{\pi}{14} + \sin^2 \frac{3\pi}{7}}{\cos^2 \frac{\pi}{14} + \cos^2 \frac{3\pi}{7}}.$$

K2 **2720.** Számítsuk ki a következő kifejezés pontos értékét:
$\sin(45° - \alpha) - \cos(30° + \alpha) + \sin^2 30° - \cos(45° + \alpha) + \sin^2 60° + \sin(60° - \alpha)$.

IV

Szögfüggvények általánosítása

K1 **2721.** Írjuk egyszerűbb alakra:
a) $\sin(180° - \alpha)$; *b)* $\cos(180° - \alpha)$; *c)* $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$; *d)* $\operatorname{ctg}(180° - \alpha)$.

K1 **2722.** Írjuk egyszerűbb alakra:
a) $\sin(180° + \alpha)$; *b)* $\cos(180° + \alpha)$; *c)* $\operatorname{tg}(180° + \alpha)$; *d)* $\operatorname{ctg}(180° - \alpha)$;
e) $\sin(360° - \alpha)$; *f)* $\cos(360° - \alpha)$; *g)* $\operatorname{tg}(360° + \alpha)$; *h)* $\operatorname{ctg}(360° + \alpha)$.

K1 **2723.** Írjuk egyszerűbb alakra:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; *b)* $\cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{2} + \alpha\right)$; *c)* $\cos(2 \cdot \pi + \alpha)$; *d)* $\sin(2 \cdot \pi - \alpha)$;

e) $\cos(90° - \alpha)$; *f)* $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$; *g)* $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)$; *h)* $\operatorname{ctg}(360° - \alpha)$;
i) $\operatorname{tg}(360° + \alpha)$; *j)* $\sin(270° - \alpha)$.

A következő feladatoknál a pontos érték meghatározásánál ne használjunk közelítő értékeket, amelyeket számológépből vagy táblázatból nyerhetnénk. Ha az egyszerűsítések után a végeredményben gyökök vannak, akkor azok értékeit nem kell kiszámolnunk, ha nem racionális szám az értékük, hanem a végeredményben hagyhatjuk a gyököket.

K1 **2724.** Határozzuk meg a következő számok pontos értékét:

a) sin 150°,	sin 210°,	sin 330°,	cos 120°,	cos 240°,	cos 300°;
b) cos 135°,	cos 225°,	cos 315°,	sin 135°,	sin 225°,	sin 315°;
c) tg 135°,	tg 225°,	tg 315°,	ctg 135°,	ctg 225°,	ctg 315°;
d) tg 120°,	tg 240°,	tg 300°,	ctg 150°,	ctg 210°,	ctg 225°.

K1 **2725.** Számítsuk ki a következő kifejezések pontos értékét:
a) sin 120° – cos 30°; *b)* sin 120° – sin 60°; *c)* sin 150° – cos 60°;
d) cos 135° + sin 45°; *e)* tg 135° + ctg 45°.

K1 **2726.** Számítsuk ki a következő számok pontos értékei:

a) $\cos 120°$; *b)* $\sin(-150°)$; *c)* $\cos(-225°)$; *d)* $\operatorname{tg}(-225°)$; *e)* $\cos\frac{7\cdot\pi}{6}$; *f)* $\sin\frac{4\cdot\pi}{3}$.

K1 **2727.** Számítsuk ki a következő kifejezés pontos értékét:
$\sin 150° - \cos 120° + \operatorname{ctg} 315° + \operatorname{tg}(-135°)$.

K1 **2728.** Számítsuk ki a következő kifejezések pontos értékét:
a) cos 75° + cos 105°; *b)* cos 135° + sin 45°; *c)* cos 165° + sin 75°;
d) tg 75° + tg 105°; *e)* tg 135° + ctg 45°; *f)* ctg 144° + tg 54°.

K1 **2729.** Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét:
a) $\sin(-30°) + \sin 150°$; *b)* $\cos(-30°) + \cos 150°$; *c)* $\operatorname{tg}(-30°) + \operatorname{tg}(-150°)$;
d) $\operatorname{ctg}(-30°) - \operatorname{ctg} 150°$; *e)* $\sin(-30°) + \sin(-60°) - \sin 210° - \cos(-150°)$;
f) $\sin(-120°) - \sin(-150°) + \sin 210° - \cos 210°$.

K1 **2730.** Számítsuk ki a következő kifejezések pontos értékét:

a) $\cos\frac{8\cdot\pi}{3}$; *b)* $\left(\operatorname{tg}\frac{2\cdot\pi}{3}\right)^2$; *c)* $\left(\sin\frac{34\cdot\pi}{3}\right)^2$.

K1 **2731.** Igazoljuk, hogy $\sin(-560°) = \sin 20°$.

K2 **2732.** Határozzuk meg a következő kifejezés pontos értékét:

$$\left(2\cdot\operatorname{tg}\frac{2003\cdot\pi}{4}\right)^3.$$

K2 **2733.** Számítsuk ki a következő kifejezés pontos értékét:

$$\left(\frac{\cos\left(\left(\frac{12\cdot k+1}{6}\right)\cdot\pi\right)}{\operatorname{tg}\frac{8\cdot\pi}{3}}\right)^2,$$

ahol k tetszőleges egész szám.

K1 **2734.** Határozzuk meg a következő kifejezés pontos értékét:

a) $\cos^2(\pi + x) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$; *b)* $\sin^2(180^0 - x) + \sin^2(270^0 - x)$.

K1 **2735.** Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket:

a) $\sin(\pi + x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(2 \cdot \pi + x) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi}{2} - x\right)$;

b) $\sin(\pi - x) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\pi - x)$.

K1 **2736.** Egyszerűsítsük a kifejezéseket az α valós szám mindazon értékeire, amelyekre a kifejezéseknek értelme van.

a) $\frac{\cos(-\alpha) \cdot \cos(180^\circ + \alpha)}{\sin(-\alpha) \cdot \sin(90^\circ + \alpha)}$; *b)* $\frac{\sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(2 \cdot \pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha) \cdot \cos(\alpha - \pi)}$; *c)* $\frac{\sin(\pi + \alpha) \cdot \sin(\alpha + 2 \cdot \pi)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha) \cdot \cos(1{,}5 \cdot \pi + \alpha)}$.

K1 **2737.** Legyen $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$ és $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Határozzuk meg sin α, cos α, ctg α pontos értékét.

K1 **2738.** Legyen $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$. Határozzuk meg a $\sin x \cdot \cos x$ pontos értékét.

K2 **2739.** Igazoljuk, hogy ha $\frac{3 \cdot \pi}{4} < \alpha < \pi$, akkor $\sqrt{2 \cdot \operatorname{ctg}\alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha}} = -1 - \operatorname{ctg}\alpha$.

K2 **2740.** Számítsuk ki a következő kifejezés pontos értékét:
$\operatorname{tg}^7 3° + \operatorname{ctg}^7 23° + \operatorname{tg}^7 177° + \operatorname{ctg}^7 157°$.

Trigonometrikus függvények grafikonjai

IV

Vázoljuk a következő függvények grafikonjait és jellemezzük a függvényeket!
E fejezetben a függvények értelmezési tartománya a valós számok legbővebb részhalmaza, amelyen még a függvények értelmezhetők.

K1 **2741.** *a)* $f(x) = \sin(-x)$; *b)* $g(x) = \cos(-x)$.

K1 **2742.** *a)* $f(x) = |\sin x|$; *b)* $g(x) = |\cos x|$.

K1 **2743.** *a)* $f(x) = \operatorname{tg}(-x)$; *b)* $g(x) = \operatorname{ctg}(-x)$.

K1 **2744.** *a)* $f(x) = |\operatorname{tg} x|$; *b)* $g(x) = |\operatorname{ctg} x|$.

K2 **2745.** *a)* $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$; *b)* $g(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

K2 **2746.** *a)* $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos x$; *b)* $g(x) = \sin x - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

K1 **2747.** *a)* $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; *b)* $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

K1 **2748.** *a)* $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; *b)* $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

K1 **2749.** *a)* $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; *b)* $g(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

K1 **2750.** *a)* $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; *b)* $g(x) = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

K1 **2751.** *a)* $f(x) = \operatorname{tg}(x + \pi)$; *b)* $g(x) = \operatorname{tg}(x - \pi)$.

K2 **2752.** *a)* $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; *b)* $g(x) = \sin x + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Vázoljuk a következő függvények grafikonjait!

K2 **2753.** *a)* $f(x) = |\sin x| + \sin x$; *b)* $g(x) = |\cos x| + \cos x$.

K2 **2754.** *a)* $f(x) = |\sin x| - \sin x$; *b)* $g(x) = |\cos x| - \cos x$.

K2 **2755.** *a)* $f(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$; *b)* $g(x) = \frac{|\cos x|}{\cos x}$.

Vázoljuk a következő függvények grafikonjait közös koordináta-rendszerben és a feladatokban szereplő függvények közül mindig az utolsót jellemezzük!

K2 **2756.** $f_1(x) = \sin x$; $f_2(x) = 2 \cdot \sin x$; $f_3(x) = 2 + 2 \cdot \sin x$.

K2 **2757.** $f_1(x) = \cos x$; $f_2(x) = 2 \cdot \cos x$; $f_3(x) = -2 + 2 \cdot \cos x$.

K2 **2758.** $f_1(x) = \sin x$; $f_2(x) = 2 \cdot \sin x$; $f_3(x) = -2 \cdot \sin x$; $f_4(x) = 2 - 2 \cdot \sin x$.

K2 **2759.** $f_1(x) = \cos x$; $f_2(x) = -\cos x$; $f_3(x) = -\frac{1}{2} \cdot \cos x$; $f_4(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos x$.

K2 **2760.** $g_1(x) = \sin x$; $g_2(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin x$; $g_3(x) = -\frac{3}{2} \cdot \sin x$; $g_4(x) = 3 - \frac{3}{2} \cdot \sin x$.

K2 **2761.** $h_1(x) = \cos x$; $h_2(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;

$h_3(x) = 2 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; $h_4(x) = -2 + 2 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

K2 **2762.** $f_1(x) = \sin x$; $f_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

$f_3(x) = 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; $f_4(x) = 2 + 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

K2 **2763.** $g_1(x) = \sin x$; $g_2(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

$g_3(x) = 3 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; $g_4(x) = -\frac{3}{2} + 3 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Vázoljuk a következő függvények grafikonjait és jellemezzük a függvényeket:

K2 **2764.** $f(x)=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

K2 **2765.** $g(x)=2-2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

Vázoljuk a következő függvények grafikonjait közös koordináta-rendszerben és a feladat utolsó függvényét jellemezzük.

K2 **2766.** $f_1(x)=\sin x$; $f_2(x)=\sin 2x$; $f_3(x)=2\cdot\sin 2x$; $f_4(x)=2+2\cdot\sin 2x$.

K2 **2767.** $g_1(x)=\cos x$; $g_2(x)=\cos\frac{x}{2}$; $g_3(x)=-2\cdot\cos\frac{x}{2}$; $g_4(x)=2-2\cdot\cos\frac{x}{2}$.

Vázoljuk a következő függvények grafikonjait és jellemezzük a függvényeket:

K2 **2768.** *a)* $f(x)=\sin\frac{x}{3}$; *b)* $g(x)=\cos\frac{x}{3}$; *c)* $h(x)=1-\cos 3x$.

K2 **2769.** *a)* $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sin 2x$; *b)* $g(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\cos 2x$; *c)* $h(x)=2+\frac{3}{2}\cdot\sin 2x$.

K2 **2770.** *a)* $f(x)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}$; *b)* $g(x)=1-\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$; *c)* $h(x)=2+\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}$.

K2 **2771.** *a)* $f(x)=1-\sin(2x-\pi)$; *b)* $g(x)=-1-2\cdot\sin\left(-2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

K2 **2772.** *a)* $f(x)=-1-\cos(\pi-3x)$; *b)* $g(x)=1-2\cdot\sin(\pi-2x)$.

K2 **2773.** *a)* $f(x)=2+2\cdot\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$; *b)* $g(x)=1+2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$.

K2 **2774.** $f(x)=-2-2\cdot\cos\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)$.

K2 **2775.** $g(x)=-1+2\cdot\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$.

Vázoljuk a következő függvények grafikonjait:

K2 E1 **2776.** *a)* $f(x)=\frac{\sin x}{x}$; *b)* $g(x)=x\cdot\sin x$.

Trigonometrikus egyenletek I. rész

Bevezető alapfeladatok

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán.

K1 **2777.** *a)* $\sin x = \frac{1}{2}$; *b)* $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; *c)* $\sin x = -\frac{1}{2}$; *d)* $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

e) $\sin x = 1$; *f)* $\sin x = -1$; *g)* $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *h)* $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

i) $\sin x = 0$; *j)* $\sin x = -2$; *k)* $\sin x = 0{,}8$; *l)* $\sin x = 3{,}5$.

K1 **2778.** *a)* $\cos x = \frac{1}{2}$; *b)* $\cos x = -\frac{1}{2}$; *c)* $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; *d)* $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

e) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *f)* $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; *g)* $\cos x = 1$; *h)* $\cos x = -1$;

i) $\cos x = \frac{4}{3}$; *j)* $\cos x = 0$; *k)* $\cos x = -5$; *l)* $\cos x = \frac{1}{3}$.

K1 **2779.** *a)* $\operatorname{tg} x = 1$; *b)* $\operatorname{tg} x = -1$; *c)* $\operatorname{tg} x = 0$; *d)* $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;

e) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; *f)* $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; *g)* $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; *h)* $\operatorname{tg} x = 2{,}35$.

K1 **2780.** *a)* $\operatorname{ctg} x = 1$; *b)* $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; *c)* $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; *d)* $\operatorname{ctg} x = 0{,}87$.

Alapvető feladatok

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán.

K1 **2781.** *a)* $4 \cdot \cos^2 x = 1$; *b)* $2 \cdot \sin^2 x = 1$; *c)* $\operatorname{tg}^2 x = 1$; *d)* $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{3}$.

K1 **2782.** *a)* $\cos 2x = \frac{1}{2}$; *b)* $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; *c)* $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$; *d)* $\operatorname{ctg} 2x = 1$.

K1 **2783.** *a)* $\cos(2x + 30°) = \frac{1}{2}$; *b)* $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

K1 **2784.** *a)* $\sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1$; *b)* $\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

K1 **2785.** *a)* $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1$; *b)* $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$.

K1 **2786.** *a)* $2\cdot\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{3}$; *b)* $-2\cdot\sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$.

K2 **2787.** *a)* $\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=1$; *b)* $4\cdot\sin^2\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)=3$.

K2 **2788.** *a)* $\mathrm{tg}^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$; *b)* $3\cdot\mathrm{tg}^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán.

K1 **2789.** *a)* $\sin 2x=\sin x$; *b)* $\sin 4x=\sin x$.

K1 **2790.** *a)* $\sin 100x=\sin 15x$; *b)* $\sin\left(10x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)$.

K1 **2791.** *a)* $\cos 2x=\cos x$; *b)* $\cos 10x=\cos 2x$.

K1 **2792.** *a)* $\cos 1000x=\cos 100x$; *b)* $\cos\left(16x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)$.

K2 **2793.** *a)* $\mathrm{tg}\,2x=\mathrm{tg}\,x$; *b)* $\mathrm{tg}\,5x=\mathrm{tg}\,x$.

K2 **2794.** *a)* $\mathrm{tg}15x=\mathrm{tg}\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)$; *b)* $\mathrm{tg}\left(7x-\frac{\pi}{3}\right)=\mathrm{tg}\left(3x+\frac{5\pi}{3}\right)$.

K2 **2795.** *a)* $\mathrm{ctg}\,2x=\mathrm{ctg}\,x$; *b)* $\mathrm{ctg}\,4x=\mathrm{ctg}\,x$.

K2 **2796.** *a)* $\sin 4x=-\sin x$; *b)* $\sin 6x=-\sin 2x$.

K2 **2797.** *a)* $\sin(12x-\pi)=-\sin(\pi-4x)$; *b)* $\sin\left(3x+\frac{3\pi}{4}\right)=-\sin\left(x-\frac{5\pi}{3}\right)$.

K2 **2798.** *a)* $\cos 2x=-\cos x$; *b)* $\cos 6x=-\cos 2x$.

K2 **2799.** *a)* $\cos\left(8x-\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos(2x+\pi)$; *b)* $\cos\left(5x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$.

K2 **2800.** *a)* $\mathrm{tg}\,3x=-\mathrm{tg}\,x$; *b)* $\mathrm{ctg}\,2x=-\mathrm{ctg}\,x$.

K2 **2801.** *a)* $\sin 2x=\cos x$; *b)* $\sin 3x=\cos x$.

K2 **2802.** *a)* $\sin(4x-\pi)=\cos 2x$; *b)* $\cos 18x=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

K2 **2803.** *a)* $\cos 5x=-\sin x$; *b)* $\sin 8x=-\cos 2x$.

K2 **2804.** *a)* $\sin 6x=-\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$; *b)* $\sin\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán.

K1 **2805.** *a)* $\sin^3 x=\sin^2 x$; *b)* $\cos^6 x=\cos^4 x$.

K2 **2806.** *a)* $\cos x=\mathrm{ctg}\,x$; *b)* $\sin x=\mathrm{tg}\,x$.

IV

K2 **2807.** *a)* $2 \cdot \sin x = \operatorname{tg} x$; *b)* $\cos x = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg} x$.

K2 **2808.** *a)* $\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{2}$; *b)* $\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x = 2 \cdot \sin x$.

K2 **2809.** *a)* $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$; *b)* $3 \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán.

K2 **2810.** *a)* $\sin x - \cos x = 0$; *b)* $\sin x + \cos x = 0$.

K2 **2811.** *a)* $\sin x = 2 \cdot \cos x$; *b)* $3 \cdot \sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x$.

K2 **2811.** *a)* $\sin^2 x = \cos^2 x$; *b)* $\frac{1}{3} \sin^2 x = \cos^2 x$.

Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán.

K2 **2813.** *a)* $4 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \sin x - 1 = 0$; *b)* $2 \cdot \sin^2 x - 5 \cdot \sin x + 2 = 0$.

K2 **2814.** *a)* $3 \cdot \sin^2 x - 2 \cdot \sin x = 1$; *b)* $5 \cdot \sin^2 x - 3 \cdot \sin x = 1$.

K2 **2815.** *a)* $2 \cdot \cos^2 x - 4 \cdot \cos x + 2 = 0$; *b)* $3 \cdot \cos^2 2x - 5 \cdot \cos 2x + 2 = 0$.

K2 **2816.** *a)* $\operatorname{tg}^2 x - 4 \cdot \operatorname{tg} x + 3 = 0$; *b)* $\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}^2 x - 4 \cdot \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$.

K2 **2817.** *a)* $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$; *b)* $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 2$.

K2 **2818.** *a)* $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 2 \cdot \sqrt{3}$; *b)* $3 \cdot \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 4$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán.

K2 **2819.** *a)* $8 \cdot \sin^2 x - 7 \cdot \cos^2 x = 8$; *b)* $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$.

K2 **2820.** *a)* $2 \cdot \sin^2 x + 5 \cdot \cos x - 4 = 0$; *b)* $\cos x = \sin^2 x - \cos^2 x$.

K2 **2821.** *a)* $\cos^2 x - \sin x = 1$; *b)* $\sin^2 x + \cos x = 1$.

K2 **2822.** *a)* $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$; *b)* $\frac{\cos x}{\operatorname{tg} x} = \frac{3}{2}$.

K2 **2823.** *a)* $3 \cdot \operatorname{tg} x = 2 \cdot \cos x$; *b)* $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} = 3$.

K2 **2824.** *a)* $\frac{4}{\cos^2 x} - 5 \cdot \operatorname{tg}^2 x = 1$; *b)* $\operatorname{tg}^2 x - 5 = \frac{1}{\cos x}$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán.

K1 **2825.** *a)* $\frac{\cos x}{1 + \cos 2x} = 0$; *b)* $\sin x \cdot \operatorname{ctg} x = 0$.

K1 **2826.** *a)* $\frac{1+\sin 2x}{2+\cos 4x}=0$; *b)* $\sin x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 0$.

K2 **2827.** *a)* $\frac{\sin x+\cos x}{\cos 2x}=0$; *b)* $\sqrt{3}\cdot\sin x+\cos x=0$.

K2 **2828.** *a)* $2-\sin x=\frac{\cos^2 x}{\sin x}$; *b)* $\operatorname{ctg} x+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2$.

K2 **2829.** *a)* $\cos x+\frac{1}{\cos x}=2{,}5$; *b)* $\sin x-\cos x\cdot\sqrt{3}=0$.

K2 **2830.** $2\cdot(\sin^6 x+\cos^6 x)-3\cdot(\sin^4+\cos^4 x)+1=0$.

K2 **2831.** $\frac{2\cdot\sin x}{2\cdot\sin x-1}+\frac{2\cdot\sin x-1}{2\cdot\sin x}=\frac{5}{2}$.

K2 E1 **2832.** $x^2-\cos x+1=0$.

K2 E1 **2833.** $x^2-2x+\sin x+1=0$.

K2 E1 **2834.** $\sin^2 x+\cos^2 y+2\cdot\sin x+1=0$.

E2 **2835.** Határozzuk meg azokat az x, y valós számokat, amelyekre fennáll a következő egyenlőség: $x+\frac{1}{x}=2\cos y$.

Összetettebb feladatok

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán.

K2 **2836.** $\frac{\sin x+2\cdot\cos x}{4\cdot\sin x-\cos x}=\frac{1+2\cdot\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$.

K2 **2837.** $\operatorname{ctg} x-\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\operatorname{tg} x$.

K2 **2838.** $\sin x\cdot\operatorname{tg} x=\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}$.

K2 **2839.** $\operatorname{ctg} x+3\cdot\operatorname{tg} x-5\cdot\frac{1}{\sin x}=0$.

K2 **2840.** $\operatorname{tg}^2 x+4\cdot\sin^2 x-3=0$.

K2 **2841.** $\sqrt[3]{\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}}+6\cdot\sqrt[3]{\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}}=5$.

K2 E1 **2842.** $\operatorname{tg} x+\frac{1}{9}\cdot\operatorname{ctg} x=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-1}-1$.

K2 E1 **2843.** $4\cdot\cos^3 x+3\cdot\cos(\pi-x)=0$.

K2 E1 **2844.** $4\cdot|\cos x|+3=4\cdot\sin^2 x$.

K2 E1 2845. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot x)\right)=\sqrt{3}$.

K2 E1 2846. $\operatorname{tg}\left(\frac{2\cdot\pi\cdot x}{x^2+x+1}\right)=-\sqrt{3}$.

K2 E1 2847. $\cos(2\cdot\pi\cdot x)=\cos(\pi\cdot x^2)$.

K2 E1 2848. $\cos x=\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket.

K2 2849. $3\cdot\sin^2 x+3\cdot\sin x\cdot\cos x-6\cdot\cos^2 x=0$.

K2 2850. $\cos^2 x-3\cdot\sin x\cdot\cos x+2\cdot\sin^2 x=0$.

K2 2851. $3\cdot\sin^2 x+2\cdot\sin x\cdot\cos x=2$.

K2 2852. $2\cdot\cos^2 x-3\cdot\sin x\cdot\cos x+5\cdot\sin^2 x=3$.

K2 2853. $2\cdot\sin^2 x+3\cdot\sin x\cdot\cos x+7\cdot\cos^2 x=6$.

K2 E1 2854. $\frac{2\cdot\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos x+2\cdot\sin x}=\sin x$.

K2 E1 2855. $\sin^2 x\cdot\cos^2 x-10\cdot\sin x\cdot\cos^3 x+21\cdot\cos^4 x=0$.

K2 E1 2856. $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$.

K2 E1 2857. $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{7}{16}$.

E2 2858. $2\cdot\sin^3 x\cdot\cos x+\cos^4 x-\cos^2 x\cdot\sin^2 x=\frac{1}{2}$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán.

K2 2859. $\sin x+\cos x=\frac{1}{\sin x}$.

K2 2860. $\sin x-\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2}\cdot\operatorname{ctg} x$.

K2 2861. $\frac{1}{\cos x}-\cos x=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg} x$.

K2 2862. $\sin x-\cos x=4\cdot\cos^2 x\cdot\sin x+4\cdot\sin^3 x$.

K2 2863. $\sin^3 x-\sin^2 x=\sin^2 x\cdot\cos^2 x$.

K2 2864. $\operatorname{tg} x-\sin x=1-\cos x$.

K2 2865. $\sin x-\cos x+\operatorname{tg} x=1$.

K2 E1 2866. $\sin x+\cos x-\sin x\cdot\cos x=1$.

K2 E1 2867. $\sin x-\cos x+\sin x\cdot\cos x=1$.

K2 E1 2868. $2 \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x - \operatorname{ctg} x = 1.$

K2 E1 2869. $\sin x + \operatorname{tg} x = \dfrac{\dfrac{1}{\cos x} - \cos x}{2 \cdot \sin x}.$

K2 E1 2870. $2 \cdot \sin^2 x - \sin x \cdot \operatorname{tg} x - \sin x + \dfrac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} x = 0.$

K2 E1 2871. $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3 \cdot \operatorname{tg} x = 3.$

K2 E1 2872. $\operatorname{tg}^4 x + 2 \cdot \operatorname{tg}^3 x + 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x - 2 \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 0.$

E2 2873. $8 \cdot \cos^4 x - 8 \cdot \cos^2 x - \cos x + 1 = 0.$

E2 2874. $\sin^3 x \cdot (1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x \cdot (1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x.$

E2 2875. $\sin^2 x + \sin x + \sqrt{\sin x} = 1 - \cos x.$

Trigonometrikus egyenlőtlenségek I. rész

Bevezető alapfeladatok

K1 2876. *a)* $\sin x \geq 0$; *b)* $\cos x \geq 0$; *c)* $\operatorname{tg} x \geq 0$; *d)* $\operatorname{ctg} x \geq 0$.

K1 2877. *a)* $\sin x < 0$; *b)* $\cos x < 0$; *c)* $\operatorname{tg} x < 0$; *d)* $\operatorname{ctg} x < 0$.

K1 2878. *a)* $\cos x > \dfrac{1}{2}$; *b)* $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$; *c)* $\sin x \geq \dfrac{1}{2}$; *d)* $\sin x < \dfrac{1}{2}$.

K1 2879. *a)* $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; *b)* $\sin x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; *c)* $\cos x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; *d)* $\cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

K1 2880. *a)* $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; *b)* $\sin x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; *c)* $\cos x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; *d)* $\cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

K1 2881. *a)* $\operatorname{tg} x \geq 0$; *b)* $\operatorname{tg} x \leq 1$; *c)* $\operatorname{tg} x > 1$; *d)* $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$.

K1 2882. *a)* $\operatorname{ctg} x < 0$; *b)* $\operatorname{ctg} x \geq 1$; *c)* $\operatorname{ctg} x \geq 0$; *d)* $\operatorname{ctg} x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Alapvető feladatok

Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán.

K1 2883. *a)* $\cos x \geq 1$; *b)* $\sin x \leq -1$; *c)* $\sin x < -2$; *d)* $\cos x > \dfrac{3}{2}$.

K1 2884. *a)* $\cos 2x \leq -\dfrac{1}{2}$; *b)* $\sin 2x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; *c)* $\operatorname{ctg} 2x \geq 1$; *d)* $\operatorname{tg} 2x \leq -1$.

K1 **2885.** *a)* $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>-\frac{\sqrt{2}}{2}$; *b)* $\cos\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

K1 **2886.** *a)* $\sin^2 x\geq\frac{3}{4}$; *b)* $\sin^2 x\leq\frac{1}{2}$.

K1 **2887.** *a)* $\operatorname{tg}^2 x\leq 1$; *b)* $\operatorname{tg}^2 x>3$.

K1 **2888.** Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán. *a)* $\sqrt{1-\cos^2 x}=\sin x$; *b)* $\sqrt{1-\cos x}=-\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}$; *c)* $\sqrt{\operatorname{tg}^2 x}=-\operatorname{tg} x$.

Határozzuk meg, hogy mely valós x számokra értelmezhetők a következő kifejezések!

K1 **2889.** *a)* $\sqrt{\sin^2 x}$; *b)* $\sqrt{-\cos^2 x}$; *c)* $\sqrt{\sin x}+\sqrt{-\sin x}$; *d)* $\sqrt{-\cos x}-\sqrt{\cos x}$.

K1 **2890.** *a)* $\sqrt{\sin^2 x-\frac{1}{2}}$; *b)* $\sqrt{\cos^2 3x-1}$; *c)* $\sqrt{\sin(\pi\cdot x)}$; *d)* $\sqrt{\cos(\pi\cdot x)}$.

K1 **2891.** *a)* $\frac{1}{\sin x}$; *b)* $\frac{1}{\cos x}$; *c)* $\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}$; *d)* $\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}$.

K1 **2892.** *a)* $\sqrt{1-\sin^2 x}$; *b)* $\sqrt{\cos(\pi\cdot x)-1}$; *c)* $\sqrt{\sin^2(\pi\cdot x)-1}$; *d)* $\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

K1 **2893.** *a)* $\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{4}-1}$; *b)* $\sqrt{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}$; *c)* $\sqrt{\operatorname{ctg} x-1}$; *d)* $\sqrt{\cos^2\frac{\pi\cdot x}{2}-1}$.

Összetettebb feladatok

Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenlőtlenségrendszereket.

K1 **2894.** *a)* $\begin{cases}\sin x\leq\frac{1}{2},\\ \cos x\leq\frac{1}{2};\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\sin x\geq\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos x\geq\frac{\sqrt{2}}{2};\end{cases}$ *c)* $\begin{cases}\sin x\geq-\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \operatorname{tg} x\leq 0.\end{cases}$

K1 **2895.** *a)* $\begin{cases}\cos x\leq\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \operatorname{ctg} x\geq-\sqrt{3};\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\operatorname{tg} x\leq 1,\\ \operatorname{ctg} x>-\frac{\sqrt{3}}{3};\end{cases}$ *c)* $\begin{cases}\sin x>0,\\ \cos x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenlőtlenségeket.

K1 **2896.** *a)* $\sin^2 x\geq\sin x$; *b)* $\cos^2 x<\cos x$; *c)* $\sin^2 x\leq 2\cdot\sin x$.

K1 **2897.** *a)* $\cos^2 x\geq\frac{1}{2}\cdot\cos x$; *b)* $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x\leq\sin^2 x$; *c)* $\sqrt{2}\cdot\sin^2 x>\sin x$.

Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán.

K2 **2898.** *a)* $\sin^2 x - \frac{3}{2}\cdot\sin x + \frac{1}{2} \geq 0$; *b)* $\cos^2 x - \frac{3}{2}\cdot\cos x + \frac{1}{2} \leq 0$.

K2 **2899.** *a)* $4\cdot\cos^2 x - 2\cdot(\sqrt{2}-1)\cdot\cos x - \sqrt{2} \geq 0$;

b) $4\cdot\sin^2 x - 2\cdot(\sqrt{2}-1)\cdot\sin x - \sqrt{2} \leq 0$.

K2 **2900.** *a)* $2\cdot\cos^2 x + \sin x - 1 < 0$; *b)* $3\cdot\sin x > 2\cdot\cos^2 x$.

K2 **2901.** *a)* $\frac{4+\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot\cos x \geq \sin^2 x$; *b)* $\frac{4+\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot\sin x \geq \cos^2 x$.

K2 **2902.** *a)* $\frac{4-\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\cdot\sin x \geq \cos^2 x$; *b)* $\frac{4-\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x \geq \sin^2 x$.

K2 **2903.** *a)* $8\cdot\cos^4 x - 10\cdot\cos^2 x + 3 \geq 0$; *b)* $8\cdot\sin^4 x - 10\cdot\sin^2 x + 3 \geq 0$.

K2 **2904.** *a)* $8\cdot\cos^4 x \geq 2\cdot\sin^2 x + 1$; *b)* $8\cdot\sin^4 x \geq 5 - 2\cdot\cos^2 x$.

K2 **2905.** *a)* $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x \geq 0$; *b)* $\operatorname{tg}^2 x < (\sqrt{3}-1)\cdot\operatorname{tg} x + \sqrt{3}$.

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán.

K1 **2906.** *a)* $\frac{\sin x}{2+\cos x} \geq 0$; *b)* $\frac{\cos x}{3+\sin x} \leq 0$; *c)* $\frac{\sin x}{1+\sin x} \geq 0$; *d)* $\frac{\cos x}{1+\cos x} \geq 0$.

K1 **2907.** *a)* $\frac{\sin x}{1+\cos x} \geq 0$; *b)* $\frac{\cos x}{1+\sin x} \leq 0$; *c)* $\frac{\cos x}{1+\cos 2x} < 0$; *d)* $\frac{\sin x}{1+\sin 2x} > 0$.

K1 **2908.** *a)* $\frac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin x - \frac{1}{2}} \geq 0$; *b)* $\frac{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}} \geq 0$; *c)* $\frac{\sin x + \frac{1}{2}}{\cos x} \leq 0$; *d)* $\frac{\cos x}{\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}} < 0$.

K1 **2909.** *a)* $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} < 0$; *b)* $\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} > 0$; *c)* $\frac{\cos x}{\operatorname{ctg} x} > 0$; *d)* $\frac{\sin x}{\operatorname{ctg} x} < 0$.

Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán.

K2 **2910.** *a)* $\operatorname{tg} x \leq \frac{1}{\cos x}$; *b)* $\operatorname{tg} x \geq \frac{1}{2\cdot\cos x}$; *c)* $\operatorname{ctg} x \geq \frac{1}{\sin x}$; *d)* $\operatorname{ctg} x \leq \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sin x}$.

K2 E1 **2911.** *a)* $\operatorname{tg} x > \sin x$; *b)* $\operatorname{tg} x \leq 2\cdot\sin x$; *c)* $\operatorname{ctg} x \geq \cos x$; *d)* $\operatorname{ctg} x \leq \sqrt{2}\cdot\cos x$.

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán.

K2 **2912.** *a)* $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos x \geq 0$; *b)* $\cos x\cdot\operatorname{tg} x \geq 0$; *c)* $\sin x\cdot\operatorname{tg} x \leq 0$;

d) $\operatorname{ctg} x\cdot\cos x > 0$; *e)* $\sin x\cdot\frac{1-2\cdot\cos x}{\operatorname{tg} x - 1} \geq 0$; *f)* $\cos x\cdot\frac{2\cdot\sin x - \sqrt{3}}{\operatorname{tg} x - \frac{\sqrt{3}}{3}} \geq 0$.

IV

Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenlőtlenségeket.

K2 E1 2913. $(1 + \sin x) \cdot (-x^2 + x + 6) \geq 0$.

E1 2914. $4 \cdot (\sin^2 x - |\cos x|) < 1$.

E1 2915. $2 \cdot \cos x \cdot \left(\cos x - \sqrt{8} \cdot \operatorname{tg} x\right) < 5$.

E1 2916. $\dfrac{5 - 4 \cdot \left(\sin^2 x + \cos x\right)}{\cos x} \leq 0$.

E2 2917. $|\sin x| + |\cos x| > 1$.

E2 2918. Igazoljuk, hogy ha teljesül, hogy $0 < x \leq \dfrac{\pi}{2}$, akkor fennáll a következő egyenlőtlenség: $\cos x + x \cdot \sin x > 1$.

E2 2919. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, akkor $\cos^2 x + x \cdot \sin x < 2$.

Szélsőértékfeladatok

Határozzuk meg a következő valós függvények szélsőértékeit.

K1 2920. *a)* $f(x) = 2 - 3 \cdot \sin x$; *b)* $g(x) = -2 + 4 \cdot \cos x$.

K1 2921. *a)* $f(x) = 4 - 3 \cdot \sin^2 x$; *b)* $g(x) = 2 \cdot \cos^2 x - 1$

K2 2922. *a)* $f(x) = \dfrac{6}{3 - \cos^2 x}$; *b)* $g(x) = \dfrac{2}{1 + \sin^2 x}$; *c)* $h(x) = -\dfrac{3}{\cos^2 x + 2}$.

K2 2923. $f(x) = 2 \cdot \sin^2 x + 3 \cdot \cos^2 x$;

K2 2924. $f(x) = \sin x + 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^4 x + \cos^4 x - 1$.

K2 E1 2925. Mekkora a következő valós függvény legkisebb és legnagyobb értéke a $[0; 2\pi]$ intervallumban?
$f(x) = -2 \cdot \sin^2 x + 3 \cdot \sin x + 1$.

E1 2926. Határozzuk meg a következő valós függvény legnagyobb és a legkisebb értékét, a szélsőértékhelyekkel együtt.
$f(x) = 2 \cdot \cos^2 x - 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos x - \sin^2 x + 5$.

E1 2927. Határozzuk meg a következő valós függvény minimumát:
$f(x) = \dfrac{2}{\cos^4 x} - 4 \cdot \operatorname{tg}^2 x - 1$.

E2 2928. Legyen x tetszőleges valós szám és határozzuk meg a következő függvény maximumát és a minimumát:
$f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \cos^2 x}$.

E2 2929. Határozzuk meg a következő függvény minimális értékét, ha x olyan valós szám, amelyre $0 < x < \pi$:
$f(x) = \dfrac{9 \cdot x^2 \cdot \sin^2 x + 4}{x \cdot \sin x}$.

A szinusztétel alkalmazása

Bevezető alapfeladatok

K1 **2930.** Egy háromszög két oldala 10 cm, illetve 8 cm hosszúságú. A hosszabbik megadott oldallal szemközti szög 84°-os. Határozzuk meg a háromszög ismeretlen szögeit és oldalát.

K1 **2931.** Egy háromszög két oldala 10 cm, illetve 8 cm hosszúságú. A hosszabbik megadott oldallal szemközti szöge 122°-os a háromszögnek. Határozzuk meg a háromszög ismeretlen szögeit és oldalát!

K1 **2932.** Egy háromszög két oldala 10 cm, illetve 8 cm hosszúságú. Legyen a háromszög hosszabbik megadott oldallal szemközti szöge 35°-os. Mekkorák a háromszög ismeretlen szögei és oldala?

K1 **2933.** Egy háromszög két oldala 10 cm, illetve 8 cm. A rövidebb megadott oldallal szemközti szög 54°-os. Mekkorák a háromszög ismeretlen szögei és oldala?

K1 **2934.** Egy háromszög két oldala 10 cm, illetve 8 cm. A rövidebb megadott oldallal szemközti szöge 33°-os. Mekkorák a háromszög ismeretlen szögei és oldala?

K1 **2935.** Egy háromszög egyik oldalának hossza 10 cm és ezzel az oldallal szemközt 68°-os szög van a háromszögben. A háromszög egy másik szöge 52°-os. Határozzuk meg a háromszög ismeretlen oldalait.

K1 **2936.** Egy háromszög egyik oldala 10 cm hosszú és ezzel az oldallal szemközti szöge a háromszögnek 54°-os. A háromszög egy másik szöge 76°-os. Határozzuk meg a háromszög ismeretlen oldalait.

Alapvető feladatok

K1 **2937.** Egy háromszög két oldala 8,6 cm, illetve 10,3 cm. A rövidebb oldallal szemközti szög 62°15′. Mekkorák a háromszög ismeretlen szögei és oldala?

K1 **2938.** Egy háromszög két oldala 8,6 cm, illetve 9,2 cm. A rövidebb oldallal szemközti szög 62°15′. Mekkorák a háromszög ismeretlen szögei és oldala?

K1 **2939.** Egy háromszög két oldala 8,6 cm, illetve 9,2 cm. A rövidebb oldallal szemközti szög 34°25′. Mekkorák a háromszög ismeretlen szögei és oldala?

K1 **2940.** Egy háromszög két oldala 6 cm, illetve 7 cm. A rövidebb oldallal szemközti szög 58°42′. Mekkorák a háromszög ismeretlen szögei és oldala?

K1 **2941.** Egy háromszögben ismerjük két oldal hosszúságának összegét, ez 12 cm és az összegben szereplő oldalakkal szemközti 45,7°-os, illetve 79,3°-os szögeket. Mekkorák a háromszög oldalai?

K1 **2942.** Egy háromszögben két oldal hosszúságának különbsége 7,5 cm és ezen oldalakkal szemben 34,7°-os, illetve 76,2°-os szög található. Mekkorák a háromszög oldalai?

K1 **2943.** Egy háromszög kerülete 14 cm, két szöge 43,8°, illetve 64,7°. Mekkorák a háromszög oldalai?

K1 **2944.** Egy háromszög szögeinek aránya 2:3:4, míg a kerülete 18 cm. Mekkorák a háromszög oldalai?

K1 **2945.** Valamely háromszögben fennáll az a, b, c hosszúságú oldalaira és az oldalakkal rendre szembenfekvő α, β, γ szögeire, hogy $b + c = 3 \cdot a$.
Igazoljuk, hogy ekkor $\sin\beta + \sin\gamma = 3 \cdot \sin\alpha$ is fennáll!

K1 **2946.** Legyenek α, β, γ egy tetszőleges háromszög szögei és a szögekkel szemközti oldalai rendre a, b, c és a háromszög területe legyen t. Igazoljuk, hogy ekkor

$$t = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin\alpha}.$$

K1 **2947.** Egy paralelogramma egyik átlójának hossza 12 cm. Az adott átló a paralelogramma egyik szögét 26°42′ és 35°24′ szögekre osztja. Számítsuk ki a paralelogramma oldalainak a hosszát.

K1 **2948.** Egy paralelogramma egyik szöge 112°. Az adott szöggel szemközti átló hossza 18 cm. Ez az átló a paralelogramma hegyesszögét 2:3 arányban osztja. Számítsuk ki a paralelogramma oldalainak a hosszát.

K1 GY **2949.** Egy 250 N nagyságú erőt bontsunk fel két olyan összetevőre, amelyek 54°-os, illetve 18°-os szöget alkotnak vele. Számítsuk ki az összetevők nagyságát.

K1 GY **2950.** Egy csónakkal akarunk átkelni a folyón. A vízreszállás pontjától a cél iránya 36,5°-ra van a folyásiránytól számítva lefelé a folyón. A folyó sebessége 1,4 m/s, míg a csónak sebessége állóvízben 2 m/s. Milyen irányba evezzünk, hogy a víz sodra ellenére is egyenesen célbaérjünk?

K1 **2951.** Egy szabályos 10 cm oldalú háromszög egyik szögét két egyenessel három egyenlő részre osztjuk. Mekkora részekre osztják ezen egyenesek a szöggel szemközti oldalt?

Összetettebb feladatok

K2 **2952.** Egy háromszög területe 84 cm^2, két szögének nagysága 67,38°, illetve 53,13°. Határozzuk meg a háromszög oldalainak a hosszát.

K2 **2953.** Egy háromszög területe 4920 cm^2 és két oldalának szorzata $a \cdot b = 10324$ cm^2 és az a oldallal szemközti szöge 64,01°. Határozzuk meg a háromszög oldalait és az ismeretlen szögeit.

K2 E1 **2954.** Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója $AB = 10$ egység. A D pont a háromszög köré írt körnek a C csúcsot nem tartalmazó AB ívén van, és C-ből az AD szakasz 30°-os szögben látszik. Mekkorák az ACD háromszög oldalai?

K2 **2955.** Egy szimmetrikus trapéz átlójának hossza 34 cm. Az átló 28,2°-os és 33,6°-os szögekre osztja a trapéz hegyesszögét. Az utóbbi szög másik szára a trapéz hosszabbik alapja. Számítsuk ki a szimmetrikus trapéz oldalainak a hosszát.

K2 **2956.** Egy szimmetrikus trapéz átlója 6,8 dm, rövidebb alapja 2,6 dm, egyik szöge 68°36′. Számítsuk ki a trapéz oldalait és a területét.

K2 2957. Egy trapéz hosszabbik alapja 38 cm, egyik szára 17,5 cm. E két oldal által bezárt szög 59°45′, az alapon fekvő másik szög 31°18′. Mekkorák a trapéz ismeretlen oldalai?

K2 2958. Egy trapéz hosszabbik alapja 24 cm, szárai 7,6 cm, illetve 11,2 cm hosszúak. A hosszabbik alap és a rövidebb szár által bezárt szög 72,8°. Mekkora a trapéz rövidebbik alapja és mekkorák a trapéz szögei?

K2 2959. Egy trapéz két párhuzamos oldala 5,4 cm, illetve 18,2 cm. Egyik szára 12,5 cm, a másik szára a hosszabbik alappal 71°36′-es szöget zár be. Számítsuk ki a trapéz másik szárát és a területét.

K2 2960. Egy háromszög egyik szöge 58°36′. Ennek a szögnek a szögfelezője 8,4 cm és a szög csúcsából induló magasság 7,6 cm. Mekkorák a háromszög oldalai és ismeretlen szögei?

K2 2961. Határozzuk meg azon négyszög oldalainak a hosszát, amelynek a 26,5 cm-es átlója az egyik csúcsnál levő szöget 48,2°-os és 19,7°-os szögekre osztja, míg a szembenfekvő másik csúcsnál levő szöget pedig 47,3°-os és 27,8°-os szögekre osztja úgy, hogy a nagyobbik részszögek azonos háromszögben vannak.

K2 E1 GY 2962. Egy egyenes országútból 32°-os szög alatt egy egyenes gyalogút ágazik el. E gyalogút mentén két gazdasági épület egymástól ismeretlen távolságra fekszik. Az elágazástól 400 méterrel tovább haladva az országúton, az épületek felé mutató irányok 105°, illetve 75°-os szöget zárnak be a haladás irányával.
Milyen messze van egymástól a két épület?

K2 E1 GY 2963. Egy folyó kis szigetén található egy fa az A pontban. A folyótól kissé távolabb egy mocsár található a síkságon. A mocsárban egy fa tenyészik a B pontban. Valamilyen rejtélyes oknál fogva kíváncsiak vagyunk a két fa egymástól való távolságára. Ezért az AB szakaszon valamely száraz C pontból kiindulva oldalra, a síkságon száraz területen lépkedve, felmérünk egy 300 méteres szakaszt és kapjuk a D pontot. Megmérve, a következő szögeket kapjuk: $ACD \sphericalangle = 115°42'$; $ADC \sphericalangle = 19°28'$; $CDB \sphericalangle = 63°16'$.
Mekkora a két fa távolsága?

K2 E1 GY 2964. Egy szigeten levő A tereptárgy távolságát szeretnénk meghatározni a folyó túlsó partján levő B tereptárgytól. Ezért a folyó innenső partján az AB egyenesen felveszünk egy C pontot, majd C-ből kiindulva oldalra felmérünk egy 350 méteres CD szakaszt. Megmérve, kapjuk a következő szögeket: $ACD \sphericalangle = 75°48'$; $CDA \sphericalangle = 41°12'$; $ADB \sphericalangle = 28°53'$. Mekkora az AB távolság?

K2 E1 GY 2965. Egy útkereszteződéstől észak felé az A község van 2400 m-re, míg nyugat felé a B község van 3200 m-re. Milyen távol van az A-tól és a B-től az a C község, amelybe A-ból egy olyan egyenes út vezet, amely az északi irányú úttól balra tér el 82°16′-es irányba, míg B-ből C-be olyan egyenes út vezet, amely a nyugati irányú úttól jobbra tér el 75°42′-es szöggel?

K2 E1 GY 2966. A síkság egy pontjából nézve két egymás mögötti hegy azonos irányban van. A közelebbi hegycsúcs 22°45′, míg a távolabbi hegycsúcs 38°28′ emelkedési szögben látszik. Ha 450 métert megyünk a hegyek felé, akkor a két hegycsúcs közös emelkedési szöge 47°24′. Milyen magasan vannak a hegycsúcsok a síkság fölött és mekkora a hegycsúcsok távolsága légvonalban?

K2 E1 GY 2967. A síkság egy pontjából két egymás mögött levő hegy egy irányban látszik, mégpedig a közelebbi csúcs α, a távolabbi csúcs β emelkedési szög alatt, t méterrel köze-

lebb haladva, a hegycsúcsok közös emelkedési szöge γ. Milyen magasan vannak a hegycsúcsok a síkság felett?
$t = 250$ m; $\alpha = 28°48'$; $\beta = 32°18'$; $\gamma = 42°12'$.

K2 E1 GY 2968. Egy drótkerítéssel bekerített, sík terepen álló antenna magasságát akarjuk meghatározni, de nem férünk közel az antennához a drótkerítés miatt. Ezért a síkon felveszünk egy $AB = 100$ m hosszú alapvonalat. Legyen P az antenna csúcsa, míg a P' pont az antenna talppontja a síkon. Az AB szakasz végpontjaiból megmérjük a következő szögeket: $BAP' \sphericalangle = 54°36'$; $ABP' \sphericalangle = 65°41'$; $PAP' \sphericalangle = 49°49'$.
Milyen magas az antenna?

K2 E1 GY 2969. Egy hegy emelkedik egy síkság fölé. A hegy csúcsa a P pont, ennek merőleges vetülete a síkra a P' pont. A síkon felveszünk egy $AB = 800$ m hosszú alapvonalat. Majd megmérve kapjuk a következő szögeket: $PAB \sphericalangle = 72°35'$; $PBA \sphericalangle = 64°26'$; $PAP' \sphericalangle = 23°48'$. Milyen magasra emelkedik a hegy a síkság fölé?

K2 E1 GY 2970. Egy antenna emelkedik a síkság fölé, az antenna csúcsa a P pont, míg a talppontja a P' pont a síkságon. A síkon fölvett $AB = 400$ m-es szakasz végpontjaiból az antenna $PAP' \sphericalangle = 18°34'$, illetve $PBP' \sphericalangle = 11°27'$ emelkedési szög alatt látszik, ezenkívül $BAP \sphericalangle = 94°16'$. Milyen magas az antenna?

