Heuréka
tankönyvsorozat

OFI

Dr. Gerőcs László
Számadó László

Matematika



10

Dr. Gerőcs László ■ Számadó László

Heuréka

MATEMATIKA

A középiskolák 10. évfolyama számára



Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet ■ Budapest

A kiadvány 2015. 04. 13-tól tankönyvi engedélyt kapott a TKV/80–21/2015. számú határozattal.

A tankönyv megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI rendelet:
3. sz. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyama számára 3.2.04,
4. sz. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 7–12. évfolyama számára 4.2.04,
5. sz. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 5–12. évfolyama számára 5.2.04,
6. sz. melléklet: Kerettanterv a szakközépiskolák 9–12. évfolyama számára 6.2.03
megnevezésű kerettanterv előírásainak, és az érettségi vizsga követelményeinek
[40/2002. (V. 24.)].

Lektorok: CSAPODI CSABA, PÁLFALVI JÓZSEFNÉ, TAMÁS BEÁTA

Felelős szerkesztő: SZELINDINÉ GALÁNTAI MELINDA
A 2010-es kiadást szerkesztette: TÓTHNÉ SZALONTAY ANNA

Tipográfia: LŐRINCZ ATTILA

Fedél: KORDA ÁGNES

Illusztráció: SZŰCS ÉDUA

Szakgrafika: DR. FRIED KATALIN

Fotók: Dreamstime.com, Flickr.com, Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet (NTK) archívuma

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők:
DR. HILLNÉ BENKÓ KATALIN, KIRÁLY ILDIKÓ

© Dr. Gerőcs László, Számadó László, Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, 2015

A mű más kiadványban való részleges vagy teljes felhasználása, illetve utánközlése
a kiadó engedélye nélkül tilos!

ISBN 978-963-19-6208-6

Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
1143 Budapest, Szobránc u. 6–8.
Tel.: (+36-1) 235-5508
Fax: (+36-1) 235-7202
Vevőszolgálat: vevoszolgalat@ofi.hu

A kiadásért felel: dr. Kaposi József főigazgató
Raktári szám: NT-17202
Műszaki szerkesztő: Orlai Márton
Grafikai szerkesztő: Görög Istvánné, Mikes Vivien
Terjedelem: 26,3 (A/5) ív
Tömeg: 480 gramm
1. kiadás, 2015
Nyomdai előkészítés: HonGa Magyarország Bt.

Tartalom

Jelmagyarázat 5
Bevezetés 6

I. Gondolkodási módszerek

1. Tétel és megfordítása, indirekt bizonyítás 8
2. Skatulyaelv 11
3. Egyszerű kombinatorikai feladatok 14
4. Sorba rendezések száma 17
5. Kiválasztás és sorrend 20
6. Kiválasztások számának meghatározása 24
7. A matematikai logika alapfogalmai 27
8. Logikai műveletek 30
9. Műveleti tulajdonságok 34
10. Gráfok 36

II. Gyökvonás

1. Racionális számok, irracionális számok 44
2. A négyzetgyökvonás és azonosságai 48
3. A négyzetgyökvonás alkalmazásai 51
4. Az *n*-edik gyök fogalma és azonosságai 55
5. Az *n*-edik gyökvonás alkalmazásai 58

III. Másodfokú függvények, másodfokú egyenletek

1. Másodfokú függvények 62
2. Másodfokú függvények általános alakja, ábrázolása 66
3. Szélsőérték-problémák megoldása másodfokú függvények segítségével (Emelt szint) 69
4. Másodfokú egyenletre vezető feladatok 71
5. Speciális másodfokú egyenletek megoldása 74
6. A másodfokú egyenlet megoldóképlete 76
   Már az ókorban is... (Olvasmány) 79
7. A másodfokú egyenlet diszkriminánsa 80
8. Viète-formulák (Emelt szint) 84
9. A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja 86
10. Másodfokú egyenletrendszerek 89
11. Másodfokú egyenlőtlenségek 92
12. Szöveges másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek 95
13. Másodfokú egyenletre vezető gyökös egyenletek 99
    A magasabb fokú algebrai egyenletek története (Olvasmány) 102
14. Másodfokú egyenletre vezető magasabb fokú egyenletek 103

IV. Geometria

1. Távolságtartó transzformációk 108
2. Párhuzamos szelők tétele 112
3. Középpontos hasonlóság 116
4. Hasonlósági transzformáció 118
5. Tétel a háromszög szögfelezőjéről (Emelt szint) 121

6. A háromszög külső szögfelezője (Olvasmány) 123
Az Euler-egyenes (Olvasmány) 126
7. Közepek 127
8. Közepek több szám esetén (Emelt szint) 132
9. Befogótétel, magasságtétel 134
10. Sokszögek 138
11. Háromszögek, négyszögek, sokszögek területe 141
12. Kerületi szögek, látószögkörív (Emelt szint) 145
13. Húrnégyszögek 149
14. Érintőnégyszögek 153
15. Körhöz húzott szelők és érintők 155
16. Hasonló síkidomok kerülete és területe 158
17. Hasonló testek felszíne és térfogata 161

V. **Trigonometria**
1. Távolságok meghatározása arányokkal 164
2. Hegyesszögek szögfüggvényei 166
3. Összefüggések hegyesszögek szögfüggvényei között 169
További nevezetes szögek szögfüggvényei (Olvasmány) 172
4. Vektorok 174
5. A szögfüggvények általánosítása 178
6. Szögfüggvények ábrázolása 184

VI. **Statisztika és valószínűség**
1. Statisztikai alapismeretek 190
2. A véletlen 194
3. A valószínűség 197

Fogalomtár 201

Jelmagy

Az A pont és az
vagy Ae

Az A és B pont
$d(A; B)$

Az A és B pont
vagy AB

Az f_1 és f_2 egye
$(f_1; f_2) \sphericalangle$

A C csúcspontú
A, másik sz

A C csúcspontú

Szög jelölése: α

Az A, B és C cs
$ABC\triangle$

Az $ABC\triangle$ terül

Az a, b és c old
$s = \frac{a+b+}{2}$

A derékszög je

Az e egyenes

Az e egyenes

Egybevágóság

A hasonlóság

Az A pontból

Egyenlő, nem

Azonosan egy

Közelítőleg eg

Kisebb, kisebb
$5 \leq x$

Jelmagyarázat

Az A pont és az e egyenes távolsága: $d(A; e)$ vagy Ae

Az A és B pont távolsága: AB vagy $\overline{AB}$ vagy $d(A; B)$

Az A és B pont összekötő egyenese: $e(A; B)$ vagy AB

Az f_1 és f_2 egyenesek szöge: $\sphericalangle(f_1; f_2)$ vagy $(f_1; f_2)\sphericalangle$

A C csúcspontú szög, melynek egyik szárán az A, másik szárán a B pont található: $ACB\sphericalangle$

A C csúcspontú szög: $C\sphericalangle$

Szög jelölése: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Az A, B és C csúcsokkal rendelkező háromszög: $ABC\triangle$

Az $ABC\triangle$ területe: $T(ABC)$ vagy T_{ABC} vagy t_{ABC}

Az a, b és c oldalú háromszög fél kerülete: $s = \frac{a+b+c}{2}$

A derékszög jele: $\llcorner$

Az e egyenes merőleges az f egyenesre: $e \perp f$

Az e egyenes párhuzamos az f egyenessel: $e \parallel f$

Egybevágóság: $\cong$; $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$

A hasonlóság aránya: λ

Az A pontból a B pontba mutató vektor: $\overrightarrow{AB}$

Egyenlő, nem egyenlő: $=, \neq$; $a = 2, b \neq 5$

Azonosan egyenlő: $\equiv$; $a + b \equiv 5$

Közelítőleg egyenlő: $\approx$; $a \approx 2{,}3$; $8{,}54 \approx 8{,}5$

Kisebb, kisebb vagy egyenlő: $<, \leq$; $2 < 3$, $5 \leq x$

Nagyobb, nagyobb vagy egyenlő: $>, \geq$; $6 > 4$, $a \geq 2$

A természetes számok halmaza: $\mathbf{N}$; $\{0; 1; 2; \ldots\}$

Az egész számok halmaza: $\mathbf{Z}$; $\{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$

A pozitív, a negatív egész számok halmaza: $\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Z}^-$; $\{1; 2; 3; \ldots\}$, $\{-1; -2; -3; \ldots\}$

A racionális, az irracionális számok halmaza: $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^*$

A pozitív, a negatív racionális számok halmaza: $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Q}^-$

A valós számok halmaza: $\mathbf{R}$

A pozitív, a negatív valós számok halmaza: $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$

Eleme, nem eleme a halmaznak: $\in, \notin$; $5 \in \mathbf{N}$, $-2 \notin \mathbf{Z}^+$

Részhalmaz, valódi részhalmaz: $\subseteq, \subset$; $A \subseteq \mathbf{R}$, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$

Zárt intervallum: $[a; b]$

Balról zárt, jobbról nyílt intervallum: $[a; b[$

Balról nyílt, jobbról zárt intervallum: $]a; b]$

Nyílt intervallum: $]a; b[$

Az x szám abszolút értéke: $|x|$; $|-3{,}1| = 3{,}1$

Az f függvény hozzárendelési szabálya: $f: x \mapsto f(x)$; $f: x \mapsto 2x + 3$ vagy $f(x) = y$; $f(x) = 2x + 3$

Az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen: $f(x_0)$; $f(5)$, ha $x_0 = 5$

n faktoriális: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

Bevezetés

A tankönyv célja a középszintű érettségire történő felkészítés. A matematikai szemlélet fejlesztése a *definíciókhoz* és *fogalmakhoz* kapcsolódó *tananyagelemek* kidolgozásával történik.

Kidolgozott példák segítik az új ismeretek bevezetését, a tananyag megértését. A fejezetek végén gyakorlófeladatokat találunk, melyek segítik a középszintű érettségire való felkészülést.

A középiskolai tanulmányok során a korábban szemléletesen, tevékenységek segítségével kialakított fogalmak megerősítésére, bizonyos fogalmak definiálására, általánosítására kerül sor. Kidolgozzuk a különböző témakörökben megismert összefüggések *más témakörökben* való felhasználhatóságának felismerését, a matematika alkalmazását *gyakorlati problémák megoldása során. Illusztrációkkal, fényképekkel* segítjük a tananyagban a matematikai összefüggések megértését.

A tanítandó anyagban *sejtéseket* fogalmazunk meg, melyek néhány lépésben bizonyíthatók vagy megcáfolhatók. Fontos a *bizonyítás* iránti igény felkeltése. Sor kerül néhány egyszerű tétel bizonyítására, bizonyítási módszerek megismerésére, valamint a *fogalmak, szabályok pontos megfogalmazására.* A tankönyvben a definíciók és a tételek fejléccel ellátott keretbe kerültek. Abban az esetben, amikor nincs fejléc, fontos gondolatokat emeltünk ki. A margóra kiírt definíciók a tájékozódást segítik.

Kékkel emeltük ki a szövegben a matematikatörténeti és egyéb matematikai érdekességeket. *(Javasoljuk a téma további feldolgozását az internet segítségével!)*

A problémaérzékenységre, a *problémamegoldásra nevelés* fontos feladatunk. Ehhez elengedhetetlen egyszerű *matematikai szövegek értelmezése,* elemzése. A diszkussziós képesség fejlesztése, a többféle megoldás keresése, megtalálása és megbeszélése a *logikus gondolkodást* is fejleszti.

A logikus gondolkodás a problémamegoldásban, az algoritmikus eljárások során és az alkalmazásokban egyaránt lényeges. A matematika különböző területein néhány lépéses *algoritmus* készítése az informatika tanulmányozásához is fontos.

Az *érettségire való felkészítést* a négy évfolyamon végigfutó kidolgozott példák és nehézségük szerint szintezett feladatok segítik:

középszint, könnyebb; **K1**

középszint, nehezebb; **K2**

emelt szint, könnyebb; **E1**

emelt szint, nehezebb feladat. **E2**

Az emelt szintű érettségi vizsgán előforduló tananyagokat zölddel és apró betűvel jelöltük.

A leckék végén lévő feladatok részletes megoldása megtalálható a világhálón.

Az érdeklődők, vagy gyakorolni vágyók számára a leckék végén még *további feladatokat* is ajánlunk, amelyeket a *MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény* családból jelöltünk ki.

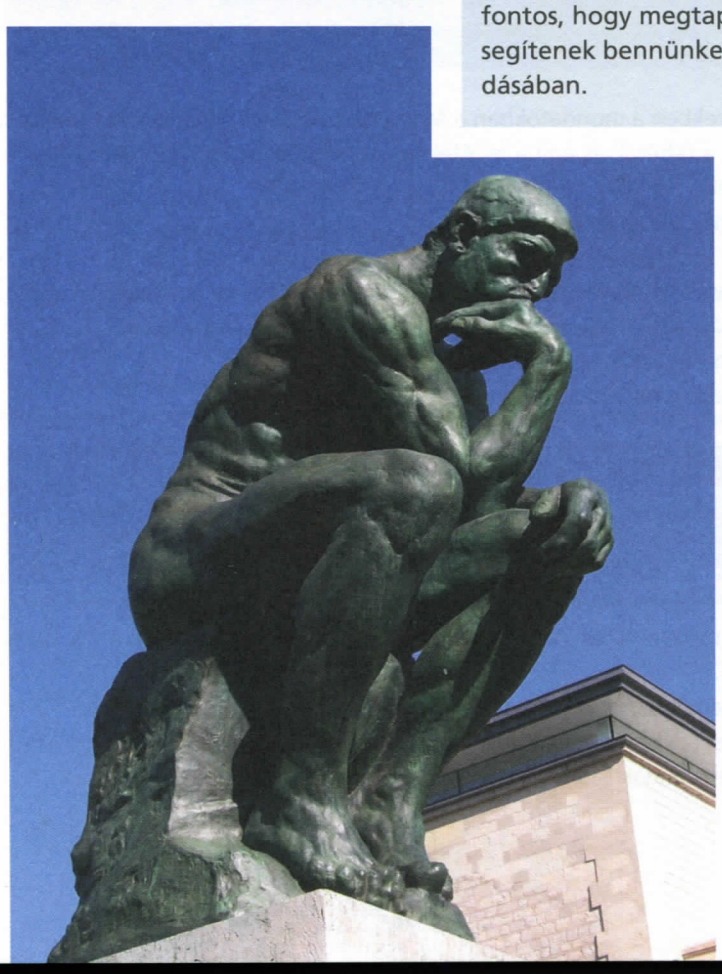
Gerőcs László–Orosz Gyula–Paróczay József–Szászné Dr. Simon Judit:
16125/NAT (+ CD-n a megoldások) MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.
16126/NAT (+ CD-n a megoldások) MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.

