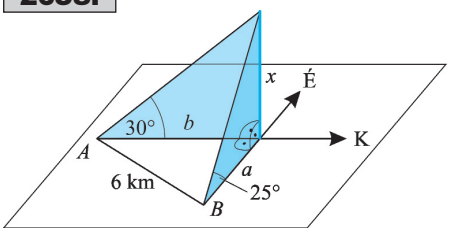
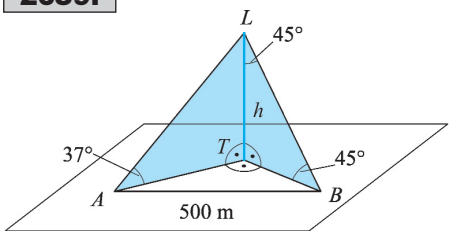
IV

2658.



2659.



2658. $x \approx 2{,}18$ km magasan van a hőlégballon.

Egyrészt $\frac{x}{a} = \operatorname{tg} 25°$ és $\frac{x}{b} = \operatorname{tg} 30°$, másrészt a Pitagorasz-tételt alkalmazva kapjuk, hogy $a^2 + b^2 = 6^2$. Ezen egyenletrendszerből meghatározhatjuk az x magasságot. Az első két egyenletből fejezzük ki a-t, illetve b-t x-szel, majd ezeket helyettesítsük be a harmadik egyenletbe, amelyben már csak x lesz az ismeretlen. $x = \sqrt{\dfrac{36 \cdot \operatorname{tg}^2 25° \cdot \operatorname{tg}^2 30°}{\operatorname{tg}^2 30° + \operatorname{tg}^2 25°}}$.

2659. $h \approx 301$ m magasan lebeg a léggömb.

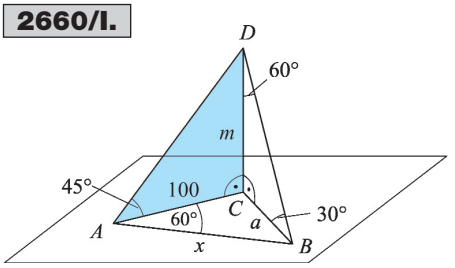
Vegyük észre, hogy $LT = TB$, ezért $TB = h$. Egyrészt $\frac{h}{AT} = \operatorname{tg} 37°$, másrészt alkalmazzuk Pitagorasz tételét az ABT derékszögű háromszögre. Fejezzük ki az előző egyenletből AT-t, majd ezt helyettesítsük be a Pitagorasz-tétel alapján felírt egyenletbe. Itt már csak h lesz az ismeretlen, amelyet könnyen meghatározhatunk kis számolás után. $h = \dfrac{500 \operatorname{tg} 37°}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 37°}} \approx 301$ m. Adjunk egy második megoldást, például úgy, hogy észrevesszük , hogy az ATL háromszög egybevágó az ABT háromszöggel. Miért? Az egybevágóságból következik, hogy $AB = AL$. Folytassuk!

2660. *a)* eset: $AB = 200$ m, (2660/I.); *b)* eset: $AB^* = 100$ m. (2660/II.)

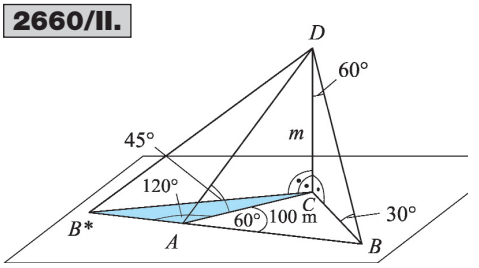
Vegyük észre, hogy az ACD háromszög egyenlő szárú, ebből $CD = 100$ m. Alkalmas szögfüggvény alkalmazásával számítsuk ki a értékét a BCD háromszögből! Azt kapjuk, hogy $a = 100 \cdot \sqrt{3} \approx 173{,}2$ m. Tekintsük az ABC háromszöget! Vegyük észre, hogy ez egybevágó a BCD háromszöggel! Miért? Ebből következik, hogy az ACB szög derékszög. Ebből következik, hogy $AB = 200$ m. Miért?

A B^*BC háromszög egyenlő szárú, ebből következik, hogy CB^*A szög 30°-os. Miért? A B^*AC háromszög is egyenlő szárú (miért?), ebből következik, hogy $AB^* = AC$, azaz $AB^* = 100$ m.

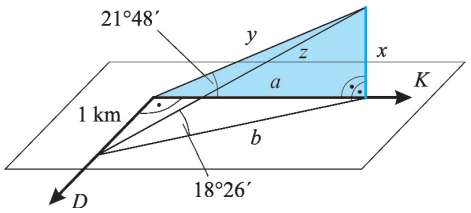
2660/I.



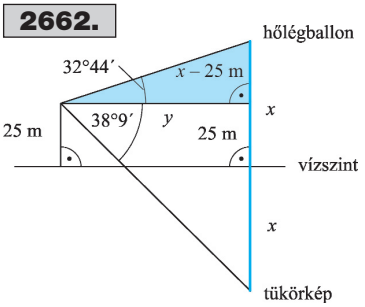
2660/II.



2661.



2662.



2661. $x \approx 0{,}6$ km magasra emelkedik a hegy a síkság fölé, $y \approx 1{,}6$ km távolságra, illetve $z \approx 1{,}9$ km távolságra vagyunk az egyes helyeken a hegy csúcsától.

Alkalmazzunk egy megfelelő szögfüggvényt az x és a befogójú derékszögű háromszögre $\operatorname{tg} 21°48' = \frac{x}{a}$, majd innen fejezzük ki a-t x segítségével $a = \frac{x}{\operatorname{tg} 21°48'}$! Majd ugyanezt a szögfüggvényt alkalmazzuk az x és b befogójú derékszögű háromszögre, majd innen fejezzük ki b-t x segítségével $b = \frac{x}{\operatorname{tg} 18°26'}$! Ezután alkalmazzuk Pitagorasz tételét a síkságon levő derékszögű háromszögre $1^2 + \left(\frac{x}{\operatorname{tg} 21°48'}\right)^2 = \left(\frac{x}{\operatorname{tg} 18°26'}\right)^2$! Ebbe az egyenletbe helyettesítsük be az előbb kifejezett értékeket, és x-re kapunk egy egyismeretlenes egyenletet, ebből kisebb számítások után megkaphatjuk a hegy x magasságát. Az y, illetve z meghatározását megfelelő szögfüggvény segítségével végezhetjük el.

2662. $x \approx 250$ m magasan van a hőlégballon a tó fölött.

Írjunk fel egy megfelelő szögfüggvényt az $x - 25$ m és y befogójú derékszögű háromszögre, majd egy ugyanilyen szögfüggvényt az $x + 25$ m és y befogójú derékszögű háromszögre! Oldjuk meg a két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszert, például úgy, hogy elosztjuk a két egyenlet megfelelő oldalait egymással, majd ekkor y kiesik és x meghatározható.

$\operatorname{tg} 32°44' = \frac{x-25}{y}$, $\operatorname{tg} 38°9' = \frac{x+25}{y}$, $x = \frac{25 \cdot (\operatorname{tg} 38°9' + \operatorname{tg} 32°44')}{\operatorname{tg} 38°9' - \operatorname{tg} 32°44'}$, $x \approx 250$ m.

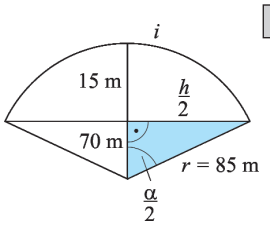
2663. $x \approx 2286$ m magasan van a felhő a hegycsúcs fölött. Készítsünk hasonló ábrát, mint az előző feladatnál, és hasonló módon oldhatjuk meg, mint az előző feladatot!

2664. $\approx 210{,}6$ m magas a domb és ≈ 1051 m magasan volt a villámlás a víz színe fölött. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot.

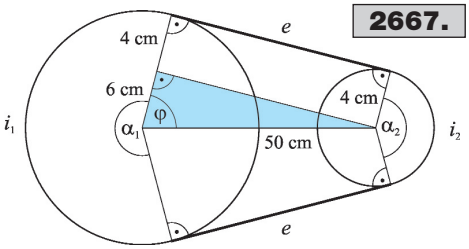
IV

Körívek, körcikkek, körszeletek

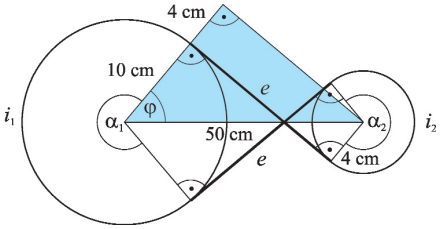
2665.