Nehezebb feladatok

E2 V1 2971. Az $ABCD$ konvex négyszögben meghúzzuk az AC, illetve BD átlókat. Ismert, hogy $AD = 2$, $ABD \sphericalangle = ACD \sphericalangle = 90°$, ezenkívül az ABD háromszög szögfelezőinek metszéspontja $\sqrt{2}$ egység távolságra van az ACD háromszög szögfelezőinek metszéspontjától. Határozzuk meg a BC oldal hosszát.

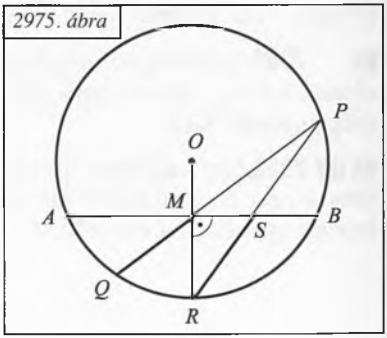
E2 V2 2972. Az $ABKC$ konvex négyszög AB oldalának hossza $\sqrt{3}$ egység, a BC átló hossza 1 egység. Míg az $ABC \sphericalangle$, $BKA \sphericalangle$, illetve a $BKC \sphericalangle$ nagysága rendre egyenlő 120°, 30°, illetve 60°-kal. Határozzuk meg a BK oldal hosszát.

E2 V2 2973. A KLM derékszögű háromszög átmérője átmegy egy kör O középpontján. A kör az A, illetve a B pontokban érinti a háromszög KL, illetve LM oldalait. Határozzuk meg az AK szakasz hosszát, ha ismert, hogy $BM = \frac{23}{16}$ és $\frac{AK}{AC} = \frac{5}{23}$, ahol C a kör és a KM szakasz azon metszéspontja, amely az O és az M pont között van.

E2 V2 2974. Az $ABCD$ konvex négyszögben az M pont az AD szakaszon van és a CM szakasz a K pontban metszi a BD átlót. Legyen $CK:KM = 2:1$, $CD : DK = 5:3$ és
$ABD \sphericalangle + ACD \sphericalangle = 180°$. Határozzuk meg az AB oldal és az AC átló hosszának az arányát.

E2 V2 2975. Az O középpontú egységnyi sugarú körben AB egy tetszőleges olyan húr, amely nem átmérő. Legyen P egy tetszőleges pontja a nagyobbik AB ívnek. A OR sugár merőleges az AB húrra. Az ábrán látható QM vagy RS szakasz a hosszabb?

2975. ábra



IV

A koszinusztétel alkalmazása

Alapvető feladatok

K1 **2976.** *a)* Egy háromszög két oldala 12 cm, illetve 10 cm hosszúságú. E két oldal által bezárt szög 42°-os. Határozzuk meg a háromszög harmadik oldalának a hosszát.
b) Egy háromszög oldalainak a hosszúságai 7 cm, 8 cm és 9 cm. Határozzuk meg a háromszög legnagyobb szögét.
c) Egy háromszög oldalai 15 cm, 18 cm és 22 cm. Határozzuk meg a háromszög legkisebb szögét.
d) Egy háromszög oldalainak a hosszúságai 8 cm, 10 cm és 15 cm. Határozzuk meg a háromszög szögeit.

K1 GY **2977.** *a)* Mekkora szög alatt látjuk két távvezetékoszlop távolságát egy olyan pontból, amely az egyik oszloptól 320 m-re, a másiktól 245 m-re van, míg a két oszlop távolsága egymástól 150 m.
b) Egy ébresztőóra nagymutatója 8 cm, míg a kismutatója 5 cm hosszú. Milyen távol vannak az óramutatók végpontjai egymástól hajnali 4 órakor?
c) Két egyenes vasúti pálya 42°35′-es szög alatt keresztezi egymást. A kereszteződéstől a legközelebbi őrházig 125 m a távolság az egyik pálya mentén, míg egy másik őrház a másik pálya mentén 221 m-re van a kereszteződéstől. Milyen távol van egymástól a két őrház?
d) Egy 15 N-os és egy 24 N-os erő hat egy pontszerű testre, az erők által bezárt szög 34,7°. Határozzuk meg az eredő erő nagyságát! Mekkora szöget zár be az eredő erő a 24 N-os erővel?
e) Egy paralelogramma átlói 26 cm, illetve 14 cm hosszúak, az általuk bezárt szög 42°16′. Mekkorák a paralelogramma oldalai és a szögei?
f) Egy paralelogramma két oldala és az általuk közbezárt szöge: 36 cm, 22 cm, illetve 48°15′. Számítsuk ki a paralelogramma területét és az adott szögével szemközti átlójának a hosszát.

K1 **2978.** Egy paralelogramma területe 457,6 cm^2, egyik oldala 14,2 cm, egyik szöge 32°18′. Számítsuk ki a másik oldalt és a hosszabb átlót.

K2 **2979.** Egy háromszög két oldalának hossza 5 cm, illetve 8 cm és a háromszög területe 12 cm^2. Számítsuk ki a háromszög harmadik oldalának a hosszát.

K1 **2980.** Valamely háromszög területe 715 m^2, egyik oldala 53,4 m hosszú és egy másik oldalával szemközti szöge 38,79°. Határozzuk meg a háromszög többi oldalának a hosszát és a háromszög szögeit.

K1 **2981.** Egy ABC háromszög egyik oldala $AB = 5$ cm, a másik két oldal hosszának összege 7 cm, továbbá a BAC szög koszinusza 0,8 . Mekkora a háromszög területe?

K1 **2982.** Valamely háromszögre fennáll, hogy $a = 2 \cdot b \cdot \cos \gamma$, ahol a, b, c a háromszög oldalai és γ a c oldallal szemközti szöge a háromszögnek. Bizonyítsuk be, hogy ezen háromszög egyenlő szárú.

K1 GY **2983.** Egy kikötőből egyszerre indul el két hajó, az egyik 42 km/h, a másik 36 km/h sebességgel. Az első hajó észak felé halad, a másik kelet-délkeleti irányban. Milyen messze lesznek egymástól 4 óra múlva?

K2 GY 2984. Egy síktükörtől az A pont 38 cm-re, míg a B pont 65 cm-re van. Az A pontból kiinduló fénysugár 21°45′-es beesési szögben érkezik a síktükörre, majd a visszaverődés után a B pontba jut. Mekkora az AB távolság?

Összetettebb feladatok

K2 GY 2985. Kalózok elásott kincsét keresve, az A helyről észak felé haladunk 65 métert, majd keletnek fordulunk és 82 métert teszünk meg. Ezután jobbra eltérünk a keleti iránytól 35°24′-es szöggel és egyenesen haladunk 43 métert, míg eljutunk a B pontban elásott kincshez. Mekkora az AB távolság?

K2 GY 2986. Egy egyenes főúton haladva, 34°18′-es szög alatt balra, egyenes mellékút ágazik el, majd 8 km -rel tovább az egyenes főúton, jobbra egy egyenes mellékút ágazik le 41°24′-es szöget bezárva a főúton való haladási irányunkkal. Az első mellékúton 12 km-rel az elágazás után van az A község, míg a második mellékúton a leágazástól 10 km-re van a B község. Milyen messze van egymástól légvonalban a két község?

K2 E1 GY 2987. Milyen hosszúak az óramutatók, ha végpontjaik 2 órakor 13 egységre és 9 órakor 17 egység távolságra vannak egymástól?

K2 2988. Egy szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja 28 cm és ez 38°15′-es szöget zár be a trapéz 21,6 cm hosszú átlójával. Mekkorák a trapéz ismeretlen oldalai és szögei?

K2 2989. Egy trapéz alapjai 58 cm, illetve 22 cm hosszúak. A nagyobbik alappal 72°14′-es szöget zár be a 27,5 cm hosszú egyik szára. Mekkora a trapéz ismeretlen szára és az ismeretlen szögei?

K2 2990. Egy trapéz alapjai 120 m, illetve 75 m hosszúak, míg szárai 52 m, illetve 86 m hosszúak. Mekkorák a trapéz szögei?

K2 2991. Egy háromszög két oldala 8,5 cm, illetve 14,6 cm hosszúságú. A hosszabbik megadott oldalt felező súlyvonal 10,4 cm hosszúságú. Mekkora a háromszög ismeretlen oldala?

K2 2992. Egy háromszög két oldalának a hossza 14,8 cm, illetve 8,2 cm. A harmadik oldalához tartozó súlyvonal hossza 10,4 cm. Határozzuk meg a harmadik oldalának a hosszát.

K2 2993. Adott egy háromszög két oldalának a hossza: 45 cm, illetve 28 cm és az általuk bezárt szög 84°18′. Mekkora a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal?

K2 2994. Egy paralelogramma két oldalának összege 26 cm, az általuk bezárt szög 82°49′. Az e szöggel szemközti átlója 18 cm. Mekkorák a paralelogramma oldalai?

K2 2995. Egy paralelogramma oldalai 4 cm és 7 cm hosszúak, két átlójának a hossza között pedig 2 cm a különbség. Mekkorák a paralelogramma átlói?

K2 2996. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma oldalainak a négyzetösszege (négyzeteinek összege) egyenlő az átlóinak a négyzetösszegével.

K2 E1 2997. Legyenek egy tetszőleges háromszög oldalainak a hosszúságai a, b és c, míg s_a, s_b, és s_c rendre a megfelelő oldalakhoz tartozó súlyvonalak hosszai. Igazoljuk, hogy

$a)$ $s_c = \dfrac{\sqrt{2\cdot a^2 + 2\cdot b^2 - c^2}}{2}$; $\quad b)$ $s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \dfrac{3}{4}\cdot\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

K2 E1 2998. Legyen egy háromszög két oldalának hossza a, illetve b, ezen oldalakhoz tartozó súlyvonalainak hossza rendre s_a, illetve s_b.
Igazoljuk, hogy ha $a < b$, akkor $s_a > s_b$.

K2 E1 2999. Egy háromszög egyik oldala 10 cm hosszú és annak a két súlyvonalnak a hossza, amelyek ennek az oldalnak a két végpontjából indulnak ki, 9 cm, illetve 12 cm. Számítsuk ki a háromszög területét.

K2 E1 3000. Egy háromszög AB oldalának a hossza 10 cm, a hozzá tartozó súlyvonal 6 cm hosszú, egy másik súlyvonala pedig 9 cm. Milyen hosszú a háromszög BC oldala?

K2 E1 3001. Az ABC háromszög CB oldalán van a D pont. Legyen $CAD \sphericalangle = DAB \sphericalangle = 60°$, $AC = 3$ és $AB = 6$. Határozzuk meg az AD szakasz hosszát.

K2 E1 3002. Egy háromszög oldalainak hossza 13, 14, illetve 15 egység. Mekkora annak a körnek a sugara, amelynek középpontja a háromszög leghosszabb oldalán van és a kör érinti a háromszög másik két oldalát?

K2 E1 3003. Az ABC háromszög köré írt kör sugara 5 egység, az AB oldal 8 egység, a másik két oldal aránya 2 : 5. Számítsuk ki a háromszög másik két oldalának a hosszát.

K2 E1 3004. Egy paralelogramma egyik szöge 60°-os. Határozzuk meg két szomszédos oldalának az arányát, ha az átlók négyzeteinek az aránya 19 : 7.

K2 E1 GY 3005. Trapéz alakú telek területe 3600 m^2. A telek egyik átlós útja a telket egy szabályos háromszögre és egy másik háromszögre osztja. A két rész területének aránya a megadott sorrendben 5 : 4. Mekkorák a trapéz oldalai?

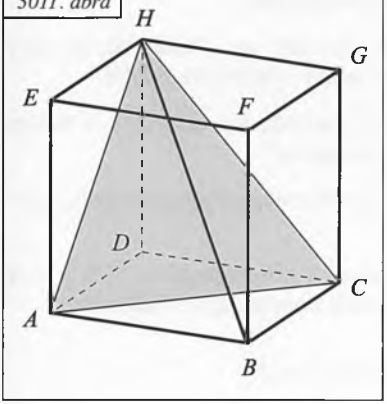
K2 3006. Egy konvex négyszög három egymás utáni oldala 15 cm, 13 cm és 8 cm. Az első két oldal közötti szög 85°45′, a második és a harmadik oldala közötti szög 74°20′. Mekkorák a négyszög ismeretlen szögei és oldala?

K2 3007. Egy konvex négyszög oldalai rendre 8 cm, 5 cm, 6 cm és 7 cm. A 7 cm-es és 8 cm-es oldalak által bezárt szög 75°48′. Mekkorák a négyszög ismeretlen szögei?

K2 E1 3008. Az $ABCD$ konvex négyszögben $AB = 3$, $BC = 5$, $CD = 5$ és $DA = 2 \cdot \sqrt{6}$ hosszegység, a B csúcsnál levő szög 120°. Számítsuk ki az AC átló hosszát, a D csúcsnál levő szöget és a négyszög területét.

IV

3011. ábra



K2 E1 3009. Egy húrnégyszög oldalai rendre 42 cm, 35 cm, 56 cm és 61 cm. Határozzuk meg a húrnégyszög szögeit.

K2 E1 3010. Legyen egy konvex négyszög két szemközti oldalának négyzetösszege egyenlő a másik két oldal négyzetösszegével. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a négyszög átlói merőlegesek egymásra.

K2 E1 3011. Mekkora szöget alkot az ábrán látható kocka BH testátlója az ACH síkkal?

K2 E1 GY 3012. Egy 650 m magas hegy csúcsáról két hajót figyelünk meg a tengeren. A hajók távolságát 74°24′-es szög alatt látjuk. Az egyik hajót 8°52′-es, míg a másik hajót 7°16′-es lehajlási szög alatt látjuk. Mekkora a két hajó távolsága egymástól?

K2 E1 GY 3013. Egy kereken 500 méter magasnak mért hegycsúcsát a vízszintes síkban fekvő két helység egyikéből 6°42′, a másikból 7°28′-es emelkedési szögben látjuk. Milyen messze van a két helység egymástól, ha a hegytetőről egy-egy kiemelkedő pontjuk közötti távolság 72°18′-es látószög alatt látszik?

K2 E1 GY 3014. Egy 200 m magas torony tetejéről a torony talppontján kívüli A, illetve B pont 38°17′, illetve 46°24′-es lehajlási szög alatt látszik. Az A, illetve a B ponthoz tartozó lehajlási szög mérése közben a távcsövet vízszintes síkban 78°36′-es szöggel kellett elforgatni. Milyen hosszú az AB távolság?

K2 E1 GY 3015. Egy antenna magasságának meghatározásához a síkságon egy egyenesen felvesszük rendre az A, B és C pontokat úgy, hogy $AB = 80$ m, $BC = 40$ m. A felvett pontokból az antenna rendre 30°, 45°, illetve 60°-os szög alatt látszik.
Milyen magas az antenna?

A következő feladatokban a, b, és c egy háromszög oldalainak a hosszúságát jelenti és velük szemben rendre α, β és γ szögek találhatók a háromszögben, míg a háromszög területét t-vel jelöljük.

K2 3016. Valamely háromszögre fennáll, hogy $b \cdot \cos\gamma = c \cdot \cos\beta$. Igazoljuk, hogy e háromszög egyenlő szárú.

K2 3017. Egy háromszögre fennáll, hogy $b^2 + 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta = a^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$. Igazoljuk, hogy ekkor e háromszög egyenlő szárú.

K2 3018. Igazoljuk, hogy bármely háromszögre teljesül a következő egyenlőség:

$$b \cdot \cos\gamma - c \cdot \cos\beta = \frac{b^2 - c^2}{a}.$$

K2 3019. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögre teljesül a következő egyenlőség:

$$\frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\beta}{b} + \frac{\cos\gamma}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2 \cdot a \cdot b \cdot c}.$$

K2 E1 3020. Bizonyítsuk be, hogy minden háromszögre fennáll, hogy

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot t}.$$

K2 E1 3021. Igazoljuk, hogy bármely háromszögre teljesül a következő egyenlőség:
$(a + b) \cdot \cos\gamma + (b + c) \cdot \cos\alpha + (c + a) \cdot \cos\beta = a + b + c$.

K2 E1 3022. Valamely háromszög oldalaira fennáll, hogy
$c \cdot (a + b - c) - a \cdot (b + c - a) + b \cdot (a + c - b) = b \cdot c$.
Igazoljuk, hogy ekkor $\alpha = 60°$.

K2 E1 3023. Valamely háromszög oldalaira teljesül, hogy

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}.$$

Igazoljuk, hogy ekkor $\beta = 60°$.

K2 E1 3024. Egy háromszög oldalaira fennáll a következő összefüggés:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b-c}=\frac{3}{a+b-c}.$$

Mekkora a háromszög b oldallal szemközti szöge?

K2 E1 3025. Valamely háromszögben teljesül, hogy

$$\cos\beta+\cos\gamma=\frac{b+c}{a}.$$

Igazoljuk, hogy e háromszög derékszögű.

K2 E1 3026. Valamely háromszögben teljesül, hogy $a \cdot \cos\alpha = b \cdot \cos\beta$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor e háromszög egyenlő szárú vagy derékszögű!

K2 E1 3027. Valamely háromszög oldalaira teljesül, hogy

$$(b+c)\cdot a=b^2+c^2 \quad \text{és} \quad b+c=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\cdot a.$$

Számítsuk ki a háromszög α szögét.

K2 E1 3028. Valamely háromszög oldalaira fennáll, hogy

$$\frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}=a^2.$$

Igazoljuk, hogy ekkor $\alpha = 60°$.

K2 E1 3029. Egy háromszögben $a = \sqrt{6}$, $\alpha = 60°$ és $b + c = 3 + \sqrt{3}$. Számítsuk ki a háromszög területét.

K2 E1 3030. Egy ABC háromszög a, b, c oldalhosszai egész számok és fennáll, hogy $b + c = 5 \cdot a$, másrészt $ACB \sphericalangle = 60°$. Számítsuk ki a legkisebb kerületű ilyen háromszög területét.

K2 E1 3031. Valamely háromszög oldalaira teljesül, hogy $a=\sqrt{b\cdot c}$. Igaz-e, hogy ekkor α legfeljebb 60°?

K2 E1 3032. Valamely háromszög oldalaira teljesül, hogy $b^2 - c^2 = 2 \cdot a^2$. Mi következik ebből a háromszög α szögére?

K2 E1 3033. Valamely háromszög oldalaira fennáll, hogy $b^2 + c^2 = 2 \cdot a^2$. Mi következik ebből a háromszög α szögére?

Nehezebb feladatok

K2 E1 3034. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög oldalai $a = n^2 + 3 \cdot n + 3$, $b = n^2 + 2 \cdot n$, $c = 2 \cdot n + 3$ egység hosszúságúak, ahol $n > 1$ egész szám, akkor a háromszög egyik szöge 120°-os.

K2 E1 3035. Egy háromszög oldalainak a hosszúsága rendre $x^2 + x + 1$; $2 \cdot x + 1$ és $x^2 - 1$, egység, ahol $x > 1$ valós szám. Bizonyítsuk be, hogy e háromszög legnagyobb szöge 120°-os.

E2 V1 3036. Legyen x tetszőleges valós szám és legyenek egy háromszög oldalainak hosszúságai:

$\sqrt{x^2-x+1}$; $\sqrt{x^2+x+1}$ és $\sqrt{4\cdot x^2+3}$ egység.

Számítsuk ki a háromszög területét.

E2 V1 3037. Az ABC háromszögben $AB = 18$ egység míg az AE szögfelező hossza $4\sqrt{15}$ egység és $EC = 5$ egység. Határozzuk meg az ABC háromszög kerületét.

E2 V1 3038. Egy gömb középpontja az O pont, a gömb AB húrja az OC sugarat a D pontban metszi úgy, hogy a $CDA \sphericalangle = 120°$. Határozzuk meg azon kör sugarát, amelynek az AD és DC egyenesek érintői, míg a gömb megfelelő AC ívével szintén egy közös pontja van a körnek! Adott még az $OC = 2$ egység és $OD = \sqrt{3}$ egység.

E2 V2 3039. Határozzuk meg az $ABCD$ gúla maximális térfogatát, ha tudjuk, hogy:
$DA \leq 4$, $DB \geq 7$, $DC \geq 9$, $AB = 5$, $BC \leq 6$, $AC \leq 8$.

E2 V2 3040. A térben az e egyenesen az A, B és C pontok rendre ebben a sorrendben helyezkednek el úgy, hogy $AB = 27$ egység és $BC = 18$ egység. Határozzuk meg az e és az f egyenesek távolságát, ha az f egyenes távolsága az A, B és C pontoktól rendre 17, 10 és 8 egység.

A szinusztétel és a koszinusztétel alkalmazása

A következő feladatok megoldásában a szinusztételt és a koszinusztételt gondoljuk alkalmazni, egyéb matematikai ismereteket is felhasználva. Azonban a feladatokat sokszor csak az említett tételek egyikének a felhasználásával is meg lehet oldani.

Alapvető feladatok

K2 3041. Egy paralelogramma egyik oldalának hossza 28 cm, egyik átlójának hossza 57 cm. Az adott átló és az adott oldal által bezárt szög 24°18′. Számítsuk ki a másik oldal és a másik átló hosszát.

K2 3042. Egy paralelogramma egyik átlójának hossza 8,4 cm, ez a paralelogramma 4,8 m hosszú oldalával 37°24′-os szöget zár be. Számítsuk ki a paralelogramma másik oldalának hosszát, a paralelogramma területét és a szögeit.

K2 3043. Egy körben a kör egy pontjából kiinduló 12 cm, illetve 15 cm hosszú húrok 42°18′-es szöget zárnak be. Mekkora a kör sugara?

K2 3044. Egy háromszög oldalai 10 cm, 12 cm és 15 cm hosszúak. Mekkora a 15 cm-es oldalhoz tartozó körszelet területe a háromszög köré írt körben?

K2 3045. Egy háromszög egyik oldala 12 cm, a vele szemközti szög 82,82°, míg a másik két oldalának összege 18 cm. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

K2 3046. Egy háromszög egyik oldala 11 cm, a vele szemközti szög 34°11′, a másik két oldal hosszának különbsége 6 cm. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

K2 **3047.** Egy háromszög kerülete 48 cm, egyik oldala 11 cm hosszú és ezzel az oldallal szemközti szöge 20,3°-os. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

K2 **3048.** Egy háromszögben két oldal hosszának összege 42 cm. A harmadik oldalának a hossza 25 cm és ezzel szemben 71,44°-os szög van a háromszögben. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

K2 **3049.** Egy háromszög köré írt kör sugara 7,5 cm, két oldalának összege 22 cm, ugyanezen két oldal által bezárt szöge 47,17°. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

K2 **3050.** Egy háromszög területe 3060 cm^2, egyik oldalának hossza 109 cm, míg az egyik, nem a megadott oldallal szemközti szöge 66°59′-es. Határozzuk meg a háromszög többi oldalának a hosszát és a többi szögét.

K2 **3051.** Egy háromszög két oldalának a hossza 80 cm, illetve 52 cm. A háromszög területe 2016 cm^2. Határozzuk meg a háromszög harmadik oldalának a hosszát és a szögeit.

K2 **3052.** Egy háromszög területe 84 cm^2, két oldalának összege 28 cm és a harmadik oldallal szemközti szög 59,49°-os. Határozzuk meg a háromszög oldalainak hosszát és a többi szögét.

K2 **3053.** Egy háromszög területe 3150 cm^2, két oldal hosszának különbsége 35 cm, a harmadik oldallal szemközti szög 75°45′. Határozzuk meg a háromszög oldalainak a hosszát és a többi szögét.

K2 **3054.** Egy háromszögben az 51,32°-os szögének szögfelezője a szemközti oldalt 4 cm-es és 3 cm-es részekre osztja. Mekkorák a háromszög ismeretlen szögei és oldalai?

Összetettebb feladatok

K2 **3055.** Három, egymást páronként kívülről érintő kör sugarai 8 cm, 5 cm, illetve 7 cm. Határozzuk meg a három kör közötti síkidom területét.

K2 **3056.** Egy háromszögben az a és b oldalak hosszára fennáll, hogy $a^2 + b^2 = 400$ és $a \cdot b = 192$, míg a harmadik oldallal szemközti szög 78,58°. Számítsuk ki a háromszög ismeretlen oldalait és szögeit.

K2 **3057.** Egy háromszög területe 3060 cm^2, az egyik oldal hossza 102 cm-es és az ezzel szemközti szöge 66,99°-os. Határozzuk meg a háromszög oldalainak a hosszát és a többi szögét.

K2 **3058.** Egy háromszög két oldalának a négyzetösszege 193 cm^2, a harmadik oldala 15 cm-es, és a harmadik oldallal szemközti szöge 100,98°-os. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

K2 **3059.** Valamely háromszög területe 10,6 dm^2, az egyik szöge 62,72°-os és a körülírt körének sugara 3,2 dm. Határozzuk meg a háromszög oldalainak a hosszát.

K2 **3060.** Az M és az N tereppontok távolsága közvetlenül nem mérhető meg. Ezért kitűztük az $AM = 54$ m, $BM = 60$ m távolságokat, amelyek egy egyenesbe esnek, továbbá megmértük az $MAN \sphericalangle = 130°$ és $NBM \sphericalangle = 109°$ szögeket. Mekkora az M és N tereppontok távolsága?

K2 GY 3061. Milyen magas az az épület, amely a lábától egyenletesen lejtő úton mért 24 m távolságból 35°50′, és a lejtőn 28 m-rel lejjebbről 19°30′ -es szög alatt látszik. Mekkora a lejtő hajlásszöge?

K2 3062. Egy háromszögben az egyik oldal hossza 18 cm, a hozzá tartozó súlyvonal hossza 10 cm, az oldalon levő egyik szög 36,28°. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

K2 E1 3063. Valamely háromszögben az egyik oldal 8 cm hosszú, ezen oldallal szemközti szöge 41,41° és az oldalhoz tartozó súlyvonal hossza 10 cm. Határozzuk meg a háromszög ismeretlen oldalainak és szögeinek a nagyságát.

K2 E1 3064. Valamely háromszögben az egyik oldal hossza 16 cm, a hozzá tartozó súlyvonal hossza 9,5 cm, az oldallal szemközti szög 75,38°-os. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

K3 E1 3065. Egy háromszög két oldala 4, illetve 12 egység, a közbezárt szögük szögfelezőjének hossza 3 egység. Számítsuk ki a háromszög harmadik oldalának hosszát és a háromszög szögeit!

K2 E1 3066. Egy háromszög két oldalának hosza 24 cm, illetve 36 cm, a köztük levő szögfelező 20 cm hosszú. Mekkorák a háromszög ismeretlen szögei és az ismeretlen oldala?

A következő feladatokban a, b, és c egy háromszög oldalainak a hosszúságát jelenti és velük szemben rendre α, β és γ szögek találhatók a háromszögben.

K2 E1 3067. Valamely háromszög szögeire teljesül, hogy $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = 2 \cdot \operatorname{ctg}\gamma$. Igazoljuk, hogy ekkor a háromszög oldalaira fennáll a következő egyenlőség: $a^2 + b^2 = 2 \cdot c^2$!

K2 E1 3068. Egy háromszög szögeire fennáll a $\operatorname{ctg}\alpha = 2 \cdot (\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)$ egyenlőség. Milyen összefüggés van a háromszög oldalai között?

K2 E1 3069. Igazoljuk, hogy ha egy háromszögben fennáll $\alpha = 2 \cdot \beta$, akkor teljesül, hogy $a^2 - b^2 = b \cdot c$.

E3 3070. Valamely háromszög szögeire fennáll, hogy

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 2 \cdot \sin\alpha.$$

Igazoljuk, hogy a háromszög egyenlő szárú és derékszögű.

IV

Nehezebb feladatok

E2 3071. Egy háromszög szögeinek tangensei úgy aránylanak egymáshoz, mint 1 : 2 : 3. Hogyan aránylanak egymáshoz a háromszög oldalai?

E2 3072. Egy kör M pontjából három húrt húztunk meg, amelyek hosszai $MN = 1$ egység, $MP = 6$ egység és $MQ = 2$ egység, másrészt $NMP \sphericalangle = PMQ \sphericalangle$. Határozzuk meg a kör sugarát.

E2 3073. Egy kör A pontjából húzzuk meg az $AM = 1$ egység és az $AN = 2$ egység hosszúságú húrokat. Húzzuk meg az MAN szög szögfelező egyenesét, ez a P pontban metszi a kört! Ismert, hogy $AP = 4$ egység. Határozzuk meg a kör sugarát.

E2 V2 3074. Igazoljuk, hogy tetszőleges négyszögre fennáll a következő egyenlőség:
$e^2 \cdot f^2 = a^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot d^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos(\alpha + \gamma)$,
ahol e és f a négyszög átlóinak hossza, a, b, c, d a négyszög oldalainak a hossza, α az a és a d oldalak által bezárt szög, míg γ a b és c oldalak által bezárt szöge a négyszögnek. (Bretschneider tétele, Carl Anton Bretschneider (1808–1878) német matematikatanár volt.)

E2 V2 3075. Legyen egy konvex négyszög szemközti oldalai a, c, illetve b, d, az átlói e és f. Igazoljuk, hogy ekkor

$$a \cdot c + b \cdot d \geq e \cdot f,$$

ahol az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a négyszög húrnégyszög.
(Az általánosított Ptolemaiosz-tétel. Klaudiosz Ptolemaiosz (kb.100–kb.170) híres alexandriai görög matematikus, csillagász és geográfus volt.)

Néhány könnyű területszámítási feladat

Szinusztételt, illetve koszinusztételt nem igénylő könnyű feladatok

K1 3076. Egy háromszög két oldala 14, 6 cm, illetve 8,2 cm hosszú. E két oldal által bezárt szög 54,6°. Mekkora a háromszög területe?

K1 3077. Egy háromszög két oldala 7 cm, illetve 10,2 cm hosszúságú. Mekkora szöget zárnak be ezen oldalak, ha a háromszög területe 24,5 cm^2?

K1 3078. Egy háromszög területe 16,8 cm^2, egyik oldal 7,2 cm, ezen az oldalon levő egyik szöge 34,27°. Mekkora az adott szög melletti ismeretlen oldal hossza?

K1 3079. Egy rombusz oldalai 5 cm hosszúak és egyik szöge 65,2°-os. Mekkora a rombusz területe?

K1 3080. Egy paralelogramma két oldalának hossza 45 cm, illetve 39 cm, az általuk bezárt szög 48,5°. Mekkora a paralelogramma területe?

K1 3081. Egy paralelogramma két átlója 18,2 cm, illetve 34,6 cm hosszú, az általuk bezárt szög 49,8°. Mekkora a paralelogramma területe?

K1 3082. Egy paralelogramma átlóinak hossza e, illetve f, az átlóinak a hajlásszöge φ. Igazoljuk, hogy ekkor a paralelogramma t területe: $t = \frac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{2}$.

K2 3083. Legyen egy tetszőleges konvex négyszög két átlójának hossza e, illetve f, az átlók hajlásszöge φ. Igazoljuk, hogy ekkor a négyszög t területére fennáll a következő egyenlőség: $t = \frac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{2}$.

K1 3084. Egy háromszög két oldalának különbsége 3 cm, ezen oldalak által bezárt szög 36,88°. A háromszög területe 20 cm^2. Mekkorák a háromszög oldalai?

K1 3085. Egy háromszög két súlyvonala 5,4 cm és 8,1 cm hosszú, az általuk bezárt szög 74,2°. Mekkora a háromszög területe?

K1 **3086.** Osszuk fel a 6 cm sugarú kör kerületét 3 : 4 : 5 arányban. Kössük össze az osztáspontokat egymással és számítsuk ki az így keletkezett háromszög területét.

K2 **3087.** Bizonyítsuk be, hogy minden háromszögre fennáll:

$t = \frac{R^2}{2} \cdot (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$, ahol t a háromszög területe, R a köré írt kör sugara, α, β, γ a háromszög szögei.

Szinusztételt, illetve koszinusztételt igénylő könnyű feladatok

K1 **3088.** Egy háromszög egyik oldala 15,7 cm hosszú, az ezen fekvő egyik szög 86,2°, míg a szemben fekvő szöge 52,8°-os. Mekkora a háromszög területe?

K2 **3089.** Egy háromszögben két oldal aránya 3 : 4. A körülírt kör sugara 12 cm, a harmadik oldalhoz tartozó magassága 8 cm. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

K1 **3090.** Egy háromszög területe 1,5 hektár. Két szöge 48°45′ és 75°24′. Mekkorák a háromszög oldalai?

K1 **3091.** Legyenek egy háromszög oldalai a, b, illetve c hosszúságúak és az oldalakkal szemközti szögei rendre α, β, illetve γ. Igazoljuk, hogy ekkor a háromszög t területére fennáll, hogy: $t = \frac{c^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta}{2 \cdot \sin\gamma}$.

K2 **3092.** Legyenek egy háromszög oldalai a, b, illetve c hosszúságúak és az oldalakkal szemközti szögei rendre α, β, illetve γ, ezenkívül R a háromszög köré írt körének a sugara. Igazoljuk, hogy ekkor a háromszög t területére fennáll, hogy
$t = 2 \cdot R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$.

K2 **3093.** Legyenek egy háromszög oldalai a, b, illetve c hosszúságúak és az oldalakkal szemközti szögei rendre α, β, illetve γ, ezenkívül R a háromszög köré írt körének a sugara. Igazoljuk, hogy ekkor a háromszög t területére fennáll:
$t = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$.

K1 **3094.** Egy háromszög két oldalának összege 12 cm, az általuk bezárt szög 30°. A háromszög területe 8 cm^2. Mekkorák a háromszög oldalai?

K1 **3095.** Egy négyszög oldalai rendre 14 m, 25 m, 18 m és 15 m. Az első két oldal által bezárt szög 64,7°. Mekkora a négyszög területe?

K2 **3096.** Egy háromszög két oldalának aránya 3 : 5, az általuk bezárt szög 42,7°. A háromszög területe 250,4 cm^2. Mekkorák a háromszög oldalai?

K2 **3097.** Egy háromszög területe 42 cm^2. Két oldala 7,3 cm és 12,8 cm. Mekkora a harmadik oldala? Mekkorák a szögei?

K2 **3098.** Egy háromszög területe 58 dm^2. Egyik oldala 8,7 dm és az ezen az oldalon levő egyik szöge 42,15°. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

K2 **3099.** Egy háromszögben két oldal négyzetének összege 881 cm^2, e két oldal által bezárt szög 71,8°, a háromszög területe 190 cm^2. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

K2 **3100.** Egy háromszög területe 3 dm^2, egyik oldala 3,6 dm hosszú, míg a másik két oldal négyzetének összege 13 dm^2. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai?

Összegzési tételek alkalmazása

Bevezető alapfeladatok

E1 **3101.** Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:
a) $\cos(90° - \alpha)$; *b)* $\cos(180° - \alpha)$; *c)* $\cos(\alpha - 90°)$; *d)* $\cos(\alpha - 180°)$;
e) $\cos(270° - \alpha)$; *f)* $\cos(450° - \alpha)$; *g)* $\cos(540° - \alpha)$; *h)* $\cos(720° - \alpha)$.

E1 **3102.** *a)* $\cos(90° + \alpha)$; *b)* $\cos(180° + \alpha)$; *c)* $\cos(270° + \alpha)$; *d)* $\cos(450° + \alpha)$.

E1 **3103.** *a)* $\sin(90° - \alpha)$; *b)* $\sin(180° - \alpha)$; *c)* $\sin(270° - \alpha)$; *d)* $\sin(\alpha - 180°)$.

E1 **3104.** *a)* $\sin(90° + \alpha)$; *b)* $\sin(180° + \alpha)$; *c)* $\sin(270° + \alpha)$; *d)* $\sin(360° + \alpha)$.

E1 **3105.** *a)* $\cos 87° \cdot \cos 57° + \sin 87° \cdot \sin 57°$; *b)* $\cos 24° \cdot \cos 21° - \sin 24° \cdot \sin 21°$;
c) $\sin 79° \cdot \cos 19° - \cos 79° \cdot \sin 19°$; *d)* $\sin 43° \cdot \cos 17° + \cos 43° \cdot \sin 17°$.

E1 **3106.** *a)* $\sin 52° \cdot \cos 22° - \cos 52° \cdot \sin 22°$; *b)* $\cos 34° \cdot \cos 56° - \sin 34° \cdot \sin 56°$;
c) $\sin 276° \cdot \cos 66° - \cos 276° \cdot \sin 66°$; *d)* $\cos 69° \cdot \cos 24° + \sin 69° \cdot \sin 24°$.

E1 **3107.** Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket a valós változó azon értékeinél, amelyekre a kifejezés értelmezve van.
a) $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$; *b)* $\operatorname{tg}(180° + \alpha)$; *c)* $\operatorname{ctg}(90° - \alpha)$; *d)* $\operatorname{ctg}(90° + \alpha)$.

E1 **3108.** Igazoljuk, hogy minden x valós számra fennáll:
a) $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$; *b)* $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

E1 **3109.** Igazoljuk, hogy minden x valós számra fennáll.
a) $\sin x = 2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$; *b)* $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$!

Alapvető feladatok

Összegzési tételek (addíciós tételek)

E1 **3110.** Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:
a) $\sin(60° - \alpha) + \sin(60° + \alpha)$; *b)* $\cos(45° + \alpha) + \cos(45° - \alpha)$;
c) $\cos(60° + \alpha) + \cos(60° - \alpha)$; *d)* $\sin(30° - \alpha) + \sin(30° + \alpha)$.

E1 **3111.** Fejezzük ki tg α-val:
a) $\operatorname{tg}(45° + \alpha)$; *b)* $\operatorname{tg}(45° - \alpha)$.

E1 **3112.** Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:
a) $\sin(45° - \alpha) - \cos(30° + \alpha) + \sin^2 30° - \cos(45° + \alpha) + \sin(60° - \alpha) + \sin^2 60°$;
b) $\sin\alpha + \sin(\alpha + 120°) + \sin(\alpha + 240°)$.

E1 **3113.** Igazoljuk, hogy a következő egyenlőségek minden valós α és β értékekre teljesülnek:
a) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta$;
b) $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta$;
c) $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta$;
d) $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

E1 **3114.** Igazoljuk, hogy a következő egyenlőségek minden valós x és y számokra teljesülnek:

a) $\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin\dfrac{x+y}{2} \cdot \cos\dfrac{x-y}{2}$;

b) $\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos\dfrac{x+y}{2} \cdot \sin\dfrac{x-y}{2}$;

c) $\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos\dfrac{x+y}{2} \cdot \cos\dfrac{x-y}{2}$;

d) $\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin\dfrac{x+y}{2} \cdot \sin\dfrac{x-y}{2}$.

E2 **3115.** Igazoljuk, hogy a következő egyenlőségek minden valós x és y számokra teljesülnek.
a) $\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$; *b)* $\cos(x+y) \cdot \cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$.

E1 **3116.** Legyen $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{3}$ és $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{4}$. Határozzuk meg $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ pontos értékét.

E1 **3117.** Legyen $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$ és $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{3}$. Határozzuk meg
a) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$; *b)* $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ pontos értékét.

Kétszeres szögek

E1 **3118.** Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket a valós változók megengedett értékeire.

a) $\dfrac{\sin 2x}{2 \cdot \sin x}$; *b)* $\cos 2x + 2 \cdot \sin^2 x$; *c)* $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x$;

d) $\dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} - \sin x$; *e)* $\dfrac{2 \cdot (\sin x - \sin^3 x)}{\sin 2x}$; *f)* $\dfrac{4 \cdot (\sin^2 x - \sin^4 x)}{\sin^2 2x}$.

E2 **3119.** Bizonyítsuk be, hogy minden x valós számra teljesül a következő egyenlőtlenség:

a) $\sin x \le \dfrac{3}{4} - \dfrac{\cos 2x}{4}$; *b)* $\cos x \le \dfrac{3}{4} + \dfrac{\cos 2x}{4}$.

E1 **3120.** Fejezzük ki $\sin\alpha$-val, illetve $\cos\alpha$-val a következő kifejezéseket:
a) $\sin 3\alpha$; *b)* $\cos 3\alpha$; *c)* $\sin 4\alpha$; *d)* $\cos 4\alpha$.

E2 **3121.** Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket az α valós változó megengedett értékeire:

a) $\dfrac{\cos 3\alpha - \cos \alpha}{2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha}$; *b)* $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin \alpha}{2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha}$.

E2 **3122.** Igazoljuk, hogy a következő egyenlőségek fennállnak azon x valós számokra, amelyekre értelmezve vannak:

a) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{2 \cdot \operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg}^2 x - 1}$; *b)* $\operatorname{ctg} 2x = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg} x} = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \cdot \operatorname{tg} x}$;

c) $\sin 2x = \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{2 \cdot \operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg}^2 x + 1}$; *d)* $\cos 2x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{\operatorname{ctg}^2 x + 1}$.

E2 **3123.** Igazoljuk, hogy a következő egyenlőségek fennállnak azon x valós számokra, amelyekre értelmezve vannak:

a) $|\sin x| = \sqrt{\dfrac{1 - \cos 2x}{2}}$; *b)* $|\cos x| = \sqrt{\dfrac{1 + \cos 2x}{2}}$;

c) $\operatorname{tg} x = \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$; *d)* $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} = \dfrac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$;

e) $|\operatorname{tg} x| = \sqrt{\dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$; *f)* $|\operatorname{ctg} x| = \sqrt{\dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}}$.

E1 **3124.** Legyen $\sin \alpha = \dfrac{3}{5}$. Számítsuk ki $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{ctg} 2\alpha$ pontos értékét.

E1 **3125.** Legyen $\cos \alpha = \dfrac{12}{13}$. Számítsuk ki $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{ctg} 2\alpha$ pontos értékét.

E1 **3126.** Legyen $\operatorname{tg} x = \dfrac{2}{5}$. Számítsuk ki $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{ctg} 2\alpha$ pontos értékét.

Félszögek

E1 **3127.** Bizonyítsuk be, hogy a következő egyenlőségek fennállnak minden olyan x valós számra, amelyre értelmezve vannak:

a) $\sin x = 2 \cdot \sin \dfrac{x}{2} \cdot \cos \dfrac{x}{2}$; *b)* $\cos x = \cos^2 \dfrac{x}{2} - \sin^2 \dfrac{x}{2}$;

c) $\operatorname{tg} x = \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}} = \dfrac{2 \cdot \operatorname{ctg} \dfrac{x}{2}}{\operatorname{ctg}^2 \dfrac{x}{2} - 1}$; *d)* $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 \dfrac{x}{2} - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg} \dfrac{x}{2}} = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}}{2 \cdot \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}}$;

e) $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$; *f)* $\operatorname{ctg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$;

g) $\left|\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$; *h)* $\left|\operatorname{ctg} \dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$.

E1 **3128.** Legyen $\cos\alpha = \frac{7}{25}$. Számítsuk ki $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ pontos értékét.

E1 **3129.** Legyen $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{9}{41}$ és $0 < \alpha < \pi$. Számítsuk ki $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ pontos értékét.

Gyakorlófeladatok

Összegzési tételek

E1 **3130.** Igazoljuk, hogy minden valós x és y számra fennállnak a következő egyenlőségek:

a) $\sin x \cdot \sin(x+y) + \cos x \cdot \cos(x+y) = \cos y$;
b) $\cos x \cdot \sin(x+y) - \sin x \cdot \cos(x+y) = \sin y$;
c) $\sin x \cdot \sin(x-y) + \cos x \cdot \cos(x-y) = \cos y$;
d) $\cos x \cdot \sin(x-y) - \sin x \cdot \cos(x-y) = -\sin y$;
e) $\sin(x+y) + \cos(x-y) = (\sin x + \cos x) \cdot (\sin y + \cos y)$;
f) $\sin(x-y) + \cos(x+y) = (\sin x + \cos x) \cdot (\cos y - \sin y)$;
g) $\sin(x+y) \cdot \cos(x-y) = \sin x \cdot \cos x + \sin y \cdot \cos y$;
h) $\sin(x-y) \cdot \cos(x+y) = \sin x \cdot \cos x - \sin y \cdot \cos y$.

E1 **3131.** Egyszerűsítsük a következő kifejezést:
$\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) - \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta$.

E1 **3132.** Igazoljuk, hogy

$$4 \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot \sin^2\alpha - 3.$$

E1 **3133.** Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:
$\cos^2 x + \cos^2(30° + x) - 2 \cdot \cos 30° \cdot \cos x \cdot \cos(30° + x)$.

E1 **3134.** Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést az x valós szám azon értékeire, amelyekre a kifejezés értelmezve van:

$$\frac{\sin^2(45°+x) - \sin^2(45°-x)}{\cos^2(45°+x) - \cos^2(45°-x)}.$$

E1 **3135.** Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket az α és β valós számok azon értékeire, amelyekre a kifejezések értelmezve vannak:

a) $\dfrac{\sin(30°+\alpha) + \cos(30°-\alpha) - \sin(60°-\alpha) + \cos(60°+\alpha)}{\sin\alpha + \cos\alpha}$;

b) $\cos(36° + \alpha) \cdot \cos(54° - \alpha) - \sin(36° + \alpha) \cdot \sin(54° - \alpha)$;

c) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} - \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$;

d) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} \cdot \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$;

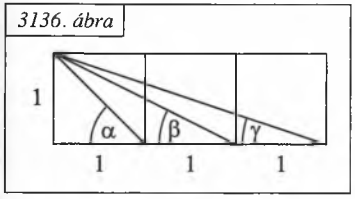
e) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$;

f) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}-\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$;

g) $\operatorname{tg}(45°+\alpha)-\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$;

h) $\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}\cdot\operatorname{ctg}(45°-\alpha)$.

3136. ábra



E1 **3136.** Bizonyítsuk be, hogy az ábrán látható szögekre fennáll, hogy $\alpha+\beta+\gamma=90°$.

E1 **3137.** Legyen $\alpha=20°$ és $\beta=25°$. Számítsuk ki a következő kifejezés pontos értékét:
$(1+\operatorname{tg}\alpha)\cdot(1+\operatorname{tg}\beta)$.

Kétszeres szögek

E1 **3138.** Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:
a) $2\cdot\sin 15°\cdot\cos 15°$; *b)* $\cos^2 15°-\sin^2 15°$; *c)* $2\cdot\sin 105°\cdot\cos 105°$;
d) $\cos^2 75°-\sin^2 75°$; *e)* $2\cdot\sin 165°\cdot\cos 165°$; *f)* $\sin 75°\cdot\cos 75°$.

E1 **3139.** Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket minden olyan x valós számra, amelyre a kifejezések értelmezve vannak:

a) $\dfrac{\sin^2 x\cdot\operatorname{ctg} x}{\sin 2x}$; *b)* $\dfrac{\sin 2x}{2\cdot\sin x}-\sin x\cdot\operatorname{ctg} x$;

c) $(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)\cdot\sin 2x$; *d)* $\sin 2x-2\cdot\dfrac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

E1 **3140.** Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket minden olyan x valós számra, amelyre a kifejezések értelmezve vannak:

a) $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$; *b)* $\dfrac{1-\cos 2x}{2\cdot\sin x}$; *c)* $\dfrac{1+\cos 2x}{\sin 2x}$; *d)* $\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$.

E1 **3141.** Igazoljuk, hogy fennállnak a következő egyenlőségek minden x valós számra:
a) $1-(\sin x-\cos x)^2=\sin 2x$; *b)* $(\sin x+\cos x)^2-\sin 2x=1$;
c) $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$; *d)* $4\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x=\sin 4x$.

E1 **3142.** Igazoljuk, hogy fennállnak a következő egyenlőségek minden olyan x valós számra, amelyre a kifejezések értelmezve vannak:
a) $\operatorname{ctg} x-\sin 2x=\operatorname{ctg} x\cdot\cos 2x$; *b)* $\sin 2x-\operatorname{tg} x=\cos 2x\cdot\operatorname{tg} x$;
c) $(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)\cdot\sin 2x=2$; *d)* $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=2\cdot\operatorname{ctg} x$.

E1 **3143.** Számítsuk ki $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$, $\operatorname{ctg} 2x$ pontos értékét, ha $\cos x=\dfrac{5}{13}$ és $0<x<90°$.

E1 **3144.** Számítsuk ki $\sin 2x$ pontos értékét, ha $\operatorname{tg} x = \frac{6}{5}$ és $180° < x < 270°$.

E1 **3145.** Számítsuk ki $\cos 2x$ pontos értékét, ha $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

E1 **3146.** Számítsuk ki $\cos 2x$ pontos értékét, ha fennáll, hogy $2 \cdot \operatorname{tg}^2 x - 5 \cdot \operatorname{tg} x + 2 = 0$ és $0 < x < 45°$.

E1 **3147.** Számítsuk ki $\operatorname{tg} x$ pontos értékét, ha $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

E1 **3148.** Mekkora $\sin x$ pontos értéke, ha $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 4$?

E1 **3149.** Számítsuk ki $\operatorname{tg} \frac{x}{4}$ pontos értékét, ha $\cos \alpha = -0{,}6$ és $180° < \alpha < 270°$.

E1 **3150.** Számítsuk ki $\sin 4x$ pontos értékét, ha $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$.

E1 **3151.** Igazoljuk, hogy $\sin\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}$.

E1 **3152.** Bizonyítsuk be, hogy $8 \cdot \cos 10° \cdot \cos 20° \cdot \cos 40° = \operatorname{ctg} 10°$.

K2 E1 **3153.** Igazoljuk, hogy

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 8\alpha \cdot \cos 16\alpha = \frac{\sin 32\alpha}{32 \cdot \sin\alpha},$$

ha $\alpha \neq k \cdot \pi$, ahol k tetszőleges egész szám.