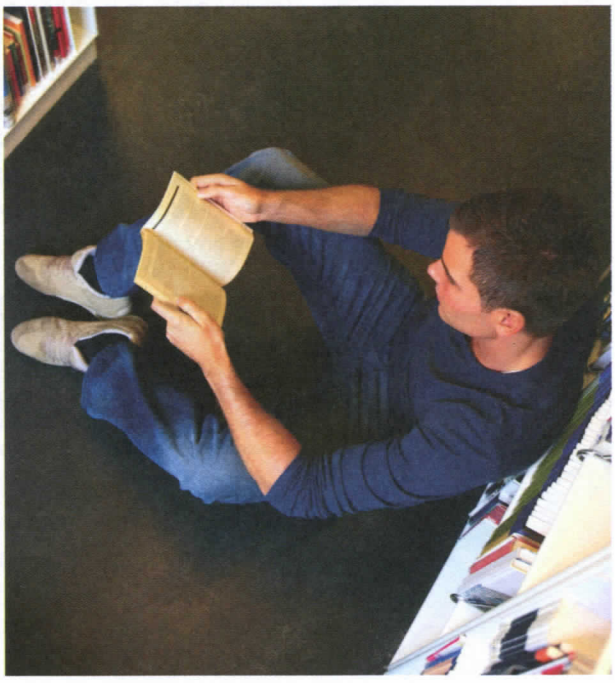
Czapáry Endre–Czapáry Endréné–Csete Lajos–Hegyi Györgyné–Iványiné Harró Ágota–Morvai Éva–Reiman István:
16127/NAT (+ CD-n a megoldások) MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. *Geometriai feladatok gyűjteménye*

I. Gondolkodási módszerek



Az emberi gondolkodás nagyon sok elemből tevődik össze: logikai készség, kombinatív készség, absztrakciós képesség, asszociációs készség, intuíció, lényeglátó képesség, a gondolkodás fegyelmezettségének képessége, a térbeli és időbeli tájékozódás képessége és még sorolhatnánk tovább. E gondolkodási képességek fejlődésének megértéséhez nagyon fontos, hogy megtapasztaljuk azokat a gondolkodási sémákat, amelyek segítenek bennünket a hétköznapokban is felmerülő problémák megoldásában.





E fejezet leckéiben néhány olyan gondolkodási módszert, eljárást fogunk megvizsgálni, amelyek a későbbi tanulmányaink során nagy hasznunkra lesznek összetettebb, bonyolultabb problémák megoldásában. Először a különböző állítások, tételek logikai szerkezetét vizsgáljuk és megismerkedünk egy új bizonyítási eljárással, majd a kombinatorika tárgykörébe tartozó sorba rendezési és kiválasztási problémák alapgondolatait vizsgáljuk meg.

1. Tétel és megfordítása, indirekt bizonyítás

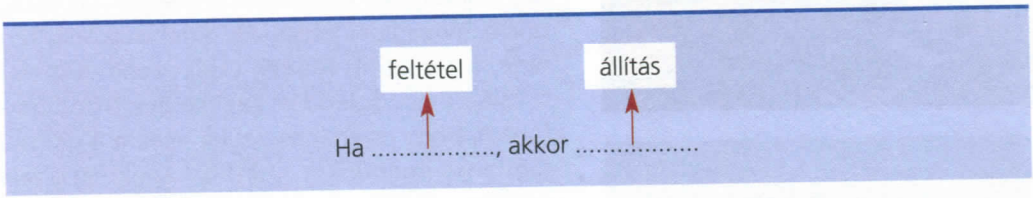
TÉTEL ÉS MEGFORDÍTÁSA



Vizsgáljuk meg az alábbi mondatokban szereplő állításokat!

1. Ha esik az eső, akkor ernyőt viszek magammal.
2. Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor a szám páros.
3. Ha egy háromszög derékszögű, akkor két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével.
4. Ha két egyenes párhuzamos, akkor egy síkban vannak.
5. Ha egy négyszög paralelogramma, akkor e négyszög trapéz.

A vizsgált mondatok mindegyike igaz állítást tartalmaz. E mondatok olyan összetett mondatok, amelyek első tagmondata a „ha" szócskával kezdődik, a második tagmondata pedig az „akkor" szócskával indul. Mindegyik mondat első része egy feltételt ír le, a második része pedig egy állítást, a feltétel következményét mondja ki.



egfordítása

, akkor ●.

, akkor ■.

Most képzeljük el, hogy ezekben a mondatokban a feltételt és az állítást felcseréljük: ami eredetileg állítás volt, abból lesz a feltétel, és ami a feltétel volt, az lesz az állítás. Nézzük meg, milyen új mondatok keletkeznek!

1. Ha ernyőt viszek magammal, akkor esik az eső.
2. Ha egy szám páros, akkor osztható 4-gyel.
3. Ha egy háromszög két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.
4. Ha két egyenes egy síkban van, akkor párhuzamosak.
5. Ha egy négyszög trapéz, akkor paralelogramma.

egfordítása

Tétel megfordítása

Ha egy állításban (tételben) a feltétel és az állítás szerepét felcseréljük, akkor az eredeti állítás (tétel) megfordítását kapjuk.

Az 1. állítás megfordítása nyilvánvalóan nem igaz, hiszen, ha ernyőt viszek magammal, attól még nem kezd el esni az eső.

A 2. állítás megfordítása sem igaz: például a 10 páros szám, de nem osztható 4-gyel.

A 3. állítás igaz; ezt a 9. osztályban be is bizonyítottuk.

A 4. állítás sem igaz, hiszen vannak síkbeli, egymást metsző egyenesek.

Az 5. állítás sem igaz.

Azt látjuk, hogy egy tétel megfordításakor egy teljesen új állításhoz jutunk, amely lehet igaz, de az is lehet, hogy hamis.

Sokszor fordul elő, hogy egy tétel és megfordítása is igaz. Ilyenkor használjuk az *„akkor és csak akkor"* kifejezést.

Nézzük például a Pitagorasz-tétel olyan megfogalmazását, amely már magában tartalmazza a megfordítást is:

„Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha két oldala négyzetének összege egyenlő a harmadik oldal négyzetével."

Pitagorasz-tétel

Ez tehát egyszerre két tételt mond ki, egyrészt: ha a háromszög derékszögű, akkor két oldala (befogója) négyzetének összege egyenlő a harmadik oldal (átfogó) négyzetével, másrészt: ha két oldal négyzetének összege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű. (Vigyázzunk! A megfordításban nem használhatjuk a „befogó" és „átfogó" kifejezéseket, hiszen ezzel már eleve feltételeznénk, hogy háromszögünk derékszögű.) Természetesen az egy mondatban megfogalmazott két tétel mindegyike külön-külön bizonyításra szorul.

Ha a háromszög derékszögű
$\Downarrow$
$a^2 + b^2 = c^2$.

Ha $a^2 + b^2 = c^2$
$\Downarrow$
a háromszög derékszögű.
$\Downarrow$
$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow$ a háromszög derékszögű

Érdemes megvizsgálni az olyan állításokat is, amelyek teljesüléséhez kettő vagy több feltételnek is teljesülnie kell. A következő példában egy ilyen tételt tárgyalunk:

1. példa Igazoljuk a következő állítást! Ha egy egyenes felezi a háromszög területét és felezi a kerületet is, akkor az egyenes áthalad a beírható kör középpontján.

Megoldás

A bizonyításhoz elemezzük az *1. ábrát,* melyen a feltételeknek megfelelő egyenest *e*-vel, az egyenes és két oldal metszéspontjait *P*-vel és *Q*-val jelöltük. Berajzoltuk még az *A* csúcsból induló szögfelezőt, mely az *e* egyenest *K*-ban metszi. *K*-ból az oldalakra állított merőleges szakaszok hossza *r*, *r* és *d*. Az *AB* és *AC* oldalakra állított merőlegesek azért egyenlők, mert *K* illeszkedik az *A*-ból induló szögfelezőre.

Mivel *e* felezi a kerületet, ezért

$PA + AQ = PB + BC + CQ$.

Az *e* egyenes a területet is felezi, ezért

$\frac{PA \cdot r}{2} + \frac{AQ \cdot r}{2} = \frac{PB \cdot r}{2} + \frac{BC \cdot d}{2} + \frac{CQ \cdot r}{2}$, azaz

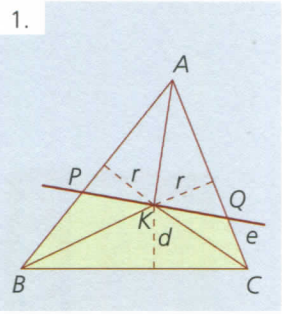
$r \cdot (PA + AQ) = PB \cdot r + BC \cdot d + CQ \cdot r$.

Ha most a bal oldalon behelyettesítjük a kerület felezését kifejező fenti egyenlőséget, akkor azt kapjuk, hogy

$r \cdot PB + r \cdot BC + r \cdot CQ = PB \cdot r + BC \cdot d + CQ \cdot r$, vagyis $r \cdot BC = BC \cdot d$,

ahonnan pedig $r = d$. Tehát a *K* pont nem lehet más, csak a háromszög beírható körének középpontja.

1.



E tétel megfordítása:

Ha egy egyenes áthalad a háromszög beírható körének középpontján, akkor az felezi a háromszög területét is és a kerületét is. Ez nyilván nem igaz. Ugyanakkor könnyen belátható, hogy

- az egyenes felezi a háromszög területét,
- az egyenes felezi a háromszög kerületét,
- az egyenes áthalad a háromszög beírható körének középpontján,

három kijelentés közül bármelyik kettőt tekintjük feltételnek, akkor a harmadik mint állítás igaz lesz.

INDIREKT BIZONYÍTÁS

A matematikai állítások, tételek igazolására sokféle módszer létezik. Most vizsgáljuk meg részletesebben az egyik sokszor használt módszert, az indirekt bizonyítás módszerét! Nézzük a következő egyszerű állítást:

2. példa Ha egy háromszög derékszögű, akkor a derékszög a legnagyobb szöge.

Megoldás

Nézzük meg, milyen következtetéseket lehetne levonni abban az esetben, ha a tétel állítása nem lenne igaz, vagyis tegyük fel a tétel tagadását! Legyen tehát egy derékszögű háromszög olyan, melynek nem a derékszög a legnagyobb szöge. Ezek szerint a háromszög egyik szöge 90°-nál nagyobb. Így ehhez a szöghöz hozzáadva a derékszöget és a háromszög harmadik szögét, már 180°-nál nagyobb szöget kapunk. Ez nyilvánvalóan lehetetlen; ellentmondásra jutottunk, amit csak úgy oldhatunk fel, hogy a kiindulási feltételezésünk (vagyis az eredeti tétel tagadása) nem igaz, ami azt jelenti, hogy az eredeti tétel állítása igaz.

E mostani gondolatmenetet követve fogalmazzuk meg az indirekt bizonyítási eljárás lényegét.

Indirekt bizonyítás

Egy állítás indirekt bizonyításakor először feltételezzük az állítás tagadását. Ezt követően, megfordítható logikai lépéseken keresztül valamilyen lehetetlen (vagy másként fogalmazva nyilvánvalóan nem igaz) következtetésre jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, hogy kiindulási feltételezésünk (vagyis az eredeti tétel tagadása) nem igaz. Ebből viszont már következik, hogy az eredeti tétel állítása valóban igaz.

Feladatok

1. K1 Az alábbi tételek közül melyek azok, amelyeknek a megfordítása is igaz?

a) Ha egy háromszög derékszögű, akkor köré írható körének középpontja az átfogó felezőpontja.

b) Ha egy síkbeli egyenes áthalad az azonos síkban levő kör középpontján, akkor felezi a kör területét.

c) Ha egy valós szám négyzete 1-nél nagyobb, akkor a valós szám is 1-nél nagyobb.

d) Ha egy négyszög paralelogramma, akkor átlói felezik egymást.

2. K1 Igazoljuk a következő állítást! Egy szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha 5-re vagy 0-ra végződik.

3. K1 Fogalmazzuk meg az alábbi állítások megfordítását és döntsük el, hogy igazak vagy sem! A megfordítható állításokat fogalmazzuk meg az „akkor és csak akkor" kifejezéssel!

a) Ha egy háromszög hegyes szögű, akkor köré írható körének középpontja a háromszög belsejében van.

b) Ha egy négyszög paralelogramma, akkor átlói felezik egymást.

c) Ha néhány pozitív egész szám összege páros, akkor a közöttük levő páratlan számok száma páros.

4. K2 Igazoljuk indirekt úton, hogy a szabályos háromszög beírható és köré írható köreinek középpontjai egybeesnek!

5. E1 Egy négyzet minden oldalának felezőpontját összekötöttük a szemközti csúcs két végpontjával. Igazoljuk indirekt úton, hogy a négyzet belsejében keletkező nyolcszög nem lehet szabályos nyolcszög!

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 78., 82., 95.

2. Skatulyaelv

A gondolkodási módszerek tárházának egy érdekes és hasznos eleme a **skatulyaelv**, melynek segítségével bizonyos véges elemű halmaz valamilyen részhalmaza elemeinek számát tudjuk megbecsülni. Nézzünk erre először néhány bevezető példát!

1. példa Egy estélyen négy házaspár vesz részt. Igazoljuk, hogy a résztvevők között van két olyan ember, akiknek a születési dátuma a hétnek ugyanolyan nevű napjára esik!

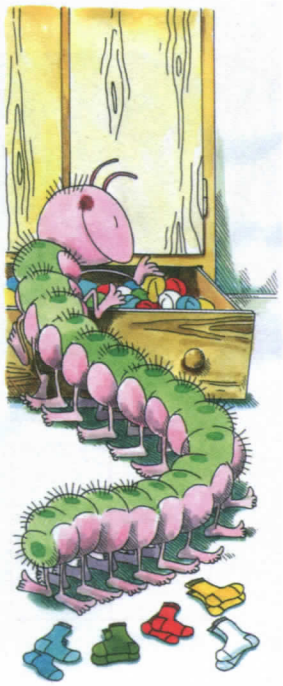
Megoldás

Mivel az estélyen nyolcan vannak, a hétnek pedig hét különböző nevű napja van, ezért ha minden napra (hétfő, kedd, szerda, ... stb.) esne egy születési dátum, akkor a nyolcadik résztvevő születési dátumának már mindenképpen olyan napra kell esnie, amely egyszer már előfordult.

2. példa A százlábú szekrényében piros, fehér, sárga, zöld és kék színű zoknik vannak, mindegyikből pontosan 100 db.

a) Becsukott szemmel legkevesebb hány db zoknit kell kivennie ahhoz, hogy jusson minden lábára ugyanolyan színű zokni?

b) Becsukott szemmel legkevesebb hány db zoknit kell kivennie ahhoz, hogy valamelyik színből legyen 20 db zokni?



Megoldás

a) A fiókban ötféle színű zokni van. Ha (legrosszabb esetben) minden színből kivesz 99 db-ot (ami egyben azt is jelenti, hogy a fiókban marad minden színből egy db), az még nem elegendő, hiszen ekkor még nem lesz 100 db egyforma színű zokni. Ha viszont még egyet kivesz a fiókból, bármilyen színű is legyen az, abból a színből már van 99 db, így az utoljára kivett zoknival együtt már meglesz a 100 db ugyanolyan színű zokni.

Ha tehát $5 \cdot 99 + 1 = 496$ zoknit vesz ki a fiókból, az már biztosan elegendő, de annál kevesebb még nem biztos, hogy elegendő.

b) Ha mind az 5 színből kivesz 19 db-ot (ezzel ismét a lehető legrosszabb „kivételt" feltételeztük), akkor az $5 \cdot 19 = 95$ kivett zokni még nem elegendő, hiszen egyik színből sincs még 20 db. Ha azonban a fiókban maradt zoknik közül még egyet kivesz, akkor az bármilyen színű lehet, mert ebből a színből már biztosan van 19 db, tehát az utólag kivett zoknival együtt már lesz valamelyik színből 20 db zokni.

Ha tehát $5 \cdot 19 + 1 = 96$ zoknit vesz ki a fiókból, az már biztosan elegendő, de annál kevesebb még nem biztos, hogy elegendő.