2667.



2669.



2665. $h \approx 96{,}4$ m a hídpillérek távolsága és $i \approx 102{,}5$ m az ívhossz.

2666. $\approx 131{,}8$ m az ívhossz. Készítsünk hasonló ábrát, mint az előző feladatnál!

2667. $x \approx 45{,}4$ cm a tapadási felületek összhossza.

Először számítsuk ki a φ szöget, majd ebből az α_1 szöget, ebből pedig az i_1 ívhosszat! Vegyük észre, hogy $\alpha_2 = 2 \cdot \varphi$, ebből pedig számítsuk ki az i_2 ívhosszat! $x = i_1 + i_2$ a tapadási felületek összhossza.

2668. $x \approx 175{,}5$ cm a szíj hossza. Készítsünk hasonló ábrát, mint az előző feladatnál! Az előzőhöz hasonló módon számítsuk ki az i_1 és az i_2 ívhosszat! Majd számítsuk ki az e érintőszakasz hosszát! $x = i_1 + i_2 + 2 \cdot e$ a szíj hossza.

2669. $x \approx 51{,}9$ cm a tapadási felületek összhossza. A 2669. ábra alapján hasonlóan oldhatjuk meg, mint a 2667. feladatot.

2670. $\approx 182{,}3$ cm a szíj hossza. A 2669. ábrát felhasználva, hasonlóan oldhatjuk meg, mint a 2668. feladatot.

2671. $\approx 252{,}8$ cm^2 a keresett körlaprész területe. A keresett területet megkapjuk, ha a félkör területéből levonjuk a megfelelő körszelet területét. A körszelet területét megkapjuk, ha a megfelelő körcikk területéből levonjuk a megfelelő háromszög területét.

2672. $\approx 108{,}1$ cm^2 a keresett terület.

2673. $\approx 88{,}2$ cm^2 a keresett terület. A keresett területet megkapjuk, hogy ha a megfelelő deltoid területéből levonjuk a megfelelő körcikk területét.

2674. ≈ 223 cm^2 a kétszeresen fedett rész területe. Vegyük észre, hogy a keresett terület éppen a megfelelő körszelet területének a kétszerese!

2675. ≈ 815 m^3 térfogatú a kitermelt kőzet. Pitagorasz tételével számítsuk ki a körhenger sugarát, ez $r \approx 5{,}32$ m. Majd számítsuk ki a körszelethez tartozó háromszög területét, ez $\approx 9{,}1$ m^2, majd a megfelelő körcikk területét, ez $\approx 34{,}57$ m^2, ebből a megfelelő körszelet területe $\approx 25{,}47$ m^2! Mint tudjuk, a keresett térfogatot megkapjuk, ha a körszelet területét szorozzuk az alagút hosszával.

2676. $\approx 51{,}6$ liter olaj van a tartályban. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2677. ≈ 1449 liter olaj van a tartályban. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot.

2678. $\approx 3536{,}4$ liter víz van a tartályban. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző három feladatot.

Egyenlő szárú háromszögek, derékszögű háromszögek, négyszögek

2679. $a \approx 14{,}6$ cm az alap hossza, $b \approx 8{,}1$ cm a szárak hossza, $t \approx 25{,}62$ cm^2 a háromszög területe. Húzzuk be az alaphoz tartozó magasságot! Írjunk fel egy megfelelő szögfüggvényt! Ebből és az $a - b = 6{,}5$ egyenletből álló egyenletrendszert megoldva kapjuk a-t, illetve b-t. Ezután számítsuk ki az alaphoz tartozó magasságot, majd a területet!

2680. $a \approx 8{,}3$ cm az alap hossza, $b \approx 7{,}7$ cm a szár hossza, $t \approx 26{,}9$ cm^2 a háromszög területe. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2681. $a \approx 9{,}2$ cm az alap hossza, $b \approx 16{,}32$ cm a szár hossza. Írjunk fel a területre egy egyenletet, majd alkalmazzunk egy megfelelő szögfüggvényt az alaphoz tartozó magasság behúzása után! Ezután oldjuk meg az egyenletrendszert!

2682. $a \approx 11{,}07$ cm az alap hossza, $b \approx 18{,}77$ cm a szárak hossza, $t \approx 99{,}3$ cm^2 a háromszög területe.

2683. $\alpha \approx 25{,}28°$ az alappal szemközti szög, $\beta \approx 77{,}36°$ a szárakkal szemközti szög. A háromszögben húzzuk meg az alaphoz tartozó magasságot és az egyik szárhoz tartozó magasságot! Egyrészt $\frac{m_b}{a} = \sin\beta$, másrészt $\frac{m_a}{\frac{a}{2}} = \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$. Ezen egyenletrendszerből meghatározhatjuk $\cos\beta$, illetve β értékét.

2684. $a = 4 \cdot \sqrt{5}$ cm $\approx 8{,}94$ cm, $b = 8 \cdot \sqrt{5}$ cm $\approx 17{,}89$ cm a derékszögű háromszög befogói, $\alpha \approx 26{,}57°$ és $\beta \approx 63{,}43°$ a két hegyesszöge. A magasságtétellel számítsuk ki az átfogóhoz tartozó magasságot, $m = 8$ cm! Majd megfelelő szögfüggvény segítségével kaphatjuk meg az egyik szöget, amelyből megkaphatjuk a másik szöget. Pitagorasz tételének segítségével számíthatjuk ki a befogókat.

2685. $a = 2 \cdot \sqrt{5}$ cm $\approx 4{,}47$ cm, és $b = 4 \cdot \sqrt{5}$ cm $\approx 8{,}94$ cm a két befogó hossza, $\alpha \approx 26{,}57°$ és $\beta \approx 63{,}43°$ a két hegyesszöge. Az átfogóhoz tartozó magasság két szeletre osztja az átfogót. E két szeletre kapunk ebből egy egyenletet. A másik egyenletet a magasságtételből kaphatjuk. Megoldva az egyenletrendszert, egy másodfokú egyenlethez jutunk. Megoldva kaphatjuk, hogy a két szelet 2 cm, illetve 8 cm, illetve fordítva. Pitagorasz tételével kiszámíthatjuk a befogókat. Szögfüggvény segítségével számíthatjuk ki a szögeket.

2686. $R = 2 + 2 \cdot \sqrt{3} \approx 5{,}46$ egység a háromszög köré írható kör sugara. Például szögfüggvény segítségével kaphatjuk, hogy $BC = R$. Számítsuk ki a beírt kör sugarát, amely 2 egység lesz! Vegyük figyelembe, hogy a B-ből a C-felé induló érintőszakasz hosszát például szögfüggvénnyel megkaphatjuk, hiszen a beírt kör középpontja rajta van a szögfelezőkön. Ehhez hozzáadva a beírt kör sugarának hosszát, megkapjuk a BC távolságot, vagyis R hosszát.

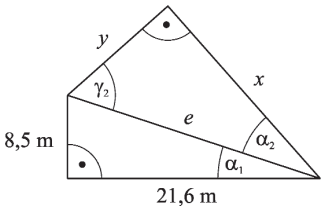
2687. $a = 5$ cm, $b = 12$ cm a befogók hossza, illetve fordítva. $\alpha \approx 22{,}62°$ és $\beta \approx 67{,}38°$, a hegyesszögek, illetve fordítva. Pitagorasz tételének segítségével kaphatunk egy egyenletet. Ha alkalmazzuk a körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok tételét, akkor ebből kaphatjuk, hogy az átfogó hossza egyenlő $a - 2$ cm és $b - 2$ cm összegével. Ebből nyertük a második egyenletet. Oldjuk meg az egyenletrendszert, amely másodfokú egyenletre vezet! Ebből kaphatjuk a befogókat. Szögfüggvény segítségével számíthatjuk ki a szögeket.