K2 **3154.** Számítsuk ki a következő szám pontos értékét:

$$\cos\frac{\pi}{65} \cdot \cos\frac{2\pi}{65} \cdot \cos\frac{4\pi}{65} \cdot \cos\frac{8\pi}{65} \cdot \cos\frac{16 \cdot \pi}{65} \cdot \cos\frac{32 \cdot \pi}{65}.$$

E2 **3155.** Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám és x olyan valós szám, amelyre $x \neq k \cdot \pi$, ahol k tetszőleges egész szám, akkor

$$\cos x \cdot \cos(2x) \cdot \cos(2^2 x) \cdots \cos(2^n x) = \frac{\sin(2^{n+1} x)}{2^{n+1} \cdot \sin x}.$$

További feladatok

E1 **3156.** Igazoljuk, hogy $\sin^2(45° - \alpha) + \sin 2\alpha = \cos^2(45° - \alpha)$.

E1 **3157.** Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $\cos^2(45° - \alpha) - \sin^2(45° - \alpha) - \sin 2\alpha$;

b) $\operatorname{tg}(45° + \alpha) + \operatorname{tg}(45° - \alpha) - \frac{2}{\cos 2\alpha}$;

c) $\frac{\operatorname{tg}^2(45° + \alpha) - 1}{\operatorname{tg}^2(45° + \alpha) + 1}$.

E1 **3158.** Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $\cos^2\alpha + \cos^2(60° + \alpha) + \cos^2(60° - \alpha)$;

b) $\sin^2\alpha + \sin^2(120° + \alpha) + \sin^2(120° - \alpha)$.

E1 **3159.** Igazoljuk, hogy fennállnak a következő egyenlőségek minden olyan x valós számra, amelyre a kifejezések értelmezve vannak:

a) $\operatorname{tg}^2\left(45°+\frac{x}{2}\right)=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$; *b)* $\operatorname{tg}^2\left(45°-\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$;

c) $\operatorname{tg}\left(45°-\frac{x}{2}\right)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$; *d)* $\operatorname{tg}\left(45°+\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1-\sin x}{\cos x}=1$.

E1 **3160.** Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést, és mutassuk meg, hogy nem függ x-től.
$\cos^2(\alpha+x)+\cos^2 x-2\cdot\cos\alpha\cdot\cos x\cdot\cos(\alpha+x)$.

E1 **3161.** Számítsuk ki a 15°, 75° és a 105°-os szögek szinuszának, koszinuszának, tangensének és kotangensének pontos értékét.

E1 **3162.** Igazoljuk, hogy $\sin 75° - \sin 15° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

E1 **3163.** Igazoljuk, hogy $\operatorname{tg} 15° + \operatorname{ctg} 15° = 4$.

E1 **3164.** Igazoljuk, hogy
$\operatorname{tg} 135° + (1 - \cos 15°)\cdot(1 + \sin 75°) + \operatorname{ctg} 45° + \cos 75°\cdot\cos 15°\cdot\operatorname{ctg} 15° = 1$.

E1 **3165.** Számítsuk ki a 18°-os és a 72°-os szögek szinuszának, koszinuszának, tangensének és kotangensének pontos értékét.

E1 **3166.** Igazoljuk, hogy $\cos 36° - \sin 18° = \frac{1}{2}$.

E1 **3167.** Igazoljuk, hogy $\sin 18°\cdot\sin 234° = -\frac{1}{4}$.

E1 **3168.** Számítsuk ki a következő kifejezés pontos értékét:
$\frac{\sqrt{3}}{\cos 290°}+\frac{1}{\sin 250°}$.

E1 **3169.** Igazoljuk, hogy ha $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$ és $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, akkor
$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\alpha=1$.

E1 **3170.** Legyen α és β hegyesszög, amelyekre $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7}$ és $\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{79}$.
Igazoljuk, hogy $5\cdot\alpha+2\cdot\beta=45°$.

E1 **3171.** Legyen α és β hegyesszög, amelyekre $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{27}}$ és $\sin\beta=\sqrt{\frac{3}{28}}$. Bizonyítsuk be, hogy $\alpha+\beta=30°$.

E1 **3172.** Igazoljuk, hogy ha $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7}$, $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ és $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, akkor $\alpha+2\cdot\beta=\frac{\pi}{4}$.

Geometriai feladatok

E1 **3173.** Egy háromszög két szögének aránya $1:2$, és ezen szögekkel szemközti oldalainak a hossza 6 cm, illetve 8 cm. Mekkorák a háromszög szögei és ismeretlen oldala?

E1 **3174.** Egy háromszög két oldala 5 cm, illetve 6 cm, az általuk bezárt szög 60°. Mekkorák a háromszög ismeretlen szögei?

E1 **3175.** Egy háromszögben két oldal aránya $2:3$, és az általuk bezárt szög 50°, a harmadik oldal 7 cm. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

E1 **3176.** Egy egyenlő szárú, egységnyi befogójú derékszögű háromszög belsejében helyezkedik el a P pont úgy, hogy a P pontból az egyik befogó 90°-os, a másik befogó 120°-os szög alatt látszik. Mekkora a P pont távolsága a derékszögű csúcstól?

E1 **3177.** Vízszintes úttesten egy 120 m magas felhőkarcolóhoz közeledünk. 300 m-t megtéve, az épületet 45°-kal nagyobb emelkedési szögben látjuk, mint az út kezdetén. Menynyire közelítettük meg a felhőkarcolót?

E1 **3178.** Egy háromszög két oldalának aránya $2:3$, és ezen oldalakkal szemközti szögeinek aránya $1:3$. A háromszög harmadik oldalának a hossza 8 cm. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

E1 **3179.** Egy háromszög két oldalának hossza 12 cm, illetve 8 cm, és ezen két oldallal szemközti szögeinek aránya $3:2$. Mekkorák a háromszög szögei és a harmadik oldala?

E1 **3180.** Egy háromszög két oldalának hossza 8 cm és 5 cm, az általuk bezárt szög kétszer akkora, mint a rövidebb adott oldallal szemközti szög. Mekkorák a háromszög szögei?

E1 **3181.** Egy háromszög köré írt kör sugara 8 cm, egyik oldala 12 cm, a másik két oldal aránya $4:3$. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

E1 **3182.** Egy háromszög alapját a hozzá tartozó magasság egy 3 cm-es és egy 8 cm-es darabra bontja. A háromszögnek az alap 3 cm-es darabja mellett levő szög kétszerese a 8 cm-es darabon fekvő szögnek. Mekkorák a háromszög szögei és az ismeretlen oldalai?

E1 **3183.** Egy háromszög α és β szögeire fennáll, hogy $(1 + \operatorname{tg}\alpha)\cdot(1 + \operatorname{tg}\beta) = 2$. Mekkora a háromszög harmadik szöge?

E2 **3184.** Egy szimmetrikus trapéz alapjai 30 cm, illetve 20 cm-esek. A hosszabbik alapjának egyik végpontjából a rövidebbik alap 26°34′-es szögben látszik.
Mekkora a trapéz területe?

E2 **3185.** Egy kör 60°-os középponti szögét osszuk fel két részre úgy, hogy a részszögekhez tartozó húrok aránya $2:3$ legyen! Mekkora a két részszög nagysága?

E2 **3186.** Az ABC háromszögben a szokásos jelölésekkel $\alpha = 60°$, $\beta = 20°$ és $AB = 1$. Mekkora az $\frac{1}{AC} - BC$ kifejezés pontos értéke?

E2 **3187.** Egy háromszög szögei egy számtani sorozat egymást követő elemei. Mekkorák a háromszög szögei, ha szinuszaik összege $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$?

E2 **3188.** Egy háromszög szögei tangenseinek aránya $3:4:5$. Határozzuk meg a háromszög oldalainak az arányát.

E2 GY 3189. Ismerjük az A, B, C háromszögelési pontok helyzetét a síkon. $AC = a = 3702{,}5$ m, $BC = b = 2684{,}6$ m, $ACB \sphericalangle = 122°59'$. Határozzuk meg a P pontnak a C ponttól való távolságát, ha a P pontból az AC szakasz $APC \sphericalangle = 87°43'$, míg a BC szakasz $BPC \sphericalangle = 65°8'$-es szög alatt látszik.
(Egy Snellius-Pothenot feladat. Willebrord van Roijen Snell (1580-1626), latinosan Snellius, holland tudós, míg Laurent Pothenot (1660-1732) francia tudós volt.)

A háromszög trigonometriájáról

1. rész

E1 3190. Tegyük fel, hogy egy háromszög szögeire fennáll, hogy $\operatorname{tg}\beta \cdot \sin^2\gamma = \operatorname{tg}\gamma \cdot \sin^2\beta$. Igazoljuk, hogy ekkor a háromszög egyenlő szárú vagy derékszögű.

E1 3191. Egy háromszög szögei α, β, γ. Bizonyítsuk be, hogy ha $2 \cdot \cos\alpha = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

E1 3192. Milyen tulajdonságú az a háromszög, amelyre fennáll a szokásos jelölések mellett, hogy

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}} \quad \text{és} \quad a \neq b?$$

E1 3193. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben $\sin\gamma = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$, akkor a háromszög derékszögű.

E2 3194. Egy háromszög szögeire fennáll, hogy $\dfrac{2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$. Igazoljuk, hogy ekkor a háromszög egyenlő szárú.

E2 3195. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög szögeire fennáll, hogy $\sin\gamma - \cos\alpha = \cos\beta$, akkor a háromszög derékszögű.

E2 3196. Igazoljuk, hogy egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha hegyesszögeire fennáll, hogy $\sin\alpha + \sin\beta = \cos\alpha + \cos\beta$.

E2 V 3197. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög szögeire fennáll a $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$ összefüggés, akkor a háromszög derékszögű.

E2 V 3198. Igazoljuk, hogy bármely háromszög szögeire fennáll

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \leq \frac{1}{8},$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha a háromszög szabályos.

2. rész

Bizonyítsuk be, hogy ha α, β, γ egy háromszög szögei a következő feladatokban, akkor fennáll, hogy:

E2 V 3199. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4 \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\dfrac{\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\gamma}{2}$.

E2 V 3200. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4 \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin\dfrac{\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\gamma}{2} + 1$.

E2V 3201. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$.

E2V 3202. $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma+\dfrac{1}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}$.

E2V 3203. $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$.

E2V 3204. $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-4\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma-1$.

E2V 3205. $\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}2\beta+\operatorname{tg}2\gamma=\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}2\beta\cdot\operatorname{tg}2\gamma$.

E2V 3206. $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$.

E2V 3207. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2\cdot(1+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)$.

E2V 3208. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$.

E2V 3209. $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\beta}{2}+\sin^2\dfrac{\gamma}{2}=1-2\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

E2V 3210. $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\beta}{2}+\cos^2\dfrac{\gamma}{2}=2\cdot\left(1+\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}\right)$.

3. rész

Bizonyítsuk be, hogy ha α, β, γ egy háromszög szögei, t a háromszög területe, s a háromszög félkerülete, R a háromszög köré írt körének sugara, r a háromszögbe írt kör sugara a következő feladatokban, akkor fennáll, hogy:

E1 3211. $t=2\cdot R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$.

E1 3212. $r=4\cdot R\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

E1 3213. $t=r^2\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$.

E1 3214. $t=s^2\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$.

E1 3215. $s=4\cdot R\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}$.

E1 3216. *a)* $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)\cdot(s-c)}{b\cdot c}}$; *b)* $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{s\cdot(s-a)}{b\cdot c}}$.

E1 3217. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)\cdot(s-c)}{s\cdot(s-a)}}$.

E1 3218. $f_a=\dfrac{2\cdot b\cdot c}{b+c}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

(Itt f_a az a oldalhoz tartozó szögfelező.)

E1 3218. $\sin\alpha=\dfrac{2}{b\cdot c}\cdot\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$.

E1 **3220.** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{s-a}$.

E1 **3221.** $r=\sqrt{\frac{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}{s}}$.

E1 **3222.** $t=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$.

(Ez a Hérón-féle formula. Hérón az 1. században élt alexandriai görög tudós, mérnök, feltaláló, fizikus és matematikus. *Geometrika* című tankönyvében bukkant fel először ez az összefüggés.)

E1 **3223.** *a)* $r_a=\frac{1}{s-a}$; *b)* $r_a=s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

(Itt r_a a háromszög a oldalához írt kör sugara.)

E1 **3224.** $t=\sqrt{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}$.

E1 **3225.** *a)* $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{s}{R}$; *b)* $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+\frac{r}{R}$.

E1 **3226.** $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

(Ez a tangenstétel.)

E1 **3227.** *a)* $\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$; *b)* $\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

(Ezek a Mollweide-féle formulák, avagy Gauss ikertételei. Carl Brandon Mollweide (1774–1825) német matematikus, míg Carl Friedrich Gauss (1777–1855) német matematikus, a „matematikusok fejedelme" volt.)

IV Trigonometrikus egyenletek II. rész

Vázoljuk a következő függvények grafikonjait.

E1 **3228.** *a)* $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2\cdot\sin x}$; *b)* $f(x)=\frac{1+\cos 2x}{2\cdot\cos x}$; *c)* $f(x)=\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$.

E1 **3229.** *a)* $f(x)=\cos^2 x$; *b)* $f(x)=\sin^2 x$; *c)* $f(x)=\sin x+\cos x$.

Alapvető feladatok

Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán.

E1 **3230.** *a)* $\sin 2x=\sin x$; *b)* $\sin 2x+\sin x=0$; *c)* $\sin 2x=\sqrt{2}\cdot\sin x$.

E1 **3231.** *a)* $(\sin x+\cos x)^2=2\cdot\sin 2x$; *b)* $(\sin x-\cos x)^2=\sin 2x$.

E1 **3232.** *a)* $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$; *b)* $4 \cdot \cos x = \frac{1}{\sin x}$.

E1 **3233.** $\sin(x + 30°) \cdot \cos(x + 30°) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

E1 **3234.** $\sin(x + 15°) \cdot \cos(x + 15°) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

E1 **3235.** $\sin 2x = \operatorname{tg} x$.

E1 **3236.** $\cos 2x - \sin x = 1$.

E1 **3237.** $\cos 2x + \sin x = 1$.

E1 **3238.** $3 \cdot (1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$.

E1 **3239.** $1 + \cos 2x + \sin 2x = 0$.

E1 **3240.** $\cos 2x = \sin x + \cos x$.

E1 **3241.** $\cos x + \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{4}$.

E1 **3242.** $\cos x + \cos \frac{x}{2} = -1$.

E1 **3243.** $\cos x - \sin \frac{x}{2} = 1$.

E1 **3244.** $\cos x + \sin \frac{x}{2} = 1$.

E1 **3245.** $\cos x - \cos \frac{x}{2} = -1$.

E1 **3246.** $\sin^2 x + \frac{1}{2} \cdot \sin 2x = 1$.

E1 **3247.** $\sin 2x + 2 \cdot \sin^2 x = 1$.

E1 **3248.** $\sin 2x = 2 \cdot \sin(x + \pi) \cdot \cos(x + \pi)$.

E1 **3249.** $3 \cdot \sin^2 2x + 7 \cdot \cos 2x = 3$.

E1 **3250.** $\sin^2 x - 3 \cdot \cos^2 x + 2 \cdot \sin 2x = 1$.

E1 **3251.** $4 \cdot \sin^2 x + \sin^2 2x = 3$.

E1 **3252.** $\sin^2 x - \cos 2x = 2 - \sin 2x$.

E1 **3253.** $\cos^2 x + 4 \cdot \sin^2 x = 2 \cdot \sin 2x$.

E1 **3254.** $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2 \cdot \sin 2x$.

E1 **3255.** $\operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{ctg}^2 x + 1) \cdot \sqrt{3} = 4$.

E1 **3256.** *a)* $3 \cdot \sin^2 x + \sin 2x + \cos^2 x = 1$; *b)* $\sin^2 x + 3 \cdot \cos^2 x - 2 \cdot \sin 2x = 0$.

E1 **3257.** $\sqrt{3} \cdot \sin 2x - 2 \cdot \sin^2 x = -1$.

E1 **3258.** $2 \cdot \cos 2x = 8 \cdot \cos x - 1$.

E1 **3259.** $\sqrt{3} \cdot \cos^2 x - 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x - \sqrt{3} \cdot \sin^2 x = 0$.

E1 **3260.** $\sqrt{2}\cdot\cos 2x=\sin x+\cos x$.

E1 **3261.** $\sin^2 2x-\sin^2 x=\frac{1}{4}$.

E1 **3262.** $8\cdot\sin^2 x+6\cdot\cos^2 x=13\cdot\sin 2x$.

E1 **3263.** $9\cdot\cos^4 x-\sin^4 x=2\cdot\sin^2 2x$.

E1 **3264.** $(1-\cos 2x)^2+(1+\sin 2x)^2=1$.

E1 **3265.** $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=\operatorname{tg} x$.

E1 **3266.** $\left(\left(\operatorname{tg}^2 x\right)^{\frac{1+\cos 2x}{2}}\right)^{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{1}{3}$.

E1 **3267.** $\operatorname{tg} 3x=\sin 6x$.

E1 **3268.** $\sin 2x+2\cdot\sin x-\cos x-1=0$.

E1 **3269.** $\sin 2x+\cos 2x+\sin x-\cos x=1$.

E1 **3270.** $16^{\sin^2 x}+4^{1+\cos 2x}=10$.

E1 **3271.** *a)* $8\cdot\sin^2 x+\sqrt{3}\cdot\sin 2x+\cos 2x=4$; *b)* $4\cdot\cos^2 x+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sin 2x-3\cdot\cos 2x=2$.

E1 **3272.** $4\cdot\sin 2x=3\cdot\operatorname{tg} x-3\cdot\operatorname{ctg} x$.

E1 **3273.** $4\cdot\cos^2 2x+8\cdot\cos^2 x=7$.

E1 **3274.** *a)* $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}$; *b)* $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\frac{5}{8}$; *c)* $\sin^4 x-\cos^4 x=\frac{1}{2}$.

E1 **3275.** *a)* $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos 4x$; *b)* $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x$.

E1 **3276.** $\operatorname{ctg} 2x+\operatorname{tg} x=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

E1 **3277.** $\operatorname{tg} 2x-3\cdot\operatorname{tg} x=0$.

E1 **3278.** $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=2$.

E1 **3279.** $\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}=\frac{3}{2}+\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}$.

E1 **3280.** *a)* $\sin(30^\circ+x)=2\cdot\sin 30^\circ\cdot\cos x$; *b)* $\cos(60^\circ-x)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\sin x$;

c) $\sin(45^\circ-x)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\cdot\sin x$; *d)* $\cos(x-45^\circ)-\cos(x+45^\circ)=\operatorname{tg} x$;

e) $\sin(x+30^\circ)-\sin(x-30^\circ)=\frac{1}{2}\cdot\operatorname{ctg} x$;

f) $\sin(x+45^\circ)-\sin(x-45^\circ)+\sin(2x-45^\circ)-\sin(2x+45^\circ)=\sqrt{2}$.

E1 **3281.** *a)* $2 \cdot \sin 4x - 3 \cdot \sin^2 2x = 1$; *b)* $8 \cdot \sin 5x + \cos 10x + 1 = 0$.

E1 **3282.** *a)* $\sin 2x - \cos 2x + \sin x - \cos x = 1$;
b) $\sin 2x + \cos x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x = 1$.

Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán.

E1 **3283.** *a)* $\sin x + \cos x = 1$; *b)* $\sin 2x + \cos 2x = 1$;
c) $\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x = \sqrt{3}$; *d)* $\sin 2x + \sqrt{3} \cdot \cos 2x = \sqrt{3}$;
e) $\cos 2x - \sqrt{3} \cdot \sin 2x = \sqrt{3}$; *f)* $\sqrt{3} \cdot \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$;
g) $\cos 4x + 2 \cdot \sin 4x = 1$.

E1 **3284.** *a)* $3 \cdot \sin x + 5 \cdot \cos x = -3$;
b) $3 \cdot \sin x = 2 \cdot (1 - \cos x)$;
c) $\operatorname{tg} x = \dfrac{1+\cos x}{\sqrt{3}-\sin x}$.

E2 **3285.** $\dfrac{1}{2} \cdot \sin 3x + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 3x = \sin 5x$.

E2 **3286.** $\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2} \cdot \cos 13x$.

E2 **3287.** $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} = 2 \cdot \sqrt{2}$.

E2 **3288.** $(\sin 3x + \sqrt{3} \cdot \cos 3x)^2 - 2 \cdot \cos 14x = 2$.

Összetettebb, illetve nehezebb trigonometrikus egyenletek

Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán.

E2 **3289.** $\cos x + \cos 3x = \dfrac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} 4x$.

E2 **3290.** $7 \cdot \cos^3 x - 6 \cdot \cos x = 3 \cdot \cos 3x$.

E2 **3291.** $\sin 3x - \cos 2x + \sin x = 1$.

E2 **3292.** $3 \cdot \operatorname{ctg} x - 3 \cdot \operatorname{tg} x + 4 \cdot \sin 2x = 0$.

E2 **3293.** $\sin x + \cos x = \sqrt{2} + \sin^4 4x$.

E2 **3294.** $1 + \sin 2x = \sin x + \cos x$

E1 **3295.** $|\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x| = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

E2 **3296.** $2 \cdot (\sin^3 x - \cos^3 x) = 1 + (\sin x + \cos x)^2$.

E2 **3297.** $1 + 2 \cdot |\sin x| = 2 \cdot \cos 2x$.

E2 **3298.** $\sin 2x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$.

E2 **3299.** $5 \cdot (\sin x + \cos x)^2 - 12 \cdot (\sin x + \cos x) + 7 = 0$.

E2 **3300.** $\sin 3x - \cos 2x + \sin x = 1.$

E2 **3301.** $2 \cdot \cos 3x + \sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x = 0.$

E2 **3302.** $1 - \cos^2 2x = \sin 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$

E1 **3303.** $\sin 4x = \frac{3}{2} \cdot \operatorname{tg} x.$

E2 **3304.** $\sin(\pi \cdot \cos x) - \cos(\pi \cdot \sin x) = 0.$

E2 **3305.** $5^{|3x-5|\cos x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{(x-1)|\cos x|}.$

E2 **3306.** $2 \cdot \sin 17x + \sqrt{3} \cdot \cos 5x + \sin 5x = 0.$

E2 **3307.** $\frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{3 \cdot \sin x + \cos 2x} = \operatorname{ctg} 2x.$

E2 **3308.** $\sin \frac{x}{4} + 2 \cdot \cos \frac{x - 2\pi}{3} = 3.$

E2 **3309.** $(\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x) \cdot \sin 3x = 2.$

E2 **3310.** $\sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x = 1.$

E2 **3311.** $32 \cdot \cos^6 x - \cos 6x = 1.$

E2 **3312.** $\sin^2(\pi \cdot x) + \log_{\frac{1}{2}}^2 (y^2 - 2y + 1) = 0.$

E2 **3313.** $\operatorname{tg}^2 2x + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 2x + 3 = -\operatorname{ctg}^2\left(4y - \frac{\pi}{6}\right).$

E2 **3314.** $\left(3^{8x \operatorname{ctg}(\pi \cdot x)}\right)^x \cdot 27^{5x \cdot \operatorname{ctg}(\pi \cdot x)} = 9^{\operatorname{ctg}(\pi \cdot x)}.$

IV *Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán.*

E2 **3315.** $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16} \cdot \cos^4 2x.$

E1 **3316.** *a)* $\sin(75° + x) \cdot \sin(45° + x) = \frac{\sqrt{3}}{2};$

b) $\cos(45° + x) \cdot \cos(15° + x) = \frac{\sqrt{3}}{2};$

c) $\sin(30° + x) \cdot \cos x = \frac{1}{4};$

d) $\cos(75° + x) \cdot \sin(75° - x) = \frac{1}{2};$

e) $\operatorname{tg}(30° + x) \cdot \operatorname{tg}(30° - x) = \frac{1}{3}.$

E1 **3317.** *a)* $\cos 5x + \cos 7x = \sin 2x$;
b) $\sin 2x - \sin x = \cos 2x - \cos x$;
c) $\cos 3x + \cos 7x = \cos 2x + \cos 8x$.

E1 **3318.** *a)* $\cos 4x \cdot \cos 8x - \cos 5x \cdot \cos 9x = 0$;
b) $\sin 2x \cdot \cos 4x = \sin 7x \cdot \cos 9x$.

E1 **3319.** $\sin 7x - \sin x = \sin 3x$.

E1 **3320.** $\sin 5x + \sin x + 2 \cdot \sin^2 x = 1$.

E1 **3321.** $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

E1 E2 **3322.** $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

E1 E2 **3323.** $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

E1 E2 **3324.** $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

E1 E2 **3325.** $\cos x \cdot \cos 2x = \cos 3x$.

E1 E2 **3326.** $\sin 4x - \cos 4x + \sin 2x - \cos 2x = 0$.

E1 E2 **3327.** *a)* $\sin 4x - \cos 4x + \sin x - \cos x = 0$;
b) $\sin 4x + \cos 4x + \sin x + \cos x = 0$;
c) $\sin 2x - \cos 2x + \sin x - \cos x = 0$.

E1 **3328.** $\operatorname{tg}(75° + x) \cdot \operatorname{tg}(15° + x) = -\frac{1}{3}$.

E2 **3329.** *a)* $3 \cdot \sin x \cdot \sin 7x = 3 \cdot \sin^2 4x - 1$;

b) $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4} \cdot \sin 4x$;

c) $\cos 2x - \cos 6x = \sin 3x + \sin 5x$;

d) $\cos(30° - x) \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot (5 \cdot \cos 2x + 6 \cdot \sin^2 x)$;

e) $\sin(30° - x) \cdot \cos x = \frac{1}{8} \cdot (\cos 2x - 2 \cdot \sin^2 x)$.

E2 **3330.** *a)* $8 \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$;

b) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$;

c) $\sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 6x + \sin^2 7x = 2$.

E2 V **3331.** Határozzuk meg a következő egyenlet összes olyan megoldását a valós számok halmazán, amelyek a $[-3; 1]$ intervallumba esnek.

$\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2(2 \cdot \pi \cdot x)} \cdot \cos(\pi \cdot x) + \sin(\pi \cdot x) = \sqrt{2}$.

Paraméteres trigonometrikus egyenletek

Oldjuk meg a következő paraméteres trigonometrikus egyenleteket, ha a feladat szövege nem egyebet kér! Az egyenletekben x valós számot jelent, míg a p, az m, illetve az „a" valós szám paramétert jelent.

E2 **3332.** Határozzuk meg a $\cos 3x = a \cdot \cos x$ egyenletnek azon megoldásait, amelyek tetszőleges a valós szám esetén megoldásai az egyenletnek.

E2 **3333.** Mely valós p értékekre van a $\sin 3x = p \cdot \sin x$ egyenletnek olyan megoldása, amelyre $0 < x < \pi$?

E2 **3334.** $\cos(a+x) = \dfrac{\cos a}{\cos x}$.

E2 **3335.** Az m valós paraméter mely értékeire van megoldása a
$\cos 2x - m \cdot \cos x + 1 - 3 \cdot m^2 = 0$
egyenletnek?

E2 **3336.** Mely valós p paraméter esetén van a következő egyenletnek valós megoldása?
$\cos^2 x - 3 \cdot \cos x + p = 0$.

E2 **3337.** Mely p valós paraméter esetén van a következő egyenletnek valós megoldása?
$\sin^2 x + 4 \cdot \sin x + p = 0$.

E2 **3338.** Mely valós α-ra van pontosan két egyenlő valós gyöke az
$x^2 + \dfrac{2}{\sqrt{\sin \alpha}} \cdot x + \left(\dfrac{1}{\sin \alpha} + 2 \cdot \sqrt{2} \right) = 0$ egyenletnek?

E2 **3339.** Milyen c valós számra van pontosan egy valós megoldása a következő egyenletnek?
$1 + \sin^2 (c \cdot x) = \cos x$.

E2 **3340.** A p valós paraméter mely értékei esetén lesz a
$(p-1)^2 \cdot \sin^2 x + (p-1) \cdot (p^2 - 3) \cdot \sin x = 2 \cdot (p^2 - 1)$
egyenletnek gyöke a valós számok között?

E2 **3341.** Határozzuk meg mindazokat a valós (a, b) számpárokat, amelyekre a
$\cos(ax + b^2) - (a \cdot \cos x + b^2) = 1 - a$
egyenlőség minden valós x-re teljesül.

E2 **3342.** Mely valós p paraméter esetén van valós megoldása a következő egyenletnek?
$\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - 2 \cdot \cos^2 x = p$.

E2 **3343.** Mely p valós paraméter értékre van a következő egyenletnek valós megoldása?
$\sin^4 x - 2 \cdot \cos^2 x + p^2 = 0$.

E2 **3344.** Határozzuk meg a $(\sin x + \cos x) \cdot \sin 2x = p \cdot (\sin^3 x + \cos^3 x)$ egyenlet azon valós megoldásait, amelyek tetszőleges p valós paraméter esetén megoldásai az egyenletnek.

E2 **3345.** $\cos(p \cdot x) + \cos((p-2) \cdot x) = \cos x$.

E2 **3346.** Mely valós p számra van valós megoldása a következő egyenletnek?
$\sin^4 x + \cos^4 x = p$.

IV

E2 **3347.** A p valós paramétertől függően hány valós megoldása van a $[0;2\pi]$ zárt intervallumon a következő egyenletnek?
$\cos 2x = p \cdot (\cos x - \sin x)$.

E2 **3348.** $\sqrt{a \cdot \sin x + \cos x} = \sqrt{a \cdot \cos x + \sin x}$.

E2 **3349.** Határozzuk meg az összes olyan p valós számot, amelyre a következő egyenlőtlenségnek van megoldása a valós számok halmazán:

$$\left|\frac{p^2 \cdot \sin^2 x + 16}{p \cdot \sin x}\right| \leq -50 \cdot \cos^2 x + 80 \cdot \cos x - 24.$$

Trigonometrikus egyenlőtlenségek II. rész

Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán, hacsak a feladat szövege mást nem kér.

E1 **3350.** *a)* $\cos 2x + \cos x > 0$; *b)* $\cos 2x \geq \sin x$.

E1 **3351.** Mely valós x számokra lesz negatív a következő kifejezés értéke?
a) $\cos 2x - 3 \cdot \cos x + 2$; *b)* $5 \cdot \sin^2 x + \sin^2 2x > 4 \cdot \cos 2x$; *c)* $\cos^2 2x + \cos^2 x \leq 1$.

E2 **3352.** Igazoljuk, hogy a következő egyenlőtlenség teljesül, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{1}{\sin^4 x} \geq 8.$$

E2 **3353.** $\sin^6 x + \cos^6 x > \frac{5}{8}$.

E2 **3354.** Igazoljuk, hogy a következő egyenlőtlenség minden x valós számra teljesül.

$$\frac{1}{4} \leq \sin^6 x + \cos^6 x \leq 1.$$

E2 **3355.** Bizonyítsuk be, hogy minden valós x számra teljesül, hogy

$$\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x \cdots \cos\left(2^n \cdot x\right) \leq \frac{1}{2^n},$$

ahol n tetszőleges pozitív egész szám.

E1 **3356.** Igazoljuk, hogy
$0 \leq \cos^2 \alpha + \cos^2 (\alpha + \beta) - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos (\alpha + \beta) \leq 1$
fennáll minden α és β valós számra.

E1 **3357.** *a)* $\sqrt{3} \cdot \sin 2x + \cos 2x < 1$; *b)* $\cos 3x + \sqrt{3} \cdot \sin 3x < -\sqrt{2}$;

c) $\sin 3x > \cos 3x$; *d)* $2 \cdot \sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3} \cdot \cos 2x > 0$.

E1 **3358.** *a)* $2^{\sin x} > 2^{\cos x}$; *b)* $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x}$.

IV

E2 **3359.** $|\sin x + \cos x| < 1$.

E2 **3360.** *a)* $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} > \sqrt{3}$; *b)* $\left|\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right| \leq 1$.

E2 **3361.** *a)* $\sin x + \cos x > \sqrt{2} \cdot \cos 2x$; *b)* $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \leq \frac{\sin x - 3}{\sqrt{2}}$.

E2 **3362.** Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenletet a valós számok halmazán:
$\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = \sqrt{2 + \cos 2x + \sqrt{3} \cdot \sin 2x}$.

E2 **3363.** $\sin 2x + \operatorname{tg} x \geq 2$.

E2 **3364.** $4 \cdot \sin^3 x < 2 \cdot \sin x + \cos 2x$.

E2 **3365.** Igazoljuk, hogy minden valós x számra teljesül, hogy
$\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x < \frac{3}{4}$.

E2 V **3366.** Igazoljuk, hogy minden x és y valós számra teljesül a következő egyenlőtlenség:
$\cos x + \cos y + 2 \cdot \cos(x + y) \geq -\frac{9}{4}$.

E2 V **3367.** Igazoljuk, hogy minden x és y valós számra teljesül a következő egyenlőtlenség:
$2 \cdot \sin 2x \cdot \sin 2y \leq 1 + 8 \cdot \sin^2 x \cdot \sin^2 y$.

E2 V **3368.** Igazoljuk, hogy minden x és y valós számra teljesül a következő egyenlőtlenség:
$\cos^2(x - y) \leq 4 \cdot (1 - \sin x \cdot \cos y) \cdot (1 - \cos x \cdot \sin y)$.

E2 V **3369.** Bizonyítsuk be, hogy
$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{2} > 0$,
ha x olyan valós szám, amelyre $0 < x < \pi$.

E2 V **3370.** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges x valós számra teljesül, hogy
$\cos x + 3 \cdot \cos 3x + 6 \cdot \cos 6x \geq -\frac{115}{16}$.

E2 V **3371.** Igazoljuk, hogy ha $a > 0$, $b > 0$ és $\alpha \neq k \cdot \pi$, ahol k tetszőleges egész szám, akkor
$a \cdot \sin^2 x + \frac{b}{\sin^2 x} \geq 2 \cdot \sqrt{a \cdot b}$.

E2 V **3372.** Igazoljuk, hogy a következő egyenlőtlenség minden x valós számra fennáll:
$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq \sqrt{2^{2-\sqrt{2}}}$.

E2 V **3373.** Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:
$2^{-\cos^2 x} + 2^{-\sin^2 x} \geq \sin y + \cos y$,
ahol x és y valós számok.

IV

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket.

E2V 3374. $(x^2-4x+3)\cdot\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\cos^2(\pi\cdot x)+\cos x+2\cdot\sin^2\frac{x}{2}\right)\geq 2.$

E2V 3375. $\left(x-x^2-\frac{5}{4}\right)\cdot\log_{\sqrt{3}}\left(2+2\cdot\cos^2 x-\cos 2x+3\cdot\cos^2(\pi\cdot x)\right)\geq -2.$

E2V 3376. $1\leq|\sin x|^{\sqrt{1-2x}\cdot\log_{|\sin x|}\left(\frac{(3+|\mathrm{tg}x|)\cdot\cos^2 x}{8\cdot\cos^2 x-2}\right)}.$

Szélsőérték feladatok

E2 3377. Határozzuk meg a következő valós függvény legnagyobb és a legkisebb értékét: $f(x) = 3 \cdot \sin x + 4 \cdot \cos x$.

E2 3378. Határozzuk meg a következő valós függvény legnagyobb és a legkisebb értékét: $f(x) = \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x$.

E2 3379. Határozzuk meg a következő valós függvény legnagyobb és a legkisebb értékét:

$$f(x)=\sin^2 x+\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\sin x\cdot\cos x.$$

E2 3380. A c átfogójú derékszögű háromszögek közül melyiknek a legnagyobb a kerülete?

E2 3381. Az egységnyi oldalú négyzetbe írjunk négyzetet! Melyik beírt négyzet kerülete a legkisebb?

E2 3382. Határozzuk meg a következő valós függvény legnagyobb, illetve a legkisebb értékét.

a) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$; *b)* $g(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$.

E2 3383. Határozzuk meg a következő valós függvény legnagyobb, illetve a legkisebb értékét.

$$f(x)=\frac{1+\sin x\cdot\cos x}{3+\sin 2x}.$$

E2 3384. Mely helyeken veszi fel az $f(x)=\sin^2 2x+2\cdot\cos^2 x-\frac{5}{4}$ valós függvény a legnagyobb és a legkisebb értékét a $[0; \pi]$ intervallumon? Mekkora ez a legnagyobb és a legkisebb érték?

E2 3385. Egységnyi sugarú félkörbe írjunk maximális területű téglalapot.

E2 3386. Adott két párhuzamos egyenes és közöttük a C pont. Az ABC derékszögű háromszög A csúcsa az egyik, B csúcsa a másik párhuzamos egyenesen van. Az ABC háromszögek közül melyiknek a legkisebb a területe?

E1 3387. Határozzuk meg a következő valós függvény minimumát.

a) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}$; *b)* $g(x)=\frac{1+2\cdot\sin^2 x}{\sin^2 x}+\frac{1+3\cdot\cos^2 x}{\cos^2 x}$.

E2 **3388.** Határozzuk meg a következő függvény minimumát

$f(x) = \frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x}$,

ahol x olyan valós szám, amelyre $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

E1 **3389.** Határozzuk meg a következő függvény minimumát

$f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$,

ahol x olyan valós szám, amelyre $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

E1 **3390.** Határozzuk meg a következő függvény minimumát

a) $a(x) = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} + \frac{1}{\cos^2 x}$; *b)* $b(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$;

c) $c(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} + \frac{1}{\cos x}$; *d)* $d(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} + \frac{1}{\cos x}$;

e) $e(x) = \frac{\sin x + \cos x + 1}{\sin x \cdot \cos x}$,

ahol x olyan valós szám, amelyre $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

E2 V **3391.** Legyen $K = \sin x_1 \cdot \cos x_2 + \sin x_2 \cdot \cos x_3 + \ldots + \sin x_{n-1} \cdot \cos x_n + \sin x_n \cdot \cos x_1$, ahol $x_1, x_2, \ldots x_n$, tetszőleges valós számok. Határozzuk meg a K kifejezés maximális értékét.

E2 **3392.** Határozzuk meg a következő függvény maximumát

a) $a(x) = \frac{3}{2} \cdot \cos^2 x - 2 \cdot \cos^3 x$; *b)* $b(x) = 2 \cdot \cos^2 x - 2 \cdot \cos^3 x$; *c)* $c(x) = 2 \cdot \sin^2 x - 2 \cdot \sin^3 x$,

ahol x olyan valós szám, amelyre $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Trigonometrikus egyenletrendszerek

IV

Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán.

E1 **3393.** $\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(x-y) = 0. \end{cases}$

E1 **3394.** *a)* $\begin{cases} \sin^2 x - \cos y = 1, \\ \cos^2 x + \cos y = 1; \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{2}, \\ \cos^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

E2 **3395.** *a)* $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 0, \\ (\sin x + \cos^2 y) \cdot \sin^2 y = \frac{1}{4}; \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \sqrt{\sin x} \cdot \cos y = 0, \\ 2 \cdot \sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0. \end{cases}$

E1 **3396.** *a)* $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3}, \\ \sin x \cdot \sin y=\dfrac{1}{4}; \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y=\dfrac{3\cdot\pi}{4}, \\ \cos x \cdot \sin y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

E1 **3397.** *a)* $\begin{cases} x-y=\dfrac{5\cdot\pi}{3}, \\ \sin x=2\cdot\sin y; \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y=\dfrac{5\cdot\pi}{6}, \\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=\sqrt{3}; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{6}, \\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x+y=\dfrac{5\cdot\pi}{6}, \\ \dfrac{\cos x}{\cos y}=1-\sqrt{3}. \end{cases}$

E1 **3398.** *a)* $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=\sqrt{3}; \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x-y=\dfrac{2\cdot\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=-3+\sqrt{3}; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1; \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

E1 **3399.** $\begin{cases} \sin^2 x=\sin y, \\ \cos^4 x=\cos^2 y. \end{cases}$

E1 **3400.** $\begin{cases} \sin^3 x=\dfrac{1}{2}\cdot\sin y, \\ \cos^3 x=\dfrac{1}{2}\cdot\cos y. \end{cases}$

E1 **3401.** $\begin{cases} \sin(x+y)=\cos(x-y), \\ \operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=1. \end{cases}$

E1 **3402.** *a)* $\begin{cases} x-y=\dfrac{2\cdot\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=\sqrt{3}-2; \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y=\dfrac{4\cdot\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x-y}{2}=\sqrt{3}-2. \end{cases}$

E2 **3403.** $\begin{cases} \log_2 y-\log_2 x=1, \\ \log_3\left(\cos(x+y)\right)-\log_3\left(\sin(x+y)\right)=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

E2 **3404.** Határozzuk meg a következő egyenletrendszernek azokat a valós számpár megoldásait, amelyek kielégítik az $x + y < 10$ feltételt:

$$\begin{cases}\log_2 x \cdot \log_y 2 = -1,\\ \sin x \cdot \cos y = 1 - \cos x \cdot \sin y.\end{cases}$$

E1 **3405.** $\begin{cases}4 \cdot \sin y - 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos x = 5 + 4 \cdot \cos^2 y,\\ \cos 2x = 0.\end{cases}$

E1 **3406.** $\begin{cases}x \cdot y = 1,\\ x + y - \cos^2 z = -2.\end{cases}$

E1 **3407.** $\begin{cases}\sin x - \cos y = \dfrac{1}{2},\\ \cos 2x + \cos 2y = -\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

E2 **3408.** $\begin{cases}2^{x-2} = 4^{y-1},\\ \sin\left(\dfrac{x}{2} + y\right) = 1 - \cos x.\end{cases}$

E1 **3409.** *a)* $\begin{cases}x + y = \dfrac{\pi}{3},\\ \sin x + \sin y = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4};\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}x + y = \dfrac{2 \cdot \pi}{3},\\ \sin x + \cos y = \dfrac{1}{2}.\end{cases}$

E1 **3410.** *a)* $\begin{cases}x - y = \dfrac{\pi}{3},\\ \sin x - \cos y = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{4 - 2 \cdot \sqrt{3}};\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}x - y = \dfrac{\pi}{6},\\ \cos x - \cos y = \dfrac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right);\end{cases}$

c) $\begin{cases}x - y = \dfrac{\pi}{3},\\ \cos x + \cos y = -1{,}5;\end{cases}$ *d)* $\begin{cases}x + y = \dfrac{2 \cdot \pi}{3},\\ \cos x + \cos y = \sqrt{\dfrac{3}{4}}.\end{cases}$

E1 **3411.** *a)* $\begin{cases}\sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{4},\\ \cos x \cdot \cos y = \dfrac{3}{4};\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\sin x \cdot \sin y = \dfrac{3}{4};\\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 3.\end{cases}$

c) $\begin{cases}\sin x \cdot \cos y = \dfrac{1}{4} \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right),\\ \cos x \cdot \sin y = \dfrac{1}{4} \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right);\end{cases}$ *d)* $\begin{cases}\sin x \cdot \sin y = \dfrac{\sqrt{6} \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)}{8},\\ \cos x \cdot \cos y = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}.\end{cases}$

E1 **3412.** $\begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2}, \\ \cos x\cdot\cos y=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

E1 **3413.** *a)* $\begin{cases} \cos 2x-\cos 2y=-1, \\ \sin x\cdot\cos y=\dfrac{3}{4}; \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \sin(x+y)=\dfrac{1}{2}, \\ \sin 2x+\sin 2y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

E1 **3414.** *a)* $\begin{cases} \sin x-\sin y=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \\ \cos x+\cos y=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}; \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \sin x+\sin y=\dfrac{\sqrt{4+2\cdot\sqrt{3}}}{2}, \\ \cos x+\cos y=\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}. \end{cases}$

E2 **3415.** *a)* $\begin{cases} \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=2, \\ \operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y=2\cdot\left(1+\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\right); \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} y=\sqrt{6\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}, \\ \operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} y=\sqrt{6\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}. \end{cases}$

E1 **3416.** *a)* $\begin{cases} x+y=\dfrac{5\cdot\pi}{3}, \\ \cos x\cdot\cos y=\dfrac{1}{4}\cdot\left(1+\sqrt{3}\right); \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y=\dfrac{3\cdot\pi}{4}, \\ \sin x\cdot\sin y=\dfrac{3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}. \end{cases}$

E1 **3417.** *a)* $\begin{cases} x+y=\dfrac{5\cdot\pi}{6}, \\ \sin^2 x-\cos^2 y=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}; \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y=\dfrac{5\cdot\pi}{12}, \\ \sin^2 x-\sin^2 y=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

E1 **3418.** *a)* $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3}, \\ \sin^2 x+\sin^2 y=\dfrac{3}{4}; \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y=\dfrac{5\cdot\pi}{6}, \\ \sin^2 x+\sin^2 y=\dfrac{4-\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

E1 **3419.** $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4}, \\ \sin^2 x+\cos^2 y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

E1 **3420.** *a)* $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{6}, \\ \cos^2 x+\cos^2 y=\dfrac{4+\sqrt{3}}{4}; \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y=\dfrac{5\cdot\pi}{6}, \\ \cos^2 x+\cos^2 y=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

E1 **3421.** *a)* $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos^2 x-\cos^2 y=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x-y=\dfrac{1}{3}, \\ \cos^2(\pi\cdot x)-\sin^2(\pi\cdot y)=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

E2 **3422.** $\begin{cases} 4\cdot\sin x\cdot\sin y=3, \\ \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=3. \end{cases}$

E2 V **3423.** $\begin{cases} \sin x+2\cdot\sin(x+y+z)=0, \\ \sin y+3\cdot\sin(x+y+z)=0, \\ \sin z+4\cdot\sin(x+y+z)=0. \end{cases}$

Néhány nehezebb trigonometriai feladat

E2 **3424.** Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletet.

$$2\cdot\cos^2\frac{x^2+3\cdot y}{6}=3^x+3^{-x}.$$

E2 **3425.** Egy háromszög legnagyobb oldalával szemközt fekvő szög kétszer akkora, mint a legkisebb oldallal szemközt fekvő. A háromszög oldalai egymás után következő egész számok. Határozzuk meg a háromszög oldalait és a szögeit.

E2 V1 **3426.** Az $ABCD$ négyzetbe egy egységnyi sugarú kör van írva. Míg az $A'B'C'D'$ négyzet e körbe van írva úgy, hogy az $A'B'$ egyenes az A ponton halad át. Határozzuk meg azon háromszög területét, amelyet ez az egyenes vág le az $ABCD$ négyzetből.

E2 V1 **3427.** Legyen az ABC háromszögben a BD súlyvonal és a BE szögfelező. Lehetséges-e, hogy ekkor a BD szögfelező a BCE háromszögben és a BE pedig súlyvonal az ABD háromszögben?

E2 V1 **3428.** Legyen a síkon ABC szabályos háromszög és P olyan pont a síkon, amely nincs az ABC háromszög körülírt körén. Igazoljuk, hogy a PA, PB és PC szakaszokból háromszög szerkeszthető! (Pompeiu tétele. Dimitrie Pompeiu (1873-1954) román matematikus volt.)

E2 V **3429.** Az ABC egyenlő szárú háromszögben $BAC\sphericalangle = 20°$ és $AC = AB$. Az AC, illetve az AB oldalon helyezkedik el a D, illetve az E pont úgy, hogy $ECB\sphericalangle = 50°$ és $DBC\sphericalangle = 60°$. Határozzuk meg az EDB szöget.

E2 V **3430.** Az $ABCD$ konvex négyszögben $BAC\sphericalangle = 15°$, $CBD\sphericalangle = 90°$, $DCA\sphericalangle = 30°$, $ADB\sphericalangle = 75°$.
Határozzuk meg a négyszög átlóinak a hajlásszögét.

Legyenek a húrnégyszög oldalainak a hosszúságai a, b, c, d, míg s a húrnégyszög félkerülete, t a területe, R a körülírt körének sugara. Legyen α az a és a d oldalak által bezárt szög, az a és a d oldalak A csúcspontjából induló átló hossza legyen e, míg az a és b oldalak B csúcspontjából kiinduló átló hossza f.

Bizonyítsuk be, hogy

E2V 3431. $\cos\alpha = \dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2\cdot(a\cdot d+b\cdot c)}$.

E2V 3432. *a)* $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{(b+c+d-a)\cdot(a+b+c-d)}{a\cdot d+b\cdot c}}$;

b) $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{(a+d+b-c)\cdot(a+d+c-b)}{a\cdot d+b\cdot c}}$; *c)* $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)\cdot(s-d)}{(s-b)\cdot(s-c)}}$.

E2V 3433. $t = \sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)}$

(Brahmagupta képlete, aki indiai tudós volt a 7. században.)

E2V 3434. *a)* $e = \sqrt{\dfrac{(a\cdot d+b\cdot c)\cdot(a\cdot c+b\cdot d)}{a\cdot b+c\cdot d}}$; *b)* $f = \sqrt{\dfrac{(a\cdot b+c\cdot d)\cdot(a\cdot c+b\cdot d)}{a\cdot d+b\cdot c}}$.

E2V 3435. $R = \dfrac{\sqrt{(a\cdot b+c\cdot d)\cdot(a\cdot c+b\cdot d)\cdot(a\cdot d+b\cdot c)}}{4\cdot\sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)}}$,

vagyis $R = \dfrac{\sqrt{(a\cdot b+c\cdot d)\cdot(a\cdot c+b\cdot d)\cdot(a\cdot d+b\cdot c)}}{4\cdot t}$.

E2V 3436. Hozzuk zárt alakra a következő összeget:
$S_n(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx$.

E2V 3437. Határozzuk meg a következő összeget:
$S_n(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx$.