Az előző példákban használt gondolatmenet a **skatulyaelven** alapszik. Ennek lényege a következő:

katulyaelv



talánosabb
ogalmazás

Skatulyaelv

Ha van n db skatulyánk és ezekbe el kell helyeznünk k db tárgyat, ahol $k > n$, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulyánk, amelybe legalább két tárgyat fogunk elhelyezni.

Az állítás nyilván igaz, hiszen, ha minden skatulyában csak legfeljebb egy tárgy lenne, akkor legfeljebb n db tárgyat helyeztünk volna el, és nem mind a k db-ot.

A 2. példa *b)* részében alkalmazott gondolatmenet alapján a skatulyaelvet általánosabban is megfogalmazhatjuk:

Skatulyaelv általánosítása

Ha van n db skatulyánk, és ezekbe el kell helyeznünk k db tárgyat, ahol $k > nr$ ($r \in \mathbf{Z}^+$), akkor lesz olyan skatulya, melybe legalább $r+1$ tárgyat fogunk elhelyezni.

Ez az állítás is igaz kell, hogy legyen, hiszen ha mind az n db skatulyában csak legfeljebb r db tárgy lenne, akkor legfeljebb csak nr tárgyat helyeztünk volna el. Mivel $k > nr$, ezért még nem helyeztük volna el az összes tárgyat.

3. példa Egy 12 lakásos társasházban minden lakáshoz tartozik egy postaláda. Egy alkalommal a postás 9 lakáshoz tartozó postaládába hozott összesen 47 küldeményt. Igazoljuk, hogy van olyan postaláda, amelybe legalább 6 küldemény érkezett!

Megoldás

A 47 küldeményt kell 9 postaládába elhelyezni. Ha nem lenne olyan postaláda, amelybe legalább 6 küldemény jut, azaz minden postaládába legfeljebb csak 5 küldemény kerül, akkor a küldemények száma legfeljebb $9 \cdot 5 = 45$ lenne. Mivel 47 küldemény volt, ezért valóban lesz olyan postaláda, amelybe legalább 6 küldemény kerül.



4. példa Egy lovarda négyzet alakú karámjának minden oldala 9 m hosszú. A karámba elhelyeztek 9 kiscsikót. Igazoljuk, hogy bárhogyan is szaladgálnak a kiscsikók a karámban, minden pillanatban lesz közöttük 3 olyan, hogy közülük bármely 2 közötti távolság kisebb mint 6,5 m!



Megoldás

Osszuk fel a 9 m oldalú négyzetet oldalaikkal párhuzamosan 4 db 4,5 m oldalú négyzetre. *(2. ábra)*

A 9 kiscsikó mindegyike a 4 db 4,5 m oldalú négyzet valamelyikében tartózkodik. Ebből következik, hogy minden pillanatban van olyan négyzet, amelyben van (legalább) három kiscsikó. Mivel egy ilyen kis négyzet két legtávolabbi pontja valamely átlójának két végpontja, ezek távolsága $4{,}5 \cdot \sqrt{2} \approx 6{,}364$ m. Ezek szerint az ebben a négyzetben tartózkodó 3 kiscsikó közül bármely kettőnek a távolsága kisebb mint 6,5 m.

5. példa Adott
lönbsége oszth

Megoldás
A pozitív egész s
20-féle maradék
ugyanazt a mara

(Könnyen beláth
lálható 2 olyan,

Feladatok

1. K1 Egy oszt
hárman kaptak
tályzatot kaptak

2. K1 Nagyma
és 11 üveg meg
a) Hány üveg b
három fajtáb
b) Hány üveg b
egyforma be

3. K1 Egy oszt
napjukat. Mit r

4. K2 Egy bolt
anyuka három
kivennie a bol
kapjon?

5. E1 Egy kor
zoljuk, hogy e

6. E2 A buda
zöldek. Tudjuk
valamelyik álla

7. E2 Egy do
ahol p és q pr
den színből le
kevesebb ann
vegyük. Hány

5. példa Adott 21 db pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy van közöttük 2 olyan, amelyek különbsége osztható 20-szal!

Megoldás

A pozitív egész számok 20-szal osztva 0, 1, 2, ..., 18, 19 maradékot adhatnak, vagyis összesen 20-féle maradék lehetséges. Ezek szerint a 21 szám között van 2 olyan, amelyek 20-szal osztva ugyanazt a maradékot adják. E két szám különbsége viszont valóban osztható 20-szal.

(Könnyen belátható e feladat általánosítása is: $(n + 1)$ db pozitív egész szám között mindig található 2 olyan, amelyek különbsége osztható n-nel.)

Feladatok

1. K1 Egy osztályban az osztálylétszám 28 fő. Év végén matematikából senki nem bukott meg; hárman kaptak 2-es osztályzatot. Igazoljuk, hogy volt legalább 9 tanuló, akik ugyanolyan osztályzatot kaptak!

2. K1 Nagymamánál a kamrában elromlott a világítás. A polcon van 3 üveg körte-, 5 üveg alma- és 11 üveg meggybefőtt.

a) Hány üveg befőttet kell kihoznunk a sötét kamrából, hogy a kihozottak között legyen mindhárom fajtából?

b) Hány üveg befőttet kell kihoznunk a sötét kamrából, hogy a kihozottak között legyen két egyforma befőtt?

3. K1 Egy osztályban van három olyan diák, akik ugyanabban a hónapban ünneplik a születésnapjukat. Mit mondhatunk az osztálylétszámról?

4. K2 Egy boltban piros, sárga és fehér sálakat tartanak; mindhárom fajtából 30-30 darabot. Egy anyuka három gyermekének akar venni egy-egy sálat. Becsukott szemmel legalább hány sálat kell kivennie a bolt dobozából, ha azt akarja, hogy mindhárom gyermeke ugyanolyan színű sálat kapjon?

5. E1 Egy konvex hatszög minden oldalát és minden átlóját kiszíneztük pirosra vagy kékre. Igazoljuk, hogy ekkor lesz a rajzunkon olyan háromszög, amelynek minden oldala azonos színű!

6. E2 A budapesti és a veszprémi állatkertbe érkezett 257 papagáj: pirosak, sárgák, kékek és zöldek. Tudjuk, hogy nincs közöttük 5 azonos színű és különböző korú papagáj. Igazoljuk, hogy valamelyik állatkertben lesz 9 azonos színű és azonos korú papagáj!

7. E2 Egy dobozban elhelyeztünk p-féle különböző színű golyót, mind a p színből q darabot, ahol p és q prímszámok. Ha legkevesebb annyi golyót akarunk kivenni a dobozból, hogy minden színből legyen a kivett golyók között, akkor 17-tel kevesebbet kellene kivenni, mintha legkevesebb annyi golyót akarnánk kivenni a dobozból, hogy valamely színből mind a q darabot kivegyük. Hány golyó van a dobozban?





További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 51., 53.,54., 58., 73.

3. Egyszerű kombinatorikai feladatok

Az előző években már találkoztunk olyan összeszámlálási feladatokkal, ahol az összes esetek számát kellett meghatároznunk. Egyszerű esetekben ezek könnyen elintézhetők voltak, de ha a lehetőségek száma nagyon nagy, akkor az összeszámlálást nehezebben tudjuk elvégezni. Most felelevenítjük, rendszerezzük a különböző típusú feladatokat, majd általánosítjuk ezeket.



onhalmi Bencés átság

1. példa Egy osztály tanulói osztályfőnökükkel kilencedikben a tanév elején elhatározták, hogy osztálykirándulások keretében hazánk világörökségi helyszínei közül a következőket fogják meglátogatni: Hollókő, az Aggteleki-karszt, a Pannonhalmi Bencés Főapátság, a Hortobágyi Nemzeti Park, a pécsi ókeresztény sírkamrák és a Tokaj-hegyaljai történelmi borvidék. Hányféle sorrendet tervezhetnek?

Megoldás

A kirándulás tervezett helyszínei egy hatelemű halmazt alkotnak. Lényegét tekintve a kérdés: Hányféle sorrendje lehet egy hatelemű halmaz elemeinek?

Az első helyre a hat helyszín bármelyikét tervezhetik. Bármelyiket is választották elsőnek, a második helyre már csak a maradék öt valamelyike kerülhet. Így az esetek száma ötszöröződik, azaz eddig $6 \cdot 5$ lehetőség van. Harmadiknak már csak a megmaradt négy helyszín, negyediknek a maradék három, ötödiknek a maradék kettő valamelyikét tervezhetik, végezetül az egy megmaradt helyszín kerül a hatodik helyre.

Vagyis a hat helyszín sorrendje $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, azaz 720-féle lehet.

2. példa A szerencsejátékok során előfordul, hogy a fogadók kiegészítő játékot is játszhatnak. Lehet például egy hatjegyű szám eltalálása a cél. A hatjegyű szám számjegyeit sorban egymás után sorsolják. Egyik alkalommal az 1, 4, 7, 7, 9, 9, egy másik alkalommal a 2, 2, 2, 2, 3, 8 számjegyeket sorsolták ki valamilyen sorrendben. Számoljuk össze, hogy hányféle nyerő hatjegyű szám képzelhető el az egyes alkalmakkor!

Megoldás

A kérdés hasonlít az előző példára, de most nem beszélhetünk halmazról (a kapott számjegyek között vannak azonosak, a halmaznak pedig nem lehetnek azonos elemei).

Ha hat különböző számjegyünk lenne, akkor azok összes lehetséges sorrendje $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, azaz 720-féle lenne. Képzeljük el, hogy az azonos számjegyek különböző színűek. A 720 lehetőségben benne van például a 147979 és a 147979 is (vagy a másik alkalommal pl. a 232228 és a 232228 is), pedig nem különbözik az értékük.

Az 1, 4, 7, 7, 9, 9 számjegyek sorba rendezésekor a két hetes számjegy felcserélésével nem kapunk új hatjegyű számot, és a két kilences felcserélésével sem kapunk új hatjegyű számot. Vagyis minden lehetséges hatjegyű számot négyszer számoltunk össze, így kaptunk 720 esetet.

Gondolatmenetünk alapján a sorrendek száma: $\frac{720}{2 \cdot 2} = 180$.

A 2, 2, 2, 2, 3, 8 számjegyek sorba rendezésekor a négy kettes különböző sorrendjeivel (ugyanazon a helyi értékeken hagyva őket) nem kapunk új hatjegyű számot. A négy kettest $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, azaz 24-féle sorrendben szerepeltethetjük. Vagyis minden lehetséges hatjegyű számot 24-szer számoltunk össze, így kaptunk 720 esetet.

Ezek alapján a sorrendek száma: $\frac{720}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 30$.

3. példa Egy világversenyen a 100 méteres síkfutás döntőjébe jutott nyolc atléta előzetes eredményei alapján a sportriporter a verseny előtt azt mondja, hogy bármilyen sorrend elképzelhető. Ha ez igaz, akkor hányféleképpen tudjuk elképzelni az érmek kiosztását? (Azt feltételezzük, hogy holtverseny nem lesz.)

Megoldás
Három versenyző lesz érmes, de az is fontos, hogy ki milyen érmet kap. Aranyérmes a nyolc versenyző bármelyike lehet. Ezüstérmes már csak hét személy lehet, ha megvan az első helyezett. Ez eddig $8 \cdot 7$ lehetőség. A bronzérmes hat versenyző közül kerül ki. Ez önmagában 6 lehetőség, de az első három helyre így összesen $8 \cdot 7 \cdot 6$, azaz 336 lehetőség van.

4. példa A magyar forgalmi rendszámokon három betűt három számjegy követ. A betűk nem ékezetesek, a számjegyek pedig nem egyszerre nullák Hányféle rendszám képezhető ilyen módon? *(1. ábra)*

1.

Q W E R T Z U I O P
A S D F G H J K L
Y X C V B N M

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Megoldás
Az első helyre 26 betű bármelyikét írhatjuk. (Ékezetes és kettős betűk nem szerepelnek a rendszámokon, illetve három nulla sem.)

A rendszámon egy betű vagy egy számjegy többször is szerepelhet, ezért a második helyre és a harmadik helyre is 26 a lehetőségek száma. Ez eddig $26^3 = 17\,576$ eset. A számjegyeknél hasonlóan gondolkodunk. Így kapjuk, hogy ez $10^3 = 1000$, de ebben benne van a három nulla is. Vagyis 999 darab a lehetőségek száma.

Vagyis összesen $26^3 \cdot (10^3 - 1) = 17\,558\,424$ rendszámot tudunk ilyen módon képezni.

5. példa Hány darab síkot határoz meg 1000 darab olyan pont a térben, amelyek közül semelyik négy nincs egy síkon?

Megoldás
Három pontot kiválasztunk, és azok egyértelműen meghatároznak egy síkot, hiszen semelyik négy nincs egy síkon és semelyik három sem lehet egy egyenesen, hiszen ekkor bármelyik negyedik ponttal egy síkra illeszkednének, és ez a feltételek szerint nem lehetséges.

Ha a kiválasztott pontok sorrendjére is figyelünk, akkor az összes eset száma: $1000 \cdot 999 \cdot 998$, azaz 997 002 000. Ezekben az esetekben három pont minden lehetséges sorrendje szerepel, pedig a három pont kiválasztásakor nem érdekes a sorrend, mert bármilyen sorrendben is választottuk őket, ugyanazt a síkot határozzák meg. Mivel három pontot $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-féle sorrendben tudunk kiválasztani, ezért az összes esetek száma: $\frac{997\,002\,000}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 166\,167\,000$.

Vagyis a térbeli 1000 darab pont legfeljebb 166 167 000 darab síkot határoz meg.

6. példa Egy öttagú család vezetékes telefonja kétszer szólalt meg egy órán belül. Számoljuk össze, hogy hányféle változatban vehették fel a telefont a család tagjai, ha ugyanaz a személy kétszer is felvehette, és a sorrendet nem vesszük figyelembe?

Megoldás
A család tagjait jelölje: P, M, A, B, C. Ebből az öt elemből kell kettes csoportokat képeznünk úgy, hogy egy elem kétszer is szerepelhet és a sorrendjük nem lényeges.

Felsoroljuk a lehetséges eseteket:

PP,	PM,	PA,	PB,	PC,
MM,	MA,	MB,	MC,	
AA,	AB,	AC,		
BB,	BC,			
CC.				

Vagyis 15-féle változatban vehették fel a telefont a feltételeknek megfelelően.

Feladatok



1. K1 Egy osztály tanulói közül heten járnak biológiaszakkörre. Hányféle sorrendben írhatjuk be a nevüket a szakköri naplóba, ha nem ragaszkodunk az ábécésorrendhez?

2. K1 Az iskola sportnapján kilenc osztály nevezett a kosárlabdaversenyre. Hányféle sorrend alakulhat ki, ha nem lehet holtverseny?

3. K1 Az ablakban nyolc cserepes növény van, amelyek közül 3 pirosat, 5 pedig fehéret virágzik. Hányféle sorrendben helyezhetők el, ha csak a virágok színét figyeljük?

4. K1 A bevásárlókosárba 3 egyforma sárgabaracklevet és 4 egyforma kajszibaracklevet teszünk. Hányféle sorrendben tehetjük ezt meg?

5. K1 Az ebédnél egy kör alakú asztal körül elhelyezett hat széken foglal helyet a hatfős család. Két leülést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha a családnak van legalább egy olyan tagja, akinek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző.

a) Hányféleképpen lehet ez?

b) Hányféleképpen történhet az elhelyezkedés, ha a két legfiatalabb gyermek mindig egymás mellett ül?

