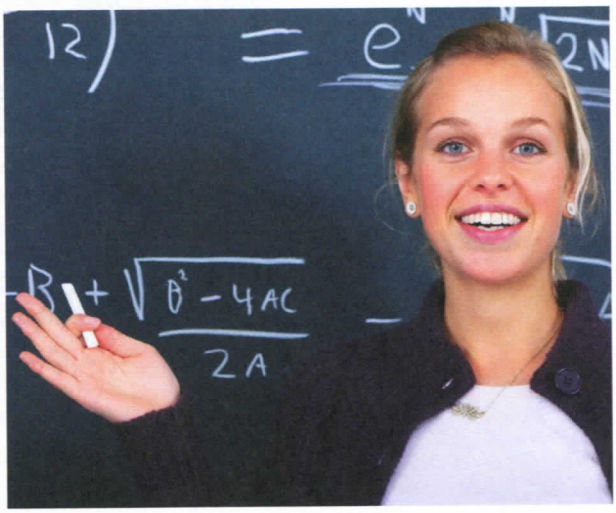
II. Gyökvonás



A matematikában és általában a természettudományokban nagyon gyakran előfordul, hogy egy valós szám négyzetgyökét kell használnunk, sőt, amint látni fogjuk, a harmadik, negyedik és általában az *n*-edik gyökvonás is sokszor szükségessé válik. E fejezetben a négyzetgyökvonás általánosításaként az *n*-edik gyök fogalmát és legfontosabb szabályait ismerhetjük meg, természetesen sok-sok példával, feladattal illusztrálva a tanultakat.



1. Racionális számok, irracionális számok

Korábbi tanulmányaink során már elemi szinten megismerkedtünk a racionális számokkal, az azokkal való műveletekkel. Ebben a fejezetben először bővíteni fogjuk ismereteinket ezen a téren, megismerkedünk olyan valós számokkal, amelyek nem racionális számok.

A 9. osztályban láttuk, hogy az egész számok halmazán végzett összeadás, kivonás és szorzás műveletek nem vezettek ki az egész számok halmazából: bármely két egész számmal elvégezve e műveletek bármelyikét, az eredmény mindig egész szám lett.

Az osztás műveletével már más a helyzet: két egész szám hányadosa már nem biztos, hogy egész szám lesz. Az osztás műveletét elvégezve bármely két egész számmal, már egy újabb, bővebb halmazhoz jutunk, a racionális számok halmazához.

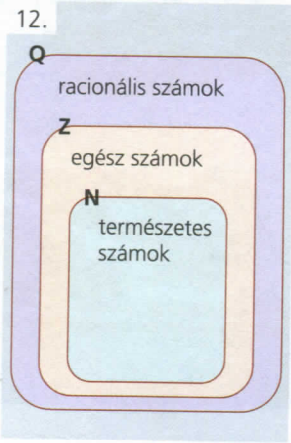
Racionális számok: **Q**

Racionális számok

Racionális számnak nevezzük azokat a számokat, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként, azaz

a $\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$) alakú számok alkotják a racionális számok halmazát. A racionális számok halmazát **Q**-val jelöljük. *(12. ábra)*

12.



Nyilvánvaló, hogy minden egész szám egyben racionális szám, hiszen bármely egész szám felírható két egész szám hányadosaként.

Például: $5 = \frac{5}{1}$, $-3 = \frac{-6}{2}$, $0 = \frac{0}{3}$ stb.

Az is látható, hogy minden racionális számnak végtelen sok alakja van. Hiszen, ha a két egész szám hányadosaként felírt törtet bővítjük (azaz számlálóját és nevezőjét is ugyanazzal a 0-tól különböző számmal megszorozzuk), akkor a szám értéke nem változik meg.

Mivel – mint láttuk – minden egész szám racionális szám, ezért az egész számok halmaza a racionális számok halmazának részhalmaza.

1. példa Igazoljuk, hogy két racionális szám összege is racionális szám!

Megoldás

Legyen a két racionális szám $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$, ahol tehát a, b, c és d egész számok, és természetesen b és d egyike sem 0. Ekkor

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

A kapott tört számlálója egész szám, hiszen ad és bc is egész. De a nevező is egész, hiszen bd is egész, ezért a kiindulási racionális számok összege felírható két egész szám hányadosaként, így az valóban racionális szám.

Most vizsgáljuk meg a racionális számok tizedes tört alakját!

2. példa Írjuk fel tizedes tört alakban az alábbi racionális számokat!

a) $\frac{7}{8}$, *b)* $\frac{47}{55}$.

Megoldás

a) $7 : 8 = 0{,}875$
70
60
40
0

Eredményül egy véges tizedes törtet kaptunk.

b) $47 : 55 = 0{,}854\ldots$
470
300
250
300

Most az utolsó maradék megegyezik a kettővel korábbi maradékkal, így innentől kezdve a számjegyek kettesével ismétlődnek. Tehát egy végtelen, számjegyeiben ismétlődő (szakaszos) tizedes törtet kaptunk.

Ezek szerint a $\frac{p}{q}$ racionális szám tizedes tört alakjában az osztás elvégzésekor egy idő után vagy fellép a 0 maradékként, vagy nem. Ha a maradékos osztás során valamikor 0 maradék adódik, akkor a kérdéses szám tizedes tört alakja véges. Ha az osztás során maradékként semmikor nem kapunk 0-t, akkor a fellépő maradékok 1, 2, 3, …, $p - 1$ lehetnek. Így legfeljebb $p - 1$ lépés után (a skatulyaelv szerint) olyan maradéknak kell fellépnie, amely már korábban előfordult, s onnantól kezdve a maradékok, vagyis a tizedesjegyek periodikusan ismétlődnek. Ebben az esetben tehát a racionális szám tizedes tört alakja végtelen, ismétlődő (szakaszos) tizedes tört lesz.

Nem minden szám tizedes tört alakja véges vagy végtelen szakaszos. Tekintsük például azt a számot, melyet úgy kapunk, hogy a tizedesvessző után sorba írjuk a pozitív egész számokat:

0,123456789101112131415.....

Ez a szám nem lehet racionális szám, hiszen ha az lenne, akkor tizedes tört alakja vagy véges lenne, vagy végtelen szakaszos, márpedig a felírt szám egyiknek sem felel meg. Ez a szám tehát nem írható fel két egész szám hányadosaként.

Irracionális számok

Irracionális számoknak nevezzük azokat a számokat, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként. Az irracionális számok halmazát **Q***-gal jelöljük.

Irracionális számok: **Q***

Már az ókorban is felfigyeltek arra, hogy nem minden szakasz „összemérhető". Két szakaszt akkor mondunk összemérhetőnek, ha létezik egy olyan „pici" szakasz, amely mindkét eredeti szakaszra egész számszor ráfér. Nem összemérhető szakaszok például a négyzet oldala és a négyzet átlója, de összemérhető például az a két szakasz, melyek hossza $\frac{5}{8}$ és $\frac{7}{11}$ egységnyi. Ekkor ugyanis az $\frac{1}{88}$ hosszúságú szakasz mindkét szakaszra egész számszor ráfér: az elsőre 55-ször, a másodikra 56-szor. Ha két szakasz hossza az egység racionális számszorosa, akkor e két szakasz összemérhető: egy olyan hosszúságú szakasz, amelynek számlálója 1, nevezője pedig a két eredeti szakasz mértéke nevezőjének legkisebb közös többszöröse, biztosan ráfér egész számszor mindkét eredeti szakaszra.

Megmutatjuk, hogy az egységnyi oldalú négyzet átlója nem mérhető össze a négyzet oldalával, vagyis hogy a $\sqrt{2}$ irracionális szám.



Ennek igazolását indirekt úton végezzük. Tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális szám, azaz felírható két egész szám hányadosaként:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

ahol p és q egész számok és relatív prímek: $(p; q) = 1$. Ezt nyugodtan feltételezhetjük, ha ugyanis nem lennének relatív prímek, akkor a $\frac{p}{q}$ törtet addig egyszerűsíthetjük, amíg p-nek és q-nak már nem lesz az 1-en kívül közös osztója.

Emeljük négyzetre az előző egyenlet mindkét oldalát:

$2 = \frac{p^2}{q^2}$, azaz $2q^2 = p^2$.

A kapott egyenlőség bal oldala páros, így jobb oldalának is párosnak kell lennie. A jobb oldalon p^2 akkor és csak akkor páros, ha p is páros: $p = 2k$. Ezzel egyenletünk így alakul:

$2q^2 = 4k^2$, azaz $q^2 = 2k^2$.

Most a jobb oldal páros, tehát q^2-nek is, vagyis q-nak is párosnak kell lennie: $q = 2n$. Arra jutottunk, hogy p és q relatív prímek és mindkettő páros szám. Ez nyilván ellentmondás, ami csak úgy oldható fel, hogy kiindulási feltételünk helytelen volt, vagyis $\sqrt{2}$ nem írható fel két egész szám hányadosaként, azaz irracionális szám.

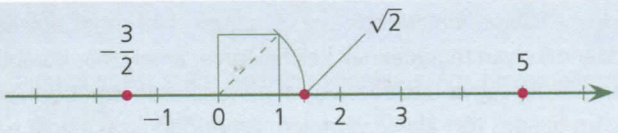
Valós számok: R

A racionális számok **Q** és irracionális számok **Q*** halmazának egyesítésével kapjuk a valós számok halmazát, melyet **R**-rel jelölünk:

$\mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}^* = \mathbf{R}$.

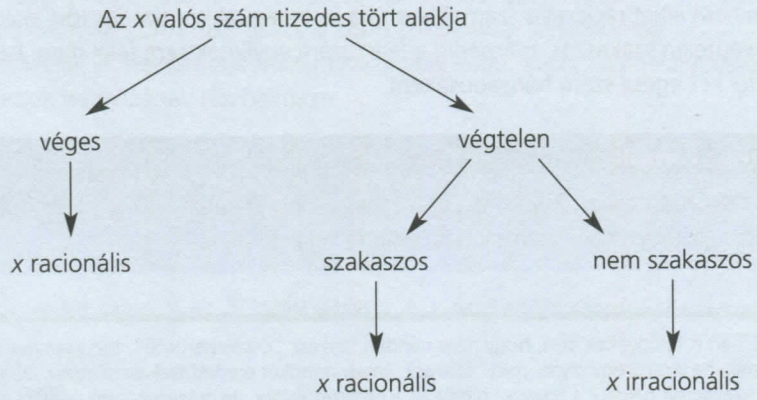
Igazolható, hogy a valós számok halmazának elemei és a számegyenes pontjai között létesíthető kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. Ez teszi lehetővé a valós számoknak, különböző intervallumoknak szemléltetését a számegyenesen. A *13. ábrán* az alábbi valós számokat szemléltettük: 5, $-\frac{3}{2}$, $\sqrt{2}$.

13.



Összefoglalva: a valós számokat tizedes tört alakjuk szerint így osztályozhatjuk:

14.



Könnyen belátható, hogy ha n pozitív egész szám, akkor

$\sqrt{n}$ = egész szám, ha n négyzetszám,
irracionális, ha n nem négyetszám.

Feladatok

1. K1 Igazoljuk, hogy $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{12}$ irracionális számok!

2. K1 Igazoljuk, hogy két racionális szám szorzata és hányadosa is racionális szám!

3. K1 Írjuk fel az alábbi tizedes tört alakban megadott számokat két egész szám hányadosaként!

a) 0,32; *b)* 3,122; *c)* 0,1313…

4. K1 Írjuk fel az alábbi törteket tizedes tört alakban!

a) $\frac{2}{7}$; *b)* $\frac{11}{13}$.

5. K2 Adjunk meg két olyan racionális számot, amely nagyobb, mint 0,6666, de kisebb, mint 0,6667!

6. K2 Lehet-e két irracionális szám szorzata, illetve hányadosa racionális szám?

7. K2 Lehet-e egy racionális és egy irracionális szám összege racionális szám?

8. E1 Lehet-e két irracionális szám összege racionális szám?

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 754., 757., 759., 760., 785., 786., 788.

OLVASMÁNY

Nagyon régi probléma a naptárkészítés kérdése. Már az ókorban is tudták, hogy az év időtartamát napokban mérve nagyon nehéz meghatározni. Ennek az az oka, hogy az év időtartama és a nap időtartama nem összemérhető időtartamok. Tehát nem található olyan időtartam, mely az év és a nap időtartamára is egész számszor ráfér, mondhatnánk úgy is, hogy e két időtartam irracionális viszonyban van egymással. Ezért nem készíthető „öröknaptár", azaz olyan naptár, mely bármely év bármely napjáról megmondja, hogy az a hétnek milyen napjára esik.

Julius Caesar Kr. e. 46-ban bevezette a Julianus-naptárt, melyben az évet 365 és ¼ napban határozta meg, így született meg a négyévenkénti szökőnap, vagyis a szökőév gondolata. De kb. 1500 év múlva kiderült, hogy ez is nagyon pontatlan, így újabb korrekcióra volt szükség. Így 1582-ban *XIII. Gergely* pápa bevezette az azóta is használatos Gergely-naptárt, mely szerint minden negyedik év szökőév, kivéve a 100-zal is osztható éveket, amelyek csak akkor lesznek szökőévek, ha 400-zal is oszthatók. Ezzel már olyan kicsire csökkentette a naptár hibáját, hogy az így elkészült öröknaptár bevezetésétől számítva kb. 4000 évig használható; a hiba addigra gyűlik össze 1 nappá. *(Nézz utána az Interneten!)*



Julius Caesar

Az öröknaptár képletében az egyes betűk az alábbiakat jelentik:

N = a nap sorszáma;

H = a hónap sorszáma (március = 1);

$É$ = az évszázadon belüli évszám;

S = az évszázad sorszáma.

A k értéke szökőévben 1, egyébként pedig 0.

$$N + [2{,}6H - 0{,}2] + É + \left[\frac{É}{4}\right] + \left[\frac{S}{4}\right] - 2S - (1 + k)\left[\frac{H}{11}\right].$$

A szögletes zárójel a benne szereplő mennyiség egész részét jelöli. Ha valamely dátumról szeretnénk kiszámítani, hogy az a hétnek mely napjára esik, akkor a dátum megfelelő adatait a képletbe helyettesítve, ki kell számítanunk a képletben szereplő összeget, majd a kapott egész számot el kell osztanunk 7-tel, és vizsgálni a maradékot. Ha a maradék 1, akkor a kérdéses nap hétfő, ha a maradék 2, akkor kedd, ha a maradék 3, akkor szerda, ... stb., végül, ha a maradék 0, akkor a kérdéses nap vasárnap.



Gergely pápa

Példaként számítsuk ki, milyen napra esett 1848. március 15.!

Ekkor $N = 15$, $H = 1$, $É = 48$, $S = 18$ és $k = 1$. Ezeket a képletbe helyettesítve:

$$15 + [2{,}6 - 0{,}2] + 48 + \left[\frac{48}{4}\right] + \left[\frac{18}{4}\right] - 2 \cdot 18 - (1 + 1) \cdot \left[\frac{1}{11}\right] = 15 + 2 + 48 + 12 + 4 - 36 = 45.$$

A kapott szám 7-tel osztva 3 maradékot ad, tehát 1848. március 15-e szerdai napra esett.

2. A négyzetgyökvonás és azonosságai

Korábban már találkoztunk négyzetgyökös kifejezésekkel. Ebben a leckében a négyzetgyök fogalmát és a vele való számolás szabályait fogjuk részletesebben megvizsgálni.

Négyzetgyök fogalma: $(\sqrt{a})^2 = a$ $(a \geq 0)$

A négyzetgyök

Legyen $a \geq 0$ valós szám. Ekkor $\sqrt{a}$ jelöli azt a nemnegatív valós számot, melynek négyzete a.

Mivel a definícióban szereplő a szám egy valós számnak a négyzete, ezért biztosan nemnegatív. Tehát a négyzetgyök kifejezéssel kapcsolatban kétféle módon is fellép a „nemnegatív" kifejezés: egyrészt a definícióban, másrészt pedig a négyzetgyökös kifejezésnek csak akkor van értelme, ha a négyzetgyök alatti kifejezés értéke nemnegatív.

Például: $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$, $\sqrt{(-4)^2} = 4$.

Az előző példák közül az utolsó nagyobb figyelmet érdemel. Ebben a négyzetgyök alatt 16 szerepel, így a definíció alapján $\sqrt{16} = 4$. Ezek szerint egy valós szám négyzetének a négyzetgyöke nem feltétlenül egyenlő a kérdéses számmal. Ha ugyanis e valós szám negatív, akkor négyzetének négyzetgyöke nem a kérdéses valós számmal egyenlő, hanem annak (–1)-szeresével:

$\sqrt{a^2} = |a|$.

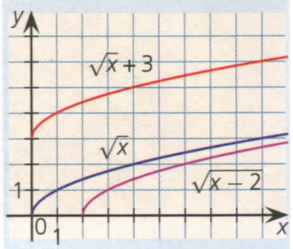
$\sqrt{a^2} = |a|$

Például: $\sqrt{a^6} = |a^3|$, $\sqrt{b^{10}} = |b^5|$, $\sqrt{c^{12}} = c^6$.

A harmadik esetben szükségtelen lett volna használni az abszolút érték jelét, hiszen, ha c negatív, annak hatodik (tehát páros) hatványa pozitív lesz.

A tavalyi tanévben már találkoztunk a nemnegatív valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonjával. A *15. ábrán* e függvényt és néhány transzformációját látjuk.

15.



1. példa Határozzuk meg az alábbi kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\sqrt{2x-5}$, b) $\sqrt{\frac{x+2}{3-4x}}$; c) $\sqrt{x^2-4x+4}$.

Megoldás

a) A megadott kifejezés akkor értelmezett, ha $2x - 5 \geq 0$, ahonnan $x \geq \frac{5}{2}$.

b) Ebben az esetben az $\frac{x+2}{3-4x} \geq 0$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Mivel egy tört akkor és csak akkor pozitív, ha a számlálójának és nevezőjének előjele megegyezik, ezért két eset lehetséges:

$x + 2 \geq 0$ és $3 - 4x > 0$ vagy $x + 2 \leq 0$ és $3 - 4x < 0$.

Az első esetben $x \geq -2$ és $x < \frac{3}{4}$. A második esetben $x \leq -2$ és $x > \frac{3}{4}$, ami nyilván ellentmondás. Tehát a megadott kifejezés értelmezési tartománya: $-2 \leq x < \frac{3}{4}$.

c) Ez esetben érdemes észrevenni, hogy a négyzetgyök alatt teljes négyzet szerepel:

$\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$.

A kifejezés minden valós x-re nemnegatív, tehát a kifejezés értelmezési tartománya minden valós szám.

A négyzetgyökvonás műveletének elvégzésekor sokszor segítenek nekünk a következő fontos szabályok.

A NÉGYZETGYÖKVONÁS AZONOSSÁGAI

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $\quad a \geq 0,\ b \geq 0.$
2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $\quad a \geq 0,\ b > 0.$
3. $\sqrt{a^k} = (\sqrt{a})^k$, $\quad a \geq 0,\ k \in \mathbf{Z}.$

1. Egy szorzat négyzetgyöke egyenlő a tényezők négyzetgyökének szorzatával:
$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, ahol $\quad a \geq 0,\ b \geq 0.$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
$a \geq 0,\ b \geq 0$

Az azonosság igazolása végett emeljük négyzetre az egyenlőség mindkét oldalát! (Ezt megtehetjük, mert a négyzetgyök fogalma szerint mindkét oldal nemnegatív.)

$(\sqrt{ab})^2 = (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2$.

A bal oldal a négyzetgyök definíciója szerint $(a \cdot b)$-vel egyenlő. A jobb oldal a szorzat hatványára vonatkozó azonosságot, majd a négyzetgyök definícióját használva

$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b$.

Ha két nemnegatív valós szám négyzete egyenlő, akkor a két szám is egyenlő, ezzel az 1. azonosságot beláttuk.

Vigyázzunk! Összegből nem lehet tagonként négyzetgyököt vonni:
$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$.

2. Egy tört négyzetgyöke a számláló és a nevező négyzetgyökének hányadosa:
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, ahol $\quad a \geq 0,\ b > 0.$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
$a \geq 0,\ b > 0$

A bizonyításhoz ismét emeljük négyzetre az egyenlőség két oldalát; megtehetjük, mert mindkét oldalon nemnegatív mennyiségek szerepelnek.

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2.$$

A bal oldal a négyzetgyök definíciója alapján $\frac{a}{b}$. A jobb oldalon a tört hatványára vonatkozó azonosságot, majd a négyzetgyök definícióját használva

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Két nemnegatív valós szám négyzete egyenlő, így a két szám is egyenlő. Ezzel beláttuk a 2. azonosságot.

3. Ha egy hatványból akarunk négyzetgyököt vonni, akkor a négyzetgyökvonás és a hatványozás művelete felcserélhető:
$\sqrt{a^k} = (\sqrt{a})^k$, ahol $\quad a \geq 0,\ k \in \mathbf{Z}.$

$\sqrt{a^k} = (\sqrt{a})^k$
$a \geq 0,\ k \in \mathbf{Z}$

Ismét emeljük négyzetre a bizonyítandó egyenlőség két oldalát! A bal oldalon a négyzetgyök definíciója szerint

$(\sqrt{a^k})^2 = a^k$.

A jobb oldalon a hatvány hatványára vonatkozó azonosságot, majd a négyzetgyök definícióját használva

$[(\sqrt{a})^k]^2 = (\sqrt{a})^{2k} = [(\sqrt{a})^2]^k = a^k$.

Azt kaptuk, hogy az egyenlet két oldalán levő nemnegatív valós számok négyzete egyenlő, tehát a két oldal valóban egyenlő egymással.

2. példa Végezzük el az alábbi négyzetgyökvonást, ahol a és b nemnegatív, x és y pedig pozitív valós számok!

$$\sqrt{\frac{a^{10}b^{12}}{x^4y^8}}$$

Megoldás

Először a második, majd az első azonosságot alkalmazva a megadott kifejezés így alakítható:

$$\sqrt{\frac{a^{10}b^{12}}{x^4y^8}} = \frac{\sqrt{a^{10}b^{12}}}{\sqrt{x^4y^8}} = \frac{\sqrt{a^{10}}\cdot\sqrt{b^{12}}}{\sqrt{x^4}\cdot\sqrt{y^8}}.$$

Innen a négyzetgyök definíciója alapján kapjuk a végeredményt:

$$\sqrt{\frac{a^{10}b^{12}}{x^4y^8}} = \frac{\sqrt{a^{10}b^{12}}}{\sqrt{x^4y^8}} = \frac{\sqrt{a^{10}}\cdot\sqrt{b^{12}}}{\sqrt{x^4}\cdot\sqrt{y^8}} = \frac{a^5b^6}{x^2y^4}.$$

3. példa Végezzük el a kijelölt műveletet!

$(\sqrt{2}+3\sqrt{8}-4\sqrt{50})\cdot\sqrt{2}$.

Megoldás

A zárójelben levő három tagot megszorozzuk $\sqrt{2}$-vel, és alkalmazzuk a második azonosságot.

$$(\sqrt{2})^2+3\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}-4\sqrt{50}\cdot\sqrt{2} = 2+3\sqrt{8\cdot 2}-4\sqrt{50\cdot 2} = 2+3\sqrt{16}-4\sqrt{100} =$$
$$= 2+3\cdot 4-4\cdot 10 = -26.$$

4. példa Számológép használata nélkül döntsük el, hogy melyik szám nagyobb:

$\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$ vagy $\sqrt{2}$.

Megoldás

Mivel $2+\sqrt{3}$ és $2-\sqrt{3}$ egyaránt pozitív számok és $2+\sqrt{3} > 2-\sqrt{3}$, ezért az összehasonlítandó számok pozitív számok. Ezek szerint megtehetjük, hogy e számok helyett négyzeteiket hasonlítjuk össze; két pozitív szám közül az a nagyobb, amelynek négyzete is nagyobb.

A második szám négyzetével nincs gondunk: $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Az első szám négyzeténél vigyázzunk arra, hogy két tag különbségét kell négyzetre emelnünk. Alkalmazzuk a korábban tanult $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$ azonosságot:

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 = 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Összevonás és a második azonosság alkalmazása után kapjuk:

$$4-2\cdot\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}.$$

A négyzetgyök alatt egy ugyancsak korábban tanult nevezetes szorzat szerepel:

$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.

Tehát

$$4-2\cdot\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 4-2\cdot\sqrt{4-3} = 4-2\cdot\sqrt{1} = 2.$$

Mivel mindkét összehasonlítandó pozitív szám négyzete 2, ezért a két szám egyenlő egymással:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2}.$$

Feladatok

1. K1 Végezzük el a gyökvonást, illetve a kijelölt műveletet!

a) $\sqrt{a^4b^{10}}$; b) $\sqrt{x^2y^4z^6q^8}$; c) $\sqrt{\frac{p^{12}q^{16}}{r^{10}s^8}}$; d) $\sqrt{\frac{a^4b^6}{c^2d^4}}:\sqrt{\frac{c^8d^{10}}{a^6b^2}}$.

2. K1 Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$; b) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}$; c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$;

d) $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}}$; e) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; f) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$.

3. K1 Melyik szám nagyobb?

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}$ vagy 6; b) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{5}$ vagy $\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}$;

c) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ vagy 10; d) $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$ vagy $(\sqrt{2}+1)^2$.

4. K1 Határozzuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\sqrt{2x-5}$; b) $\sqrt{\frac{x^2}{1-x}}$; c) $\sqrt{\frac{x-6}{3-2x}}$; d) $\frac{\sqrt{5x+4}}{x-2}$.

5. K2 Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $(3\sqrt{2}-1)(4+2\sqrt{2})$; b) $(\sqrt{8}+3\sqrt{2}-\sqrt{18})\cdot 4\sqrt{2}$; c) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2+12\sqrt{6}$.

6. K2-E1 Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

a) $\sqrt{8+3\sqrt{7}}\cdot\sqrt{8-3\sqrt{7}}$;

b) $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}$;

c) $\left(\sqrt{8+3\sqrt{7}}-\sqrt{8-3\sqrt{7}}\right)^2$;

d) $\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}-\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)^2$.

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 844., 845., 847., 849., 850., 851.

3. A négyzetgyökvonás alkalmazásai

Az előző leckében megismerkedtünk a négyzetgyök fogalmával és legfontosabb azonosságaival. Eddigi példáinkban, ha egy számból vagy algebrai kifejezésekből négyzetgyököt akartunk vonni, akkor a szám négyzetszám volt, ha kifejezéssel dolgoztunk, akkor annak hatványkitevője mindig páros szám volt. De mi a helyzet akkor, ha algebrai kifejezésünk hatványkitevője páratlan?

KIVITEL A NÉGYZETGYÖKJEL ALÓL

Kivitel a gyökjel alól pl.: $\sqrt{a^3}=a\sqrt{a}$

Hogyan járhatunk el például $\sqrt{a^9}$ esetében? Alakítsuk szorzattá a^9-t úgy, hogy valamelyik tényezőjéből már lehessen négyzetgyököt vonni.

$\sqrt{a^9}=\sqrt{a^8}\cdot\sqrt{a}=a^4\cdot\sqrt{a}$.

Azt mondhatjuk, hogy amit tudtunk, kivittünk a négyzetgyökjel elé. Természetesen ez a művelet csak akkor értelmezett, ha $a\geq 0$.

Ha egy konkrét számmal akarjuk ezt a műveletet elvégezni, akkor azt úgy célszerű szorzattá bontanunk, hogy egyik tényezője négyzetszám legyen.

Például

$\sqrt{300}=\sqrt{100\cdot 3}=\sqrt{100}\cdot\sqrt{3}=10\sqrt{3}$.