Néhány „gyakorlatibb" trigonometriai feladat

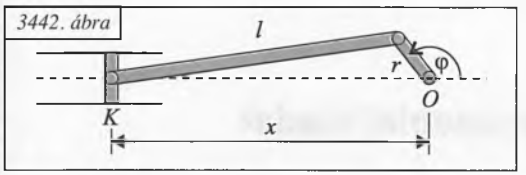
K1 GY 3438. James Cook kapitány (1728–1779) hajónaplójában olvashatjuk, hogy:
„December 8-án (1773) elértük az 51°33′ szélességet 180° hosszúság alatt, és így pontosan ellenlábasai voltunk Londonnak. Itt némi honvágy támadt bennünk. Mi voltunk az elsők, akik ezt az érdekes pontot elérték. Drake-ről beszélik Angolországban, hogy a Föld másik felén eljutott egy pontra, amely egyenes vonalban a londoni London Bridge középső íve alatt van. Ez mese. Drake csak Amerika nyugati partjait járta be."
a) Határozzuk meg London földrajzi szélességét Cook kapitány naplórészlete alapján. A Föld sugarát vegyük kb. 6378 km-nek.
b) Mekkora távolságban van London és ellenlábasa?
c) Számítsuk ki London távolságát a Föld forgástengelyétől.
d) Mekkora sebességgel forog London a Föld tengelye körül?

K1 GY 3439. A görög számoszi Arisztarkhosz (Kr.e. kb. 312–230) csillagász jóval Nikolausz Kopernikusz (Kr.u. kb. 1473–1543) lengyel csillagász előtt Nap középpontú rendszert javasolt, és már előtte is gondoltak erre. Arisztarkhosz megbecsülte, hogy hányszor messzebb van a Nap a Földtől, mint a Hold a Földtől. Megvárta, amíg a holdfázisban első vagy utolsó negyed (vagyis éppen félhold) következik be. Ekkor a Föld-Hold-Nap szöge éppen derékszög. Arisztarkhosz a Hold-Föld-Nap szögét 87°-osnak gondolta.
a) Mekkora a Nap-Föld és a Hold-Föld távolság aránya Arisztarkhosz szerint?
b) Mai modernebb eszközökkel mérve a Hold-Föld-Nap szögét, a kissé pontosabb 89°51′10″ értéket kapták. Mekkora a Nap-Föld és a Hold-Föld távolság aránya e pontosabb mérés szerint?

K1 GY 3440. A csillagászatban használják a parszek távolságot is. 1 parszek távolságra van a Naptól az a csillag, amelyből nézve a földpálya sugara merőleges rálátás esetén éppen 1″ szög alatt látszik. A földpálya sugarát, azaz a Föld Naptól való közepes távolságát vegyük 150 millió kilométernek.
a) Számítsuk ki hogy 1 parszek hány kilométer.
b) Ha a fény sebessége 300 000 km/s, akkor mekkora utat tesz meg a fény 1 év alatt? Ezt a távolságot 1 fényévnek nevezzük. Számoljuk az 1 évet 365,2422 napnak.
c) Hány fényév 1 parszek?
d) Az éjszakai égbolt legfényesebb csillagáról, a Sziriusz csillagról a földpálya sugarát 0,37″ szög alatt láthatnánk. Számítsuk ki a Sziriusz csillag távolságát a Földtől parszekben és fényévben is.

K1 GY 3441. Egy csónakkal szeretnénk átkelni egy folyó túlsó partjára, mégpedig éppen az átellenes pontba. A csónak sebessége állóvízben 1,5 m/s, míg a folyó sebessége 1 m/s. A folyó szélessége 60 m.
a) Mekkora lesz a csónak eredő sebessége?
b) Milyen irányba evezzünk, hogy a megadott átellenes pontba érkezzünk meg?
c) Mekkora az átkelési időnk?

3442. ábra



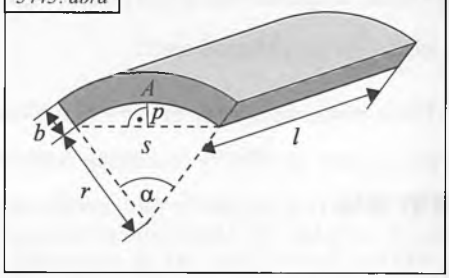
K1 GY 3442. Az ábrán egy forgattyús hajtómű vázlatát láthatjuk.
Itt $r = 25$ cm és $l = 150$ cm. Feladatunk a forgattyús hajtómű keresztfej-elmozdulásának, vagyis a K pont helyzetének a vizsgálata.
a) A keresztfej milyen φ szögeknél van legmesszebbre az O forgáscentrumtól és mekkora ez a távolság?
b) Milyen φ szögeknél lesz a keresztfej a legközelebb az O forgáscentrumhoz és mekkora ez a távolság?
c) Írjuk fel a keresztfej távolságát a forgáscentrumtól a φ szög függvényében.

K2 GY 3443. A gazdasági igazgató megbízott bennünket, hogy a pincében levő olajtartályban határozzuk meg az olaj mennyiségét. A következő adatokat közölte velünk: A fekvő henger alakú olajtartály belső hossza 4530 mm, míg a belső sugara 550 mm. A tartályban 32 cm magasan áll az olaj a tartály oldalán levő mérce szerint. A gazdasági igazgató szerint a tartályban 1200 liter olajnak kell lennie a könyvelése szerint.
a) Számítsuk ki az olajtartály térfogatát.
b) Hány liter olaj van a tartályban? Van-e hiány a tartályban és ha igen, akkor hány liter?

K2 GY 3444. Egy rajzoló berendezés része egy 3,5 cm sugarú és egy 1,2 cm sugarú tárcsa, valamint egy műanyag szíj, amelyet egyenes szíjhajtásnak megfelelően feszítettek fel a tárcsákra. Vagyis a szíj a tárcsák külső közös érintői mentén feszül.
a) Határozzuk meg a két tárcsa közös érintőszakaszainak a hosszát.
b) Számítsuk ki a nagyobbik tárcsán a meghajtó szíj tapadási felületének a hosszát.
c) Számítsuk ki a kisebbik tárcsán a tapadási felület hosszát.
d) Milyen hosszúságú műanyag meghajtó szíj feszíthető rá a két tárcsára?

K2 GY 3445. *a)* Számítsuk ki az ábrán látható α szöget. $p = 2$ m; $b = 0{,}75$ m; $l = 7{,}2$ m; $s = 8$ m.
b) Számítsuk ki a koncentrikus körgyűrűcikk A területét, vagyis a dongaboltozat keresztmetszetét!
c) Határozzuk meg a dongaboltozat térfogatát.
d) Hány tonna a dongaboltozat tömege? A fizikából ismert, hogy a sűrűség a tömeg és a térfogat hányadosa, másrészt a boltozat $2200\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ sűrűségű anyagból készült.

3445. ábra



K2 GY 3446. Egy lejtős terepen egy függőleges rudat ütünk le, és a lejtő aljáról egy szögmérő műszerrel (teodolit) megmérjük, hogy a rúdon egymástól 2 méterre levő jelzések 8°45′-es, illetve 10°24′-es emelkedési szögek alatt látszanak. Számítsuk ki a rúd és a teodolit vízszintes távolságát. (Vagyis a műszeren átmenő vízszintes egyenes és a rúd egyenese metszéspontjának a távolságát keressük a teodolittól.)

K2 GY 3447. Hőlégballonban utazván a Hanság felett repülünk. Tőlünk éppen keletre a híres lébényi templom kettős tornyát láthatjuk. A templom Árpád-kori nemzetségi monostor volt. A hőlégballonról a templomot 12°6′ -es lehajlási szögben látjuk. Míg tőlünk éppen déli irányban a Fehér-tó látható Fehértó község mellett. A Fehér-tó térsége természetvédelmi terület és fontos madárgyülekező hely, ahol nyaranta madármegfigyelő táborokat szerveznek. A tavat 6°50′-es lehajlási szög alatt látjuk a hőlégballon kosarából.
a) Ha a hőlégballon 600 méter magasságban repül a mérések idején, akkor milyen messze vagyunk a lébényi templomtól légvonalban?
b) A Fehér-tó milyen messze van tőlünk?
c) Milyen messze van egymástól a tó és a templom?

K2 GY 3448. A hálózati feszültséget az $U = U_{max} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ függvény írja le, ha a $t = 0$ időpillanatban nulla a feszültség. Az egyenletben az U feszültség mértékegysége 1 V, a t idő mértékegysége 1 s , az f hálózati frekvencia értéke $f = 50\frac{1}{\text{s}}$.
a) Számítsuk ki, hogy milyen időpontokban lesz a feszültség értéke a maximális feszültség fele!
b) Milyen időpontokban lesz a feszültség abszolútértéke a maximális feszültség fele az első $\frac{1}{50}$s alatt?
c) Határozzuk meg, hogy a feszültség abszolútértéke az $\frac{1}{50}$s periódusidő hány százalékában lesz nagyobb, mint a maximális feszültség fele.

K2 GY 3449. A hálózati feszültséget az $U = U_{max} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ függvény írja le, ha a $t = 0$ időpillanatban nulla a feszültség. Az egyenletben az U feszültség mértékegysége 1 V, a t idő mértékegysége 1 s , az f hálózati frekvencia értéke $f = 50\frac{1}{s}$. Ismert , hogy a hálózat névleges effektív feszültsége $U_{eff} = 230$ V, másrészt a fizikából tudjuk, hogy $U_{max} = U_{eff} \cdot \sqrt{2}$.
a) Számítsuk ki, hogy milyen időpontokban lesz a feszültség értéke az effektív feszültséggel egyenlő!
b) Milyen időpontokban lesz a feszültség abszolútértéke az effektív feszültséggel egyenlő az első $\frac{1}{50}$ s periódusidő alatt?
c) Határozzuk meg, hogy az $\frac{1}{50}$ s periódusidő hány százalékában lesz a feszültség abszolútértéke kisebb az effektív feszültség értékénél?

K2 GY 3450. Egy hegytetőn álló antenna magasságát akarjuk meghatározni a következő módon. A völgyből egy lézertávmérővel megmérjük az antenna aljának a távolságát tőlünk, erre 542,6 métert kaptunk. Majd megmérjük az antenna tetejének tőlünk való távolságát, erre kaptuk az 565,4 métert. A lézersugarat 5°15′-cel emeltük meg a folyamat közben. Milyen magas az antenna?

K2 GY 3451. Sir Francis Drake admirális Aranyszarvas nevű kalózhajója és egy spanyol gálya éppen egymást lövi Peru partjai előtt. Egy adott pillanatban egyszerre adnak le sortüzet egymásra.

A parton levő megfigyelőhöz 3 másodperc alatt ér el az Aranyszarvas sortüzének hangja. Míg a spanyol gálya sortüze 2 másodperc múlva lesz hallható a megfigyelőnél. Legyen a hang terjedési sebessége 340 m/s. A megfigyelő 5°42′-es szögben látja a két hajót.
a) Határozzuk meg Drake admirális hajójának a távolságát a megfigyelőtől!
b) Határozzuk meg a spanyol gálya távolságát a megfigyelőtől!
c) Számítsuk ki az Aranyszarvas és a gálya távolságát.
d) Sir Francis mekkora szögben látja a parton levő megfigyelő és a spanyol hajó távolságát?

K2 GY 3452. Egy torony magasságát kell meghatároznunk. Egy építési lézerrel rendelkezünk, amellyel megmérjük a torony tetejének a lézertől való távolságát, amelyre 134,62 métert kapunk.

Mivel a torony alját nem lehet látni a különböző épületektől, ezért 15,3 méterrel hátrébb megyünk a lézerrel és ismét megmérjük a torony tetejének a magasságát, erre 148,48 métert kapunk.
a) Milyen magas a torony, ha a lézerünk 1,5 magasságban helyezkedik el mindkét mérésnél?
b) Milyen távol voltunk a toronytól az első mérésnél?

K2 GY 3453. Egy, a tenger szintje fölé 80 méter magasra emelkedő világítótoronyból egy hajót veszünk észre 2°13′-es lehajlási szög alatt. Majd 1 perc 38 másodperc idő elteltével a hajó 3°25′ lehajlási szög alatt látszik. A hajó két méréskor mért helyzetének látószöge a világítótoronyból 12°35′.
a) Milyen távol volt az első mérésnél a hajó a torony aljától?
b) Milyen távol volt a hajó a torony aljától a második mérésnél?
c) Mekkora utat tett meg a két mérés között a hajó?
d) Mekkora a hajó sebessége?

K2 GY 3454. Egy repülőgép repül keletről nyugatra. A repülőgép átlagsebessége 450 km/h szélcsendben. A két repülőtér távolsága 320 km. A repülési magasságban északnyugati szél fúj 20 m/s sebességgel.

a) Mennyi idő alatt érne a repülőgép az egyik repülőtértől a másikig szélcsendes időben?

b) Ha a megadott irányú és nagyságú szél fúj, akkor mekkora a repülőgép eredő sebessége?

c) Mekkora lesz az új repülési idő?

d) Mekkora szöggel kell oldalra kormányozni a repülőgépet, hogy tartsa a kelet-nyugati irányt?

K2 GY 3455. Egy radarral egy nagyméretű meteort, azaz tűzgömböt (bolida) vettünk észre. A mérések szerint a tűzgömböt akkor vette észre a radar, amikor 30 km-re volt a távolsága a radartól légvonalban és a magassága 22 km volt. A tűzgömb a radartól légvonalban 23 km távolságra és 15 km magasságban apró darabokra esett szét és eltűnt a radarernyőről.

A két mérés közötti idő 32 másodperc volt. A tűzgömb észlelése és szétesése közötti légvonalbeli irányok szögét 28°42′-nek mértük.

a) Mekkora szöget zár be az észlelési irány a Föld felszínével? A Föld gömbölyűségét itt elhanyagolhatjuk, mert eléggé kicsi a tűzgömb távolsága, másrészt a mérés pontossága is kicsi.

b) Milyen szöget zár be a szétesési irány a Föld felszínével?

c) Mekkora utat tett meg a két mérés között a tűzgömb?

d) Mekkora volt a tűzgömb átlagsebessége?

K2 GY 3456. Egy AH magasságú antenna emelkedik a síkság fölé és a magasságát akarjuk megmérni a következő módon. Felveszünk a síkságon egy $BC = 150$ méteres szakaszt, amelyet alapvonalnak nevezünk. Az alapvonal egyik végpontjából az antenna csúcsa $ABH \sphericalangle = 34°18'$ emelkedési szög alatt látszik. Másrészt mérjük az $ACB \sphericalangle = 54°42'$ szöget és az $ABC \sphericalangle = 68°15'$ szöget.

a) Számítsuk ki a $BAC \sphericalangle$-et.

b) Számítsuk ki az antenna A csúcsának és az alapvonal B végpontjának a távolságát.

c) Határozzuk meg az antenna AH magasságát.

K2 GY 3457. Adott az $AB = 853{,}45$ m hosszúságú alapvonal. Az FG szakasz hosszát kell meghatároznunk. Ehhez megmérjük a háromszögelésben szereplő háromszögek szögeit. (Persze elég csak két-két szöget mérni.) Kaptuk, hogy: $\alpha_1 = 76°18'$, $\alpha_2 = 51°35'$, $\alpha_3 = 52°7'$; $\alpha_4 = 63°42'$, $\alpha_5 = 44°26'$, $\alpha_6 = 71°52'$; $\alpha_7 = 48°45'$, $\alpha_8 = 72°24'$, $\alpha_9 = 58°51'$; $\alpha_{10} = 36°54'$, $\alpha_{11} = 75°32'$, $\alpha_{12} = 67°34'$; $\alpha_{13} = 86°14'$, $\alpha_{14} = 42°47'$, $\alpha_{15} = 50°59'$.

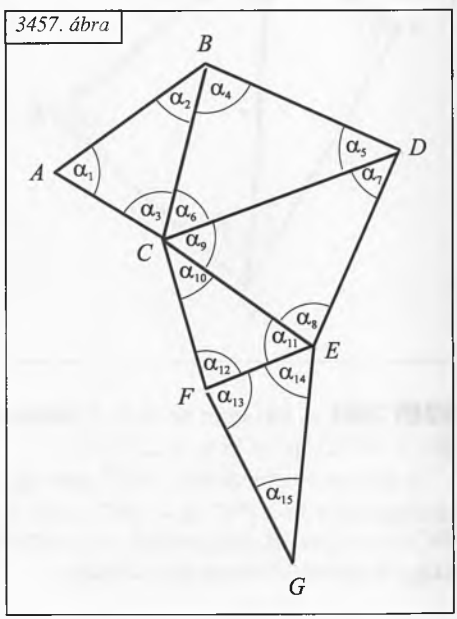
a) Milyen hosszú a BC távolság?

b) Mekkora a CD hosszúság?

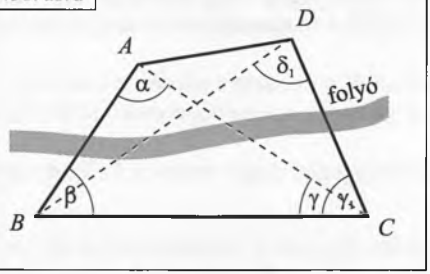
c) Határozzuk meg a CE távolságot.

d) Számítsuk ki az FG szakasz hosszát.

3457. ábra

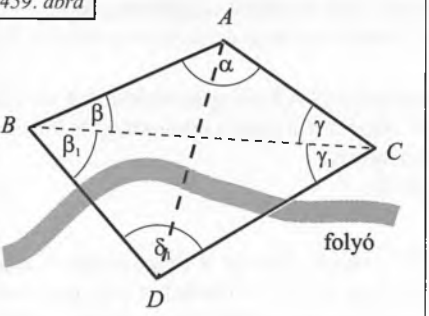


3458. ábra



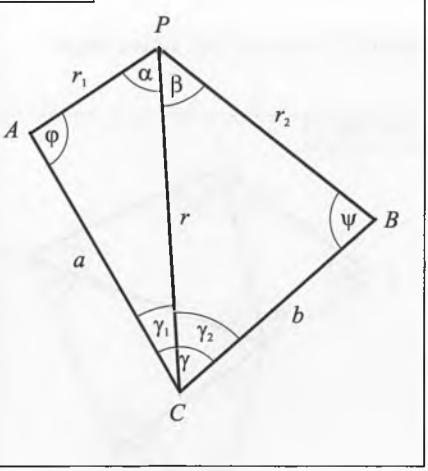
K2 GY 3458. A síkságon az AD távolságot kell meghatározni. Ámde nem férünk hozzá az A és a D pontokhoz. Például azért, mert nem tudunk átkelni a folyón. Így fölvesszük a síkon az ismert $BC = 403{,}21$ m hosszúságú alapvonalat és megmérjük a következő szögeket:
$\beta = 40°21'$; $\beta_1 = 35°40'$;
$\gamma = 102°10'$; $\gamma_1 = 113°50'$.
a) Számítsuk ki az α és a δ_1 szöget.
b) Számítsuk ki az AB és a CD távolságot.
c) Határozzuk meg az AD távolságot.
(Egy Hansen-féle feladat.)

3459. ábra



K2 GY 3459. Egy síkságon az AD távolságot kell meghatározni. Közvetlenül nem tudjuk megmérni az AD távolságot, mert például egy folyó választja el ezeket, és ez akadályoz bennünket. A folyó partján a síkságon felmérjük a $BC = 363{,}33$ m hosszú alapvonalat és megmérjük a következő szögeket:
$\beta = 38°17'$; $\beta_1 = 28°39'$;
$\gamma = 114°29'$; $\gamma_1 = 124°44'$.
a) Számítsuk ki az α és a δ_1 szöget!
b) Számítsuk ki az AB és a BD távolságot.
c) Határozzuk meg az AD távolságot.
(Egy Hansen-féle feladat.)

3460. ábra



K2 GY 3460. Ismert az A, B és C háromszögelési pontokról a síkon, hogy:
$AC = a = 634{,}82$ m, $BC = b = 396{,}74$ m, $ACB \sphericalangle = 128°30'$.

A P pontból az AC szakasz $APC \sphericalangle = \alpha = 46°18'$, míg a BC szakasz $BPC \sphericalangle = \beta = 85°33'$ szög alatt látszik.
a) Számítsuk ki a $\varphi + \psi$ szöget!
($PAC \sphericalangle + PBC \sphericalangle$).
b) Határozzuk meg a φ szöget! ($PAC \sphericalangle$).
c) Számítsuk ki a $PC = r$ távolságot.
d) Határozzuk meg a $PA = r_1$ távolságot.
e) Számítsuk ki a $PB = r_2$ távolságot.
(Egy Snellius-Pothenot-féle feladat.)

K2 GY 3461. A síkságon az A, B, C háromszögelési pontokról ismert, hogy $AC = 5836{,}7$ m ; $BC = 7417{,}2$ m; $ACB \sphericalangle = 237°16'$.

A síkságon helyezkedik el a P pont úgy, hogy $APC \sphericalangle = 17°14'$ és $BPC \sphericalangle = 25°32'$.
a) Számítsuk ki a $PAC \sphericalangle + PBC \sphericalangle$-et. *b)* Számítsuk ki a $PAC \sphericalangle$-et. *c)* Határozzuk meg a PC távolságot. *d)* Határozzuk meg a PA távolságot. *e)* Mekkora a PB távolság?
(Egy Snellius–Pothenot-féle feladat.)

V. Koordinátageometria

Szakaszt adott arányban osztó pont, súlypont koordinátái

K1 **3462.** Számítsuk ki a következő pontpárokkal megadott szakaszok felezőpontjainak koordinátáit:

a) (6; 6) és (12; 2);

b) (4; 10) és (10; 1);

c) $\left(\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right)$ és $\left(-4\frac{1}{2};5\frac{1}{3}\right)$;

d) $\left(\sqrt{2};-\sqrt{3}\right)$ és $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

e) $\left(\frac{a-b}{2};\frac{c-d}{2}\right)$ és $\left(\frac{a+b}{2};\frac{c+d}{2}\right)$.

K1 **3463.** Az AB szakasz felezőpontjának koordinátái (–1; –1). Az A pont koordinátái (–4; 6). Számítsuk ki a B pont koordinátáit.

K1 **3464.** Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: az $A(2; 7)$. $B(1; 1)$, $C(3; 6)$. Számítsuk ki az oldalak felezőpontjainak koordinátáit. Igazoljuk, hogy két felezőpontot összekötő vektor párhuzamos a szemközti oldal vektorával.

K2 **3465.** Egy ABC háromszög oldalainak felezőpontjai:

a) az $A_1(-2; 1)$, $B_1(4; 3)$, $C_1(2; 3)$; *b)* az $A_1(5; 5)$, $B_1(1; 2)$, $C_1(3; 9)$

koordinátájú pontok. Számítsuk ki az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátáit.

E2 **3466.** A koordináta-rendszer O kezdőpontjának tükörképe az $A(5; 5)$ pontra O_1, az O_1 tükörképe a B pontra O_2, az O_2 tükörképe a $C(1; 7)$ pontra ismét az O. Számítsuk ki a B pont koordinátáit, és bizonyítsuk be, hogy az $OABC$ négyszög rombusz.

E2 **3467.** A $K(6; 4)$, $L(2; 2)$ pontok által meghatározott szakasz felezőpontja legyen M. Forgassuk el az $O(-1; 4)$ pont körül a K pontot +90°-kal, az L pontot –90°-kal. Ekkor a K_1 és L_1 pontokat kapjuk. Bizonyítsuk be, hogy $\overline{K_1L_1} = 2\overrightarrow{OM}$ és $\overline{K_1L_1} \perp \overrightarrow{OM}$! Oldjuk meg a feladatot általánosan.

K2 **3468.** Az $A(1; 2)$, $B(8; 6)$, $C(3; -5)$ csúcsokkal adott háromszögben számítsuk ki az $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ súlyvonalvektorok koordinátáit.

K1 **3469.** Kössük össze a $P(-3; 2)$ pontot az origóval. Ezután a kapott szakaszt hosszabbítsuk meg mindkét irányban önmagával. Számítsuk ki a végpontok koordinátáit. Oldjuk meg a feladatot általánosan is! (Legyenek a $P(a; b)$ és $Q(r; s)$ a végpontok)

K1 **3470.** Az $A(0; 0)$, $B(3; 6)$; $C(8; -2)$ csúcsokkal megadott háromszöget az A pontból kétszeresére nagyítjuk. Számítsuk ki a kapott AB_1C_1 háromszög B_1 és C_1 csúcsainak koordinátáit.

E1 **3471.** Osszuk fel
a) a (3; –2); (10; 12) pontokat összekötő szakaszt 2 : 5, illetve 5 : 2 arányban;
b) az (5; 0); (4; 3) pontokat összekötő szakaszt 3 : 4, illetve 4 : 3 arányban.
Határozzuk meg az osztópontok koordinátáit.

E1 **3472.** Osszuk fel
a) a (2; –2), (6; 14) pontokat összekötő szakaszt négy egyenlő részre;
b) a (3; 5), (7; –2) pontokat összekötő szakaszt három egyenlő részre.
Számítsuk ki az osztópontok koordinátáit.

E1 **3473.** A(4; 3); (6; –1) pontokat összekötő szakaszt mindkét irányban megnyújtjuk másfélszeresére. Számítsuk ki a végpontok koordinátáit.

K1 **3474.** Egy négyszög csúcsainak koordinátái: $A(-2; -1)$, $B(12; -5)$, $C(6; 9)$, $D(-1; 5)$. Határozzuk meg az átlók felezőpontjait összekötő vektor koordinátáit.

E2 **3475.** Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(0; 0)$, $B(12; 0)$, $C(3; 9)$ Jelöljük az AB oldal A-hoz közelebb fekvő harmadolópontját K-val, a BC oldal B-hez közelebb fekvő harmadolópontját L-lel. Az AL és a CK szakaszok közös pontját jelöljük Q-val. Milyen arányban osztja a Q pont az AL, illetve a CK szakaszokat? Az ABQ háromszög területe az ABC háromszög területének hányad része?

E2 **3476.** Az OAB háromszög OA oldalának A-hoz közelebbi harmadolópontja D, az AB oldal A-hoz közelebbi harmadolópontja E. OE és BD metszéspontja P. Írjuk fel az $\overrightarrow{OP}$-t $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ segítségével.

Határozzuk meg az $\overrightarrow{OP}$ koordinátáit és a hosszát, ha $\mathbf{a}(5; 4)$ és $\mathbf{b}(2; 8)$.

K1 **3477.** Számítsuk ki a háromszög súlypontjának koordinátáit, ha a csúcsai a
a) (8; 2); (4; 6); (0; –2);
b) (6; 2); (–4; 1); (2; –3);
c) $\left(\sqrt{2}; -\sqrt{3}\right)$; $\left(-\sqrt{8}; \sqrt{12}\right)$; $\left(-\sqrt{32}; \sqrt{27}\right)$;
d) $\left(\frac{a-b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$; $\left(\frac{a-b}{3}; \frac{a+b}{3}\right)$; $(a+b; a-b)$ $(a, b \in \mathbf{R})$
koordinátájú pontok.

K2 **3478.** Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(-4; 8)$, $B(0; -2)$, $C(7; 0)$. A DEF háromszög csúcsainak koordinátái $D(1; 12)$, $E(6; 3)$, $F(14; 6)$. Az ABC háromszög súlypontja legyen S_1, a DEF háromszög súlypontja S_2.

Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 3\overrightarrow{S_1S_2}$. Oldjuk meg a feladatot általánosan.

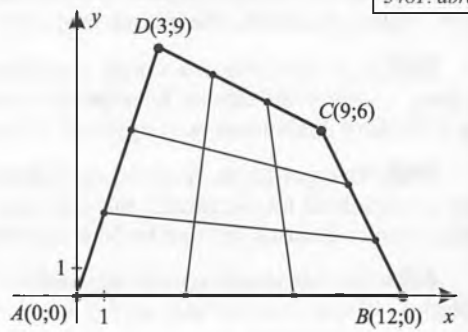
E2 **3479.** Egy tetraéder csúcspontjának koordinátái: $A(1; 3; 0)$, $B(8; 2; 0)$, $C(5; 10; 0)$, $D(6; 4; 16)$. Kössük össze a D csúcsot az ABC háromszög súlypontjával, majd az összekötő szakaszon határozzuk meg az ABC laphoz közelebbi negyedelőpont koordinátáit! Ez az S pont a tetraéder súlypontja. Mutassuk meg, hogy ha például az A csúcsból és a BCD oldallapból indulunk ki ugyanazt a pontot kapjuk. Oldjuk meg a feladatot általánosan. Legyenek a tetraéder csúcsainak helyvektorai $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$. Igazoljuk, hogy a súlypont helyvektora $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$.

V

K1 **3480.** Egy háromszög két csúcsának koordinátái (–4; –3) és (5; 12). A súlypontja az $S(2; -2)$ pont. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

K2 **3481.** Rajzoljuk meg az $A(0; 0)$, $B(12; 0)$, $C(9; 6)$, $D(3; 9)$ koordinátájú pontokkal megadott négyszöget. Harmadoljuk meg az oldalait, majd kössünk össze két-két harmadolópontot az *ábrán* látható módon. Igazoljuk, hogy ezek a szakaszok szintén harmadolják egymást.

3481. ábra



E1GY **3482.** Egy négyszög alakú telek csúcspontjai az (0; 0), (8; 0), (9; 3), (1;3) koordinátájú pontok. A BC oldal C-hez közelebbi harmadolópontja legyen H, a CD oldal felezőpontja legyen F. A telken két sétautat létesítünk, az AH és a BF utat. Milyen arányban osztja egymást a két sétaút?

K1 **3483.** Igazoljuk, hogy az

a) $A(1; 3)$, $B(4; 7)$, $C(2; 8)$, $D(-1; 4)$;

b) $A\left(\frac{3}{2};1\right)$, $B(2; 5)$, $C(3; -2)$, $D\left(\frac{5}{2};-6\right)$;

c) $A(1; 2)$, $B(-5; 1)$, $C\left(-6;-\frac{1}{2}\right)$, $D\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

pontok paralelogramma csúcsai.

K1 **3484.** Adott a paralelogramma három csúcsa:
a) (0; 0), (3; 1), (1;3); *b)* (4; 2), (5; 3), (6; –4); *c)* (1; 4), (3; 2), (6; 5).
Határozzuk meg a negyedik csúcs koordinátáit! Hány megoldás van?

K1 **3485.** Egy paralelogramma két szomszédos csúcspontjának koordinátái: $A(9; -3)$ és $B(0; 3)$. A paralelogramma középpontjának koordinátái (1; 6). Számítsuk ki a másik két csúcs koordinátáit.

E1 **3486.** Egy rombusz két szemközti csúcsának koordinátái:
$B(-3; 7)$, $D(5; 11)$. Az AC átló a BD átló kétszerese. Határozzuk meg az A és a C csúcsok koordinátáit.

E1 **3487.** Az $ABCD$ rombuszban $A(11; 8)$, $C(-9; -8)$. Számítsuk ki a B és a D csúcsok koordinátáit, ha $AC = 2 \cdot BD$.

E2 **3488.** Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(4; 1)$, $B(7; 5)$, $C(-4; 7)$. Számítsuk ki azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyekben a belső szögfelezők metszik az oldalakat.

E2 GY **3489.** Egyenes vonalú mozgást végző katicabogár mászik a négyzetrácsos táblán, és átmegy az $A(2; 6)$ és a $B(8; 1)$ koordinátájú pontokon. Mely pontokban metszi a katicabogár pályája a berajzolt koordinátatengelyeket?

E2 **3490.** Egy egyenes az x tengelyt az $A(6; 0)$, az y tengelyt a $B(0; 8)$ koordinátájú pontokban metszi. Határozzuk meg az OAB derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság talppontjának a koordinátáit! (O jelenti az origót).

E2 **3491.** Két kör középpontjának koordinátái: $O_1(2; 5)$, $O_2(7; 10)$. A sugaraik rendre $r_1 = 3$ és $r_2 = 7$ egység hosszúak. Határozzuk meg a két kör közös külső érintőinak a metszéspontját.

E1 **3492.** Egy négyszög csúcsainak koordinátái: (–4; –2), (8; 3), (5; 12), (0; 20). Igazoljuk, hogy a szemközti oldalak felezőpontjait összekötő szakaszok felezik egymást! Oldjuk meg a feladatot általánosan is. (Legyenek a csúcsok helyvektorai: $\mathbf{a}(a_1; a_2)$, $\mathbf{b}(b_1; b_2)$.

E2 **3493.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög súlypontján áthaladó tetszőleges egyenesre a csúcsokból merőlegeseket húzunk, akkor az egyenes egyik oldalán levő merőleges szakasz hossza a mások oldalon levő két merőleges távolság összegével egyenlő.

E2 **3494.** Egy háromszög oldalait ugyanolyan forgási irányban, azonos arányban meghosszabbítjuk. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett háromszögnek és az eredeti háromszögnek azonos a súlypontja.

V **3495.** Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyek csúcspontjainak koordinátáit a koordináta-rendszerben a –1, 0, 1 számok közül választjuk. Milyen távolságra lehet e háromszögek súlypontja az origótól?

E2 **3496.** Igazoljuk, hogy az AB és CD szakaszok középpontosan hasonlók, ha koordinátáik: $A(2; 3)$, $B(7; 5)$, $C(-6; 5)$, $D(9; 11)$. Mi lehet a hasonlóság középpontja és aránya?

E2 **3497.** Az $ABCD$ téglalap két szomszédos csúcsának koordinátái: $A\left(\frac{3}{2};1\right)$ és $B\left(\frac{9}{2};0\right)$.

Határozzuk meg a téglalap középpontjának koordinátáit, ha két szomszédos oldalának aránya 1 : 3.

Két pont távolsága

K1 **3498.** Számítsuk ki a következő pontoknak az origótól mért távolságát.

$P_1(3; 4)$, $P_2(3; -4)$, $P_3(-5; -12)$, $P_4(-3; -7)$, $P_5\left(\sqrt{2};\sqrt{7}\right)$,

$P_6\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2};\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$, $P_7(0; -3)$, $P_8(a; -a)$, $P_9(a + b; a - b)$ $(a, b \in \mathbf{R})$.

K1 **3499.** Számítsuk ki az $\mathbf{a}(4; 3)$, $\mathbf{b}(-5; 2)$, $\mathbf{c}(-10; -3)$, $\mathbf{d}(7; -6)$ vektorok abszolútértékét.

K1 **3500.** Számítsuk ki az

a) (1; 3), (4; 7); *b)* (–3; –2), (1; 5);

c) (–3; 6), (4; 2); *d)* (0; –4), (2; 3);

e) (–6; –2), (–1; –9); *f)* $\left(\frac{3}{2};-\frac{7}{4}\right)$; $\left(-\frac{3}{4};\frac{5}{2}\right)$;

g) $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$; *h)* $\left(-\sqrt{8};\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{2};-\sqrt{12}\right)$

pontok távolságát.

K1 **3501.** Számítsuk ki a háromszög kerületét, ha a csúcsainak koordinátái:
a) (2; 3), (5; 7), (10; –3); *b)* (3; 4), (–7; –6), (5; –1);
c) (–1; –1), (3; 7), (3; –5); *d)* $(a; b)$, $(a; -b)$, $(0; -b)$ $(a, b \in \mathbf{R}\setminus\{0\})$.

K1 **3502.** Igazoljuk, hogy
a) (3; 2), (7; –2), (6; 1); *b)* (1; 3), (3; –1), (7; –3)
pontok egyenlő szárú háromszög csúcsai. Számítsuk ki a háromszög területét.

K2 **3503.** Egy egyenlő szárú háromszög alapjának csúcsai az $A(2; 1)$ és a $B(6; 5)$ koordinátájú pontok. A harmadik csúcsa az x tengelyen van. Mekkora a háromszög területe?

K1 **3504.** Igazoljuk, hogy a
a) (10; 4), (3; –5), (1; 1); *b)* (2; 4), (–2; 3), (8; –20)
koordinátájú pontok derékszögű háromszöget feszítenek ki. Számítsuk ki a háromszög köré írt kör területét.

E1 **3505.** Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójának végpontjai: $A(2; 1)$, $B(-4; 3)$. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

K1 **3506.** Egy derékszögű háromszög befogói 12 és 5 egység hosszúak. Számítsuk ki a háromszög köré írt kör középpontjának a súlyponttól mért távolságát.

K2 **3507.** Egy háromszög csúcsai a (3; –1), (2; 4) és (–1; 5) koordinátájú pontok. Számítsuk ki a háromszög szögeit és a területét.

K2 **3508.** Számítsuk ki
a) a (–4; –3), (2; 8), (7; 9), (12; –10)
csúcsokkal megadott négyszög kerületét és a területét;
b) az (1; 0), $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, (0; 1), $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, (–1; 0), $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,
(0; –1), $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ csúcsokkal megadott nyolcszög területét.

K2 **3509.** Állapítsuk meg, hogy milyen négyszöget határoznak meg a következő pontok? Állításunkat igazoljuk!
a) (1; 3), (2; 1), (5; 2), (4; 4); *b)* (1; 1), (6; 1), (5; 4), (2; 4);
c) (2; 3), (3; 0), (0; –1), (–1; 2); *d)* (1; 5), (5; 1), (1; –3), (–3; 1);
e) $(a; 0)$, $(0; a)$, $(-a; 0)$, $(0; -a)$ $(a > 0)$.

K2 **3510.** Egy szabályos háromszög két csúcsának koordinátái: $A(4; 3)$, $B(8; 0)$. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

K2 **3511.** Egy kör középpontja a $P(0; -13)$ pont és érinti az x tengelyt. Ellenőrizzük, hogy a kör áthalad-e a $P_1(11; -6)$ és a $P_2(-5; -1)$ pontokon.

K2 **3512.** Határozzuk meg annak a körnek a sugarát, amelynek középpontja
a) a $C(3; 1)$ pont és a 6 hosszúságegységnyi húrját a $P(6; 5)$ pont felezi;
b) a $C(1; -1)$ pont és 10 hosszúságegységnyi húrját a $P(2; 0)$ pont felezi.

K2 **3513.** Milyen összefüggés van azoknak a pontoknak x és y koordinátái között, amelyek egyenlő távol vannak
a) a (4; 2) és a (–3; 3); *b)* a (–3; 5) és a (–4; –2)
koordinátájú pontoktól?

K2 GY 3514. Egy szabályos hatszög két szomszédos csúcsának koordinátái: $A(2; 0)$, $B\left(5; 3\sqrt{3}\right)$. Virágágyást akarunk készíteni. Adjuk meg a hatszög középpontjának és a hiányzó csúcsok koordinátáit. (A valóságban 1 egység = 0,5 méter.)

K1 3515. Határozzuk meg az x tengely azon pontjának koordinátáit, amely egyenlő távol van az origótól és a $(9; -3)$ ponttól?

K1 3516. Határozzuk meg az x tengelynek azt a pontját, amely a $(2; 1)$ és a $(6; 5)$ koordinátájú pontoktól egyenlő távolságra van.

K1 3517. Számítsuk ki az y tengely olyan pontjának a koordinátáit, amely 15 egység távolságra van a $P(-5; -9)$ ponttól.

K2 3518. Határozzuk meg a kör középpontjának koordinátáit, ha a kör áthalad a $(-4; 2)$ ponton és az x tengelyt a $(2; 0)$ pontban érinti.

E1 3519. Határozzuk meg a kör középpontjának koordinátáit, ha áthalad a $(4; 2)$ koordinátájú ponton és mindkét koordinátatengelyt érinti.

E1 GY 3520. Sík terepen két egyenes országút derékszögben metszi egymást. Legyenek ezek az egyenesek a koordináta-rendszer tengelyei. Két tereppont A és B koordinátái, $(-4; 2)$ és $(8; -6)$. Az országutak mely pontjaiból látszik az AB szakasz derékszögben?
(A valóságban 1 egység = 0,1 km).

E1 3521. Az x tengely mely pontjából látszik az AB szakasz derékszögben, ha $A(-1; 3)$, $B(7; 3)$.

E2 3522. Az AB szakasz végpontjának koordinátái $A(6; a)$, $(a > 0)$ és $B(-2; 1)$. Határozzuk meg az A pont koordinátáit úgy, hogy az x tengelynek csak egy olyan pontja legyen, amelyből az AB szakasz derékszögben látszik?

E1 3523. Az $ABCD$ téglalap két szemközti csúcsának koordinátái: $A(-6; 0)$ és $C(1; -1)$. A B csúcs az y tengelyre illeszkedik. Számítsuk ki a B és a D csúcs koordinátáit.

E1 3524. Egy $ABCD$ téglalap két szemközti csúcsának koordinátái: $A(2; -2)$, $C(4; 6)$. A B csúcs az y tengelyre illeszkedik. Számítsuk ki a B és a D csúcsok koordinátáit, és a téglalap területét.

E2 3525. Egy $ABCD$ téglalap két csúcsának koordinátái: $A(-2; 4)$ és $B(7; 16)$. Számítsuk ki a téglalap köré írható kör középpontjának koordinátáit, ha két szomszédos oldal aránya $1 : 3$. Hány megoldás van?

E1 3526. Egy deltoid három csúcsának koordinátái: $A(8; 5)$, $B(5; 6)$ és $C(2; 2)$; a szimmetriatengelye az AC egyenes. Számítsuk ki a deltoid negyedik csúcsának koordinátáit! Mekkora a deltoid területe?

E2 3527. Egy rombusz területe 27 területegység, két szemközit csúcsának koordinátái: $A(-4; -5)$, $C(5; 4)$. Számítsuk ki a rombusz másik két csúcsának koordinátáit.

E2 3528. Egy rombusz két szemközti csúcsának koordinátái: $A(0; 0)$ és $C(2; 4)$. Az A és a C csúcsnál fekvő szög 120°-os. Számítsuk ki a hiányzó csúcsok koordinátáit!

E2 3529. Az **a** és a **b** vektorok koordinátái: $\mathbf{a}(4; 2)$, $\mathbf{b}(-2; b)$. Határozzuk meg a b értékét úgy, hogy a két vektor hajlásszögét az y tengely felezze.

K2 **3530.** Egyenlő szárú háromszögben az alap végpontjainak koordinátái (–1; –1) és (8; 2), a szára 5 hosszúságegység. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit és a háromszög területét.

K2 **3531.** Számítsuk ki a háromszög köré írható kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát, ha a csúcsainak koordinátái:
a) (1; 5), (8; 2), (–6; –2); *b)* (2; 1), (–3; 2), (–1; –4);
c) (0; 2), (1; 1), (2; –2); *d)* (7; 7), (0; 8), (–2; 4);
e) (4; 0), (1; 2), (3; –6).

E1 **3532.** Egy háromszög oldalainak felezőpontjai: $A(-7; -2)$, $B(-1; 9)$ és $C(5; -3)$. Számítsuk ki a háromszög köré írható kör területét.

E1 **3533.** Számítsuk ki az $A(1; 2; 3)$, $B(-4; 8; 12)$, $C(2; -1; -5)$ csúcsokkal megadott háromszög kerületét, területét, a háromszög köré írható kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarának a hosszát.

E1 **3534.** Tekintsük az $A(0; 9)$, $B(6; 3)$, $C\left(-\frac{1}{3}; -1\right)$, $D\left(3; -\frac{7}{2}\right)$ koordinátájú pontokat. Határozzuk meg a P pont koordinátáit, ha $PA = PB$ és $PC : PD = 2 : 3$.

E2 **3535.** Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-9; 2)$, $B(6; 8)$, $C(0; 11)$. Jelöljük a háromszög súlypontját S-sel.
Igazoljuk, hogy $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3\,(AS^2 + BS^2 + CS^2)$. Oldjuk meg a feladatot általánosan.

V **3536.** Adottak az ABC háromszög csúcsainak koordinátái és a háromszög síkjában az e egyenes. Határozzuk meg az e egyenesen annak a P pontnak a koordinátáit, amelynek a csúcsoktól mért távolságaira a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg a legkisebb. Hogyan szerkesztenénk meg az e egyenesen a megoldást adó P pontot?

V GY **3537.** Pulikutya futkározik egy 1 km oldalhosszúságú négyzet alakú kertben, és annak határán. Milyen határok között változhat Pulinktól a négyzet négy csúcsáig terjedő távolságok négyzetének az összege? Hol pihenjen a pulikutya, hogy ez a négyzetösszeg minimális vagy maximális legyen?

Az egyenes egyenletei

K1 **3538.** Írjuk fel
a) a $P(5; 2)$ ponton áthaladó $\mathbf{n}(4; 3)$ normálvektorú;
b) a $P(-3; 4)$ ponton áthaladó $\mathbf{n}(2; 1)$ normálvektorú;
c) a $P(-5; -6)$ ponton áthaladó $\mathbf{n}(-2; 3)$ normálvektorú;
d) a $P(0; 0)$ ponton áthaladó $\mathbf{n}(-1; -3)$ normálvektorú;
e) a $P(0; 5)$ ponton áthaladó $\mathbf{n}(0; 3)$ normálvektorú;
f) a $P(-40; 0)$ ponton áthaladó $\mathbf{n}(3; 0)$ normálvektorú;
g) a $P(8; -7)$ ponton áthaladó $\mathbf{n}(-1; -1)$ normálvektorú
egyenes egyenletét.

K1 **3539.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad
a) a $P(0; 0)$ ponton és irányvektora $\mathbf{v}(2; 3)$;
b) a $P(-2; 1)$ ponton és irányvektora $\mathbf{v}(3; \sqrt{3})$;
c) a $P(4; 0)$ ponton és irányvektora $\mathbf{v}(-1; \sqrt{3})$;
d) a $P(3; -2)$ ponton és irányvektora $\mathbf{v}(1; 1)$;
e) a $P(3; -2)$ ponton és irányvektora $\mathbf{v}(4; 4)$;
f) a $P(3; 5)$ ponton és irányvektora $\mathbf{v}(1; -1)$;
g) a $P\left(-4\frac{1}{2}; -3\frac{1}{4}\right)$ ponton és irányvektora $\mathbf{v}(5; -2)$;
h) a $P(4; -5)$ ponton és irányvektora $\mathbf{v}(0; 4)$.

K1 **3540.** Írjuk fel
a) a (9; 6) és a (4; 3);
b) a (4; 6) és a (–3; –1);
c) a (–2; –3) és a (4; –1);
d) a (4; 5) és a (0; 0);
e) a $\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$ és a $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$;
f) a (0,8; 1,2) és az (1,2; 0,2);
g) a $\left(0; \frac{3}{5}\right)$ és a $\left(0; -\frac{5}{2}\right)$;
h) a (0; 8) és a (–3; 0);
i) az $(a; a)$ és a $(b; b)$, $a \neq 0$ és $b \neq 0$;
j) a $\left(\sqrt{3}; \sqrt{2}\right)$ és a $\left(3\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\right)$
koordinátájú pontokon átmenő egyenes egyenletét.

E1 **3541.** Igazoljuk, hogy a $P_1(x_1; y_1)$ és a $P_2(x_2; y_2)$ pontokon átmenő egyenes egyenlete: $(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$.
Írjuk fel az egyenes egyenletét, ha $(x_1 = x_2)$ vagy $(y_1 = y_2)$.

K2 **3542.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek tengelymetszetei:
a) 4 és 6,
b) –3 és 4;
c) 5 és –6;
d) $\frac{2}{3}$ és 4;
e) $\frac{4}{3}$ és $\frac{4}{5}$;
f) a és a $(a \neq 0)$;
g) a és $-a$ $(a \neq 0)$.
(Ha az egyenes metszi a koordináta-rendszer tengelyeit, vagy az egyik tengelyt, akkor az x tengelyre illeszkedő metszéspont a abszcisszáját és az y tengelyre illeszkedő metszéspont b ordinátáját az egyenes tengelymetszeteinek mondjuk. Például a fenti *a)* példában $a = 4$ és $b = 6$. És így tovább.)

E1 **3543.** Igazoljuk, hogy az a és b tengelymetszetekkel megadott egyenes egyenlete: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, ahol $ab \neq 0$.
A koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamos egyenes egyenlete: $x = a$, illetve $y = b$.

K1 **3544.** Írjuk fel a (0; 7) ponton átmenő olyan egyenes egyenletét, amelynek irányszöge 30°, 60°, –45°, 0°.

K1 **3545.** Igazoljuk, hogy a következő elsőfokú (lineáris) egyenletek egyenes egyenletei, azaz adjuk meg olyan pontnak a koordinátáit, amelyen az egyenes áthalad és adjuk meg az egyenes normálvektorát (vagy irányvektorát).
a) $3x + 4y = 8$;
b) $4x - y = 12$;

c) $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=5$ *d)* $y=\sqrt{3}x-4$;

e) $\frac{x-3}{4}+\frac{y-5}{3}=8$; *f)* $x-4=0$; *g)* $y+3=0$.

Számítsuk ki az adott egyenesek irányszögét.

K1 **3546.** Ellenőrizzük, hogy rajta van-e, (illeszkedik-e)
a) az $x-y=1$ egyenesen a $P(7; 6)$ pont;
b) az $2x-y=3$ egyenesen a $P(1; 1)$ pont;
c) az $\frac{x}{2}+y=1$ egyenesen a $P(2; 0)$ pont;
d) a $4x-y=6$ egyenletű egyenesen az $(1; 2)$; a $(2; -1)$; a $(4; -10)$ koordinátájú pont;
e) a $2x-3y+4=0$ egyenletű egyenesen az $(1; 3)$; a $(-2; 0)$; a $(7; 6)$, a $(10; 8)$ koordinátájú pont.

K1 **3547.** Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy a $P(-1; 6)$ pont illeszkedjen az $5x-y=a$ egyenletű egyenesre.

K2 **3548.** Határozzuk meg az a és a b paraméterek értékét úgy, hogy
a) a $P_1(2; 3)$ és a $P_2(7; 4)$ pontok;
b) a $P_1(3; -2)$ és a $P_2(4; 2)$ pontok;
c) a $P_1(7; 2)$ és a $P_2(1; 3)$ pontok
illeszkedjenek az $ax+by=1$ egyenletű egyenesre.

K1 **3549.** Határozzuk meg a $2x-y+3=0$ egyenletű egyenesnek azt a pontját, amelynek koordinátái egyenlők.

K1 **3550.** Adjuk meg a $3x+5y=15$ egyenletű egyenesnek azt a pontját, amelynek abszcisszája kétszer akkora, mint az ordinátája.