6. K2 Egy társaságban mindenki mindenkivel kezet fog.

a) Hány kézfogás történt, ha 8 fős a társaság?

b) Hány fős a társaság, ha összesen 45 kézfogás volt?

7. K2 Botond megnézte a lecke kidolgozott példáit, és ezt mondta: – Ezeket a feladatokat ÉRTEM. Mi pedig adjuk meg az É, R, T, E és M betűk mindegyikének egyszeri felhasználásával az értelmes szavakat!

8. K2 Egy társaságban 6 férfi és 9 nő van. Férfi a férfival kezet fog. A nők „Szervusz!" köszöntéssel üdvözlik egymást. A férfiak a nőket „Kezét csókolom!", a nők a férfiakat „Jó napot kívánok!" köszönéssel üdvözlik.

a) Hány kézfogás volt összesen?

b) Hányszor hangzott el a „Jó napot kívánok!" köszönés?

c) Hányszor hangzott el a „Kezét csókolom!"?

d) Hányszor hangzott el a „Szervusz!"?

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 1–9, 20–22.

4. Sorba rendezések száma

Egyszerű feladatokban megfigyelhető, hogy három különböző tárgy sorrendbe állítása
$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$,
négy különböző tárgy sorrendbe állítása
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$,
öt különböző tárgy sorrendbe állítása
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
különböző módon történhet.

A válaszokban szereplő szorzatot rövidebben is jelölhetjük:
$1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5!$.

Általában az első n pozitív egész szám szorzata:
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$.

n faktoriális

Az első n pozitív egész szám szorzatát n faktoriálisnak nevezzük, és röviden $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$ a jelölése.
Megállapodás alapján: $1! = 1$, $0! = 1$.

n faktoriális

Általánosságban is megfogalmazzuk az eddigi tapasztalatainkat.

Definíció

Az n számú egymástól különböző elem egy meghatározott sorrendjét az n elem egy permutációjának nevezzük. Az n egymástól különböző elem összes permutációinak számát P_n-nel jelöljük.

Az n elemből az első helyre az n elem bármelyikét kiválaszthatjuk, ez n lehetőség. A második helyre $n-1$ lehetőség marad (ez $n-1$-szeresére növeli a lehetőségek számát). Ezt folytatva az n-edik helyre 1 elem marad.

Ezeknek a lehetőségeknek a szorzata adja az n elem permutációinak számát.

Ezek alapján megfogalmazhatjuk az általános esetre vonatkozó tételt.

Tétel

n számú egymástól különböző elemet $n!$-féleképpen rendezhetünk sorba.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy k darab különböző tárgyat $k!$-féleképpen lehet sorba rendezni. Megmutatjuk, hogy ebből a feltételezésből következik, hogy ekkor $k+1$ darab különböző tárgyat $(k+1)!$-féleképpen lehet sorba rendezni.

A $k+1$ különböző tárgy közül bármelyik kerülhet az első helyre. Ennek kijelölésére $k+1$ lehetőség adódik. Marad még k darab tárgy. Bármelyiket tettük az első helyre, a megmaradt k darab tárgyat $k!$-féleképpen rendezhetjük sorba. Ez összesen $(k+1) \cdot k!$, azaz $(k+1)!$ lehetőség.

Tudjuk, hogy 1 darab tárgy $1!$-féleképpen rakható sorba. A fenti gondolatmenet szerint ekkor 2 darab tárgy $2!$-féleképpen, 3 darab tárgy $3!$-féleképpen rakható sorba.

Ez a gondolatsor folytatható, vagyis minden n pozitív egész számra jó a kiszámítási mód.

A különböző tárgyak (személyek, színek, számok, ...) helyett egy n elemű halmaz elemeiről, a sorba rendezésük helyett pedig az elemek rendezéséről beszélünk.

Az elemek egy sorba rendezését az **elemek egy permutációjának** nevezzük. Ha az elemek egy sorrendjét megváltoztatjuk, ezt **permutálásnak** mondjuk. A permutálásnál fontos kérdés a permutációk száma. Az előző tétel alapján n különböző elem permutációinak száma: $P_n = n!$.

Permutáció



1. példa
a) Permutáljuk a POSTA szó betűit! Hány darab permutáció létezik összesen?
b) Adjuk meg az összes T-vel kezdődő permutációt!

Megoldás
a) Az öt elem permutációinak száma: $P_5 = 5! = 120$.
b) Ha a T betűt írjuk az első helyre, akkor utána a maradék négy betű permutálását kell elvégeznünk. A lehetőségek ábécésorrendben a következők:
TAOPS, TAOSP, TAPOS, TAPSO, TASOP, TASPO,
TOAPS, TOASP, TOPAS, TOPSA, TOSAP, TOSPA,
TPAOS, TPASO, TPOAS, TPOSA, TPSAO, TPSOA,
TSAOP, TSAPO, TSOAP, TSOPA, TSPAO, TSPOA.

2. példa Számítsuk ki!
a) $\frac{5000!}{4998!}$; *b)* $\frac{1000!}{3! \cdot 997!}$; *c)* $\frac{2! + 3! + 4! + 5!}{19}$; *d)* $\frac{13! \cdot 15! \cdot 17! \cdot 19!}{12! \cdot 14! \cdot 16! \cdot 18!}$.

Megoldás
Mind a négy esetben a faktoriális jelentését használjuk!

a) $\frac{5000!}{4998!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 4997 \cdot 4998 \cdot 4999 \cdot 5000}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 4997 \cdot 4998} = 4999 \cdot 5000 = 24\,995\,000.$

b) $\frac{1000!}{3! \cdot 997!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 997 \cdot 998 \cdot 999 \cdot 1000}{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 996 \cdot 997)} = \frac{998 \cdot 999 \cdot 1000}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 166\,167\,000.$

c) $\frac{2!+3!+4!+5!}{19} = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{19} = \frac{2+6+24+120}{19} = \frac{152}{19} = 8.$

d) $\frac{13! \cdot 15! \cdot 17! \cdot 19!}{12! \cdot 14! \cdot 16! \cdot 18!} = 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 = 62\,985.$

Sorba rendezésről beszélünk akkor is, ha a rendezésre váró dolgok között számunkra megkülönböztethetetlenek is vannak. Ezt **ismétléses permutációnak** mondjuk.

3. példa Egy fakultációs csoport munkájába 11 tanuló kapcsolódott be, közülük négyen az *A* osztályba, hatan a *B* osztályba és egy tanuló a *C* osztályba jár. Hányféle sorrendben léphetnek a tanterembe, ha csak azt figyeljük, hogy ki melyik osztály tanulója?

Megoldás
A 11 tanulót most *a*, *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *b*, *b*, *b*, *b*, *c*-vel jelöljük. Ezen betűk permutációink számát keressük.

Ha tizenegy különböző betűnk lenne, akkor azok összes lehetséges sorrendje 11!. A fenti betűk sorba rendezésekor a négy *a* betű cseréléseivel nem kapunk új sorrendet, és a hat *b* betű cseréléseivel sem. Vagyis minden lehetséges sorrendet $4! \cdot 6!$-szor számoltunk össze, így kaptunk 11! esetet.

Gondolatmenetünk alapján a sorrendek száma: $\frac{11!}{4! \cdot 6!} = 2310.$

Ha *n* darab, ner
határozni, akkor m
forma, …, n_k dara

Definíció
Az *n* számú elem
van – egy megha
összes ismétlése

Az előző példa
fogalmazunk egy

Tétel
n elem ismétlés
lődő elemek sz

Az előző péld

Feladatok

1. K1 Számít
a) $\frac{4001!}{3999!}$;

2. K2 Hozzu
a) $(n-2)! \cdot (n$
c) $\frac{(n+2)!}{(n+2)(n+}$
e) $(n+3)! + ($

3. K2 Hány
a) FÖLDRAJZ;
b) INFORMATI
c) MATEMATI
szó betűinek?

4. K2 A me
Brigitta, Dánie
a) Hányféleké
b) Hányféleké
ülni?
c) Hányféleké
lett ülni?
d) Hányfélek
e) Hányfélek
és Dániel
f) Hányfélek
és Dániel

Ha n darab, nem mind különböző tárgy ismétléses permutációinak számát szeretnénk meghatározni, akkor meg kell számolnunk, hogy az ismétlődőkből mennyi van. Legyen n_1 darab egyforma, …, n_k darab egyforma ($n_1 + \ldots + n_k \leq n$).

Definíció

Az n számú elem – amelyek közt rendre n_1, n_2, …, n_k számú egymás közt megegyező elem van – egy meghatározott sorrendjét az n elem egy ismétléses permutációjának nevezzük. Az összes ismétléses permutációk számát $P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ jelöli.

Az előző példa gondolatmenete alapján n elem ismétléses permutációinak számára is megfogalmazunk egy tételt.

Tétel

n elem ismétléses permutációinak száma: $P_n^{n_1; \ldots; n_k} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$, ahol n_1, n_2, …, n_k az ismétlődő elemek számát jelenti.

n elem ismétléses permutációinak száma

Az előző példa végeredményét így írhatjuk le: $P_{11}^{4;6} = \dfrac{11!}{4! \cdot 6!} = 2310$.

Feladatok

1. K1 Számítsuk ki!

a) $\dfrac{4001!}{3999!}$; *b)* $\dfrac{100!}{3! \cdot 97!}$; *c)* $\dfrac{2! + 4! + 6! + 8!}{2}$; *d)* $\dfrac{22! \cdot 24! \cdot 26!}{21! \cdot 23! \cdot 25!}$.

2. K2 Hozzuk egyszerűbb alakra!

a) $(n-2)! \cdot (n-1)n(n+1)$;
b) $(n-1)! \cdot n(n+1)(n+2)$;
c) $\dfrac{(n+2)!}{(n+2)(n+1)}$;
d) $\dfrac{(n+4)!}{(n+1)!}$;
e) $(n+3)! + (n+2)! + (n+1)!$;
f) $\dfrac{(n-1)!}{n^2 - 3n + 2}$.

3. K2 Hány permutációja van a

a) FÖLDRAJZ;
b) INFORMATIKA;
c) MATEMATIKA

szó betűinek?

4. K2 A metrón hat ember tud egymás mellett helyet foglalni. A végállomáson felszáll Attila, Brigitta, Dániel, Réka, Vanda és Viktória.

a) Hányféleképpen tudnak leülni erre a hat helyre?
b) Hányféleképpen tudnak leülni erre a hat helyre, ha Réka és Vanda egymás mellett szeretne ülni?
c) Hányféleképpen tudnak leülni erre a hat helyre, ha Attila és Viktória nem szeretne egymás mellett ülni?
d) Hányféleképpen tudnak leülni erre a hat helyre, ha a fiúk és a lányok nem keverednek össze?
e) Hányféleképpen tudnak leülni erre a hat helyre, ha a fiúk és a lányok nem keverednek össze, és Dániel Réka mellett szeretne ülni?
f) Hányféleképpen tudnak leülni erre a hat helyre, ha a fiúk és a lányok nem keverednek össze, és Dániel nem szeretne Réka mellett ülni?





5. K2 Az ebédlőben az asztal körül elhelyezett hét széken szeretne helyet foglalni Anna, Balázs, Bálint, Domonkos, Dóra, Fanni és Simona. Két leülést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha van legalább egy olyan tagja a társaságnak, akinek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző.
a) Hányféleképpen foglalhatnak helyet?
b) Hányféleképpen történhet az elhelyezkedés, ha Anna és Fanni egymás mellett szeretne ülni?
c) Hányféleképpen történhet az elhelyezkedés, ha Bálint szomszédjai Domonkos és Balázs?

6. K2 Egy automatába eddig bedobtunk 4 db ötvenes és 6 db százas pénzérmét. Hányféle sorrendben tehettük ezt meg?

7. K2 Készítsünk hétjegyű telefonszámokat 1 db 0, 1 db 5, 3 db 2 és 2 db 4 számjegy mindegyikének felhasználásával!
a) Hány darab készíthető, ha az első helyre nem rakhatjuk a 0 számjegyet?
b) Hány darab 242 kezdetű telefonszámot tudunk készíteni ezen számjegyek felhasználásával?

8. K2 A tíz számjegy mindegyikének felhasználásával hány darab
a) tízjegyű;
b) tízjegyű, hárommal osztható;
c) tízjegyű, kilenccel osztható;
d) tízjegyű, hattal osztható;
e) tízjegyű, negyvenöttel osztható;
f) tízjegyű, kilencvennel osztható
szám készíthető?

9. E1 Igazoljuk, hogy három egymást követő pozitív egész szám faktoriálisainak összegét úgy is kiszámíthatjuk, hogy a legkisebb szám faktoriálisát megszorozzuk a legnagyobb szám négyzetével!

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 50–63., 84–100.

10. E1 A kosárlabda-mérkőzésen 1, 2 és 3 pontos kosár is dobható. A csapat egyik játékosa a mérkőzésen 12 pontot szerzett. Hányféleképpen alakulhatott ki ez a pontszám?

11. E1 A bajnokság hetedik fordulója után az egyik focicsapatnak 11 pontja van. A győzelem 3, a vereség 0, a döntetlen 1 pontot ér. Hányféleképpen alakulhatott ki ez a pontszám?

5. Kiválasztás és sorrend

Vannak olyan kérdések, amikor egy halmaz nem minden elemét kell sorba rendezni. A halmaz elemeiből ki kell választanunk néhányat, és csak azokat kell sorba raknunk. A mindennapi életben ilyen például a sportversenyeken az érmek megszerzése. A versenyzők közül kerül ki a három érmes, de az érmesek ismeretében még a pontos sorrendet nem tudhatjuk. Őket még sorba kell rendezni. Nyolc versenyző esetén korábban láttuk, hogy ez összesen $8 \cdot 7 \cdot 6$, azaz 336 lehetőség.

Példánkban 8 elem 3-ad osztályú **variációinak** számát határoztuk meg. Ezt röviden így jelölhetjük: $V_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. Általánosságban is megfogalmazzuk az eddigi tapasztalatainkat.

Definíció

Az n számú, egymástól különböző elemből tetszőlegesen választott k ($k \leq n$) különböző elem egy meghatározott sorrendjét az n elem egy k-adosztályú (ismétlés nélküli) variációjának nevezzük. Az n egymástól különböző elem összes k-adosztályú (ismétlés nélküli) variációjának számát V_n^k-val jelöljük.

Az n elemből az első helyre az n elem bármelyikét kiválaszthatjuk, ez n lehetőség. A második helyre $n-1$ lehetőség marad [azaz $(n-1)$-szereződik az esetek száma]. Ezt folytatva a k-adik helyre $n-(k-1)$, azaz $n-(k+1)$ elem bármelyikét választhatjuk. Ezen lehetőségek számának szorzata adja az n elem k-ad osztályú variációinak számát.

Ezek alapján megfogalmazhatjuk az általános esetre vonatkozó tételt.

Tétel

n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációinak száma:

$V_n^k = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$, ahol n és k pozitív egészek, és $k \le n$.

n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációinak száma

1. példa Írjuk fel a HUBA név betűiből képezhető hárombetűs (nem feltétlenül értelmes) szavakat, ha minden szóban egy betű csak egyszer szerepelhet!

Megoldás

A feladatunk négy elem harmadosztályú variációinak felsorolása. Mivel $V_4^3 = 4\cdot3\cdot2 = 24$, ezért 24 szót kell felsorolnunk. (Ez a darabszám természetesen megegyezik a név betűiből képezhető négybetűs szavak számával: $V_4^3 = P_4$. A 24 szó végéről le kell hagynunk az utolsó betűt.)

