II

2006. $ab = 80\ \text{dm}^2$ és $b = \frac{5}{8}a \Rightarrow \frac{5}{8}a^2 = 80 \Rightarrow a = 8\sqrt{2}\ \text{cm} \Rightarrow b = 5\sqrt{2}\ \text{cm} \approx \underline{\underline{7{,}07\ \text{cm}}}$ a cső magassága. $2r\pi = a - 2 \Rightarrow 2r = \frac{a-2}{\pi} \Rightarrow 2r \approx \underline{\underline{2{,}96\ \text{dm}}}$ a cső átmérője.

2007. $m \approx \underline{\underline{1{,}27\ \text{m}}}$.

2008. $r \approx \underline{\underline{2{,}77\ \text{dm}}}$ az alapkör sugara, $m \approx \underline{\underline{8{,}31\ \text{dm}}}$ az edény magassága.

2009. $t_p = 2r\pi m = 2r\pi \cdot 2r = 4r^2\pi \Rightarrow r^2\pi = \frac{t_p}{4}$, valamint $t_p = 2r\pi m = m^2\pi \Rightarrow m = \sqrt{\frac{t_p}{\pi}} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = r^2\pi m = \frac{t_p}{4} \cdot \sqrt{\frac{t_p}{\pi}} = \frac{25}{4} \cdot \frac{5}{\sqrt{\pi}} \approx \underline{\underline{17{,}625\ \text{m}^3}}$.

2010. $A \approx \underline{\underline{471{,}24\ \text{m}^2}}$.

2011. $2r = 7{,}5\ \text{m} \Rightarrow r = 3{,}75\ \text{m}$. 1 óra alatt $82\ \text{hl} = 8200\ \text{l}$ víz $\Rightarrow$ 4 óra alatt $32\,800\ \text{l} = 32\,800\ \text{dm}^3 =$ $= 32{,}8\ \text{m}^3$ víz. $32{,}8 = r^2\pi h = 14{,}0625\pi h \Rightarrow h \approx \underline{\underline{0{,}74\ \text{m}}}$-t emelkedik a vízszint 4 óra alatt.

2012. Percenként a gőzszükséglet: $60 \cdot r^2\pi m \approx 6\,650\,123{,}33\ \text{cm}^3 \approx \underline{\underline{6{,}65\ \text{m}^3}}$.

2013. Percenkénti vízszállítás: $0{,}9 \cdot 100 \cdot r^2\pi m \approx 1\,053\,501{,}68\ \text{cm}^3 \approx \underline{\underline{1{,}053\ \text{m}^3}}$.

2014. Idő $= \frac{V}{r^2\pi m} \approx 159{,}15\ \text{perc} \approx \underline{\underline{9550\ \text{másodperc}}}$.

2015. $2r = 0{,}0324\ \text{dm} = \underline{\underline{3{,}24\ \text{mm}}}$.

2016. Tekintsük az 1993. ábrát. $V = r^2\pi m - (r-d)^2\,\pi m = \pi m\,(r^2 - (r-d)^2) =$ $= \pi \cdot 9 \cdot (3{,}5^2 - 2{,}6^2) \Rightarrow V \approx 155{,}23\ \text{dm}^3 \Rightarrow$ a tömeg $= V \cdot \varrho \approx \underline{\underline{1151{,}8\ \text{kg}}}$.

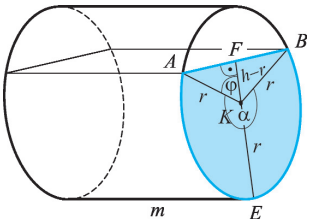
2017. $V_{\text{ólom}} = ((0{,}17\ \text{dm})^2 \cdot \pi - (0{,}15\ \text{dm})^2 \cdot \pi) \cdot 10\ \text{dm} \approx 0{,}201\ \text{dm}^3$. $V_{\text{réz}} = 3 \cdot (0{,}033\ \text{dm})^2 \cdot \pi \cdot 10\ \text{dm} \approx$ $\approx 0{,}103\ \text{dm}^3$. $V_{\text{szigetelés}} = (0{,}15\ \text{dm})^2 \cdot \pi \cdot 10\ \text{dm} - V_{\text{réz}} \approx 0{,}604\ \text{dm}^3$. $m_{\text{ólom}} + m_{\text{réz}} + m_{\text{szigetelés}} =$

$= V_{\text{ólom}} \cdot \varrho_{\text{ólom}} + V_{\text{réz}} \cdot \varrho_{\text{réz}} + V_{\text{szigetelés}} \cdot \varrho_{\text{szigetelés}} \approx \underline{\underline{3{,}7484\ \text{kg}}}$.

2018. Tekintsük az 1993. ábrát. Jelölje a magasságot h és a tömeget m! $k = 2R\pi \Rightarrow R \approx 1{,}43\ \text{dm}$. $m = V \cdot \varrho = (R^2 - r^2) \cdot \pi \cdot h \cdot \varrho$, azaz $650 = (1{,}43^2 - r^2) \cdot \pi \cdot 36 \cdot 7{,}5 \Rightarrow r \approx 1{,}13\ \text{dm}$. Az oszlop falának vastagsága: $R - r \approx \underline{\underline{3\ \text{cm}}}$.

2019. $2r = 150\ \text{cm}$; $m = 5\text{m} = 500\ \text{cm}$; $h = 0{,}8 \cdot 2r = 1{,}6r$. $FK = h - r = 0{,}6r \Rightarrow \cos\varphi =$ $= 0{,}6 \Rightarrow \varphi \approx 53{,}13° \Rightarrow 2\varphi \approx 106{,}26° \Rightarrow \alpha \approx 253{,}74°$.