K1 **3551.** Adjuk meg három olyan pont koordinátáit, amelyek a $2x-7y=-3$ egyenletű egyenesre illeszkednek.

K2 **3552.** Adjuk meg a $4x+3y=6$ egyenletű egyenes azon pontjainak koordinátáit, amelyek az x tengelytől +6, illetve –6 egységnyi távolságra vannak.

K2 **3553.** A $P(4; 2)$ ponton átmenő egyenes az x tengelyt az $(a; 0)$, az y tengelyt a $(0; b)$ pontban metszi. Fejezze ki b-t a függvényeként.

K2 **3554.** Egy rombusz átlóinak hossza 10 és 8 egység. Írjuk fel a rombusz oldalegyeneseinek, átlóegyeneseinek egyenletét, ha az átlók a koordináta-rendszer tengelyeire illeszkednek.

K2 **3555.** Ábrázoljuk a tengelymetszetek segítségével az

a) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$; *b)* $x+\frac{y}{3}=1$; *c)* $2x+\frac{y}{2}=1$; *d)* $3x+2y=6$;

e) $8x+5y=40$; *f)* $y=-x+3$; *g)* $y=\frac{2}{5}x-8$

egyenletű egyeneseket.

K2 **3556.** Számítsuk ki annak a háromszögnek a területét, amelyet a(az)

a) $4x + 3y = 24$; *b)* $\frac{3x-y}{2} = \frac{4y-5}{3}$; *c)* $y = \frac{3}{2}x - 3$

egyenletű egyenes zár be a koordináta-rendszer tengelyeivel.

K2 **3557.** A koordinátatengelyek mely pontjai vannak egyenlő távolságra az $A(-1; 6)$ és a $B(9; 12)$ pontoktól?

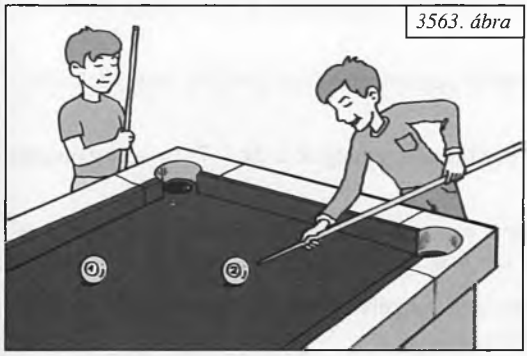
E1 **3558.** Írjuk fel az $A(-4; 2)$, $B(12; -8)$ és a $C(6; 4)$ koordinátájú pontoktól egyenlő távol haladó egyenesek egyenletét.

K2 **3559.** Írjuk fel a $4x + 1001y = 2002$ egyenletű egyenes és a koordinátatengelyek által meghatározott háromszög belsejének azon egész koordinátájú pontját, amely az origótól a legtávolabb van.

E1 **3560.** Igazoljuk, hogy az origón átmenő, x tengellyel 60°-os szöget bezáró egyenes nem megy át – az origón kívül – egyetlen olyan ponton sem, amelynek koordinátái racionális számok.

E2 **3561.** Hány olyan egyenes illeszkedik a sík $P(4; 3)$ pontjára, amely az x tengelyt egész abszcisszájú pontjában, az y tengely pozitív felét prímszám ordinátájú pontjában metszi? Írjuk fel ezeknek az egyeneseknek az egyenletét.

E2 **3562.** Írjuk fel az $A(5; 2)$, $B(8; 6)$, $C(-3; 8)$ pontokkal megadott háromszög szögfelező egyeneseinek egyenletét.



3563. ábra

E2 GY **3563.** A biliárdasztalon van két golyó A és B pontokban. Rugalmas ütközést feltételezve az oldalfal mely pontjába irányítsuk az A pontbanban levő golyót, hogy az oldalfalról visszapattanva eltaláljuk a B pontban levőt. Az oldalfal legyen az y tengely, a golyók helye: $A(2; 3)$ és $B(6; -4)$. Ha az oldalfal megfelelő pontját P jelöli, akkor igazoljuk, hogy $AP + PB$ út hossza minimális az A-ból B-be vezető azon utak közül, amikor az y tengelyt is kell érinteni.

E2 GY **3564.** Egyenes vonalú folyó egyik partján két sátor helyezkedik el. A sátorból elindul egy nyaraló a B sátorhoz úgy, hogy közben elmegy a folyóhoz fürdeni. Ha a folyópartot x tengelynek tekintjük, az A koordinátái (1; 3), a B koordinátái (12; 8), a folyó mely C pontját célszerű úgy megválasztani, hogy az $AC + CB$ útvonal a lehető legrövidebb legyen?

E1 **3565.** Egy ABC háromszögben két csúcs koordinátái $A(3; 2)$, $B(5; -3)$. A csúcsnál fekvő szöget az x tengely felezi. Számítsuk ki a C csúcs koordinátáit.

E1 **3566.** A $3x - 4y = 16$ egyenletű egyenest eltoljuk a $\mathbf{v}(4; -2)$ vektorral. Írjuk fel az eltolt egyenes egyenletét.

K2 **3567.** Határozzuk meg azon P pontok halmazát (mértani helyét), amelyekre
$PA^2 - PB^2 = 20$,
ahol az $A(-4; 0)$ és a $B(2; 6)$ koordinátájú pontok.

E1 **3568.** Mi annak az egyenesnek az egyenlete, amely átmegy a $P(3; 7)$ ponton, és a P felezi az egyenesnek a koordinátatengelyek közti szakaszát?

K2 **3569.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $P(6; -1)$ koordinátájú ponton és a tengelymetszeteinek szorzata: $ab = 6$ ($a > 0$ és $b > 0$).

E1 **3570.** Írja fel a $P(3; 1)$ ponton átmenő azon egyenes egyenletét, amely a koordinátatengelyek pozitív felével 8 egység területű háromszöget határol.

V **3571.** Határozzuk meg a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben azokat a pontokat, amelyek egyenlő távolságra vannak az x tengely $[-2; 2]$ és az y tengely $[1; 3]$ szakaszától!

E1 **3572.** Tükrözzük a $3x - 4y = 4$ egyenletű egyenest
a) az y tengelyre; *b)* a $C(1; 6)$ pontra!
Írjuk fel a tükörképegyenesek egyenletét.

E1 **3573.** Egy e egyenes áthalad a $(7; 4)$ koordinátájú ponton és a -1 abszcisszájú pontja felezi az egyenesnek a $(7; 4)$ pont és az x tengely közötti szakaszát. Írjuk fel az e egyenes egyenletét.

K2 **3574.** Egy szabályos hatszög középpontja a koordináta-rendszer kezdőpontja. A hatszög egyik csúcsa a $(6; 0)$ koordinátájú pont. Írjuk fel az oldalak egyenletét.

K1 **3575.** Írjuk fel a háromszög súlyvonalainak és a középvonalainak egyenletét, ha a csúcspontok koordinátái:
a) $A(3; 7)$, $B(1; 1)$, $C(8; -4)$; *b)* $A(2; 3)$, $B(-4; -2)$, $C(6; -6)$.

K1 **3576.** Igazoljuk, hogy
a) az $(1; -9)$, $(7; 6)$ és a $(3; -4)$, *b)* a $(0; 2)$, $(4; 1)$ és a $(16; -2)$
koordinátájú pontok egy egyenesre illeszkednek.

K2 **3577.** Mi a feltétele annak, hogy az $(a; b)$, $(b; a)$, $(2a; -b)$ koordinátájú pontok egy egyenesre illeszkedjenek, ha $a \neq b$?

K2 GY3578. Adott egy síkterepen három pont a koordinátáikkal: $A(1; 6)$, $B(1; 1)$, $C(3; 5)$. Olyan egyenes utakat szeretnénk kialakítani, amelyek áthaladnak az A ponton, a B és a C pontoktól pedig egyenlő távolságra vannak. Írjuk fel az utakat jelképező egyenesek egyenletét! Számítsuk ki, hogy B és a C pontok hány méter távolságra vannak az utaktól, ha 1 egység = 1 méter.

E2 **3579.** Egy egyenlő szárú háromszög súlypontja az origóban van, az alapja az $y = -2$ egyenletű egyenesre illeszkedik és az alapon fekvő szögei 30°-osak. Írjuk fel a száregyenesek egyenletét és számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.

K2 **3580.** Az ABC háromszög AB oldalegyenesének egyenlete: $2x - 3y - 9 = 0$. Az A és a B csúcsok abszcisszái 3, illetve 9. A súlypont koordinátái: $(5; 4)$. Írjuk fel az AC és a BC oldal egyenesének egyenletét. Számítsuk ki a háromszög kerületét és a szögeit.

K2 **3581.** Az $A(5; 4)$ pontból kiinduló fénysugár visszaverődik az x tengelyen, és áthalad a $B(-2; 3)$ ponton. Írjuk fel a beeső és a visszavert fénysugár egyenletét.

K2 **3582.** Határozzuk meg a koordináta-rendszer x tengelyén a P pont koordinátáit úgy, hogy az APB törött vonal hossza minimális legyen, ha $A(-4; 8)$ és a $B(2; 4)$ koordinátájú pontok.

E1 **3583.** Határozzuk meg a koordináta-rendszerben azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek $(x; y)$ koordinátái kielégítik a következő egyenletet:
$(3x - 2y)(x - y + 1)(4x - 2y + 1) = 0$.
Ábrázoljuk a megoldást.

V **3584.** A λ paraméter milyen értéke mellett jelent a következő egyenlet egyenespárt:
$\lambda x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$.

E1 **3585.** Két metsző egyenes hajlásszögén a két egyenes által meghatározott 2–2 egyenlő szög közül a nem nagyobb szöget értjük.
Ha a két metsző egyenes nem merőleges egymásra, akkor az ω hajlásszögükre

$$\cos \omega = |\cos (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)|,$$

ahol $\mathbf{n}_1$ az e_1 $\mathbf{n}_2$ az e_2 egyenes normálvektora.
Számítsuk ki a következő egyenletekkel megadott egyenesek hajlásszögét.

a) $x - 2y + 4 = 0$,	$3x - 2y - 6 = 0$;	*b)* $5x - 3y - 12 = 0$,	$3x + y - 6 = 0$;
c) $3x - y = 0$,	$2x + y - 5 = 0$;	*d)* $4x + 1 = 0$,	$2x + 3y - 6 = 0$;
e) $4x - 6 = 0$,	$5y - 3 = 0$;	*f)* $2x - 3y - 9 = 0$,	$x + y - 1 = 0$;
g) $A_1x + B_1y + C_1 = 0$,	$A_2x + B_2y + C_2 = 0$.		

K2 **3586.** Igazoljuk, hogy a $(-4; -3)$, $(-1; 5)$, $(14; 5)$, $(11; -3)$ koordinátájú pontok egy paralelogramma csúcsai. Számítsuk ki az átlók hajlásszögét.

V **3587.** Igazoljuk, hogy ha az y tengelyt metsző m_1 és m_2 iránytangensű egyenesek nem merőlegesek egymásra, akkor az ω hajlásszögükre

$$\operatorname{tg} \omega = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|.$$

E1 **3588.** Számítsuk ki a háromszög szögeit, ha oldalegyeneseik egyenlete:

a) $y = 2x - 1$;	$y = x + 3$;	$y = -2x - 4$;
b) $x - 5y + 9 = 0$;	$3x + 2y - 7 = 0$;	$2x + y + 1 = 0$.

E1 **3589.** Számítsuk ki a $(-3; -2)$ és az $(5; 8)$ koordinátájú pontokon átmenő egyenes és a $6x + 5y = 30$ egyenletű egyenes hajlásszögét.

E1 **3590.** Mekkora szöget zárnak be egymással az $(1; 8)$ és a $(6; 2)$ koordinátájú pontokból az origóba húzott szakaszok?

E2 **3591.** Egyenlő szárú háromszög alapegyenesének egyenlete $x + y - 1 = 0$. Az egyik szár egyenesének egyenlete $x - 2y - 2 = 0$. A másik szárra illeszkedő pont koordinátái $(-2; 0)$. Határozzuk meg a harmadik oldal egyenesének egyenletét.

E2 **3592.** Írjuk fel a $P(-3; 2)$ ponton áthaladó és az $5x - 9y = -43$ egyenletű egyenessel 45°-os szöget bezáró egyenes egyenletét.

E2 **3593.** Írjuk fel a $P(5; 4)$ ponton áthaladó egyenes egyenletét, amely az $y = -x + 7$ egyenletű egyenessel 60°-os szöget alkot.

E1 **3594.** Számítsuk ki a négyszög átlóinak hajlásszögét, ha egymásután következő csúcsainak koordinátái:

a) $A(-1; 2)$,	$B(6; 1)$,	$C(5; 6)$,	$D(1; 5)$;
b) $A(5; 4)$,	$B(-2; 7)$,	$C(-3; -6)$,	$D(4; -5)$.

E2 **3595.** Igazoljuk, hogy a $3x - 4y - 20 = 0$, $3x + 5y - 20 = 0$, $4x - 3y + 12 = 0$, $5x + 3y + 15 = 0$ egyenletű egyenesek húrnégyszöget zárnak be.

V **3596.** Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő oldalú háromszög csúcsainak koordinátái nem lehetnek valamennyien egész számok.

V **3597.** Írjuk fel az egyenes paraméteres egyenletrendszerét a koordináta-rendszer síkjában, ha az egyenes átmegy a $P_0(4; 7)$ ponton és az irányvektora $\mathbf{v}(2; -3)$.

V **3598.** Írjuk fel az egyenes paraméteres egyenletrendszerét, ha az egyenes átmegy a
a) $P_0(1; -1; 2)$ ponton és irányvektora $\mathbf{v}(5; 1; -3)$;
b) $P_0(0; 0; 0)$ ponton és irányvektora $\mathbf{v}(1; 2; -1)$;
c) $P_0(2; 3; 4)$ ponton és irányvektora $\mathbf{v}(0; 1; 2)$;
d) $P_0(7; -2; 5)$ ponton és irányvektora $\mathbf{v}(0; 0; 1)$.
Írjuk fel a fenti egyenesek egyenletrendszerét. (Azaz: iktassuk ki a paramétert!)

V **3599.** Írjuk fel az A, B pontokon átmenő egyenes paraméteres egyenletrendszerét, ha
a) $A(1; 2; -3)$, $B(2; -1; -5)$; *b)* $A(0; 1; 3)$, $B(-2; -3; 7)$.

V **3600.** Határozzuk meg az egyenes egy pontjának és irányvektorának koordinátáit, ha az egyenes egyenletrendszere:

a) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-7}{6}$; *b)* $\frac{x}{2} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-5}{4}$; *c)* $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{2}$.

V **3601.** Egy egyenes egyenletrendszere: $\frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{5} = \frac{z+1}{2}$.
Határozzuk meg a $P_0(1; y; z)$ pont y és z koordinátáit úgy, hogy a P_0 pont illeszkedjen az adott egyenesre.

V **3602.** Határozzuk meg az $\frac{x-1}{2} = \frac{y+7}{3} = z$ és az $\frac{x}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{5}$ egyenletrendszerrel megadott egyenesek hajlásszögét.

V **3603.** Írjuk fel
a) a $P_0(1; 5; -7)$ ponton átmenő, $\mathbf{n}(1; -1; 2)$ normálvektorú sík egyenletét;
b) a $P_0(-2; 3; 8)$ ponton átmenő, $\mathbf{n}(-1; -1; -1)$ normálvektorú sík egyenletét.

V **3604.** Írjuk fel a $P_0(2; 5; 5)$ ponton átmenő és az xy síkkal párhuzamos sík egyenletét.

V **3605.** Mutassuk meg, hogy az $A(1; 0; 2)$, $B(4; 3; -1)$, $C(0; 3; -1)$, $D(5; -2; 4)$ koordinátájú pontok egy síkban vannak.

V **3606.** Határozzuk meg a sík egy pontjának és egy normálvektorának koordinátáit, ha az egyenlete:
a) $2x + 5y - 4z = 11$; *b)* $2x - 11y = 7$; *c)* $6x = 13$.

V **3607.** Írjuk fel
a) az $A(1; 2; 3)$, $B(-1; -2; 3)$; *b)* az $A(2; 4; 5)$, $B(-6; -2; 1)$
pontok meghatározta szakasz felezőmerőleges síkjának az egyenletét.

V **3608.** Írjuk fel az $A(-2; 3; 4)$, $B(5; 2; -1)$, $C(1; -4; -6)$ pontok által meghatározott sík egyenletét. Határozzuk meg a z koordináta értékét úgy, hogy a $D(1; 1; z)$ pont illeszkedjen az ABC síkra!

V **3609.** Számítsuk ki a $2x + 5y + 7z = 3$ sík és az $x = 2 + 3t$, $y = -5 + 4t$, $z = 2t$ egyenes hajlásszögét.

Két egyenes metszéspontja. Pont távolsága egyenestől, síktól

K1 **3610.** Számítsuk ki a következő egyenesek közös pontjának (metszéspontjának) a koordinátáit, ha az egyenesek egyenletei:

a) $x = -3$, $y = 5$; *b)* $x = 4$, $y = 3x - 4$;

c) $2x - 3y = 8$ $y = 1$; *d)* $y = \frac{x}{2} - 2$, $y = -2x + 5$;

e) $x + 2y = 12$, $5x - 3y = -5$; *f)* $2x + 7y - 8 = 0$, $9x - 4y + 35 = 0$;

g) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$; *h)* $\frac{y-1}{x-1} = 3$, $\frac{y-2}{x-1} = 2$,

i) $ax_1 + b_1y = c_1$ $ax_2 + b_2y = c_2$.

A *h)* egyenletek miért egyenes egyenletei? Az *i)* egyenletrendszer milyen feltételek mellett oldható meg?

K1 **3611.** Számítsuk ki a háromszög csúcspontjainak koordinátáit, ha az oldalegyenesek egyenletei:

a) $4x - 5y = -13$, $7x + 2y = 31$, $3x + 7y = 1$;

b) $3x - y - 4 = 0$, $x - 4y - 4 = 0$, $2x + y = 3$;

c) $y = 2x + 3$, $\frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 1$, $3x + 5y + 10 = 0$.

K1 **3612.** Az ABC háromszögben az AC oldalegyenes egyenlete $7x + 5y = 54$, az A csúcsból kiinduló súlyvonal egyenlete $6x + y = 20$, a C csúcsból kiinduló súlyvonal egyenlete $9x + 13y = 30$. Számítsuk ki a háromszög csúcsainak és súlypontjának koordinátáit!

K2 **3613.** Az ABC háromszögben az AB oldalegyenes egyenlete $3x - 2y + 1 = 0$, az AC oldalegyenes egyenlete $x - y + 1 = 0$, a C csúcsból induló súlyvonal egyenlete $2x - y - 1 = 0$. Írjuk fel a BC oldalegyenes egyenletét.

E1 **3614.** Az ABC háromszög A csúcsának koordinátái $(-4; 2)$, két súlyvonalának egyenlete: $3x + 5y - 12 = 0$ és $3x - 2y + 2 = 0$. Számítsuk ki a B és a C csúcsok koordinátáit.

K2 **3615.** Határozzuk meg az ABC háromszög csúcsainak koordinátáit, ha az AC oldal egyenlete $3x - 10y = -16$, az A-ból induló súlyvonal egyenlete $y = 1$ és az AB oldal felezőpontja $F\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

K2 **3616.** Adott két egyenes e_1 és e_2 és egy S pont. Az e_1 egyenlete $y = \frac{1}{3}x - 4$, e_2 egyenlete $y = 4x + 18$, az S pont koordinátái $(2; 4)$. Az ABC háromszög két oldala az adott egyenesekre illeszkedik és súlypontja az adott pont. Számítsuk ki a háromszög csúcspontjainak koordinátáit.

K1 **3617.** Egy háromszög egyik oldalának egyenlete $55y + 18x - 256 = 0$. Erre az oldalra eső két csúcsának abszcisszái: $x_1 = 2$, $x_2 = 7{,}5$. A háromszög súlypontja $S(5; 6)$. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

K2 **3618.** Az ABC háromszög két csúcspontja $A(1; 2)$ és $B(-1; -1)$. A C csúcshoz tartozó belső szögfelező egyenlete $2x + y = 1$. Határozzuk meg a C pont koordinátáit.

K1 **3619.** Adjuk meg annak a háromszögnek a súlypontját, amelynek csúcsai az $x + y = 11$, $2x - 3y = -18$, $x - 4y = -19$ egyenesek alkotta háromszög oldalfelező pontjai.

E2 **3620.** Határozzuk meg az $y = \frac{x}{2} + 1$ és az $y = 2x - 2$ egyenletű egyenesek által bezárt hegyesszög szögfelező egyenesének az egyenletét.

K1 **3621.** Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(-2; 3)$, $B(8; -1)$, $C(12; 10)$. Számítsuk ki a C csúcsból húzott súlyvonal tengelymetszeteit! (Azaz: mely pontokban metszi a súlyvonal az x és az y tengelyt?)

K1 **3622.** Az e egyenes áthalad az origón, irányvektora $\mathbf{v}(4; 3)$, az f egyenes két pontja $A(1; 7)$, $B(22; -21)$. Számítsa ki e és f metszéspontját és a metszéspont távolságát A-tól.

K2 **3623.** Adott az e: $x - y + 8 = 0$ és az f: $x + 2y = 6$ egyenletű egyenes. Határozzuk meg a két egyenes metszéspontját, hajlásszögét és annak a síkidomnak a területét, amelyet a két egyenes a koordinátatengelyekkel bezár.

K2 **3624.** Adott két egyenes és egy pont. Az e_1 egyenlete $y = \frac{1}{3}x - 4$, az e_2 egyenlete $y = 4x + 18$, a pont $H(8; 6)$. Egy háromszög két oldala az adott egyeneseken van, a H pont a harmadik oldal az (e_1 egyeneshez közelebbi) harmadolópontja. Számítsuk ki a háromszög csúcsainak koordinátáit.

E1 **3625.** Döntsük el, hogy a $P(15{,}2; 12{,}4)$ pont benne van-e abban a háromszögben, amelyet a $8x - 15y - 35 = 0$, az $x - 2y - 2 = 0$ és az $y = 0$ egyenletű egyenesek határolnak.

E2 **3626.** Mely valós c számokra igaz, hogy a $P(c; c^2)$ pont az $y = 2x + 2$, $x + y = 2$, $3x + 5y = 36$ egyenletű egyenesek által határolt háromszög belsejében van?

K1 **3627.** Egy négyszög csúcsai: $A(0; 0)$, $B(0; -1)$, $C(1; 0)$, $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Jelölje K az AB és CD oldalegyenesek metszéspontját. Számítsuk ki az AK távolságot.

K2 **3628.** A középpontosan szimmetrikus $ABCDEF$ hatszög AC átlójának egyenlete $5x + y = 5$, az AE átlójának egyenlete $x + 6y = 30$, a CE átlójának egyenlete $4x - 5y = 4$. Számítsuk ki a hatszög csúcsainak koordinátáit, ha a szimmetria-középpontjának koordinátái: $K(2; 3)$.

E1 **3629.** Számítsuk ki annak a háromszögnek a területét, amelyben az oldalegyenesek egyenletei: $x + y = 8$, $x - y = 2$, $y = 0$. [Számítsuk ki a háromszög területét!] Forgassuk a háromszöget az x tengely körül. Számítsuk ki a keletkezett kettős kúp felszínét és térfogatát.

K1 **3630.** Állapítsuk meg, hogy az alábbi egyenletekkel megadott egyenesek közül melyik három egyenesnek van közös pontja:

a) $3x - 4y + 9 = 0$,	$x + 2y + 4 = 0$,	$5x - 7y + 6 = 0$;
b) $4x - 6y + 15 = 0$,	$5x + 4y + 13 = 0$,	$x + 12y - 3 = 0$;
c) $3x - y - 1 = 0$,	$2x + y - 4 = 0$,	$x - y + 1 = 0$;
d) $x + 3y - 1 = 0$,	$5x + y - 10 = 0$,	$3x - 5y - 5 = 0$.

K2 **3631.** Három egyenes közül az első áthalad az origón és irányvektora $\mathbf{v}(1; 1)$, a második tengelymetszetei 3 és 6 (az egyenes áthalad a (3; 0) és a (0; 6) koordinátájú pontokon), a harmadik egyenesre illeszkednek a $\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ és a $(-1; 1)$ koordinátájú pontok. Van-e közös pontja a három egyenesnek?

K1 **3632.** Igazoljuk, hogy az $A(-3; 4)$, $B(1; 8)$, $C(5; 3)$ csúcsokkal megadott háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást.

E1 **3633.** Egy négyszög két szomszédos oldalegyenesének egyenlete: $3x - 4y = 8$ és $x + 2y = 16$ A metszéspontjukkal szemközti csúcs az origó. A másik két csúcson átmenő átlóegyenes egyenlete: $3x + y = 13$. Számítsuk ki a négyszög területét.

E1 **3634.** Számítsuk ki az $x + 2y = 7$ egyenletű egyenes azon pontjának koordinátáit, amely 5 egység távolságra van a $P(3; 7)$ ponttól.

K1 **3635.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a
a) $3x - y + 2 = 0$ és az $x + 2y - 3 = 0$ egyenletű egyenesek metszéspontján és a $P(1; 2)$ ponton;
b) $3x - 4y + 13 = 0$, $11x + 7y - 104 = 0$ és a $4x - y + 7 = 0$, $3x - y + 5 = 0$ egyenletű egyenespárok metszéspontjain.

K2 **3636.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely
a) áthalad az $x - 3y - 6 = 0$ és a $4x + y = 0$ egyenletű egyenesek metszéspontján és az irányvektora $\mathbf{v}(1; -3)$;
b) áthalad a $4x - 7y + 39 = 0$ és az $5x + 4y - 15 = 0$ egyenletű egyenesek metszéspontján és az x tengelyre eső tengelymetszete -4.
c) áthalad a $3x - 2y + 4 = 0$ egyenletű egyenes -3 ordinátájú pontján és az x tengelyt az origótól ugyanakkora távolságban metszi, mint az adott egyenes az y tengelyt.

K2 **3637.** Hogyan kell az m paraméter értékét megválasztani, hogy az $mx - y + 4 = 0$ egyenletű egyenes áthaladjon a $2x - y + 1 = 0$ és az $x - y + 5 = 0$ egyenletű egyenesek metszéspontján?

E1 **3638.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(-1; 3)$ ponton és a $4x - 2y = 1$ egyenessel 45°-os szöget zár be.

E2 **3639.** Az $x + y = b$ egyenletű egyenesnél számítsuk ki a b értékét úgy, hogy az egyenesből a $-x + 2y = 6$ és az $5x - y = 2$ egyenletű egyenesek egység hosszúságú szakaszt vágjanak ki.

E2 **3640.** Határozzuk meg a b paraméter értékét úgy, hogy az $5x - 4y = 0$ és az $x - 4y = 0$ egyenletű egyenesek 5 egység hosszúságú szakaszt vágjanak ki az $y = -\frac{3}{4}x + b$ egyenletű egyenesből.

E2 **3641.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek a $3x - 5y = 6$ és a $4x + y + 6 = 0$ egyenletű egyenesek közé eső szakaszát az origó felezi.

E2 **3642.** Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(3; -2)$ ponton és a P felezi az egyenesnek az $x + 3y = 6$ és a $2x - y = 3$ egyenletű egyenesek közé eső szakaszát.

E2 **3643.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(5; 3)$ ponton, és a $3x + 2y = 16$ és a $3x + 2y = 11$ egyenletű egyeneseket olyan pontokban metszi, amelyek abszcisszáinak különbsége 1.

E2 **3644.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $(6; 4)$ ponton, továbbá az $x + y = 4$ és az $x + y = 5$ egyenletű egyeneseket olyan pontokban metszi, amelyek abszcisszáinak különbsége 2.

E2 **3645.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(6; 10)$ ponton és a $4x + 3y = 32$ és a $4x + 3y = 2$ egyenletű egyenesek közti szakaszának az y tengelyen levő vetülete 2 egység.

E2 **3646.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(3; 7)$ ponton és a $2x - 3y = -12$ és a $2x - 3y = -21$ egyenletű egyenesek közé eső szakaszának az y tengelyre eső merőleges vetülete 3 egység.

E2 **3647.** Adottak az $x - y = 2$ és az $x + 2y = 14$ egyenletű egyenesek. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(2; 1)$ ponton, és az egyenesnek a két adott egyenes közé eső szakaszát P az $x - y = 2$ egyenletű egyenestől számítva $1 : 2$ arányban osztja.

E2 **3648.** Adott a $P(1; 1)$ pont, valamint az $x + y = -1$ egyenletű e és a $8x + 3y = 7$ egyenletű f egyenes. Írjuk fel annak a P ponton áthaladó egyenesnek az egyenletét, amelynek az e és f egyenesek közé eső szakaszát az e egyenestől számítva a P pont $3 : 2$ arányban oszt.

E2 **3649.** Az ABC háromszög B csúcsát összekötjük az AC oldal A-hoz közelebbi harmadolópontjával. Az így kapott szakasz és az A-ból induló súlyvonal metszéspontját jelölje P, a háromszög súlypontját S. Milyen arányban osztja P az AS szakaszt?

E2 **3650.** Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsát összekötjük a BC, illetve CD oldalt felező M, illetve N pontokkal, továbbá a BM, illetve ND szakaszokat felező M', illetve N' pontokkal. Ezek az egyenesek milyen arányban osztják a BD átlót?

V **3651.** A derékszögű koordináta-rendszerben adottak a következő pontok: $A(0; 0)$, $B(6; 0)$, $D(0; 6)$, $P(2; 0)$, $S(0; 4)$, $E(9; 0)$, $F(0; 9)$. Tudjuk továbbá, hogy a C pont az EF szakasz belső pontja. A CD szakasz C-hez közelebbi harmadolópontja R, a BC szakasz B-hez közelebbi harmadolópontja pedig Q. Az AC, BD, PR, QS szakaszok felezőpontjai rendre K, L, M, N. Határozzuk meg a C pont koordinátái függvényében a $KL : MN$ arányt.

E1 GY **3652.** Egy háromszög alakú telek csúcspontjainak koordinátái: $A(0; 16)$, $B(0; 0)$, $C(3; 0)$. Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $(-6; 0)$ ponton, és a telket két egyenlő területű részre osztja. (1 egység = 1,5 méter)

E1 **3653.** Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AC = BC$. Az A csúcs koordinátái $(-2; 1)$, a C csúcs koordinátái $(4; 3)$. A B csúcs az $x + 2y = 10$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Számítsuk ki a B csúcs koordinátáit!

V **3654.** Az $x - y =$ egyenletű egyenesen rögzítsünk egy pontot. Ezen a ponton át két tetszőleges egyenest húzunk. Ezek az x tengelyt A_1 és A_2 az y tengelyt B_1 és B_2 pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy az A_1B_2 és az A_2B_1 egyenesek az $x + y = 0$ egyenletű egyenesen metszik egymást, ha $OA_1 \neq OB_2$.

V **3655.** Bizonyítsuk be, hogy az m paraméter bármilyen értékénél az $mx + 3y - 4m + 1 = 0$ egyenletű egyenesek a sík ugyanazon a rögzített pontján haladnak át.

V **3656.** Bizonyítsuk be, hogy az m paraméter értékétől függetlenül az $(m^2 + 6m + 3)x - (2m^2 + 18m + 2)y - 3m + 2 = 0$ egyenesek a sík ugyanazon a pontján haladnak át.

V **3657.** Rajzoljunk egy derékszögű háromszög mindegyik befogója fölé kifelé egy-egy négyzetet, azután az átfogó végpontjait kössük össze a szemközti befogóra rajzolt négyzetnek a kiszemelt csúcsától legtávolabb eső csúcsával. Bizonyítsuk be, hogy az így adódó két egyenes metszéspontja az átfogóhoz tartozó magasságvonalra illeszkedik.

E2 **3658.** Ábrázoljuk azoknak a P pontoknak a halmazát, amelyek $(x; y)$ koordinátái kielégítik a következő egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket:

a) $|x| + |y| = 5$; *b)* $\big||x| - |y|\big| = 4$;

c) $(|x| - 2)\,(|y| - 2) = 0$; *d)* $|x| \le |y|$;

e) $|x + 1| + |y + 1| \le 2$; *f)* $|x - 1| + |x + 1| + |2y| \le 4$.

E2 **3659.** A koordináta-rendszer síkjában mely pontok koordinátái elégítik ki a következő egyenlőtlenségrendszereket:

a) $x \ge 1$ és $y \ge x - 1$; *b)* $x + y \ge 5$ és $x - y \le -2$;

c) $x - y \ge 0$ és $x + y \le 0$; *d)* $3x + 5y - 2 > 0$ és $3x - 2y - 1 > 0$;

e) $3x + 2y - 6 > 0$ és $2x - 3y + 6 > 0$; *f)* $y < 3$ és $x - y < 3$ és $x + y < 4$;

g) $(y - 3)(x - y - 3) \ge 0$; *h)* $(y - 3)(x + y - 4) \le 0$;

i) $(x - y - 3)(x + y - 4) \le 0$.

E2 **3660.** Mi azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek koordinátái kielégítik a következő egyenlőtlenségrendszert:

$2x + y \ge 6$ és $x + 2y \ge 6$, $y \ge 1$ és $x \ge 0$.

Határozzuk meg x és y értékét úgy, hogy a $k = 5x + 6y$ függvényeknek $(x, y \in \mathbf{R})$ a fenti feltételek mellett minimuma legyen.

V GY **3661.** Egy osztály klubdélutánra készül és a tanulók elhatározzák, hogy szendvicseket készítenek. A szendvicsek elkészítéséhez a következő nyersanyag áll a rendelkezésükre: 120 dkg vaj, 100 dkg sonka, 200 dkg sajt, 20 db kemény tojás és korlátlan mennyiségű kenyér. Kétféle szendvicset akarnak készíteni. Az A típusú szendvicshez darabonként a következő anyagokat használják fel: 3 dkg vaj, 3 dkg sonka, 2 dkg sajt, $\frac{1}{4}$ tojás és kenyér. A B típusú szendvicshez darabonként 2 dkg vajra, 1 dkg sonkára, 5 dkg sajtra, $\frac{1}{2}$ tojásra és kenyérre lesz szükség. A rendelkezésre álló nyersanyagból hány darab A és hány darab B típusú szendvics készíthető úgy, hogy az összes szendvicsek száma a lehető legnagyobb legyen?

V GY **3662.** Az A és a B típusú ruhák elkészítéséhez egy üzemben darabonként a következő munkaműveletek szükségesek:

Munkaművelet	A	B
Szabás	3 perc	3 perc
Varrás	1 perc	4 perc
Hegesztés	1 perc	–

Egy műszakon belül a szabásra összesen 420 perc, a varrásra összesen 440 perc, a hegesztésre összesen 80 perc fordítható. Az A típusú ruha 600 Ft, a B típusú ruha 300 Ft haszonnal jár darabonként. Az A típusú ruha termelési értéke darabonként 4500 Ft, a B típusú ruha termelési értéke darabonként 5000 Ft.

Hány darabot termeljen a gyár egy műszakban az egyes modellekből, ha

a) maximális haszonra,

b) maximális termelési értékre,

c) maximális haszon mellett maximális darabszám elérésére törekszik?

Létezik-e olyan termelési program, amely mindhárom követelményt egyszerre kielégíti?

V GY **3663.** Egy üzem A és B típusú termékeket gyárt, munkadarabonként a következő feltételek mellett:

Munkaművelet	*A*	*B*
Marás	2 perc	–
Préselés	–	2 perc
Csiszolás	2 perc	1 perc
Festés	5 perc	5 perc

Egy műszakon belül a marásra 90 perc, a préselésre 80 perc, a csiszolásra 100 perc, a festésre 300 perc fordítható.
Az *A* típusú munkadarab előállítási költsége 150 Ft, a *B* típusú munkadarab előállítási költsége 400 Ft.
Az *A* típusú munkadarabot 200 Ft-ért, a *B* típusút 500 Ft-ért adja el az üzem. Milyen termelési program mellett tudna az üzem a legnagyobb nyereségre szert tenni úgy, hogy közben a lehető legtöbb munkadarabot állítsa elő?

V **3664.** Határozzuk meg a következő egyenesek metszéspontját, ha az egyenleteik:

a) $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-1}{2}$ és $\frac{x+3}{3}=y+3=z+1$;

b) $\frac{8-x}{5}=\frac{y-4}{2}=\frac{z}{3}$ és $\frac{x-4}{2}=4-y=-\frac{z+4}{2}$;

c) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-6}{4}=y-1$ és $\frac{x-1}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{3}$.

V **3665.** Határozzuk meg az $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{2}$ egyenletű egyenes és az $x-y+2z=0$ egyenletű sík metszéspontjának koordinátáit.

V **3666.** Számítsuk ki az $\frac{x+3}{4}=\frac{y-5}{2}=-\frac{z+9}{4}$ egyenletű egyenes és a $2x-3y-z=0$ egyenletű sík metszéspontjának koordinátáit.

V **3667.** *a)* Határozzuk meg a $3x-2y+z=3$ és az $x-2y+3z=0$ síkok metszésvonalának egy pontját.
b) Határozzuk meg a két sík metszésvonalának egyenletrendszerét.

V **3668.** Határozzuk meg a $4x+5y-7z=4$, a $2x-3y+7z=3$, és a $3x-4y+z=10$, egyenletű síkok közös pontjának koordinátáit.

Párhuzamos és merőleges egyenesek

K1 **3669.** Ábrázolás nélkül állapítsuk meg, hogy a következő egyenespárok közül melyek párhuzamosak egymással és melyek merőlegesek egymásra

a) $x+2y=0$ és $x+2y=4$; *b)* $2x+y=4$ és $2x+y=-1$;

c) $x+2y=0$ és $-2x+y=3$; *d)* $\sqrt{2}x+y=5$ és $\sqrt{2}x-2y=6$;

e) $3x+5y=-1$ és $y=\frac{3}{5}x+4$; *f)* $2x+3y=5$; és $y=-\frac{3}{2}x-6$;

g) $4x-5y=12$; és $8x-10y=7$; *h)* $5x-6y=30$; és $12x+10y=8$.

K1 **3670.** Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy

a) a $y=\frac{p}{2}x+1$ és az $y = 4x - 8$;

b) az $y=\frac{p}{3}x-4$ és az $y=\frac{12}{p}x+3$;

c) a $2x - 5y = 3$ és a $3px + y = 1$;
d) a $3x - 4y = 5$ és a $2x + 3py = 0$;
e) a $3px - 8y + 13 = 0$ és az $(p + 1)x - 2py - 20 = 0$
egyenletű egyenesek párhuzamosak legyenek egymással. Számítsuk ki mindegyik esetben az egyenesek irányszögét.

K2 **3671.** Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ \frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_1}=1 \quad \text{és az} \quad \frac{x}{a+a_1}+\frac{y}{b+b_1}=\frac{1}{2}$$

egyenlettel megadott egyenesek párhuzamosak legyenek egymással.
$(ab(a+a_1)(b+b_1)\neq 0)$.

E1 **3672.** Az a és b valós paraméterek. Az a paraméter mely értéke mellett párhuzamosak az $(a + 2)x + (a + 3b + 5)y + 3 = 0$ és az $(a + 2)x - (2a + b - 2)y - 2 = 0$ egyenletű egyenesek? Az a és a b paraméterek mely értékei mellett esik egybe a két egyenlet által előállított egyenes?

K1 **3673.** Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy
a) az $y = x + 2$ és az $y = px + 1$ egyenletű egyenesek;

b) az $y=\frac{2}{3}x-4$ és az $y = -px + 2$ egyenletű egyenesek;

c) a $\sqrt{3}x+p\sqrt{2}y=5$ és a $\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=5$ egyenletű egyenesek;
d) a $(3p + 2)x + (1 - 4p)y + 8 = 0$ és az $(5p - 2)x + (p + 4)y - 4 = 0$ egyenletű egyenesek;
e) az $\frac{x}{2}-\frac{y}{2}-\frac{1}{6}=0$ és az $\frac{x-y}{3}+\frac{y-px}{2}-\frac{1}{4}=0$ egyenletű egyenesek merőlegesek legyenek egymásra.

K1 **3674.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy
a) a $P(3; 4)$ ponton és az $y = 2x - 3$ egyenletű egyenessel párhuzamos;
b) a $P(2; -3)$ ponton és a $3y - 5y = 15$ egyenletű egyenessel párhuzamos;

c) a $\left(-3\frac{1}{4};2\frac{2}{3}\right)$ ponton és egy olyan egyenessel párhuzamos, amelynek irányvektora $\mathbf{v}(-1; 3)$;

d) a $P\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ ponton és az $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$ egyenletű egyenessel párhuzamos.

K1 **3675.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy

a) az origón és az $y=-\frac{2}{3}x+5$ egyenletű egyenesre merőleges;

b) az origón és az $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ egyenletű egyenesre, ahol $ab \neq 0$, merőleges;
c) a $P(5; 2)$ ponton és az $y = x - 4$ egyenletű egyenesre merőleges;
d) a $P(0; -4)$ ponton és a $3x + 4y = 12$ egyenletű egyenesre merőleges;

e) a $P(-2; 5)$ ponton és az $\frac{x-3}{2}+\frac{2x-y}{5}=4$ egyenletű egyenesre merőleges;

f) a $P(4; -1)$ ponton és egy olyan egyenesre merőleges, amelynek normálvektora $(-3; 2)$;

g) a $P(-4; -2)$ ponton és egy olyan egyenesre merőleges, amelynek irányvektora $(4; 0)$;

h) a $4x + 3y + 13 = 0$ egyenletű egyenes $x = 1$ abszcisszájú pontján és az adott egyenesre merőleges.

K2 **3676.** Számítsuk ki p és q értékét úgy, hogy a $3x - py = 7$ és a $-15x + 8y = q$ egyenlet *a)* két különböző párhuzamos; *b)* két egymásra merőleges egyenes egyenlete legyen.

E1 **3677.** Az $ax + by = a^2 + b^2$ egyenletű egyenesre az origóból merőlegest állítunk. Számítsuk ki a merőleges talppontjának koordinátáit, ha $ab \neq 0$.

K2 **3678.** Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy a $2ax - y + 4 = 0$ és $2ax - ay - 4 = 0$ egyenletekkel adott egyenesek merőlegesek legyenek.

K1 **3679.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely

a) áthalad a $P(1; 5)$ ponton és az $A(4; -2)$ és a $B(5; 3)$ pontokon átmenő egyenessel párhuzamos;

b) áthalad a $P(3; -4)$ ponton és az $A(6; 4)$ és a $B(-2; -3)$ pontokon átmenő egyenesre merőleges;

c) áthalad a $P(5; 0)$ ponton és az $A(8; 4)$ és a $B(8; 12)$ pontokon átmenő egyenessel párhuzamos, továbbá írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $Q(2; 3)$ ponton és az AB egyenesre merőleges.

K2 **3680.** Egy egyenes áthalad az $A(4; -3)$ és a $B(x; 6)$ pontokon és a $4x - y - 3 = 0$ egyenletű egyenesre merőleges. Számítsuk ki a B pont első koordinátáját.

K2 **3681.** Egy egyenes áthalad az $A(-6; 4)$ és a $B(4; y)$ pontokon és a $4x + 3y = 5$ egyenletű egyenessel párhuzamos. Számítsuk ki a B pont második koordinátáját.

K1 **3682.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $x + 2y - 12 = 0$ és a $4x - 3y + 7 = 0$ egyenletek közös pontján és merőleges az $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$ egyenletű egyenesre, illetve amelyik párhuzamos az $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$ egyenletű egyenessel.

K2 **3683.** Számítsuk ki az e és az f egyenesek közös pontját és a hajlásszögét, ha *a)* az e egyenes párhuzamos az $x - 3y + 5 = 0$ egyenletű egyenessel és áthalad a $P(-1; 0)$ ponton, az f egyenes áthalad a $Q(3; 7)$ ponton és az $x - y - 1 = 0$ egyenletű egyenesre merőleges; *b)* az e egyenes áthalad az origón és az $x + y - 2 = 0$ és a $3x - y + 7 = 0$ egyenletű egyenesek metszéspontján, az f egyenes áthalad a $P(3; -5)$ ponton és merőleges a $2x - 3y - 8 = 0$ egyenletű egyenesre.

K1 **3684.** Számítsuk ki az AB szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha

a) az A pont koordinátái $(-4; 3)$, a B pont pedig az A ponton áthaladó és az $5x - 3y = 7$ egyenletű egyenessel párhuzamos egyenesnek az y tengelyre illeszkedő pontja;

b) az A pont koordinátái $(6; 4)$, a B pont pedig az A ponton áthaladó és a $4x + 3y = 8$ egyenletű egyenesre merőleges egyenesnek az x tengelyre illeszkedő pontja.

K1 **3685.** Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely

a) a $(-5; -2)$ és a $(-3; 4)$; *b)* a $(4; 1)$ és az $(5; -3)$;

c) a $(2; 3)$ és a $(-3; 3)$; *d)* a $(-4; 5)$ és a $(-4; 7)$

pontokat összekötő szakaszt merőlegesen felezi.

K1 **3686.** Igaz-e, hogy a $P(7; -14)$ pont az $A(-3; 1)$ és a $B(13; 3)$ pontokat összekötő szakasz felező merőlegesére illeszkedik?

K1 GY **3687.** Sík terepen haladó országút egyenlete $2x - 3y = 2$. Az országúton M autóbusz-megállót létesítenek úgy, hogy az $A(0; 3)$ és a $B(4; 7)$ koordinátájú helységektől egyenlő távolságra legyen. Határozzuk meg az M megálló helyét. (1 egység = 0,5 km).

K2 **3688.** A P pont egyenlő távol van az $5x - 3y = 6$ és az $5x - 3y = 12$ egyenletű egyenesektől. Számítsuk ki a P ordinátáját, ha az abszcisszája 3.

K1 **3689.** Állapítsa meg, hány olyan egyenes van, amely áthalad az $A(1; 8)$ ponton és egyenlő távolságra van a $P(-3; 5)$ és a $Q(9; -1)$ pontoktól! Írjuk fel a feltételt kielégítő egyenesek egyenletét.

K1 **3690.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy
a) a $P(7; 11)$ ponton és egyenlő távol van az $A(3; 4)$ és a $B(9; 5)$ pontoktól;
b) a $P(1; 2)$ ponton és egyenlő távol van az $A(2; 3)$ és a $B(-4; -5)$ pontoktól.

K1 **3691.** Bizonyítsuk be, hogy az $(1; 3)$, $(6; 5)$, $(5; -7)$ koordinátájú pontok egy derékszögű háromszög csúcsai.

E1 **3692.** Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója a $8x + 5y - 40 = 0$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Adjuk meg két olyan egyenes egyenletét úgy, hogy a három egyenes egyenlő szárú derékszögű háromszöget határozzon meg.

K2 **3693.** Határozzuk meg az y tengelyen az M pont koordinátáit úgy, hogy az AM egyenes merőleges legyen a BM egyenesre, ha az A és a B pont koordinátái: $A(-4; 2)$, $B(2; -6)$.

K2 **3694.** Egy derékszögű háromszög átfogóegyenesének egyenlete $3x - y - 5 = 0$. Egyik befogóegyenesének egyenlete $x + y - 5 = 0$ és az ezzel az oldallal szemközti csúcs abszcisszája 4. Határozzuk meg az átfogóhoz tartozó magasságvonal egyenletét.

K2 **3695.** Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög egyik befogóegyenesének egyenlete $x - 2y + 9 = 0$. Ezzel az oldallal szemközti csúcs $A(3; -4)$. Határozzuk meg az átfogóhoz tartozó magasság hosszát.

K1 **3696.** Egy derékszögű háromszög átfogójának végpontjai: $A(4; 2)$ és $B(-6; -4)$. A B csúcson átmenő befogóegyenes egyenlete $y = \frac{1}{2}x - 1$. Számítsuk ki a derékszög csúcsának koordinátáit.

E1 **3697.** Adott két pont: $A(4; 2)$, $B(8; b)$. Határozzuk meg a b értékét úgy, hogy létezzen olyan derékszögű háromszög, amelynek átfogója AB és a derékszögű csúcsa az $x = -2$ egyenletű egyenesre illeszkedik.

E2 **3698.** Legyen egy derékszögű háromszög egyik befogója egy kocka éle, a másik befogója pedig ugyanannak a kockának a lapátlója. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög két súlyvonala merőleges egymásra.

E2 **3699.** Az ABC szabályos háromszög S súlypontját kössük össze a B és a C csúcsokkal. Bizonyítsuk be, hogy az SB és az SC szakaszok felezőmerőlegesei a BC oldalt három egyenlő részre osztják.

K2 **3700.** Az ABC háromszög AB oldalával párhuzamos középvonalának egyenlete $x - 2y + 6 = 0$, a súlypontja $S\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$ a C csúcs koordinátái $(-1; 10)$, egy további csúcs az x tengelyen van. Határozzuk meg a hiányzó csúcsok koordinátáit.

E1 **3701.** Az ABC háromszögben $AB = AC$. Jelölje D a BC oldal felezőpontját, a D-ből induló és az AC-re bocsátott merőleges talppontját E, végül F a DE szakasz felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy $AF \perp BE$.

E1 **3702.** Az ABC háromszögben $AB = BC$. Jelölje a BC oldal felezőpontját F, a BC oldalhoz tartozó magasság talppontját T. Számítsuk ki a B és C csúcs koordinátáit, ha $A(-2; 1)$, $T(16; 1)$ és F második koordinátája 13.

E2 **3703.** A PQR egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelyének egyenlete $2y - x - 6 = 0$. Legyen $P(2; 4)$ és $Q(-2; -1)$. Számítsuk ki a hiányzó csúcsból húzott magasság hosszát!

K1 **3704.** Tükrözzük a $P(3; 2)$ pontot az $x + y + 8 = 0$ egyenletű egyenesre. Számítsuk ki a tükörkép koordinátáit.