2688. $c = 40$ cm az átfogó hossza. $a = 24$ cm és $b = 32$ cm a befogók hossza, illetve fordítva. $\alpha \approx 36{,}87°$ és $\beta \approx 53{,}13°$, a hegyesszögek, illetve fordítva. Vegyük észre, hogy $c = 2 \cdot R$! Miért? Alkalmazzuk Pitagorasz tételét és a körhöz húzott érintőszakaszok tételét! Ebből két egyenletet kapunk a két befogóra. Megoldva az egyenletrendszert – amely egy másodfokú egyenletre vezet –, megkaphatjuk a befogókat. Szögfüggvénnyel megkaphatjuk a szögeket.

2689. $\alpha \approx 22{,}62°$ és $\beta \approx 67{,}38°$ a hegyesszögek, vagy fordítva. Készítsünk egy olyan derékszögű háromszöget, amelynek beírt körének sugara 4 egység és a körülírt kör sugara pedig 13 egység! Ez hasonló háromszög ahhoz, mint ami a feladatban szerepel. Ezután például úgy oldhatjuk meg a feladatot, mint az előzőt.

2690. $\approx 6{,}31$ cm a négyszög ismeretlen oldala. Bocsássunk merőlegest a 11,5 cm-es szakasz megfelelő végpontjából a 15 cm-es oldalra! Ezt szögfüggvénnyel kiszámíthatjuk. A 11,5 cm-es oldal merőleges vetületét a 15 cm-es oldalra szintén szögfüggvénnyel számíthatjuk. A 4,7 cm-es oldal megfelelő végpontjából húzzunk párhuzamost a 15 cm-es oldallal! Így kaptunk egy olyan derékszögű háromszöget is, amelynek átfogója az ismeretlen oldal. Erre a háromszögre alkalmazzuk Pitagorasz tételét!

2691.



2691. $x \approx 21{,}22$ cm és $y \approx 9{,}41$ cm az ismeretlen oldalak hossza. Először számítsuk ki $\alpha_1 + \alpha_2$ értékét $\alpha_1 + \alpha_2 = 180° - 134{,}6°$, majd az α_1 értékét szögfüggvénnyel, és ebből kapjuk α_2 értékét. Pitagorasz tételével kaphatjuk e-t. Az x és y az e és α_2 ismeretében szögfüggvénnyel számolható.

2692. $a \approx 39{,}84$ cm és $c \approx 3{,}33$ cm az alapok hossza. A rövidebbik alap két végpontjából húzzuk meg a trapéz magasságait! A szárak merőleges vetületeit a nagyobbik alapra, szögfüggvénnyel számíthatjuk ki. Számítsuk ki a magasságot! Állítsunk fel egy egyenletet az alapokra! Majd írjunk fel egy egyenletet a területre! Oldjuk meg az egyenletrendszert!

2693. **1. eset:** A szimmetrikus trapéz esete. $a \approx 52{,}36$ cm és $c \approx 26{,}57$ cm az alapok hossza, $\alpha \approx 71{,}19°$ **és** $\beta \approx 108{,}81°$. Húzzuk meg a trapéz egyik átlóját! Alkalmazzunk szögfüggvényt, illetve Pitagorasz tételét!

2. eset: A paralelogramma esete. $a = c = 52{,}36$ cm az alapok hossza, a szögek ugyanazok, mint az első esetben.

2694. $\approx 14{,}39$ cm az ismeretlen oldal, $\approx 40{,}12°$, illetve $\approx 171{,}68°$ az ismeretlen szögek. Állítsunk merőlegest a 18 cm-es, illetve a 7 cm-es oldal megfelelő végpontjából a 13 cm-es oldalra! Ekkor a 18, illetve a 7 cm-es oldalak 13 cm-es oldalra való merőleges vetületei alkalmas szögfüggvényekkel számolhatók, valamint a vetítő szakaszok hosszai is számolhatók. A 7 cm-es oldal megfelelő végpontjából merőlegest állítunk a 18 cm-es oldalt vetítő egyenesre, s így kapunk egy derékszögű háromszöget, amelyből az ismeretlen oldal számítható.

2695. $\approx 31{,}22$ cm, $\approx 34{,}68$ cm, $\approx 26{,}97$ cm, illetve $\approx 18{,}9$ cm a négyszög ismeretlen oldalai. Húzzuk meg az AC átlót! Állítsunk merőlegest C-ből AB-re és állítsunk merőlegest D-ből az AC átlóra! A keletkező megfelelő derékszögű háromszögekre alkalmazzunk megfelelő szögfüggvényeket, majd Pitagorasz tételét!

Trigonometrikus kifejezések

2696. *a)* $\sin^2\alpha$; *b)* $\cos\alpha$; *c)* 1.

2697. *a)* $\operatorname{ctg}^2\alpha$; *b)* $\cos^2\alpha$; *c)* $-\operatorname{tg}^2\alpha$.

2698. *a)* 0; *b)* $2 \cdot \sin\beta$; *c)* $-\operatorname{ctg}^2\alpha$.

2699. *a)* $\sin^2\alpha$; *b)* 2; *c)* $\dfrac{2}{\sin^2\alpha}$.

2700. *a)* $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{3}{4}$. *b)* $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

c) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$; $\operatorname{tg}\alpha = t$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{t}$. *d)* $\cos\alpha = \dfrac{2\cdot\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = 2\cdot\sqrt{2}$.

e) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. *f)* $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{5}{12}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{12}{5}$.

g) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$. *h)* $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{ctg}\alpha = 1$.

i) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. *j)* $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{2}$.

k) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\alpha=\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$. *l)* $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha=1$.
m) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{17}}{17}$; $\cos\alpha=\frac{4\cdot\sqrt{17}}{17}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{4}$.

2701. $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{15}$. **2702.** *a)* 1; *b)* $\frac{1}{\sin^2\alpha}$. **2703.** *a)* 1; *b)* 2; *c)* 1. **2704.** *a)* 1; *b)* 1.
2705. *a)* Végezzük el a bal oldalon a szorzásokat és a jobb oldalon a négyzetre emelést! *b)* Szorozzunk be a nevezőkkel!
2706. Alakítsuk szorzattá a bal oldal számlálóját, másrészt vegyük figyelembe, hogy $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. $\cos^3\alpha-\sin^3\alpha=(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos^2\alpha+\cos\alpha\cdot\sin\alpha+\sin^2\alpha)$.
2707. Végezzük el a bal oldalon a kijelölt műveleteket!
2708. Végezzük el a bal oldalon a kijelölt műveleteket!
2709. Végezzük el a bal oldalon a kijelölt műveleteket, majd alkalmazzuk a tangens definícióját, és hozzunk közös nevezőre.
2710. *a)* és *b)* használjuk a definíciókat és hozzunk közös nevezőre!
2711. *a)* 1; *b)* 1; *c)* 1; *d)* 1. **2712.** $\sin^2\alpha$.
2713. *a)* $-\operatorname{ctg}^6\alpha$; *b)* $\cos^2 x$; *c)* $\operatorname{tg}^2 x$; *d)* 1.
2714. A bal oldal számlálójában is és nevezőjében is hozzunk közös nevezőre!
2715. *a)* 1. Emeljük köbre a $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ egyenlőséget! *b)* -1. Használjuk fel az előző feladat eredményét és a $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ négyzetre emelésével kapott eredményt!
2716. *a)* m^2-2. Emeljük négyzetre a $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=m$ egyenletet! *b)* $m^3-3\cdot m$. Alakítsuk szorzattá a $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x$ kifejezést!
2717. A kifejezés pontos értéke 1. Vegyük figyelembe, hogy $\sin 75^\circ=\cos(90^\circ-75^\circ)$, másrészt $\cos 75^\circ=\sin(90^\circ-75^\circ)$, alkalmazzuk még a kotangens definícióját. Majd végezzük el a műveleteket!
2718. A kifejezés pontos értéke 2. Vegyük figyelembe, hogy $\sin 53^\circ=\cos 37^\circ$, másrészt $\sin 73^\circ=\cos 17^\circ$! Miért?
2719. A kifejezés pontos értéke 1. Vegyük figyelembe, hogy $\sin\frac{3\cdot\pi}{7}=\cos\frac{\pi}{14}$ és $\cos\frac{3\cdot\pi}{7}=\sin\frac{\pi}{14}$! Miért?
2720. A kifejezés pontos értéke 1. Vegyük figyelembe, hogy $\sin(45^\circ-\alpha)=\cos(\alpha+45^\circ)$ és $\cos(30^\circ+\alpha)=\sin(60^\circ-\alpha)$! Miért?