A felsorolásnál érdemes valamilyen sorrendben megállapodnunk, hogy ne maradjon ki semmi. Választhatjuk például a szavak ábécésorrendjét:

ABH, ABU, AHB, AHU, AUB, AUH,
BAH, BAU, BHA, BHU, BUA, BUH,
HAB, HAU, HBA, HBU, HUA, HUB,
UAB, UAH, UBA, UBH, UHA, UHB.

2. példa Egy vetélkedő szereplői az első és a második díj elnyeréséért versengenek. A játékvezető szerint pontosan 132 lehetőség van a két különböző díj megnyerésére. Egy ember maximum egy díjat kaphat. Hány résztvevője van a játéknak?



Megoldás

A feladatunkban n elem másodosztályú variációiról van szó. A játékvezető megállapítása alapján: $V_n^2 = n\cdot(n-1) = 132$.

Ha két egymást követő pozitív egész szám szorzata 132, akkor azok a számok a 11 és a 12. Ezeknél kisebb, illetve nagyobb számok nyilván nem lehetnek megfelelőek. Vagyis az egyedüli megoldás: $n = 12$. Tehát a vetélkedőnek 12 szereplője volt.

Az 1. példa feltételeit betartva nem kaphatjuk meg a HUBA név betűnek a felhasználásával például a BAB, UHU, UBU, … hárombetűs szavakat, mert ezekben ismétlődő betűk is szerepelnek. Variációk esetén is megtehetjük, hogy értelmezünk egy olyan változatot, amely megengedi az elemek ismétlődését. Az ilyen változatot **ismétléses variációnak** nevezzük.

3. példa Hány darab hárombetűs (nem feltétlenül értelmes) szó képezhető a HUBA név betűinek felhasználásával, ha a betűk ismétlődhetnek is?

Megoldás

Az első helyre a négy betű bármelyike kerülhet. Ez négy lehetőség. A második helyre is bármelyik kerülhet a négy betű közül. Ez szintén négy eset, ami az eddigi esetek számát megnégyszerezi. A harmadik helyre is bármelyik kerülhet. Ez is négy eset, ami megint megnégyszerezi az eddigi esetek számát. Vagyis $4^3 = 64$ az esetek száma

Általánosságban is megfogalmazzuk az előző példában tapasztaltakat.

Definíció

Ha az n számú egymástól különböző elemből tetszőlegesen kiválasztunk k elemet, amelyek között egy elem többször is szerepelhet, és az elemek sorrendjét is figyelembe vesszük, akkor az n elem egy k-adosztályú ismétléses variációját kapjuk. Az n egymástól különböző elem összes k-adosztályú ismétléses variációjának számát $V_n^k(i)$-vel jelöljük.

Az n elemből az első helyre az n elem bármelyikét kiválaszthatjuk, ez n lehetőség. A második helyre is az n elem bármelyikét kiválaszthatjuk, ez is n lehetőség, ami az eddigi esetek számát n-szerezi (ez eddig $n \cdot n$ eset). Ezt folytatva a k-adik helyre is n lehetőség adódik. Ezen lehetőségek számának szorzata adja n elem k-ad osztályú ismétléses variációinak számát.

Most már megfogalmazható az általános esetre vonatkozó tétel.

Tétel

n elem k-ad osztályú ismétléses variációinak száma: $V_4^3(i) = n^k$, ahol n és k pozitív egészek.

Az előző példában négy elem harmadosztályú ismétléses variációinak számát számoltuk össze. Röviden ezt így írhatjuk: $V_4^3(i) = 4^3 = 64$.



4. példa A Totóban 13 + 1 focimeccs eredményét kell megtippelni. Ha a hazai csapat nyer, akkor 1-et, ha a vendégcsapat, akkor 2-t, döntetlen esetén pedig X-et kell írni.

a) Hány darab szelvényt kellene kitöltenünk, ha azt szeretnénk, hogy biztosan legyen telitalálatunk?

b) Ha azt feltételezzük, hogy 1 másodperc alatt le tudunk írni egy számjegyet vagy egy betűt, akkor minimum hány napot kellene megállás nélkül dolgoznunk, hogy az összes szelvényt kitöltsük?

Megoldás

a) Most három különböző elem áll a rendelkezésünkre: 1, 2 és X. Ezek 14-ed osztályú ismétléses variációinak számát kell meghatároznunk.

$V_3^{14}(i) = 3^{14} = 4\,782\,969$.

Vagyis ahhoz, hogy biztosan legyen telitalálatunk, 4 782 969 darab szelvényt kellene kitöltenünk.

b) Egy szelvényre 14 jelet kell írnunk, vagyis ez feltételezésünk szerint 4 782 969 · 14 másodpercig tartana. Ha ezt a számot elosztjuk 60 · 60 · 24-gyel, akkor megkapjuk a napok számát:

$$\frac{4\,782\,969 \cdot 14}{60 \cdot 60 \cdot 24} \approx 775.$$

Vagyis minimum 775 napot kellene megállás nélkül dolgoznunk, hogy az összes szelvényt kitöltsük.

5. példa Hány darab legfeljebb négyjegyű, természetes szám írható fel a hatos számrendszerben?

Megoldás

Minden helyi értéken használhatjuk a hat számjegy (0, 1, 2, 3, 4, 5) bármelyikét. Mivel legfeljebb négyjegyűeket keresünk, ezért 6 különböző elem 4-ed osztályú ismétléses permutációinak számát kell meghatároznunk.

$V_6^4(i) = 6^4 = 1296$.

Vagyis a hatos számrendszerben 1296 darab legfeljebb négyjegyű természetes szám írható fel.

(Ezeket a számokat így sorolhatnánk fel: 0000, 0001, …, 0005, 0010, 0011, …, 5555, ahol a négyjegyűnél rövidebb számok esetén a magasabb helyi értékeken nullákat szerepeltettünk.)

Feladatok

1. K1 Írjuk fel az ERDŐ szó betűiből képezhető hárombetűs (nem feltétlenül értelmes) szavakat, ha minden betű csak egyszer szerepelhet egy szóban!

2. K1 Az 1, 3, 5, 7 számjegyek felhasználásával háromjegyű, illetve négyjegyű számokat készítünk. Egy számban mindegyik számjegy maximum egyszer szerepelhet. Hasonlítsuk össze az így képezhető háromjegyű és négyjegyű számok számát!

3. K1 Az iskolai szavalóverseny döntőjébe tíz tanuló jutott. Az első hat helyezett kap hat különböző díjat. Hányféle sorrend alakulhat ki?

4. K2 Hány ember indult azon a sportversenyen, ahol az arany-, ezüst-, bronzérmek kiosztása 504-féleképpen történhetne?

5. K2 Egy vetélkedő 9 szereplőjének jutalma három különböző díj lesz. Hányféleképpen vihetik el a játék végén a nyereményeket, ha egy versenyző többet is nyerhet?

6. K2 Egy tesztes versenyen 30 kérdés mindegyikére 5 különböző válaszból választhatunk, egy másik versenyen pedig 4 különbözőből (minden kérdésre csak egy jó válasz van). Maximum hány kérdéses lehet az utóbbi teszt, ha azt szeretnénk, hogy a kitöltési lehetőségek száma kevesebb legyen, mint a 30 kérdésesé?

7. K2 Hatjegyű számot egy nyolclapú sorsvetővel (dobóoktaéder) állítunk elő. A test nyolc lapja 1-től 8-ig számozott. A dobott számokat a dobás sorrendjében egymás után írjuk. A hatodik dobás után kialakul egy hatjegyű szám. Hányféle hatjegyű számot nem kaphatunk meg ilyen módon?



További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészí feladatgyűjtemény II. 64–77.

6. Kiválasztások számának meghatározása

A kiválasztások számát úgy is összeszámlálhatjuk, hogy a kiválasztás sorrendjére nem vagyunk kíváncsiak. Például egy osztály tanulói közül két embert kiválasztunk, ők lesznek a következő héten a hetesek. Nem fontos, hogy az osztályfőnök milyen sorrendben mondja a két kiválasztott nevét, csak a kiválasztás ténye a fontos. Ehhez hasonló kérdésekkel is találkozunk a mindennapi életben.

1. példa Az ötös lottón a hetenként rendezett sorsoláson az 1-től 90-ig terjedő egész számokból húznak ki 5 számot. A játékosok 90 számból öt számot játszhatnak meg. Hány darab játékszelvényt kellene kitölteni a biztos telitalálathoz?

Megoldás

Ha a kiválasztott számok sorrendjére is figyelünk, akkor 90 elem 5-öd osztályú variációinak számát kell összeszámolnunk:

$V_{90}^{5} = 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$.

Ezekben az esetekben az öt szám valamennyi permutációja szerepel, de ez most érdektelen. Nekünk csak a kiválasztás fontos. Egy szelvényen, ha például bejelöltük a 61-et, akkor az nem számít, hogy ezt az általunk bejelölt öt szám közül hányadiknak jelöltük be. Ezért a variációk száma alapján kapott $90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$ esetben az öt kiválasztott szám 5!-szorosan szerepel. A különböző esetek száma ezért:

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43\,949\,268.$$

43 949 268 darab játékszelvény helyes kitöltése után mondhatnánk, hogy biztosan van a szelvényeink között telitalálatos.

Példánkban 90 elem 5-öd osztályú **kombinációinak** számát határoztuk meg. Ezt röviden így jelöljük

$$C_{90}^{5} = \binom{90}{5},$$

és így olvassuk: 90 elem 5-öd osztályú kombinációinak száma 90 alatt az 5.

Azt is láttuk, hogy

$$\binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Mi ki fogjuk írni ezt a kiszámítási módot, azonban a számológépek nagy részén a $\binom{90}{5}$ típusú számok közvetlenül is meghatározhatók. Ezt a lehetőséget mindenkinek a saját gépén kell megkeresni, és elsajátítani a használatát.

A legtöbb gépen az *nCr* feliratú billentyűvel lehet ezeket a számításokat elvégezni, vagyis a 90 alatt az 5 kiszámításához a 9, 0, *nCr* és az 5 feliratú billentyűket kell megnyomni.

Megfogalmazzuk általánosságban is a fenti példa kérdését:

Hányféleképpen választhatunk ki n különböző tárgyból k darabot, ha a sorrend nem számít?

Vagy másféleképpen: Hány k elemű részhalmaza van az n elemű halmaznak?

Definíció

Az n számú egymástól különböző elemből tetszőlegesen választott k ($k \leq n$) különböző elemet tartalmazó csoportot az n elem egy k-adosztályú (ismétlés nélküli) kombinációjának nevezzük. (A kiválasztott k elem sorrendjére nem vagyunk kíváncsiak.) Az n egymástól különböző elem összes k-adosztályú (ismétlés nélküli) kombinációjának számát C_n^k-val jelöljük.

Az 1. példa gondolatmenetét követve a következő megállapításhoz jutunk:

Tétel

Kombináció

n elem *k*-ad osztályú kombinációinak száma:

$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$, ahol *n* és *k* pozitív egészek és $k \le n$.

A következő értelmezéseket is használjuk: $C_n^0 = \binom{n}{0} = 1$, $C_0^0 = \binom{0}{0} = 1$.

2. példa Igazoljuk, hogy $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$!

Megoldás

Az igazolandó egyenlőség jobb oldalát egyszerűsítsük $(n-k)!$-sal:

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k)\cdot(n-k+1)\cdot\ldots\cdot n}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{(n-k)!\cdot(n-k+1)\cdot\ldots\cdot n}{k!\cdot(n-k)!} =$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$$

Ez pedig a tételben szereplő formula, ezzel az állítás helyességét igazoltuk.

3. példa Egy 29 fős osztály jutalmul 10 színházjegyet kapott.

a) Hányféleképpen választható ki a színházba menő 10 tanuló?

b) Hányféleképpen választható ki a színházba nem menő 19 tanuló?

c) A színházjegyek kiosztásánál az osztály tanulói az osztályfőnökükre is gondolnak. Hányféleképpen választható ki ekkor a színházba menő 10 fő?

d) Hányféleképpen osztható ki a 10 színházjegy, ha az osztályfőnököt a tanulók mindenképpen a kiválasztottak közé teszik?

e) Milyen összefüggést találunk az *a)*, a *c)* és a *d)* esetben összeszámolt esetek száma között?



Megoldás

a) Itt 29 elem 10-ed osztályú kombinációinak számáról van szó:

$$C_{29}^{10} = \binom{29}{10} = \frac{29\cdot 28\cdot\ldots\cdot 20}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 10} = 20\,030\,010.$$

b) Most 29 elem 19-ed osztályú kombinációinak számát kell kiszámítanunk. Ez a megtanult módszer nélkül is megállapítható, hiszen amikor kiválasztunk 10 tanulót, hogy ők kapják a színházjegyet, akkor 19-et is kiválasztunk arra, hogy ők nem kapnak színházjegyet. Vagyis 29 elem 10-ed osztályú kombinációinak száma egyenlő 29 elem 19-ed osztályú kombinációinak számával. Ezért:

$$C_{29}^{19} = \binom{29}{19} = \binom{29}{10} = 20\,030\,010.$$

c) Ekkor 30 elem 10-ed osztályú kombinációinak számát határozzuk meg:

$$C_{30}^{10} = \binom{30}{10} = \frac{30\cdot 29\cdot\ldots\cdot 21}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 10} = 30\,045\,015.$$

d) Mivel az osztályfőnök a kiválasztottak között van, ezért a 29 fős osztályra csak 9 jegy marad, azaz 29 elem 9-ed osztályú kombinációinak számát kell összeszámolnunk:

$$C_{29}^{9} = \binom{29}{9} = \frac{29\cdot 28\cdot\ldots\cdot 21}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 9} = 10\,015\,005.$$

e) Láthatóan 30 045 015 = 10 015 005 + 20 030 010, de ez nem meglepő. Ha összeszámoljuk azokat az eseteket, amikor az osztályfőnök biztosan megy a színházba, majd azokat az eseteket, amikor az osztályfőnök biztosan nem megy a színházba, akkor a két szám összege nyilvánvalóan azt a számot adja, ahányféleképpen a 30 fő közül kiválasztható a színházba menő 10 ember.

Az előző példa alapján két fontos összefüggést fogalmazunk meg. Igazolásuk az előzőekben látott módon történhet, de algebrai átalakításokkal is bizonyíthatnánk mindkettőt.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Feladatok

1. K1 Számítsuk ki!

a) $\binom{7}{3}$; *b)* $\binom{9}{4}$; *c)* $\binom{12}{9}$; *d)* $\binom{21}{19}$.

2. K1 Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $\binom{10}{7}\binom{7}{2}$; *b)* $\binom{10}{9}\binom{9}{2}$; *c)* $\binom{7}{3}:\binom{14}{11}$; *d)* $\binom{9}{8}:\binom{100}{98}$.

3. K1 Végezzük el az összeadásokat, kivonásokat!

a) $\binom{5}{2}+\binom{7}{3}$; *b)* $\binom{9}{7}+\binom{9}{2}$; *c)* $\binom{8}{4}-\binom{14}{13}$; *d)* $\binom{100}{98}-\binom{9}{6}$.



4. K1 Mennyibe került volna 2010-ben megjátszani az összes lehetséges szelvényt az ötös lottón, ha akkor 225 Ft-ba került egy fogadás?
(Az ötös lottó első 50 évében a legnagyobb nyeremény 5 092 890 758 Ft volt, 2003. november 29-én.)