K2 **3705.** A $2x - y = 10$ egyenletű egyenesen határozzuk meg annak az M pontnak a koordinátáit, amelyre a $PM + MQ$ összeg minimális, ha a P pont koordinátái $(-5; 0)$ és a Q pont koordinátái $(-3; 4)$.

E1 **3706.** Adott az A és a B pont, és az e egyenes. Határozzuk meg az e egyenesen azt a P pontot, amelyre
a) $AP + PB$ a legkisebb; *b)* $AP - PB$ a legnagyobb.
A pontok koordinátái: $A(-3; 6)$, $B(6; 10)$, az e egyenes egyenlete: $x + y + 3 = 0$.

K1 **3707.** Számítsuk ki a háromszög magasságpontjának koordinátáit, ha a csúcsainak koordinátái:
a) $(0; 0)$, $(8; 0)$, $(2; 6)$; *b)* $(0; 0)$, $(-6; 0)$, $(-4; -8)$;
c) $(0; 0)$, $(4; -2)$, $(12; 0)$; *d)* $(a; 0)$, $(0; b)$, $(-c; 0)$, ahol $abc \neq 0$;
e) $(1; 2)$, $(4; 1)$, $(3; 5)$.
Igazoljuk, hogy a magasságvonalak egy pontban metszik egymást.

K1 **3708.** Bizonyítsuk be, hogy
a) a $(-1; 0)$, $(5; 0)$, $(1; 4)$; *b)* a $(-3; 0)$, $(5; 0)$, $(3; 6)$;
c) a $(0; 0)$, $(8; 0)$, $(5; 6)$; *d)* a $(0; 0)$, $(-4; 6)$, $(8; 12)$
csúcsokkal megadott háromszög súlypontja, a körülírt kör középpontja és a magasságpontja egy egyenesen, az úgynevezett Euler-féle egyenesen van.

K2 **3709.** Írjuk fel a $(2; 7)$, $(-4; -3)$ és a $(8; 2)$ koordinátájú pontokkal megadott háromszög Euler-féle egyenesének egyenletét.

K2 **3710.** Számítsuk ki a háromszög csúcsainak koordinátáit, ha az egyik oldal egyenesének egyenlete: $5x - 3y + 2 = 0$, a másik két oldalához tartozó magasságvonalak egyenlete $4x - 3y + 1 = 0$ és $7x + 2y - 22 = 0$.

K2 **3711.** Egy háromszög két csúcspontjának koordinátái:
a) $A(-6; 2)$, $B(2; -2)$, a magasságpontja $M(1; 2)$;
b) $A(3; -1)$, $B(5; 7)$, a magasságpontja $M(4; -1)$;
c) $A(2; 1)$, $B(4; 9)$, a magasságpontja $M(3; 4)$;
Számítsuk ki a harmadik csúcspont koordinátáit.

K2 **3712.** Számítsuk ki az ABC háromszög B és C csúcsának koordinátáit, ha az A csúcs koordinátái:
a) $(3; -4)$ és két magasságvonalának egyenlete $7x - 2y - 1 = 0$ és $2x - 7y - 6 = 0$;
b) $(1; 2)$ és két magasságvonalának egyenlete $2x - 3y + 1 = 0$ és $x + y = 0$;
c) $(6{,}5; -2)$ és két magasságvonalának egyenlete $x - y + 4 = 0$ és $7x + 2y = 7$.

E1 **3713.** Az ABC háromszög magasságpontja $M(0; 2)$, az AB oldal felezőpontja $F(-2; 1)$, az AM magasságnak a BC oldalra eső talppontja $A(2; -2)$. Számítsuk ki a háromszög csúcspontjainak koordinátáit.

E1 **3714.** Az ABC háromszögben $A(-2; 2)$, $B(1; 0)$, a C csúcspont a $2x - 3y = 0$ egyenletű egyenesen mozog. Milyen pályát ír le a háromszög súlypontja?

E2 **3715.** Egy háromszög egyik csúcsa az origó, magasságpontja az $M(4; -2)$, súlypontja az $S(6; 0)$ pont. Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit.

K1 **3716.** Számítsuk ki az $A(3; -5)$, $B(5; -3)$, $C(-1; 3)$ csúcspontú háromszögben az s_a és az m_b egyenesek metszéspontjának koordinátáit.

K1 **3717.** Egy négyzet két szemközti csúcsának koordinátái:
a) (3; 5) és (4; 2); *b)* (1; 2) és (4; 8).
Számítsuk ki a másik két csúcs koordinátáit.

K2 **3718.** Egy négyzet egyik csúcsának koordinátái (5; 7), egyik átlójának egyenlete $3x + 4y = 18$. Írjuk fel a többi csúcs koordinátáit.

E1 **3719.** Az $ABCD$ négyzet AD oldalegyenesének egyenlete $y = 2x + 4$; az átlók metszéspontja a $K(1; 1)$ pont. Számítsuk ki a négyzet csúcsainak koordinátáit.

K1 **3720.** Bizonyítsuk be, hogy az $x + 2y + 1 = 0$, $6x - 3y = 5$, $y = 2x - 1$ és $4x + 8y + 7 = 0$ egyenletű egyenesek téglalapot határolnak.

K1 **3721.** Egy téglalap két szomszédos csúcsa: $A(-1; -2)$, $B(5; -5)$. Az egyik csúcson átmenő átló egyenesének egyenlete $7x + 4y = 15$. Számítsuk ki a másik két csúcs (C és D) koordinátáit.

K1 **3722.** Az $ABCD$ téglalap AB oldalegyenesének egyenlete $y = 3x$, átlói az $M(12; 6)$ pontban metszik egymást; az AC átló párhuzamos az x tengellyel. Határozzuk meg a B, C, D csúcsok koordinátáit.

K1 **3723.** Az $ABCD$ téglalap AB oldalegyenesének egyenlete $x + y = 6$, AD oldalegyenesének egyenlete pedig $x - y = 0$. A C csúcs koordinátái $(-3; 1)$. Számítsuk ki a téglalap csúcsainak koordinátáit.

K2 **3724.** Az $ABCD$ téglalap AB oldalegyenesének normálvektora $\mathbf{n}(1; -3)$, az A csúcsa: $A(2; 1)$. A C csúcs rajta van az $x - y = 1$ egyenletű egyenesen. Számítsuk ki a téglalap hiányzó csúcsainak koordinátáit, ha az átlók hossza $5\sqrt{2}$ egység.

K1 **3725.** Az $ABCD$ téglalap egyik átlójának végpontjai $A(-10; -6)$, $C(9; 16)$. Az AB oldalegyenes iránytangense $\frac{5}{12}$. Számítsuk ki a B és a D csúcsok koordinátáit.

E1 **3726.** Egy téglalap egyik átlója az $y = x - 2$ egyenletű egyenesen fekszik, átlóinak metszéspontja az $M(7; 5)$, egyik csúcsa pedig az $A(0; 4)$ pont. Határozzuk meg a többi csúcs koordinátáit.

E1 **3727.** Egy téglalap két szemközti csúcsa $A(5; 0)$, $C(2; 4)$; egy további csúcsa az $x - 3y = 0$ egyenletű egyenesen van. Számítsuk ki a téglalap ismeretlen csúcsainak koordinátáit.

E2 **3728.** Az $ABCD$ téglalap két szomszédos csúcsa $A\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ és $B\left(\frac{9}{2}; 0\right)$. Az AB és a BC oldalak hosszúságának aránya 1 : 3. Határozzuk meg a C és a D koordinátáit.

E2 **3729.** Az $ABCD$ téglalapban $BC = 3 \cdot AB$. A rövidebb oldalak felezőpontja $E\left(\frac{7}{2};-\frac{3}{2}\right)$ és $F\left(-\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right)$. Számítsuk ki a csúcspontok koordinátáit.

E2 **3730.** Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ téglalap síkjában felvett P pontra teljesül az $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$ egyenlőség. Oldjuk meg a feladatot koordinátageometriai módszerrel.

E2 **3731.** Az $ABCD$ téglalap A és C csúcsain át párhuzamosokat, ezekre pedig a másik két csúcsból merőlegeseket rajzolunk. Bizonyítsuk be, hogy a keletkezett téglalap középpontja egybeesik az eredeti téglalap középpontjával.

E2 **3732.** Az $ABCD$ téglalap BAD szögének felezője a BD átlót az M, a BC oldal egyenesét a P pontban metszi. Az M ponton áthaladó AB-vel párhuzamos egyenes az AC átlót N-ben metszi. Mutassuk meg, hogy a PN egyenes merőleges a BD átlóra.

K2 **3733.** Egy rombusz egyik oldalegyenesének egyenlete $x - 3y = -12$, egyik csúcspontjának koordinátái (6; 6), középpontjának koordinátái (4; 4). Számítsuk ki a rombusz többi csúcsának koordinátáit.

K2 **3734.** Egy rombusz két oldalegyenesének egyenlete $x - 3y = 0$; $3x - y + 8 = 0$. A két oldal metszéspontjával szemközti csúcsa (5; 7). Írjuk fel a rombusz két szimmetriatengelyének egyenletét.

E2 **3735.** Rajzoljunk az $ABCD$ rombusz oldalaira (kifelé) négyzeteket. Legyen a négyzetek középpontja K, L, M, N. Igazoljuk, hogy a K,L,M,N pontok négyzetet határoznak meg.

E1 **3736.** Egy rombusz két oldalegyenesének egyenlete $3x - 10y - 54 = 0$ és $3x - 10y + 128 = 0$. Az egyik átló az $x - y + 10 = 0$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Számítsuk ki a rombusz csúcsainak koordinátáit.

E1 **3737.** Egy rombusz egyik csúcsa $A(7; 2)$, egyik átlója az $x - y = 2$ egyenletű egyenesen van. A rombusz kerülete $\sqrt{464}$ egység. Határozzuk meg a rombusz másik három csúcsának koordinátáit.

E2 **3738.** Az $ABCD$ rombusz átlóinak metszéspontja a koordináta-rendszer kezdőpontja. A rövidebb átló egyik végpontja a $D(0; 2)$ pont, a rombusz magassága $2\sqrt{3}$. Írjuk fel a csúcsok koordinátáit és az oldalak egyenletét.

K2 **3739.** Az $ABCD$ paralelogramma A és B csúcsai: $A(1; 4)$, $B(6; 6)$. A BC oldalegyenes egy pontja $P(10; 18)$, a CD oldalegyenes egy pontja $R(-1; 11)$. Számítsuk ki a paralelogramma kerületét.

E1 **3740.** Az $ABCD$ paralelogramma három csúcsának koordinátái: $A(-3; -2)$, $B(2; 0)$, $C(3; 3)$. A B csúcson átmenő és az AC átlóra merőleges egyenes a CD egyenest E-ben metszi. Számítsuk ki az E koordinátáit.

K2 **3741.** Az $ABCD$ rombusz A csúcsának koordinátái: $(-1; 3)$, az átlók metszéspontja a $Q(1; 2)$ pont. A $P(0; 2)$ pont az A csúcson áthaladó egyik oldalegyenesen van. Számítsuk ki a rombusz területét.

E1 **3742.** Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsának koordinátái (2; 1), a B csúcs koordinátái (1; –1). Az egyik átló egyenlete: $y = 1$. A BC oldal hossza az AB oldal hosszának kétszerese. Számítsuk ki a C és a D csúcsok koordinátáit.

K1 **3743.** Egy négyszög a, b, c, d oldalegyeneseinek egyenletei rendre:
$a: 4x + 3y + 13 = 0$, $b: 3x - 4y + 41 = 0$,
$c: x + \frac{3}{4}y = 3$, $d: x - \frac{3}{4}y = 3$.
Bizonyítsuk be, hogy a négyszög téglalap, és számítsuk ki az átlók hosszát.

K2 **3744.** Egy paralelogramma csúcsai: $A(0; 0)$, $B(10; 0)$, $C(14; 9)$, $D(4; 9)$. Kössük össze a paralelogramma A csúcsát a csúccsal szemközti oldalak felezőpontjával. Igazoljuk, hogy ezek a szakaszok a paralelogramma átlóját harmadolják.

E1 **3745.** Az $ABCD$ paralelogramma (amelynek nincs derékszöge) A csúcsában AB-re, C csúcsában BC-re merőlegest állítunk. Ezek metszéspontja E. Igaz-e, hogy $AC \perp DE$? Mit mondhatunk akkor, ha a paralelogramma téglalap?

E1 **3746.** Az $ABCD$ paralelogramma csúcsainak koordinátáiról tudjuk, hogy $A(-7; -3)$, $B(5; -7)$, a C csúcs ordinátája 1, a D csúcs abszcisszája -1. Tükrözzük az $ABCD$ paralelogrammát az AD és BC oldalak felezőpontjait összekötő egyenesre. Számítsuk ki az A, B, C, D csúcsok tükörképeinek koordinátáit.

E2 **3747.** Az $ABCD$ paralelogramma csúcsainak koordinátái: $A(0; 0)$, $B(8; 4)$, $C(8; 10)$, $D(0; 6)$. A $P(5; 4)$ ponton át a paralelogramma oldalaival párhuzamosokat húzunk. $GH \parallel AB$ $(G \in AD, H \in BC)$, $FE \parallel BC$ $(F \in AB, E \in CD)$ Igazoljuk, hogy az FH, AC és a GE egyenesek egy közös ponton haladnak át.

K2 **3748.** Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai AB és CD. (A szimmetriatengely merőlegesen felezi az AB oldalt). Számítsuk ki a hiányzó csúcs koordinátáit, ha
a) $A(2; -4)$, $B(-4; 3)$, $C(-1; 1)$; *b)* $A(-2; -3)$, $B(4; 1)$, $C(1; 2)$; *c)* $A(-7; -4)$, $B(-5; 2)$, $C(3; -1)$.

E2 **3749.** Az $ABCD$ deltoid szimmetriatengelye az AC átló. Az A csúcs az origóban van, a C csúcs koordinátái: (8; 10). A deltoid területe 41 területegység. Az egyik átló az origótól számítva 3 : 2 arányban osztja a másikat. Határozzuk meg a hiányzó csúcsok koordinátáit.

V **3750.** Az $AB = 2a$ szakasz egy tetszőleges pontja legyen M. Az AB ugyanazon oldala fölé megszerkesztjük a MAD és MBC egyenlő szárú derékszögű háromszögeket úgy, hogy $MA = AD$ és $MB = BC$ legyen. A CD és AB felezőmerőlegesének metszéspontja legyen P.
a) Bizonyítsuk be, hogy a P pont helyzete független az M pont helyzetétől.
b) Legyen N az M pontból a CD-re húzott merőleges talppontja. Bizonyítsuk be, hogy az $ANB \sphericalangle = 90°$.

V **3751.** Az egyenlő szárú derékszögű háromszögbe téglalapot írunk, úgy, hogy a téglalap két oldala a két befogóra illeszkedjék. Ennek az átfogóra illeszkedő csúcsából merőleges egyenest húzunk a téglalapnak vele szemközti átlójára. Mutassuk meg, hogy a merőleges egy rögzített ponton halad át, függetlenül a téglalap méretétől.

V **3752.** K, L és O a sík tetszőleges pontjai, a KL szakasz felezőpontja M. O körül K-t $+90°$-kal, L-et $-90°$-kal elforgatva a K_1, illetve az L_1 pontot kapjuk. Bizonyítsuk be, hogy $K_1L_1 = 2 \cdot OM$ és $K_1L_1 \perp OM$.

V **3753.** Az $OA = a$ és az $OB = b$ befogók által meghatározott derékszögű háromszög AB átfogóján mozog a P pont, amelynek merőleges vetülete a befogókon M, illetve N. Hogyan válasszuk meg P helyét, hogy a $PM^2 + PN^2$ minimális legyen?

E2 **3754.** Legyen A, B, C egy háromszög három csúcsa. Mi azoknak a P pontoknak a mértani helye, amelyekre $PB^2 + PC^2 = 2 \cdot PA^2$?

Pont és egyenes távolsága. Területszámítás

Az $Ax + By + C = 0$, egyenletű egyenes egyik normálvektora $\mathbf{n}(A, B)$. Ha a normálvektor egységvektor, ha tehát $A^2 + B^2 = 1$, akkor az egyenletet az egyenes normálegyenletének nevezzük. Ha $A^2 + B^2 \neq 1$, akkor az egyenes normálegyenlete

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

Ha az egyenes normálegyenletébe tetszőleges $P_1(x_1; y_1)$ pont koordinátáit behelyettesítjük, akkor a P_1 pontnak az egyenestől való távolsága:

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

Mégpedig az $\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$ nulla, pozitív vagy negatív aszerint, hogy a P_1 pont az egyenesre illeszkedik, illetve a normál egységvektor a P_1 pontot tartalmazó félsíkba mutat-e vagy sem.

E1 **3755.** Írjuk fel a következő egyenesek normálegyenletét:

a) $3x + 4y + 20 = 0$; *b)* $6x - 8y + 15 = 0$;

c) $\sqrt{2}x+\sqrt{7}y-3=0$; *d)* $x - y + 3 = 0$.

K1 **3756.** Számítsuk ki az origónak az

a) $x + y = 1$; *b)* $y=\frac{1}{2}x+3$;

c) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$; *d)* $6x + 8y = 3$;

e) $Ax + By + C = 0$; *f)* $x - y + 2^{10} = 0$

egyenestől mért távolságát.

K1 **3757.** Írjuk fel az $A(-2; 15)$ pontból a $3x - 4y = -16$ egyenletű egyenesre bocsátott merőleges egyenes egyenletét! Számítsuk ki a két egyenes M metszéspontjának koordinátáit, valamint az AM szakasz hosszát.

K1 **3758.** Számítsuk ki a P pontnak az e egyenestől mért távolságát, ha

a) $P(1; 2)$, $e: y = -2x + 2$;

b) $P(-3; 2)$, $e: 4x - 3y = 7$;

c) $P(1; 9)$, $e: 3x + 4y + 8 = 0$;

d) $P(-3; 9)$, $e: x - y = 2$;

e) $P(4; -2)$, $e: 8x - 15y - 11 = 0$;

f) $P(1; 1)$ $e: \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$;

g) $P(-2; 0)$, $e: 3x + y = 10$.

K1 **3759.** Milyen távol van a $P(2; -6)$ pont a $(2; 3)$ és az $(5; 4)$ koordinátájú pontokon átmenő egyenestől?

K2 **3760.** Határozzuk meg az a és a b paraméterek értékét úgy, hogy az $y = ax + b$ egyenletű egyenes áthaladjon a $(7; 3)$ és az $(5; 4)$ koordinátájú pontokon. Számítsuk ki az egyenes és a $Q(2; -6)$ pont távolságát.

K2 **3761.** Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(3; 2)$, $B(5; 7)$, $C(1; 6)$. Számítsuk ki a háromszög súlypontjának az oldalaktól mért távolságát.

K2 **3762.** Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-5; 0)$, $B(4; 2)$, $C(-1; 8)$. Számítsuk ki a súlypontnak a B csúcson áthaladó magasságvonaltól mért távolságát.

E1 **3763.** Egy háromszög oldalegyeneseinek egyenlete: $x + y = 3$, $x - 2y = 0$; $x = 0$ Számítsuk ki a háromszög magasságainak a hosszát.

K2 **3764.** Számítsuk ki a háromszög magasságainak hosszát, ha a csúcsok koordinátái: $(-4; 6)$, $(-2; -3)$, $(4; 5)$.

K2 **3765.** Számítsuk ki a háromszög területét, ha a csúcspontjainak koordinátái:
a) $(0; 0)$, $(3; 4)$, $(7; -1)$; *b)* $(-1; -1)$, $(1; 5)$, $(7; -2)$; *c)* $(4; 2)$, $(9; 4)$, $(7; 6)$.

E1 **3766.** Számítással döntsük el, hogy a $P(0; -2)$ és a $Q(1; -4)$ pontokat elválasztja-e a $2x - 4y + 5 = 0$ egyenletű egyenes.

K2 **3767.** Számítsuk ki a következő egyenesek távolságát:
a) $3x - y = 6$, $3x - y = 8$; *b)* $x + 2y + 5 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$;
c) $y = \frac{x}{2} + 3$, $y = \frac{x}{2} - 4$; *d)* $2x + 3y - 8 = 0$, $y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$.

K2 **3768.** Számítsuk ki a négyzet területét, ha két oldalegyenesének egyenlete $3x - 5y = 4$ és $3x - 5y = 10$.

E2 **3769.** Bizonyítsuk be, hogy a $3x - 4y + 4 = 0$ egyenletű egyenes a sík bármely rácspontjától racionális távolságra van.

E1 **3770.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely
a) párhuzamos a $3x + 4y + 25 = 0$ egyenletű egyenessel és tőle 1 egység távolságra van;
b) párhuzamos a $4x + 3y + 1 = 0$ egyenletű egyenessel és tőle 3 egységre halad;
c) párhuzamos az $x - y = 6$ egyenletű egyenessel és tőle $\sqrt{2}$ egység távolságra halad.

E2 **3771.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely
a) párhuzamos az $x - y = 6$ egyenletű egyenessel, és az origótól 6 egység, vagy $2\sqrt{6}$ egység távolságra halad;
b) párhuzamos a $3x + 4y = 2005$ egyenletű egyenessel, és a $C(-1; 2)$ ponttól 2 egység távolságra halad;
c) párhuzamos az $x + 3y + 4 = 0$ egyenletű egyenessel, és a $P(-1; 2)$ ponttól $\sqrt{10}$ egység távolságra halad;
d) párhuzamos az $x - y + 2 = 0$ egyenletű egyenessel, és a $P(2; 3)$ ponttól 3 egység távolságra halad.

E1 **3772.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $(-4; 3)$ ponton, és az origótól 4 egység távolságra halad.

E2 **3773.** Fektessük a $(-1; 2)$ ponton át egyenest, amely a $(6; 1)$ ponttól 5 egység távolságra van. Írjuk fel az egyenes egyenletét.

E1 **3774.** Számítsuk ki az x tengely azon pontjainak a koordinátáit, amelyek az $y = \frac{4}{3}x + 4$ egyenestől 10 egység távolságra vannak!

E2 **3775.** Keressük meg azt a pontot, amely az (1; 2) és a (3; –5) pontoktól egyenlő, az $y - 2x + 3 = 0$ egyenestől pedig 2 egység távolságra van.

E2 **3776.** Írjuk fel

a) a $4x + 5y - 3 = 0$ és az $5x - 4y + 10 = 0$; *b)* az $y = 3x$ és az $x + y = 1$;

c) az $x = 2$ és az $y = \frac{3}{4}x$; *d)* az $x = 3$ és az $y = 5$

egyenesek szögfelezőinek az egyenletét.

E2 **3777.** Valamely egyenes egyenlete $3y - 4x = 1$. Írjuk fel az egyenes és a koordinátatengelyek szögfelezőinek egyenletét.

E2 **3778.** Bizonyítsuk be, hogy az $A(-5; 0)$; $B(0; 12)$, $C(9; 0)$ pontokkal megadott háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást. Számítsuk ki a háromszögbe írható kör sugarát. Írjuk fel a B és C csúcsokból induló külső szögfelezők egyenletét. Igazoljuk, hogy ezek metszéspontja rajta van az A csúcshoz tartozó belső szögfelezőn.

E2 **3779.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(2; 5)$ ponton, és az $A(5; 3)$ ponttól kétszer akkora távolságra van, mint a $B(-1; 0)$ ponttól.

E1 **3780.** A $P(3; b)$ pont egyenlő távol van az $5x - 3y = 6$ és az $5x - 3y = 12$ egyenletű egyenesektől. Számítsuk ki a b értékét.

E2 **3781.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(2; 5)$ ponton és az $A(5; 3)$ ponttól és a $B(-1; 0)$ ponttól mért távolságának aránya $3 : 2$.

E1 **3782.** Számítsuk ki az $x + y = 6$ egyenletű egyenes azon pontjának koordinátáit, amely egyenlő távol van a $3x - 4y + 12 = 0$ és a $3x - 4y - 8 = 0$ egyenletű egyenesektől.

E2 **3783.** Egyenlő szárú háromszög száregyeneseinek egyenlete:
$2x - y + 8 = 0$ és $x - 2y - 12 = 0$. Az alap egyik pontja $(5; 0)$.
Határozzuk meg az alap egyenletét és a csúcsok koordinátáit.

K1 **3784.** Tükrözzük a $P(-5; 13)$ pontot a $2x - 3y - 3 = 0$ egyenletű egyenesre. Számítsuk ki a tükörkép koordinátáit.

K1 GY **3785.** A fénysugár áthalad a $P(-2; 8)$ ponton, visszaverődik a $2x + 3y + 6 = 0$ egyenletű egyenesről, és a $Q(-7; 20)$ pontra esik. Határozzuk meg a beeső és a visszavert fénysugár egyenletét.

K2 GY **3786.** A fénysugár az $x - 2y + 5 = 0$ egyenletű egyenesen terjed, és a $3x - 2y + 7 = 0$ egyenletű egyenesről visszaverődik. Határozzuk meg a visszavert fénysugár pályájának az egyenletét.

K1 **3787.** A $2x - y - 5 = 0$ egyenletű egyenesen keressük meg azt a pontot, amelynek az $A(-7; 1)$ és a $B(-5; 5)$ pontoktól mért távolságainak összege a legkisebb.

E1 **3788.** Igazoljuk, hogy a $P_1(0; 0)$, $P_2(x_2; y_2)$, $P_3(x_3; y_3)$, pontokkal megadott háromszög területe:

$$T = \frac{1}{2}|x_2y_3 - x_3y_2|.$$

E2 **3789.** Igazoljuk, hogy ha a háromszög csúcspontjainak koordinátái: $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, $P_3(x_3; y_3)$, akkor a háromszög területe:

$$T = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|.$$

A zárójelben álló összeg pozitív, ha P_1 csúcsból kiindulva és a háromszöget P_2,P_3,P_1 pontok sorrendjében körüljárva, a körüljárás az óramutató járásával ellentétes, azaz pozitív. Negatív körüljárás esetén az összeg negatív.

K1 **3790.** Számítsuk ki a háromszög területét, ha a csúcsainak koordinátái:

a) (–2; –1), (6; 1), (1; 6); *b)* (0; 0), (4; 8), (2; 14);
c) (2; 5), (7; –1), (0; 0); *d)* (1; 3), (–1; 4), (0; 0);
e) (4; 0), (–4; 0), (3; 8); *f)* (5; 10), (11; 15), (15; 14).

K2 **3791.** Egy háromszög csúcsainak koordinátái: (3; 1), (7; 4), (4; 7). Számítsuk ki a háromszög magasságainak a hosszát.

K2 **3792.** Egy háromszög két csúcsának koordinátái: (5; 1) és (–2; 2). A harmadik csúcsa az x tengelyen van. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit, ha a háromszög területe 10 egység.

E1 **3793.** Valamely háromszög területe 15 egység, két csúcsának koordinátái (–1; –1) és (5; 2). A harmadik csúcsa az (5; 2) koordinátájú ponttól 5 egység távolságra van. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

E2 **3794.** Egy háromszög csúcsai: $A(0; 3)$, $B(4; 0)$ és $C(x; 5)$. Mennyi a C csúcs ismeretlen koordinátája, ha tudjuk, hogy $0 < x < 4$, továbbá az ABC háromszög területe 8 egység?

K1 **3795.** Mekkora a négyszög területe, ha a csúcsainak koordinátái:

a) (2; 1), (8; 3), (6; 6), (3; 4);
b) (–4; 3), (2; 8), (7; 9), (6; 3);
c) (8; 4), (7; –3), (–4; –5), (1; 5);
d) (3; 2), (–8; 9), (–3; 4), (–10; 3);
e) (1; 1), (4; 2), (3; 4), (0; 3).

K2 **3796.** Igazoljuk, hogy a (6; 2), (13; 1), (12; –6), (1; –8) pontok egy deltoid csúcsai. Számítsuk ki a deltoid területét.

E1 **3797.** Valamely háromszög csúcspontjai rendre $O(0; 0)$, $A(a; 0)$ és $B(0; b)$. Határozzuk meg az AB oldalon a P, valamint az OB oldalon a Q pont koordinátáit úgy, hogy az OP és a PQ szakaszok három egyenlő területű részre bontsák az OAB háromszöget.

E2 **3798.** Számítsuk ki az $y = 10^{-9}x + 10^{-6}$; $y = 10^{-6}$; $2y = 10^{-9}x + 10^{-6}$ egyenletű egyenesek által közrezárt háromszög területét.

K2 **3799.** Az ABC háromszög két csúcsának koordinátái: $A(–1; 1)$, $B(1; 2)$. A harmadik csúcs C az x tengelyen van. A háromszög súlypontja egyenlő távol van a koordinátatengelyektől. Mekkora a háromszög területe?

E2 **3800.** Az ABC háromszög magasságpontja az origóba esik, $C(0; –7)$. Számítsuk ki a hiányzó csúcsok koordinátáit és a háromszög területét, ha az AB oldal átmegy a $P(0; 9)$ ponton és a hossza a lehető legrövidebb.

K2 **3801.** A P ponthalmaz az $ABCD$ négyszöglap pontjaiból, a Q ponthalmaz az AEC háromszöglap, az R ponthalmaz pedig a BDF háromszöglap pontjaiból áll. $A(0; 0)$; $B(4; 0)$;

$C(4; 4)$; $D(0; 4)$; $E(0; 8)$; $F(-4; -4)$. Számítsuk ki a következő alakzatok területét:
a) $P \cup Q$; *b)* $Q \cup R$; *c)* $R \cup P$.

K2 **3802.** Egy háromszög két csúcs az $A(-3; 2)$ és a $B(5; -2)$ pont. Harmadik csúcsa az $x + 2y = 10$ egyenletű egyenesen van. Mekkora a háromszög területe?

E1 **3803.** Az ABC háromszög két csúcspontja: $A(0; 5)$ és $B(-4; 5)$. A háromszög területe 9 területegység. Számítsuk ki a C csúcspont abszcisszáját, ha az ordinátája 7. Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha a terület 13 területegység és a csúcspontok koordinátái: $A(1; 0)$, $B(0; 4)$, $C(c; 6)$, ahol $c > 0$.

E2 **3804.** Egy háromszög területe 2001 területegység. A csúcspontok koordinátái: $A(1; 1)$, $B(1 + d; q)$, $C(1 + 2d; q^2)$ ahol d és q pozitív egész számok. Számítsuk ki a B és a C csúcs koordinátáit.

E2 **3805.** Az e egyenes áthalad a $P(1; 6)$ ponton, az $x - 2y + 4 = 0$ egyenletű egyenessel és az x tengellyel $\frac{21}{2}$ egység területű háromszöget alkot. Írjuk fel az e egyenes egyenletét! Hány megoldás van?

E1 **3806.** Az e egyenes áthalad a $P(12; 0)$ ponton és az $A(0; 9)$, $B(0; 0)$, $C(4; 0)$ pontok által meghatározott ABC háromszög területét felezi. Írjuk fel az e egyenes egyenletét.

E2 **3807.** Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges a $2x + y = 20$ egyenletű egyenesre, és felezi az adott egyenes és a koordinátatengelyek által határolt háromszög területét.

K2 **3808.** Az ABC háromszög A csúcsának koordinátái $(0; 6)$, a B csúcsa az x tengelyen van, a súlypontjának koordinátái: $(4; 6)$. Számítsuk ki a háromszög területét.

E1 **3809.** Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(2; -1)$, $B(3; 1)$, $C(2^{1999}; 2^{2000})$. Számítsuk ki a háromszög területét.

K2 **3810.** Egy háromszög két csúcspontjának koordinátái: $A(2; 4)$, $B(8; 4)$, a harmadik csúcsa az $y = -x$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Határozzuk meg a C csúcs koordinátáit, ha a háromszög területét az x tengely felezi.

E1 **3811.** Egy háromszög két csúcsának koordinátái: $A(3; 4)$, $B(7; 4)$, a harmadik csúcson átmenő oldalak párhuzamosak a $\mathbf{v}_1(7; 6)$, illetve a $\mathbf{v}_2(1; 2)$ vektorokkal. Mekkora a háromszög területe?

E1 **3812.** Egy háromszög 10 egységnyi oldalának egyik végpontja a $(0; 6)$ koordinátájú pont, másik végpontja az x tengelyen van. A háromszög súlypontja az $S\left(6; \frac{17}{3}\right)$ pont. Mekkora a háromszög területe?

E1 **3813.** Egy háromszög egyik csúcsa az $A(4; 5)$, súlypontja $S(2; 3)$ pont. A háromszög B csúcsa az x tengelyre, C csúcsa az y tengelyre illeszkedik. Mekkora a háromszög területe?

E1 **3814.** Az ABC háromszög két csúcsa az $A(2; 6)$, és a $B(8; 2)$ pont. Az A és B csúcspontokon áthaladó súlyvonalak egyenlete: $5x - y = 4$ és $x - 7y = -6$. Számítsuk ki a háromszög területét.

E1 **3815.** Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az ordináta tengellyel és az $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, $C(9; 1)$ pontokkal megadott háromszöget két egyenlő területű részre osztja.

E1 **3816.** Az $ABCD$ derékszögű trapéz egyik szára AD, három csúcspontja: $A(2; 1)$, $B(10; 5)$ és $D(-1; 7)$. Számítsuk ki a C csúcspont koordinátáit, ha a trapéz területe 52,5 területegység.

E1 **3817.** Az ABC háromszög két csúcsa: $A(6; 8)$, $B(-2; 2)$, a C csúcsa az $x + 2y = 2$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Az ABC háromszög területe 40. Számítsuk ki a C csúcs koordinátáit.

E2 **3818.** Az $y = -\frac{1}{2}x + 4$ egyenletű egyenest az $y = mx$ egyenletű egyenes az M pontban metszi. Az M vetülete az x tengelyen N. Vizsgáljuk és ábrázoljuk az OMN háromszög területét, ha $0 < m < \infty$.

V **3819.** Legyen az ABC háromszögön belül választott P pont olyan tulajdonságú, hogy az ABP, BCP, ACP háromszögek területei egyenlők. Bizonyítsuk be, hogy $P = S$, ahol S a háromszög súlypontja.

V **3820.** Az $ABCD$ téglalap csúcspontjainak koordinátái: $A(0; 0)$, $B(a; 0)$, $C(a; b)$, $D(0; b)$. A sík tetszőleges $(x; y)$ koordinátájú pontjához rendeljük hozzá az $(x + y; x - y)$ koordinátájú pontját. Igazoljuk, hogy ez a hozzárendelés az $ABCD$ téglalaphoz olyan $A_1B_1C_1D_1$ téglalapot rendel hozzá, amelynek a területe az $ABCD$ téglalap területének a kétszerese.

V **3821.** Egy háromszög csúcsai $A(3; 0)$, $B(18; 15)$, $C(0; 9)$. A háromszög belsejében felvett P pont a háromszöget 3 háromszögre bontja. Jelöljük a PAB háromszög területét t_1-gyel, a PBC háromszög területét t_2-vel a PCA háromszög területét t_3-mal. Számítsuk ki P pont koordinátáit, ha $t_1 : t_2 : t_3 = 1 : 2 : 3$.

A kör

A kör egyenlete

K1 **3822.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek a középpontja az origóban van, és a sugara *a)* 4; *b)* 2,5; *c)* $\frac{3}{4}$; *d)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ egység. (Ha az egyenletben törtek vannak, távolítsuk el azokat.)

K1 **3823.** Írjuk fel a kör egyenletét, ha a középpontja az origóban van, és áthalad

a) a (4; 7) ponton; *b)* a $\left(-\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)$ ponton; *c)* az $(a; b)$ ponton.

K1 **3824.** Írjuk fel a kör egyenletét, ha a

a) középpontja a (4; 5) pont, és sugara 3 egység;

b) középpontja a (3; 3) pont, és sugara $\sqrt{5}$ egység;

c) középpontja a (–1; 3) pont, és sugara 5 egység;

d) középpontja a (2; 0) pont, és sugara 3,5 egység;

e) középpontja a (0; –3) pont, és sugara $\sqrt{13}$ egység;

f) középpontja a (–5; –3) pont, és sugara $\sqrt{2}$ egység.

K1 **3825.** Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amelynek
a) középpontja a (4; 3) pont, és áthalad az origón;
b) középpontja a (–3; 4) pont, és áthalad az origón;
c) középpontja az (*a; b)* pont, és áthalad az origón;
d) középpontja az (5; –2) pont, és áthalad a (4; 3) ponton;
e) középpontja a $2x + y + 1 = 0$ és a $3x - y + 9$ egyenesek metszéspontja és áthalad a $\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ ponton.

K1 **3826.** Határozzuk meg a (2; 3) középpontú és az $r = 5$ sugarú kör –1, 0, 1, 2, 3, 4 abszcisszájú pontjainak az ordinátáit, továbbá az 1, 0, –5 ordinátájú pontjainak az abszcisszáit.

K1 **3827.** Egy kör átmérőjének a végpontjai

a) (1; 1); (5; –1); *b)* (4; 1); (2; 3); *c)* (–5; 4); (3; 2); *d)* $\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{4}\right)$ (–3; 5).

Írjuk fel a kör egyenletét.

K1 **3828.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja az origó, a sugara $2\sqrt{5}$ egység. Hogyan helyezkednek el a körhöz viszonyítva a következő pontok: $A(-3; 0)$, $B(5; 0)$, $C(4; 2)$, $D(2; 6)$, $E(3; -4)$, $F(-2; -5)$.

K1 **3829.** Írjuk fel az $r = 5$ egység sugarú $C(-1; 2)$ középpontú kör egyenletét! Hogyan helyezkednek el az $A(-3; 0)$, $B(3; -3)$, $C(4; 2)$, $D(2; 7)$, $E(-4; 6)$, $F(3; -1)$ koordinátájú pontok az adott körhöz viszonyítva?

K2 **3830.** Melyek azok a $C(2; 1)$ középpontú, $r = 2$ egységsugarú kör belsejében lévő pontok, amelyek koordinátái a következő egyenletrendszer gyökei:

$$3^x + 3^{y-\frac{1}{2}} = 4 \text{ és } (2x-y)^2 = \frac{9}{4}.$$

E1 **3831.** Melyek azok a $C\left(\frac{1}{2};0\right)$ középpontú, $r = 1$ egység sugarú körön kívül lévő pontok, amelyek koordinátái kielégítik a

$$3^x + 3^{y-1} = 4 \text{ és } \left(2x-y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

egyenletrendszert?

K1 **3832.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az y tengelyt az origóban érinti, és áthalad az $A(-6; 0)$ ponton.

K1 **3833.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az x tengelyt az origóban érinti, és áthalad az (0; 4) ponton.

K2 **3834.** Induljunk ki az $(x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 36$ egyenletű körből és
a) tükrözzük az x tengelyre;
b) tükrözzük az y tengelyre;
c) tükrözzük az origóra;
d) toljuk el a $\mathbf{v}(2; 3)$ vektorral;
e) toljuk el a $\mathbf{v}(-5; -1)$ vektorral;
f) forgassuk el az origó körül +90°-kal;
g) forgassuk el az origó körül –90°-kal;
h) forgassuk el az origó körül +60°-kal;
i) nagyítsuk a középpontból kétszeresére;
j) kicsinyítsük az origóból a felére.
Írjuk fel az így keletkezett körök egyenleteit.

K2 **3835.** Mi annak az egység sugarú körnek az egyenlete, amelynek a középpontja
a) az x tengely pozitív oldalára illeszkedik, és érinti az y tengelyt;
b) az x tengely negatív oldalára illeszkedik, és érinti az y tengelyt;
c) az y tengely pozitív oldalára illeszkedik, és érinti az x tengelyt;
d) az y tengely negatív oldalára illeszkedik, és érinti az x tengelyt?

K2 **3836.** Írjuk fel a kör egyenletét, ha sugara 5 egység,
a) középpontja az $x = 3$ egyenesre illeszkedik, és érinti az x tengelyt;
b) középpontja az $y = -6$ egyenesre illeszkedik, és érinti az y tengelyt;
c) mindkét tengelyt érinti.

K2 **3837.** Írjuk fel a kör egyenletét, ha a sugara r, és mindkét tengelyt érinti.

K2 **3838.** Írjuk fel a kör egyenletét, ha a középpontja az $(a; 2a)$ pont, és
a) érinti az x tengelyt; *b)* érinti az y tengelyt; *c)* áthalad az origón.

K2 **3839.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely
a) a (2; 9) ponton halad át, és mindkét koordinátatengelyt érinti;
b) a (6; 3) ponton halad át, és mindkét koordinátatengelyt érinti;
c) a (4; 2) ponton halad át, és mindkét koordinátatengelyt érinti;
d) a (–5; 3) ponton halad át, és mindkét koordinátatengelyt érinti.

K2 **3840.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek a középpontja
a) a (6; 7) pont, és érinti az $5x - 12y - 24 = 0$ egyenest;
b) az (1; 2) pont, és érinti az $5x + 7y = 11$ egyenest.

K2 **3841.** Mi annak a körnek az egyenlete, amelynek a sugara 5 egység, áthalad a (9; 9) ponton, és
a) érinti az x tengelyt; *b)* érinti az y tengelyt?

K2 **3842.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $A(1; 6)$ és a $B(4; -5)$ pontokon, a középpontja pedig
a) az x tengelyre; *b)* az y tengelyre illeszkedik.

K2 **3843.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $A(2; 3)$ és a $B(5; 2)$ pontokon, a középpontja pedig
a) az x tengelyre; *b)* az y tengelyre illeszkedik.

K2 **3844.** Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely áthalad
a) a $P_1(3; 0)$ és a $P_2(-1; 2)$ pontokon, és a középpontja az $x - y + 2 = 0$ egyenletű egyenesre illeszkedik;
b) a $P_1(-1; -3)$ és a $P_2(-5; 3)$ pontokon, és a középpontja az $x - 2y + 2 = 0$ egyenletű egyenesre illeszkedik;
c) a $P_1(-1; 1)$ és a $P_2(-7; 3)$ pontokon, és a középpontja az $2x + y - 9 = 0$ egyenletű egyenesre illeszkedik;
d) a $P_1(1; 2)$ és a $P_2(4; -3)$ pontokon, és a középpontja az $y = 3x - 19$ egyenletű egyenesre illeszkedik.

V

E1 **3845.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti
a) az x tengelyt, és áthalad a $P_1(4; -1)$ és a $P_2(-3; -2)$ pontokon;
b) az x tengelyt, és áthalad a $P_1(0; 4)$ és a $P_2(3; 1)$ pontokon;
c) az y tengelyt, és áthalad a $P_1(1; 5)$ és a $P_2(8; 12)$ pontokon.

E1 **3846.** Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely áthalad
a) a (0; 4) ponton, és az $y = x - 3$ egyenest a 4 abszcisszájú pontjában érinti;
b) a (4; 5) ponton, és az $x + y = 12$ egyenest a 10 abszcisszájú pontjában érinti.

E1 **3847.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti
a) az $x + y = 4$ egyenest az 1 abszcisszájú pontjában, és a sugara $\sqrt{2}$ egység;
b) az $x - 2y = 3$ egyenest a -1 abszcisszájú pontjában, és a sugara $\sqrt{5}$ egység.

K2 **3848.** Írjuk fel a kör egyenletét, ha a
a) sugara $\sqrt{20}$ egység, és áthalad a (–2; 4) és a (4; 2) pontokon;
b) sugara 5 egység, és áthalad a (4; –2) és az (5; –3) pontokon;
c) sugara $\sqrt{10}$ egység, és áthalad a (0; 3) és a (2; 5) pontokon.

E1 **3849.** Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely a $2x - y = 6$ és a $2x - y = -14$ párhuzamosokat érinti és áthalad a (3; 4) ponton.

E1 **3850.** Egy kör átmegy a $P(0; 1)$ ponton és érinti az $y = x + 3$ és az $y = x - 1$ egyenletű egyeneseket. Írjuk fel a kör egyenletét.

E1 **3851.** Egy kör átmegy az origón és érinti az $y = 2x + 20$ és az $y = 2x - 20$ egyenletű egyeneseket. Írjuk fel a kör egyenletét.

K1 **3852.** Írjuk fel a kör egyenletét, ha a középpontján átmenő két egyenes egyenlete: $x + 2y = 12$, illetve $x - y = 0$, és a kör átmegy az origón.

E1 **3853.** Határozzuk meg a szabályos háromszög csúcspontjainak koordinátáit, ha egyik csúcsa az $A(-1; 2)$ pont és a háromszög köré írható kör középpontja a $K(1; 4)$ pont.

E1 **3854.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti a koordinátatengelyeket és a $3x + 4y = 10$ egyenletű egyenest.

K2 **3855.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti az y tengelyt, középpontja pedig az $e: x + 2y = 12$ és az $f: 5x - 3y = -5$ egyenletű egyenesek metszéspontja.

K2 **3856.** Írjuk fel a $P(9; 5)$ ponton áthaladó kör egyenletét, ha az olyan Q pontban érinti az y tengelyt, amelyre $PQ = 3\sqrt{10}$.

E1 **3857.** Az ABC derékszögű háromszög átfogójának végpontjai az $A(-3; 4)$, $B(8; 2)$ koordinátájú pontok. Az AC befogó párhuzamos a $3x + 4y = 0$ egyenletű egyenessel. Számítsuk ki a C csúcs koordinátáit, és írjuk fel a háromszög köré írható kör egyenletét.

E1 **3858.** Egy kör középpontja az $A(1; 1)$ és a $B(7; 10)$ pontokat összekötő egyenesen van. A kör az $x + 2y = 21$ egyenletű g egyenest abban a P pontban érinti, amelynek abszcisszája 5. Írjuk fel a kör egyenletét.

E2 **3859.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $x + y = 0$ egyenletű egyenest az origóban érinti, és érinti az $x = 1$ egyenletű egyenest is.

E2 **3860.** Hány olyan P pont létezik a koordináta-rendszer síkjában, amelynek x és y koordinátái egész számok és
$2y > 5|x|$ és $x^2 + y^2 < 9$.

E2 **3861.** Az $x^2 + y^2 = r^2$ egyenletű körbe téglalapot írunk, amelynek középvonalai a koordinátatengelyekre esnek. Hogyan válasszuk meg a téglalap méreteit, hogy a területe maximális legyen? Mennyi a maximális terület?

E2 **3862.** Jelöljük P-vel a $4x - 3y + 20 = 0$ egyenletű egyenes -2 abszcisszájú pontját. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek a sugara 10 egység és az egyenest a P pontban érinti. Hány megoldás van? Számítsuk ki a $\overrightarrow{PK}$ és az $\overrightarrow{OK}$ vektorok koordinátáit, ha K jelenti a kör középpontját és O az origó.

K1 **3863.** Vizsgáljuk meg, hogy a következő egyenletek közül melyik lehet kör egyenlete? Határozzuk meg a kör középpontjának a koordinátáit és a kör sugarát.

a) $x^2 + y^2 = 25$;
b) $x^2 + y^2 - 10 = 0$;
c) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 10$;
d) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$;
e) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$;
f) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 36 = 0$;
g) $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 6 = 0$;
h) $x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$;
i) $x^2 + y^2 + 10x = 0$;
j) $x^2 + y^2 + 2{,}4x - 3y - 2{,}56 = 0$;
k) $4x^2 + 4y^2 - 20x - 75 = 0$;
l) $16x^2 + 16y^2 - 24x - 16y - 243 = 0$;
m) $3x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 15 = 0$;
n) $2x^2 + 2y^2 - 3x - 5y + 3 = 0$;
o) $x^2 + y^2 - 2ax = 0$;
p) $x^2 + y^2 + ax = 0$;
q) $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$;
r) $x^2 + y^2 + 4x - 9y + 40 = 0$;
s) $x^2 + y^2 + 2xy - 3 = 0$;
t) $x^2 + y^2 + ax + by = 0$;
u) $x^2 - y^2 - 2x + 4y = 0$;
v) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25 = 0$;
w) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

E1 **3864.** A sík mely pontjainak koordinátái elégítik ki a következő összefüggéseket?

a) $x^2 + y^2 + 4x - 2y > 0$;
b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$;
c) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25 = 0$;
d) $x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0$.

K1 **3865.** Igazoljuk, hogy az

a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ és az $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$;
b) $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0$ és az $x^2 + y^2 + 10x - 24y = 0$

egyenletek körök egyenletei. Írjuk fel a két kör középpontján áthaladó egyenes (a centrális) egyenletét.

E1 **3866.** Igazoljuk, hogy az $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$ egyenlet akkor és csak akkor kör egyenlete, ha $B^2 + C^2 > 4AD$ és $A \neq 0$.

Hogyan kell az A, B, C, D együtthatókat megválasztani, hogy

a) a kör áthaladjon az origón
b) a középpontja az x tengelyre illeszkedjen;
c) a középpontja az y tengelyre illeszkedjen;
d) érintse az x tengelyt;
e) érintse az y tengelyt;
f) mindkét tengelyt érintse?

K2 **3867.** Igazoljuk, hogy az $x^2 + y^2 - 10x - 6y - 2 = 0$ egyenlet kör egyenlete. Írjuk fel az adott körrel koncentrikus kör egyenletét, ha áthalad a $P(2; 4)$ ponton.

V **3868.** Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű koordináta-rendszer $\left(\sqrt{2}; \frac{1}{3}\right)$ pontja körül írt bármely körön legfeljebb egy olyan pont van, amelynek mindkét koordinátája egész szám.

V **3869.** Bizonyítsuk be, hogy a sík $\left(\sqrt{5}; \frac{1}{3}\right)$ pontja körül írt körön legfeljebb egy rácspont van. (Olyan pont, amelynek mindkét koordinátája egész szám).

V **3870.** Mutassuk meg, hogy az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű körnek végtelen sok olyan pontja van, amelynek koordinátái racionális számok.