Szögfüggvények általánosítása

2721. *a)* $\sin\alpha$; *b)* $-\cos\alpha$; *c)* $-\operatorname{tg}\alpha$; *d)* $-\operatorname{ctg}\alpha$.
2722. *a)* $-\sin\alpha$; *b)* $-\cos\alpha$; *c)* $\operatorname{tg}\alpha$; *d)* $-\operatorname{ctg}\alpha$; *e)* $-\sin\alpha$; *f)* $\cos\alpha$; *g)* $\operatorname{tg}\alpha$; *h)* $\operatorname{ctg}\alpha$.
2723. *a)* $\cos\alpha$; *b)* $\sin\alpha$; *c)* $\cos\alpha$; *d)* $-\sin\alpha$; *e)* $\sin\alpha$; *f)* $-\operatorname{tg}\alpha$; *g)* $\operatorname{ctg}\alpha$; *h)* $-\operatorname{ctg}\alpha$; *i)* $\operatorname{tg}\alpha$; *j)* $-\cos\alpha$.
2724. *a)* $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. *b)* $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. *c)* -1; 1; -1; -1; 1; -1. *d)* $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 1.
2725. Mindegyik részfeladat eredménye 0.
2726. *a)* $-\frac{1}{2}$; *b)* $-\frac{1}{2}$; *c)* $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; *d)* -1; *e)* $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; *f)* $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2727. A kifejezés pontos értéke 1. **2728.** Mindegyik részfeladat eredménye 0.

2729. Mindegyik részfeladat eredménye 0. **2730.** *a)* $-\frac{1}{2}$; *b)* 3; *c)* $\frac{3}{4}$.

2731. Vegyük figyelembe, hogy a szinuszfüggvény periódusa 360°, másrészt $\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$!

2732. A kifejezés pontos értéke -8. Vegyük figyelembe, hogy a tangensfüggvény periódusa π, másrészt $\operatorname{tg}(-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$! Ezeket alkalmazva igazolhatjuk, hogy $\operatorname{tg}\frac{2003\cdot\pi}{4} = \operatorname{tg}\frac{3\cdot\pi}{4}$, másrészt $\operatorname{tg}\frac{3\cdot\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

2733. A kifejezés pontos értéke $\frac{1}{4}$. Vegyük figyelembe, hogy a koszinuszfüggvény periódusa $2\cdot\pi$, másrészt a tangensfüggvény periódusa π. Ezt felhasználva mutassuk meg, hogy a négyzetre emelendő tört számlálója $\cos\frac{\pi}{6}$, míg a nevezője $\operatorname{tg}\frac{2\cdot\pi}{3}$. Az utóbbi pedig egyenlő $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$-mal! Folytassuk!

2734. *a)* Végeredmény: 1. Vegyük figyelembe, hogy $\cos(\pi + x) = -\cos x$ és $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$! *b)* Végeredmény: 1. Vegyük figyelembe, hogy $\sin(180° - x) = \sin x$ és $\sin(270° - x) = \sin(-90° - x) = -\sin(x + 90°)$!

2735. *a)* Végeredmény: 1. Vegyük figyelembe, hogy az első szorzat mindkét tényezője $-\sin x$, míg a második szorzat mindkét tényezője $\cos x$! *b)* Végeredmény: 1. Igazoljuk, hogy az első szorzat mindkét tényezője $\sin x$, míg a második szorzat első tényezője $\cos x$, a második tényezője $-\cos x$!

2736. *a)* $\operatorname{ctg}\alpha$; *b)* $-\cos\alpha$; *c)* $-\cos\alpha$. **2737.** $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$; $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

2738. Végeredmény: $\sin x\cdot\cos x = \frac{12}{25}$. Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, másrészt $\sin x\cdot\cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$!

2739. Használjuk fel, hogy $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$, ezután a négyzetgyök alatt alakítsunk ki teljes négyzetet! Gondoljuk meg, hogy a feltételek miatt $|1 + \operatorname{ctg}\alpha| = -1 - \operatorname{ctg}\alpha$!

2740. A kifejezés pontos értéke: 0. Használjuk fel, hogy $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, ezért $\operatorname{tg} 177° = -\operatorname{tg} 3°$. Hasonló módon $\operatorname{ctg} 157° = -\operatorname{ctg} 23°$.

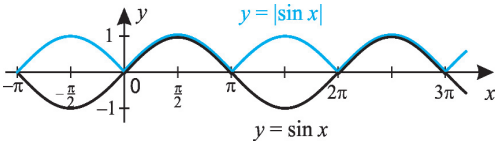
Trigonometrikus függvények grafikonjai

2741. *a)* Vegyük figyelembe: $\sin(-x) = -\sin x$! *b)* Gondoljuk meg: $\cos(-x) = \cos x$!

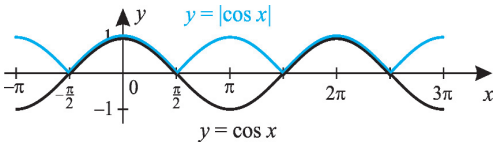
2742. *a)* (2742/I.) *b)* (2742/II.)

2743. *a)* Gondoljuk meg, hogy $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, ezért tükrözzük a tg függvény grafikonját az x tengelyre. *b)* Vegyük figyelembe, hogy $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$, ezért tükrözzük a ctg függvény grafikonját az x tengelyre.

2742/I.



2742/II.



2744. *a)* (2744/I.) *b)* (2744/II.)

2745. *a)* Vegyük észre, hogy $f(x) = 1$ minden valós x-re! *b)* Gondoljuk meg, hogy $g(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2$.

2746. *a)* Igazoljuk, hogy $f(x) = 0$. *b)* Igazoljuk, hogy $g(x) = 0$.

2747. *a)* Vegyük figyelembe, hogy $f(x) = -\cos x$. *b)* Gondoljuk meg, hogy $g(x) = \cos x$.

2748. *a)* Vegyük észre, hogy $f(x) = -\sin x$. *b)* Vegyük figyelembe, hogy $g(x) = \sin x$.

2749. *a)* A tg függvény grafikonját toljuk el $\frac{\pi}{2}$-vel az x tengely irányában a pozitív irányba.

b) A tg függvény grafikonját toljuk el $\frac{\pi}{2}$-vel az x tengely irányában a negatív irányba.

2750. *a)* A ctg függvény grafikonját toljuk el $\frac{\pi}{2}$-vel az x tengely irányában a negatív irányba!

b) A ctg függvény grafikonját toljuk el $\frac{\pi}{2}$-vel az x tengely irányában a pozitív irányba!

2751. *a)* $f(x) = \operatorname{tg} x$; *b)* $g(x) = \operatorname{tg} x$.

2752. *a)* Igazoljuk, hogy $f(x) = 0$. *b)* Igazoljuk, hogy $g(x) = 2 \cdot \sin x$.

2753. *a)* Gondoljuk meg, hogy $f(x) = 2 \cdot \sin x$, ha $\sin x \geq 0$ és $f(x) = 0$, ha $\sin x < 0$!

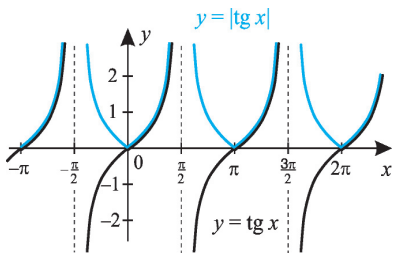
b) Vegyük figyelembe, hogy $g(x) = 2 \cdot \cos x$, ha $\cos x \geq 0$ és $g(x) = 0$, ha $\cos x < 0$!

2754. *a)* Vegyük észre, hogy $f(x) = -2 \cdot \sin x$, ha $\sin x < 0$ és $f(x) = 0$, ha $\sin x \geq 0$! *b)* Vegyük figyelembe, hogy $g(x) = 0$, ha $\cos x \geq 0$ és $g(x) = -2 \cdot \cos x$, ha $\cos x < 0$!

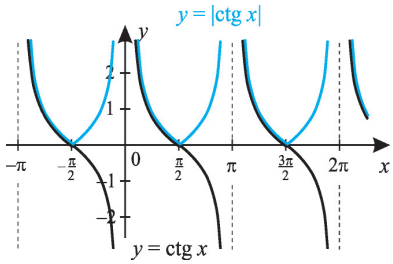
2755. *a)* Gondoljuk meg, hogy $f(x) = 1$, ha $\sin x > 0$ és $f(x) = -1$, ha $\sin x < 0$. *b)* Figyeljük meg, hogy $g(x) = 1$, ha $\cos x > 0$ és $g(x) = -1$, ha $\cos x < 0$.