1. példa Vigyünk ki a négyzetgyökjel elé, amit csak tudunk ($a,b \geq 0$, $x,y > 0$)!

$$\sqrt{\frac{a^5b^7}{18x^4y^{11}}}$$

Megoldás

Az egyes tényezőket a megfelelő módon szorzattá alakítva azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{a^5b^7}{18x^4y^{11}}} = \sqrt{\frac{a^4 \cdot a \cdot b^6 \cdot b}{9 \cdot 2 \cdot x^4 \cdot y^{10} \cdot y}} = \frac{a^2b^3}{3x^2y^5} \cdot \sqrt{\frac{ab}{2y}}.$$

2. példa Végezzük el az alábbi műveletet!

$$(3\sqrt{2} + 2\sqrt{8} - \sqrt{50})^2$$

Megoldás

Mielőtt hozzákezdenénk a háromtagú összeg négyzetre emeléséhez, nézzük meg az egyes tagokat; mi mindent lehetne kivinni a négyzetgyökjelek elé.

$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$, $\quad \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$.

Tehát a feladatban szereplő kifejezés így írható:

$$(3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 = 8.$$

Bevitel a gyökjel alá
pl.: $a\sqrt{a^5} = \sqrt{a^7}$

BEVITEL A NÉGYZETGYÖKJEL ALÁ

Gyakran nem arra van szükségünk, hogy kivigyünk a négyzetgyökjel elé, hanem éppen fordítva: arra van szükségünk, hogy a négyzetgyök előtt álló szorzótényezőt bevigyük a négyzetgyökjel alá. Ilyenkor a négyzetgyök előtti szorzótényezőt négyzetre kell emelnünk, s ez szerepel ugyancsak szorzótényezőként a négyzetgyök alatt. Például:

$5 \cdot \sqrt{6} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{25 \cdot 6} = \sqrt{150}$,

$a^3 \cdot \sqrt{a^5} = \sqrt{a^6} \cdot \sqrt{a^5} = \sqrt{a^6 \cdot a^5} = \sqrt{a^{11}}$, ahol $a \geq 0$.

3. példa Vigyük a négyzetgyök alá az előtte levő szorzótényezőt!

$3a^2x\sqrt{2ax^2}$, ahol $a \geq 0$, $x \geq 0$.

Megoldás

$$3a^2x\sqrt{2ax^2} = \sqrt{9a^4x^2} \cdot \sqrt{2ax^2} = \sqrt{18a^5x^4}.$$

4. példa Vigyük a négyzetgyök alá az előtte levő szorzótényezőt!

$$(a-b) \cdot \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \quad (a > b \geq 0).$$

Megoldás

$$(a-b) \cdot \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \sqrt{\frac{(a-b)^2(a+b)}{a-b}} = \sqrt{(a-b)(a+b)} = \sqrt{a^2-b^2}.$$

A NEVEZŐ GYÖKTELENÍTÉSE

Nevező gyöktelenítése
pl.: $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$
$a > 0$

Sokszor találkozhatunk olyan törttel, amelynek nevezője négyzetgyökös kifejezést tartalmaz. Mivel ezek sok esetben irracionális számok, s az ilyenekkel elég nehézkes elvégezni az osztást, ezért ezekben az esetekben érdemes úgy átalakítani a törtet, hogy a nevező ne tartalmazzon négyzetgyökös kifejezést.

Induljunk ki a $\frac{10}{\sqrt{2}}$ törtből. Célunk e törtet úgy átalakítani, hogy nevezőjében ne legyen négyzetgyökjel. Ezt könnyen elérhetjük, ha bővítjük a törtet $\sqrt{2}$-vel, azaz megszorozzuk a számlálót is és a nevezőt is $\sqrt{2}$-vel:

$$\frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}.$$

Kicsit bonyolultabb a helyzetünk, ha a nevezőben kéttagú összeg szerepel, és ezek valamelyike (vagy esetleg mindegyike) négyzetgyökös kifejezés. Nézzünk erre is egy példát! Gyöktelenítsük az alábbi tört nevezőjét!

$$\frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$$

Most azt kell észrevennünk, hogy jól alkalmazható a korábban tanult

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

nevezetes azonosság. Mivel a tört nevezőjében két tag különbsége szerepel, ezért ha bővítjük a törtet e két tag összegével, akkor a nevezőben e két tag négyzetének különbsége, vagyis egy egész szám szerepel majd:

$$\frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{6 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})} = \frac{6 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2} = \frac{6 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2})}{3} = 2 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2}).$$

5. példa Döntsük el, melyik szám nagyobb!

$A = 4\sqrt{10} - 2\sqrt{30}$ vagy $B = \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{8} + \sqrt{6}}$?

Megoldás

Gyöktelenítsük a B kifejezés nevezőjét!

$$\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{8} + \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{80} \cdot (\sqrt{8} - \sqrt{6})}{(\sqrt{8} + \sqrt{6})(\sqrt{8} - \sqrt{6})} = \frac{\sqrt{80} \cdot (\sqrt{8} - \sqrt{6})}{8 - 6} = \frac{\sqrt{80} \cdot (\sqrt{8} - \sqrt{6})}{2}.$$

Most vigyünk ki $\sqrt{80}$-ból a négyzetgyökjel elé, amit tudunk!

$$\frac{4 \cdot \sqrt{5} \cdot (\sqrt{8} - \sqrt{6})}{2} = 2\sqrt{5} \cdot (\sqrt{8} - \sqrt{6}) = 2 \cdot \sqrt{40} - 2 \cdot \sqrt{30}.$$

A $\sqrt{40}$-ből is kivihetjük, amit tudunk:

$2 \cdot 2 \cdot \sqrt{10} - 2\sqrt{30} = 4\sqrt{10} - 2\sqrt{30}$.

Amit kaptunk, az éppen az A kifejezéssel azonos, tehát $A = B$.

6. példa Végezzük el az alábbi műveletet!

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3} - 1} + \frac{12}{\sqrt{3} + 1}\right) \cdot (7\sqrt{3} + 5)$$

Megoldás

Először a zárójelben levő műveletet végezzük el. Gyöktelenítsük mindkét tört nevezőjét!

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{3}+1,$$

$$\frac{12}{\sqrt{3}+1}=\frac{12(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{12(\sqrt{3}-1)}{2}=6(\sqrt{3}-1).$$

Tehát a következő műveletet kell elvégeznünk:

$(\sqrt{3}+1+6\sqrt{3}-6)(7\sqrt{3}+5)$, azaz

$(7\sqrt{3}-5)(7\sqrt{3}+5)$.

Itt már könnyen észrevehetjük a jól ismert nevezetes szorzatot:

$(7\sqrt{3}-5)(7\sqrt{3}+5)=(7\sqrt{3})^2-5^2=49\cdot 3-25=122.$

Feladatok

1. K1 A következő feladatokban a négyzetgyökök alatt szereplő betűk mindegyike pozitív. Végezzük el a négyzetgyökvonást (amit lehet, vigyünk ki a négyzetgyökjel alól)!

a) $\sqrt{75a^7b^8c^{19}}$; b) $\sqrt{\frac{18x^{13}y^6}{50p^9q^{11}}}$; c) $\sqrt{a^4b^2-b^4a^2}$.

2. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenletet a nemnegatív valós számok halmazán!

$6\sqrt{9x}+5\sqrt{x}-2\sqrt{25x}=26$.

3. K1 Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $(\sqrt{3}+4\sqrt{27}-\sqrt{75})\cdot 2\sqrt{12}$;

b) $(\sqrt{5}+\sqrt{20})(2\sqrt{5}-\sqrt{45})$;

c) $(\sqrt{500}+\sqrt{125})(2\sqrt{75}-5\sqrt{3})$.

4. K1 Melyik szám nagyobb: A vagy B?

a) $A=5\sqrt{2}$, $B=2\sqrt{5}$;

b) $A=\sqrt{54-6\sqrt{24}}$, $B=3\sqrt{6}-2$;

c) $A=\sqrt{49+4\sqrt{12}}$, $B=4\sqrt{3}+1$.

5. K2 Gyöktelenítsük az alábbi törtek nevezőjét ($a>0$, $b>0$)!

a) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; b) $\frac{15}{\sqrt{5}}$; c) $\frac{a}{\sqrt{a}}$; d) $\frac{a\sqrt{b}}{b\sqrt{a}}$;

e) $\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$; f) $\frac{4}{\sqrt{7}-1}$; g) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$; h) $\frac{a-\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}}$.

6. E1 Döntsük el, hogy az alábbi kifejezés milyen előjelű!

$\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}-2\sqrt{3}$.

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 852., 855., 856., 857., 858., 872., 873., 879., 883., 887., 889.

4. Az n-edik gyök fogalma és azonosságai

Kepler III. törvénye szerint a bolygók keringési idejének négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint a Naptól való közepes távolságaik köbei. Ha egységnyinek vesszük a Föld keringési idejét (1 év), és egységnyinek vesszük a közepes Föld–Nap távolságot (ezt nevezik csillagászati egységnek; kb. 150 millió km), akkor könnyen meghatározhatjuk Kepler III. törvénye alapján egy olyan bolygónak a Naptól való távolságát, amelynek ismerjük a keringési idejét. Tekintsük például a Jupitert, melynek keringési ideje kb. 11,9 év. Így Kepler III. törvényét alkalmazva felírhatjuk az alábbi egyenletet:

$$\frac{T^2_{Föld}}{T^2_{Jupiter}} = \frac{R^3_{Föld}}{R^3_{Jupiter}}, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{11{,}9^2} = \frac{1}{R^3_{Jupiter}}.$$

Innen

$R^3_{Jupiter} = 11{,}9^2 \approx 141{,}61.$

Ezek szerint a Jupiter Naptól való közepes távolsága (csillagászati egységben) az a valós szám, amelynek harmadik hatványa 141,61. Ez – számológép segítségével – kb. 5,21 csillagászati egység, tehát a Jupiter kb. 5,21-szor olyan messze van a Naptól, mint a Föld. (Egyébként ez kb. 781,5 millió km.)

A mostani számítás során kerestük azt a valós számot, amelynek harmadik hatványa 141,61 volt. Ezt a műveletet harmadik gyökvonásnak (vagy köbgyökvonásnak) mondhatjuk.

Ez az egyszerű számítás is mutatja, hogy – a négyzetgyök mintájára – érdemes megalkotni a 3., 4., és általában az n-dik gyök fogalmát, melyet $\sqrt[n]{a}$-val jelölünk.

Az n-edik gyök fogalmának megalkotásakor figyelembe kell vennünk, hogy negatív szám páratlan fokú kitevője szintén negatív, így a definíciót ketté kell választanunk a szerint, hogy páros vagy páratlan gyököt akarunk vonni.

Az n-edik gyök

$\sqrt[n]{a}$
- ha n páros: az a nemnegatív valós szám, melynek n-edik hatványa a. ($a \geq 0$, $n \geq 2$)
- ha n páratlan: az a valós szám, melynek n-edik hatványa a. ($n \geq 2$)

Az 1-nél n nagyobb egész számot **gyökkitevőnek** nevezzük. Érdemes felfigyelni arra, hogy a kétfajta definíció lényegében megegyezik, csupán az a különbség, hogy páratlan gyökkitevő esetén nem kell megkövetelnünk, hogy $\sqrt[n]{a}$ nemnegatív. Ebből az is következik, hogy páros gyökkitevő esetén – ugyanúgy, mint négyzetgyök esetében, amikor is $n = 2$ – csak akkor értelmezhető $\sqrt[n]{a}$, ha $a \geq 0$, míg páratlan gyökkitevő esetében ez a megszorítás nem szükséges.

Nézzünk minderre néhány példát!

1. példa Számítsuk ki az alábbi gyökvonások értékét!

a) $\sqrt[3]{27}$; b) $\sqrt[4]{16}$; c) $\sqrt[3]{-8}$; d) $\sqrt[6]{64}$;

e) $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$; f) $\sqrt[5]{-243}$; g) $\sqrt[3]{a^6}$; h) $\sqrt[n]{b^{6n}}$.

Megoldás

a) $\sqrt[3]{27} = 3$, mert $3^3 = 27$;

b) $\sqrt[4]{16} = 2$, mert $2^4 = 16$;

c) $\sqrt[3]{-8} = -2$, mert $(-2)^3 = -8$;

d) $\sqrt[6]{64} = 2$, mert $2^6 = 64$;

e) $\sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2}$, mert $\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$;

f) $\sqrt[5]{-243} = -3$, mert $(-3)^5 = -243$;

g) $\sqrt[3]{a^6} = a^2$, mert $(a^2)^3 = a^6$;

h) $\sqrt[n]{b^{6n}} = b^6$, mert $(b^6)^n = b^{6n}$.



Johannes Kepler (1571–1630) német matematikus, csillagász és optikus



Kepler által készített világtérkép

Köbgyök:
$(\sqrt[3]{a})^3 = a$

n-edik gyök:
$(\sqrt[n]{a})^n = a$
a, ha n páratlan
$a \geq 0$, ha n páros

A négyzetgyök azonosságaival analóg módon az n-edik gyökvonásnak is megvannak az azonosságai. Mint látni fogjuk, ezek hasonlók a négyzetgyök azonosságaihoz.

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$(a, b \geq 0; n \geq 2; n \in \mathbf{N})$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$(a \geq 0; b > 0; n \geq 2; n \in \mathbf{N})$

$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$
$(a \geq 0; k \in \mathbf{Z}; n \geq 2; n \in \mathbf{N})$

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$
$(a \geq 0; n, k \geq 2; n, k \in \mathbf{N})$

Szorzat n-edik gyöke egyenlő a tényezők négyzetgyökének szorzatával.

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $(a, b \geq 0; n \geq 2; n \in \mathbf{N})$.

Tört n-edik gyöke egyenlő a számláló és nevező n-edik gyökének hányadosával.

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(a \geq 0; b > 0; n \geq 2; n \in \mathbf{N})$.

Hatvány n-edik gyöke egyenlő a hatványalap n-edik gyökének megfelelő hatványával.

3. $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$ $(a \geq 0; k \in \mathbf{Z}; n \geq 2; n \in \mathbf{N})$.

Ha egy gyökös kifejezésből kell n-edik gyököt vonnunk, akkor ezt írhatjuk egyetlen gyökjel segítségével, melyben a gyökkitevő az eredeti gyökkitevők szorzata.

4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ $(a \geq 0; n, k \geq 2; n, k \in \mathbf{N})$.

Az 1., 2., 3. azonosság igazolása teljesen hasonló módon történhet, mint ahogyan azt négyzetgyök esetében is tettük.

A 4. azonosság igazolásához emeljük az egyenlőség mindkét oldalát $(n \cdot k)$-adik hatványra.

A bal oldalon

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k.$$

A külső zárójelen belüli kifejezés az n-edik gyök definíciója alapján $\sqrt[k]{a}$-val egyenlő, így azt kaptuk:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k,$$

ami ugyancsak a definíció miatt a-val egyenlő.

Az azonosság jobb oldalán

$$\left(\sqrt[nk]{a}\right)^{nk} = a,$$

szintén a definíció alapján.

Mivel az egyenlőség két oldalának $(n \cdot k)$-adik hatványai egyenlők, így az azonosság valóban igaz.

2. példa Számítsuk ki a $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ tört értékét!

Megoldás

A 2. azonosság szerint

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

3. példa Számítsuk ki az alábbi szorzat értékét!

$\sqrt[4]{10 - \sqrt{19}} \cdot \sqrt[4]{10 + \sqrt{19}}$.

Megoldás

Az 1. azonosság alapján a szorzatot írhatjuk egy gyökjel alatt.

$$\sqrt[4]{10 - \sqrt{19}} \cdot \sqrt[4]{10 + \sqrt{19}} = \sqrt[4]{(10 - \sqrt{19})(10 + \sqrt{19})} = \sqrt[4]{10^2 - (\sqrt{19})^2} =$$
$$= \sqrt[4]{100 - 19} = \sqrt[4]{81} = 3.$$

4. példa Végezzük el az alábbi szorzást!
$\sqrt[10]{a^3} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[5]{a^6}}$ $(a \geq 0)$

Megoldás

A szorzat mindkét tényezőjére alkalmazhatjuk a 4. azonosságot.

$\sqrt[10]{a^3} = \sqrt[20]{a^3}$ és $\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^6}} = \sqrt[20]{a^6}$.

Tehát

$\sqrt[10]{a^3} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[5]{a^6}} = \sqrt[20]{a^3} \cdot \sqrt[20]{a^6} = \sqrt[20]{a^3 \cdot a^6} = \sqrt[20]{a^9}$.

Feladatok

1. K1 Végezzük el az alábbi gyökvonásokat!

a) $\sqrt[3]{64}$; b) $\sqrt[4]{625}$; c) $\sqrt[5]{\frac{1}{-32}}$; d) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$; e) $\sqrt[10]{1024}$; f) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$.

2. K1 Végezzük el az alábbi gyökvonásokat (a feladatokban szereplő paraméterek mindegyike pozitív)!

a) $\sqrt[3]{a^6b^{12}}$; b) $\sqrt[7]{x^{21}y^{42}z^{14}}$; c) $\sqrt[4]{\frac{p^8q^{12}}{r^{20}s^4}}$; d) $\sqrt[5]{\frac{k^{25}m^{20}}{32l^{40}}}$.

3. K1 Végezzük el az alábbi műveleteket (a feladatokban szereplő paraméterek mindegyike pozitív)!

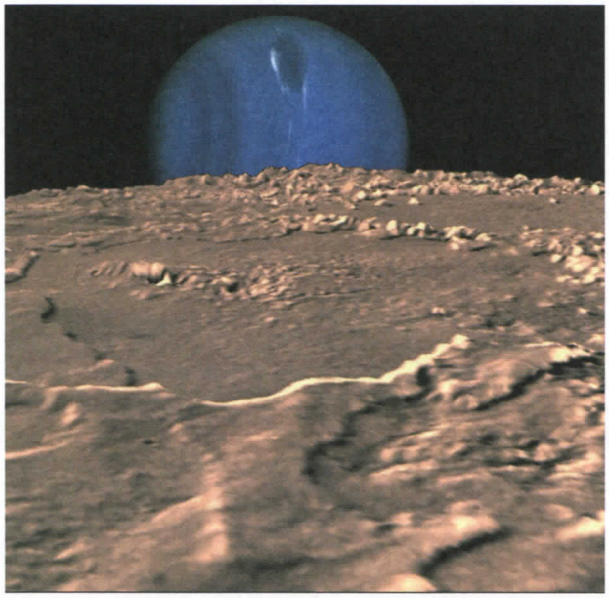
a) $\sqrt[3]{4^4 \cdot 5^{10}} \cdot \sqrt[3]{4^2 \cdot 5^5}$; b) $\sqrt[5]{a^3b^8c^{12}} \cdot \sqrt[5]{a^7b^{12}c^3}$; c) $\sqrt[4]{\frac{x^7}{y^5}} \cdot \sqrt[4]{\frac{y^3}{x}}$.

4. K2 Végezzük el az alábbi műveleteket (a feladatokban szereplő paraméterek mindegyike pozitív)!

a) $\sqrt[6]{\sqrt[6]{2^{14}}} \cdot \sqrt[12]{\sqrt[12]{2^{22}}}$; b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^{10}}}} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt[6]{3^{38}}}}$; c) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\frac{a^{12}}{b^{14}}}} \cdot \sqrt{\sqrt[10]{\frac{a^8}{b^6}}}$.

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 895., 902., 903., 904., 905., 907., 910.

5. E1 A Neptunusz bolygó keringési ideje kb.165,5 év. Kb. hányszor távolabb kering a Neptunusz a Nap körül, mint a Föld?



5. Az n-edik gyökvonás alkalmazásai

Miután megismerkedtünk az n-edik gyökvonás legfontosabb azonosságaival, most ezek további alkalmazását fogjuk megvizsgálni. Az előző leckében észrevehettük, hogy ha egy hatványkifejezésből kellett n-edik gyököt vonnunk, a hatványkitevő minden esetben többszöröse volt a gyökkitevőnek, így a műveletet könnyen elvégezhettük a definíció alapján. De vajon hogyan járhatunk el akkor, ha a hatványkitevő nem többszöröse a gyökkitevőnek?

BEVITEL A GYÖKJEL ALÁ, KIVITEL A GYÖKJEL ALÓL

Bevitel a gyökjel alá

Vizsgáljuk például a $3 \cdot \sqrt[3]{2}$ kifejezést. Célunk az, hogy a gyökjel előtti 3-as szorzót bevigyük a gyökjel alá. Ezért a 3-at írjuk fel harmadik gyökös kifejezésként:

$3 = \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{27}$,

és így azt kapjuk:

$3 \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$.

Azt látjuk tehát, hogy a gyökjel előtti szorzótényezőt bevihetjük az n-edik gyökjel alá, de e szorzótényezőt n-edik hatványra kell emelnünk, s a gyökjel alatt ez szorzótényező lesz.

1. példa Vigyük be a gyökjel alá az előtte levő szorzótényezőket!

a) $2 \cdot \sqrt[4]{3}$; b) $5 \cdot \sqrt[3]{\frac{7}{10}}$; c) $a \cdot \sqrt[6]{a^5}$, ahol $a \geq 0$; d) $\frac{x^2}{y^3} \cdot \sqrt[5]{\frac{x^3}{y^2}}$, ahol $y \neq 0$.

Megoldás

a) $2 \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{48}$;

b) $5 \cdot \sqrt[3]{\frac{7}{10}} = \sqrt[3]{5^3 \cdot \frac{7}{10}} = \sqrt[3]{\frac{175}{2}}$;

c) $a \cdot \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{a^6 \cdot a^5} = \sqrt[6]{a^{11}}$;

d) $\frac{x^2}{y^3} \cdot \sqrt[5]{\frac{x^3}{y^2}} = \sqrt[5]{\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^5 \cdot \frac{x^3}{y^2}} = \sqrt{\frac{x^{10}}{y^{15}} \cdot \frac{x^3}{y^2}} = \sqrt[5]{\frac{x^{13}}{y^{17}}}$.

Kivitel a gyökjel alól

Most azt vizsgáljuk meg, hogyan lehet kihozni egy szorzótényezőt a gyökjel alól.

Vizsgáljuk például a $\sqrt[4]{a^{11}}$ $(a \geq 0)$ kifejezést. A gyökjel alatti hatványt próbáljuk meg úgy szorzattá alakítani, hogy a szorzat valamelyik tényezőjéből már lehessen negyedik gyököt vonni.

$\sqrt[4]{a^{11}} = \sqrt[4]{a^8 \cdot a^3} = \sqrt[4]{a^8} \cdot \sqrt[4]{a^3} = a^2 \cdot \sqrt[4]{a^3}$.

Nézzünk a módszer alkalmazására néhány feladatot!

2. példa Vigyünk ki a gyökjel elé, amit csak lehetséges!

a) $\sqrt[5]{b^{22}}$; b) $\sqrt[6]{a^7 y^{11}}$ $(a \geq 0, y \geq 0)$; c) $\sqrt[3]{\frac{x^4 y^8}{p^5 q^7}}$ $(p \neq 0, q \neq 0)$;

d) $\sqrt[k]{2^{2k+1} \cdot 3^{2k+2}}$ $(k \in \mathbf{Z}$ és $k \geq 2)$.

Megoldás

a) $\sqrt[5]{b^{22}} = \sqrt{b^{20} \cdot b^2} = \sqrt[5]{b^{20}} \cdot \sqrt[5]{b^2} = b^4 \cdot \sqrt[5]{b^2}$;

b) $\sqrt[6]{a^7 y^{11}} = \sqrt[6]{a^6 \cdot a \cdot y^6 \cdot y^5} = \sqrt[6]{a^6 y^6} \cdot \sqrt[6]{a y^5} = ay \cdot \sqrt[6]{a y^5}$;

c) $\sqrt[3]{\frac{x^4 y^8}{p^5 q^7}} = \sqrt[3]{\frac{x^3 \cdot x \cdot y^6 \cdot y^2}{p^3 \cdot p^2 \cdot q^6 \cdot q}} = \sqrt[3]{\frac{x^3 y^6}{p^3 q^6}} \cdot \sqrt[3]{\frac{xy^2}{p^2 q}} = \frac{xy^2}{pq^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{xy^2}{p^2 q}}$;

d) $\sqrt[k]{2^{2k+1} \cdot 3^{2k+2}} = \sqrt[k]{2^{2k} \cdot 2 \cdot 3^{2k} \cdot 3^2} = \sqrt[k]{2^{2k} \cdot 3^{2k}} \cdot \sqrt[k]{2 \cdot 3^2} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot \sqrt[k]{18} = 36 \cdot \sqrt[k]{18}$.

3. példa Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével az alábbi kifejezéseket!

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$; b) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{a^3}$ $(a\geq 0)$; c) $\sqrt[4]{\frac{x^2}{y^3}\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}}$ $(a\geq 0, y>0)$.

Megoldás

Először a belső gyökök előtti szorzótényezőt vigyük be a belső gyökjel alá, majd alkalmazzuk az $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ azonosságot.

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4\cdot 2}}=\sqrt[12]{2^5}=\sqrt[12]{32}$;

b) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{a^3}=\sqrt[5]{\sqrt{a^5\cdot a^3}}=\sqrt[10]{a^8}$;

c) $\sqrt[4]{\frac{x^2}{y^3}\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^3\cdot\frac{x}{y^2}}}=\sqrt[12]{\frac{x^6}{y^9}\cdot\frac{x}{y^2}}=\sqrt[12]{\frac{x^7}{y^{11}}}$.

Az n-edik gyökvonás egyik azonossága szerint $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$. De vajon hogyan tudunk olyan gyökös kifejezéseket összeszorozni, amelyekben a gyökkitevők különbözők?

Tekintsük például az alábbi szorzást:

$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$.

Célszerű mindkét szorzótényezőt úgy alakítani, hogy azok ugyanolyan gyökkitevővel szerepeljenek. Ha az első tényezőből negyedik gyököt vonunk és egyben negyedik hatványra is emeljük, akkor értékén nem változtattunk:

$\sqrt[3]{2}=\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}}\right)^4=\left(\sqrt[12]{2}\right)^4=\sqrt[12]{2^4}$.

A második tényezőt is át tudjuk alakítani úgy, hogy 12. gyök legyen; ehhez harmadik gyököt vonunk belőle és fel is emeljük a harmadik hatványra:

$\sqrt[4]{2}=\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}\right)^3=\sqrt[12]{2^3}$.

Ezzel elértük, hogy a szorzat két tényezője azonos gyökkitevőn szerepel, így már elvégezhetjük a szorzást:

$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2^4}\cdot\sqrt[12]{2^3}=\sqrt[12]{2^7}$.

Érdemes megfigyelni, hogy ha különböző gyökkitevőjű kifejezéseket szorzunk össze, akkor a megfelelő átalakítás után a közös gyökkitevő éppen az eredeti gyökkitevők legkisebb közös többszöröse lesz.

4. példa Végezzük el az alábbi szorzásokat!

a) $\sqrt[3]{5^2}\cdot\sqrt{5^4}$; b) $\sqrt[6]{a^4}\cdot\sqrt[4]{a^6}$; c) $\sqrt[5]{x^3y^2}\cdot\sqrt[3]{x^2y^5}$.