K2 **3871.** Határozzuk meg, hogy mely pontokban metszik a következő egyenletekkel megadott körök a koordináta-rendszer tengelyeit. (Először igazoljuk, hogy a *b), c)*, egyenletek kör egyenletei.
a) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$; *b)* $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$; *c)* $x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$.

E2 **3872.** Számítsuk ki az origó távolságát azoktól a pontoktól, amelyekben az $x^2 + y^2 - x - 5y - 2 = 0$ kör metszi a koordinátatengelyeket. Indokoljuk meg, hogy az x tengelyen mért két távolság szorzata miért egyenlő az y tengelyen mért két távolság szorzatával?

E1 **3873.** Mi az egyenlete annak a körnek, amely az x tengelyt az (5; 0) pontban érinti, s amely az y tengelyből 10 egység hosszúságú húrt metsz ki?

E1 **3874.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az abszcissza tengelyt a (3; 0) pontban érinti, és az ordináta tengelyből 8 egység hosszú húrt metsz ki.

E1 **3875.** Egy kör sugara 50 egység. Írjuk fel a kör egyenletét, ha tudjuk, hogy az x tengelyből 28 egység hosszúságú húrt metsz ki, és áthalad az $A(0; 8)$ ponton.

K1 **3876.** Igazoljuk, hogy az $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 2 = 0$ egyenlet kör egyenlete! Számítsuk ki a középpontnak a $3x + 4y = 2$ egyenletű egyenestől mért távolságát.

K2 **3877.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek átmérője a $k_1: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ és a $k_2: x^2 + y^2 + 4x + 12y + 4 = 0$ körök középpontjait összekötő szakasz. Számítsuk ki annak a négyszögnek a területét, amelynek csúcsai az x és az y tengelyre illeszkedő pontjai a keresett körnek.

E2 **3878.** Adott az $x^2 - ax + b = 0$ egyenlet. Tekintsük azt a kört, amelynek átmérője a (0; 1) és az $(a; b)$ koordinátájú pontok által meghatározott szakasz. Bizonyítsuk be, hogy ha $a^2 - 4b > 0$, akkor a kör az x tengelyt olyan két pontban metszi, amelyek abszcisszái az egyenlet gyökei.

K2 **3879.** Írjuk fel az $x^2 + y^2 - 6x - 18y + 65 = 0$ és az $x^2 + y^2 + 10x + 14y - 7 = 0$ egyenletű körök centrálisának egyenletét. Határozzuk meg a centrális és az x tengely hajlásszögét.

K2 **3880.** Az $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$ egyenletű kör és a koordinátatengelyek metszéspontjai egy négyszöget határoznak meg. A négyszög területe a kör területének hány százaléka?

K2 **3881.** Határozzuk meg az $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ egyenletű kör $P(1; 3)$ pontra vonatkozó tükörképének egyenletét.

E2 **3882.** Az $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ egyenletű körrel koncentrikus, a koordináta-rendszer origóját belsejében tartalmazó k körnek a koordinátatengelyekkel való metszéspontjai olyan négyszöget határoznak meg, amelynek a területe $6\sqrt{6}$ terület egység. Írjuk fel a k kör egyenletét.

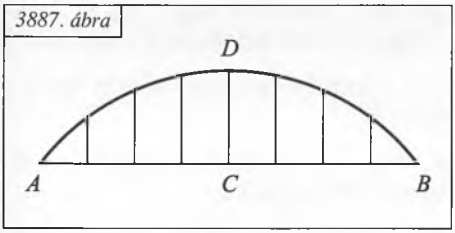
E1 **3883.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely a $2x + y = 19$ egyenletű egyenest a $P(7; 5)$ pontjában érinti és a koordinátatengelyekből egyenlő hosszú húrokat metsz ki.

K2 **3884.** Határozzuk meg a $4x^2 + Ay^2 + Bxy + Cy - 8x - 60 = 0$ egyenletben az A, B, C együtthatók értékét úgy, hogy az egyenlet egy $r = 5$ egység sugarú kör egyenlete legyen. Határozzuk meg a kör középpontjának koordinátáit.

K1 **3885.** Határozzuk meg a és b értékét úgy, hogy az $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ kör áthaladjon *a)* az (1; 2) és a (–3; 3) pontokon; *b)* a (4; 5) és a (–2; 3) pontokon.

K1 **3886.** Határozzuk meg a következő három ponton áthaladó kör egyenletét:
a) (–1; 1); (4; 2); (4; –4); *b)* (8; 5); (2; 7); (10; –9);
c) (1; 1); (0; 4); (9; 7); *d)* (4; 3); (2; 3); (3; 6);
e) (0; 0); (8; 0); (6; 4).
Oldjuk meg a feladatot többféle módon.

3887. ábra



E1 GY 3887. Az *ábrán* látható körív alakú híd fesztávolsága $AB = 80$ m, a CD ív magassága 20 m. Számítsuk ki a 10 m-enként elhelyezett függőleges tartórudak hosszát.

K1 **3888.** Egy háromszög oldalegyeneseinek egyenletei:

a) $4x - 5y + 13 = 0$; $7x + 2y - 31 = 0$; $3x + 7y - 1 = 0$;

b) $y = x + 1$; $y = -\frac{1}{2}x - 2$; $y = 3x - 9$;

c) $3x - 4y - 5 = 0$; $4x - 3y + 10 = 0$; $y = 2$.

Határozzuk meg a háromszög köré írt kör egyenletét.

V **3889.** Valamely háromszög oldalegyeneseinek egyenletei:
a) $x - 3y = 2$; $7x - y = 34$; $x + 2y = -8$;
b) $x + 2y - 3 = 0$; $3x - y - 2 = 0$; $2x - 3y - 6 = 0$.
Határozzuk meg a háromszög köré írt kör egyenletét a csúcsok koordinátáinak kiszámítása nélkül.

K2 **3890.** Számítsuk ki annak a körnek az átmérőjét (az átmérő hosszát), amely áthalad a $2x + 14y = 5$; $14x - 2y = 35$; $3x - 4y = 20$ egyenletű egyenesek páronként vett metszéspontjain.

E1 **3891.** A $2x + y + 9 = 0$; $-x + 2y + 8 = 0$; $3x + 4y + 6 = 0$ egyenletekkel megadott a, b, c egyenesek meghatároznak egy háromszöget. Írjuk fel a köré írt kör egyenletét. Számítsuk ki a háromszögbe írható kör sugarát.

K2 **3892.** Az $x^2 + y^2 + 12y - 12 = 0$, az $x^2 + y^2 - 22x - 20y + 202 = 0$ egyenletű körök középpontjai és a (0; 0) pont háromszöget feszítenek ki. Számítsuk ki a háromszög területét és a kerületét.

K2 **3893.** Számítsuk ki az ABC háromszög területét és a köré írt kör kerületét, ha $A(10; 4)$, $B(3; -5)$ és $C(1; 1)$.

K1 **3894.** Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(2; 2)$, $B(2; 4)$, $C(6; 4)$. Számítsuk ki
a) a háromszög oldalainak hosszát;
b) az oldalak felezőpontjainak koordinátáit;
c) a súlypont koordinátáit;
d) a háromszög köré írható kör középpontjának koordinátáit;
e) a magasságpont koordinátáit;
f) a háromszögbe írható kör középpontjának koordinátáit.

K2 **3895.** A derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcsa az origóban, B csúcsa az x tengelyen, C csúcsa pedig a $3x - 2y = 0$ egyenletű egyenesen van; a BC oldal felezőpontja $P(11; 6)$. Számítsuk ki a B és C csúcsok koordinátáit, és írjuk fel a háromszög köré írt kör egyenletét.

K2 **3896.** A (6; 5); (8; 1); (0; –3); (–1; 4) pontok négyszöget határoznak meg. Vizsgáljuk meg, hogy a négy pont egy körön van-e?

K2 **3897.** Egy húrnégyszög három csúcsát ismerjük:
a) (2; 4); (8; 2); (1; –4). A negyedik csúcs az y tengely negatív oldalára illeszkedik;
b) (0; 5); (0; –5); (8; 2). A negyedik csúcs az x tengely pozitív oldalára illeszkedik.
Számítsuk ki a negyedik csúcs koordinátáit.

K2 **3898.** Igazoljuk, hogy az $A(4; 6)$, $B(7; 1)$, $C(20; 2)$ és $D(6; 14)$ pontok egy körön helyezkednek el. Írjuk fel a kör egyenletét.

K2 **3899.** Igazoljuk, hogy az alábbi négy pont egy húrnégyszög négy csúcsa: $A(8; 4)$, $B(10; 0)$, $C(2; -4)$, $D(1; 3)$.

K2 **3900.** Bizonyítsuk be, hogy az $A(7; -2)$, $B(8; -5)$, $C(3; -10)$, $D(6; -1)$ pontok egy körön vannak, és írjuk fel a kör egyenletét.

K2 **3901.** Az $ABCD$ négyzet A csúcsának koordinátái (1; 2), a C csúcsának koordinátái (3; –2). Határozzuk meg a B és a D csúcsok koordinátáit, és írjuk fel a négyzet csúcsain átmenő kör egyenletét.

K2 **3902.** Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz A csúcsának koordinátái (1; –1), a D csúcsának koordinátái (–1; –9), $AB \parallel DC$ és a trapéz szimmetriatengelyének egyenlete $3x + 2y = 14$. Írjuk fel a trapéz köré írható kör egyenletét.

E2 **3903.** Az $ABCD$ téglalap két szomszédos csúcsa: $A(2; 0)$, $D(-1; 1)$ és tudjuk, hogy $3\,AD = AB$. Mekkora szakaszokat metsz ki az x, illetve y tengelyből a téglalap köré írt kör?

E2 **3904.** Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő szárú derékszögű háromszög oldalai fölé rajzolt négyzeteknek a háromszög csúcsaival nem azonos csúcsai egy körön vannak.

E2 **3905.** Írjuk fel az $x - 2 = 0$ és az $x - 8 = 0$ egyeneseket érintő, középpontjával a $3x - y - 6 = 0$ egyenesre illeszkedő kör egyenletét.

E2 **3906.** Írjuk fel az $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(0; 4)$ pontokkal megadott háromszögbe írható kör egyenletét.

E2 **3907.** Írjuk fel az $x + 2y - 4 = 0$; $x + 2y - 2 = 0$ és az $y = 2x - 5$ egyeneseket érintő körök egyenletét.

E1 **3908.** Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja
a) az $x + y = 3$ egyenesre illeszkedik, az $x - 3y = 0$ és a $3x + y - 2 = 0$ egyeneseket érinti;
b) az $x + y = 4$ egyenesre illeszkedik, az $x + y - 1 = 0$ és a $7x - y - 5 = 0$ egyeneseket érinti.

E1 **3909.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a (2; 11) és a (10; 11) pontokon, és érinti az $x + y = 5$ egyenest.

E2 **3910.** Határozzuk meg annak a síkidomnak a területét, amelyet a $4 \le x^2 + y^2 \le 2(|x| + |y|)$ egyenlőtlenségpárral megadott $P(x; y)$ pontok halmaza határoz meg.

V **3911.** Írjuk fel a (4; 6) ponton átmenő egyenes egyenletét, ha az a koordinátatengelyekből olyan háromszöget metsz ki, amelybe egységsugarú kör írható.

V **3912.** Egy deltoid csúcsai $A(0; 0)$, $B(1; 2)$, $C(4; 0)$ és $D(1; -2)$. Tekintsük azokat a köröket, amelyek kerülete mind a négy csúcsponttól egyenlő távolságra van. Mekkora a legnagyobb kör sugara?

E2 **3913.** Az ABC háromszög síkjában melyik az a P pont, amelyre $PA^2 + PB^2 + PC^2$ minimális?

V **3914.** Egy háromszög két csúcsa rögzített, a harmadik úgy mozog, hogy az oldalak négyzetösszege mindig egyenlő a háromszög területének 8-szorosával. Határozzuk meg a harmadik csúcs mértani helyét.

V **3915.** Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(-2; 0)$, $B(2; 0)$, $C(0; 6)$. A koordináta-rendszer síkjában mi a mértani helye azoknak a P pontoknak, amelyekre $PA^2 + PB^2 + PC^2 = k^2$, ahol $k \in \mathbf{R}$?

E2 **3916.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyhez az $A(3; 2)$ pontjában húzott érintő egyenlete $x + y = 5$ és a kör középpontja az origótól 1 egység távolságra van.

E2 **3917.** Adott az ABC szabályos háromszög. Hol vannak azok a P pontok a háromszög síkjában, amelyekre $PA^2 = PB^2 + PC^2$.

Kör és egyenes kölcsönös helyzete. Kör érintője

K1 **3918.** Határozzuk meg
a) az $x^2 + y^2 = 25$ kör és a $2x + y = 10$ egyenes;
b) az $x^2 + y^2 = 10$ kör és a $3x + y = 10$ egyenes;
c) az $x^2 + y^2 = r^2$ kör és az $x + y = a$ egyenes;
d) az $x^2 + y^2 = r^2$ kör és a $y = mx$ egyenes;
e) az $x^2 + y^2 = r^2$ kör és a $y = mx + b$ egyenes közös pontjainak számát.
A *c)* és *e)* feladatban vizsgáljuk meg, hogy a, illetve b milyen értékei mellett kapunk 2, 1, 0 közös pontot?

K1 **3919.** Milyen helyzetűek az alábbi egyenesek az $x^2 + y^2 = 36$ egyenletű körhöz képest:
a) $x - 2y + 5 = 0$; *b)* $5x - 12y + 26 = 0$;
c) $3x - 4y + 30 = 0$; *d)* $x + y - 17 = 0$.

K1 **3920.** Határozzuk meg
a) az $x^2 + y^2 - 5x = 0$ kör és az $y = x - 2$ egyenes;
b) az $x^2 + y^2 - 2x = 0$ kör és a $3x - y = 0$ egyenes;
c) az $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ kör és a $2y - x - 1 = 0$ egyenes;
d) az $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 18 = 0$ kör és az $x - y = 2$ egyenes;
e) az $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ kör és a $4x - 3y - 38 = 0$ egyenes közös pontjainak a számát.

K1 **3921.** Milyen helyzetű
a) a $3x - 2y = 7$ egyenes az $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 15 = 0$ körhöz képest?
b) a $3x - 4y = 19$ egyenes az $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ körhöz képest?
c) a $(7; -1)$ és az $(1; 7)$ pontokon átmenő egyenes az $x^2 + y^2 = 25$ és az $x^2 + y^2 = 36$ körhöz képest?

K2 **3922.** Számítsuk ki annak a húrnak a hosszát, amelyet az $x^2 + y^2 - 14x - 4y - 5 = 0$ kör metsz ki a $2y - 3x + 12 = 0$ egyenesből.

E1 **3923.** Valamely kör egyenlete $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 14$. Határozzuk meg az (1; 3) ponton áthaladó legrövidebb húr egyenletét és hosszúságát.

K2 **3924.** Egy háromszög két csúcsának koordinátái: $A(1; 1)$, $B(8; 2)$, a köré írható kör középpontjának abszcisszája 4. Határozzuk meg a harmadik csúcs koordinátáit, ha az illeszkedik az $y - 2x = 7$ egyenletű egyenesre.

K2 **3925.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $x^2 + y^2 = 25$ kör és az $x - 7y + 25 = 0$ egyenes metszéspontjain és a (0; 0) ponton.

K2 **3926.** Határozzuk meg azokat a pontokat, amelyek az $x + 2y = 7$ egyenesre illeszkednek, és a (3; 7) ponttól 5 egység távolságra vannak.

E1 **3927.** Egy derékszögű háromszög átfogójának a végpontjai (2; 5) és (–4; –3), a hozzá tartozó magasság talppontjának az ordinátája 2,12. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

K2 **3928.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $x^2 + y^2 = 100$ kört a (6; –8) pontban érinti, és sugara 15 egység.

E2 **3929.** Adott az e egyenes: $y = \frac{1}{2}x + 9$, ennek egyik partján az A és a B pont: $A(-2; 3)$, $B(5; 4)$, továbbá a $d = 4\sqrt{5}$ hosszúságú szakasz. Adjuk meg az A és a B pontokon áthaladó olyan körnek az egyenletét, amely az e egyenesből d hosszúságú húrt metsz ki.

V **3930.** Az XOY derékszög szögfelezőjén rögzítsünk egy O-tól különböző P pontot. Ezután rajzoljunk egy, az O és P ponton áthaladó kört. Ez a derékszög szárait az O-tól különböző A és B pontokban is metszi. Bizonyítsuk be, hogy az előjeles OA és OB távolságok összege nem függ a kör sugarától.

K1 **3931.** Írjuk fel az $x^2 + y^2 = 25$ kör (4; 3) pontjához tartozó érintőjének az egyenletét.

E1 **3932.** Mekkora szöget zárnak be az $x^2 + y^2 = 36$ kör –5 abszcisszájú pontjaihoz tartozó érintők?

E2 **3933.** Az $x^2 + y^2 = 100$ körhöz érintőket húzunk a (6; 8) és a (8; 6) pontokban. Számítsuk ki az érintők metszéspontját és a hajlásszögét.

E2 **3934.** Húzzunk érintőt az $x^2 + y^2 = 1$ körhöz a (0; 1), (–1; 0), (0; –1), $(x_1; y_1)$ pontjaiban, ahol x_1 tetszőleges 1-nél kisebb pozitív szám. Bizonyítsuk be, hogy a keletkező trapéz átlói az y tengelyen metszik egymást. Átmegy-e a metszésponton a nem párhuzamos oldalak érintési pontjain áthaladó egyenes?

E1 **3935.** Írjuk fel

a) a (10; 0) pontból az $x^2 + y^2 = 25$ körhöz húzható érintők egyenletét;

b) a (7; 1) pontból az $x^2 + y^2 = 25$ körhöz húzható érintők egyenletét;

c) a (8; 4) pontból az $x^2 + y^2 = 16$ körhöz húzható érintők egyenletét;

d) a (–1; 3) pontból az $x^2 + y^2 = 5$ körhöz húzható érintők egyenletét.

Számítsuk ki az érintési pontok koordinátáit, az érintőszakaszok hosszát és azt érintők hajlásszögét.

E1 **3936.** Milyen szög alatt látszik az $x^2 + y^2 = 16$ kör a (8; 0) pontból?

E2 **3937.** Az $x^2 + y^2 = 100$ kör köré írt érintőnégyszög két szemközti csúcsa: (–12; 3,5), (12; 10). Számítsuk ki a hiányzó csúcsok koordinátáit.

K2 **3938.** Keressük meg az
a) $x^2 + y^2 = 25$ körnek a $4x - 2y = 7$ egyenessel párhuzamos érintőit;
b) $x^2 + y^2 = 5$ körnek a $2x - y + 1 = 0$ egyenessel párhuzamos érintőit;
c) $x^2 + y^2 = 169$ körnek az $5x + 12y - 11 = 0$ egyenessel párhuzamos érintőit;
d) $x^2 + y^2 = 25$ körnek a $y = 3x - 7$ egyenesre merőleges érintőit.

E1 **3939.** Egy 12 egység sugarú kör középpontja az origóban van. Az x tengely pozitív oldalára illeszkedő egyik P pontból érintőket húztunk a körhöz. Írjuk fel az érintők egyenletét, ha $PQ = 35$ egység, ahol Q az érintési pont.

E2 **3940.** Egyenlő szárú háromszög alappal szemközti csúcsa (6; 8), a beírt kör egyenlete $x^2 + y^2 = 64$. Írjuk fel a háromszög alapegyenesének egyenletét, és számítsuk ki a hiányzó két csúcs koordinátáit.

E2 **3941.** Írjuk fel az $x^2 + y^2 = 12$ körhöz rajzolt egyenlő oldalú érintő háromszög oldalegyeneseinek egyenletét, és számítsuk ki a háromszög csúcsainak a koordinátáit, ha az egyik csúcsa az y tengely pozitív oldalára illeszkedik.

V **3942.** Adott a K kör és egy e egyenes, amelyeknek nincs közös pontja. Az egyenes minden pontja körül olyan kört szerkesztünk, amelynek a sugara a pontból a körhöz húzható érintőszakasszal egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy az így rajzolt körök két rögzített ponton mennek át. Mit mondhatunk akkor, ha a K-nak és az e-nek van közös pontja?

K2 **3943.** Írjuk fel
a) az $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ kör (5; 5) pontjához tartozó érintőjének egyenletét;
b) az $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$ kör (0; 3) pontjához tartozó érintőjének az egyenletét;
c) az $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ kör –1 abszcisszájú pontjához tartozó érintőjének az egyenletét.

K2 **3944.** Az $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 18 = 0$ körhöz egy P pontból érintőket rajzolunk. Számítsuk ki a P pont koordinátáit, ha az érintési pontokon áthaladó szelő egyenlete $x - y - 2 = 0$.

E1 **3945.** Mekkora szögben metszi az $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ kör a koordináta-rendszer tengelyeit?

K2 **3946.** A P anyagi pont erő hatására az $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 25$ körön mozog. Amikor a $P(2; 1)$ pontba érkezik, az erő hatása megszűnik. Írjuk fel további pályájának az egyenletét.

K2 **3947.** Az $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 66 = 0$ körhöz érintőket húzunk, melyek párhuzamosak a $4x - 3y = 0$ egyenessel. Határozzuk meg az érintők egyenleteit és az érintési pontok koordinátáit.

K2 **3948.** Az $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 45 = 0$ körhöz érintőket húzunk, amelyek párhuzamosak az $y = 3x$ egyenessel. Határozzuk meg az érintők egyenleteit.

K2 **3949.** Az $x^2 + (y - 2)^2 = 5$ körhöz érintőket húzunk, amelyek merőlegesek az $y = 0{,}5x + 1$ egyenesre. Írjuk fel az érintők egyenleteit.

E1 **3950.** Írjuk fel
a) az $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$ kör origón áthaladó érintőinek az egyenletét;
b) az $x^2 + (y + 2)^2 = 5$ kör (5; 3) ponton áthaladó érintőinek az egyenletét;
c) az $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ kör (3; 1) ponton áthaladó érintőinek az egyenletét;
d) az $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ kör (2; 6) ponton áthaladó érintőinek az egyenletét.

K2 **3951.** Milyen hosszú érintő húzható az $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 10 = 0$ körhöz a $P_1(0; -1)$, $P_2(1; -1)$, $P_3(2; 0)$, $P_4(0; 0)$ pontokból?

K2 **3952.** A P anyagi pont az $(x - 4)^2 + (y - 8)^2 = 20$ körön mozog. Miután az erő megszűnik, a pont pályája áthalad a $(-2; 0)$ ponton. Melyik pontban hagyta el a mozgó pont a körpályát?

E2 **3953.** Határozzuk meg az x tengelyen azt a pontot, amelyből az $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$ egyenletű körhöz húzott érintők merőlegesek egymásra.

E2 **3954.** Írjuk fel
a) az $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ és az $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ körök;
b) az $x^2 + y^2 = 225$ és az $x^2 - 30x + y^2 + 189 = 0$ körök;
c) az $x^2 + y^2 - 6x = 0$ és az $x^2 + y^2 - 6y = 0$ körök közös érintőinek az egyenletét.

E2 **3955.** Adott két kör. Az egyik középpontja (1; 3) és a sugara $\sqrt{5}$, a másik középpontja (0; 1) és a sugara $2\sqrt{5}$. Írjuk fel a közös érintőiknek az egyenletét.

K2 **3956.** Egy egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjai $A(-3; 5)$, $B(3; -1)$. A háromszög köré írható kör egyenlete $x^2 + y^2 - 4{,}5x - 8{,}5y - 5 = 0$. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

E1 **3957.** Egy szabályos háromszög egyik csúcsának koordinátái (1; 1). A háromszög súlypontja az $S(3; 5)$ pont. Számítsuk ki a másik két csúcspont koordinátáit.

E2 **3958.** Egy húrnégyszög két szomszédos oldalegyenesének egyenlete $2x + y = 0$ és, $2x - y + 4 = 0$ A húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra és a $P(1; 2)$ pontban metszik egymást. Határozzuk meg a húrnégyszög csúcspontjainak koordinátáit! Írjuk fel a négyszög köré írt kör egyenletét.

K2 **3959.** Az $x^2 + y^2 = 5$ egyenletű körhöz olyan e érintőt húzunk, amely merőleges a $2x - y + 1 = 0$ egyenletű egyenesre. Számítsuk ki az e érintő és az adott egyenes metszéspontjának koordinátáit.

E1 **3960.** Az $(x - 5)^2 + (y + 10)^2 = 50$ egyenletű kör az origón átmenő egyenesből 10 egység hosszúságú húrt vág ki. Számítsuk ki a húr végpontjainak koordinátáit.

K2 **3961.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyik az $x + y = 0$ egyenletű egyenest az origóban érinti, és érinti az $y = x + 4$ egyenletű egyenest is.

K2 **3962.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $y = x$ egyenletű egyenest az origóban érinti, és érinti az $x = 4$ egyenletű egyenest is.

E1 **3963.** Az ABC háromszög A csúcsának koordinátái $(-3; 0)$. A B csúcs koordinátái $(6; -12)$. A C csúcs az $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 25$ egyenletű körön mozog. A C csúcs melyik helyzeténél legkisebb az ABC háromszög területe?

E1 **3964.** Írjuk fel a $P(6; 3)$ ponton átmenő olyan e egyenes egyenletét, amely az $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ egyenletű körtől 2 egység távolságra halad.

K2 **3965.** Igazoljuk, hogy az $A(1; -1)$, $B(3; 3)$ és a $C(4; 5)$ pontok egy egyenesre illeszkednek. Milyen arányban osztja B az AC szakaszt? Mi azon P pontok mértani helye, amelyekre $\frac{AP}{PC} = \frac{AB}{BC}$?

E2 **3966.** Egy paralelogramma egyik csúcsa az origó, a többi csúcsa rajta van az $(x-8)^2 + (y-5)^2 = 25$ egyenletű körön, a középpontja pedig az $x + 2y = 14$ egyenletű egyenesen. Határozzuk meg a többi csúcs koordinátáit.

K2 **3967.** Az $x + y = 18$ egyenletű egyenes melyik pontjából húzható az $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ egyenletű körhöz 12 egység hosszúságú érintő?

E1 **3968.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek az első síknegyedbe eső középpontja az x tengelytől kétszer akkora távolságra van, mint az y tengelytől, és a $4x + 4y = 35$ egyenletű egyenest az 5 abszcisszájú pontjában érinti.

E2 **3969.** Hány olyan kör van, amely érinti a koordinátatengelyek mindegyikét és érinti az $x + \sqrt{3}y = \sqrt{3}$ egyenest is? Írjuk fel ezek körül a legkisebb sugarúnak az egyenletét.

K2 **3970.** Írjuk fel az $(x-3)^2 + y^2 = 9$ egyenletű körbe írható olyan szabályos háromszög oldalainak az egyenletét, amelynek egyik csúcsa az origó. Számítsuk ki a háromszög kerületét és a területét.

K2 **3971.** Az $ABCD$ téglalapban $BC = 2AB$. Vegyük fel a BC oldalon az E pontot úgy, hogy $BE : BC = 1 : 4$. Kössük össze E-t A-val. Mutassuk meg, hogy AE a BD átlót az AD átmérőjű körön metszi.

E1 **3972.** Egy kör egyenlete $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 12 + a = 0$. Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy az origóból húzott érintők merőlegesek legyenek egymásra.

E2 **3973.** Egy háromszög egyik csúcsa: $A(5; -1)$, a súlypontja $S\left(\frac{7}{3}; 1\right)$. A háromszög köré írható kör egyenlete $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$.
Számítsuk ki a hiányzó csúcsok koordinátáit.

E2 **3974.** Egy tengelyesen szimmetrikus érintőnégyszög két oldala a $3x - 4y + 24 = 0$ és az $y = \frac{3}{4}x - 4$ egyenletű egyenesre, míg két csúcsa az y tengelyre illeszkedik. Milyen négyszögről van szó, és mekkorák a további, az első síknegyedbe eső csúcsainak koordinátái?

E1 **3975.** Az $ABCD$ négyzet csúcspontjai az $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 156 = 0$ egyenletű körvonalra illeszkednek. Határozzuk meg a négyzet B, C és D csúcsának koordinátáit, ha $A\,(8; -10)$.

E1 **3976.** Adott az $x^2 + y^2 - 2x - 25 = 0$ egyenletű kör két pontja: $A(-4; -1)$ és $B(6; 1)$, a kör AC és BC húrjai hosszának az aránya $3 : 2$. Határozzuk meg a C pont koordinátáit.

E2 **3977.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely a koordináta-rendszer kezdőpontja köré rajzolt egységnyi sugarú kört az első síknegyedben érinti és az y tengely pozitív feléből kétszer akkora szakaszt vág le, mint az x tengely pozitív feléből. Számítsuk ki az érintési pont koordinátáit.

V **3978.** Egy deltoid csúcsai: $A\left(0;\frac{21}{4}\right)$, $B(7;0)$, $C\left(0;-\frac{28}{3}\right)$, $D(-7;0)$. A deltoidba kört írunk, majd a kör középpontját kössük össze a deltoid csúcsaival és mindegyik szakaszra állítsunk merőlegest a deltoid csúcsában. Bizonyítsuk be, hogy a 4 újabb egyenes által meghatározott négyszög átlói átmennek a kör középpontján.

V **3979.** Legyen a derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontjának merőleges vetülete az $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ egyenesen a P pont.

Mi a P pontok mértani helye, ha az egyenes úgy mozog, hogy $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ állandó?

Körök kölcsönös helyzete, közös pontjaik meghatározása

K1 **3980.** Vizsgáljuk meg, hogy van-e közös pontja a következő egyenletekkel megadott köröknek? Számítsuk ki a közös pont (pontok) koordinátáit, miután ellenőriztük, hogy az adott egyenlet valóban kör egyenlete-e.

a) $x^2+y^2-2x-4y-3=0$, $x^2+y^2-4x-6y-5=0$;
b) $x^2+y^2-2x+4y-1=0$, $x^2+y^2-6y-3=0$;
c) $x^2+y^2-10x-8y-4=0$, $x^2+y^2-2x-4y=0$;
d) $x^2+y^2+2x=0$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$.

K2 **3981.** Igazoljuk, hogy az $x^2+y^2=25$ és az $x^2+y^2-12x-16y+75=0$ egyenletű körök érintik egymást. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a két kör érintési pontján, és a tengelyeket érinti.

K2 **3982.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $x^2+y^2-2x=0$ és az $x^2+y^2-2y=0$ egyenletű körök közös pontjain, és

a) a sugara $\sqrt{5}$;
b) a középpontja az $x=y$ egyenesre illeszkedik.

K1 **3983.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $x^2+y^2+x-y-6=0$ és az $x^2+y^2-2x+y-10=0$ egyenletű körök közös pontjain és a középpontja az x tengelyre illeszkedik.

K1 **3984.** Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $x^2+y^2-x+y-2=0$ és az $x^2+y^2=5$ egyenletű körök közös pontjain és a $(2;-2)$ ponton;

K1 **3985.** Határozzuk meg az $x^2+y^2-4x-10y+19=0$ egyenletű körnek azokat a pontjait, amelyek $(5;-1)$ ponttól 5 egység távolságra vannak.

K1 **3986.** Írjuk fel a $(2;1)$ ponton áthaladó és az $x^2+y^2-8x-4y+19=0$ egyenletű kört érintő egységsugarú kör egyenletét.

K2 **3987.** Mi annak a körnek az egyenlete, amelynek a középpontja a $(6;4)$ pont és az $x^2+y^2-8x+11=0$ egyenletű kört

a) kívülről érinti; *b)* belülről érinti?

E1 **3988.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek sugara $\sqrt{8}$, áthalad a $P(-1; 3)$ ponton és az $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$ egyenletű kört kívülről érinti.

E1 **3989.** Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amelynek a középpontja az x tengelyen van, az $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 100$ egyenletű kört belülről az $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 25$ egyenletű kört pedig kívülről érinti.

E2 **3990.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 100$ egyenletű kört a (7; 8) pontban belülről és az x tengelyt érinti.

E1 **3991.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$ egyenletű kört kívülről érinti, érinti a koordinátatengelyeket is és a középpontja az első síknegyedbe esik.

E2 **3992.** Határozzuk meg a kör középpontjának koordinátáit (2 tizedes jegy pontossággal), ha a sugara 5 egység, és az $x^2 + y^2 = 25$, $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ egyenletű köröket érinti.

E1 **3993.** Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely az $(x - 2)^2 + (y - 9)^2 = 4$, $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ és az $(x - 9)^2 + (y - 8)^2 = 4$ egyenletű köröket kívülről, illetve belülről érinti.

V **3994.** Milyen szögben metszik egymást az $x^2 + y^2 = 16$ és az $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ egyenletű körök?

V **3995.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a (0; 1) és az (1; 0) pontokon és az $x^2 + y^2 + 2x = 0$ egyenletű kört merőlegesen metszi.

V **3996.** Írjuk fel a (2; 3) ponton áthaladó és az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű kört merőlegesen metsző 3 egység sugarú kör egyenletét!

K2 **3997.** Adott két kör egyenlete $k_1: (x - 5)^2 + (y - 8)^2 = 64$ és $k_2: (x + 3)^2 + (y - 10)^2 = 81$. Igazoljuk, hogy a két egyenlet különbsége $[k_1 - k_2 = 0]$ olyan egyenesnek az egyenlete, amely merőleges a két kör centrális egyenesére.

K1 **3998.** Számítsuk ki a következő körök közös húrjának a hosszúságát:
a) $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$, $x^2 + y^2 = 9$;
b) $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $x^2 + y^2 - x + 2y = 0$;
c) $x^2 + y^2 = 10$, $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 30 = 0$;
d) $2x^2 + 2y^2 - x = 0$, $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$;
e) ha sugaraik $r_1 = r_2 = 10$ egység, középpontjaik $O_1(7; 1)$ és $O_2(-7; 3)$.

K2 **3999.** Számítsuk ki azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyekből az $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$ és az $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$ körhöz 7 egység hosszúságú érintőszakaszok húzhatók.

K1 **4000.** Számítsuk ki annak a háromszögnek a területét, amelyet az $x^2 + y^2 = 10$ és az $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ egyenletű körök közös húrjának egyenese, valamint az x és az y tengely határol.

K2 **4001.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti az x tengelyt és érinti az $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 100$ egyenletű kört is a $P(7; 8)$ pontjában.

K2 **4002.** Bizonyítsuk be, hogy az
$(x + 8)^2 + (y - 12)^2 = 100$ és az $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 100$
egyenletű körök érintik egymást. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyik mindkét kört érinti a közös érintési pontban és érinti az x tengelyt is.

K2 **4003.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyik érinti az $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 100$ egyenletű kört a $P(8; 6)$ pontban és érinti az y tengelyt is.

E1 **4004.** Egy k kör átmegy a $P(3; 7)$ ponton, az $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 98 = 0$ egyenletű kört belülről, az $x^2 + y^2 - 22x - 16y + 160 = 0$ egyenletű kört kívülről érinti. Írjuk fel a k kör egyenletét.

K2 **4005.** A k kör koncentrikus az $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 1 = 0$ egyenletű körrel. A k körnek a tengelyekkel közös pontjai olyan négyszöget feszítenek ki, amelynek a területe $8\sqrt{15}$ területegység. Írjuk fel a k kör egyenletét.

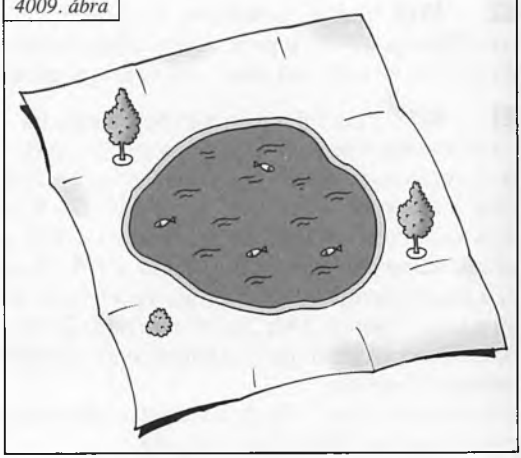
E2 **4006.** Az $x^2 + y^2 = 9$ és az $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 1$ egyenletű körök centrálisának melyik P pontjából húzható közös érintő a két körhöz?

K2 **4007.** Az x tengely melyik pontjából húzhatók egyenlő hosszúságú érintők az
$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 16$ és az $(x - 9)^2 + (y - 2)^2 = 1$ egyenletű körökhöz?

E2 **4008.** Az x tengely melyik pontjából húzható az
$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + (y - 8)^2 = 6{,}25$ egyenletű körhöz kétszer olyan hosszú érintő, mint az
$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 25$ egyenletű körhöz?

K2 GY **4009.** Egy park térképéről, amelyet egy koordináta-rendszerben helyeztünk el, leolvastuk, hogy a $P(0; 12)$ pontban és a $Q(4; 16)$ pontban egy-egy fa, az $R(0; 0)$ pontban egy bokor áll. Halastavat terveznek úgy, hogy a fák a tó partján, a bokor a parttól 2 m-re álljanak. Mekkora lesz a tó átmérője?
(1 egység a koordináta-rendszerben a valóságban 1 méter.)

4009. ábra



A parabola

A parabola egyenlete

K1 **4010.** Rajzoljunk egy egyenest, és tőle 5 cm távolságra jelöljünk ki egy pontot. Szerkesszünk olyan köröket, amelyek az egyenest érintik, és áthaladnak a kitűzött ponton.

K1 **4011.** Szerkesszük meg a parabola néhány pontját, ha a tengelyponti egyenlete:

a) $x^2 = 8y$; *b)* $y = \frac{1}{4}x^2$.

E1 **4012.** Egy pontot a parabola belső vagy külső pontjának nevezünk aszerint, hogy a fókusztól mért r és a vezéregyenestől mért t távolsága $r - t < 0$, vagy $r - t > 0$.
Bizonyítsuk be, hogy a sík tetszőleges pontjának koordinátáira $x^2 < 2py$, illetve $x^2 > 2py$ aszerint, hogy a pont az $x^2 = 2py$ parabola belső vagy külső pontja.

E1 **4013.** Vizsgáljuk meg, hogy az (1; 2), (–3; 1), (6; 3) és a (–7; 4) pontok az $x^2 = 12y$ parabola belső vagy külső pontjai-e?

K1 **4014.** Mi az egyenlete annak a parabolának, amelynek a tengelypontja az origó és
a) áthalad a (12; 6) ponton, tengelye az y, illetve az x tengely;
b) áthalad a (4; 4) ponton, tengelye az y, illetve az x tengely;
c) áthalad a (–4; 3) ponton, tengelye az y, illetve az x tengely;
d) áthalad a (–8; –6) ponton, tengelye az y, illetve az x tengely?

K1 **4015.** Írjuk fel a parabola tengelyponti egyenletét, ha a fókusza az
a) (0; 4), *b)* (0; –3), *c)* (0; 2), *d)* (0; –8), *e)* (4; 0), *f)* (–5; 0) pont.

K2 **4016.** Írjuk fel a parabola egyenletét, ha
a) a fókusza a (–7; 0) pont, és a vezéregyenesének az egyenlete $x - 7 = 0$;
b) a fókusza a (0; –4) pont, és a vezéregyenesének az egyenlete $y - 4 = 0$.

E1 **4017.** Írjuk fel a parabola egyenletét, ha
a) a vezéregyenesének az egyenlete $y + 1 = 0$, a fókusza a (4; 3) pont;
b) a vezéregyenesének az egyenlete $y - 3 = 0$, a fókusza a (2; –3) pont;
c) a vezéregyenesének az egyenlete $y - 6 = 0$, a fókusza a (3; –2) pont;
d) a vezéregyenesének az egyenlete $x - 1 = 0$, a fókusza a (4; 2) pont;
e) a vezéregyenesének az egyenlete $x + 4 = 0$, a fókusza a (–1; 3) pont;
f) a tengelypontja a (–1; 2), fókusza a (–1; 4) pont;
g) a tengelypontja a (4; 2), fókusza a (8; 2) pont;
h) a fókusza a (0; 6) pont, a tengelye az y tengely és a fókuszának a vezéregyenestől való távolsága 8 egység;
i) a fókusza a (6; 2) pont, a tengelye párhuzamos az x tengellyel és a fókuszának a vezéregyenestől való távolsága 4 egység.

K2 **4018.** Mi a feltétele annak, hogy az $y = ax^2 + bx + c$, parabola áthaladjon a következő ponton:
a) (0; 0), *b)* (2; 1), *c)* (–4; 0), *d)* (3; –2).

K2 **4019.** Írjuk fel a parabola egyenletét, ha a tengelypontja az $y = 2$ egyenesre illeszkedik, áthalad a (0; 8) ponton, paramétere 3, és a tengelye párhuzamos az y tengellyel.

E1 **4020.** Írjuk fel a parabola egyenletét, ha a tengelye párhuzamos az x tengellyel, paramétere $\frac{1}{2}$, és áthalad a (–6; 4) és a (9; 1) pontokon.

E2 **4021.** Írjuk fel a parabola egyenletét, ha
a) a tengelypontja az y tengelyre illeszkedik, tengelye párhuzamos az x tengellyel és áthalad a (–4; 1) és a (–1; –1) pontokon;
b) tengelypontja az x tengelyen van, szimmetriatengelye párhuzamos az y tengellyel, és áthalad a (2; 3) és a (–1; 12) pontokon.

K2 **4022.** Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amely átmegy az $A(4; 4)$ és $B(9; 9)$ pontokon, érinti az x tengelyt és a tengelye párhuzamos az y tengellyel.

E1 **4023.** Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola csúcspontja a $T(1; -1)$ pont, a parabola és az x tengely egyik közös pontjának x koordinátája 2. Számítsa ki a, b, c értékét.

E2 **4024.** Két parabola közös fókusza az $F(2; 2)$ pont, és mindkettő átmegy a $P_1(4; 2)$ és $P_2(-2; 5)$ pontokon. Határozzuk meg mindkét parabola paraméterét.

E2 **4025.** A p paraméter mely értéke mellett lesz minimális annak a vektornak a hossza, amellyel való eltolás az $y = x^2 - 4px + 2$ egyenletű parabolát az $y = x^2 + 2px - 4$ parabolába viszi át?

K1 **4026.** Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amely áthalad a következő pontokon és a tengelye párhuzamos az y tengellyel.

a) a (–2; 3),	(4; 0),	(8; 8);	*b)* a (–3; 2),	(0; 0),	(3; 2);
c) a (4; 5),	(–2; 11),	(–4; 21);	*d)* a (1; 1),	(3; 0),	(4; –4);
e) a (4; –2),	(7; –2),	(8; 1).			

E1 **4027.** Egy parabola tengelye az x tengely, tengelypontja a (–5; 0) pont, és az y tengelyből 12 egység hosszúságú húrt metsz ki. Írjuk fel a parabola egyenletét.

E2 **4028.** Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek a tengelypontja az $(a; 0)$ pont, és az y tengelyt a $(0; b)$ és a $(0; -b)$ pontokban metszi, tengelye párhuzamos az x tengellyel.

E2 **4029.** Írjuk fel a parabola egyenletét, ha az y tengelyt a $(0; b)$, az x tengelyt az $(a; 0)$, $(-a; 0)$ pontokban metszi, tengelye párhuzamos az y tengellyel.

E2 **4030.** Egy egyenlő oldalú háromszög egyik csúcsa a (2; 1) pont, a vele szemközti oldal 8 egység, és párhuzamos az y tengellyel. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek a tengelye párhuzamos az x tengellyel, és az egyenlő oldalú háromszög csúcsain halad át. Hány megoldás van?

K2 GY **4031.** Parabolikus tartószerkezetű híd fesztávolsága 60 m, középső legmagasabb pontja 15 m-re emelkedik a vízszintes út fölé. Számítsuk ki a függőleges tartóvasak hosszát, ha azok a híd egyik végétől kiindulva 5 m-enként helyezkednek el.

K2 GY **4032.** Egy vízszinteshez hegyesszögben elhajított kő az eldobástól számítva 36 m-re esett le, és 12 m-re emelkedett. Írjuk fel a röppálya egyenletét.

E1 GY **4033.** A vízszintes talajszintjén elhelyezett szökőkútból kilépő víz röppályája parabola, melynek paramétere $\frac{1}{10}$. Milyen magasra emelkedik a vízsugár, ha a szökőkút nyílásától 2 m-re jut vissza a talajra?

E2 **4034.** Az ABC egyenlő oldalú háromszög A csúcsa az origóban van, a BC oldala párhuzamos az y tengellyel. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek fókusza A, és áthalad a B és C csúcsokon! A háromszög oldala a.

E2 **4035.** Az $x^2 + y^2 = r^2$ körben az x tengelyre illeszkedő átmérő és az $y = b$ $(0 < b < r)$ egyenletű húr végpontjai parabolát határoznak meg. Írjuk fel e parabola egyenletét.

K2 **4036.** Határozzuk meg a parabola fókuszának a koordinátáit, a paraméterét és a vezéregyenesének egyenletét, ha a parabola egyenlete:

a) $y = \frac{1}{24}x^2$; *b)* $y = -\frac{1}{8}x^2$; *c)* $y = \frac{1}{6}x^2$;

d) $y + x^2 = 0$; *e)* $\frac{1}{4}x^2 + y = 0$; *f)* $y - 5 = \frac{1}{8}(x+6)^2$;

g) $y - 3 = -\frac{1}{4}(x+1)^2$; *h)* $(y-2)^2 = 12(x+3)$; *i)* $y = \frac{1}{4}x^2 - 8$;

j) $y^2 = 4 - 6x$; *k)* $y = \frac{1}{6}x^2 + 2$; *l)* $x^2 = 2 - y$;

m) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$; *n)* $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$; *o)* $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$;

p) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$; *q)* $y = -\frac{1}{8}x^2 + x + 4$; *r)* $100y^2 = 3x$;

s) $y^2 - 10y + 2x - 24 = 0$; *t)* $5x^2 - 80x + y + 320 = 0$; *u)* $x^2 + 5x - 10y - \frac{75}{4} = 0$.

K1 **4037.** Adjuk meg az $y^2 = 4(x - 1)$ egyenletű parabolának azokat a pontjait, amelyek koordinátái egyenlőek.

K2 **4038.** Milyen pontok koordinátái elégítik ki az $x^2 - 10x - 2y + 43 < 0$ egyenlőtlenséget?

K2 **4039.** Határozzuk meg azon pontok halmazát a koordináta-rendszer síkjában, amelyek koordinátái kielégítik a következő egyenletet:
$(x^2 - y)(x^4 - 1)(y^2 - 5y + 6) = 0$.

E1 **4040.** A sík mely pontjainak koordinátái elégítik ki az $x^4 - 2x^2y + y^2 - 1 = 0$ egyenletet?

K2 **4041.** Határozzuk meg a koordináta-rendszer síkjának azokat a pontjait, amelyek koordinátái kielégítik az $y - x^2 > 0$ és az $y - x < 0$ egyenlőtlenségeket.

E1 **4042.** Határozzuk meg a derékszögű koordináta-rendszerben azokat a pontokat, amelyek koordinátái kielégítik az $(y - x)(y - x^2 + 3x - 2) < 0$ egyenlőtlenséget.

E1 **4043.** Adjuk meg a sík azon $P(x; y)$ pontjait, amelyek koordinátáira teljesül, hogy $x^3 - 4x - |x|y \le 0$.

E1 **4044.** Tükrözzük az $y = x^2$ parabolát az (1; 1) pontra. Mi a tükörkép egyenlete?

E2 **4045.** Határozzuk meg az $y = -2x^2 - 4x + 2$ egyenletű parabola $P(2; 1)$ pontra vonatkozó tükörképének az egyenletét.

E1 **4046.** Határozzuk meg

a) az $y=\frac{1}{2}x^2-4x+3$; *b)* az $y=\frac{1}{4}x^2+x-2$

parabola tengelypontjának és a fókuszának a koordinátáit, ha a parabolát az $y = x$ egyenesre tükrözzük.

K1 **4047.** Milyen hosszú az $x^2 = 8y$ parabolának az a húrja, amely az $y_1 = 4$, $y_2 = 12$ ordinátájú pontjait köti össze?

K1 **4048.** Számítsuk ki az $x^2 = 6y$ parabola 6 abszcisszájú pontjának a fókusztól mért távolságát.

K1 **4049.** Számítsuk ki az $x^2 = 12y$ parabola 6 ordinátájú pontjának a fókusztól mért távolságát.

K2 **4050.** Mi azon körök középpontjainak mértani helye, amelyek az ordináta tengelyt érintik és átmennek a $P(3; 2)$ ponton?

K2 **4051.** Mi azon parabolák csúcspontjainak mértani helye, amelyek egyenlete $y = x^2 + bx + 1$, ahol b tetszőleges, de rögzített valós szám?

K2 **4052.** Mi az $y = 4x^2 - 4(a + 1)x + a^2 + 4a - 1$ egyenletű parabolák csúcspontjainak mértani helye, ha $a \in \mathbf{R}$?

E1 **4053.** Mi a mértani helye az ABC háromszög A csúcsának, ha BC helyzet és nagyság szerint adott, és m_a mértani közepe a $c + b$ és $c - b$-nek?

A parabola és az egyenes, a parabola és a kör kölcsönös helyzete

K1 **4054.** Határozzuk meg

a) az $y=\frac{1}{6}x^2$ parabola és a $2x - 3y + 6 = 0$ egyenes;

b) az $y=-\frac{1}{9}x^2$ parabola és a $4x + 3y - 12 = 0$ egyenes;

c) az $y^2 = 4x$ parabola és a $x + y - 3 = 0$ egyenes közös pontjainak a számát.

K1 **4055.** Határozzuk meg az $x + y = 9$ egyenletű egyenes és az $y = x^2 - 8x + 15$ egyenletű parabola metszéspontjait.

K1 **4056.** Határozzuk meg az $y^2 = 4x$ egyenletű parabola és a $2x - y = 4$ egyenletű egyenes metszéspontjait.