2756. Lásd az ábrát!

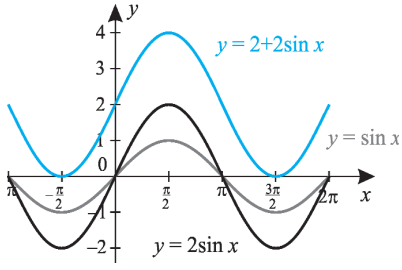
2744/I.



2744/II.



2756.

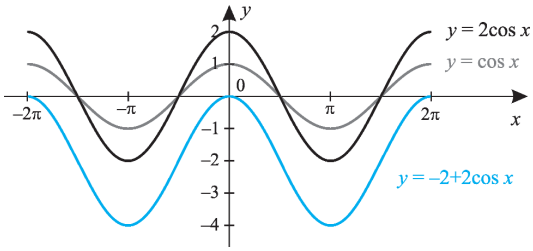


IV

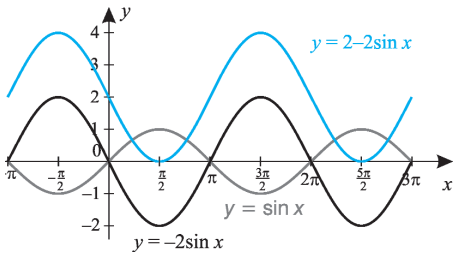
IV

2757. 2758. 2759. 2760. 2761. 2762. 2763. 2764. Lásd az ábrákat!

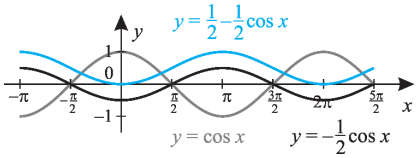
2757.



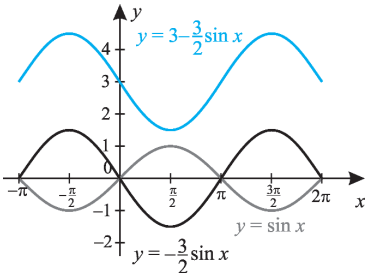
2758.



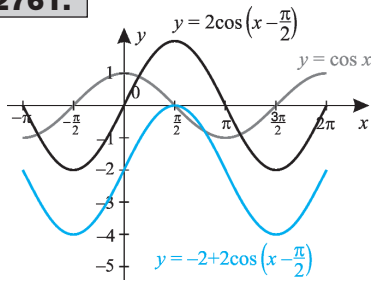
2759.



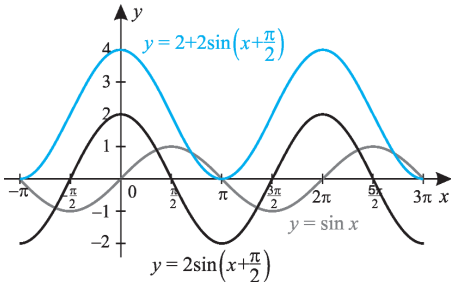
2760.



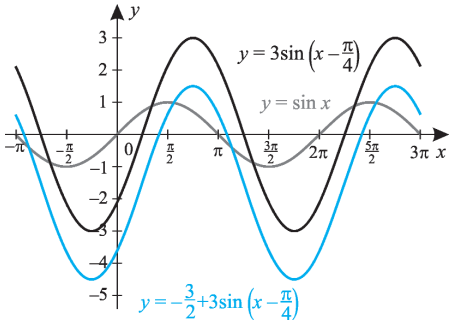
2761.



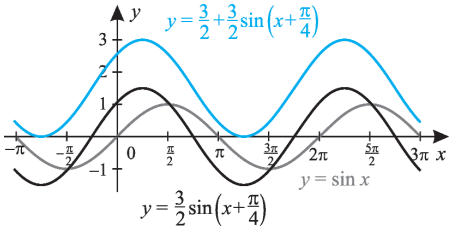
2762.



2763.

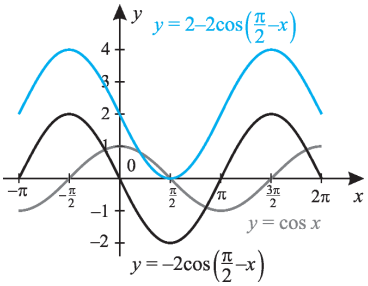


2764.

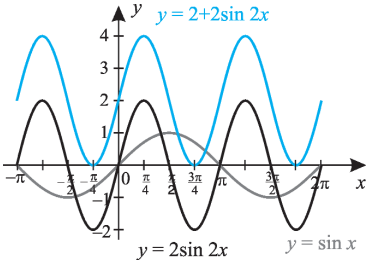


2765. 2766. 2767. 2768. *a)* (2768/I.); *b)* (2768/II.); *c)* (2768/III.)
2769. *a)* (2769/I.); *b)* (2769/II.); *c)* (2769/III.) Lásd az ábrákat!

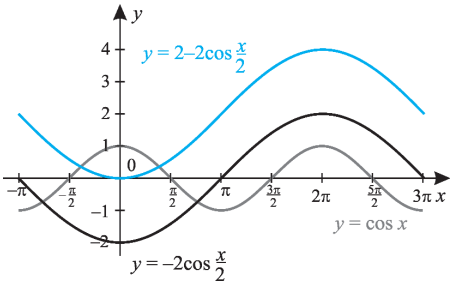
2765.



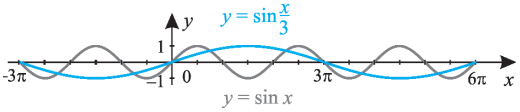
2766.



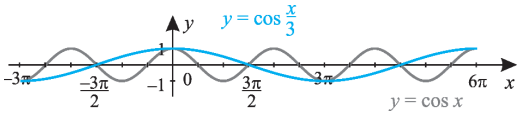
2767.



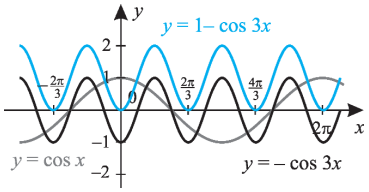
2768/I.



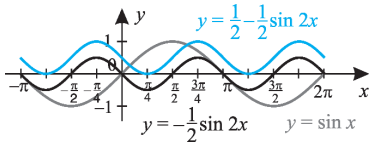
2768/II.



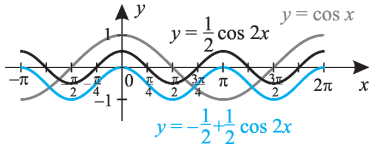
2768/III.



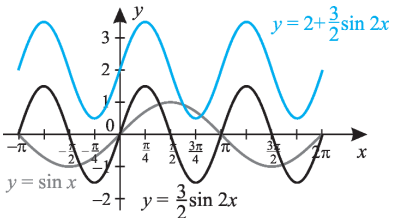
2769/I.



2769/II.



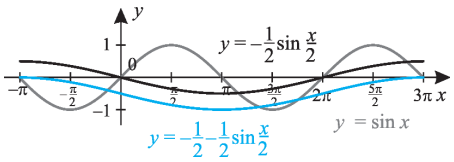
2769/III.



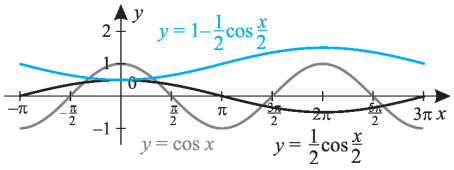
2770. *a)* (2770/I.); *b)* (2770/II.); *c)* (2770/III.)
2771. *a)* (2771/I.); *b)* (2771/II.) **2772.** *a)* (2772/I.); *b)* (2772/II.)
2773. *a)* (2773/I.); *b)* (2773/II.) **2774.** Lásd az ábrákat!

IV

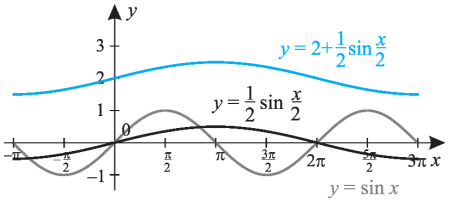
2770/I.