5. K1 A hatos lottón a hetenként rendezett sorsoláson az 1-től 45-ig terjedő egész számokból húznak ki hat számot. A játékosok 45 számból hat számot játszhatnak meg.
a) Hány darab játékszelvényt kellene kitölteni a biztos telitalálathoz?
b) Hasonlítsuk össze a kapott darabszámot az ötös lottó esetén kapottal!

6. K2 Adott n db pont úgy, hogy nincs közöttük három, amely egy egyenesre illeszkedne, és nincs közöttük négy, amely egy síkban lenne. Hány szakaszt, hány háromszöget, hány tetraédert határoznak meg, ha
a) $n = 4$; *b)* $n = 6$; *c)* $n = 8$; *d)* $n = 10$?

7. K2 Egy kosárban 36 darab pingponglabda van, 9 darab sárga, a többi fehér. Hányféleképpen lehet kiválasztani 6 labdát, hogy a kiválasztottak között
a) 0; *b)* 1; *c)* 3; *d)* 5
sárga legyen?

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 140–157., 179., 189.

7. A matematikai logika alapfogalmai

A gondolkodás tudománya – a logika – már az ókorban is megjelent, hiszen a tudományok fejlődése szükségessé tette az emberi gondolkodás vizsgálatát. Kiemelkedő fontosságú *Arisztotelész* (Kr. e. 384–322) logikáról írt műve. Ismerte a korábbi idők szellemi alkotásait, és kereste a tudományos kutatásokhoz az emberi gondolkodás által követendő módszereket. Természetesen ennek a munkásságnak is vannak előzményei. Matematikatörténeti kutatások alapján akár évszázadokat is haladhatunk vissza az időben az eredetet keresni.

A logika módszere hosszú ideig szinte semmit nem változott. *Aquinói Szent Tamás* (1225–1274) megteremtette az arisztotelészi világkép és a keresztény teológia összhangját. A XIX. században *Georg Boole* (1815–1864) *A gondolkodás törvényei* című munkájával elkezdődik a matematikai logika kialakítása.

A matematikai logika területén a magyar matematikusok is maradandót alkottak. *Péter Rózsa* (1905–1977) már az 1930-as években jelentős eredményeket ért el ezen a területen. *Kalmár László* (1905–1976) neve világszerte megjelenik egyetemi szintű logikatankönyvekben (Kalmár-féle bizonyítás, Kalmár-féle függvényosztály). *Neumann János* (1903–1957) pedig az első elektronikus számítógép megépítéséhez a teljes logikai apparátust felhasználta.

A matematikai logikában a kijelentő mondatok nagyon fontosak. Ezek között kiemelkedő jelentőségűek azok, amelyekről eldönthető, hogy igazak vagy hamisak.

Állítás

Állításnak (kijelentésnek, ítéletnek) nevezzük azt a kijelentő mondatot, melyről egyértelműen eldönthető, hogy vagy igaz, vagy hamis.

Állítás

Állítás logikai értéke

Egy állítással kapcsolatban az *igaz*-at, a *hamis*-at az állítás logikai értékének nevezzük.

Állítás logikai értéke

Az állításokat az élet bármely területéről vehetjük. A továbbiakban ezeket a kijelentő mondatokat egy-egy nagybetűvel fogjuk jelölni, így rövidebben tudunk róluk beszélni.

Ha az A állítás logikai értéke igaz, azt így jelöljük: $|A| = i$.

Ha a B állítás logikai értéke hamis, azt így jelöljük: $|B| = h$.

1. példa Adjuk meg a logikai értékét a következő állításoknak!

A: A 12 páros szám.
B: Ma szerda van.
C: Most itt havazik.
D: Minden prímszám páratlan.
E: Az ikerprímszámok száma végtelen.

Megoldás

Az A állítás igaz, a D hamis. Jelöléseinkkel: $|A| = i$, $|D| = h$.

A B és a C állítás logikai értékét ebben a könyvben nem tudjuk megadni. Az olvasó természetesen a szöveg olvasásának pillanatában eldöntheti, hogy igaz vagy hamis állításról van-e szó.

Előfordul, hogy bizonyos kijelentésekről még nem tudjuk, hogy igazak-e vagy hamisak. Mégis feltesszük, hogy egyértelműen eldönthető róluk igaz vagy hamis voltuk. Az E kijelentő mondatról e sorok írásakor még nem tudtuk, hogy igaz vagy hamis, de ezt is állításnak tartjuk.

2. példa Döntsük el a következő mondatokról, hogy állítások-e!
A: Vigyázz, mély víz!
B: Mi volt a házi feladat?
C: Erre ment.
D: Számítsuk ki a 3 cm oldalhosszúságú négyzet kerületét!
E: Van egy piros tollad?
F: Petőfi Sándor legszebb verse a *Szülőföldemen*.
G: Holnap szép idő lesz.

Megoldás
A felsorolt hét mondat közül a nem kijelentő mondatok nem lehetnek állítások: *A*, *B*, *D*, *E*.

A *C* kijelentő mondat hiányos, meghatározhatatlan a logikai értéke.

Az *F* kijelentő mondatban a legszebb vers nem definiálható, ilyen értelemben bizonytalan a jelentése.

A *G* nyelvtani értelemben kijelentő mondat. Van, amikor a körülmények ismeretének hiánya, vagy a mondatban rejlő bizonytalan jelentésű szavak miatt nem eldönthető, hogy igaz vagy hamis. Ez is egy ilyen mondat.

Ezen mondatok egyike sem állítás.

Az 1. példában olyan kijelentéseket olvashattunk, amelyek nem bonthatók fel részekre. Egyiket sem alakíthatjuk át úgy, hogy azt két kijelentés összekapcsolásának tekintsük.

Ezek az **egyszerű állítások**.

Nézzük a következő állításokat!

A: A 9 prímszám.

Tudjuk, hogy $|A| = |$ A 9 prímszám.$| = h$.

Ez a szövegezés azonban furcsa számunkra, természetesebbnek érezzük a következőt:

B: A 9 nem prímszám.

Tudjuk, hogy $|B| = |$ A 9 nem prímszám.$| = i$.

Ha az *A* és a *B* állítást összehasonlítjuk, akkor egyszerűen azt mondjuk, hogy a *B* állítás az *A* tagadása.

Az előző példa állításai közötti kapcsolat röviden: a *B* egyenlő *nem A*.

A tagadás egy logikai művelet. A tagadással egy új állítást kapunk.

A tagadás műveletének jele: ¬. Például: ¬*A* jelentése és kiolvasása: *nem A*.

Kilencedik osztályban már láttuk, hogy a matematikai nyelvezet sokszor eltér a köznapi szóhasználattól. Ha például valamire azt mondjuk, hogy nem jó, akkor azt rendszerint úgy értjük, hogy rossz. A matematikában a nem jó csak annyit jelent, hogy nem jó, vagyis ebből még nem tudjuk, hogy rossz. A köznyelv nem különbözteti meg az állítás tagadását és az állítás ellentétét.

A következő táblázatban erre látunk példákat.

Az állítás:	**tagadása:**	**ellentéte:**	**de lehetne ez is:**
jó	nem jó	rossz	közömbös
negatív	nem negatív	pozitív	nulla
fekete	nem fekete	fehér	zöld
süt a nap	nem süt a nap	esik az eső	hull a hó
páros	nem páros	páratlan	törtszám

Az utolsó példa azt is jól mutatja, hogy milyen fontos az alaphalmaz. Ha az egész számokon gondolkodunk, akkor a páros tagadása csak páratlan lehet.

3. példa Adjuk meg a következő állítások tagadását!
A: Hull a hó.
B: Minden osztálytársam fiú.
C: Minden háromszögnek van derékszöge.

Megoldás
¬*A*: Nem igaz, hogy hull a hó. Vagyis: Nem hull a hó.
¬*B*: Nem igaz, hogy minden osztálytársam fiú. Vagyis: Van lány osztálytársam.
¬*C*: Nem igaz, hogy minden háromszögnek van derékszöge. Vagyis: Van olyan háromszög, amelynek nincs derékszöge.

Feladatok

1. K1 Döntsük el a következő mondatokról, hogy állítások-e!
A: Vigyázz, a kutya harap!
B: Milyen színű inget vettél?
C: Odatettem.
D: Számítsuk ki a szabályos háromszög területét, ha a magassága 5 cm hosszú!
E: Ez egy barna kabát?
F: Holnap nem fog esni az eső.

2. K1 Döntsük el a következő mondatokról, hogy állítások-e! Állítás esetén adjuk meg a logikai értékét!
A: Kétszer kettő néha öt.
B: Két út van előttem, melyiken induljak?
C: Száz forintnak ötven a fele.
D: Szabad a madárnak ágról ágra szállni.

3. K1 Adjuk meg a logikai értékét a következő állításoknak!
A: A 11 páratlan szám.
B: A 267 osztható 3-mal.
C: A deltoid olyan négyszög, amelynek van derékszöge.
D: A pókoknak hat lába van.
E: A *Talán eltűnök hirtelen* verssort József Attilánál olvashatjuk.
F: A kadmium vegyjele Ca.
G: Edelényen keresztül folyik a Bódva.
H: Wass Albert egyik regényének címe a *Tizenhárom almafa*.
A döntésekhez használhatunk szakirodalmat, világhálót!





4. K1 A következő állítások tartalma megegyezik egy-egy közmondásunkkal. Adjuk meg a közmondásokat a szokásos alakban!
A: Sok liba diadalmaskodik a sertés fölött.
B: Az ebet ezen a helyen hantolták el.
C: A valótlant állítót gyorsabban utolérik, mint a járáshibás ebet.
D: Az év ötödik hónapjában hulló cseppfolyós halmazállapotú csapadék értéke az arannyal egyező.

5. K1 Írjuk fel a következő szavak tagadását, majd adjuk meg egy-egy ellentétüket is!
a) magas; *b)* buta; *c)* vékony; *d)* szögletes; *e)* kicsi; *f)* csúnya.

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1–4.

6. K2 Írjuk fel a következő állítások tagadását! Döntsük el, hogy melyik igaz: az állítás vagy a tagadása!

A: Minden természetes szám pozitív.
B: Minden paralelogrammában a két átló egyenlő hosszú.
C: Minden 3-mal osztható szám osztható 9-cel.
D: Van olyan háromszög, amelynek csak egy hegyesszöge van.
E: Van olyan háromszög, amelynek pontosan két oldala egyenlő hosszúságú.
F: Öt egymást követő páratlan szám mindegyike lehet prímszám.

8. Logikai műveletek

Az előző leckében láttuk, hogy az állítás tagadásával egy új állítást hozunk létre. Felmerül a kérdés, hogy egyszerű állítások valamilyen nyelvtani összekapcsolásával képezhetünk-e új állításokat. A következőkben ezt fogjuk megvizsgálni.

A logika fő célja a helyes következtetések megtalálása. A matematikaórákról felidézünk két példát, amelyeket helyes következtetésnek tartunk.

a) Ha egy egész szám osztható kettővel és osztható hárommal, akkor osztható hattal.
Ez az egész szám nem osztható hárommal.
Tehát ez az egész szám nem osztható hattal.

b) Ha egy háromszögnek van 60°-os szöge és van szimmetriatengelye, akkor ez a háromszög szabályos.
Ennek a háromszögnek nincs szimmetriatengelye.
Tehát ez a háromszög nem szabályos.

Két tartalmában eltérő, de nagyon hasonló szerkezetű következtetést olvashattunk. Fogalmazzuk meg ezt a közös szerkezetet:

Ha *A* és *B*, akkor *C*.
Nem *B*.
Tehát nem *C*.

Az *A*, *B*, *C* a szokásos módon egy-egy állítást jelöl, amelyeknek logikai értéke vagy igaz, vagy hamis. Megjelentek továbbá a szövegben az úgynevezett logikai kapcsolószavak: *nem*; *és*; *ha …, akkor …*. Ezek a szavak olyan **logikai műveleteket** jelölnek, amelyekkel az egyszerű állításokból **összetett állítások** készíthetők. Láthattuk, hogy ez a következtetések szerkezetének vizsgálatakor is hasznos.

Nézzük a leggyakrabban előforduló logikai műveleteket!

I. A **tagadás** (amint már korábban láttuk) az egyik legegyszerűbb logikai művelet.

1. példa Adjuk meg a következő állítások logikai értékét:
A: A 8 összetett szám.
B: A 8 nem összetett szám.
C: A paralelogramma rombusz.
D: A paralelogramma nem rombusz.

Megoldás
$|A| = i.$
$|B| = h.$
$|C| = h.$
$|D| = i.$

Egy állítás tagadása szakszóval: **negáció**.

Negáció (tagadás)

Egy tetszőleges *P* állítás negációján (tagadásán) a *nem P* (*nem igaz, hogy P*) állítást, vagy ennek valamilyen átfogalmazott alakját értjük.

Negáció

A *P* állítás negációjának jelölését már az előző leckében bevezettük: $\neg P$ (olvasd: *nem P*).
Az 1. példában tapasztaltakat általánosságban is megfogalmazhatjuk:
Ha a *P* állítás igaz, akkor a *P* negáltja (a *nem P*) hamis.
Ha a *P* állítás hamis, akkor a *P* negáltja (a *nem P*) igaz.
A negáció műveletét a következő értéktáblázat definiálja:

P	$\neg P$
i	***h***
h	***i***

A negáció ismeretében könnyen belátható a következő azonosság: $\neg(\neg A) = A$.
Ez a **kettős tagadás törvénye**.

Kettős tagadás törvénye

Az előzőek alapján a következő két állításnak a logikai értéke egyenlő:
A: Elolvastam ezt a definíciót.
B: Nem igaz, hogy nem olvastam el ezt a definíciót.
Ugyanazt a tartalmat fejezi ki mindkét mondat. A beszélt nyelvben természetesen különböző nyomatékkal, különböző helyzetekben mondhatjuk ezeket a kijelentéseket.

II. Két egyszerű állítást összekapcsolhatunk az **és** kötőszóval. Ez a logikai művelet a **konjunkció**.

Konjunkció

Tetszőleges *P*, *Q* állítások konjunkcióján a *P és Q* állítást, vagy ennek valamilyen átfogalmazott alakját értjük.

Konjunkció

A *P* és a *Q* állítás konjunkciójának jelölése: $P \wedge Q$ (olvasd: *P* és *Q*).

2. példa Adjuk meg a következő összetett állítások logikai értékét!
A: A derékszögű háromszög leghosszabb oldala az átfogó, és a legnagyobb szöge derékszög.
B: A 3 prímszám, és a 11 osztható 3-mal.
C: A 90°-nak nem értelmezhető a kotangense és a tangense.
D: A háromszög belső szögeinek összege 360°, a külső szögek összege pedig 180°.

Megoldás

| A derékszögű háromszög leghosszabb oldala az átfogó. | = *i*,
| A derékszögű háromszög legnagyobb szöge derékszög. | = *i*.
Az összetett állítás logikai értéke: | *A* | = *i*.

| A 3 prímszám. | = *i*,
| A 11 osztható 3-mal. | = *h*.
Az összetett állítás logikai értéke: | *B* | = *h*.

| A 90°-nak nem értelmezhető a kotangense. | = *h*,
| A 90°-nak nem értelmezhető a tangense. | = *i*.
Az összetett állítás logikai értéke: | *C*| = *h*.

| A háromszög belső szögeinek összege 360°. | = *h*,
| A háromszög külső szögeinek összege 180°. | = *h*.
Az összetett állítás logikai értéke: | *D*| = *h*.