K1 **4057.** Határozzuk meg az $y^2 = 2x - 6$ parabola és az $y=\frac{2}{3}x-2$ egyenletű egyenes közös pontjainak koordinátáit.

K1 **4058.** Határozzuk meg az $y^2 = 4x - 4$ egyenletű parabola és a $2x - 3y = 2$ egyenletű egyenes metszéspontjait.

K2 **4059.** Hány közös pontja van az $y = tx^2 - x + 1$ egyenletű parabolának és az $y = 2tx - 1$ egyenletű egyenesnek, ahol $t \in \mathbf{R}$?

K2 **4060.** Adott az $y = x^2 + 2mx + m(m-1)$ parabola ($m \in \mathbf{R}$) és az $y = x - \frac{1}{4}$ egyenletű egyenes. Hány közös pontja van a parabolának és az egyenesnek?

E1 **4061.** Az $y = x^2 - 4x + 4$ egyenletű parabolát az $y = p$ egyenes két pontban metszi úgy, hogy ezek abszcisszái a és b kielégítik az $a^4 + b^4 = 712$ egyenletet. Mekkora az a és a b?

K2 **4062.** Milyen hosszú az $y^2 = 36x$ egyenletű parabolának a $6x - 5y + 36 = 0$ egyenletű egyenesre illeszkedő húrja?

K2 **4063.** Számítsuk ki a $3y^2 = 16x$ egyenletű parabolának a $8x + 9y = 24$ egyenletű egyenesre illeszkedő húrjának a hosszát.

K1 **4064.** Számítsuk ki az $y = \frac{1}{9}x^2$ parabola $7x - 3y - 30 = 0$ egyenesre illeszkedő húrjának a hosszát.

E2 **4065.** Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola átmegy a $(0; k)$, $(k; 2k)$ és $(2k; 0)$ pontokon. Milyen k érték mellett metszi a parabola az x tengelyt a -1 abszcisszájú pontban, és mekkorák ebben az esetben az a, b, c együtthatók?

K2 **4066.** Milyen hosszú az $y = \frac{1}{9}x^2$ parabolának az a húrja, amelynek egyenese a fókuszon halad át, és az egyik irányvektora $\mathbf{v}\left(3; \sqrt{3}\right)$?

K2 **4067.** Az $y = \frac{1}{6}x^2$ parabola tengelypontjából húzzuk meg azt a húrt, amelynek egyik irányvektora $\mathbf{v}\left(1; \sqrt{3}\right)$, azután rajzoljuk meg a tengelypontból a reá merőleges húrt. Számítsuk ki, hogy a húrok nem közös végpontjain áthaladó egyenes mely pontokban metszi a koordinátatengelyeket.

E2 **4068.** Az $y = \frac{1}{8}x^2$ egyenletű parabola fókuszán át 10 egység hosszúságú húrt fektetünk. Írjuk fel a húr egyenesének egyenletét.

K1 **4069.** Melyek az $y = \frac{x^2}{3}$ egyenletű parabolának azok a pontjai, amelyek az $A(-4; 2)$ és a $B(4; -2)$ pontoktól egyenlő távolságra vannak?

K1 **4070.** Határozzuk meg az $y = \frac{x^2}{4}$ parabolának azokat a pontjait, amelyek a $P_1(-1; 5)$ és a $P_2(5; -1)$ pontoktól egyenlő távolságra vannak.

E1 **4071.** Írjuk fel az $y = \frac{1}{20}x^2$ parabola olyan húr egyenesének az egyenletét, amely áthalad az $(5; 2)$ ponton és ez a pont a húrt felezi.

E1 **4072.** Írjuk fel az $y = x^2$ egyenletű parabola azon húr egyenesének az egyenletét, amelyet a $P(1; 6)$ pont felez.

K2 **4073.** Egy szabályos háromszög egyik csúcsa az origóban van, másik két csúcsa pedig az $y = \frac{1}{4}x^2$ egyenletű parabolára illeszkedik. Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.

E2 **4074.** Írjuk fel az $y = \frac{1}{8}x^2$ parabolába írt háromszög oldalegyeneseinek egyenletét, ha a háromszög egyik csúcsa a parabola tengelypontja, a magasságpontja a parabola fókusza. (Parabolába írt háromszögnek az olyan háromszöget mondjuk, amelynek csúcsai a parabolára illeszkednek.)

E2 **4075.** Az egyenlő oldalú háromszög egyik csúcsa az $x^2 = 2py$ parabola tengelypontja, a másik két csúcsa a parabolára illeszkedik. Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.

K2 **4076.** Tekintsük az $y = 3x^2 - 4$ egyenletű parabolának azokat a húrjait, amelyek irányítényezője adott $m \in \mathbf{R}$ szám. Mi lesz ezen húrok felezőpontjának mértani helye? (Legyen $m = 4$).

E1 **4077.** A $P_1(-10; y_1)$ és a $P_2(15; y_2)$ pontok az $y = \frac{1}{10}x^2$ parabolára illeszkednek. Számítsuk ki a parabola P_3 pontjának a koordinátáit, ha a $P_1P_2P_3$ háromszög területe $31\frac{1}{4}$ területegység.

E2 **4078.** Az $y = x^2$ egyenletű parabola 0 és 4 abszcisszájú pontjai között a parabolaíven mozog a P pont. P-nek az x tengelyre eső merőleges vetülete legyen T. A P pont mely helyzetében legnagyobb a PTA háromszög területe, ahol A koordinátái (4; 0)?

E1 **4079.** Az $ABCD$ négyzet C csúcsa a $y = x^2 - 5x + 8{,}25$ egyenletű parabola csúcsában, B és D szintén a parabolán van. Adjuk meg a négyzet csúcsainak koordinátáit.

E2 **4080.** Az $ABCD$ rombusz oldala 5 egység. Az A és C csúcs az $y = x^2 + 7x + 10$ egyenletű parabolán van, a B csúcs a parabola fókuszpontja. Mekkora a rombusz területe?

E1 **4081.** Az $x - 2 = (y - 1)^2$ egyenletű parabola P_1 és P_2 pontjaiból az $A(2; 1)$ és a $B(6; 1)$ pontok által határolt szakasz derékszögben látszik. Mekkora az AP_1BP_2 négyszög területe?

E2 **4082.** Tekintsük a parabola azon húrjait, amelyek a parabola csúcsából derékszög alatt láthatók. Bizonyítsuk be, hogy ezek a húrok egy rögzített ponton mennek át.

E2 **4083.** Tekintsük az $y = (p - 1)x^2 + 2px + 4$ egyenletű parabolát.
a) Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a parabola érintse az x tengelyt. (Legyen az érintési pont A.)
b) Határozzuk meg a p-t úgy, hogy a parabola csúcsa az y tengelyen legyen. (Jelöjük ezt a pontot B-vel.)
c) Igazoljuk, hogy az *a)*-ban és a *b)*-ben szerepelt parabolák szimmetrikusak az AB szakasz felezőpontjára.
d) Létezik-e olyan pont, amelyen valamennyi parabola átmegy?

K2 **4084.** *a)* Igazoljuk, hogy az $y=\frac{1}{4a}x^2$ egyenletű parabolának az $y=\frac{1}{m}\left(x-\frac{a}{m}\right)$ egyenletű egyenessel egy közös pontja van. $a, m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$;

b) Igazoljuk, hogy az $y=mx+\frac{a}{m}(m\neq 0)$ egyenes az $y^2=4ax$ parabola érintője $a, m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

(Azt az egyenest, amely nem párhuzamos a parabola tengelyével, egyetlen közös pontja van a parabolával, és a parabola síkjában van, a parabola érintőjének mondjuk. Az érintő tehát olyan egyenes, amelynek az érintési pont kivételével minden pontja a parabola külső pontja. Az *a)* alatti egyenes érintője a parabolának).

K2 **4085.** Bizonyítsuk be, hogy az $y=\frac{1}{2p}x^2$ egyenletű parabola $(x_1; y_1)$ koordinátájú pontjában a parabolához húzható érintő egyenlete: $p(y + y_1) = xx_1$. Írjuk fel az $y=\frac{1}{4}x^2$ egyenletű parabola 1, 2, –3 abszcisszájú pontjaiban a parabolához tartozó érintők egyenletét.

E2 **4086.** Igazoljuk, hogy az $y^2 = 2px$ parabola $(x_1; y_1)$ pontjához tartozó érintő egyenlete $yy_1 = p(x + x_1)$. Írjuk fel ennek alapján az $y^2 = 8x$ parabola 1, 2, 3 abszcisszájú pontjaiban húzható érintők egyenletét.

E2 **4087.** Bizonyítsuk be, hogy a parabola érintője a következő tulajdonságokkal rendelkezik:
a) a fókuszból az érintőre húzott merőleges talppontja a tengelyponthoz tartozó érintőre illeszkedik;
b) a fókusznak az érintőre vonatkozó tükörképe a vezéregyenesre illeszkedik;
c) az $y^2 = 2px$ parabola bármelyik a tengelyponthoz tartozó érintőtől különböző érintője az y tengelyből feleakkora szakaszt vág le, mint amekkora az érintési pont ordinátája;
d) az $y^2 = 2px$ parabola bármelyik érintője az x tengelyt olyan pontban metszi, amelynek az origótól mért távolsága egyenlő az érintési pont abszcisszájával.

Hogyan fogalmazhatók meg az *a)*–*d)* alatti tételek az $y=\frac{1}{2p}x^2$ egyenletű parabolára?

E2 **4088.** Bizonyítsuk be, hogy a parabolikus tükör fókuszából kiinduló fénysugarak visszaverődés után a parabola tengelyével párhuzamosan haladnak és megfordítva, a parabola tengelyével párhuzamosan haladó fénysugarak a visszaverődés után a fókuszon haladnak át.

E2 **4089.** Az $y^2 = 12x$ parabola 2, 6, –3 ordinátájú pontjaiban a parabolához érintőket húzunk. Határozzuk meg az érintési pontok által meghatározott háromszög és az érintők alkotta háromszög területeinek az arányát.

K1 **4090.** Határozzuk meg az m paraméter értékét úgy, hogy az $y = mx$ egyenletű egyenes érintse az $y = x^2 - 2x$ egyenletű parabolát! Az érintőre az érintési pontban emelt merőleges egyenes milyen hosszú húrt metsz ki a parabolából?

K2 **4091.** Az $y = x^2 + bx + c$ egyenletű parabolát a $P(2; 2)$ pontban érinti az $y = x$ egyenletű egyenes. Számítsuk ki a b és a c paraméterek értékét.

E1 **4092.** Az $y=\frac{1}{16}x^2$ egyenletű parabola A és B pontjaiban egy-egy érintőt húzunk a parabolához. Igazoljuk, hogy ha az A, B pontok és a parabola fókusza egy egyenesen van, akkor az érintők M metszéspontja a parabola vezéregyenesére illeszkedik.

K2 **4093.** Az $y = x^2 - 8x + 10$ egyenletű parabolának mely pontjában van olyan érintője, amely átmegy az origón?

E2 **4094.** Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabolának van két olyan érintője, amelyek átmennek az origón és merőlegesek egymásra. Bizonyítsuk be, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet diszkriminánsa –1-gyel egyenlő.

K2 **4095.** Írjuk fel az $y = x^2 - 2x + 3$ egyenletű parabola 4 abszcisszájú pontjában húzható érintő egyenletét.

K2 **4096.** Az $y = 2x + b$ egyenletű egyenes érinti az $y = x^2 - 4x + 3$ egyenletű parabolát. Számítsuk ki a b értékét és az érintési pont koordinátáit.

E2 **4097.** Az y tengellyel párhuzamos tengelyű és felfelé nyíló parabola átmegy a $P(5; 4)$ ponton és érinti az x tengelyt. A P pontban a parabolához húzható érintő merőleges a $\mathbf{v}(4; -1)$ vektorra. Írjuk fel a parabola egyenletét.

E2 **4098.** Az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola átmegy az $A(4; -7)$ ponton és érinti az $y = 1$ egyenletű egyenest. Az A pontban a parabolához húzott érintő egy normálvektora $\mathbf{n}(8; 1)$. Írjuk fel a parabola egyenletét.

E2 **4099.** Egy háromszög két csúcsa: $A(2; 6)$, $B(10; 2)$. A C csúcs az $y = -x^2 + 4$ egyenletű parabolára illeszkedik. Határozzuk meg a C csúcsot úgy, hogy az ABC háromszög területe minimális legyen.

K2 **4100.** Tekintsük az $y = x^2$ és az $y = -(x - 1)^2$ parabolák egy-egy egymással párhuzamos érintőpárját. Adjuk meg a két érintő egymástól való d távolságát, ha az érintők iránytangense 2.

E2 **4101.** Bizonyítsuk be, hogy az $y^2 = 2px$ egyenletű parabola bármely pontjában emeljünk is merőlegest az illető pontban húzott érintőre, ebből a merőlegesből az érintési pont és az x tengely (a parabola tengelye) közé eső szakasz merőleges vetülete az x tengelyre ugyanakkora.

K2 **4102.** Adott az $y = x^2$ egyenletű parabola és a $2x - y = 3$ egyenletű egyenes. Mekkora az adott egyenes és a vele párhuzamos parabolaérintő távolsága?

K2 **4103.** Az $y = x^2$ egyenletű parabola tetszőleges P pontjában a parabola érintője messe az x tengelyt az Q pontban. Mi a PQ érintőszakaszok felezőpontjának mértani helye?

E2 **4104.** Az $y = x^2$ parabolához az $y = x$ egyenletű egyenes mely pontjából húzható két egymásra merőleges érintő?

K2 **4105.** Az $y = x^2 + x + 1$ egyenletű parabola melyik pontja van a legközelebb az $y = 2x - 2$ egyenletű egyeneshez? Mennyi ez a legkisebb távolság?

E2 **4106.** Határozzuk meg az x tengely azon pontjának koordinátáit, ahonnan az $y^2 = 8x$ egyenletű parabolához húzott érintők a csúcsérintővel (az y tengellyel) egyenlő oldalú háromszöget zárnak be.

K2 **4107.** Az $y^2 = 16x$ parabola fókuszán át húrt fektetünk, melynek egyik irányvektora $\mathbf{v}\left(1; \sqrt{3}\right)$. Számítsuk ki a húr végpontjaiban húzható érintők hajlásszögét.

E1 **4108.** Az $y^2 = 2px$ parabola $(x_1; y_1)$pontjához tartozó érintőre merőlegest állítunk az érintési pontban. Mely pontokban metszi ez az egyenes (a normális) a koordinátatengelyeket?

E2 **4109.** Az $y^2 = 2px$ parabola érintője és a hozzá tartozó normális egyenlő szárú háromszöget határoznak meg, amelynek alapja az x tengelyre illeszkedik. Határozzuk meg az érintési pont koordinátáit.

E2 **4110.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $y^2 = 2px$ parabolát a fókuszán áthaladó és a tengelyére merőleges húr végpontjaiban érinti.

K1 **4111.** Határozzuk meg az m értékét úgy, hogy az $y = mx - 2$ egyenes érintse az $y = \frac{1}{4}x^2$ parabolát.

K2 **4112.** Határozzuk meg az m értékét úgy, hogy az $y = mx - 4$ egyenes érintse az $y^2 = -8x$ parabolát.

K1 **4113.** Mekkorára kell választani a b értékét úgy, hogy az $y = x + b$ egyenes messe, érintse, illetve elkerülje az $y = x^2$ parabolát.

K1 **4114.** Határozzuk meg a b értékét úgy, hogy az $y = x + b$ egyenes érintője legyen az $y^2 = 4x$ parabolának.

K2 **4115.** Határozzuk meg az $y = \frac{1}{8}x^2$ parabolának az $y = -x + 4$ egyenessel párhuzamos érintőjét.

K2 **4116.** Az $y^2 = 8x$ parabolához érintőt húzunk, amely párhuzamos az $y = x$ egyenessel. Írjuk fel az érintő egyenletét.

E1 **4117.** Az $x^2 = 16y$ parabolához érintőt húzunk, amely merőleges az $y = -\frac{1}{2}x$ egyenesre. Írjuk fel az érintő egyenletét.

E2 **4118.** Írjuk fel az $y^2 = 12x$ parabola olyan érintőjének az egyenletét,
a) amely párhuzamos a $3x - y + 5 = 0$ egyenessel;
b) amely merőleges a $2x + y - 7 = 0$ egyenesre;
c) amely 45°-os szöget zár be a $4x - 2y + 9 = 0$ egyenessel.

E1 **4119.** Milyen messze van a $3x + 4y + 46 = 0$ egyenes az $y = \frac{1}{64}x^2$ parabolától?

E2 **4120.** Határozzuk meg az $y^2 = 2px$ parabolánál a p értékét úgy, hogy a parabola

a) az $y = \frac{x}{2} + 1$ egyenest érintse;

b) az $x - 2y + 5 = 0$ egyenest érintse.

c) Mekkora az $y^2 = 2px$ parabola p paramétere, ha a parabola érinti az $ax + by + c^2 = 0$ egyenletű egyenest?

E2 **4121.** Az $y^2 = 28x$ egyenletű parabolához érintőt húzunk. Az érintő a parabolát a P pontban érinti, az x tengelyt a Q pontban metszi. Írjuk fel az érintő egyenletét, ha $PQ = 24$ egység.

E1 **4122.** Adjuk meg az $y^2 = \frac{7}{2}x$ egyenletű parabola és a $7x - 18y + 28 = 0$ egyenletű egyenes metszéspontjait.
Írjuk fel a metszéspontokban a parabola érintőinek egyenletét.
Határozzuk meg az érintők hajlásszögét.

E1 **4123.** Írjuk fel a $2y^2 = 7x$ egyenletű parabola $A\left(\frac{8}{7};0\right)$, illetve $B(14; 0)$ ponton átmenő érintőinek egyenletét. Határozzuk meg az érintők metszéspontját és hajlásszögét.

Oldjuk meg a feladatot, ha $A\left(\frac{8}{7};2\right)$ és $B(14; 7)$.

E1 **4124.** Határozzuk meg az $y^2 = 12x$ egyenletű parabolának azt a húrját, amelynek irányszöge 60° és átmegy a parabola fókuszán. Írjuk fel a húr végpontjaiban a parabola érintőinek egyenletét, és határozzuk meg az érintők hajlásszögét.

E1 **4125.** Határozzuk meg az $y = x^2 + 1$ és az $x = y^2 + 1$ egyenletű parabolák az $y = x$ egyenletű egyenessel párhuzamos érintőinek távolságát.

E2 **4126.** Számítsuk ki a parabolák közös pontjainak koordinátáit, ha az egyenleteik:

a) $y = x^2 + x$ és $y^2 - 8y + 12x = 0$;
b) $y = x^2 - 2$ és $y^2 = x + 2$;
c) $y^2 + x - 2y = 0$ és $x^2 = y$;
d) $y = x^2$ és $2x = 3y - y^2$;
e) $y = x^2$ és $y^2 + 6x - 7y = 0$.

K2 **4127.** Számítsuk ki az alábbi parabolák közös pontjait:

a) $y^2 = 2x$ és $x^2 = y$;
b) $x^2 = 3y$ és $x^2 = y - 2$;
c) $x^2 - 4x - 4y = 4$ és $x^2 = 4x + 4y$;
d) $y^2 = 2px$ és $y^2 = px + \left(\frac{p}{2}\right)^2$.

K2 **4128.** Egy parabola tengelypontja az $y^2 = 8x$ parabola fókusza, a fókusza pedig az adott parabola tengelypontja. Számítsuk ki a parabolák közös pontjait.

K2 **4129.** Egy parabola csúcsa az $y^2 = 10x$ egyenletű parabola fókuszpontjában van, fókusza pedig az adott parabola vezéregyenesének és az x tengelynek a metszéspontja. Határozzuk meg a két parabola közös pontjainak koordinátáit.

E1 **4130.** Határozzuk meg a (9; 2) pontból az $y = \frac{1}{36}x^2$ parabolához húzható érintők egyenletét.

E1 **4131.** Határozzuk meg az (5; –7) pontból az $y^2 = 8x$ parabolához húzható érintők egyenletét.

K1 **4132.** Számítsuk ki a parabola és a kör metszéspontjait, ha egyenleteik:

a) $y^2 = \frac{9}{4}x$ és $x^2 + y^2 = 25$;
b) $y^2 = 18x$ és $x^2 + 12x + y^2 - 64 = 0$.

V

K2 **4133.** Határozzuk meg az $y^2 = 16x$ parabolának azt a pontját, amely a fókuszától 13 egység távolságra van.

K2 **4134.** Milyen távolságra van a tengelyponttól az $y^2 = 4{,}5x$ parabolának az a pontja, amely a fókusztól $9\frac{1}{8}$ egységnyi távolságra van?

E1 **4135.** Írtjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek a tengelypontja a (0; –5) pont, és érinti az $x^2 + y^2 = 9$ kört. (A parabola tengelye az y tengely).

E2 **4136.** Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amely az $(x - 11)^2 + y^2 = 40$ kört érinti, tengelypontja az origóban van, és a tengelye az x tengely.
Számítsuk ki az érintési pontok koordinátáit.

K2 **4137.** Az $y = -\frac{1}{7}x^2 + \frac{25}{7}$ egyenletű parabola az x tengelyt az A és a B pontokban metszi. A k kör sugara 13 egység, a középpontja az y tengelyen van és átmegy az A és a B pontokon. A kör a parabolát az A és a B pontoktól különböző C és D pontokban metszi. Számítsuk ki az $ABCD$ négyszög területét.

K1 **4138.** Mekkora annak a háromszögnek a területe, amelynek csúcsai az $y = x^2$ és az $x^2 + (y-2)^2 = 4$ egyenletű görbék közös pontjai?

K2 **4139.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely átmegy a $P(-3; 2)$ ponton és középpontja a $2x + y = 0$ egyenletű egyenes és az $y = x^2 + 2x$ egyenletű parabola közös pontja. Hány megoldás van?

E2 **4140.** Határozzuk meg a $K(-2; 1)$ középpontú és 5 egység sugarú kör, valamint az $F\left(1; -\frac{11}{4}\right)$ fókuszú, $y = -\frac{13}{4}$ vezéregyenesű parabola közös pontjainak koordinátáit.

E2 **4141.** Számítsuk ki a $K(-2; 3)$ középpontú, $r = 5$ egység sugarú kör és az $y = -\frac{41}{4}$ vezéregyenesű, $F\left(-2; -\frac{39}{4}\right)$ fókuszú parabola közös pontjai által határolt sokszög területét.

E2 **4142.** Írjuk fel az $x^2 + y^2 = 16$ egyenletű kör és az $x^2 = 6y$ egyenletű parabola közös érintőinek egyenletét.

E2 **4143.** Mekkora szögben metszi egymást az $x^2 + y^2 = 16$ egyenletű kör és az $y^2 = 6x$ egyenletű parabola? (Kör és parabola hajlásszögén a közös pontban a görbékhez húzott érintők hajlásszögét értjük).

E2 **4144.** Az $y^2 = 2px$ egyenletű parabola tengelyén vegyük fel a P pontot úgy, hogy P a parabola csúcsától $3p$ távolságra (a parabola belsejében) legyen. Határozzuk meg a parabolán azokat az R, Q pontokat, amelyek távolsága P-től minimális. Számítsuk ki a PQR háromszög területét.

E2 **4145.** Az $y^2 = 2px$ parabolából az $x = a$ egyenessel $a > 0$ egy parabolaszeletet határolunk el. A parabolaszeletbe maximális területű téglalapot írunk, amelynek középvonala a parabola tengelyére illeszkedik. Határozzuk meg a téglalap területét.

V

Vegyes feladatok

K2 4146. Az $ABCD$ négyszög átlóinak metszéspontja legyen M. Bizonyítsuk be, hogy az AMB, BMC, CMD, DMA háromszögek súlypontjai egy paralelogramma csúcsai. Legyen $A(1; 6)$, $B(8; 1)$, $C(9; 4)$, $D(3; 12)$.

K1 4147. Határozzuk meg az $M(5; 7)$ pontnak az $x + 2y = 4$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképének koordinátáit.

K1 GY 4148. A $P(-2; 3)$ pontból kiinduló fénysugár az x tengelyről visszaverődik. Írjuk fel a beeső és a visszavert fénysugár egyenesének az egyenletét, ha a beeső fénysugár egyik irányvektora $\mathbf{v}(1; 3)$.

K1 4149. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek egyik irányvektora $\mathbf{v}(5; -12)$, és áthalad a $P(-4; 16)$ ponton. Számítsuk ki az egyenes és a koordinátatengelyek által meghatározott háromszög köré, és a háromszögbe írható kör középpontjának és a súlypontnak a koordinátáit.

K2 4150. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $A(4; 1)$ és $B(-2; -1)$ pontokat összekötő szakasz felezőpontján, és merőleges a $3x - 5y + 1 = 0$ egyenletű egyenesre.

K2 4151. Adott az $A(-4; 4)$ és a $B(2; -4)$ pont. Határozzuk meg az x tengelyen az M pontot úgy, hogy AM és a BM egyenesek merőlegesek legyenek egymásra.

K1 4152. Számítsuk ki az ABC háromszög magasságpontjának koordinátáit, ha $A(-5; -2)$, $B(-2; 7)$, $C(2; -1)$.

K2 4153. Az ABC háromszög két csúcsa $A(2; 1)$, $B(4; 9)$, a háromszög magasságpontja $M(3; 4)$. Számítsuk ki a C csúcs koordinátáit.

K1 4154. Egy háromszög csúcsai $A(2; 2)$, $B(2; 4)$, $C(6; 4)$.
Számítsuk ki:
a) az oldalak hosszát; *b)* az oldalfelezőpontok koordinátáit;
c) a súlypont koordinátáit; *d)* a háromszög köré írható kör sugarát.

K2 4155. Egy négyszög csúcsainak koordinátái rendre:
$(5; 6)$, $(-1; 2)$, $(-2; -1)$, $(4; -5)$. Határozzuk meg:
a) az átlók metszéspontjának koordinátáit;
b) az átlók hajlásszögét;
c) a négyszög területét és a kerületét.

K1 4156. Egy háromszög oldalainak egyenletei: $5x - 3y = 1$; $5x + y = 13$; $15x - y = 67$.
Számítsuk ki:
a) a háromszög csúcspontjainak koordinátáit;
b) a háromszög oldalait, szögeit;
c) a háromszög területét.

K1 4157. Mekkora annak a háromszögnek a területe, amelyet a koordináta-rendszer x tengelye, továbbá a $2x - y = 0$, illetve a $4x + 7y = 36$ egyenletű egyenesek határolnak? Mekkorák a háromszög szögei?

K2 **4158.** A $3x + y = 9$ egyenletű egyenes az x tengelyt az A, az y tengelyt a B pontban metszi, az $x - 3y = 18$ egyenletű egyenes az x tengelyt a C, az y tengelyt a D pontban metszi. Igazoljuk, hogy az AD és a BC egyenesek közös pontja az $x - y = 0$ egyenletű egyenesre illeszkedik.

K2 **4159.** Egy derékszögű háromszög átfogójának két végpontja: $P_1(-3; 1)$ és $P_2(5; 3)$. Az egyik befogó egyenesének egyenlete: $y = -x + 8$. Határozzuk meg a harmadik csúcs koordinátáit.

K1 **4160.** Egy háromszög csúcsai: $A(0; 0)$, $B(6; 0)$, $C(4; 8)$. Számítsuk ki a háromszög magasságpontjának koordinátáit.

E1 **4161.** Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben a $2x + 3y = t$ és az $5x - 7y = t$ egyenletű egyeneseket, ahol a t valós szám. Mi lesz az így kapott egyenesek metszéspontjainak mértani helye, ha t minden lehetséges értéket felvesz?

K2 **4162.** A $3x + 4y = 12$ egyenletű egyenes a tengelyeket az A, illetve a B pontban metszi. Az AB szakasz felezőmerőlegese mekkora területű részekre osztja az AOB háromszög területét (O az origó)?

K2 **4163.** Egy háromszög egyik oldalának egyenlete $4x + 3y = 23$. A másik két oldalhoz tartozó magasság egyenlete $5x + 2y = 20$ és $x + 3y = 8$. Határozzuk meg a háromszög csúcspontjainak koordinátáit.

E1 **4164.** Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(0; 10)$, $B(8; 0)$, $C(x; 14)$, ahol $x > 0$. Mekkora az x értéke, ha az ABC háromszög területe 36 területegység.

K1 **4165.** Egy négyszög oldalainak egyenlete: $y = -x + 7$; $y = \frac{x}{2} + 1$; $y = -\frac{3}{2}x + 21$, $y = \frac{7}{4}x + \frac{3}{2}$. Határozzuk meg a négyszög csúcsainak koordinátáit és a területét.

E1 **4166.** Egy háromszög csúcspontjai: $A(1; 0)$, $B(0; 4)$ és $C(c; 6)$.
Számítsuk ki a c értékét, ha a háromszög területe 13 területegység.

E2 **4167.** Adott egy háromszög három oldalegyenesének az egyenlete: $x + 19y = -123$; $14x - 15y = -36$, $15x + 4y = 122$.
a) Számítsuk ki a háromszög szögeit.
b) Számítsuk ki a csúcsokhoz vezető helyvektorok által bezárt szögeket.

K2 **4168.** Adott négy pont a koordinátáival: $A(1; -1)$, $B(5; 1)$, $C(7; 7)$, $D(3; 5)$. Igazoljuk, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma, és számítsuk ki a területét.

K2 **4169.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthald az $x - 2y = 2$ és a $3x + 2y = 14$ egyenletekkel megadott egyenesek metszéspontján, és párhuzamos a $4x - 5y = 0$ egyenletű egyenessel.

E2 **4170.** A koordinátatengelyeken kijelöljük a rögzített $OA = a$ és $OB = b$ szakaszokat, valamint a tetszőleges A', B' pontokat úgy, hogy $AA' = BB'$ legyen. Mutassuk meg, hogy az $A'B'$ szakaszok felezőmerőlegesei egy ponton mennek át.

K2 **4171.** Adottak a $P_1(-10; 7)$, $P_2(5; -13)$, $P_3(14; 7)$, pontok. Határozzuk meg a P_4 pontot úgy, hogy a négy pont paralelogrammát határozzon meg.
a) Számítsuk ki a paralelogramma területét és kerületét.
b) Számítsuk ki a paralelogramma szögeit.

K2 **4172.** Egy rombusz egyik átlója a másik átlójának a kétszerese, a rövidebb átló végpontjai $A(6; -4)$, $C(-2; 6)$. Határozzuk meg a hiányzó csúcsok koordinátáit.

E1 **4173.** Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalegyenesének egyenlete $y = 1$, az AD oldalegyenes egyenlete $4x - 3y = 1$, a BD átló egyenesének egyenlete $2x + y = 13$. Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.

E2 **4174.** Mutassuk meg, hogy az $ax + by = 1$; $bx + ay = 1$; $x - y = 0$ egyenletű egyenesek egy ponton mennek át.

K2 **4175.** Igazoljuk, hogy a háromszög oldalfelező pontjai által meghatározott háromszög súlypontja egybeesik a háromszög súlypontjával.

E2 **4176.** Legyen az ABC háromszög súlypontja S. Igazoljuk, hogy
$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3\,(AS^2 + BS^2 + CS^2)$.

E1 **4177.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $(5; 3)$ ponton és a $3x + 4y = 16$ és a $3x + 4y = 1$ egyenletű egyenesek közti szakaszának az x tengelyen levő merőleges vetülete 1 egységnyi hosszú.

K2 **4178.** Számítsuk ki azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyek rajta vannak az $x + 2y = 7$ egyenletű egyenesen és 5 egységnyi távolságra vannak a $P(3; 7)$ ponttól.

K2 **4179.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $A(3; 6)$ ponton, és egyenlő távol van a $P(-1; 3)$ és a $Q(11; -3)$ pontoktól.

E2 **4180.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $A(4; 7)$ ponton, és a $P(-5; 4)$, $Q(5; 1)$ pontokat összekötő szakaszt $3 : 2$ arányban osztja.

E2 **4181.** Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben azokat a pontokat, amelyek koordinátái kielégítik a következő egyenletet:
$3x^2 - 4y^2 + 4xy + 8x - 8y - 3 = 0$.

E1 **4182.** Egy derékszögű háromszög átfogójának végpontjai $A(-15; -5)$ és $B(15; 5)$. A derékszög C csúcsából húzott magasság talppontja az átfogónak abban a T pontjában van, amelynek ordinátája 3. Számítsuk ki a C csúcs koordinátáit.

E1 **4183.** Legyen $A(-6; 10)$ és $B(4; 14)$. Számítsuk ki annak a $2x - 5y = -4$ egyenletű egyenesen levő P pontnak a koordinátáit, amelyre az AP és PB szakaszok hosszának az összege a lehető legkisebb.

E1 **4184.** Egy háromszög csúcspontjai: $A(0; 0)$, $B(4; 1)$, $C(4; 0)$. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a $D(0; -1)$ pontra és felezi az ABC háromszög területét.

K1 **4185.** Számítsuk ki annak a síkidomnak a területét, amelyet az $x + 2y = 4$ egyenletű egyenes és
a) az $x_1 = 1$ és $x_2 = 3$ abszcisszákhoz tartozó ordináták;
b) az $x_1 = 1$ és $x_2 = 7$ abszcisszákhoz tartozó ordináták határolnak.

E1 **4186.** Az $ABCD$ téglalapban $3 \cdot AB = 2 \cdot BC$. Számítsuk ki a C és a D pontok koordinátáit, ha $A(-2; -2)$ és $B(4; 2)$.

K2 **4187.** Adott két egyenes egyenlete: $4x + 7y - 15 = 0$, $9x - 14y - 4 = 0$.
a) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek egyik normálvektora $\mathbf{n}(-1; 3)$, és áthalad a két adott egyenes közös pontján;

b) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a két adott egyenes közös pontján és a koordinátatengelyek pozitív felével 4 egység területű háromszöget határoz meg.
c) Számítsuk ki a két adott egyenes hajlásszögét.

K2 **4188.** Adott két pont: $A(1; 2)$ és $B(5; -1)$. Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB}$ vektornak a koordinátatengelyekkel bezárt szögeit.

K2 **4189.** Adott két pont: $A(3; 5)$ és $B(6; -2)$. Vetítsük az $\overrightarrow{AB}$ vektort merőlegesen az $x = y$ egyenesre. Határozzuk meg a vetületének a hosszát.

K2 **4190.** Az A és B pontokat összekötő szakaszt az $M_1(1; 2)$ és az $M_2(3; 4)$ pontok három egyenlő részre osztják. Számítsuk ki az A és a B koordinátáit.

K2 **4191.** A $(2; 3)$ és a $(6; 6)$ pontok egy négyzet szomszédos csúcsai. Számítsuk ki a másik két csúcs koordinátáit.

E1 **4192.** A $(3; 5)$ és a $(9; -7)$ pontokban elhelyezett 2 és 1 tömegegységnyi anyagi pontokból álló rendszernek hol van a súlypontja?

K2 **4193.** Egy háromszög területe 10 egység, két csúcsa $(5; 1)$, $(-2; 2)$, a harmadik csúcsa az x tengelyre illeszkedik. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

K2 **4194.** A koordináta-rendszer eltolása után a $(2; 4)$ pont koordinátái $(-3; 0)$. Számítsuk ki az eredeti koordináta-rendszer origójának a koordinátáit az új koordináta-rendszerben.

K1 **4195.** Egy paralelogramma két oldalegyenesének egyenlete $x + 2y + 1 = 0$ és $2x + y - 3 = 0$. Középpontja a $(0; 4)$ pont. Írjuk fel a másik két oldalegyenesének egyenletét.

E1 **4196.** A $(2; -2)$ ponton áthaladó egyenes az $(5; 2)$ ponttól 3 egységnyi távolságra van. Írjuk fel az egyenes egyenletét.

E1 **4197.** Írjuk fel az $x + 2y = 1$ és az $x + 2y = 3$ egyenletű egyenesekkel párhuzamos egyenes egyenletét, amely az adott egyenesek távolságát $1 : 3$ arányban osztja.

K2 **4198.** Egy háromszög két oldalegyenesének egyenlete: $x + y - 1 = 0$; $y + 1 = 0$, a súlypontja az $S(-1; 0)$ pont. Írjuk fel a harmadik oldalegyenesének egyenletét.

E1 **4199.** Húzzunk az origón át olyan egyenest, amelyből az $x - y + 1 = 0$ és az $x - y - 2 = 0$ egyenletű egyenesek 3 egységnyi szakaszt vágnak ki.

E2 **4200.** A $2x + y - 1 = 0$ egyenletű egyenes egy háromszög egyik belső szögfelezője, a háromszög két csúcsa az $(1; 2)$ és a $(-1; -1)$ pont. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

E2 **4201.** A $2x - y - 1 = 0$ egyenletű egyenes egy háromszög egyik belső szögfelezője, a háromszög két csúcsa az $(1; 1)$ és az $(5; 4)$ pont. A háromszög területe 5 egység. Írjuk fel az oldalak egyenletét.

K2 **4202.** Egy derékszögű háromszög átfogójának egyik végpontja $A(-2; 2)$, a másik végpontja a B pont, amelynek ordinátája 4. Az egyik befogó egyenlete $x + y = 10$. Számítsuk ki az átfogóhoz tartozó magasság hosszát.

E2 **4203.** Rajzoljuk meg a koordináta-rendszerben azon pontok halmazát, amelyek koordinátái kielégítik az

$$\frac{x^2 + y^2 - 2xy - 1}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} = 0$$ egyenletet.

E2 **4204.** Hol helyezkednek el a sík azon pontjai, amelyek koordinátái kielégítik a $3x^2 - 3y^2 - 8xy - 5x + 5y + 2 = 0$ egyenletet?
Mutassuk meg, hogy ezen pontok közül négy a koordináta-rendszer tengelyeire illeszkedik úgy, hogy egyik a másik három pont által alkotott háromszög magasságpontja.

E2 **4205.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(2; 1)$ ponton, és az $x - y + 5 = 0$, valamint az $x - y = 2$ egyenletű egyenesek közé eső szakasza 5 egység.

E2 **4206.** A sík tetszőleges $P(x; y)$ pontjához rendeljük hozzá a $Q\left(ax; \frac{y}{a}\right)$ pontot, ahol $a = 3$. Melyek a sík azon P_1P_2 szakaszai, amelyekhez ez a hozzárendelés a velük egyenlő hosszúságú Q_1Q_2 szakaszokat rendeli?

E1 **4207.** Az $ABCD$ négyzet csúcspontjainak koordinátái: $A(0; 0)$, $B(8; 0)$, $C(8; 8)$, $D(0; 8)$. Az $ABCD$ négyzettel megegyező körüljárású $AEFG$ négyzet E csúcspontjának koordinátái: $(-4; -4)$. Bizonyítsuk be, hogy a BE, CF és a DG egyenesek egy pontban metszik egymást.

K2 **4208.** Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(6; 0)$, $B(0; 4)$, $C(0; 0)$. Az oldalak fölé kifelé egyenlő oldalú háromszögeket rajzolunk. Az AB oldal fölé rajzolt háromszög csúcsai ABC_1, a BC oldal fölé rajzolt háromszög csúcsai BCA_1, a CA oldal fölé rajzolt háromszög csúcsai CAB_1.
Igazoljuk, hogy $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

E2 **4209.** Egy tetraéder csúcsainak koordinátái: $A(0; 0; 0)$, $B(6; 2; 0)$, $C(9; 7; 0)$, $D(4; 4; 4)$. Igazoljuk, hogy a tetraéder súlyvonalainak négyzetösszege úgy aránylik az élek négyzetösszegéhez, mint 4 : 9.

K2 **4210.** Az ABC háromszögben a C szög = 90°. A C csúcson átmenő magasságegyenes egyenlete m_c: $y = 3x + 2$, a súlyvonal egyenes egyenlete s_c: $y = 2x + 3$. Az AB egyenes egyik P pontjának koordinátái (6; 8). Számítsuk ki a háromszög csúcspontjainak koordinátáit.

E2 **4211.** A koordináta-rendszerben rácspontoknak nevezzük azokat a pontokat, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely paralelogramma csúcsai rácspontok, és a belsejében vagy a határán van még más rácspont is, akkor a területe nagyobb 1-nél.

E2 **4212.** Adott három pont a koordinátáival: $A(0; 2)$, $B(6; 4)$, $C(3; 5)$. Az origón átmenő és AC-vel párhuzamos egyenes az AB és BC oldalt M, illetve N pontban metszi. Számítsuk ki az ABC háromszög és az $AMNC$ trapéz területét.

K2 **4213.** Mutassuk meg, hogy minden négyszögben a szemközti oldalak felezőpontjait összekötő egyenesek közös pontja az átlók felezőpontjait összekötő szakaszt felezi.

K2 **4214.** Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyek a (4; 0) ponttól mért távolságának a négyzete 20-szal kisebb, mint a (0; 2) ponttól mért távolságának a négyzete?

E1 **4215.** Egy háromszög két csúcsa (–6; 0) és (6; 0), a harmadik csúcsa pedig az $y = -3x + 5$ egyenletű egyenesen mozog. Mi a súlypontjának a mértani helye?

E1 **4216.** Egy derékszögű háromszög csúcsainak koordinátái: $A(10; 0)$, $B(0; 6)$, $C(0; 0)$. A háromszögbe téglalapokat írunk úgy, hogy két oldala a befogóira illeszkedik, egyik csúcsa pedig az átfogón van. Határozzuk meg a téglalapok középpontjainak a mértani helyét.

K2 **4217.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely átmegy az $A(0; 9)$ és a $B(7; 2)$ ponton és érinti az x tengelyt.

E1 **4218.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely átmegy az $A(2; 1)$ ponton, érinti az x tengelyt, középpontja pedig az $x - 2y = 1$ egyenletű egyenesre illeszkedik.

E1 **4219.** Mekkora annak a körszeletnek a területe, amelyet a $2x - y = 2$ egyenletű egyenes vág le az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű körből?

E2 **4220.** Az ABC háromszög síkjában melyik az a P pont, amelyre a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg minimális?

E1 **4221.** Határozzuk meg az x tengelynek azt a pontját, amelyből az $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ egyenletű körhöz húzott érintők ugyanakkora szöget zárnak be egymással, mint az $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 48 = 0$ egyenletű körhöz húzott érintők.

E2 **4222.** A k kör érinti az x tengelyt, valamint az $(x - 17)^2 + (y + 17)^2 = 100$ egyenletű kört az $x_0 = 11$ abszcisszájú pontjában. Írjuk fel a k kör egyenletét.

K2 **4223.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $x = 12$ egyenletű egyenest a 8 ordinátájú pontjában érinti, és érinti az $x^2 + y^2 = 16$ egyenletű kört is.

E1 **4224.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja a $K(4; -2)$ pont és a $2x - 5y + \frac{51}{2} = 0$ egyenletű egyenesből 9 egység hosszúságú húrt metsz ki.

E2 **4225.** Az origó középpontú egységsugarú kör kerületén határozzuk meg azokat a pontokat, amelyek koordinátáira az $x^2 + xy + y^2$ kifejezés maximális értéket vesz fel.

K2 **4226.** Adott két kör:
$k_1: (x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 50$ és $k_2: (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 50$.
Jelöljük a k_1 középpontját C-vel, a k_2 középpontját D-vel, a két kör közös pontjait A-val és B-vel. Mekkora a $CADB$ négyszög területe?

K1 **4227.** Az $x + ay = 7$ egyenletű egyenes átmegy a $P(1; -2)$ ponton, és érintője egy origó középpontú körnek. Írjuk fel a kör egyenletét.

K2 **4228.** Legyen P olyan pont, hogy P-től az $x^2 + y^2 - 6y + 6 = 0$ és az $x^2 + y^2 - 2x = 0$ egyenletű körökhöz húzott érintőknek P-től az érintési pontig terjedő szakaszai egyenlők. Igazoljuk, hogy az említett tulajdonságokkal rendelkező P pontok egy egyenesen helyezkednek el.

E1 **4229.** Az $ABCD$ téglalap két csúcsa $A(1; -4)$, $D(-3; -2)$, és tudjuk, hogy $4 \cdot AD = AB$. Mekkora szakaszokat metsz ki az x, illetve az y tengelyből a téglalap köré írt kör?

E2 **4230.** Írjuk fel az $x^2 + (y + 2)^2 = 5$ egyenletű körnek a $P(5; 3)$ ponton átmenő érintőjét. Határozzuk meg az érintési pontok távolságát.

K2 **4231.** Egy egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjai az $A(-4; -3)$ és a $B(2; -9)$ pontok. A harmadik csúcs az $x^2 - 2x + y^2 + 2y - 7 = 0$ egyenletű körön van. Határozzuk meg a harmadik csúcs koordinátáit.

K2 **4232.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely átmegy az $A(10; 2)$ ponton és az $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ egyenletű kört a legkisebb ordinátájú pontjában érinti.

K1 **4233.** Mi a mértani helye azoknak a pontoknak a koordináta-rendszer síkjában, amelyek olyan távolságra vannak a (–4; 0) és a (8; 0) pontoktól, hogy a távolságuk négyzetösszege 80 (terület) egység?

E2 **4234.** Az $y = \lambda (x - 4)$ egyenesre az origóból merőleges egyenest húzunk. Határozzuk meg e két egyenes M közös pontjának a mértani helyét, ha a λ felvesz minden valós értéket.

E2 **4235.** Az $(x - 5)^2 + y^2 = 25$ egyenletű kör $O(0; 0)$ és $A(10; 0)$ koordinátájú pontokkal megadott átmérőjén jelöljünk ki egy B pontot.
A $B(a; 0)$ pontban a kör átmérőjére emelt merőleges a $C(a; b)$ $b \geq 0$ pontban metszi a kört. Mérjük fel az OC szakaszt a B-ben emelt merőlegesre a B pontból úgy, hogy $BD = OC$ legyen. Mi a D pont mértani helye, ha a B pont az OA szakaszon mozog?

E2 **4236.** Határozzuk meg az $y = \frac{1}{4}x^2$ egyenletű parabola olyan érintőjének az egyenletét, amely átmegy a (0; –4) koordinátájú ponton.

E2 **4237.** Határozzuk meg az $y^2 = 2x$ egyenletű parabola olyan érintőjének egyenletét, amely átmegy a (–4; –1) koordinátájú ponton.

E2 **4238.** Mutassuk meg, hogy az $y = x^2 - 6x + 10$ egyenletű parabola $3 - a$, illetve $3 + a$ abszcisszájú pontjaihoz egyenlő ordináták tartoznak.

E2 **4239.** Mekkora az a és b valós paraméter értéke, ha tudjuk, hogy a $P(0; 0)$ és a $Q(–2; 18)$ pontok az $y = 2x^2 + ax + b$ egyenletű parabolára illeszkednek?

E2 **4240.** Határozzuk meg annak a parabolának a fókuszát és a vezéregyenesét, amely áthalad a (0; 6), (1; 0), (4; 6) pontokon és tengelye párhuzamos az y tengellyel.

E2 **4241.** Az origón áthaladó egyenesek közül melyek metszik, érintik, illetve kerülik el az $y = x^2 + 2x$ egyenletű parabolát? Az érintőre merőleges egyenes mekkora húrt metsz ki a parabolából?

E2 **4242.** Írjuk fel az $y = 4x^2 + 4$ egyenletű parabola origón áthaladó érintőinek egyenletét. Számítsuk ki az érintési pontok koordinátáit.

E2 **4243.** Mutassuk meg, hogy az $y = x^2 + 2x + c$ egyenletű parabola csúcsa a c bármely értékénél az y tengellyel párhuzamos egyenesen fekszik. A c paraméter mely értékénél illeszkedik a C csúcs az x tengelyre?

E2 **4244.** Az $y = x^2 + bx + c$ egyenletű parabolát az (1; 1) pontban érinti az $y = x$ egyenletű egyenes. Határozzuk meg b és c értékét.

E2 **4245.** Az $y = x^2 - 9$ egyenletű parabola az x tengelyt az A és a B pontokban metszi. Egy k kör sugara 5, középpontja az x tengely felett van, és ugyanott metszi az x tengelyt, ahol a parabola. A kör és a parabola további közös pontjai C és D. Mekkora az $ABCD$ négyszög területe?

E2 **4246.** Határozzuk meg az $y = –x^2 + 4x – 3$ egyenletű parabola és az x tengely közös pontjait. Írjuk fel ezekben a pontokban a parabola érintőinek az egyenletét. Számítsuk ki az érintők hajlásszögét.

E2 **4247.** Adott az $y = x^2$ egyenletű parabola és az $A(9; 8)$ pont. A parabola mely P pontjába húzott érintőjére igaz, hogy ez az érintő merőleges az AP egyenesre?

E1 **4248.** Az $y = \frac{1}{8}x^2$ egyenletű parabolához a $P(2; -4)$ pontból érintőket húzunk. Az érintési pontok T_1 és T_2. Bizonyítsuk be, hogy
a) a P pontnak a parabola tengelyétől mért távolsága a T_1 és a T_2 pontok tengelytől mért előjeles távolságainak számtani közepével egyenlő;
b) A P pontnak a fókusztól mért távolsága a T_1 és a T_2 pontok fókusztól mért távolságainak mértani közepével egyenlő.

E1 **4249.** Az $y = \frac{1}{4}x^2$ egyenletű parabolát a $P(1; -1)$ ponton átmenő egyenesek érintik. Írjuk fel az érintők egyenletét.

K2 **4250.** Tekintsük az $y = 3x^2 - 4$ egyenletű parabola olyan húrjait, amelyek irányhatározója 2. Határozzuk meg ezen húrok felezőpontjainak a mértani helyét.

E2 **4251.** Egy derékszög úgy csúszik a parabola síkjában, hogy a szárai érintik az $y^2 = 2px$ egyenletű parabolát. Határozzuk meg a derékszög csúcsának a mértani helyét.