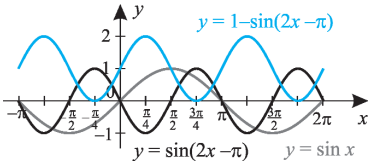
2770/II.



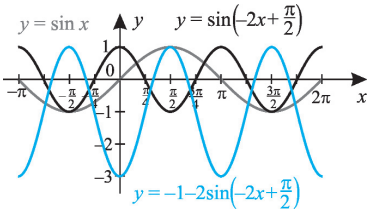
2770/III.



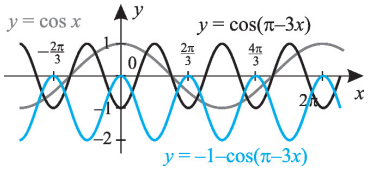
2771/I.



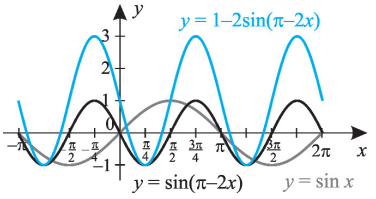
2771/II.



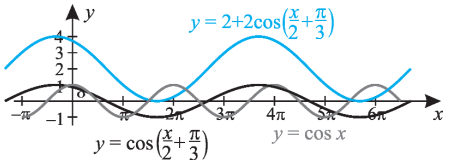
2772/I.



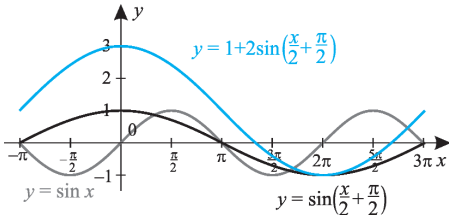
2772/II.



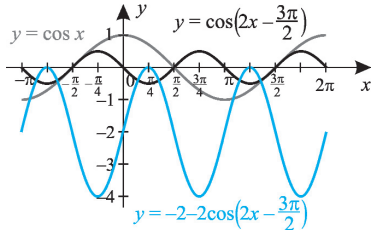
2773/I.



2773/II.

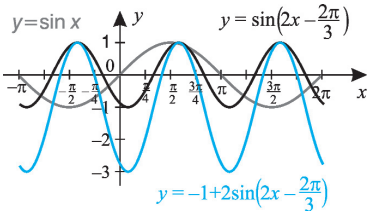


2774.

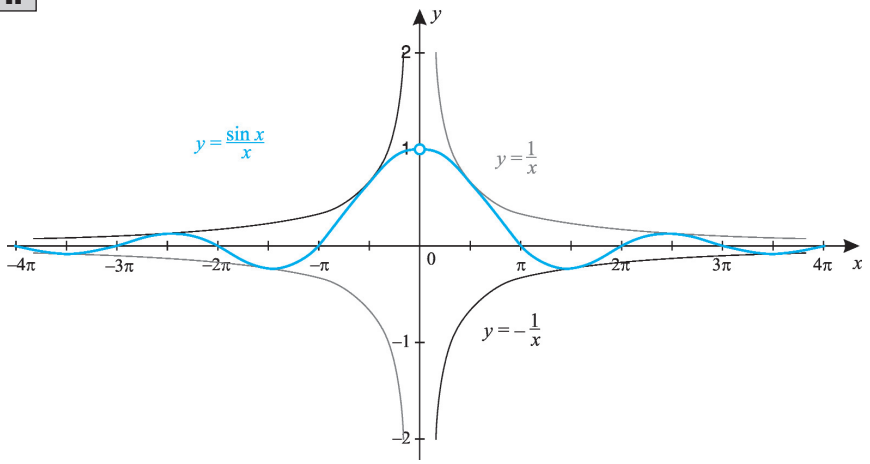


2775. 2776. *a)* (2776/I.); *b)* (2776/II.) Lásd az ábrákat!

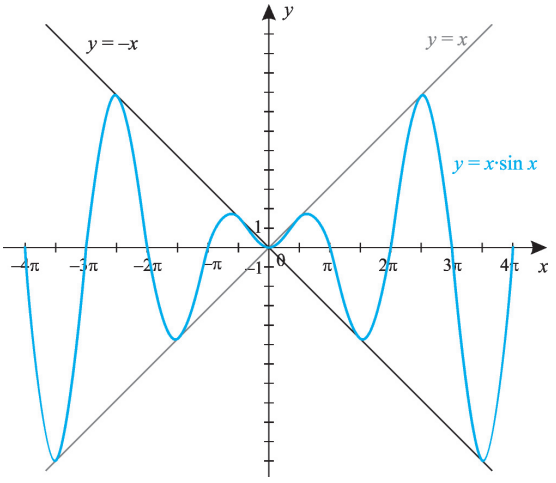
2775.



2776/I.



2776/II.



IV

Trigonometrikus egyenletek I. rész

Bevezető feladatok

A következőkben k, illetve az m tetszőleges egész számokat jelent.

IV

2777. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = 30° + k \cdot 360°$; $x_2 = 150° + m \cdot 360°)$.

b) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = 60° + k \cdot 360°$; $x_2 = 120° + m \cdot 360°)$.

c) $x_1 = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{7 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = -30° + k \cdot 360°$; $x_2 = 210° + m \cdot 360°)$.

d) $x_1 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{4 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = -60° + k \cdot 360°$; $x_2 = 240° + m \cdot 360°)$.

e) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = x_1$. $(x_1 = 90° + k \cdot 360°)$. *f)* $x_1 = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{2} +$ $+ m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = -90° + k \cdot 360°$; $x_2 = 270° + m \cdot 360°)$. (A két megoldás megegyezik.)

g) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = 45° + k \cdot 360°$; $x_2 = 135° + m \cdot 360°)$.

h) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = -45° + k \cdot 360°$; $x_2 = 225° + m \cdot 360°)$.

i) $x_1 = 0 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \pi + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = k \cdot 360°$; $x_2 = 180° + m \cdot 360°)$. A két megoldássorozatot össze lehet vonni a következőbe: $x = n \cdot \pi$, ahol n tetszőleges egész szám. *j)* Nincs megoldás a valós számok halmazán. *k)* $x_1 \approx 0{,}9273 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 \approx 2{,}2143 + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 \approx 53{,}13° + k \cdot 360°$; $x_2 \approx 126{,}87° + m \cdot 360°)$. *l)* Nincs megoldás a valós számok halmazán.

2778. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = 60° + k \cdot 360°$; $x_2 = -60° + m \cdot 360°)$.

b) $x_1 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = 120° + k \cdot 360°$; $x_2 = -120° + m \cdot 360°)$.

c) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = 30° + k \cdot 360°$; $x_2 = -30° + m \cdot 360°)$.

d) $x_1 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = 150° + k \cdot 360°$; $x_2 = -150° + m \cdot 360°)$.

e) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = 45° + k \cdot 360°$; $x_2 = -45° + m \cdot 360°)$.

f) $x_1 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{3 \cdot \pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = 135° + k \cdot 360°; x_2 = -135° + m \cdot 360°)$.

g) $x_1 = 0 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = x_1$. $(x_1 = k \cdot 360°)$. *h)* $(x_1 = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\pi + m \cdot 2 \cdot \pi)$. (A két megoldás ugyanaz.) *i)* Nincs megoldás a valós számok halmazán. *j)* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{2} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = 90° + k \cdot 360°$; $x_2 = -90° + m \cdot 360°)$. A két megoldást összefoglalhatjuk a következőbe: $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, ahol n tetszőleges egész szám. *k)* Nincs megoldás a valós

számok halmazán. *l)* $x_1 \approx 1{,}23096 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 \approx -1{,}23096 + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 \approx 70{,}53° + k \cdot 360°$; $x_2 \approx -70{,}53° + m \cdot 360°$).

2779. *a)* $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. ($x = 45° + k \cdot 180°$). *b)* $x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. ($x = -45° + k \cdot 180°$). *c)* $x = 0 + k \cdot \pi = k \cdot \pi$. ($x = k \cdot 180°$). *d)* $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$. ($x = 60° + k \cdot 180°$). *e)* $x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$. ($x = -60° + k \cdot 180°$). *f)* $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$. ($x = 30° + k \cdot 180°$). *g)* $x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$. ($x = -30° + k \cdot 180°$). *h)* $x \approx 1{,}1685 + k \cdot \pi$. ($x \approx 66{,}95° + k \cdot 180°$).