A 2. példában szerzett tapasztalataink alapján a konjunkció értéktáblázata a következő:

P	*Q*	$P \wedge Q$
i	*i*	***i***
i	*h*	***h***
h	*i*	***h***
h	*h*	***h***

Vagyis a $P \wedge Q$ állítás pontosan akkor hamis, ha a két összetevő közül legalább az egyik hamis. A $P \wedge Q$ állítás akkor és csak akkor igaz, ha mindkét összetevő igaz.

III. Két egyszerű állítást összekapcsolhatunk a **vagy** kötőszóval is. Ez a logikai művelet a **diszjunkció**.

Diszjunkció

Diszjunkció

Tetszőleges *P*, *Q* állítások diszjunkcióján a *P vagy Q* állítást, vagy ennek valamilyen átfogalmazott alakját értjük.

A *P* és a *Q* állítás diszjunkciójának jelölése: $P \vee Q$ (olvasd: *P* vagy *Q*).
A *vagy* kötőszó használata nagy figyelmet kíván. Ezt két állítás segítségével mutatjuk meg.

A: Péter most rendet rak az asztalán, vagy zenét hallgat.

A mondat szerint lehetséges, hogy Péter
1. rendet rak az asztalán, de nem hallgat zenét;
2. nem rak rendet az asztalán, de zenét hallgat;
3. a rendrakással egy időben zenét is hallgat.
A *vagy* kötőszónak ez a használata a **megengedő vagy**.

B: Péter most kitakarítja a szobáját, vagy elmegy bevásárolni.

Most a mondat értelméből következik, hogy Péter mindkettőt egyszerre nem teheti.
A *vagy* kötőszónak ez a használata a **kizáró vagy**.
A diszjunkcióban a *megengedő vagy*-ot használjuk!

3. példa Adjuk meg a következő összetett állítások logikai értékét!
A: A 63-nak a 3 vagy a 7 osztója.
B: A 63-nak a 3 vagy a 13 osztója.
C: A 63-nak a 2 vagy a 7 osztója.
D: A 63-nak a 2 vagy az 5 osztója.

Megoldás
| A 63-nak a 3 osztója. | = *i*,
| A 63-nak a 7 osztója. | = *i*.
Az összetett állítás logikai értéke: | *A*| = *i*.

| A 63-nak a 3 osztója. | = *i*,
| A 63-nak a 13 osztója. | = *h*.
Az összetett állítás logikai értéke: | *B*| = *i*.

| A 63-nak a 2 osztója. | = *h*,
| A 63-nak a 7 osztója. | = *i*.
Az összetett állítás logikai értéke: | *C*| = *i*.

| A 63-nak a 2 osztója. | = *h*,
| A 63-nak a 5 osztója. | = *h*.
Az összetett állítás logikai értéke: | *D*| = *h*.

A 3. példában látottak alapján megadjuk a diszjunkció értéktáblázatát:

P	*Q*	*P* ∨ *Q*
i	*i*	***i***
i	*h*	***i***
h	*i*	***i***
h	*h*	***h***

Vagyis a *P* ∨ *Q* állítás pontosan akkor igaz, ha a két összetevő közül legalább az egyik igaz. A *P* ∨ *Q* állítás akkor és csak akkor hamis, ha mindkét összetevő hamis.

Feladatok

1. K1 Igazoljuk értéktáblázattal, hogy a
a) konjunkció;
b) diszjunkció
kommutatív művelet!

2. K2 Igazoljuk értéktáblázattal a következő azonosságokat!
a) $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$;
b) $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$.
(A szakirodalom *de Morgan*-azonosságoknak nevezi ezeket az összefüggéseket.)

3. K2 Tagadjuk a következő állításokat!
A: Bodzaszörpöt iszom, vagy paprikás krumplit eszem.
B: Elmegyek a kutyával sétálni, és levágom a kertben a füvet.
C: Megírom a matematika házi feladatot, és nem kapcsolom be a számítógépet.
D: Nem veszek kenyeret, vagy veszek sajtot.

4. K1 A következő állítások közismert szólásoknak a tagadásai. Adjuk meg az eredeti állításokat!
$\neg A$: Van olyan dolog, ami nem jó, és mégis jó a vége.
$\neg B$: Nem fújja a szél, és mégis zörög a haraszt.

5. K2 A felsorolt állítások között vannak-e azonosak?
$A \wedge B$, $A \wedge (\neg B)$, $(\neg A) \wedge B$, $(\neg A) \wedge (\neg B)$, $A \vee B$, $A \vee (\neg B)$, $(\neg A) \vee B$, $(\neg A) \vee (\neg B)$.

6. K2 A felsorolt állítások között keressük meg az azonosakat!
$A \wedge B$, $A \wedge (\neg B)$, $(\neg A) \wedge B$, $(\neg A) \wedge (\neg B)$, $\neg(A \vee B)$, $\neg\big(A \vee (\neg B)\big)$, $\neg\big((\neg A) \vee B\big)$, $\neg\big((\neg A) \vee (\neg B)\big)$.

7. K2 A felsorolt állítások között keressük meg az azonosakat!
$\neg(A \wedge B)$, $\neg\big(A \wedge (\neg B)\big)$, $\neg\big((\neg A) \wedge B\big)$, $\neg\big((\neg A) \wedge (\neg B)\big)$, $A \vee B$, $A \vee (\neg B)$, $(\neg A) \vee B$, $(\neg A) \vee (\neg B)$.

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 20–22.

9. Műveleti tulajdonságok

A következőkben az $\wedge$, $\vee$, $\neg$ műveletek néhány tulajdonságát gyűjtjük össze.

Közvetlenül a műveletek definíciójából megállapítható, hogy **a konjunkció és a diszjunkció kommutatív művelet**.

A bevezetett jelölésekkel ezt így írjuk: $A \wedge B = B \wedge A$, $A \vee B = B \vee A$.

Kettőnél több állítás konjunkcióját is értelmezhetjük.

Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ állítások konjunkciója: $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$.

Ennek logikai értéke akkor és csak akkor igaz, ha minden állításának igaz a logikai értéke.

Az értelmezésből következik, hogy **a konjunkció asszociatív művelet**.

Jelöléseinkkel: $(A_1 \wedge A_2) \wedge A_3 = A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3) = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$.

Kettőnél több állítás diszjunkcióját is értelmezhetjük.

Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ állítások diszjunkciója: $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$.

Ennek logikai értéke akkor és csak akkor igaz, ha az állítások közül legalább egynek igaz a logikai értéke.

Az értelmezésből következik, hogy **a diszjunkció asszociatív művelet**.

Jelöléseinkkel: $(A_1 \vee A_2) \vee A_3 = A_1 \vee (A_2 \vee A_3) = A_1 \vee A_2 \vee A_3$.

De Morgan-azonosságok

A negáció, konjunkció és diszjunkció közötti fontos azonosságok a **de Morgan-azonosságok**, amelyeknek igazolását logikai értéktáblázat segítségével az előző leckében feladatként már kitűztük:

$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$,

$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$.

A logika története során fontos szerepe volt a következő két, önmagában is érdekes logikai törvénynek. Ezeket példaként most igazoljuk is.

1. példa Igazoljuk, hogy $|(\neg A) \vee A| = i$!

Megoldás

Készítsük el a logikai értéktáblázatot!

A	$\neg A$	$(\neg A) \vee A$
i	h	***i***
h	i	***i***

Látható, hogy A logikai értékétől függetlenül $(\neg A) \vee A$ logikai értéke igaz. Ezzel igazoltuk az állítást.

Ez a **harmadik kizárásának elve**.

2. példa Igazoljuk, hogy $|\neg A \wedge A| = h$!

Megoldás

Készítsük el a logikai értéktáblázatot!

A	$\neg A$	$\neg A \wedge A$
i	h	***h***
h	i	***h***

Látható, hogy A logikai értékétől függetlenül $(\neg A) \wedge A$ logikai értéke hamis. Ezzel igazoltuk az állítást.

Ez az **ellentmondásmentesség elve**.

Az eddigiekben az állításokat elvonatkoztattuk a kijelentő mondatok tartalmától, és csak a logikai értékük volt fontos számunkra. A tapasztalataink alapján még tovább mehetünk, és az állítások helyett a logikai értékükkel is végezhetünk műveleteket.

Ezen műveletek definíciói:

$\neg i = h$; $\neg h = i$;
$i \wedge i = i$; $i \wedge h = h$; $h \wedge i = h$; $h \wedge h = h$;
$i \vee i = i$; $i \vee h = i$; $h \vee i = i$; $h \vee h = h$.

3. példa Legyen $|P| = p$ (ahol p lehetséges értéke i vagy h). Igazoljuk, hogy
a) $p \wedge h = h$;
b) $p \vee i = i$!

Megoldás

a) Mivel $i \wedge h = h$, valamint $h \wedge h = h$, így az állítás valóban teljesül.
b) Mivel $i \vee i = i$, valamint $h \vee i = i$, így ez az állítás is teljesül.

4. példa Vizsgáljuk meg az $A \vee (B \wedge C)$, valamint az $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ állításokat! Azonos minden esetben a logikai értékük?

Megoldás

Három állításból raktuk össze mindkét összetett állítást, így $2^3 = 8$ lehetőséget kell az értéktáblázatban megvizsgálnunk.

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
i	i	i	i	***i***	i	i	***i***
i	i	h	h	***i***	i	i	***i***
i	h	i	h	***i***	i	i	***i***
h	i	i	i	***i***	i	i	***i***
i	h	h	h	***i***	i	i	***i***
h	i	h	h	***h***	i	h	***h***
h	h	i	h	***h***	h	i	***h***
h	h	h	h	***h***	h	h	***h***

A táblázat ötödik és nyolcadik oszlopa mutatja, hogy azonos minden esetben a logikai értéke a két összetett állításnak.

Az előző példa alapján felírható a következő azonosság:
$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
Igazolható a következő azonosság is:
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
Igazolását feladatként tűztük ki.

Feladatok

1. K1 Igazoljuk a következő négy azonosságot!
a) $A \wedge A = A$;
b) $A \vee A = A$;
c) $A \wedge (A \vee B) = A$;
d) $A \vee (A \wedge B) = A$.

2. K1 Legyen $|P| = p$ (ahol p lehetséges értéke i vagy h). Igazoljuk, hogy
a) $p \wedge i = p$;
b) $p \vee h = p$!

3. K2 Igazoljuk a következő azonosságot!
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 23–24.

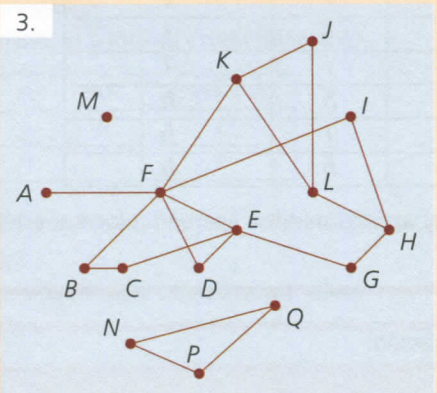
4. K2 A disztributív tulajdonságok felhasználásával mondjuk rövidebben a következő állításokat!
a) Holnapra elolvasom ezt a novellát és sakkozom Ágnessel, vagy holnapra elolvasom ezt a novellát és pingpongozom Ágnessel.
b) Elmegyek röplabdázni vagy készítek egy csésze teát, és elmegyek röplabdázni vagy készítek egy melegszendvicset.

10. Gráfok

1736-ban *Leonhard Euler* (akinek a nevével már több alkalommal is találkoztunk) azt a felkérést kapta *Königsberg* városának (a mai *Kalinyingrád*) elöljáróságától, hogy tervezzen egy olyan sétautat a városban, mely a várost átszelő Pregel folyó mind a 7 hídján áthaladjon úgy, hogy minden hídon pontosan egyszer kelljen áthaladni. Euler megoldotta a problémát (bebizonyította, hogy ilyen sétaút nem létezik), és ezzel egyszersmint lerakta a matematika egy új ágának, a gráfelméletnek az alapjait. Tulajdonképpen innentől beszélhetünk gráfelméletről. Ma már a matematika, a fizika és általában a természettudományok számtalan területén használják a gráfelmélet eredményeit.

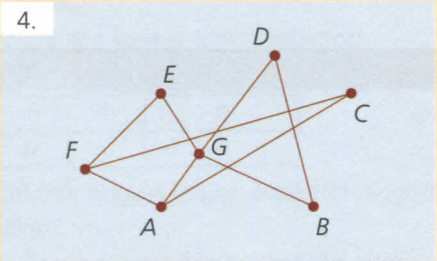
Ebben a leckében a gráfelmélet legfontosabb alapfogalmait, tételeit és azok alkalmazását fogjuk megismerni. Kezdjük mindenekelőtt néhány egyszerű kérdéssel.

3.



1. példa Az ábrán egy 16 főből álló diákcsoport szociometriai felmérésének eredményét szemléltettük. A pontok az egyes diákokat jelölik. Két pont akkor van összekötve egy vonallal, ha a pontoknak megfelelő diákok kölcsönösen barátnak nevezték meg egymást.
a) Mi mindent olvashatunk le erről az ábráról?
b) Melyik pontnak megfelelő diák az osztály központi alakja?
c) Hány olyan diák van a csoportban, akinek pontosan három barátja van?

4.



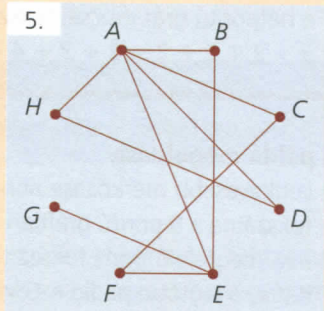
2. példa Egy repülőtársaság 7 város közötti járatait szemlélteti az ábra. Egy utazónak B-ből C-be kell eljutnia.
a) Hogyan tervezze meg útját, ha a legkevesebb átszállással szeretne B-ből C-be jutni?
b) Ha minden városból minden városba egy időben indul egy-egy gép (a járatoknak megfelelően), akkor hány pilótát kell ehhez alkalmazni?

3. példa Egy teniszbajnokság döntőjébe 8-an jutottak (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* és *H*). A döntőben mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Az ábrán az egyes játékosokat egy-egy ponttal szimbolizáltuk. Két játékos akkor van összekötve egy vonallal, ha már játszottak egymással.

a) Melyik játékosnak van hátra a legtöbb és melyiknek a legkevesebb mérkőzése?

b) Hány mérkőzés van még hátra a bajnokságban?

5.



E három példa – sok egyéb mellett – jól mutatja, hogy számos olyan gyakorlati (és elméleti) probléma vetődhet fel, amelyeket jól modellezhetünk a síkon felvett néhány ponttal és a pontok közül néhányat (az adott problémának megfelelően) összekötő vonalakkal. Az ilyen matematikai modellt gráfnak nevezzük.

Gráfok

Legyen adott n darab pont ($n > 0$) és e pontokból vett pontpárok közül néhányat összekötő vonal. (Lehetséges, hogy minden pontpárt összekötöttünk, de az is lehet, hogy egyet sem; az is előfordulhat, hogy valamely két pontot több vonallal is összekötöttünk.) Az ilyen alakzatot gráfnak nevezzük. A pontok a gráf pontjai (csúcsai), a vonalak a gráf élei.

Gráf

A gráfok vizsgálata során – mint látni fogjuk – nagy hasznunkra lehet, ha ismerjük a gráf egyes pontjaiból (csúcsaiból) kiinduló élek számát.

A gráf csúcsainak fokszáma

A gráf pontjainak (csúcsainak) fokszáma a kérdéses pontból kiinduló élek száma. Ha egy pont fokszáma 0 (azaz egyetlen él sem indul ki belőle), akkor e pontot izolált pontnak nevezzük.