Megoldás

a) $\sqrt[3]{5^2}\cdot\sqrt{5^4}=\left(\sqrt{\sqrt[3]{5^2}}\right)^2\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{5^4}}\right)^3=\sqrt[6]{5^4}\cdot\sqrt[6]{5^{12}}=\sqrt[6]{5^{16}}$;

b) $\sqrt[6]{a^4}\cdot\sqrt[4]{a^6}=\sqrt{\sqrt[6]{(a^4)^2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{(a^6)^3}}=\sqrt[12]{a^8}\cdot\sqrt[12]{a^{18}}=\sqrt[12]{a^{26}}=\sqrt[6]{a^{13}}$;

c) $\sqrt[5]{x^3y^2}\cdot\sqrt[3]{x^2y^5}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{(x^3y^2)^3}}\cdot\sqrt[5]{\sqrt[3]{(x^2y^5)^5}}=\sqrt[15]{x^9y^6}\cdot\sqrt[15]{x^{10}y^{25}}=\sqrt[15]{x^{19}y^{31}}$.

Feladatok

1. K1 Vigyük ki a gyökjel elé a lehetséges szorzótényezőket!

a) $\sqrt[3]{40}$; b) $\sqrt[3]{54}$; c) $\sqrt[4]{a^{19}}$ $(a\geq 0)$.

2. K1 Vigyük be a gyökjel alá a gyökjel előtti szorzótényezőt!

a) $3 \cdot \sqrt[3]{4}$; *b)* $2 \cdot \sqrt[5]{3}$; *c)* $a^2 \cdot \sqrt[4]{a^3}$ $(a \geq 0)$.

3. K1 Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$; *b)* $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$ $(a \geq 0)$; *c)* $\sqrt{a^2 b} \cdot \sqrt[4]{ab^2}$ $(a \geq 0, b \geq 0)$.

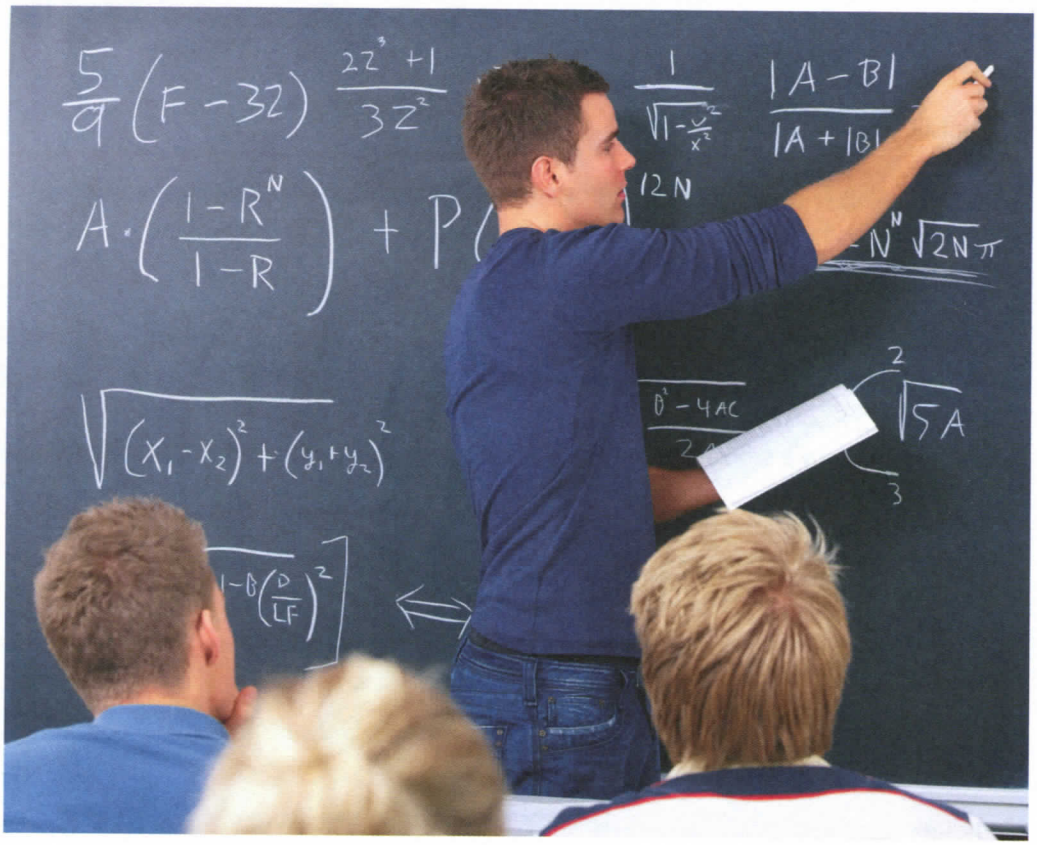
További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 897., 899., 900., 910., 911., 914., 916., 917.

4. K2 Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével a megadott kifejezéseket!

a) $\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{3}}$; *b)* $\sqrt[4]{a \cdot \sqrt[3]{a^3}}$; *c)* $\sqrt[5]{x^2 y \cdot \sqrt[3]{y^2 x}}$.

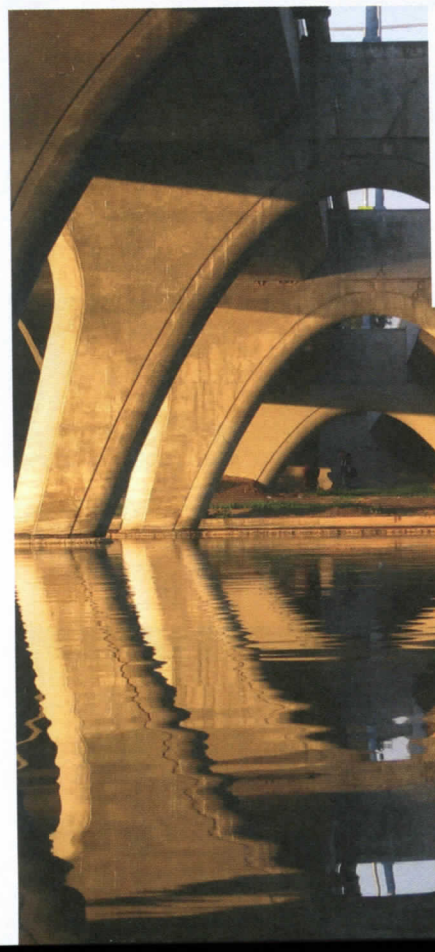
5. E1 Milyen pozitív egész számot írjunk n helyébe, hogy az alábbi egyenlőség igaz legyen, ahol $a \geq 0$?

$\sqrt[4]{a^n \cdot \sqrt[3]{a^5}} = \sqrt[3]{a^5}$.

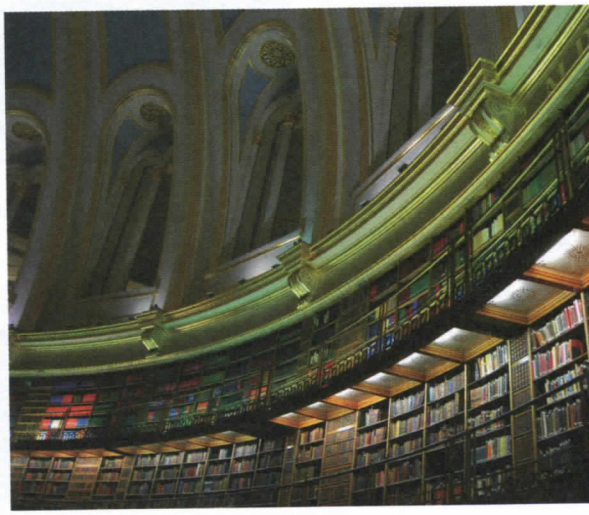


III. Másodfokú függvények, másodfokú egyenletek





Ebben a fejezetben először összefoglaljuk a másodfokú függvényekről eddig tanultakat, majd e függvényekkel kapcsolatos új ismeretekkel gazdagodhatunk. A függvény zérushelyeinek keresése és egyéb problémák vizsgálata közben eljutunk a másodfokú egyenletekhez. Az ilyen egyenletekkel kapcsolatban sok érdekességet, ötletet, fontos tudnivalót ismerhetünk meg. Többek között azt is, hogyan vizsgálták már az ókorban is az ilyen típusú egyenleteket.

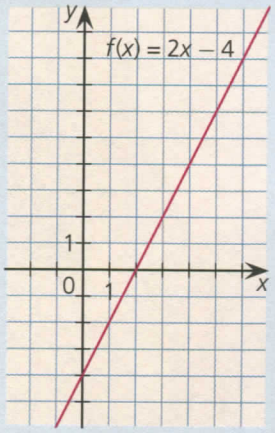


1. Másodfokú függvények

Tavaly megismerkedtünk a valós számok halmazán értelmezett $f: x \mapsto x^2$ [vagy másképpen $f(x) = x^2$] másodfokú függvénnyel és ennek elemi transzformációival.

E mostani leckében röviden átismételjük a korábban tanultakat. Mindenekelőtt nézzünk néhány fontos definíciót a függvényekkel kapcsolatban. Bár a függvények tulajdonságai általában a szemléletünkből fakadnak, mégis érdemes ezeket pontosan megfogalmazni, mert e definíciók segítségével a függvények általános elemzése könnyebbé, áttekinthetőbbé válik. E fogalmak a következők: a függvény **zérushelye**, a függvény **növekedése**, **csökkenése**, a függvény **minimuma**, **maximuma**.

16.



Mit nevezünk a függvény zérushelyének?

Zérushely

Valamely f függvény zérushelyeinek nevezzük az értelmezési tartományának mindazokat az x értékeit, amelyekre $f(x) = 0$.

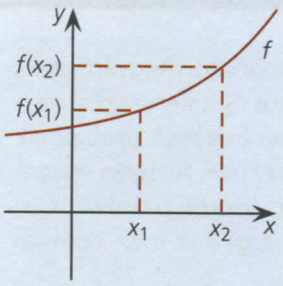
Például: a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 2x - 4$ függvénynek ott van zérushelye, ahol

$f(x) = 2x - 4 = 0$, azaz $x = 2$.

Tehát ennek a függvénynek egy zérushelye van: $x = 2$-ben. *(16. ábra)*

Érdemes megfigyelni, hogy ha az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának valamely x helyére $f(x) = 0$ (vagyis ha x-ben a függvénynek zérushelye van), akkor a függvény grafikus képe áthalad az $(x; 0)$ ponton. Mondhatnánk így is: ahol $f(x)$-nek zérushelye van, a grafikus képe ott metszi az x tengelyt.

17.



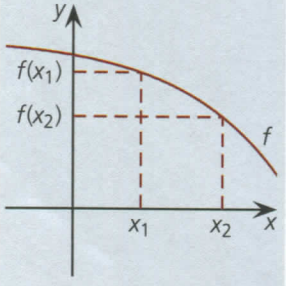
Mikor nevezünk egy függvényt növekedőnek vagy csökkenőnek?

Szigorúan monoton növekedő függvény

Ha valamely függvény az értelmezési tartományán vagy annak valamely intervallumán olyan tulajdonságú, hogy a változó bármely két értékét választva a nagyobb változó értékhez nagyobb függvényérték tartozik, akkor e tartományon a függvényt szigorúan monoton növekedőnek mondjuk.

Az $f(x)$ függvény tehát szigorúan monoton növekedő, ha minden $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$. *(17. ábra)*

18.



Szigorúan monoton csökkenő függvény

Ha valamely függvény az értelmezési tartományán vagy annak valamely intervallumán olyan tulajdonságú, hogy a változó bármely két értékét választva a nagyobb változó értékhez kisebb függvényérték tartozik, akkor itt a függvényt szigorúan monoton csökkenőnek mondjuk.

Az $f(x)$ függvény tehát szigorúan monoton csökkenő, ha minden $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$. *(18. ábra)*

Mikor beszélhetünk a függvény minimumáról vagy maximumáról?

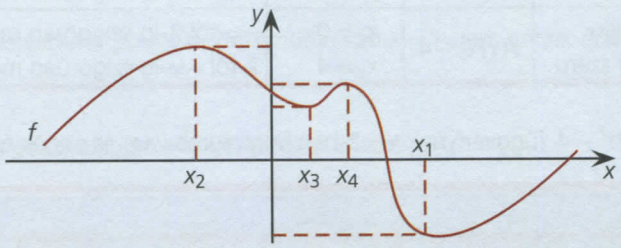
Minimumhely, minimumérték

Egy f függvénynek minimuma van a változó x_1 értékénél, ha az ott felvett $f(x_1)$ függvényértéknél kisebb értéket sehol sem vesz fel a függvény. Ekkor x_1 a függvény minimumhelye, $f(x_1)$ pedig a minimumértéke.

Maximumhely, maximumérték

Egy f függvénynek maximuma van a változó x_2 értékénél, ha az ott felvett $f(x_2)$ függvényértéknél nagyobb értéket sehol sem vesz fel a függvény. Ekkor x_2 a függvény maximumhelye, $f(x_2)$ pedig a maximumértéke.

19.



A *19. ábrán* látható az f függvény grafikonja. Az x_1 az f függvény minimumhelye, a hozzá tartozó $f(x_1)$ a függvény minimumértéke. Az x_2 az f függvény maximumhelye, a hozzá tartozó $f(x_2)$ a függvény maximumértéke. Azt is láthatjuk ezen az ábrán, hogy x_3 bizonyos környezetében a függvénynek minimuma, az x_4 bizonyos környezetében pedig maximuma van. Ezt **helyi minimumnak**, illetve **helyi maximumnak** nevezzük. Érdemes megjegyezni, hogy ha az $f(x)$ függvény az értelmezési tartományának valamely intervallumában állandó (vagyis az intervallum minden x helyén ugyanazt az értéket veszi fel), akkor az intervallum minden pontjában egyszerre minimuma és maximuma van.

Miután megismerkedtünk e fogalmakkal, térjünk rá a másodfokú függvények tárgyalására.

1. példa Ábrázoljuk, majd elemezzük a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = (x-2)^2 - 4$ függvény grafikonját!

Megoldás

Kiindulva a $g(x) = x^2$ alapfüggvényből egy x tengellyel párhuzamos, (+2)-vel való eltolással kapjuk a $h(x) = (x-2)^2$ függvény grafikonját. Ezután az y tengellyel párhuzamos, (–4)-gyel történő eltolás után adódik az $f(x) = (x-2)^2 - 4$ függvény grafikonja.

Az alapfüggvényből több lépésben előállítható függvények ábrázolásához érdemes az egyes lépéseket a megfelelő sorrendben felvázolni:

$g(x) = x^2 \quad \rightarrow \quad h(x) = (x-2)^2 \quad \rightarrow \quad f(x) = (x-2)^2 - 4.$

A függvény zérushelyeinek meghatározásához az $f(x) = 0$, vagyis az

$(x-2)^2 - 4 = 0$

egyenletet kell megoldanunk. Mindkét oldalhoz 4-et hozzáadva

$(x-2)^2 = 4, \quad$ azaz $\quad |x-2| = 2.$

Innen

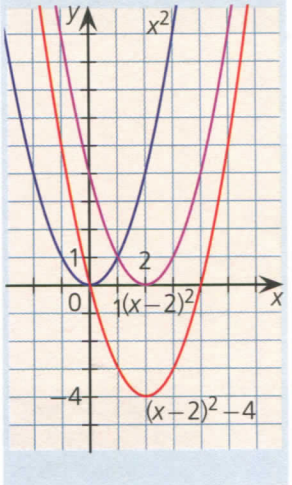
$x - 2 = 2 \quad$ vagy $\quad x - 2 = -2.$

Tehát a zérushelyek: $x_1 = 4, \quad x_2 = 0.$

Az $f(x) = (x-2)^2 - 4$ függvény elemzéséhez érdemes megvizsgálnunk, hogy az alapfüggvényből kiindulva hogyan változnak az egyes függvények főbb jellemzői.

Ezt szemléltettük a következő táblázatban.

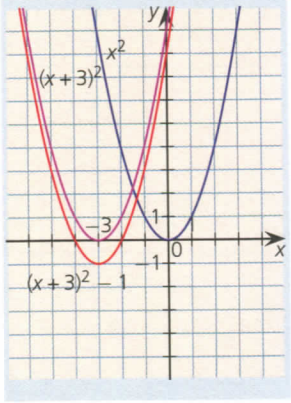
20.



függvény	értelmezési tartománya	érték-készlete	zérushelye	menete
x^2	minden valós szám	$f(x) \geq 0$	$x = 0$	$-\infty$-től 0-ig szigorúan monoton csökkenő; 0-tól $+\infty$-ig szigorúan monoton növekedő.
$(x-2)^2$	minden valós szám	$f(x) \geq 0$	$x = 2$	$-\infty$-től 2-ig szigorúan monoton csökkenő; 2-tól $+\infty$-ig szigorúan monoton növekedő.
$(x-2)^2 - 4$	minden valós szám	$f(x) \geq -4$	$x_1 = 0$ $x_2 = 4$	$-\infty$-től 2-ig szigorúan monoton csökkenő; 2-tól $+\infty$-ig szigorúan monoton növekedő.

Az $f(x) = (x-2)^2 - 4$ függvénynek $x = 2$-ben minimuma van, és ennek értéke -4. *(20. ábra)*

21.a



2. példa Ábrázoljuk az $x \in [-5; 0]$ valós számokon értelmezett $f(x) = (x+3)^2 - 1$ függvény grafikonját, és oldjuk meg az $f(x) \geq 0$ egyenlőtlenséget!

Megoldás

Az előző feladatban említett vázlatos lépések most így alakulnak:

$x^2 \quad \rightarrow \quad (x+3)^2 \quad \rightarrow \quad (x+3)^2 - 1.$

Ennek alapján – figyelembe véve a megadott értelmezési tartományt – már könnyen ábrázolhatjuk a megadott függvény grafikonját; ezt látjuk a *21.a* és a *21.b ábrán*.

A függvény zérushelyeit az

$(x+3)^2 - 1 = 0$

egyenlet alapján kaphatjuk meg. Ezt az egyenletet most nem úgy oldjuk meg mint az előző feladat esetében – bár tehetnénk ezt is –, hanem felhasználjuk a jól ismert

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ azonosságot.

$(x+3)^2 - 1 = (x+3)^2 - 1^2 = (x+3+1)(x+3-1) = (x+4)(x+2) = 0.$

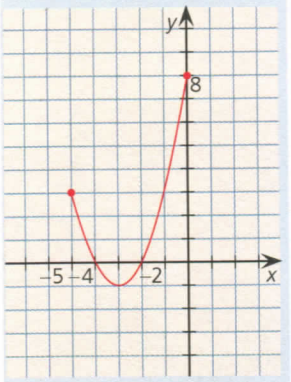
Mivel egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, így azt kapjuk, hogy

$x + 4 = 0 \quad$ vagy $\quad x + 2 = 0.$

Tehát a függvény zérushelyei: $x_1 = -4$, $x_2 = -2$. *(21.b ábra)*

Most már könnyen leolvashatjuk a függvény grafikonjáról a megadott $f(x) \geq 0$ egyenlőtlenségnek megfelelő valós számokat: $-5 \leq x \leq -4$ vagy $-2 \leq x \leq 0$.

21.b



3. példa Ábrázoljuk az $f(x) = -2(x-1)^2 + 4$ függvény grafikonját! Határozzuk meg a zérushelyeit!

Megoldás

Emlékezzünk arra, hogy a $2x^2$ függvény bármely x helyhez tartozó értéke kétszer akkora, mint az x^2 függvény megfelelő értéke. Ez azt jelenti, hogy a $2x^2$ függvény grafikonját az x^2 függvény grafikonjából az y értékek kétszerezésével kapjuk meg. Továbbá: a $-x^2$ függvény bármely x helyhez tartozó értéke az x^2 függvény megfelelő értékének (-1)-szerese, ami azt jelenti, hogy a $-x^2$ függvény bármely pontját az x^2 függvény megfelelő pontjának az x tengelyre vonatkozó tükrözésével kapjuk meg. Ezek szerint az ábrázolandó $f(x) = -2(x-1)^2 + 4$ függvényt az alábbi módon „építhetjük" fel:

$g(x) = x^2 \quad \rightarrow \quad g_1(x) = (x-1)^2 \quad \rightarrow \quad g_2(x) = 2(x-1)^2 \quad \rightarrow \quad g_3(x) = -2(x-1)^2 \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad f(x) = -2(x-1)^2 + 4.$

A függvény zérushelyének meghatározásához oldjuk meg a

$-2(x-1)^2 + 4 = 0$

egyenletet. Mindkét oldalt 2-vel osztva és megfelelően rendezve az egyenletet azt kapjuk:

$(x-1)^2 = 2$, azaz $|x-1| = \sqrt{2}$.

Innen

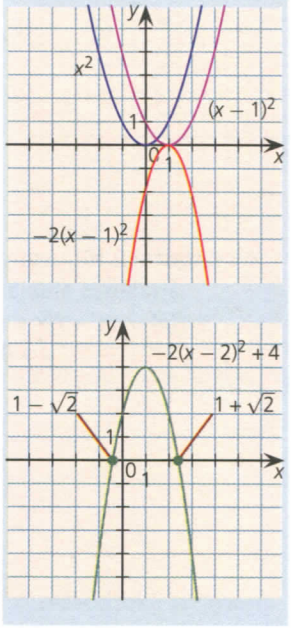
$x-1 = \sqrt{2}$ vagy $x-1 = -\sqrt{2}$.

Tehát a függvény zérushelyei: $x_1 = 1+\sqrt{2}$, $x_2 = 1-\sqrt{2}$.

Ezek után már könnyen szemléltethetjük az $f(x) = -2(x-1)^2+4$ függvény grafikonját *(22. ábra)*:

A függvény értékkészlete: $f(x) \le 4$, maximuma van $x = 1$-ben, ennek értéke 4.

22.



Az előbbi három példa alapján a következőket állapíthatjuk meg:

Az $f(x) = a(x-u)^2+v$ $(a \neq 0,\ u, v \in \mathbf{R})$ másodfokú függvény grafikus képe mindig parabola. Ha a másodfokú tag a együtthatójára $a > 0$, akkor felfelé nyíló, ha $a < 0$, lefelé nyíló parabolát kapunk, továbbá a abszolút értéke határozza meg a parabola „soványságát", illetve „kövérségét". A parabola T tengelypontja a $T(u; v)$ koordinátájú pontban van, tehát a függvény szélsőértéke $x = u$-ban van, ennek értéke pedig $f(x) = v$. Az, hogy ez a szélsőérték maximum vagy minimum, attól függ, hogy a másodfokú tag a együtthatójára $a < 0$ vagy $a > 0$.

Az $f(x) = a(x-u)^2+v$ függvény grafikonját úgy kaphatjuk meg, hogy a $g(x) = x^2$ „normál parabolát" a-szorosára nyújtjuk (azaz, a $g(x) = x^2$ függvény minden pontjának y koordinátáját a-szorosára változtatjuk), majd tengelypontját eltoljuk a $T(u; v)$ pontba.

Feladatok

1. K1 Ábrázoljuk és elemezzük az alábbi, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

a) $f(x) = (x+6)^2+2$;

b) $f(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$;

c) $f(x) = -(x+3)^2+2$;

d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2+3$;

e) $f(x) = (x+0{,}5)^2 - 0{,}25$.

2. K1 Az $f(x) = (x-u)^2+v$ függvény grafikonjának tengelypontja $T(3; -4)$. Oldjuk meg az $f(x) \ge 0$ egyenlőtlenséget!

3. K1 Az $f(x) = (x-u)^2+v$ függvény értékkészlete: $f(x) \ge 5$. A függvény $x \le -4$ esetén csökken, $x > -4$ esetén növekszik. Határozzuk meg az u és v értékét!

4. K2 Ábrázoljuk és elemezzük az alábbi, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

a) $f(x) = |x^2-1|$; *b)* $f(x) = |(x-1)^2-4|$; *c)* $f(x) = \left|\frac{1}{2}(x+2)^2 - 4{,}5\right|$.

5. E1 Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = |(x-3)^2-4|$ függvény, és legyen k egy valós szám. Hány megoldása van az $f(x) = k$ egyenletnek?

6. E1 Egy másodfokú függvény grafikonja illeszkedik az $A(0; 3)$, $B(1; 2)$, $C(3; 6)$ pontokra. Melyik ez a másodfokú függvény?

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 656; 657.

2. Másodfokú függvények általános alakja, ábrázolása

A másodfokú függvény általános alakja: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Az előző leckében – átismételve a múlt évben tanultakat – az $f(x) = a(x-u)^2 + v$ másodfokú függvény ábrázolását, jellemzését tekintettük át. Amennyiben elvégezzük a hozzárendelési szabályban leírt négyzetre emelést, akkor az $f(x) = ax^2 - 2aux + au^2 + v$ alakra jutunk. Ha most az elsőfokú tag együtthatóját, illetve a konstanst egyetlen betűvel jelöljük, vagyis bevezetjük a $b = -2au$ és $c = au^2 + v$ jelölést, akkor megkapjuk a másodfokú függvény általános alakját: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ebben a leckében a másodfokú függvényeknek ezzel az általános alakjával foglalkozunk. Azt fogjuk megnézni, hogy az általánosan megadott másodfokú függvényt hogyan tudjuk olyan alakra hozni, amelyet már könnyen ábrázolhatunk. Emellett megismerkedünk két érdekes függvénycsaláddal: a páros, illetve a páratlan függvényekkel.

1. példa Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 8x + 15$ függvény. Ábrázoljuk a függvényt!

Megoldás

Az a célunk, hogy a megadott függvényt $f(x) = (x-u)^2 + v$ alakra hozzuk.

Vizsgáljuk meg a másodfokú kifejezés első két tagját: $(x^2 - 8x)$-et. Ez emlékeztethet bennünket egy kéttagú különbség négyzetére: $(x-u)^2$-re. Az első tag négyzete x^2, a kétszeres szorzat

$-2ux = -8x$,

vagyis $u = 4$. Tehát az $x^2 - 8x$ kéttagú összeg az $(x-4)^2$-nel van kapcsolatban. Mivel $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$, így az $(x-4)^2$ kifejezés 16-tal több, mint az $x^2 - 8x$. Azt kaptuk tehát, hogy

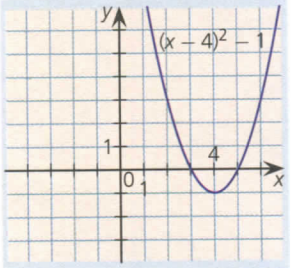
$x^2 - 8x = (x-4)^2 - 16$,

vagyis

$f(x) = x^2 - 8x + 15 = (x-4)^2 - 16 + 15 = (x-4)^2 - 1$.

Most már tudjuk a transzformációk segítségével ábrázolni a megadott függvényt. *(23. ábra)*

23.



Teljes négyzetté kiegészítés

A megoldás során elvégzett átalakítást **teljes négyzetté kiegészítésnek** nevezzük.

Példánkban aránylag könnyű dolgunk volt, mert az $f(x)$ függvényben a másodfokú tag együtthatója $a = 1$ volt. De mi a helyzet akkor, ha ez az együttható nem 1?

Ezt vizsgáljuk meg a 2. példában.

2. példa Ábrázoljuk az $x \in [-1; 2]$ valós számok halmazán az $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ függvény grafikonját, határozzuk meg a függvény zérushelyeit és értékkészletét!

Megoldás

Ahhoz, hogy el tudjuk végezni a teljes négyzetté kiegészítést, először emeljük ki a másodfokú kifejezésből a másodfokú tag együtthatóját, a 2-t.

$f(x) = 2(x^2 - 2x - 3)$.

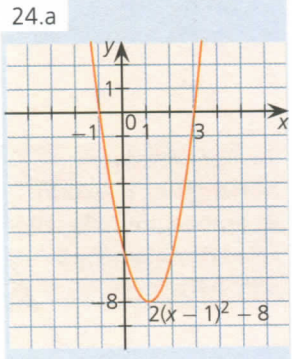
Most a zárójelben már olyan másodfokú kifejezésünk van, amelyben a másodfokú tag együtthatója 1, így a zárójelen belül elvégezhetjük a teljes négyzetté kiegészítést:

$f(x) = 2[(x-1)^2 - 1 - 3] = 2[(x-1)^2 - 4]$.