2780. *a)* $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. ($x = 45° + k \cdot 180°$). *b)* $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$. ($x = 30° + k \cdot 180°$). *c)* $x = \frac{\pi}{3} + + k \cdot \pi$. ($x = 60° + k \cdot 180°$). *d)* $x \approx 0{,}8548 + k \cdot \pi$. ($x \approx 48{,}98° + k \cdot 180°$).

Alapvető feladatok

A következőkben *k, l, m, n* tetszőleges egész számokat jelentenek.

2781. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + n \cdot 2 \cdot \pi$.
b) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{4} + n \cdot 2 \cdot \pi$.
c) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. *d)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$.

2782. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$.
c) $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}$. *d)* $x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$.

2783. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. ($x_1 = 15° + k \cdot 180°$); ($x_2 = -45° + l \cdot 180°$).
b) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$; $x_2 = -\frac{\pi}{9} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$.

2784. *a)* $x = \frac{7 \cdot \pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2}$. *b)* $x_1 = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{10} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$.

2785. *a)* $x = \frac{11 \cdot \pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2}$. *b)* $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$.

2786. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = -\frac{\pi}{12} + l\frac{\pi}{2}$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = \pi + l \cdot \pi$.

2787. *a)* $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$; $x_2 = \frac{4 \cdot \pi}{9} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$; $x_3 = \frac{\pi}{9} + m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$; $x_4 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + n \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$.

2788. *a)* $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \frac{\pi}{2}$. *b)* $x_1 = \frac{5 \cdot \pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{\pi}{24} + l \cdot \frac{\pi}{2}$.

2789. *a)* **1. eset:** $2x = x + \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$, ebből $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$. **2. eset:** $2x + x = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi$, ebből

$x_2 = \frac{\pi}{3} + m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. *b)* $x_1 = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$; $x_2 = \frac{\pi}{5} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$.

2790. *a)* $x_1 = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{85}$; $x_2 = \frac{\pi}{115} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{115}$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4}$; $x_2 = -\frac{\pi}{12} + l \cdot \frac{\pi}{6}$.

2791. *a)* **1. eset:** $2x = x + k \cdot 2 \cdot \pi$, ebből $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$. **2. eset:** $2x + x = l \cdot 2 \cdot \pi$, ebből $x_2 = l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. *b)* $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{4}$; $x_2 = l \cdot \frac{\pi}{6}$.

IV

2792. *a)* $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{450}$; $x_2 = l \cdot \frac{\pi}{550}$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{7} + k \cdot \frac{\pi}{7}$; $x_2 = -\frac{\pi}{18} + l \cdot \frac{\pi}{9}$.

2793. *a)* $2x = x + k \cdot \pi$, ebből $x = k \cdot \pi$. Meg kell vizsgálni, hogy a tangensek nevezői mikor nem nullák. Ha ezt megtesszük, akkor azt kapjuk, hogy a kizárt valós számok nem esnek bele az előbb megadott megoldásjelöltbe, ezért az valóban megoldás. Behelyettesítéssel is ellenőrizhetjük, hogy kielégíti az egyenletet. *b)* $x = k \cdot \frac{\pi}{4}$ megoldásjelöltet kapjuk, ha megoldjuk az egyenletet. De ezen sorozat nem minden eleme megoldás. Ha a tangensek nevezőit megvizsgáljuk, miszerint azok nem lehetnek nullák, akkor azt kapjuk, hogy csak a következő részsorozatai megoldások az előbb kapott megoldásjelöltnek: $x_1 = l \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + m \cdot \pi$; $x_3 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + n \cdot \pi$.

2794. *a)* $x = \frac{\pi}{20} + k \cdot \frac{\pi}{10}$. *b)* $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{\pi}{4}$.

2795. *a)* $x = k \cdot \pi$ megoldásjelöltet kapjuk, ha megoldjuk az egyenletet. Ámde, ha megvizsgáluk a kotangensek nevezőit, miszerint azok nem lehetnek nullák, akkor azt kapjuk, hogy a megoldásjelölt számok esetén nulla lenne a nevező. Ez nem lehet, ezért az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán. *b)* $x = k \cdot \frac{\pi}{3}$ megoldásjelöltet kapunk, de ha megvizsgáljuk a kotangensek nevezőit, miszerint azok nem lehetnek nullák, akkor azt kapjuk, hogy csak a következő részsorozatok a megoldások: $x_1 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot \pi$.

2796. *a)* $\sin 4x = \sin(-x)$, ezt pedig megoldva: $x_1 = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$.
b) $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \frac{\pi}{2}$.

2797. *a)* $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{16} + l \cdot \frac{\pi}{8}$. *b)* $x_1 = \frac{11 \cdot \pi}{48} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = -\frac{17 \cdot \pi}{24} + l \cdot \pi$.

2798. *a)* **1. eset:** $2x - x = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$, ebből $x_1 = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$. **2. eset:** $2x + x = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi$, ebből $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{\pi}{8} + l \cdot \frac{\pi}{4}$.

2799. *a)* $x_1 = \frac{7 \cdot \pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3}$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{20} + l \cdot \frac{\pi}{5}$. *b)* $x_1 = \pi + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{16} + l \cdot \frac{\pi}{4}$.

2800. *a)* $x = k \cdot \frac{\pi}{4}$ a megoldásjelölt, de ebből csak a következő részsorozatok a megoldások: $x_1 = l \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + m \cdot \pi$; $x_3 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + n \cdot \pi$. *b)* $x = k \cdot \frac{\pi}{3}$ a megoldásjelölt, de ebből csak a

következő részsorozatok a megoldások: $x_1 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot \pi$.

2801. *a)* Vegyük figyelembe, hogy $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; ezt felhasználva, átírhatjuk az egyenletet a következő alakba: $\sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, ez pedig már korábban tárgyalt típusú. A megoldások: $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{8} + l \cdot \frac{\pi}{2}$.

2802. *a)* $x_1 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \frac{\pi}{3}$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{96} + k \cdot \frac{\pi}{8}$; $x_2 = -\frac{\pi}{120} + l \cdot \frac{\pi}{10}$.

2803. *a)* $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3}$; $x_2 = \frac{\pi}{8} + l \cdot \frac{\pi}{2}$. *b)* $x_1 = -\frac{\pi}{20} + k \cdot \frac{\pi}{5}$; $x_2 = -\frac{\pi}{12} - l \cdot \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12} + m \cdot \frac{\pi}{3}$, ahol $m = -l$ vagy $x_2 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{3}$.

2804. *a)* $x_1 = -\frac{5 \cdot \pi}{48} + k \cdot \frac{\pi}{4}$; $x_2 = -\frac{\pi}{24} + l \cdot \frac{\pi}{2}$.

b) $x_1 = \frac{\pi}{10} - k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} - l \cdot 2 \cdot \pi$.

2805. *a)* Rendezzük nullára az egyenletet, ezután alakítsuk szorzattá! Használjuk fel, hogy egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla! $\sin^2 x \cdot (\sin x - 1) = 0$. $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \pi + m \cdot 2 \cdot \pi$. (Összefoglalhatjuk a következő egyenletbe: $x = n \cdot \frac{\pi}{2}$, ahol n tetszőleges egész szám.)

2806. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$, összefoglalva: $x = \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi$. *b)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = l \cdot 2 \cdot \pi$, összefoglalva: $x = m \cdot \pi$.

2807. *a)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$.

2808. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$.

2809. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$; *b)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot \pi$.

2810. *a)* $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. *b)* $x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$.

2811. *a)* $x \approx 1,1071 + k \cdot \pi$, $(x \approx 63,43° + k \cdot 180°)$. *b)* $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$.

2812. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$.

2813. *a)* $x_1 = -\frac{3 \cdot \pi}{10} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{13 \cdot \pi}{10} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{\pi}{10} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{9 \cdot \pi}{10} + n \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$. A $\sin x = 2$-ből nincs valós megoldás.