A gráf csúcsainak fokszáma

Ezek után nézzük a bevezetőben említett három példa megoldását.

1. példa megoldása

a) A szociometriai felmérést szemléltető 16 pontú gráfban 12 tanuló (12 pont) egy homogén, sok baráti kapcsolattal rendelkező csoportot alkot. Három diák (*N*, *P*, *Q*) kilóg e közösségből, de ők hárman egy szoros baráti köteléket alkotnak. Egy izolált pontja van a gráfnak (M), vagyis egy olyan diák van, aki teljesen kilóg az osztályközösségből, egyetlen baráti kapcsolattal sem rendelkezik.

b) Az osztály központi alakja az a diák, akinek megfelelő pontnak a legnagyobb a fokszáma; ez az *F* pontnak megfelelő diák, aki 6 baráti kapcsolattal is rendelkezik.

c) Azt kell megszámolnunk, hogy hány olyan pontja van a gráfnak, amelynek a fokszáma 3. Ezek a pontok: *K*, *L* és *H*, vagyis három ilyen diák van az osztályban.

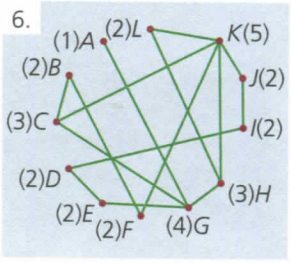


2. példa megoldása

a) A legkevesebb átszállással megvalósítható utazás: *B* – *G* – *A* – *C*, vagyis kétszeri átszállással juthatunk el *B*-ből *C*-be.

b) Ha minden városból minden városba egyszerre indul egy gép, akkor a szükséges pilóták száma a hétpontú gráf csúcsai fokszámainak az összege, azaz
$3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 4 = 18$.

6.



3. példa megoldása

a) Legkevesebb mérkőzése annak a versenyzőnek van hátra, amelyiknek megfelelő pontnak a fokszáma a 8 pontú gráfban a legnagyobb, és annak van a legtöbb mérkőzése hátra, amelynek megfelelő pont fokszáma a legkisebb. A legkevesebb mérkőzése az *A* játékosnak van hátra, a legtöbb pedig a *G* versenyzőnek.

b) Minden játékos összesen 7 mérkőzést játszik a bajnokságban. A 8 pontú gráfból kiolvasható, hogy kinek hány mérkőzése van még hátra:

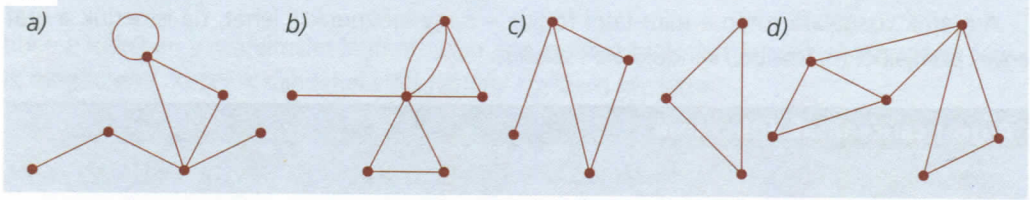
A-nak 2, *B*-nek 5, *C*-nek 5, *D*-nek 5, *E*-nek 3, *F*-nek 5, *G*-nek 6, *H*-nak: 5.

E számok összege a még hátralevő mérkőzések számának kétszerese, hiszen például a hátralevő *A*–*G* mérkőzés az *A* hiányzó két meccsei között is és a *G* hiányzó 6 meccse között is szerepel. Ezek szerint a még hiányzó mérkőzések száma:

$$\frac{2+5+5+5+3+5+6+5}{2} = 18.$$

Most néhány gráfokkal kapcsolatos további alapfogalmat, tételt vizsgálunk meg. A következő ábrán valamilyen szempontból különböző típusú gráfokat látunk.

7.



Többszörös él

Többszörös él

Ha egy gráf valamely két csúcsát egynél több él köti össze, akkor azokat többszörös élnek nevezzük. Ilyen többszörös éllel rendelkezik a *b)* ábrán látható gráf.

Hurokél

Hurokél

Ha egy gráfban valamely él két végpontja egybeesik, akkor ezt hurokélnek nevezzük. Ilyen hurokéllel rendelkezik az *a)* ábrán látható gráf.

Egyszerű gráf

Egyszerű gráf

Egy gráfot egyszerű gráfnak nevezünk, ha sem többszörös élt, sem hurokélt nem tartalmaz. Ezek szerint a *c)* és *d)* ábrán egyszerű gráfok vannak, míg az *a)* és *b)* ábra gráfjai nem egyszerű gráfok.

Összefüggő gráf

Összefüggő gráf

Egy gráf összefüggő, ha bármely csúcsából bármely csúcsába eljuthatunk éleken keresztül. Az ábra *a)*, *b)* és *d)* gráfjai összefüggőek, míg a *c)* ábra gráfja nem összefüggő.

Most vizsgáljuk meg, hogy milyen összefüggés van egy gráf csúcsainak fokszáma és az élek száma között!

Tétel

Bármely gráfban a csúcsok fokszámainak összege egyenlő az élek számának kétszeresével.

Bizonyítás

Bármely gráfban minden él két csúcsot köt össze. Ezek szerint minden él két csúcs fokszámaihoz eggyel-eggyel járul hozzá. Így minden él 2-vel növeli a csúcsok fokszámainak összegét, amiből következik, hogy a csúcsok fokszámainak összege valóban az élek számának kétszerese.

4. példa Egy banketten néhány vendég koccintott egymással egy pohár pezsgővel. Igazoljuk, hogy azok száma, akik páratlan számszor koccintottak, páros.

Megoldás

A problémát szemléltethetjük egy olyan gráffal, melyben a pontok az egyes résztvevők, és valamely két pont akkor van összekötve éllel, ha a kérdéses személyek koccintottak egymással. (Mivel senki sem koccint önmagával, így hurokél nem szerepelhet a gráfban, de többszörös él igen, hiszen két vendég többször is koccinthat egymással. Így a gráf nem biztos, hogy egyszerű gráf, és az sem biztos, hogy összefüggő.)

Számoljuk össze a résztvevők koccintásainak összegét; legyenek a páros számszor koccintók koccintásai: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$, a páratlan számszor koccintók koccintásai: $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$. E koccintások összege (vagyis a kérdéses gráf csúcsai fokszámainak összege) páros:

$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k + l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n =$ páros.

Mivel minden p páros szám, ezért ezek összege is páros. Így az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha az l-ek összege is páros:

$l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n =$ páros.

Mivel páratlan számok összege csak akkor lehet páros, ha e számok páros sokan vannak, így a páratlan számszor koccintók száma valóban páros.

A feladat megoldásában ismertetett gondolatmenet alapján kimondhatjuk az alábbi tételt:

Tétel

Bármely gráfban a páratlan fokszámú csúcsok száma páros.

Nagyon fontos az olyan gráf, melyben minden csúcs minden csúccsal egyszer össze van kötve.

Teljes gráf

Egy egyszerű gráfot teljes gráfnak nevezünk, ha bármely két különböző csúcsa össze van kötve egy éllel.

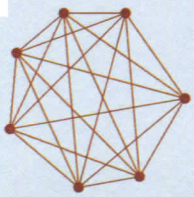
Teljes gráf

Minden teljes gráf egyszerű és összefüggő gráf.

Tétel

Az n pontú teljes gráf éleinek a száma: $\frac{n(n-1)}{2}$.

8.



Bizonyítás

Az n pontú teljes gráf szemléltethető egy olyan n oldalú konvex sokszöggel, melynek minden oldalát és minden átlóját megrajzoltuk. Ezek szerint az n pontú teljes gráf éleinek a száma egyenlő az átlók számának és az oldalak számának összegével, vagyis az n pontú teljes gráf éleinek a száma:

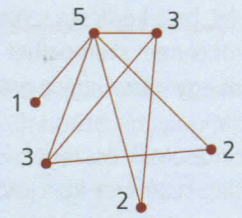
$$\frac{n(n-3)}{2}+n=\frac{n(n-3)}{2}+\frac{2n}{2}=\frac{n^2-3n+2n}{2}=\frac{n^2-n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

5. példa Rajzoljunk olyan hatpontú gráfot, amelyben az egyes csúcsok fokszáma:
a) 5, 3, 3, 2, 2, 1;
b) 5, 5, 4, 3, 2, 1;
c) 4, 4, 3, 2, 2, 1!

Megoldás

a) Az 5 fokszámú csúcs minden más csúccsal össze van kötve; érdemes ezzel kezdeni az ábrát. Innen már könnyen megrajzolhatjuk a többi élt.

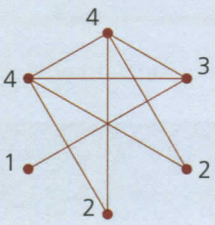
9.a



b) Ilyen gráf nem létezik. Ha ugyanis a hatpontú gráfnak van két 5 fokszámú csúcsa, az azt jelenti, hogy e két csúcs az összes többi csúccsal össze van kötve. Ezek szerint minden csúcs legalább két csúccsal össze van kötve, vagyis nem lehet olyan csúcsa, amelynek fokszáma 1.

c) Az ábrán egy lehetséges megoldást szemléltettünk.

9.b



6. példa Egy héttagú társaság minden tagja a társaság minden tagjával szeretne lebonyolítani egy telefonbeszélgetést. Eddig András 6, Béla 2, Csaba 5, Dani 1, Ervin, Feri és Gábor pedig egyaránt 4-4 beszélgetést bonyolított le. Hány beszélgetés van még hátra?

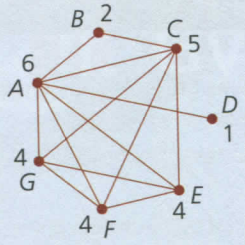
Megoldás

Szemléltessük a telefonbeszélgetéseket egy gráffal.

Azt kell kiszámítanunk, hogy hány élt kell még berajzolnunk a gráfba, hogy az teljes gráf legyen. A gráf meglevő éleinek a száma a fokszámok összegének a fele, azaz

$$\frac{6+2+5+1+4+4+4}{2}=13.$$

10.



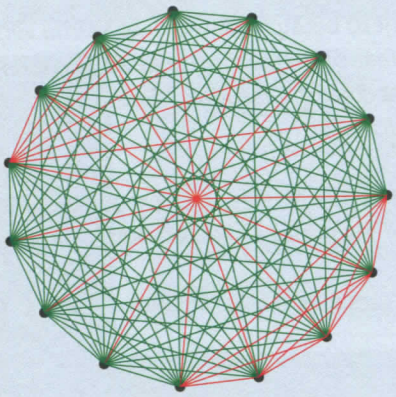
Mivel a 7 pontú teljes gráf éleinek a száma $\frac{7 \cdot (7-1)}{2} = 21$, ezért ahhoz, hogy teljes gráfot kapjunk, még $21 - 13 = 8$ új élt kell berajzolnunk, vagyis még 8 beszélgetés van hátra.

7. példa Egy estélyen 15-en vettek részt. Akik ismerték egymást, koccintottak egymással egy pohár pezsgővel. Akik nem ismerték egymást, azok kézfogással bemutatkoztak egymásnak. Ezek után a házigazda így szólt a feleségéhez: *„Megfigyeltem, hogy pontosan ugyanannyi koccintás volt, mint kézfogás."* Erre a felesége így válaszolt: *„Drágám, biztosan tévedtél."* Vajon kinek van igaza?

Megoldás

Mivel a 15 résztvevő közül mindenki mindenkivel vagy koccintott vagy kezet fogott, ezért ha egy 15 pontú gráfban a koccintásokat például zölddel, a kézfogásokat pirossal jelöljük, akkor egy 15 pontú teljes gráfot kapunk.

11.



Ha a koccintások száma ugyanannyi, mint a kézfogások száma, akkor a piros élek száma egyenlő a zöld élek számával, vagyis az élek száma páros szám kell, hogy legyen. Mivel a 15 pontú teljes gráf éleinek a száma $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ páratlan, így nem lehetett annyi koccintás, mint kézfogás, vagyis a feleségnek volt igaza.

Feladatok

1. K1 Hány csúcsa van annak a teljes gráfnak, amelynek
a) az éleinek a száma a csúcsok számának 11-szerese?
b) az éleinek a száma a csúcsai számának háromszorosánál 9-cel nagyobb?

2. K1 Egy bajnokságban 8 csapat játszik körmérkőzést. Eddig 9 meccs zajlott le. Igazoljuk, hogy van olyan csapat, amelyik legalább háromszor játszott már!

3. K1 Egy konferencián 8 tudós vett részt. Úgy döntöttek, hogy a konferencia végeztével mindenki mindenkivel névjegykártyát fog cserélni. Eddig minden résztvevő 3 másikkal cserélt névjegykártyát.
a) Szemléltesse egy gráffal az eddigi névjegykártyacseréket!
b) Hány kártyacsere van még hátra?

4. K1 Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy teljes gráf éleinek a száma
a) páros szám legyen?
b) 5-tel osztható szám legyen?

5. K1 Egy sakkbajnokság döntőjébe – ahol mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik – négyen jutottak: *A*, *B*, *C* és *D*. A döntőben *A* már mindhárom ellenfelével játszott, *B* és *C* pontosan két mérkőzést játszott le, de egymással még nem játszottak. Hány mérkőzést játszott eddig a döntőben *D*?

6. K1 Egy iskolák közötti teniszbajnokság döntőjébe 7 játékos jutott be. A döntőben mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Egy néző jegyezte az egyes mérkőzések kimenetelét. Valamikor így szólt a szintén néző barátjához: *„Az 1-es számú versenyző már minden mérkőzését lejátszotta, a 2-es számú már öt mérkőzését lejátszotta, viszont a 4-es és a 7-es számú versenyzők még csak egy-egy mérkőzést játszottak."* Erre a szomszéd így válaszolt: *„Biztosan tévedsz."* Honnan tudta ezt a szomszéd?

7. K2 Egy teljes gráfnak letöröltük 40 élét, így a megmaradt élek száma az eredeti teljes gráf csúcsai számának ötszöröse. Hány pontú az eredeti gráf?



8. K2 Egy 6 pontú gráf 5 csúcsának a fokszáma: 0, 1, 2, 3, 4. Mekkora a hatodik csúcs fokszáma?

9. K2 Egy 12 fős társaság tagjai egy hosszabb túrán vettek részt. András és Béla, a túra két vezetője, a csoport minden tagját ismerték. Öt olyan tagja volt a csoportnak, akik a két vezetőn kívül senki mást nem ismertek, a többiek ezen az öt személyen kívül mindenki mást ismertek. Amikor a csoport tagjai találkoztak, azok, akik nem ismerték egymást, kézfogással bemutatkoztak egymásnak. Hány kézfogás történt?

10. K2 Egy sakkbajnokság 16 résztvevőjét két csoportra osztották. Az egyes csoportokban a csoport tagjai körmérkőzést játszottak egymással. Az egyik csoportban 3-szor annyi meccset bonyolítottak le, mint a másikban. Hány résztvevője volt az egyes csoportoknak?

11. E1 Egy bajnokságban, ahol a résztvevők körmérkőzést játszanak egymással, még 7 mérkőzés van hátra a bajnokság végéig. Igazoljuk, hogy az eddig lejátszott mérkőzések száma nem lehet 10-zel osztható!

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 373., 375., 386., 387., 389., 407., 408., 409., 419.