Végül bontsuk fel a külső (szögletes) zárójelet:

$f(x) = 2(x-1)^2 - 8$.

24.a



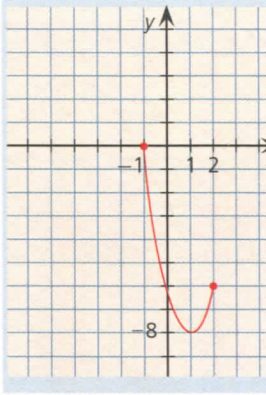
Sikerült tehát a függvényt ez esetben is olyan alakra hozni, amelyet már tudunk ábrázolni a transzformációk segítségével. *(24.a ábra)*

Az ábrázoláshoz a következő lépéseket kell megtennünk:

$x^2 \to (x-1)^2 \to 2(x-1)^2 \to 2(x-1)^2 - 8$.

Figyelembe véve a függvény értelmezési tartományát, a függvény grafikonját a *24.b* ábrán láthatjuk.

24.b



A függvény zérushelyeit a $2(x-1)^2 - 8 = 0$ egyenlet megoldásai adják.

$2(x-1)^2 = 8$,

$(x-1)^2 = 4$.

$|x-1| = 2 \lessgtr \begin{matrix} x-1 = 2 \to x_1 = 3, \\ x-1 = -2 \to x_2 = -1. \end{matrix}$

Mivel az $x = 3$ nem eleme az értelmezési tartománynak, így a függvény egyedüli zérushelye $x = -1$.

A függvény legnagyobb értéke: 0, ezt $x = -1$-ben veszi fel; a legkisebb értéke –8, amit az $x = 1$ helyen vesz fel. Ezek szerint a függvény értékkészlete: $-8 \le f(x) \le 0$.

Tapasztalatainkat összefoglalva a következőket állapíthatjuk meg.

A másodfokú függvény általános alakjának átalakítása

A másodfokú függvény általános alakja:
$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$
Ezt $f(x) = a(x-u)^2 + v$ alakra hozhatjuk a következő módon: először kiemeljük a másodfokú kifejezésből a másodfokú tag együtthatóját, a-t, majd a zárójelen belül elvégezzük a teljes négyzetté kiegészítést. Ekkor az eredeti függvény
$f(x) = a(x-u)^2 + v$
alakjához jutunk, melyet már tudunk ábrázolni a transzformációk segítségével.

A függvény zérushelyét az $f(x) = 0$ egyenlet megoldása adja. A függvénynek $x = u$-ban van szélsőértéke; hogy ez minimum vagy maximum, az attól függ, hogy a parabola felfelé vagy lefelé nyitott, vagyis hogy $a > 0$ vagy $a < 0$.

Már korábban is láttunk példát arra, hogy egy másodfokú függvénynek nincs zérushelye, 1 zérushelye vagy 2 zérushelye van. Ez teljesen összhangban van azzal a geometriai ténnyel, hogy egy parabolának és egy egyenesnek (az x tengelynek) 0, 1 vagy 2 közös pontja lehet.

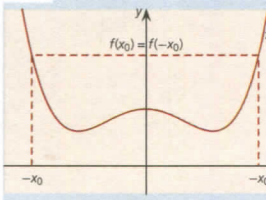
Mint láttuk, az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény grafikonjának elkészítésekor minden esetben az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjából indultunk ki. E függvénynek egy érdekes tulajdonsága, hogy értelmezési tartományának bármely x elemét véve a hozzá tartozó függvényérték megegyezik a $(-x)$-hez tartozó függvényértékkel. Az ilyen tulajdonsággal rendelkező függvényeket **páros függvénynek** nevezzük.

Páros függvény

Páros függvény

Az $f(x)$ függvényt páros függvénynek mondjuk, ha az értelmezési tartományának bármely x elemét véve a $(-x)$ is eleme az értelmezési tartománynak, és ezen elemekre
$f(x) = f(-x)$. *(25. ábra)*

25.

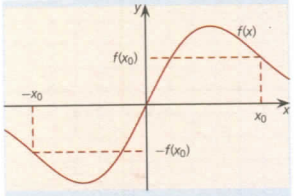


E mostani definícióból egyenesen következik, hogy ha az $f(x)$ függvény páros, akkor grafikus képe tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre. Az $f(x) = x^2$ függvény mellett páros függvény a tavaly tanult $f(x) = |x|$ függvény is, hiszen bármely x_0 esetén $|x_0| = |-x_0|$.

Gyakran találkozhatunk olyan függvényekkel, amelyek értelmezési tartományának bármely x elemét véve a hozzá tartozó függvényérték egyenlő a $(-x)$ helyhez tartozó függvényérték (-1)-szeresével. Az ilyen tulajdonságú függvényeket **páratlan függvénynek** nevezzük.

Páratlan függvény

26.a



Páratlan függvény

Az $f(x)$ függvényt páratlan függvénynek mondjuk, ha az értelmezési tartományának bármely x elemét véve a $(-x)$ is eleme az értelmezési tartománynak, és ezen elemekre $f(x) = -f(-x)$. *(26.a ábra)*

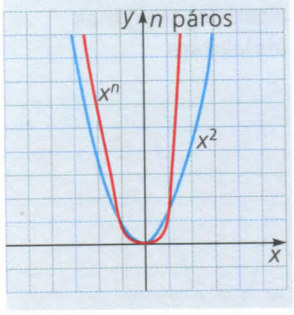
A definíciónak közvetlen következménye, hogy a páratlan függvények grafikus képe középpontosan szimmetrikus az origóra.

Későbbi tanulmányaink során több páros, illetve páratlan függvénnyel fogunk még találkozni. Igen hasznos lesz számunkra, ha egy függvényről e tulajdonságokat meg tudjuk állapítani, hiszen például ha páros függvényről van szó, akkor elegendő grafikonját az értelmezési tartománynak csak $x \geq 0$ értékeire elkészítenünk, hiszen azt az y tengelyre vonatkozó tükörképével kiegészítve megkapjuk a teljes függvény grafikonját.

Jellegzetes példa a páros és páratlan függvényekre a határfüggvények „családja".

Hatványfüggvények

26.b

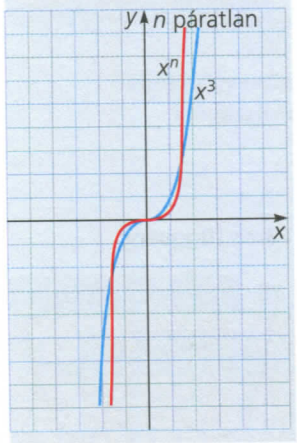


Hatványfüggvények

A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^n$ ($n > 1$ pozitív egész) függvényt hatványfüggvénynek nevezzük. *(26.b–c ábra)*

Ha n páros, akkor értelmezési tartománya minden valós szám, értékkészlete a nem negatív valós számok halmaza. Ha n páratlan, akkor értelmezési tartománya és értékkészlete is minden valós szám. A grafikus képekből világos, hogy minden hatványfüggvény páros vagy páratlan, attól függően, hogy n páros vagy páratlan.

26.c



3. példa Határozzuk meg az összes olyan függvényt, amelynek értelmezési tartománya minden valós szám, továbbá páros is és páratlan is!

Megoldás

Ha az $f(x)$ páros, akkor minden x-re $f(x) = f(-x)$. Ha $f(x)$ páratlan, akkor minden x-re $f(x) = -f(-x)$. Adjuk össze e két egyenlőséget:

$2f(x) = f(-x) - f(-x) = 0$, ahonnan $f(x) = 0$.

Azt kaptuk, hogy egyetlen olyan függvény van, amely egyszerre páros is és páratlan is, az $f(x) = 0$, amelynek grafikus képe az x tengely.

Feladatok

1. K1 Alakítsuk teljes négyzetté az alábbi másodfokú kifejezéseket!

a) $x^2 - 8x + 12$; b) $x^2 + 10x + 16$; c) $x^2 + 3x + 2$;

d) $-x^2 - 6x + 11$; e) $3x^2 - 12x + 7$; f) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 5$.

2. K1-K2 Ábrázoljuk az alábbi, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$; b) $f(x) = x^2 + 4x + 7$; c) $f(x) = -x^2 + 8x - 9$;

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$; e) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$; f) $f(x) = |x^2 - 3|x||$.

3. K1 Ábrázoljuk a megadott függvényeket a megadott számhalmazon és állapítsuk meg a függvények értékkészletét!

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in (1; 4]$; b) $f(x) = x^2 - 1$, $1 \leq |x| \leq 2$.

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 659., 661., 662., 666., 669., 670., 671.

4. K1 Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 + 4x + c$ függvény. Határozzuk meg a c értékét úgy, hogy a függvény értékkészlete $f(x) \geq -2$ legyen!

5. K2 Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 + bx + 4$ függvény. A függvény minimuma $x = -2$-ben van. Adjuk meg a függvény értékkészletét!

6. E1 Az alábbi függvényekről tudjuk, hogy minden x-hez pozitív számot rendelnek. Határozzuk meg a függvények képletében szereplő c paraméter értékét!

a) $f(x) = x^2 + 6x + c$; *b)* $f(x) = 2x^2 - 10x + c$; *c)* $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + c$.

7. E1 Az $f(x) = x^2 + 2(c+1)x + 5c^2 + 10c + 5$ $(c > 0)$ függvény értékkészlete $f(x) \geq 9$. Hol van a függvény minimuma?

3. Szélsőérték-problémák megoldása másodfokú függvények segítségével (Emelt szint)

Az előző leckében megismertük a másodfokú függvény általános alakját. Megismerkedtünk a teljes négyzetté kiegészítés módszerével, mely segít bennünket bármely másodfokú függvény ábrázolásában. Mostani leckénkben a tanultakat fogjuk alkalmazni egyszerűbb szélsőérték-problémák vizsgálatához.

1. példa Egy 18 cm × 10 cm-es téglalap alakú fémlemezből kis dobozkát készítünk. A 18 cm-es oldallal párhuzamosan a lemez két szélén ugyanakkora szélességű sávot kijelölünk a lemezen, majd ezeket a sávokat felhajtjuk úgy, hogy hajtás után merőlegesek legyenek a megmaradó téglalapra (lásd *27. ábra*). Ezután a kapott – kétoldalt nyitott – doboz nyitott részeit lefedjük. Mekkora legyen a felhajtott sávok x szélessége, hogy a lehető legnagyobb térfogatú dobozt kapjuk?

Megoldás

Számítsuk ki a doboz V térfogatát az x függvényében, azaz határozzuk meg a $V(x)$ függvényt, ahol természetesen – a feladat jellegéből adódóan – $0 \leq x \leq 5$.

A doboz egy téglatest; egyik alaplapja olyan téglalap, melynek oldalai 18 és $10 - 2x$, a magassága pedig x. Ezek szerint a téglatest $V(x)$ térfogata:

$V(x) = 18(10 - 2x)x = -36x^2 + 180x$.

A kapott $V(x)$ függvényt vizsgáljuk a [0; 5] intervallumon. A függvény képe egy lefelé nyíló parabola. *(28. ábra)* Feladatunk: meghatározni e függvény maximumhelyét a megadott intervallumban.

Vigyázzunk! Az $f(x) = -36x^2 + 180x$ függvény értelmezési tartománya minden valós szám. A $V(x)$ függvény abban különbözik az $f(x)$ függvénytől, hogy – a feladat geometriai tartalma miatt – értelmezési tartománya leszűkül a valós számok halmazáról a [0; 5] intervallumban levő valós számok halmazára.

Végezzük el a már jól ismert átalakítást:

$-36x^2 + 180x = -36[x^2 - 5x] = -36[(x - 2{,}5)^2 - 6{,}25] = -36(x - 2{,}5)^2 + 225$.

Ezek szerint a parabola T tengelypontjának a koordinátái $T(2{,}5;\ 225)$, vagyis a függvény az $x = 2{,}5$-ben veszi fel maximumértékét, és a maximumérték 225.

A doboz térfogata tehát akkor lesz a legnagyobb, ha a felhajtott sáv szélessége $x = 2{,}5$ cm, és ekkor a legnagyobb térfogat 225 cm³.

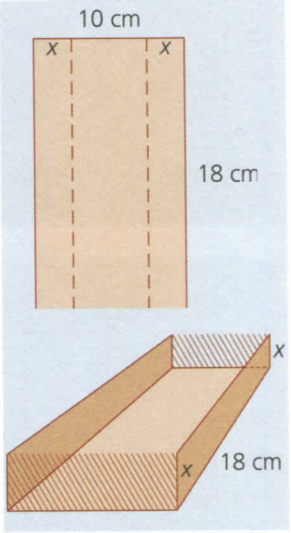
2. példa Egy téglalap oldalai 12 cm és 24 cm. A téglalap csúcsaitól azonos körüljárási irányban minden oldalra felmérünk ugyanolyan hosszúságú szakaszokat, majd ezek végpontjait összekötjük *(29. ábra)*. Mekkora legyen e szakaszok hossza, hogy a téglalap belsejében keletkező négyszög területe a lehető legkisebb legyen?

Megoldás

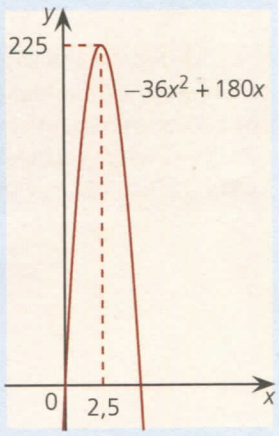
A téglalap belsejében keletkezett négyszög nyilván paralelogramma, hiszen szemközti oldalai párhuzamosak. Ennek területét úgy fogjuk meghatározni, hogy a téglalap területéből levonjuk a négy csúcsnál keletkezett derékszögű háromszögek területének összegét. A szemközti csúcsoknál levő háromszögek egybevágók, így a négy db háromszög területének összege

$$2 \cdot \frac{x(12 - x)}{2} + 2 \cdot \frac{x(24 - x)}{2} = 36x - 2x^2.$$

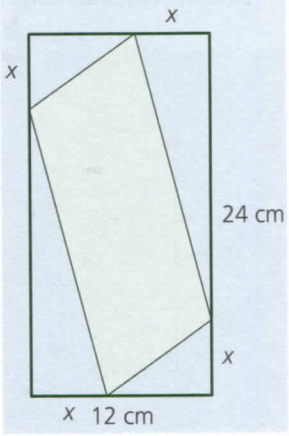
27.



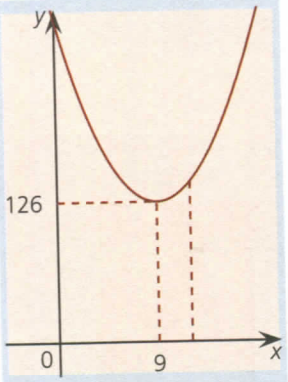
28.



29.



30.



Ezek szerint a paralelogramma $T(x)$ területe az x függvényében:

$T(x) = 12 \cdot 24 - (36x - 2x^2) = 2x^2 - 36x + 288$,

ahol x értéke pozitív, de 12-nél kisebb: $0 < x < 12$. A kapott függvény egy másodfokú függvény, melynek grafikus képe egy felfelé nyíló parabola *(30. ábra)*. Végezzük el a szükséges átalakítást!

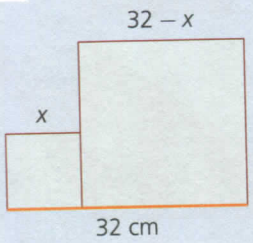
$T(x) = 2x^2 - 36x + 288 = 2[x^2 - 18x + 144] = 2[(x-9)^2 - 81 + 144] = 2[(x-9)^2 + 63] = 2(x-9)^2 + 126$.

Tehát a parabola T tengelypontjának a koordinátái $T(9; 126)$. Ez azt jelenti, hogy a parabola minimuma $x = 9$-ben van, és a minimum értéke: 126.

A következőre jutottunk: a téglalap belsejében keletkező paralelogramma területe akkor a legkisebb, ha $x = 9$ cm, és ez a legkisebb terület 126 cm^2.

3. példa Egy 32 cm hosszúságú szakaszt két részre osztottunk, majd mindkét szakaszra egy-egy négyzetet emeltünk *(31. ábra)*. Mekkorák legyenek a szakaszok, hogy a két négyzet területének összege a lehető legkisebb legyen?

31.



Megoldás

Írjuk fel a négyzetek területeinek összegét x függvényében.

$T(x) = x^2 + (32 - x)^2 = 2x^2 - 64x + 1024$,

ahol $0 < x < 32$. Végezzük el ismét a megfelelő átalakításokat!

$T(x) = 2[x^2 - 32x + 512] = 2[(x-16)^2 - 16^2 + 512] = 2[(x-16)^2 + 256] = 2(x-16)^2 + 512$.

A függvény grafikus képe egy felfelé nyíló parabola; T tengelypontja a $T(16; 512)$ pont. Tehát a függvény minimuma $x = 16$-ban van, a minimum értéke pedig 512. Ezek szerint a két négyzet területének összege akkor a legkisebb, ha a két négyzet egybevágó, és oldalaik 16 cm hosszúak.

Foglaljuk össze a most vizsgált három példában szerzett tapasztalatainkat!

Először is megállapíthatjuk, hogy sok esetben a vizsgált szélsőérték-problémát leíró függvénynek az értelmezési tartománya a valós számok halmaza, de a probléma jellegéből adódóan nekünk a valós számok halmazának csak egy részhalmazán értelmezhető a feladat. Azt látjuk tehát, hogy az a matematikai modell (pl. függvény), mely elvezet bennünket a probléma megoldásához, sok esetben egy sokkal bővebb halmazon értelmezhető, mint maga a konkrét feladat. Ilyenkor nekünk kell megadnunk azt a számhalmazt (a függvény értelmezési tartományát), melyen az általunk megalkotott függvényt értelmezzük.

Ha a vizsgált szélsőérték-probléma másodfokú függvényre vezet, akkor a szélsőértékhelyet könnyen megtalálhatjuk a megfelelő algebrai átalakítás segítségével. Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$, és végezzük el a teljes négyzetté kiegészítést!

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Ezek szerint a parabola tengelypontjának első koordinátája $-\frac{b}{2a}$.

Másodfokú függvény szélsőértékének helye: $x = -\frac{b}{2a}$

Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény szélsőértékét az $x = -\frac{b}{2a}$ helyen veszi fel. Ez a szélsőérték maximum vagy minimum attól függően, hogy $a < 0$ vagy $a > 0$.

Érdemes azt is megfigyelnünk, hogy – a parabola tengelyes szimmetriájából adódóan – ha a másodfokú függvénynek vannak zérushelyei, akkor a szélsőértékhely a parabolának az x tengellyel való metszéspontjait összekötő szakasznak a felezőpontja. Másképpen ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény szélsőértékét a zérushelyek számtani közepénél veszi fel, feltéve persze, hogy vannak zérushelyek.

Feladatok

1. E1 Két szám összege 26. Hogyan válasszuk meg ezt a két számot, hogy szorzatuk a lehető legnagyobb legyen?

2. E1 Az $f(x) = -x^2 + 9$ függvény görbéje és az x tengely által közbezárt tartományba olyan téglalapokat írunk, amelyek két csúcsa az x tengelyre, egy-egy csúcsa pedig a függvény görbéjére illeszkedik. E téglalapok közül melyiknek a legnagyobb a kerülete?



3. E1 Egy meghibásodott katonai műhold mozgását egy órán keresztül készültek figyelni a szakemberek. A műhold Földtől való távolságát a megfigyelés kezdetétől az alábbi $f(x)$ függvény írja le (az egység az x tengelyen 6 perc, az y tengelyen 1500 méter):

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 10, & \text{ha } x \le 3 \\ -x^2 + 8x - 8, & \text{ha } x > 3 \end{cases}.$$

a) Milyen magasan volt a műhold a megfigyelés kezdetekor?

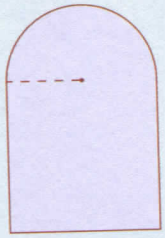
b) Egy radarállomáson minden olyan tárgyat észlelni tudnak, amely a földtől legfeljebb 10,5 km magasan van. Mikor észlelte a radarállomás a megfigyelés idejében a műholdat?

4. E1 Ábrázoljuk az alábbi f függvényt, melynek értelmezési tartománya az $x \ge 0$ valós számok halmaza!

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 5, & \text{ha } 0 \le x \le 2 \\ 5, & \text{ha } 2 < x \le 8 \\ x - 3, & \text{ha } 8 < x \end{cases}.$$

5. E1 A *32. ábrán* egy gótikus ablakot látunk. Ez egy téglalap, melynek egyik oldalához illesztünk egy félkört. Az ablak kerülete 6 m. Hogyan méretezzék az ablakot, hogy az a lehető legtöbb fényt beengedje (azaz a lehető legnagyobb legyen a területe)?

32.



6. E1 Legyen az $f(x) = x^2 + 4x + 6$ függvény értelmezési tartománya a nempozitív valós számok halmaza. Legyen M a függvénygörbe és az y tengely metszéspontja. Tükrözzük az $f(x)$ függvény grafikonját az M pontra, és adjuk meg azt a függvényt, amelynek grafikus képe a tükörképként adódó grafikon!

7. E1 Egy labdát $h = 1{,}5$ m magasságból függőlegesen fölfelé hajítunk $v = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel. Milyen magasra repül a labda? (A levegő közegellenállásától eltekintünk.)

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 821., 1270., 1271., 1275.

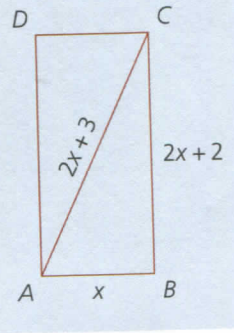
4. Másodfokú egyenletre vezető feladatok

Már az előző leckékben is találkoztunk olyan problémákkal, amelyek másodfokú egyenlet megoldására vezettek bennünket. Ilyen volt például, amikor kerestük a vizsgált másodfokú függvények zérushelyeit.

Nézzünk most újabb kérdéseket, melyek vizsgálata során ugyancsak másodfokú egyenlethez jutunk.

1. példa Egy téglalap hosszabbik oldala a rövidebb oldal kétszeresénél 2 cm-rel nagyobb. A téglalap átlója 1 cm-rel hosszabb a hosszabbik oldalnál. Mekkora e téglalap kerülete?

33.



Megoldás

Mindenekelőtt készítsünk egy ábrát *(33. ábra)*. Ha a téglalap rövidebb oldalát x-szel jelöljük, akkor a feltételek szerint a hosszabbik oldala $2x + 2$, átlója pedig $2x + 3$.

Írjuk fel Pitagorasz tételét az ABC derékszögű háromszögre!

$x^2 + (2x + 2)^2 = (2x + 3)^2$.

A négyzetre emelések, majd a megfelelő összevonások után az alábbi alakot kapjuk:

$x^2 + 4x^2 + 8x + 4 = 4x^2 + 12x + 9$,

$x^2 - 4x - 5 = 0$.

Látjuk tehát, hogy olyan egyenlethez jutottunk, amelyben az x ismeretlen már a második hatványon is szerepel. Most próbáljuk meg a bal oldali első két tagot – a függvényeknél már használt módszert alkalmazva – teljes négyzetté alakítani.

$x^2 - 4x - 5 = (x-2)^2 - 4 - 5 = (x-2)^2 - 9 = 0$.

Innen

$(x-2)^2 = 9$, azaz $|x-2| = 3$.

Tehát

$x - 2 = 3$ vagy $x - 2 = -3$.

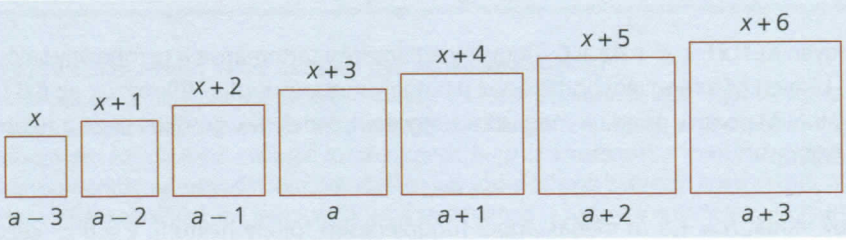
Ezzel a megoldandó másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. Az eredeti feladat szempontjából a negatív megoldás nyilván érdektelen, így a téglalap rövidebb oldala 5 cm. Ekkor a hosszabbik oldal 12 cm, az átló pedig 13 cm. A téglalap keresett K kerülete:

$K = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 12 = 34$ cm.

2. példa Van 7 db négyzetünk. Ezek oldalai cm-ben mérve egymást követő pozitív egész számok. Tudjuk, hogy a 4 legkisebb négyzet területének összege egyenlő a három legnagyobb területének összegével. Mekkora e négyzetek kerületeinek összege?

Megoldás

34.



Kétféleképpen is eljárhatunk.

Ha x-szel jelöljük a legkisebb négyzet oldalát, akkor az alábbi egyenletet írhatjuk fel *(34. ábra)*:

$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 = (x+4)^2 + (x+5)^2 + (x+6)^2$.

Végezzük el a négyzetre emeléseket és a lehetséges összevonásokat:

$x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 = x^2 + 8x + 16 + x^2 + 10x + 25 + x^2 + 12x + 36$,

azaz

$x^2 - 18x - 63 = 0$.

Az első két tagot teljes négyzetté kiegészítve:

$(x-9)^2 - 81 - 63 = (x-9)^2 - 144 = 0$.

A kapott egyenletet most más módszerrel, szorzattá alakítással oldjuk meg. Mivel $144 = 12^2$, ezért az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható a jól ismert $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ azonosság alapján.

$(x-9)^2 - 12^2 = (x-9-12)(x-9+12) = (x-21)(x+3) = 0$.

Mivel egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, így azt kapjuk:

$x_1 = 21$, $x_2 = -3$.

A negatív megoldás nyilván nem jön számításba, így a legkisebb négyzet oldala 21 cm. Ezzel a négyzetek kerületének összege:

$4 \cdot (21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27) = 672$ cm.

Egyszerűbbnek tűnik a példa megoldása, ha nem a legrövidebb, hanem a „középső", vagyis a negyedik négyzet oldalát jelöljük ismeretlennel; legyen ez a. Ekkor

$(a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 = (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2$.

A műveletek elvégzése után azt kapjuk:

$4a^2 - 12a - 3a^2 - 12a = a^2 - 24a = 0$.

A bal oldalon a-t kiemelve:

$a(a - 24) = 0$.

Innen $a_1 = 0$, $a_2 = 24$. De $a = 0$ (a negyedik négyzet oldala) nem lehet, így azt kaptuk (mint az előbbi megoldásnál is), hogy a középső négyzet oldala 24 cm.

Innen az előzőekhez hasonlóan a négyzetek kerületének összege 672 cm.

3. példa Egy n oldalú konvex sokszög átlóinak a száma 13-mal több, mint az oldalak számának négyszerese. Hány oldalú a sokszög?

Megoldás

Tudjuk, hogy az n oldalú konvex sokszög átlóinak a száma: $\frac{n(n-3)}{2}$. Így a következő egyenletet írhatjuk fel a feltételek alapján:

$\frac{n(n-3)}{2} - 13 = 4n$, azaz $n^2 - 3n - 26 = 8n$.

$n^2 - 11n - 26 = 0$.

Ismét teljes négyzetté egészítjük ki a bal oldalt:

$n^2 - 11n - 26 = (n - 5{,}5)^2 - 30{,}25 - 26 = (n - 5{,}5)^2 - 56{,}25 = 0$.

Innen

$(n - 5{,}5)^2 = 56{,}25$, azaz $|n - 5{,}5| = 7{,}5$.