2814. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 \approx -0{,}3398 + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 \approx 3{,}4814 + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 = 90° + k \cdot 360°$; $x_2 \approx -19{,}47° + l \cdot 360°$; $x_3 \approx 199{,}47° + m \cdot 360°$). *b)* $x_1 \approx 0{,}9945 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 \approx 2{,}1471 + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 \approx -0{,}2408 + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 \approx 3{,}3824 + n \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 \approx 56{,}98° + k \cdot 360°$; $x_2 \approx 123{,}02° + l \cdot 360°$; $x_3 \approx -13{,}80° + m \cdot 360°$; $x_4 = 193{,}80° + n \cdot 360°$).

2815. *a)* $x = 0 + k \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 \approx 0{,}4205 + l \cdot \pi$; $x_3 \approx -0{,}4205 + m \cdot \pi$.

2816. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx 1{,}2490 + l \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$.

IV

2817. *a)* $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{3 \cdot \pi}{8} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{8} + l \cdot \pi$.

2818. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{5 \cdot \pi}{12} + l \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$; $x_3 = \frac{\pi}{6} + m \cdot \pi$; $x_4 = -\frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$.

2819. *a)* $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{7 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi$.

2820. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$. $\cos x = 2$-ből nem kapunk megoldást.

b) $x_1 = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$.

2821. *a)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = 0 + l \cdot 2 \cdot \pi$.

2822. *a)* $x_1 = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$. $\sin x = -2$-ből nem kapunk megoldást.

2823. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$.

b) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -1{,}1071 + k \cdot \pi$. ($x_2 \approx -63{,}43° + k \cdot 180°$). $\left(\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.\right)$ Alakítsuk át az egyenletet például a következő alakúra: $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$!

2824. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{4 \cdot \pi}{3} + n \cdot 2 \cdot \pi$. Rövidebben: $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 \approx 1{,}2309 + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 \approx -1{,}2309 + n \cdot 2 \cdot \pi$.

2825. *a)* Az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán. $1 + \cos 2x \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos 2x \neq -1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; ellentmondás. *b)* $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$.

2826. *a)* $x = \frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot \pi$. *b)* Nincs megoldása a valós számok halmazán.

2827. *a)* Nincs megoldása a valós számok halmazán. *b)* $x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$.

2828. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$.

2829. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$. $\cos x = 2$-ből nincs megoldás.

b) $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$.

2830. Azonosság, tehát minden valós szám megoldása az egyenletnek. Egyrészt emeljük négyzetre a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot, másrészt emeljük az előző azonosságot harmadik hatványra és a kapott eredményeket használjuk fel.

2831. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{7 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$.

2832. $x = 0$. Vázoljuk az $f(x) = \cos x$ és a $g(x) = x^2 + 1$ függvény grafikonját közös koordináta-rendszerben!

2833. Nincs megoldás a valós számok halmazán. Vázoljuk az $f(x) = \sin x$ és a $g(x) = -(x-1)^2$ függvény grafikonját közös koordináta-rendszerben!

2834. $x = \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $y = \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi$. Alakítsunk ki teljes négyzetet az x-es tagokból, az y-os tag már teljes négyzet.

2835. $\{x = 1;\ y = k \cdot 2 \cdot \pi\}$, $\{x = -1;\ y = \pi + l \cdot \pi\}$.

Hozzuk a következő alakra: $x^2 - 2 \cdot x \cdot \cos y + 1 = 0$. Tekintsük ezt x-re másodfokú egyenletnek! Ennek akkor és csak akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív.

Összetettebb feladatok

2836. $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$.

2837. $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot \pi$.

2838. $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$.

2839. $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$.

2840. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{4} + n \cdot 2 \cdot \pi$.

2841. $x_1 \approx 0{,}6610 + k \cdot \pi$; $x_2 \approx 0{,}7484 + l \cdot \pi$. Vezessünk be új változót, például: $y = \sqrt[3]{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}}$. Ekkor másodfokú egyenletre vezethetjük vissza az eredeti egyenletet.

2842. $x_1 \approx -0{,}3218 + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -0{,}1651 + l \cdot \pi$. Vegyük észre, hogy: $\frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \operatorname{tg}^2 x$. Így az egyenlet: $\operatorname{tg} x + \frac{1}{9} \cdot \operatorname{ctg} x = |\operatorname{tg} x| - 1$. Különböztessünk meg két esetet, egyrészt amikor $\operatorname{tg} x > 0$, másrészt amikor negatív (nulla nem lehet).

2843. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi$; $x_5 = -\frac{5 \cdot \pi}{6} + p \cdot 2 \cdot \pi$. Itt k, l, m, n, p tetszőleges egész számok. Vegyük észre, hogy $\cos(\pi - x) = -\cos x$.

2844. $x_1 \approx 1{,}7794 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 \approx -1{,}7794 + l \cdot 2 \cdot \pi$. Különböztessünk meg két esetet, egyrészt amikor $\cos x$ nemnegatív, másrészt amikor negatív.

2845. $x_1 = \frac{1}{6} + k$; $x_2 = -\frac{1}{6} + l$. Alakítsuk át tangensre a kotangenst! Ebből kapjuk, hogy $\frac{\pi}{3} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x) = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$. Ebből következik, hogy $\cos(2 \cdot \pi \cdot x) = \frac{1}{2}$. ($k = 0$ lehet csak.)

2846. $x_1 = -2$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = -3{,}5 + \sqrt{11{,}25}$; $x_4 = -3{,}5 - \sqrt{11{,}25}$; $x_5 = x_6 = 1$.

$\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{x^2 + x + 1} = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$, ebből $0 = (3k - 1) \cdot x^2 + (3k - 7) \cdot x - 1 + 3k$. Ennek a diszkriminánsa nemnegatív kell hogy legyen, ebből következik, hogy: $0 \geq 3k^2 + 2k - 5$. Ezt oldjuk meg, majd vegyük figyelembe, hogy k egész! Ebből következik, hogy k lehetséges értékei -1, 0, 1.

2847. $x_1 = 1 + \sqrt{2k + 1}$; $x_2 = 1 - \sqrt{2k + 1}$, ahol k nemnegatív egész szám.

$x_3 = -1 + \sqrt{2l + 1}$; $x_4 = -1 - \sqrt{2l + 1}$, ahol l nemnegatív egész szám.

2848. $x_1 = k \cdot \pi + \sqrt{k^2 \cdot \pi^2 + 1}$; $x_2 = k \cdot \pi - \sqrt{k^2 \cdot \pi^2 + 1}$. Itt k tetszőleges egész szám.

$x_3 = l \cdot \pi + \sqrt{l^2 \cdot \pi^2 - 1}$; $x_4 = l \cdot \pi - \sqrt{l^2 \cdot \pi^2 - 1}$. Itt l tetszőleges nem nulla egész szám.

A továbbiakban *k, l, m, n, p, q, r, s* tetszőleges egész számokat jelent.

2849. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -1{,}1071 + l \cdot \pi$. Osszuk el az egyenletet $\cos^2 x$-szel, amikor ez nem nulla! Ezzel $\operatorname{tg} x$-re másodfokú egyenletet kapunk.

2850. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx 0{,}4636 + l \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2851. $x_1 \approx 0{,}6319 + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -1{,}2199 + l \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot, ha előbb felhasználjuk, hogy $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

2852. $x_1 \approx 1{,}0591 + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -0{,}2737 + l \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2853. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -0{,}2450 + l \cdot \pi$.

2854. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -1{,}1071 + l \cdot \pi$. Szorozzunk be a nevezővel, ezután olyan típusú lesz, mint az előző feladatokban megoldottak!

2855. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx 1{,}4289 + l \cdot \pi$; $x_3 \approx 1{,}2490 + m \cdot \pi$.

2856. $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$; $x_3 = \frac{\pi}{6} + m \cdot \pi$; $x_4 = -\frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$.

2857. $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$;

$x_4 = -\frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi$; $x_5 = \frac{\pi}{3} + p \cdot 2 \cdot \pi$; $x_6 = -\frac{\pi}{3} + q \cdot 2 \cdot \pi$; $x_7 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + r \cdot 2 \cdot \pi$;

$x_8 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + s \cdot 2 \cdot \pi$. Emeljük harmadik hatványra a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot! Ezt felhasználva előbb-utóbb $\cos x$-re negyedfokú egyenletet kapunk, amely másodfokú egyenletre vezethető vissza. (Lehet $\sin x$-re negyedfokú is az egyenlet.)