Tehát

$n - 5{,}5 = 7{,}5$ vagy $n - 5{,}5 = -7{,}5$.

Ezzel az egyenlet megoldásai: $n_1 = 13$, $n_2 = -2$. A feladat jellegéből adódik, hogy a megoldás csak 3-nál nagyobb pozitív egész szám lehet. Így azt kaptuk, hogy a konvex sokszögnek 13 oldala van.

Feladatok

1. K1 Két szám szorzata 143, különbségük 2. Melyik ez a két szám?

2. K1 Oldjuk meg szorzattá alakítással az alábbi másodfokú egyenleteket!

a) $x^2 + 4x - 77 = 0$;

b) $x^2 - 8x + 15 = 0$;

c) $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = 0$.

3. K1 Oldjuk meg a teljes négyzetté kiegészítés módszerével az alábbi másodfokú egyenleteket!

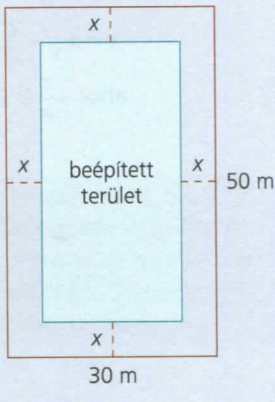
a) $x^2 + 16x + 55 = 0$;

b) $x^2 - 9x - 36 = 0$;

c) $3x^2 + 10x + 3 = 0$.

4. K2 A *35. ábrán* egy téglalap alakú parkot és a szélén körbevezető sétautat látjuk. A park oldalai 30 m és 50 m. A körbevezető sétaút szélessége mindenütt ugyanannyi. Mekkora legyen a sétaút szélessége, ha a beültetett kert a teljes park területének 80%-a?

35.



További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1354–1357.

5. E1 Adott $(2n + 1)$ db egymást követő egész szám, melyek közül az első $(n + 1)$ db négyzetének összege egyenlő az utolsó n db négyzetének összegével. Melyek ezek a számok?

6. E1 Két munkás együttesen 6 nap alatt végez el egy munkát. Ha külön-külön végeznék el a feladatot, akkor az egyik 8 nappal hamarabb végezne a munkával, mint a másik. Hány nap alatt végzik el külön-külön a munkát?

5. Speciális másodfokú egyenletek megoldása

Az előbbi leckékben már megoldottunk néhány konkrét másodfokú egyenletet. A megoldásoknál ismertetett módszert alkalmazva most térjünk rá az általános másodfokú egyenlet megoldására. Célunk az, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ másodfokú egyenletnek megkapjuk a megoldásait.

Ebben a leckében két speciális esetet fogunk vizsgálni, nevezetesen azokat az eseteket, amikor az elsőfokú tag együtthatója vagy pedig a konstans tag 0-val egyenlő.

1. példa Oldjuk meg az alábbi két egyenletet a valós számok halmazán!
a) $2x^2 - 17 = 0$; *b)* $2x^2 + 17 = 0$.

Megoldás

Az *a)* esetben

$2x^2 = 17$, azaz $x^2 = \frac{17}{2}$.

Innen az egyenlet megoldása:

$|x| = \sqrt{\frac{17}{2}}$, vagyis $x_1 = \sqrt{\frac{17}{2}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{17}{2}}$.

A *b)* esetben hasonlóképpen járunk el:

$2x^2 = -17$, azaz $x^2 = -\frac{17}{2}$.

Mivel a kapott egyenlet bal oldala nemnegatív, a jobb oldala pedig negatív, így a *b)* esetben az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán.

Tiszta másodfokú egyenlet
$ax^2 + c = 0$
$\Downarrow$
$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$,
ahol $-\frac{c}{a} \geq 0$

Tiszta másodfokú egyenlet

Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenletben $b = 0$, $a \neq 0$ és $c \neq 0$ akkor az egyenletet tiszta másodfokú egyenletnek nevezzük.

Ekkor

$ax^2 + c = 0$, ahonnan $ax^2 = -c$,

$x^2 = -\frac{c}{a}$.

Innen az egyenlet megoldása:

$|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, azaz $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

A négyzetgyök alatti mennyiség nem lehet negatív, így a tiszta másodfokú egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha a legmagasabb fokú tag a együtthatója és a c konstans különböző előjelűek. Ekkor két megoldást kapunk, melyek abszolút értéke egyenlő. Ez összhangban van azzal, hogy az $f(x) = ax^2 + c$ függvény grafikonja egy olyan parabola, amely az y tengelyre tengelyesen szimmetrikus, így ha vannak közös pontjai az x tengellyel, akkor azok az origóra szimmetrikusan helyezkednek el.

2. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!
$3x^2 - 8x = 0$.

$ax^2 + bx = 0$

Megoldás

Ezt az egyenletet könnyen szorzattá alakíthatjuk; emeljük ki x-et a bal oldalon:

$x(3x - 8) = 0$.

Mivel egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, így két eset lehetséges:

$x = 0$ vagy $3x - 8 = 0$.

Tehát $x_1 = 0$ vagy $x_2 = \frac{8}{3}$.

Hiányos másodfokú egyenlet

Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenletben $c = 0$, $a \neq 0$ és $b \neq 0$, akkor az egyenletet hiányos másodfokú egyenletnek nevezzük.

Hiányos másodfokú egyenlet:
$ax^2 + bx = 0$
$\Downarrow$
$x_1 = 0; x_2 = -\frac{b}{a}$

Ekkor

$ax^2 + bx = 0$.

Emeljük ki – mint az előbbi konkrét példánkban – az x-et:

$x(ax + b) = 0$, ahonnan

$x_1 = 0$ vagy $ax + b = 0$, azaz $ax = -b$, ahonnan $x_2 = -\frac{b}{a}$.

A hiányos másodfokú egyenletnek mindig van két megoldása, és az egyik megoldása mindig 0. Ez persze nem meglepő, hiszen az $f(x) = ax^2 + bx$ másodfokú függvény a 0-hoz mindig 0-t rendel, ami azt jelenti, hogy e függvényhez tartozó parabola áthalad az origón.

Feladatok

1. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x^2 - 6x = 0$; b) $x^2 + 12{,}6x = 0$; c) $2x^2 + 13x = 0$;

d) $6x^2 = \frac{2}{3}x$; e) $-\frac{1}{2}x^2 = \frac{5}{3}x$; f) $\frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1}$.

2. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x^2 - 9 = 0$; b) $x^2 + 16 = 0$; c) $5x^2 - 20 = 0$;

d) $4x^2 = 18$; e) $\frac{1}{3}x^2 = \frac{7}{9}$; f) $7x^2 + \frac{14}{7} = 0$.

3. E1 Az $ax^2 + b = 0$ és $ax^2 + bx = 0$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ egyenleteknek van egy közös valós gyöke. Mi ez a közös gyök?

4. E1 Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!
$(a^2 - b^2)x^2 + ax = bx$ $(|a| \neq |b|)$.

5. E1 Adott az $(a+1)x^2 + (a^2 - 1)x = 0$ $(|a| \neq 1)$ másodfokú egyenlet. Mekkora legyen az a paraméter értéke, ha azt akarjuk, hogy az egyenlet 0-tól különböző gyöke legalább 6 legyen?

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1204–1208.

6. A másodfokú egyenlet megoldóképlete

Az előző leckében olyan speciális másodfokú egyenletekkel foglalkoztunk, amelyekben vagy az elsőfokú tag együtthatója, vagy pedig a konstans tag értéke 0 volt. Ebben a leckében a legáltalánosabb másodfokú egyenletet fogjuk megoldani. Olyan megoldóképlethez jutunk, mely bármely másodfokú egyenlet esetében jól alkalmazható.

$ax^2 + bx + c = 0,$
$a \neq 0$

Minden másodfokú egyenlet $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ alakú vagy azonos átalakításokkal ilyen alakra hozható.

Az

$ax^2 + bx + c = 0$

egyenlet megoldását kezdjük azzal, hogy osszuk el mindkét oldalt a 0-tól különböző a-val.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Most a bal oldali első két tagot egészítsük ki teljes négyzetté, ahogyan ezt korábban már konkrét esetekben is tettük.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0,$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}, \quad \text{azaz} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

A kapott egyenlet bal oldalán nemnegatív szám szerepel. Mivel a jobb oldali tört nevezője biztosan pozitív, ezért csak akkor lehet az egyenletnek megoldása, ha a jobb oldali tört számlálója sem negatív: $b^2 - 4ac \geq 0$.

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}, \quad \text{azaz} \quad x_{1,2} + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképlete

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A kapott képlet a másodfokú egyenlet megoldóképlete. Ezt mindenképpen érdemes nagyon jól megjegyeznünk, hiszen a későbbi középiskolai tanulmányaink során szinte valamennyi témakörben előfordul, hogy a vizsgált probléma megoldása egy másodfokú egyenlet megoldására vezet, s nem lenne célszerű minden egyes esetben a hosszadalmas algebrai átalakításokat elvégezni.

Nézzünk most néhány példát a megoldóképlet alkalmazására!

1. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!
$x^2 - 2x - 35 = 0.$

Megoldás

Kezdetben (amíg még nincs gyakorlatunk a megoldóképlet használatában) mindenképpen érdemes a megfelelő együtthatókat külön is kiírni: $a = 1$, $b = -2$, $c = -35$.

Ezek szerint

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-35)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{2 \pm 12}{2}.$$

Tehát az egyenlet megoldása: $x_1 = -5$, $x_2 = 7$.

A kapott gyököket az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve győződhetünk meg azok helyességéről:

$(-5)^2 - 2\cdot(-5) - 35 = 25 + 10 - 35 = 0$ és

$7^2 - 2\cdot 7 - 35 = 49 - 14 - 35 = 0$.

2. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$\frac{2(3x+1)+x}{2x+4} = 3x - 4$.

Megoldás

Mindenekelőtt észre kell vennünk, hogy a bal oldalon található tört nevezőjében szerepel az ismeretlen. E nevező nem lehet 0, azaz $2x + 4 \neq 0$, ahonnan $x \neq -2$. Ezt a kikötést azért célszerű és fontos megtennünk, mert ha az eredeti egyenlet valamelyik gyöke netán –2 lenne, azt már nem is kell ellenőriznünk, hiszen ez az eredeti egyenletnek – mint most láttuk – nem lehet megoldása.

Ezek után egyenletünket $ax^2 + bx + c = 0$ alakra kell hoznunk. Szorozzuk meg mindkét oldalt $(2x + 4)$-gyel.

$2(3x+1) + x = (2x+4)(3x-4)$,

$6x + 2 + x = 6x^2 - 8x + 12x - 16$,

$0 = 6x^2 - 3x - 18$.

Érdemes észrevenni, hogy a kapott egyenletben szereplő 6, –3, –18 együtthatók mindegyike osztható 3-mal, tehát eloszthatjuk az egyenlet mindkét oldalát 3-mal.

$0 = 2x^2 - x - 6$.

Most már alkalmazhatjuk a megoldóképletet:

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\cdot 2\cdot 6}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4}$.

Tehát az eredeti egyenlet gyökei: $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{3}{2}$. Mivel mindkét gyök megfelel a megoldás elején tett kikötésünknek, így mindkettőt ellenőriznünk kell, s az ellenőrzés során kiderül, mindkét kapott érték kielégíti az eredeti egyenletet.

3. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$4x^2 + 7x + 6 = 0$.

Megoldás

Most $a = 4$, $b = 7$, $c = 6$.

$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4\cdot 4\cdot 6}}{8}$.

Esetünkben a négyzetgyök alatti kifejezés értéke: $49 - 96 = -47 < 0$. Így a gyökvonást a valós számok körében nem tudjuk elvégezni, vagyis a kitűzött másodfokú egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán.

Gyökvesztés

Gyakran előfordul, hogy egy egyenlet megoldása során olyan tényezővel akarjuk elosztani az egyenlet mindkét oldalát, mely tartalmazza az ismeretlent. Ilyenkor meg kell vizsgálnunk, hogy amivel osztani szeretnénk, lehet-e 0. Ha ugyanis ezt elmulasztjuk, akkor elveszítjük az egyenlet egyik gyökét. Nézzünk erre egy egyszerű példát!

4. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!
$(x + 3)(2x - 1) = 8x - 4$.

Megoldás

Az egyenlet jobb oldalán 4-et kiemelve: $(x + 3)(2x - 1) = 4(2x - 1)$.

Azt látjuk, hogy mindkét oldalt eloszthatjuk $(2x - 1)$-gyel , de nézzük meg, hogy ez lehet-e 0. *Ekkor ugyanis mindkét oldal értéke 0,* tehát a $2x - 1 = 0$, azaz $x = \frac{1}{2}$ megoldása az egyenletnek. Most keresve a többi megoldást, (azaz ha $x \neq \frac{1}{2}$) már oszthatunk $(2x - 1)$-gyel, s így azt kapjuk, hogy $x + 3 = 4$, ahonnan $x = 1$.

Tehát a kitűzött egyenletnek két megoldása van: $x = 1$ és $x = \frac{1}{2}$.

5. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!
$4x^2 + 9 = 12x$.

Megoldás

Az egyenletet 0-ra rendezve azt kapjuk: $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

Az együtthatók: $a = 4$, $b = -12$, $c = 9$.

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{8} = \frac{12 \pm 0}{8} = \frac{3}{2}.$$

Ez utóbbi egyenlet esetében a négyzetgyök alatt 0 szerepel, így az egyenletnek két azonos valós megoldása lett. Ezt egyébként hamarabb is észrevehettük volna, ha felfedezzük, hogy az egyenlet bal oldalán teljes négyzet szerepel: $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$.

Ez pedig akkor és csak akkor 0, ha $x = \frac{3}{2}$.

6. példa Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, ahol a egy valós paraméter! $x^2 + 2a = (a + 2)x$.

Megoldás

Az egyenletet 0-ra rendezve azt kapjuk, hogy

$x^2 - (a + 2)x + 2a = 0$.

Innen a megoldóképlet szerint

$$x_{1,2} = \frac{a + 2 \pm \sqrt{(a + 2)^2 - 8a}}{2} = \frac{a + 2 \pm \sqrt{a^2 + 4a + 4 - 8a}}{2} = \frac{a + 2 \pm \sqrt{a^2 - 4a + 4}}{2}.$$

Most a diszkrimináns teljes négyzet, így $\sqrt{(a - 2)^2} = |a - 2|$. Tehát a megoldás így alakul:

$$x_{1,2} = \frac{a + 2 \pm |a - 2|}{2}.$$

$$x_1 = \frac{a + 2 + a - 2}{2} = \frac{2a}{2} = a \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{a + 2 - a + 2}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

7. példa Oldjuk meg az alábbi másodfokú egyenletet, ahol p és q olyan valós paraméterek, melyekre $3p + q > 0$!
$x(x - 2p + q) = p(2p + 2q - x)$

Megoldás

Először felbontjuk a zárójeleket, majd 0-ra rendezzük az egyenletet:

$x^2 - 2px + qx = 2p^2 + 2pq - px$,

$x^2 - px + qx - (2p^2 + 2pq) = 0$, azaz $x^2 + (q-p)x - 2p(p+q) = 0$.

Most használjuk a megoldóképletet:

$$x_{1,2} = \frac{-(q-p) \pm \sqrt{(q-p)^2 + 8p(p+q)}}{2} = \frac{p - q \pm \sqrt{p^2 + q^2 - 2pq + 8p^2 + 8pq}}{2},$$

$$x_{1,2} = \frac{p - q \pm \sqrt{9p^2 + 6pq + q^2}}{2}.$$

A négyzetgyök alatt teljes négyzet: $9p^2 + 6pq + q^2 = (3p+q)^2$. Mivel a feltételek szerint $3p + q > 0$, így azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{p - q \pm (3p+q)}{2}, \quad \text{tehát} \quad x_1 = 2p, \quad x_2 = -(p+q)$$

Feladatok

1. K1 Oldjuk meg a következő egyenleteket a megoldóképlet segítségével!

a) $x^2 + 2x - 15 = 0$; b) $a^2 - 3a - 4 = 0$; c) $t^2 + 2t + 3 = 0$;

d) $2k^2 - 3k - 9 = 0$; e) $\frac{1}{2}x^2 + 3x - 20 = 0$; f) $-3b^2 + 7b - 4 = 0$.

2. K2 Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $2 - \frac{x}{x+1} = x + \frac{1}{2}$; b) $2 - \frac{1}{x-2} = x - 2$; c) $(x+3)^2 = 4(2x+3)$;

d) $\frac{x(x-1) + 2x^2}{1 - 3x} = 1 + 3x$; e) $\frac{3}{x^2 - 4} + \frac{2x}{2x+4} = \frac{4}{x+2}$.

3. E1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, ahol p, m, k 0-tól különböző valós számok!

a) $\frac{x}{p} + \frac{p}{x} = \frac{10}{3}$; b) $\frac{x^2 + k^2}{kx} = \frac{x^2 + m^2}{mx}$; c) $x(x - 2a) = b^2 - a^2$.

4. E1 Mely valós számok elégítik ki a alábbi egyenleteket?

a) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$; b) $x|x - 3| - 10 = 0$; c) $x^2 = |x - 6|$.

5. E1 Az $f(x) = 2x^2 - 5x + k$ másodfokú függvény egyik zérushelye $x = 4$. Hol van a függvény másik zérushelye?

6. E2 Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$|x^2 - 2|x|| = 24$.

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1210., 1213., 1216., 1237.,1239.

Már az ókorban is... (Olvasmány)

Már az ókorban is foglalkoztak az akkori tudósok a különböző algebrai egyenletek vizsgálata során a másodfokú egyenletekkel. Mezopotámiában Kr. e. 2000 táján már nagy biztonsággal tudták kezelni az ilyen egyenleteket, sőt, többismeretlenes másodfokú egyenletrendszerekkel is foglalkoztak. A XX. században több olyan ékírásos égetett agyagtáblát találtak, amelyeken matematikai tartalmú szövegek, számítások is szerepeltek. Ismerték a Pitagorasz-tételt, az első- és másodfokú egyenletek megoldási módszereit, bár a negatív megoldásokat nem tudták értelmezni. Egy ősi mezopotámiai agyagtáblán szerepel az alábbi probléma:

Két négyzet területének összege 1000. Az egyik négyzet oldala a másik oldalának kétharmadánál 10-zel kisebb. Mekkorák a négyzetek oldalai?

Ha az egyik négyzet oldala x, akkor a másik négyzet oldala $\frac{2}{3}x - 10$. Így a feltételek szerint

$$x^2 + \left(\frac{2}{3}x - 10\right)^2 = 1000. \quad x^2 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 100 = 1000.$$

Innen összevonás után a

$13x^2 - 120x - 8100 = 0$

másodfokú egyenlethez jutunk. Ennek megoldása a megoldóképlet szerint

$$x_{1,2} = \frac{120 \pm \sqrt{120^2 + 4 \cdot 13 \cdot 8100}}{26} = \frac{120 \pm 660}{26}.$$

A negatív gyököt egyébként sem fogadták el, bár a feladat szempontjából most számunkra is közömbös, így az egyik négyzet oldala: $\frac{780}{26} = 30$, a másiké pedig $\frac{2}{3} \cdot 30 - 10 = 10$.

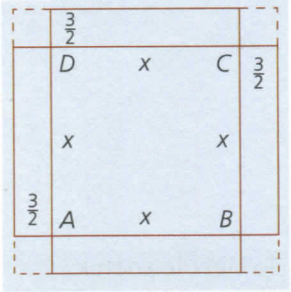


Kr. e. 170 táján született az ősi Kínában „A matematika 9 könyve" című munka. Ennek 9. kötetében található a másodfokú egyenletek megoldására vonatkozó szabály, mely – bár a negatív számokat ők sem ismerték – lényegében megegyezik a ma használatos megoldóképlet szerinti utasításokkal.

Igen érdekes és szemléletes módszert alkalmaztak a másodfokú egyenletek megoldására az arab matematikusok. Egyébként is nagy csodálattal adózhatunk az arab matematikának, hiszen nekik köszönhető, hogy az ókori egyiptomi, görög és hindu matematika átöröklődött Európába. Egyik legkiválóbb matematikusuk *Muhammed ibn al-Khvarizmi* – sok egyéb felfedezése mellett – olyan geometriai eljárást dolgozott ki az $x^2 + bx = c$ típusú másodfokú egyenletek megoldására, amelynek segítségével minden pozitív b és c esetére elő tudta állítani az egyenlet pozitív gyökét. Nézzük al-Khvarizmi módszerét például az

$x^2 + 6x = 55$ egyenletre.

36.



Vegyünk fel egy x oldalú $ABCD$ négyzetet. Majd illesszünk e négyzet oldalai mellé egy-egy téglalapot, melynek másik oldala $\frac{b}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Végül pedig egészítsük ki az így kapott „kereszt" alakzatot ismét négyzetté. *(36. ábra)*

Ekkor a kereszt alakzat területe

$x^2 + 4 \cdot \frac{3}{2}x = x^2 + 6x = 55$.

A négyzetté kiegészítés után kapott területet úgy kapjuk meg, ha a mostani eredményünkhöz hozzáadjuk a sarkokban levő kis négyzetek területét, azaz $4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9$-et. Ezek szerint az egész négyzet területe $55 + 9 = 64$, az oldala pedig $x + 2 \cdot \frac{3}{2} = x + 3$. Tehát

$(x + 3)^2 = 64 = 8^2$,

ahonnan az egyenlet pozitív megoldása: $x = 5$. Mivel akkoriban a negatív számokat nem ismerték, így az $x = -11$ negatív megoldást nem kapták meg.

Bár Kínában Kr. e. a II. században, Indiában Kr. u. a VI–VII. században már használták a negatív számokat, az európai tudósok sokáig nem ismerték az ilyenfajta számokat. Csak valamikor a XIV–XV. században kezdték felismerni a negatív számok jelentőségét, s ekkorra a negatív együtthatójú és negatív megoldásokat adó másodfokú egyenletek is teljes létjogosultságot nyertek.

7. A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

Már a korábbi leckékben is találkoztunk olyan másodfokú egyenletekkel, melyeknek csak egyféle megoldása volt, vagy egyetlen valós megoldása sem létezett. Mostani leckénkben ezt a kérdést fogjuk részletesebben megvizsgálni.

Nézzük meg tüzetesebben a megoldóképletet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A képletben szereplő négyzetgyök alatti mennyiségnek nagyon fontos szerepe van a megoldások tekintetében. Ezért ennek a mennyiségnek külön nevet is adtak a matematikusok: ezt nevezzük a másodfokú egyenlet **diszkriminánsának**, és általában D-vel jelöljük:

Diszkrimináns

$D = b^2 - 4ac$.

Ha ennek a D mennyiségnek az értéke pozitív, akkor a képletben a számlálóban $\sqrt{D}$ egyszer hozzáadódik $(-b)$-hez, másik esetben pedig levonódik $(-b)$-ből, így két különböző érték adódik, tehát az egyenletnek két különböző megoldása lesz. Ha D értéke 0, akkor az előbbi két érték nyil-

ván megegyezik, tehát ekkor csak egyféle valós gyöke lesz az egyenletnek. Végül, ha D értéke negatív, akkor a gyökvonást nem tudjuk elvégezni a valós számok körében, így a másodfokú egyenletnek nem lesz valós megoldása.

Összefoglalva:
ha $D > 0$, akkor a másodfokú egyenletnek két különböző valós megoldása van,
ha $D = 0$, akkor a másodfokú egyenletnek két egyenlő valós megoldása van.
ha $D < 0$, akkor a másodfokú egyenletnek nincs valós megoldása.

$D > 0$: 2 különböző valós megoldás
$D = 0$: 2 egyenlő valós megoldás
$D < 0$: nincs valós megoldás

Mindez egyben azt is jelenti, hogy az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek az x tengellyel alkotott közös pontjainak a száma $D = b^2 - 4ac > 0$ esetén 2, $D = 0$ esetén 1 (tehát ekkor a parabola érinti az x tengelyt), $D < 0$ esetén pedig 0, vagyis ekkor a parabola teljes egészében az x tengely fölött vagy alatt van attól függően, hogy felfelé vagy lefelé nyíló, vagyis hogy $a > 0$ vagy $a < 0$.

Nézzünk az elmondottakra néhány egyszerű példát!

1. példa Az $5x^2 - 3x + p = 0$ másodfokú egyenletnek két egyenlő valós megoldása van. Határozzuk meg a p paraméter értékét!

Megoldás

Az elmondottak alapján, ha egy másodfokú egyenletnek két egyenlő valós megoldása van, akkor D diszkriminánsa 0. Tehát

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 5 \cdot p = 0, \quad \text{azaz} \quad 9 = 20p,$$

tehát ekkor a p paraméter értéke $p = \frac{9}{20}$.

Ellenőrizzük a kapott eredményt! A másodfokú egyenlet:

$$5x^2 - 3x + \frac{9}{20} = 0.$$

Ennek gyökei:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 5 \cdot \frac{9}{20}}}{10} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 9}}{10} = \frac{3 \pm 0}{10} = \frac{3}{10}.$$

Valóban két egyenlő megoldást kaptunk.

2. példa Mekkora legyen a $k \neq 0$ paraméter értéke, hogy a következő másodfokú egyenletnek két különböző valós gyöke legyen?

$$kx^2 - (k+1)x + \frac{1}{k} = 0.$$

Megoldás

Ha az egyenletnek két különböző valós gyöke van, akkor D diszkriminánsa pozitív:

$$D = b^2 - 4ac = (k+1)^2 - 4k \cdot \frac{1}{k} > 0, \quad \text{azaz}$$

$$(k+1)^2 > 4.$$

A kapott egyenlőtlenség megoldásához vonjunk négyzetgyököt mindkét oldalból:

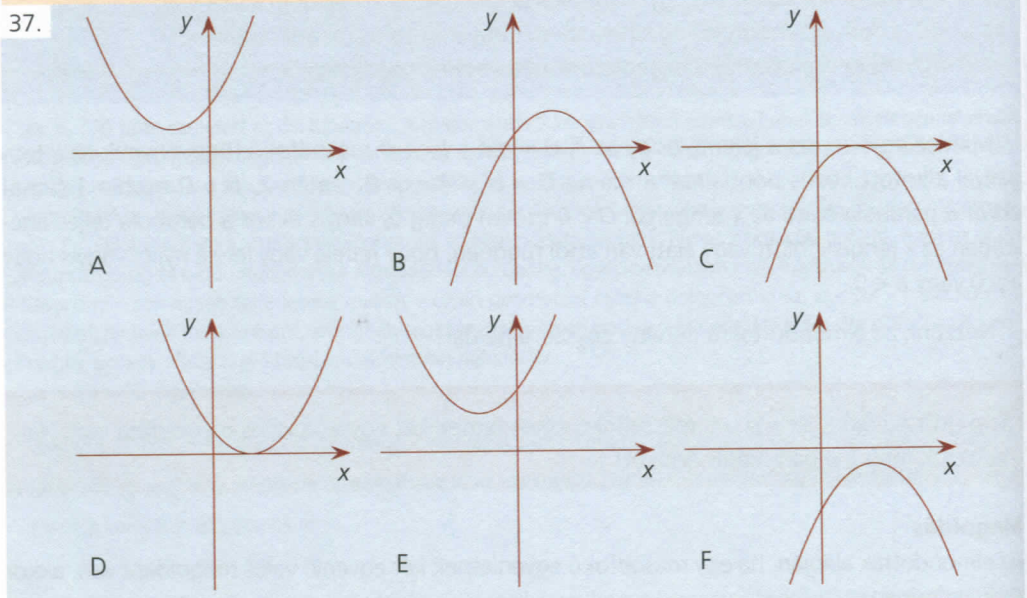
$$|k+1| > 2, \quad \text{tehát} \quad k+1 < -2 \quad \text{vagy} \quad 2 < k+1.$$

Innen pedig $k < -3$, vagy $1 < k$.

Tehát a feladatban kitűzött másodfokú egyenletnek akkor lesz két különböző valós gyöke, ha $k < -3$ vagy $1 < k$.

3. példa A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény a és c együtthatói szorzatának a négyzetgyöke egyenlő a b együttható felével. Tudjuk továbbá, hogy $f(2009) = -2009$. Az alábbi A, B, C, D, E, F grafikonok közül melyik felelhet meg $f(x)$ grafikonjának?

37.



Megoldás

A feladat egyik feltétele, hogy

$$\sqrt{ac} = \frac{b}{2}, \quad \text{azaz} \quad ac = \frac{b^2}{4}.$$

Tehát

$$4ac = b^2, \quad \text{ahonnan} \quad b^2 - 4ac = 0.$$

Arra jutottunk, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0, ami azt jelenti, hogy csak egy valós gyöke van az egyenletnek, ami egyenértékű azzal, hogy az $f(x)$ függvénynek az x tengellyel csak egy közös pontja van. Ezek szerint vagy a D, vagy a C grafikon lehet $f(x)$ grafikonja. A másik feltétel szerint $f(2009) = -2009$. A D esetben a függvény minden x-hez nemnegatív értéket rendel, míg a C esetben minden x-hez nempozitív érték rendelődik. Ezek szerint az $f(x)$ függvény grafikonjának csak a C ábra felelhet meg.

Érdemes megvizsgálni azt a kérdést, hogy ha az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet a, b, c együtthatói egész számok, akkor milyen feltételeknek kell teljesülni ahhoz, hogy az egyenlet gyökei is egészek, de legalábbis racionális számok legyenek.

A megoldóképletben a nevező biztosan egész szám. A számláló akkor és csak akkor lesz egész szám, ha $\sqrt{b^2 - 4ac}$ egész szám. Mivel egy egész szám négyzetgyöke akkor és csak akkor egész, ha a négyzetgyök alatti egész szám négyzetszám (ellenkező esetben az egész szám négyzetgyöke irracionális), így kimondhatjuk a következőket:

Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet a, b, c együtthatói egész számok, akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a gyökök racionálisak legyenek az, hogy a diszkrimináns négyzetszám legyen.

4. példa Mekkora legyen a p prímszám értéke, hogy az $x^2 + 6x + p = 0$ másodfokú egyenlet gyökei racionális számok legyenek?

Megoldás

Az előbb mondottak alapján annak kell teljesülnie, hogy valamely k egész számra

$6^2 - 4p = k^2$

teljesüljön, azaz

$36 - k^2 = 4p$.

A bal oldalt szorzattá alakíthatjuk:

$(6 - k)(6 + k) = 4p$.

Tehát a $4p$ számot kell két pozitív egész szorzatára bontanunk. Mivel p prímszám, ezért ez csak háromféleképpen lehetséges: $4p = 1 \cdot 4p = 2 \cdot 2p = 4 \cdot p$. Ezek szerint – figyelembe véve, hogy $6 - k$ a kisebb tényező – az alábbi esetek lehetségesek:

1. $6 - k = 1$ és $6 + k = 4p$.
   E két egyenletet összeadva azt kapjuk: $12 = 4p + 1$.
   Ez azonban nem lehetséges, hiszen a bal oldalon páros, a jobb oldalon pedig páratlan szám áll.
2. $6 - k = 2$ és $6 + k = 2p$.
   Ismét összeadva az egyenleteket, arra jutunk, hogy $12 = 2p + 2$, ahonnan $p = 5$ adódik.
3. $6 - k = 4$ és $6 + k = p$.
   A két egyenlet összege $12 = 4 + p$, ahonnan $p = 8$, de ez nem lehetséges, hiszen a 8 nem prímszám.

Arra jutottunk tehát, hogy csak $p = 5$ esetben lesznek az $x^2 + 6x + p = 0$ egyenlet gyökei racionálisak. Valóban, ekkor az egyenlet gyökei:

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2}, \qquad x_1 = -1, \quad x_2 = -5.$$

Feladatok

1. K1 Határozzuk meg a következő egyenletekben szereplő paraméterek értékét úgy, hogy az egyenleteknek két egyenlő valós gyöke legyen!

a) $2x^2 - 7x + p = 0$; *b)* $x^2 - 11x - k = 0$; *c)* $3x^2 + 4x - r^2 = 0$;

d) $ax^2 + 5x + a = 0$; *e)* $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + b = 0$; *f)* $-6x^2 + 5x + 2c = 0$.

2. K2 Hogyan válasszuk meg az alábbi egyenletekben szereplő paraméterek értékét, hogy az egyenletek mindegyikének két különböző valós gyöke legyen?

a) $ax^2 - 4x + 2a = 0$; *b)* $2x^2 - 11x + b = 0$; *c)* $5x^2 + 2px - 1 = 0$.

3. E2 Mekkora legyen a $k \neq 0$ paraméter értéke, hogy csak egyetlen olyan m valós szám legyen, amelyre az alábbi egyenletnek két egyenlő valós megoldása van?

$kx^2 - 2(m - k)x + mk = 0$.

4. E1 Mekkora legyen az alábbi egyenletben szereplő $a \neq 0$ paraméter értéke, hogy az egyenletnek ne legyen valós megoldása?

$$ax^2 + (a + 1)x + \frac{1}{a} = 0.$$

5. E2 Az $\overline{ab} \cdot x^2 + 2 \cdot \overline{ba} \cdot x + \overline{ab} = 0$ $a \neq b$ másodfokú egyenlet gyökei racionális számok ($\overline{ab}$ a 10-es számrendszerben felírt kétjegyű számot jelöli). Melyek ezek a gyökök?

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1227., 1228., 1292., 1293., 1295., 1296.

8. Viète-formulák (Emelt szint)

Az előző leckében megismerkedtünk a másodfokú egyenlet egy fontos elemével, a diszkriminánssal és annak tulajdonságaival. Most a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói között meglevő érdekes és igen hasznos összefüggéssel ismerkedünk meg. Tulajdonképpen már maga a megoldóképlet is egy összefüggés a gyökök és az együtthatók között; a mostani leckében következő újabb összefüggések azonban lehetőséget adnak például arra is, hogy a valós gyökök összegét, négyzetösszegét, reciprokösszegét stb. elő tudjuk állítani anélkül, hogy magát az egyenletet megoldanánk.

Először hasonlítsuk össze néhány másodfokú egyenlet gyökeit és együtthatóit! Az alábbi táblázatban felsorolunk néhány másodfokú egyenletet, az együtthatókat és a gyököket.

$x^2 - 14x + 33 = 0$	$a = 1 \quad b = -14 \quad c = 33$	$x_1 = 3 \quad x_2 = 11$
$x^2 - 3x - 10 = 0$	$a = 1 \quad b = -3 \quad c = -10$	$x_1 = -2 \quad x_2 = 5$
$x^2 - 11x + 28 = 0$	$a = 1 \quad b = -11 \quad c = 28$	$x_1 = 4 \quad x_2 = 7$
$2x^2 - 5x - 3 = 0$	$a = 2 \quad b = -5 \quad c = -3$	$x_1 = 3 \quad x_2 = -\frac{1}{2}$

Az első három egyenletet vizsgálva elég hamar észrevehetjük, hogy a gyökök szorzata a c együtthatóval, míg a gyökök összege a b együttható (–1)-szeresével egyenlő. A negyedik egyenletnél ez nem igaz. Ha azonban azt is figyelembe vesszük, hogy az első három egyenlet esetében az a együttható 1, míg a harmadik esetben ez az együttható 2, rögtön helyreáll a rend. Azt sejtjük, hogy a gyökök szorzata a c együttható és az a együttható hányadosa, míg a gyökök összege a b együttható (–1)-szeresének és az a együtthatónak a hányadosa.

Viète-formulák

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet valós gyökei x_1 és x_2, akkor

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ és $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Ezeket az összefüggéseket Viète-formuláknak nevezzük.



François Viète

A Viète-formulák igazolásához használjuk fel a megoldóképletet:

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$

A gyökök összege:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

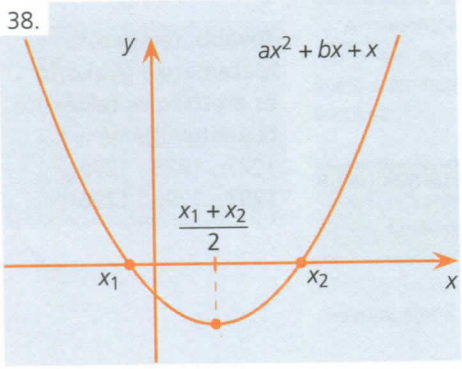
A gyökök szorzata:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2}.$$

Figyeljük meg a számlálóban levő szorzatot! Ez két tag összegének és ugyanazon két tag különbségének nevezetes szorzata, tehát $x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

François Viète (1540–1603) kiváló francia matematikus volt. Jogi végzettségű, elsősorban ügyészi munkát végzett; IV. Henrik jogi tanácsadója volt. Ugyanakkor – elsősorban a csillagászat iránti érdeklődése miatt – komoly matematikai tanulmányokba kezdett, és sok szép eredményt ért el a matematika területén. Elsősorban trigonometriával és az algebrai egyenletek elméletének egyre magasabb szintre emelésével foglalkozott. Eközben fedezte fel a másodfokú egyenletek gyökei és együtthatói közötti összefüggéseket.

38.



A 3. leckében már megállapítottuk, hogy az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény szélsőértéke minden esetben az $x = -\frac{b}{2a}$ helyen van. Ellenőrizzük ennek a megállapításnak a helyességét az egyik Viète-formula segítségével! Ha a másodfokú függvénynek vannak valós gyökei, x_1 és x_2, akkor a függvény szélsőértékhelye az x tengelyen az x_1 és x_2 pontoknak megfelelő szakasz felezőpontjában van. *(38. ábra)* Mivel az első Viète-formula szerint $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, így a szélsőértékhely valóban $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$.

1. példa Határozzuk meg a
$2x^2 + 7x - 4 = 0$
másodfokú egyenlet gyökei reciprokának összegét az egyenlet megoldása nélkül!

Megoldás

A megadott egyenlet diszkriminánsa $7^2 + 32 > 0$, tehát az egyenletnek van két különböző valós gyöke; legyenek ezek x_1 és x_2. Az egyenlet gyökei reciprokának összege:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2}.$$

A kapott tört számlálójában és a nevezőjében éppen a Viète-formuláknak megfelelő kifejezések szerepelnek, tehát

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-\frac{7}{2}}{-\frac{4}{2}} = \frac{7}{4}.$$

Ellenőrzésképpen oldjuk meg az egyenletet!

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{-7 \pm 9}{4}, \qquad x_1 = -4, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Így a gyökök reciprokának összege: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4}$.

Érdemes általános esetben is előállítani a gyökök reciprokának összegét.
Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet valós gyökei x_1 és x_2, akkor

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}.$$

Ez természetesen csak akkor létezik, ha $c \neq 0$. Mindez nem meglepő, hiszen tudjuk, hogy ha $c = 0$, akkor hiányos másodfokú egyenlettel van dolgunk, s ennek egyik gyöke mindig 0, így e gyök reciproka nem létezik.

2. példa Határozzuk meg a
$3x^2 - 11x + 10 = 0$
másodfokú egyenlet gyökei négyzetének összegét az egyenlet megoldása nélkül!

Megoldás

Most kezdjük a feladat általánosításával. Legyenek az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet valós gyökei x_1 és x_2. A gyökök négyzetének összegét úgy tudjuk előállítani, hogy a két gyök összegét négyzetre emeljük.

$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$, tehát $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.

A kapott egyenlőség jobb oldalán ismét a Viète-formulákból ismert kifejezések szerepelnek:

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{2c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

Alkalmazzuk ezt az eredményt a kitűzött feladatra! Mivel a megadott egyenlet diszkriminánsa $11^2 - 120 > 0$, így az egyenletnek valós gyökei vannak. Az előbbiek alapján e gyökök négyzetének összege:

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = \frac{11^2 - 2 \cdot 3 \cdot 10}{3^2} = \frac{61}{9}.$$

3. példa Az $x^2 - px + 2p - 1 = 0$ egyenlet egyik gyöke 2-vel nagyobb a másik gyökénél. Határozzuk meg a p paraméter értékét!

Megoldás

Írjuk fel a kitűzött egyenletre a Viète-formulákat! A feltételek szerint $x_2 = x_1 + 2$, tehát

$x_1 + x_1 + 2 = p$ és $x_1(x_1 + 2) = 2p - 1$.

Az első egyenletből p kifejezését helyettesítsük be a második egyenletbe, így azt kapjuk:

$x_1(x_1 + 2) = 2(2x_1 + 2) - 1$, azaz $x_1^2 + 2x_1 = 4x_1 + 4 - 1$,

$x_1^2 - 2x_1 - 3 = 0$.

A kapott másodfokú egyenlet megoldása:

$(x_1)_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$, $\quad (x_1)_1 = 3, \quad (x_1)_2 = -1.$

Ezeket a gyököket felhasználva a p paraméter értéke:

$p_1 = 2x_1 + 2 = 8$ és $p_2 = 0$.

Tehát az eredeti egyenletnek akkor és csak akkor lesz egyik gyöke 2-vel nagyobb a másik gyökénél, ha p értéke 8 vagy 0.

Ellenőrizzük a kapott eredményeket!

Ha $p = 8$, akkor az egyenlet: $x^2 - 8x + 15 = 0$. Ennek megoldásai: $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, és ezek különbsége valóban 2.

Ha $p = 0$, akkor az egyenlet: $x^2 - 1 = 0$. Ennek gyökei: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; tehát ez esetben is a gyökök különbsége 2.

Feladatok

1. E1 Ellenőrizzük, hogy az alábbi másodfokú egyenletek gyökei valósak, és állítsuk elő a gyökök köbének összegét az egyenletek megoldása nélkül!

a) $x^2 + 13x - 2 = 0$; *b)* $3x^2 + 13x - 2 = 0$; *c)* $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 = 0$.

2. E1 Az $x^2 - (p+10)x + 16p = 0$ másodfokú egyenlet egyik gyöke a másik kétszerese. Határozzuk meg a p paraméter értékét!

3. E1 Az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet valós gyökei x_1 és x_2. Fejezzük ki az együtthatókkal a következő összeget: $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$!

4. E1 Az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet valós gyökei x_1 és x_2. Határozzuk meg az egyenlet gyökeinek négyzete reciprokának összegét!

5. E1 Az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ másodfokú egyenlet 0-tól különböző együtthatóiról tudjuk a következőket: a egyenlő az egyenlet valós gyökei négyzetének összegével; b egyenlő a gyökök reciprokának összegével; c pedig egyenlő a gyökök összegének reciprokával. Oldjuk meg az egyenletet!

6. E2 Az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ másodfokú egyenlet együtthatóiról a következőket tudjuk: a egyenlő a gyökök szorzatával, c egyenlő a gyökök összegével, b pedig egyenlő az egyenlet diszkriminánsával. Határozzuk meg az a, b, c együtthatókat!

7. E2 Az $f(x) = x^2 + bx + c$ másodfokú függvény grafikonja az x tengelyt az A és B pontokban metszi. Ha tudjuk, hogy az AB szakaszra emelt négyzet érinti a parabolát, akkor mekkora e négyzet területe?

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1275., 1281., 1282., 1286., 1287., 1290.

9. A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja

A megelőző leckékben megismertük a másodfokú egyenlet megoldóképletét, megismerkedtünk a diszkriminánssal, valamint a Viète-formulákkal. A mostani leckében tovább folytatjuk a másodfokú egyenlet, illetve az ilyen egyenletben szereplő másodfokú kifejezés vizsgálatát.

Már korábbi tanulmányaink során is tapasztaltuk, mennyire hasznos lehet számunkra egy-egy algebrai kifejezés egyszerűbb alakjának megkereséséhez, ha a kifejezést szorzattá tudjuk alakítani. A mostani leckében azt a kérdést fogjuk megvizsgálni, hogy mikor és hogyan lehet a másodfokú egyenletben szereplő másodfokú kifejezést elsőfokúak szorzatára felbontani.

Mindenekelőtt tekintsük a következő két másodfokú egyenletet:

1. $x^2 - 10x + 21 = 0$,
2. $x^2 + 3x - 88 = 0$.

Az 1. egyenlet gyökei a megoldóképlet szerint

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 21}}{2} = \frac{10 \pm 4}{2}, \qquad x_1 = 3, \quad x_2 = 7.$$

És most vizsgáljuk az alábbi szorzatot:

$(x-3)(x-7) = x^2 - 3x - 7x + 21 = x^2 - 10x + 21.$

Első látásra talán meglepő, hogy a másodfokú egyenlet gyökeit felhasználva a két elsőfokú tényező elkészítéséhez, majd elvégezve a szorzást, éppen az eredeti másodfokú egyenletben szereplő másodfokú kifejezést kaptuk vissza.

Ellenőrizzük ezt a 2. egyenlet esetében! Annak gyökei:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 88}}{2} = \frac{-3 \pm 19}{2}, \qquad x_1 = -11, \quad x_2 = 8.$$

Az előző esethez hasonlóan készítsük el a két elsőfokú szorzótényezőt:

$[x-(-11)](x-8) = (x+11)(x-8) = x^2 + 11x - 8x - 88 = x^2 + 3x - 88.$

Ezek után már erős lehet a sejtésünk, hogy ha egy másodfokú egyenletnek vannak valós gyökei – ami ugye azt jelenti, hogy a diszkriminánsa nemnegatív –, akkor az egyenletben szereplő másodfokú kifejezés felbontható két elsőfokú kifejezés szorzatára. Az elsőfokú szorzótényezők pedig: az x ismeretlen és az egyik gyök, valamint az x ismeretlen és a másik gyök különbsége. Ez tulajdonképpen nem is annyira meglepő. Vegyük ugyanis például az

$(x-3)(x+7) = 0$

egyenletet. Ennek a gyökei az $x - 3 = 0$, illetve $x + 7 = 0$ elsőfokú egyenletek gyökei lesznek, vagyis $x_1 = 3$ és $x_2 = -7$. Most végezzük el a szorzást:

$x^2 - 3x + 7x - 21 = 0$, azaz $x^2 + 4x - 21 = 0$,

és ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai sem lehetnek mások, mint az eredeti egyenletnek.

Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet valós megoldásai x_1 és x_2, akkor
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Ezt a felbontást nevezzük a másodfokú egyenlet gyöktényezős alakjának.

Másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja: $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$

A bizonyításhoz írjuk be az egyenlet jobb oldalán szereplő szorzótényezőkbe az x_1 és x_2 gyököket, majd végezzük el a szorzást!

$$a\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) =$$

$$= a\left(x^2 - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot x + \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2}\right).$$

A zárójelen belül a második és a harmadik tagból emeljünk ki $(-x)$-et; a negyedik tag számlálójában pedig fedezzük fel az $(x-y)(x+y)$ típusú nevezetes szorzatot. Ezekkel az egyenlőség így folytatható:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a\left(x^2 - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot x + \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(x^2 - \frac{-2b}{2a} \cdot x + \frac{4ac}{4a^2}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c.$$

Természetesen, ha az egyenlet D diszkriminánsa negatív: $D < 0$, akkor a másodfokú kifejezés nem bontható fel két (valós együtthatójú) elsőfokú szorzatára, ha pedig $D = 0$, azaz egy valós gyöke van az egyenletnek, akkor a felbontás alakja:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakjának ismeretében már könnyen szorzattá alakíthatunk olyan másodfokú kifejezéseket, amelyek diszkriminánsa nemnegatív.

1. példa Alakítsuk szorzattá az alábbi másodfokú kifejezéseket!
a) $x^2 + 7x - 44$; *b)* $3x^2 - 26x - 9$.

Megoldás

Az *a)* esetben az $x^2 + 7x - 44 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 176}}{2} = \frac{-7 \pm 15}{2}, \quad \text{tehát} \quad x_1 = 4, \quad x_2 = -11.$$

Mivel az egyenletben a másodfokú tag együtthatója $a = 1$, így a másodfokú kifejezés szorzat alakban: $x^2 + 7x - 44 = (x - 4)(x + 11)$.

A *b)* esetben az $3x^2 - 26x - 9 = 0$ egyenlet megoldása:

$$x_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{676 + 108}}{6} = \frac{26 \pm 28}{6}, \quad \text{tehát} \quad x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = 9.$$

Ebben az esetben a másodfokú tag együtthatója $a = 3$, tehát az eredeti másodfokú kifejezés szorzat alakja: $3x^2 - 26x - 9 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 9)$.

2. példa Egyszerűsítsük a következő törtet!

$$\frac{2x^2 + 5x - 3}{2x^2 + 13x - 7}.$$

Megoldás

A megadott törtnek csak akkor van értelme, ha nevezője nem 0. Keressük meg, milyen x értékek esetén lenne 0 a nevező, vagyis oldjuk meg a $2x^2 + 13x - 7 = 0$ másodfokú egyenletet!

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 56}}{4} = \frac{-13 \pm 15}{4}, \quad x_1 = -7, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Tehát a törtkifejezés csak akkor értelmezhető, ha $x \neq -7$ és $x \neq \frac{1}{2}$.

Egy törtet egyszerűsíteni azt jelenti, hogy a számlálót és a nevezőt ugyanazzal a 0-tól különböző számmal elosztani. Első ránézésre nem találunk olyan tényezőt, amellyel a számláló is és a nevező is osztható lenne, ezért alakítsuk szorzattá a számlálóban és a nevezőben szereplő másodfokú kifejezéseket. Ehhez meg kell keresnünk a másodfokú kifejezések zérushelyeit. A nevezőben ezt már megtettük, és mivel a nevezőben $a = 2$, ezért a nevező szorzat alakja:

$$2x^2 + 13x - 7 = 2(x + 7)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

A számláló szorzattá alakításához oldjuk meg a $2x^2 + 5x - 3 = 0$ egyenletet:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Ezek szerint a számláló szorzat alakban:

$$2x^2 + 5x - 3 = 2(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Az eredeti tört tehát így írható:

$$\frac{2x^2 + 5x - 3}{2x^2 + 13x - 7} = \frac{2(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{2(x + 7)\left(x - \frac{1}{2}\right)}.$$

Most már látunk közös szorzótényezőt, s mivel – mint láttuk – $x \neq \frac{1}{2}$, így a tört egyszerűsített alakja: $\frac{2x^2 + 5x - 3}{2x^2 + 13x - 7} = \frac{x + 3}{x + 7}$.

Feladatok

1. K1 Adjunk meg olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei!

a) $x_1 = 3$, $x_2 = -8$; b) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{3}{2}$; c) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{18}$.

2. K1 Alakítsuk szorzattá a következő másodfokú kifejezéseket!

a) $x^2 - 3x - 18$;

b) $x^2 - 14x + 49$;

c) $x^2 + 2x + 8$;

d) $9x^2 - 12x + 4$.

3. K2 Egyszerűsítsük az alábbi törteket!

a) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 6x + 5}$; b) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 8x - 33}$; c) $\frac{3x^2 - 17x - 6}{3x^2 + 13x + 4}$.

4. E1 Egyszerűsítsük a következő törtet!

$\frac{x^2 + (2 - a)x - 2a}{x^2 - 3ax + 2a^2}$.

5. E1 Egyszerűsítsük a következő törtet!

$\frac{x^3 + 2x^2 - 24x}{2x^3 + 28x^2 + 96x}$.

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1256., 1257., 1262., 1263., 1266.

10. Másodfokú egyenletrendszerek

Tavaly megismerkedtünk a kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszerekkel, azok megoldási módszereivel. A mostani leckében – ismerve már a másodfokú egyenlet megoldási módszerét – a másodfokú kétismeretlenes egyenletrendszerekkel foglalkozunk.

Ha a másodfokú kétismeretlenes egyenletrendszer egyik egyenletében mindkét ismeretlen csak az elsőfokon szerepel, akkor egyszerű dolgunk van: kifejezzük az egyik ismeretlent az elsőfokú egyenletből, majd a kapott kifejezést behelyettesítjük a másodfokú egyenletbe. Ezzel egy egyismeretlenes másodfokú egyenletet kapunk; ezt megoldjuk, majd a kapott gyököket visszahelyettesítjük az elsőfokú egyenletbe, s így megkapjuk a másik ismeretlen értékét (értékeit) is. Nézzünk minderre egy egyszerű példát!

1. példa Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$x^2 + y^2 - 6xy = 1$ és $x + 2y = 8$.

Megoldás

Mivel a második egyenlet elsőfokú, ezért fejezzük ki a második egyenletből az egyik ismeretlent, például x-et:

$x = 8 - 2y$.

Ezt az első egyenletbe helyettesítve, a következő egyenlethez jutunk:

$(8 - 2y)^2 + y^2 - 6y(8 - 2y) = 1$.

Elvégezve a kijelölt műveleteket, azt kapjuk:

$64 + 4y^2 - 32y + y^2 - 48y + 12y^2 = 1$, azaz

$17y^2 - 80y + 63 = 0$.

Innen

$y_{1,2} = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 4 \cdot 17 \cdot 63}}{34} = \frac{80 \pm 46}{34}$, $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{63}{17}$.

Az y-ra kapott értékeket az x előző kifejezésébe visszahelyettesítve, az adódik: $x_1 = 6$ és $x_2 = 8 - \frac{126}{17} = \frac{10}{17}$. Tehát az eredeti egyenletrendszer megoldásai:

$x_1 = 6, \quad y_1 = 1 \quad$ és $\quad x_2 = \frac{10}{17}, \quad y_2 = \frac{63}{17}$.

Ellenőrizzük a számolást visszahelyettesítéssel az eredeti egyenletekbe!

2. példa Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!
$x + xy + y = 14 \quad$ és $\quad x^2y + xy^2 = 48$.

Megoldás

A második egyenlet bal oldalát szorzattá alakíthatjuk: $xy(x + y) = 48$. Ezt és az első egyenletet figyelve, érdemesnek látszik bevezetni $(x + y)$-ra és (xy)-ra egy-egy új ismeretlent. Legyen

$x + y = a \quad$ és $\quad xy = b$.

Ezzel az eredeti egyenletrendszer így írható:

$a + b = 14 \quad$ és $\quad ab = 48$.

Ez már egy olyan kétismeretlenes másodfokú egyenlet, amelynek egyik egyenlete elsőfokú. Fejezzük ki az első egyenletből valamelyik ismeretlent: $b = 14 - a$, majd helyettesítsük ezt be a második egyenletbe:

$a(14 - a) = 48, \quad$ ahonnan $\quad a^2 - 14a + 48 = 0$.

$a_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 192}}{2} = \frac{14 \pm 2}{2}, \quad a_1 = 8, \quad a_2 = 6.$

Ezekkel az értékekkel: $b_1 = 14 - a_1 = 14 - 8 = 6 \quad$ és $\quad b_2 = 14 - 6 = 8$.

Azt kaptuk tehát, hogy

$x + y = 8, \quad xy = 6 \quad$ vagy $\quad x + y = 6, \quad xy = 8$.

Első esetben $y = 8 - x$, amit a másik egyenletbe helyettesítve:

$x(8 - x) = 6, \quad$ azaz $\quad x^2 - 8x + 6 = 0$,

$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 24}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{10}}{2}, \quad x_1 = 4 + \sqrt{10}, \quad x_2 = 4 - \sqrt{10}$.

A megfelelő y értékek:

$y_1 = 8 - x_1 = 8 - 4 - \sqrt{10} = 4 - \sqrt{10}$,

$y_2 = 8 - 4 + \sqrt{10} = 4 + \sqrt{10}$.

A másik esetben $y = 6 - x$; ezzel a másik egyenlet:

$x(6 - x) = 8, \quad$ azaz $\quad x^2 - 6x + 8 = 0$.

Ez utóbbi egyenlet gyökei: $x_1 = 2, \ x_2 = 4$. A megfelelő y értékek: $y_1 = 6 - x_1 = 4$ és $y_2 = 6 - 4 = 2$.

Tehát a 2. példában kitűzött egyenletrendszer megoldásai:

$x_1 = 4 + \sqrt{10}, \ y_1 = 4 - \sqrt{10}$,

$x_2 = 4 - \sqrt{10}, \ y_2 = 4 + \sqrt{10}$,

$x_3 = 2, \quad y_3 = 4$,

$x_4 = 4, \quad y_4 = 2$.

Ellenőrizzük a számolást visszahelyettesítéssel az eredeti egyenletekbe!

3. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a racionális számpárok halmazán!
$x^2 + y^2 = 13 \quad$ és $\quad xy + x + y = -5$.

Megoldás

Most a következő ötlettel élhetünk: szorozzuk meg a második egyenletet 2-vel, majd a kapott egyenletet és az első egyenletet adjuk össze.

$$+\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ 2xy+2x+2y=-10 \end{cases}$$

$$x^2+y^2+2xy+2x+2y=3$$

Az egyenletet még így is írhatjuk:

$(x+y)^2+2(x+y)-3=0$.

Ha most bevezetjük az $x+y=a$ új ismeretlent, akkor az

$a^2+2a-3=0$

másodfokú egyenlethez jutunk. Ennek megoldása:

$$a_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}, \qquad a_1=-3, \quad a_2=1.$$

Ezek szerint $x+y=-3$ vagy $x+y=1$, azaz $y=-3-x$ vagy $y=1-x$. Mindkét esetben helyettesítsük vissza az y-ra kapott értéket valamelyik eredeti egyenletbe (pl. az elsőbe).

Első esetben

$x^2+(-3-x)^2=13$, ahonnan $2x^2+6x-4=0$,

$x^2+3x-2=0$,

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+8}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}.$$

Mivel az x-re kapott értékek irracionálisak, így az $y=-3-x$ értékek is azok, így ebben az esetben nincs az eredeti egyenletrendszernek megoldása a racionális számpárok halmazán.

A második esetben

$x^2+(1-x)^2=13$, ahonnan $2x^2-2x-12=0$,

$x^2-x-6=0$,

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}, \qquad x_1=3, \quad x_2=-2.$$

A megfelelő y értékek: $y_1=-2$, $y_2=3$. Tehát ez eredeti egyenletrendszer megoldásai a racionális számpárok halmazán:

$x_1=3$, $y_1=-2$ és $x_2=-2$, $y_2=3$.

Ellenőrizzük a megoldást!

Érdekes észrevételt tehetünk, ha összehasonlítjuk a 2. és a 3. példában a megoldásra kapott számpárokat. Mindkét példában azt vehetjük észre, hogy ha az x-re, illetve y-ra kapott megoldásokat felcseréljük, akkor az így kapott számpár is megoldása az egyenletrendszernek. Ez azonnal érthetővé válik, ha megnézzük magukat az egyenletrendszereket is. Mindkét esetben olyan egyenletrendszerrel volt dolgunk, amelyekben az x és y ismeretleneket felcserélve pontosan ugyanarra az egyenletrendszerre jutunk, mint az eredeti egyenletrendszer volt. Az olyan algebrai kifejezéseket, amelyekben a változók felcserélésével ugyanazt az algebrai kifejezést kapjuk, szokták algebrailag szimmetrikus kifejezéseknek nevezni. Mivel a 2. és a 3. példa egyenletrendszerei ilyen algebrailag szimmetrikusak voltak, ezért a megoldásra kapott számpárok is nyilván felcserélhetők.

Feladatok

1. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!

a) $x-y=3$ és $xy=10$;

b) $x^2+y^2=5$ és $y-x=1$;

c) $x+y=9$ és $xy=20$;

d) $x-y=7$ és $x^2-y^2=19+xy$;

e) $y-2x=3$ és $y^2-x^2=3(xy+1)$.

2. K2 Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!

a) $x^2 + xy = 35$ és $y^2 + xy = 14$;

b) $x^2 + y^2 + x + y = 18$ és $x^2 - y^2 + x - y = 6$;

c) $x^2y - xy^2 = 48$ és $xy + 3x - 3y = 30$.

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1301., 1302., 1308., 1309., 1317., 1321.

3. E1 Oldjuk meg a következő háromismeretlenes egyenletrendszert!

$a^2 + b^2 + c^2 = 29$, $ab + bc + ac = -10$, $a + b = -1$.

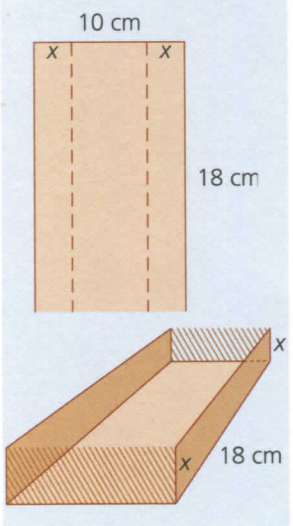
4. E2 Oldjuk meg a következő egyenletrendszert (a egy valós paraméter), tudva azt, hogy annak csak egyetlen valós (számpár) megoldása van!

$\sqrt{y^2 - 4x + 2} = y^2 - 4x - 4$ és $x + y = 2a$.

11. Másodfokú egyenlőtlenségek

A megelőző néhány leckében másodfokú egyenletekkel, azok megoldásával, valamint egy fontos elemével, a diszkriminánssal foglalkoztunk. Nagyon gyakran előfordul azonban, hogy a vizsgált probléma, illetve az ahhoz készített matematikai modell, nem másodfokú egyenletre, hanem másodfokú egyenlőtlenségre vezet. A mostani leckében ilyen egyenlőtlenségekkel foglalkozunk.

39.



1. példa Vegyük elő még egyszer a III/3. leckében kitűzött 1. példát (amikor is az volt a kérdés, hogy egy téglalap alakú fémlemezből milyen maximális térfogatú edényt készíthetünk). Akkor arra az eredményre jutottunk, hogy a kérdéses lemezből kialakított edénynek akkor a legnagyobb a térfogata, ha $x = 2{,}5$ cm, és a maximális térfogat 225 cm³.

Most tételezzük fel, hogy ebben az edényben minden alkalommal legalább 144 cm³ térfogatú anyagot szeretnénk tárolni. Mekkora legyen a felhajtott x sáv szélessége, hogy ez a térfogat mindenképpen beleférjen? *(39. ábra)*

Megoldás

Mivel az edény $V(x)$ térfogata az x függvényében: $V(x) = (10 - 2x)18x$,

$V(x) = -36x^2 + 180x$,

így jelen esetben a

$-36x^2 + 180x \geq 144$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Az egyenlőtlenséget így is írhatjuk:

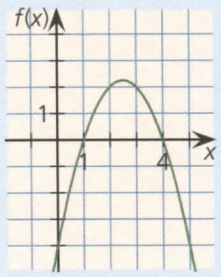
$-36x^2 + 180x - 144 \geq 0$, azaz $-x^2 + 5x - 4 \geq 0$.

A kapott másodfokú egyenlőtlenséget legcélszerűbb grafikus úton megoldani. Vázoljuk fel az

$f(x) = -x^2 + 5x - 4$

másodfokú függvény grafikus képét: mivel az a kérdés, hogy a függvény értéke mikor lesz pozitív vagy 0, ezért elegendő most csak azt meggondolnunk, hogy a parabola merrefelé nyílik, és hol vannak a zérushelyei.

40.



$-x^2 + 5x - 4 = 0$,

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{-2} = \frac{-5 \pm 3}{-2}$, tehát $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

A függvény képe lefelé nyíló parabola, így vázolhatjuk a függvény grafikonját. *(40. ábra)*

A grafikonról már könnyen leolvashatjuk az egyenlőtlenség megoldását:

ha $-x^2 + 5x - 4 \geq 0$, akkor $1 \leq x \leq 4$,

vagyis az edény térfogata akkor lesz legalább 144 cm³, ha a felhajtott sáv legalább 1 cm és legfeljebb 4 cm széles.

2. példa Melyek azok a konvex sokszögek, amelyek átlóinak a száma legalább 4-gyel nagyobb, mint az oldalak számának 3-szorosa?

Megoldás

Az n oldalú konvex sokszög átlóinak a száma $\frac{n(n-3)}{2}$. Ha ez legalább 4-gyel nagyobb, mint az oldalak számának háromszorosa, akkor

$$\frac{n(n-3)}{2} - 4 \geq 3n.$$

Ezt az egyenlőtlenséget kell megoldanunk a pozitív egész számok halmazán. Szorozzuk meg mindkét oldalt 2-vel, majd rendezzük 0-ra a kapott egyenlőtlenséget.

$n^2 - 3n - 8 \geq 6n$, azaz $n^2 - 9n - 8 \geq 0$.

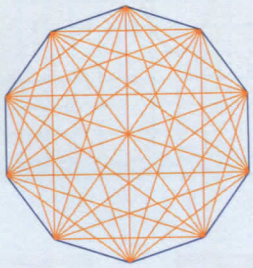
Az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő másodfokú kifejezés grafikus képe egy felfelé nyíló parabola. A zérushelyek:

$$n_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81+32}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{113}}{2}, \qquad n_1 \approx 9{,}81, \quad n_2 \approx -0{,}8.$$

Mivel n egész szám, ezért az egyenlőtlenség megoldása: $n \geq 10$ vagy $n \leq -1$. A negatív egészek nyilván nem jönnek számításba, így azt kaptuk, hogy ha a konvex sokszög átlóinak a száma legalább 4-gyel több, mint az oldalak háromszorosa, akkor a sokszögnek legalább 10 oldala van.

(A *41. ábrán* az $n = 10$ esetet szemléltettük.)

41.



3. példa Ábrázoljuk egy számegyenesen az alábbi kifejezés értelmezési tartományát!

$$\frac{\sqrt{4x^2+11x-3}}{|x|-4}.$$

Megoldás

A megadott kifejezés akkor értelmezhető, ha az alábbi feltételek teljesülnek:

$|x| - 4 \neq 0$ és $4x^2 + 11x - 3 \geq 0$.

Az első feltételből következik, hogy $x \neq \pm 4$.

A második feltétel egy másodfokú egyenlőtlenség. A benne szereplő másodfokú kifejezés grafikus képe egy felfelé nyíló parabola. *(42. ábra)* Számítsuk ki a zérushelyeket!

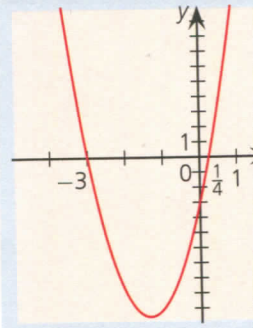
$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121+48}}{8} = \frac{-11 \pm 13}{8}, \qquad x_1 = -3, \quad x_2 = \frac{1}{4}.$$

A grafikonról már könnyen leolvashatjuk a másodfokú egyenlőtlenség megoldását:

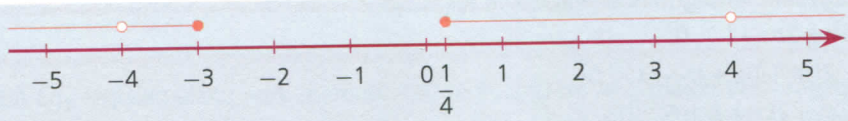
$x \leq -3$ vagy $\frac{1}{4} \leq x$.

A két feltételt együtt tekintve, az eredeti kifejezés értelmezési tartománya a számegyenesen *(43. ábra)*:

42.



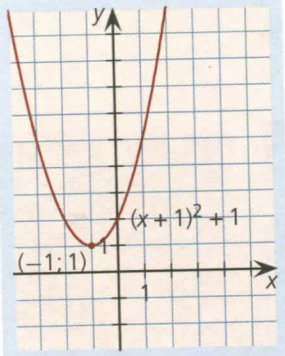
43.



4. példa Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$x^2 + 2x + 2 \geq 0$.

44.



Megoldás

Most a bal oldalnak megfelelő grafikon egy felfelé nyíló parabola. Mivel a másodfokú kifejezés diszkriminánsa

$4 - 8 = -4 < 0$,

ezért a kérdéses parabolának nincs közös pontja az x tengellyel, ami azt jelenti, hogy teljes egészében az x tengely fölött van. Ábrázoljuk e parabolát!

$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 - 1 + 2 = (x+1)^2 + 1$.

Tehát az eredeti egyenlőtlenség minden valós x-re teljesül. *(44. ábra)*

Összefoglalva a most vizsgált négy példa tapasztalatait:
Az $ax^2 + bx + c \geq 0$ (vagy $ax^2 + bx + c \leq 0$) másodfokú egyenlőtlenség megoldásához az alábbi módon juthatunk el: legelőször meghatározzuk a másodfokú kifejezés zérushelyeit (ha vannak), majd – megállapítva, hogy a kifejezéshez tartozó másodfokú függvény grafikus képe felfelé vagy lefelé nyíló parabola – felvázoljuk a kifejezés grafikus képét. Végül a kapott grafikonról leolvassuk az egyenlőtlenségben feltett kérdést, azaz hogy a grafikus kép milyen valós x értékek esetén lesz pozitív, illetve negatív. Ha a másodfokú kifejezésnek nincsenek zérushelyei, akkor a megfelelő parabola teljes egészében az x tengely fölött vagy alatt van, így az egyenlőtlenségnek vagy nincs megoldása, vagy pedig minden valós szám megoldás.

Feladatok

1. K1 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 - 13x + 42 \geq 0$; *b)* $x^2 + 6x - 16 < 0$; *c)* $2x^2 + 5x - 3 > 0$.

2. K2 Ábrázoljuk számegyenesen az alábbi kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\sqrt{x^2 - 5x - 24}$; *b)* $\frac{\sqrt{-x^2 - 8x + 20}}{x - 1}$; *c)* $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2 - 6x}}$.

3. K2 Melyek azok a konvex sokszögek, amelyek átlóinak a száma 100-nál nagyobb, de 200-nál kisebb?

4. E1 Határozzuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\frac{\sqrt{-x^2 + 5x + 14}}{\sqrt{x^2 - 13x + 22}}$; *b)* $\sqrt{\frac{-x^2 + 5x + 14}{x^2 - 13x + 22}}$.

5. E1 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 + |x - 1| > 5$; *b)* $|x^2 - 6x + 5| \geq 4$.

6. E1 Határozzuk meg a következő egyenlőtlenségekben szereplő paraméterek értékét úgy, hogy az egyenlőtlenség minden valós x-re teljesüljön!

a) $x^2 + 6x + 2m - 1 > 0$;

b) $mx^2 - 2(m+1)x + m - 3 < 0$;

c) $(k+1)x^2 - 2kx + k + 6 \geq 0$.

7. E2 Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a következő egyenlőtlenség minden x-re teljesüljön!

$$\frac{px^2 - (p+1)x + 2p - 1}{x^2 - 2px + p^2 - 1} \geq 1.$$

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1459–1462., 1466., 1468.

12. Szöveges másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek

Tavaly már találkoztunk olyan problémákkal, amelyek megoldásához szükséges matematikai modell valamilyen egyenlet felállítását kívánta. Akkor a problémák megoldásához elsőfokú egyenleteket, egyenletrendszereket írtunk fel, majd ezeket megoldva válaszoltuk meg a probléma szövegében feltett kérdést. Most, hogy megismerkedtünk a másodfokú egyenletek megoldásának módszereivel, olyan szöveges problémákat vizsgálunk, amelyek másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek felállítását, majd annak megoldását teszik szükségessé.

Az egyenlet vagy egyenletrendszer megalkotása során az első és legfontosabb a szöveg adatainak pontos értelmezése. Ezután megválasztjuk az ismeretlent (vagy ismeretleneket), majd a szöveg alapján logikai összefüggéseket keresve felírjuk a megfelelő egyenletet (egyenletrendszert).

1. példa Karcsi elvállalt egy munkát, melyet 10 nap alatt kellett elvégeznie. Kétnapi munka után rájött, hogy ezt a feladatot egyedül nem tudja határidőre elvégezni, ezért megkérte barátját, Sanyit, hogy végezzék együtt a munka hátralevő részét. Ha Karcsi egyedül végezné el az egész munkát, 2 nappal hamarabb készen lenne, mintha Sanyi végezné egyedül az egész munkát. Együtt dolgozva éppen készen lettek a munkával határidőre. Hány nap alatt lenne kész egyedül a munkával Karcsi? (A két fiú munkatempóját egyenletesnek tételezzük fel.)



Megoldás

Legyen x azoknak a napoknak a száma, ahány nap alatt Karcsi egyedül végezné el a munkát. Ekkor Sanyi egyedül $(x+2)$ nap alatt végezne a munkával. Ez egyben azt is jelenti, hogy egy nap alatt Karcsi az egész munka $\frac{1}{x}$ részét, Sanyi pedig az egész munka $\frac{1}{x+2}$ részét végezné el. Mivel éppen végeztek 10 nap alatt és Karcsi 10 napig, Sanyi pedig 8 napig dolgozott, így Karcsi a munka $\frac{10}{x}$ részét, Sanyi pedig a munka $\frac{8}{x+2}$ részét végezte el, így felírhatjuk az alábbi egyenletet:

$$\frac{10}{x}+\frac{8}{x+2}=1.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt az $x(x+2)$ közös nevezővel; azt kapjuk, hogy

$10(x+2)+8x=x(x+2)$, azaz $10x+20+8x=x^2+2x$,

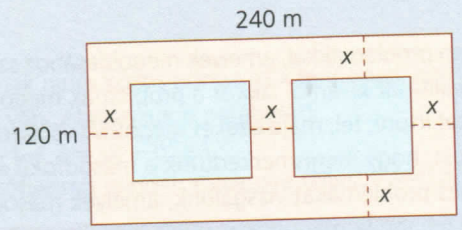
$x^2-16x-20=0$,

$x_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{256+80}}{2}\approx\frac{16\pm18{,}33}{2}$, $x_1\approx 17{,}165$, $x_2\approx -1{,}165$.

A negatív megoldás nyilván nem jön számításba, így azt kaptuk, hogy Karcsi egyedül kb. 17,16 nap (azaz kb. 16 nap és 4 óra) alatt, Sanyi pedig 19,16 nap (azaz kb. 19 nap és 4 óra) alatt végezné el a munkát.

2. példa Egy téglalap alakú park méretei: 120 m és 240 m. A parkban két virágágyás van a következő (45.) ábrán látható módon. A park szélén körbe és a virágágyások között sétautat alakítottak ki. E sétaút szélessége mindenütt ugyanannyi. Milyen széles ez a sétaút, ha a virágágyások területe a park területének 80%-a?

45.



Megoldás

A virágágyások egybevágó téglalapok *(45. ábra)*. Egy ilyen téglalap egyik oldala $120 - 2x$, a másik oldala pedig $\frac{240 - 3x}{2}$. Ezek szerint a virágágyások területe:

$$2 \cdot (120 - 2x) \cdot \frac{240 - 3x}{2} = (120 - 2x)(240 - 3x).$$

Ez a terület az egész park területének 80%-a, tehát felírhatjuk a következő egyenletet:

$(120 - 2x)(240 - 3x) = 0{,}8 \cdot 120 \cdot 240.$

Elvégezve a kijelölt műveleteket, azt kapjuk, hogy

$120 \cdot 240 - 360x - 480x + 6x^2 = 23\,040,$

$6x^2 - 840x + 5760 = 0,$ azaz

$x^2 - 140x + 960 = 0.$

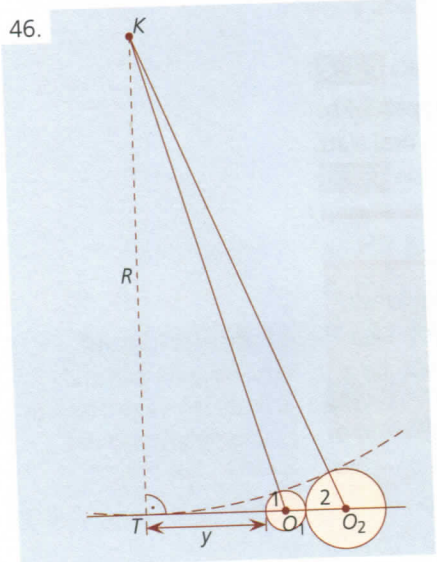
$$x_{1,2} = \frac{140 \pm \sqrt{19\,600 - 3840}}{2} = \frac{140 \pm 125{,}5}{2},$$

$x_1 \approx 132{,}75, \qquad x_2 \approx 7{,}25.$

Mivel x nyilván kisebb, mint $\frac{120}{2} = 60$, ezért a 132,75 nem megfelelő, így azt kaptuk, hogy a sétaút szélessége kb. 7,25 m.

3. példa Két kör kívülről érinti egymást, sugaraik 1 cm és 2 cm. Mekkora annak a körnek a sugara, amely érinti mindkét kört, továbbá érinti a két kör középpontján átmenő egyenest?

46.



Megoldás

Készítsünk ábrát a feladat szövege alapján! Mivel az érintkező körök középpontjain áthaladó egyenes áthalad az érintési ponton, ezért célszerűnek látszik az adott körök középpontjait összekötni a keresett kör K középpontjával. Emellett érdemes K-ból az adott körök középpontjain átmenő egyenesre is merőlegest állítani, hiszen tudjuk, hogy e merőleges talppontja éppen a T érintési pont lesz.

Ezek után írjuk fel Pitagorasz tételét a KTO_1 és KTO_2 derékszögű háromszögekre.

A KTO_1 derékszögű háromszög oldalai:

$KO_1 = R + 1, \qquad KT = R, \qquad TO_1 = y + 1,$

tehát

$(R + 1)^2 = R^2 + (y + 1)^2.$

A KTO_2 derékszögű háromszög oldalai:

$KO_2 = R + 2, \qquad KT = R, \qquad TO_2 = y + 4,$

tehát

$(R + 2)^2 = R^2 + (y + 4)^2.$

Ezek szerint az

$(R + 1)^2 = R^2 + (y + 1)^2$ és $(R + 2)^2 = R^2 + (y + 4)^2$

egyenletekből álló kétismeretlenes másodfokú egyenletrendszert kell megoldanunk. Érdemes mindkét egyenletben elvégezni a kijelölt műveleteket, az egyenleteket a legegyszerűbb alakra hozni, hogy aztán eldönthessük, melyik egyenletből melyik ismeretlent fejezzük ki.

Az első egyenletből:

$R^2 + 2R + 1 = R^2 + y^2 + 2y + 1$, azaz $2R = y^2 + 2y$.

A második egyenletből:

$R^2 + 4R + 4 = R^2 + y^2 + 8y + 16$, azaz $4R = y^2 + 8y + 12$.

Most már könnyen áttekinthetjük a kapott két egyenletet: vonjuk ki az első egyenlet kétszereséből a másodikat; azt kapjuk, hogy

$0 = y^2 - 4y - 12$,

$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2}$, $y_1 = 6$, $y_2 = -2$.

Mivel $y > 0$, ezért csak $y = 6$ lehetséges, és ekkor a $2R = y^2 + 2y$ egyenletből $2R = 48$, vagyis a keresett kör sugara $R = 24$ cm.

Már az ókorban is megfigyelték, hogy az aranymetszeti arány valamilyen „megmagyarázhatatlan" ok miatt különleges esztétikai élményt nyújt a szemlélőnek.

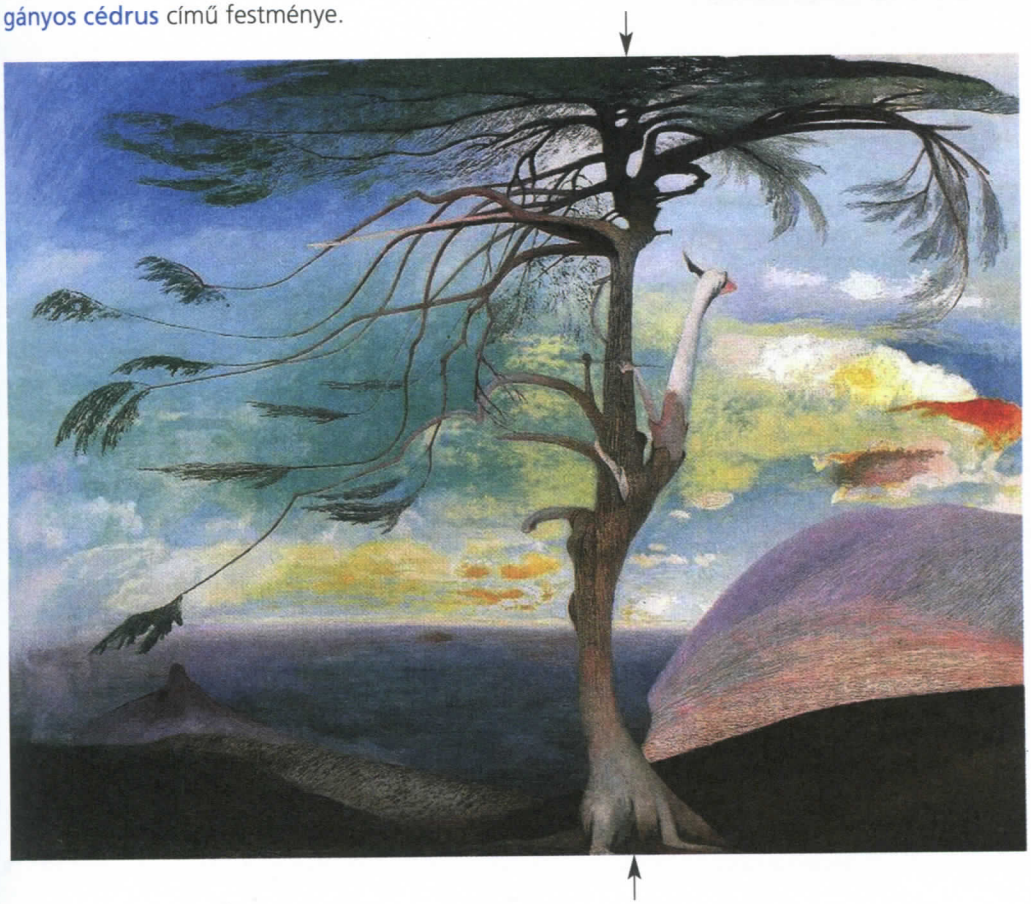
De mi is az az aranymetszés?

Az aranymetszés

Aranymetszésnek nevezzük egy mennyiség (pl. egy szakasz) két olyan részre bontását, melyek közül a kisebb úgy aránylik a nagyobbhoz, mint a nagyobb az egészhez.

Aranymetszés:
$\frac{k}{l} = \frac{l}{k+l}$
$(k < l)$

Az ókori építészet számos, mindnyájunkat ámulatba ejtő remekművén tökéletes pontossággal fedezhetők fel az aranymetszésnek megfelelő arányok. Ugyanez az arány megtalálható számos reneszánsz művészeti alkotáson is, de ugyanúgy megtalálható ez az arány a későbbi korok művészetében is. Említhetnénk az arány megjelenését és szerepét bizonyos zeneművekben, reneszánsz, barokk vagy éppen romantikus festményekben való előfordulását is, melyet számos képzőművészeti elemzésben is leírtak már. Kiváló példa erre Csontváry Kosztka Tivadar: Magányos cédrus című festménye.



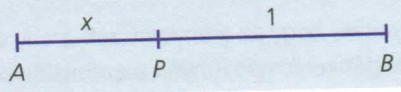
A képen a cédrusfa úgy osztja ketté a teret, hogy a kisebb (a jobb oldali rész) úgy aránylik a nagyobbhoz (a bal oldali részhez), mint a nagyobb az egészhez.

4. példa Határozzuk meg az aranymetszés arányszámát! Azaz, ha az aranymetszés szerinti felbontás nagyobbik szelete 1, akkor mekkora a kisebbik szelete?

Megoldás

Vegyünk egy *AB* szakaszt és jelöljük *P*-vel az aranymetszés szerinti osztópontot, legyen 1 a nagyobbik szakasz, *x* pedig a kisebbik.

47.



Ekkor az aranymetszés szabálya szerint

$\frac{x}{1} = \frac{1}{1+x}$, azaz $x(1+x) = 1$,

$x^2 + x - 1 = 0$.

A kapott másodfokú egyenlet megoldása:

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

A negatív gyök nyilván nem jön számításba, így kapjuk az aranymetszés arányszámát:

$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$.

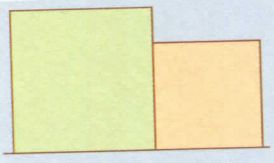
[Ha a nagyobbik szakaszt jelölnénk *x*-szel, és a kisebbik lenne egységnyi, akkor az arányszám $1 : \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ($\approx 1{,}618$) adódna.]

Feladatok

1. K1 Három egymást követő pozitív egész szám négyzetének összege 75-tel nagyobb, mint a legkisebb és legnagyobb szám szorzata. Melyek ezek a számok?

2. K2 Egy derékszögű háromszög területe 120 cm². A háromszög köré írható körének a sugara 13 cm. Mekkorák a háromszög oldalai?

48.



3. K2 A *48. ábrán* egy olyan kertet látunk, melynek alakja: két négyzet egymás mellé helyezve az ábrán látható módon. A kert területe 2500 m². A bekerítéséhez összesen 220 m kerítésre volt szükség. Mekkorák az egyes négyzetek oldalai?

4. K2 Egy téglalapot egy, a rövidebb oldalával párhuzamos szakasszal két részre bontottunk: az egyik rész egy négyzet, a másik pedig egy olyan téglalap, amely oldalainak aránya egyenlő az eredeti téglalap oldalainak arányával. Számítsuk ki az eredeti téglalap oldalainak az arányát!

5. K2 Egy alkalommal elutaztunk Budapestről a 720 km távolságra levő Münchenbe. Visszafelé az utat 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val nagyobb sebességgel tettük meg, és így 1 órával rövidebb idő alatt, mint odafelé. Mekkora volt az odafelé úton a sebességünk?



6. E1 András kerékpárral ugyanazon az úton mindig ugyanakkora sebességgel szokott elmenni a távoli iskolába. Egy alkalommal a távolság p%-át szokásos sebességénél p%-kal kisebb sebességgel tette meg. Ekkor úgy érezte, hogy késésben van, ezért a hátra levő utat szokásos sebességénél $2p$%-kal nagyobb sebességgel tette meg. Így szokásos menetideje $\frac{5}{6}$ részére csökkent. Határozzuk meg p értékét!

7. E2 Egy vázában minden szál virágon annyi bimbó volt, ahány szál virág volt a vázában. Egy napon kinyílt az összes bimbó ötödrésze. Másnap kinyílt a még meglevő bimbók negyede, majd a következő napon kinyílt a még ki nem nyílt bimbók harmada. Így összesen 5-tel több ki nem nyílt bimbó maradt, mint ahány szál virág volt a vázában. Hány szál virág volt a vázában?

13. Másodfokú egyenletre vezető gyökös egyenletek

Gyökös egyenletek

Gyakran találkozunk olyan matematikai modellekkel, egyenletekkel vagy egyenletrendszerekkel, melyekben az ismeretlen négyzetgyök alatt is szerepel. Az ilyen egyenleteket szokás **gyökös egyenleteknek** mondani. A gyökös egyenletek vizsgálata általában az egyenlet értelmezési tartományának vizsgálatával kezdődik, hiszen tudjuk, hogy a négyzetgyök alatt csak nemnegatív szám szerepelhet. Miután megállapítottuk az egyenlet értelmezési tartományát, az a célunk, hogy az egyenletben szereplő négyzetgyököt (vagy négyzetgyököket) kiküszöböljük. Ezt általában négyzetre emeléssel (sok esetben többszöri négyzetre emeléssel) érhetjük el. De nagyon vigyázzunk: ha ugyanis egy egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük, általában újabb, hamis gyökök is felléphetnek. Az egyenlet két oldalának négyzetre emelése nem ekvivalens átalakítás, így a legvégül kapott gyököket mindenképpen ellenőriznünk kell. Nézzük csak a következő egyenletet:

$x - 3 = 5$.

Ennek nyilván egyetlen megoldása van: az $x = 8$. Ha most az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük, akkor

$(x-3)^2 = 25$, azaz $x^2 - 6x - 16 = 0$

másodfokú egyenlethez jutunk, aminek a megoldásai:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{2} = \frac{6 \pm 10}{2}, \qquad x_1 = 8, \quad x_2 = -2.$$

Látjuk tehát, hogy a négyzetre emeléssel az $x = 8$ mellett egy újabb gyök (az eredeti egyenletnek egy hamis gyöke) is fellépett. Ez az egyszerű példa talán jól érzékelteti, hogy az egyenletek mindkét oldalának négyzetre emelése ugyan megengedhető lépés, de nagy körültekintést igényel a végső és az eredeti egyenletet kielégítő valós számok kiszűrése.

1. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!
$\sqrt{x+5} = x + 3$.

Megoldás

Először vizsgáljuk meg az egyenlet értelmezési tartományát. A bal oldalon a négyzetgyök alatt nemnegatív számnak kell szerepelnie, vagyis $x + 5 \geq 0$, azaz $x \geq -5$ kell, hogy legyen. Mindkét oldalt négyzetre emelve a következőt kapjuk:

$x + 5 = x^2 + 6x + 9$, vagyis $x^2 + 5x + 4 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}, \qquad x_1 = -1, \quad x_2 = -4.$$

Ellenőrizzük a kapott megoldásokat!

Ha $x=-1$, akkor $\sqrt{-1+5}=-1+3$, ahonnan $\sqrt{4}=2$. Tehát az $x=-1$ valóban megoldása az eredeti egyenletnek.

Ha $x=-4$, akkor $\sqrt{-4+5}=-4+3$, ahonnan $\sqrt{1}=-1$. Ez nyilván lehetetlen, hiszen a bal oldal nemnegatív szám, akkor a jobb oldal nem lehet negatív. Tehát az $x=-4$ hamis gyök, nem elégíti ki az eredeti egyenletet.

Azt, hogy az $x=-4$ nem lehet megoldás, egyéb módon is megállapíthattuk volna. Ha megfigyeljük az eredeti egyenlet két oldalát, akkor azt látjuk, hogy a bal oldal – a négyzetgyök definíciója miatt – nemnegatív, így szükséges, hogy a jobb oldal is nemnegatív legyen. Ez azt jelenti, hogy az $x\geq -5$ értelmezési tartományt tovább szűkíthetjük, hiszen $x+3\geq 0$, azaz $x\geq -3$-nak is teljesülnie kell. Így az $x=-4$ valóban nem lehet megoldás.

Az előbbi feladat megoldása során elegendő volt egyszer négyzetre emelni az egyenlet két oldalát. Előfordulhat, hogy ez nem elég: az egyszeri négyzetre emeléssel csökkenteni tudjuk a négyzetgyökök számát, de nem szűnik meg minden négyzetgyök az egyenletben. Ilyenkor újabb négyzetre emelés válik szükségessé. De érdemes a második négyzetre emelés előtt úgy rendezni az egyenlet két oldalát, hogy a még megmaradt négyzetgyök „egyedül maradjon" az egyenlet valamelyik oldalán. Nézzünk erre is egy példát!

2. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!
$\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x-12}$.

Megoldás

Az egyenlet – a benne szereplő négyzetgyökök miatt – akkor értelmezhető, ha az
$x+3\geq 0$, $x-4\geq 0$, $x-12\geq 0$
egyenlőtlenségek mindegyike teljesül. Az egyenlőtlenségek megoldáshalmazainak metszete, vagyis az egyenlet értelmezési tartománya: $x\geq 12$.

Ezek után emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát. (Vigyázzunk: a bal oldalon kéttagú összeg szerepel!)

$x+3+x-4-2\sqrt{x+3}\sqrt{x-4}=x-12$, azaz $-1+x-2\sqrt{(x+3)(x-4)}=-12$.

Ezzel a négyzetre emeléssel elértük, hogy egyenletünkben már nem három, hanem csak egy négyzetgyök szerepel. Újabb négyzetre emeléssel ezt a négyzetgyököt is kiküszöbölhetjük, előbb azonban csoportosítsuk úgy az egyenlet két oldalán szereplő tagokat, hogy a négyzetgyökös tag egyedül maradjon.

$11+x=2\sqrt{x^2-x-12}$.

Négyzetre emelés után azt kapjuk:

$x^2+121+22x=4x^2-4x-48$, vagyis $0=3x^2-26x-169$,

$x_{1,2}=\frac{26\pm\sqrt{676+2028}}{6}=\frac{26\pm 52}{6}$, $x_1=13$, $x_2=-\frac{26}{6}=-\frac{13}{3}$.

A negatív gyök nem tartozik az egyenlet értelmezési tartományába, így nem lehet megoldás. Így az egyedüli lehetséges megoldás: $x=13$.

Ellenőrizzük a kapott gyököt:

$\sqrt{13+3}-\sqrt{13-4}=\sqrt{13-12}$, azaz $4-3=1$.

Tehát az $x=13$ valóban kielégíti az egyenletet.

3. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!
$\sqrt{1+x\sqrt{x^2+3}}=x-1$!

Megoldás

Most eléggé nehézkes lenne az egyenlet értelmezési tartományát vizsgálnunk, így a megoldás végén minden kapott gyököt ellenőriznünk kell majd. Az mindenesetre szükséges, hogy az egyenlet jobb oldala $x-1 \geq 0$ legyen, hiszen a bal oldal nemnegatív. Ezek szerint az egyenlet x megoldására $x \geq 1$ kell legyen.

Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát!

$1 + x\sqrt{x^2+3} = x^2 - 2x + 1$, azaz $x\sqrt{x^2+3} = x^2 - 2x$.

Mivel $x \geq 1$, ezért $x \neq 0$, így oszthatjuk mindkét oldalt x-szel. Azt kapjuk, hogy

$\sqrt{x^2+3} = x - 2$.

A kapott egyenlet bal oldala nemnegatív, így a jobb oldalon is $x-2 \geq 0$, azaz $x \geq 2$ kell, hogy legyen. Újabb négyzetre emelés után

$x^2 + 3 = x^2 - 4x + 4$, azaz $4x = 1$, ahonnan $x = \frac{1}{4}$.

De $x = \frac{1}{4}$ az $x \geq 2$ miatt nem lehet megoldás, így azt kaptuk, hogy az eredeti egyenletnek nincs valós megoldása.

Gyakran előfordul, hogy az egyenlet megoldásaihoz nem négyzetre emeléssel, hanem valamilyen ügyes helyettesítéssel jutunk el. Ilyenkor általában az eredeti – első látásra ijesztőnek tűnő – egyenletet két másodfokú egyenletre tudjuk visszavezetni. Erre példa a következő feladat.

4. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$x^2 + x = 5 - \sqrt{x^2+x+7}$.

Megoldás

Az egyenlet értelmezési tartománya az $x^2 + x + 7 \geq 0$ egyenlőtlenségnek eleget tevő számok halmaza. De ennek a másodfokú kifejezésnek a diszkriminánsa: $D = 1 - 28 < 0$, így az $x^2 + x + 7 = 0$ egyenletnek nincsenek valós gyökei. Mivel a másodfokú kifejezésnek megfelelő parabola felfelé nyílik, nincs közös pontja az x tengellyel, így teljes egészében az x tengely fölött van. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy az egyenletben a négyzetgyök alatti kifejezés minden x-re pozitív, vagyis az egyenlet értelmezési tartománya minden valós szám.

Mivel az eredeti egyenlet bal oldalán „majdnem" ugyanaz szerepel, mint a jobb oldali négyzetgyök alatt, ezért célszerűnek látszik az egyenlet mindkét oldalához 7-et hozzáadni.

$x^2 + x + 7 = 12 - \sqrt{x^2+x+7}$.

Ha most bevezetjük a $\sqrt{x^2+x+7} = a$ új ismeretlent, akkor nyilván $x^2 + x + 7 = a^2$, így az alábbi egyszerűbb egyenlethez jutunk:

$a^2 + a - 12 = 0$,

ahol az a-t definiáló egyenlőség miatt nyilván $a \geq 0$. Ez utóbbi egyenlet megoldása:

$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$, $a_1 = -4$, $a_2 = 3$.

Mivel $a \geq 0$, ezért csak $a = 3$ lehetséges. Ezek szerint $a = \sqrt{x^2+x+7} = 3$, azaz

$x^2 + x + 7 = 9$, ahonnan $x^2 + x - 2 = 0$,

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Ellenőrizzük a kapott megoldásokat.

Ha $x = -2$, akkor

$4 - 2 = 5 - \sqrt{4-2+7}$, azaz $2 = 5 - 3$.

Ha $x = 1$, akkor

$1+1=5-\sqrt{1+1+7}$, azaz $2=5-3$.
Tehát mindkét kapott gyök kielégíti az eredeti egyenletet.

Feladatok

1. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x+7}=x-5$;

b) $\sqrt{2x-3}=11$;

c) $\sqrt{2x^2-9}=x-3$.

2. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{2x+8}-\sqrt{x+5}=7$;

b) $\sqrt{x+13}-\frac{10}{\sqrt{x+13}}=\sqrt{5x-51}$;

c) $2\sqrt{x+1}+3\sqrt{1-x}=5$.

3. K2 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x^2-2x+1}=4$;

b) $\sqrt{4x^2+4x+1}=\frac{1}{2}$;

c) $\sqrt{x^2-6x+9}=3-x$.

4. E1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x^2+x+2}=x^2+x$;

b) $\sqrt{ax+b}=ax+b \quad (a\neq 0)$.

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1525., 1528., 1531., 1534., 1539.

5. E2 Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

6. E2 Mely x, y valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőséget?

$\sqrt{x^2-x-12}+\sqrt{-x^2+6x-8}+y^2-xy=2x+y-2$.

A magasabb fokú algebrai egyenletek története (Olvasmány)

Az első- és másodfokú egyenletek megoldását már az ókorban is ismerték az akkori idők matematikusai. A hindu matematikusok már igen ügyesen tudtak számolni a negatív és irracionális számokkal, és ez lehetővé tette, hogy általános megoldását is megadják a másodfokú egyenletnek. A görög és hindu matematikát az arabok ismertették meg Európával. Egyik legnagyobb matematikusuk, *Al-Hvarizmi* (820 körül) egy kiváló munkájában már foglalkozott harmad- és negyedfokú algebrai egyenletekkel is.

Az ilyen típusú egyenletek általános megoldása a XVI. században indult fejlődésnek. Szokás volt akkoriban, hogy a kor kiváló matematikusai tudományos párbajra hívták egymást. Ilyen alkalmakkor nem kis pénzdíjjal és dicsőséggel járó számolóversenyekre került sor a párbaj résztvevői között, és sok esetben éppen harmadfokú egyenleteket kellett megoldaniuk. A bolognai egyetem matematikaprofesszora, *Scipione del Ferro* (1465–1526) egy ilyen párbajra készülve általános megoldását adta a harmadfokú egyenletnek, de a módszerét nem árulta el senkinek (csupán egyetlen barátjának). Ez érthető is, hiszen a megoldási módszer birtokában biztos sikerre számíthatott a számolási párbajokon. Később *Nicolo Fontana Tartaglia* (1500–1557), ugyancsak olasz matematikus, egy párbaj alkalmával szembekerült Ferro egy tanítványával, akinek Ferro elárulta a módszert. Mivel Tartaglia tudta ezt, így nagyon komoly munkával ő is eljutott a harmadfokú egyenlet általános megoldási eljárásához, s nem kis meglepe-

tésre ő nyerte a kérdéses párbajt. A titkot azonban ő sem árulta el senkinek. A harmadfokú egyenlet általános megoldási eljárása végül is először *Girolamo Cardano* (1501–1576) olasz fizikus, matematikus tollából látott napvilágot, de nem az ő felfedezése. Cardano hosszas kérésére Tartaglia elárulta neki a módszert, s ezt tette közkinccsé Cardano – Tartaglia nem kis neheztelésére. Később Cardano egy tanítványa, *Ludovico Ferrari* (1522–1565) kidolgozta az általános negyedfokú algebrai egyenletek megoldási módszerét is, ügyesen visszavezetve harmadfokú egyenlet megoldására.

A XVI. században még ismeretlen volt a „komplex számok" fogalma – mi a középiskolában sem ismerkedhetünk meg vele –, így a harmadfokú egyenletek minden esetre kiterjedő megoldásáig nem juthattak el a kor tudósai. A XVIII. sz. kiemelkedő matematikusa, *Carl Friedrich Gauss* (1777–1855), – akit a matematikusok fejedelmének is szoktak nevezni – kidolgozta a komplex számok elméletét, s ezzel már valóban bármely valós együtthatójú harmad-, illetve negyedfokú egyenletnek eljutottak a legáltalánosabb megoldásához. Természetesen folyt tovább a kutatás, hiszen mindenkit érdekelt, hogyan lehet eljutni az ötöd-, hatod- és általában az *n*-ed fokú algebrai egyenletek általános megoldásához. A kutatások nem jártak sikerrel, mígnem egy kiváló norvég matematikus, a hányaott sorsú, fiatalon elhunyt *Niels Henrik Abel* (1802–1829) be nem bizonyította, hogy az általános ötödfokú egyenletet véges számú algebrai művelettel nem lehet megoldani, így az ilyen egyenleteknek nem is létezhet megoldóképlete.



Carl Friedrich Gauss

Nem sokkal később egy húszesztendős francia zseni, *Evariste Galois* (1811–1832) végső feleletet adott az algebrai egyenletek több ezer éves problémájára: kimutatta, hogy az ötöd- és annál magasabb fokú algebrai egyenletek véges számú algebrai lépéssel nem oldhatók meg, így megoldóképletük sem létezik. Galois alapvetően újította meg az algebrát, tudományos felfedezéseit, újfajta látásmódját, eredeti ötleteit a kor matematikusai sem értették. Nem is kerülhetett be a legpatinásabb egyetemekre, hogy ott folytathassa tanulmányait. 19 éves korában elkeseredésében a politikai életbe vetette magát, emiatt börtönbe került, ahol súlyos betegség lett úrrá rajta. Mindeközben szerelemre lobbant egy „nem túl erkölcsös hölgy" iránt. S amikor valaki sértő megjegyzést tett szerelmére, ő párbajra hívta az illetőt; … e párbaj lett a végzete. Vélhetően tisztában volt azzal, hogy nem éli meg a másnapot, így a párbaj előtti éjszakán papírra vetette mindazt a fantasztikus gondolatot, mellyel gyakorlatilag a modern absztrakt algebra alapjait rakta le. Másnap olyan súlyos sebet kapott a párbajban, hogy azt már nem élhette túl, s 20 éves korában elhunyt az az ember, aki a matematika történetének egyik legzseniálisabb alakja lehetett volna. Jellemző, hogy lejegyzett munkáinak jelentőségét, felfedezéseinek korszakalkotó jellegét csak halála után 20 évvel értették meg a matematika legkiválóbb művelői is.

14. Másodfokú egyenletre vezető magasabb fokú egyenletek

Fejezetünk eddigi részeiben a másodfokú egyenletekkel, azok legfontosabb tulajdonságaival, egyenletrendszerekkel, egyenlőtlenségekkel foglalkoztunk. Bár a magasabb (harmad-, negyed-) fokú egyenletek általános megoldása már meghaladja a középiskolai kereteket, bizonyos egyszerűbb, speciálisabb esetekben azért meg tudjuk oldani az ilyen egyenleteket is. Ebben a részben ilyen speciális problémákkal foglalkozunk.

1. példa Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!
$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Megoldás

Most tehát egy negyedfokú egyenlettel van dolgunk. Ha bevezetjük az $x^2 = a$ új ismeretlent, akkor nyilván $x^4 = a^2$, és ezzel a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$a^2 - 13a + 36 = 0$,

ahonnan

$$a_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 36}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}, \qquad a_1 = 9, \quad a_2 = 4.$$

Tehát $x^2 = 9$ vagy $x^2 = 4$, ahonnan az eredeti egyenlet megoldásai:

$x_1 = 3, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = -2.$

Nézzük meg közelebbről, mi is tette lehetővé azt, hogy ezt a negyedfokú egyenletet meg tudtuk oldani. A másodfokú tagra bevezetett új ismeretlennel a negyedfokú tag könnyen kifejezhető volt, és mivel az eredeti egyenletben nem szerepelt sem harmad-, sem elsőfokú tag, ezért a negyedfokú egyenletet könnyen visszavezethettük másodfokú egyenletre. Ez minden ilyen esetben megtehető:

Ha a negyedfokú egyenletben nem szerepel sem harmad-, sem elsőfokú tag, akkor visszavezethető másodfokú egyenletre.

Ugyancsak könnyen megoldhatjuk a negyedfokú egyenleteket, ha abban az együtthatók szimmetrikusan helyezkednek el. Nézzünk erre is egy példát!

2. példa Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!
$6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$.

Megoldás

Ez a negyedfokú egyenlet már tartalmaz harmad-, másod-, elsőfokú tagot és konstans tagot is. Ugyanakkor van egy specialitása is: az együtthatók rendre: 6, –5, –38, –5, 6, vagyis szimmetrikusan helyezkednek el, és ezt kihasználva az egyenlet megoldhatóvá válik. Az nyilvánvaló, hogy $x = 0$ nem megoldása az egyenletnek. Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát x^2-tel:

$$6x^2 - 5x - 38 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0.$$

Most emeljük ki az első és utolsó, valamint a második és az utolsó előtti tagból az azonos együtthatókat:

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0.$$

Ha bevezetjük az $x + \frac{1}{x} = a$ új ismeretlent, akkor

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = a^2, \quad \text{azaz} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2.$$

Helyettesítsük a kapott eredményt az előbbi egyenletbe; azt kapjuk, hogy

$$6(a^2 - 2) - 5a - 38 = 0,$$

ahonnan

$$6a^2 - 5a - 50 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenlet gyökei:

$$a_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 1200}}{12} = \frac{5 \pm 35}{12}, \quad a_1 = \frac{10}{3}, \quad a_2 = -\frac{5}{2}.$$

Arra jutottunk tehát, hogy

$$x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \quad \text{vagy} \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}.$$

Az első egyenletből

$$3x^2 - 10x + 3 = 0, \quad \text{melynek gyökei:} \quad x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

A második egyenletből

$$2x^2 + 5x + 2 = 0, \quad \text{melynek gyökei:} \quad x_3 = -2, \quad x_4 = -\frac{1}{2}.$$

Megkaptuk tehát az eredeti egyenlet gyökeit:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = -\frac{1}{2}.$$

Ez a módszer minden szimmetrikus negyedfokú egyenletre alkalmazható.

Ha a negyedfokú egyenlet együtthatói szimmetrikusan helyezkednek el, akkor megoldása visszavezethető három másodfokú egyenlet megoldására.

Az ilyen egyenleteket szokták szimmetrikus vagy reciprok egyenletnek nevezni. Az első elnevezés nem kíván magyarázatot; a második abból adódik, hogy kimutatható, ha valamely $x_0 \neq 0$ valós szám megoldása az egyenletnek, akkor annak reciproka, $\frac{1}{x_0}$ is megoldás lesz.

Bizonyos harmadfokú egyenleteket is megoldhatunk, ha rövid próbálgatás után megtaláljuk egy megoldását. Nézzük a következő egyenletet!

3. példa Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!
$x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$.

Megoldás

Nem túl hosszú vizsgálódás után észrevehetjük, hogy az $x = 1$ kielégíti az egyenletet. Ekkor viszont a harmadfokú kifejezés felbontható egy első- és egy másodfokú kifejezés szorzatára az alábbi módon:

$(x-1)(ax^2 + bx + c) = 0$.

Az a, b, c együtthatók meghatározásához végezzük el a szorzást, majd a kapott eredmény együtthatóit hasonlítsuk össze az eredeti egyenlet bal oldalán levő harmadfokú kifejezés együtthatóival:

$ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c = 0$.

A kapott egyenlet megfelelő együtthatóit az eredeti egyenlet együtthatóival összehasonlítva, azt kapjuk:

$a = 1, \quad b - a = 1, \quad c - b = -10, \quad -c = 8$.

Innen az együtthatók: $a = 1$, $b = 2$, $c = -8$. Tehát az eredeti egyenlet szorzat alakban:

$(x-1)(x^2 + 2x - 8) = 0$.

E szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, tehát vagy $x - 1 = 0$, ahonnan $x = 1$ (ezt persze már tudtuk, hiszen ebből indultunk ki), vagy pedig $x^2 + 2x - 8 = 0$,

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = 2$.

Ezzel megkaptuk az eredeti egyenlet megoldásait:

$x_1 = -4, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1$.

Feladatok

1. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$;

b) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$;

c) $(x-2)^4 - 25(x-2)^2 + 144 = 0$.

2. E1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x^3 - 7x + 6 = 0$;

b) $x^3 + x^2 - 17x + 15 = 0$;

c) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$.

3. E2 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$;

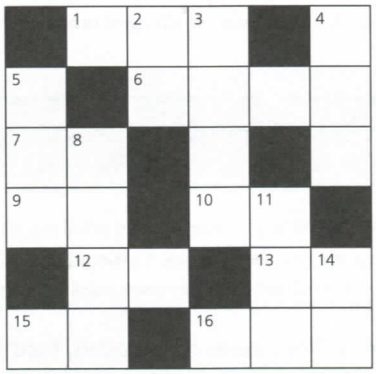
b) $8x^4 - 14x^3 - 69x^2 - 14x + 8 = 0$.

4. E2 Ábrázoljuk a számegyenesen az alábbi kifejezés értelmezési tartományát!
$\sqrt{x^4 - 29x^2 + 100} + \sqrt{x^2 - 29x + 100}$.

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1491., 1492., 1494–1496., 1500., 1503.

EGY KIS „PIHENŐ”*

Az alábbi keresztrejtvény minden négyzetébe pozitív, egyjegyű egész szám írandó.



Vízszintes:

1. Az $x^2 - 15x + 36 = 0$ egyenlet gyökei növekvő sorrendben.
6. Szomszédos számjegyek csökkenő sorrendben.
7. $n!$
9. $2 \cdot 3! + 3 \cdot 2!$
10. Köbszám.
12. A vízszintes 13 fele.
13. A vízszintes 12 kétszerese.
15. Azonos számjegyek.
16. Az $f(x) = x^2 - 26x + 168$ függvény szélsőértékhelye és szélsőértékének ellentettje.

Függőleges:

2. Négyzetszám.
3. Palindron-szám (azaz olyan szám, mely visszafelé olvasva egyenlő az eredeti számmal).
4. Az $\frac{x}{4} + \frac{32}{x} = 9$ egyenlet megoldásai növekvő sorrendben.
5. Négyzetszám.
8. A vízszintes **7** 201-szerese.
11. Az $\frac{1}{\sqrt{-x^2 + 10x - 16}}$ kifejezés értelmezési tartományában szereplő prímszámok csökkenő sorrendben.
14. Olyan négyzetszám, amely számjegyeinek összege is négyzetszám.

* A megoldás megtalálható a 177. oldalon.