2019.



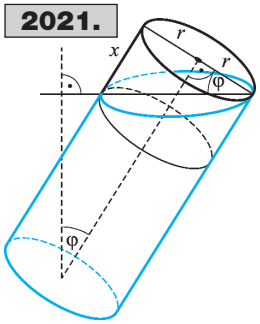
$V = t \cdot m = \left[r^2\pi \cdot \frac{253{,}74°}{360°} + \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin 106{,}26°\right] \cdot m \approx 7578\ \text{dm}^3$.

Kb. $\underline{\underline{7578\ \text{l}}}$ víz van a kazánban.

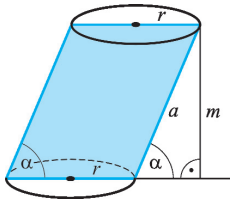
2020. Tekintsük a 2005. ábrát. $EF = 12\ \text{cm}$ és $r = 15\ \text{cm} \Rightarrow$ $\Rightarrow KF = 3\ \text{cm} \Rightarrow \cos\varphi = 0{,}2 \Rightarrow \varphi \approx 78{,}5° \Rightarrow 2\varphi \approx 157°$. $r^2\pi \cdot m \cdot \varrho =$ $= t \cdot m \Rightarrow r^2\pi \cdot \varrho = r^2\pi \cdot \frac{157°}{360°} - \frac{1}{2}r^2 \sin 157° \Rightarrow \pi \cdot \varrho \approx 1{,}37 -$ $- 0{,}195 \Rightarrow \varrho = \underline{\underline{0{,}374\ \text{kg/m}^3}}$.

II

2021.



2022.



2021. Legyen $m = 4r$. $V = 1\ \text{dm}^3 = 1000\ \text{cm}^3$; $V = r^2\pi \cdot 4r = 4r^3\pi \Rightarrow r \approx 4{,}3\ \text{cm}$! $\varphi = 36{,}57°$; $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{x}{2r}$.

A kiömlő folyadék térfogata: $V_1 = \dfrac{1}{2} \cdot r^2\pi x = \dfrac{1}{2}\, r^2\pi \cdot 2r \cdot tg\ \varphi = r^3\pi \cdot tg\ \varphi \approx 185{,}3\ \text{cm}^3$.

Az edényben maradt folyadék: $V - V_1 \approx 1000\ \text{cm}^3 - 185{,}3\ \text{cm}^3 \approx \underline{\underline{814{,}7\ \text{cm}^3}}$.

2022. $t = 2r \cdot a \cdot \sin\alpha \approx \underline{\underline{5{,}73\ \text{m}^2}}$.

2023. Tekintsük a 2022. ábrát! $m = a \cdot \sin\alpha$. $V = r^2\pi m = r^2\pi a \cdot \sin\alpha \approx \underline{\underline{1986{,}5\ \text{cm}^3}}$.

2024. A 2022. ábra jelöléseit használjuk. $k = m \cdot 5 \Rightarrow 2r\pi = 5 \cdot a \cdot \sin\alpha \Rightarrow r = \dfrac{5a\sin\alpha}{2\pi}$.

$$V = r^2\pi m = r^2\pi \cdot a \cdot \sin\alpha = \left(\frac{5a\sin\alpha}{2\pi}\right)^2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sin\alpha = \frac{25a^3 \cdot \sin^3\alpha}{4\pi} \approx \underline{\underline{5302\ \text{dm}^3}}.$$

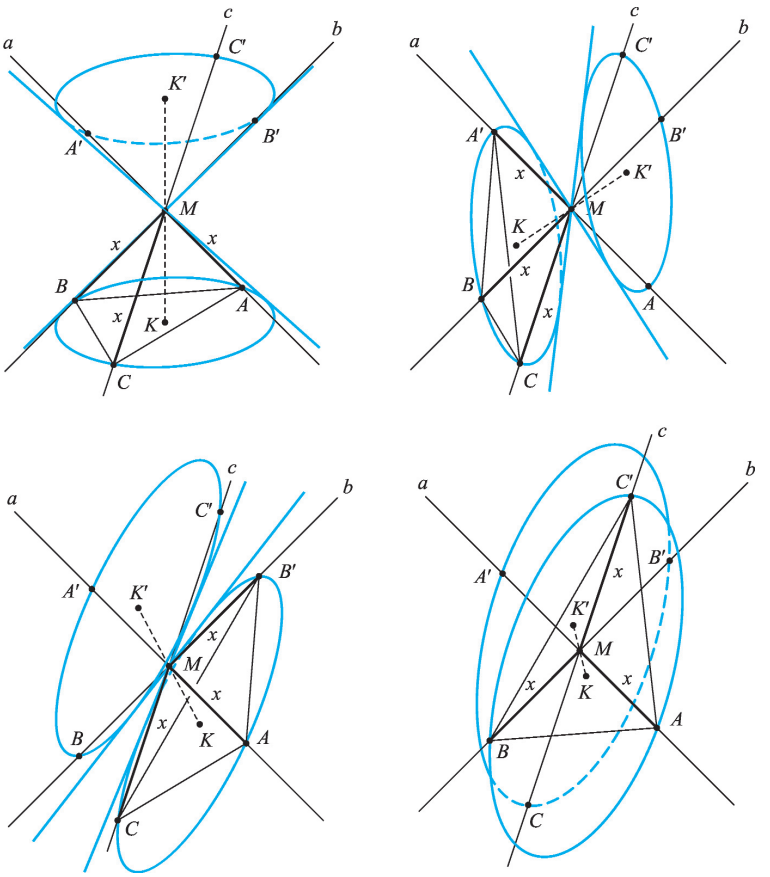
2025. Tekintsük a 2022. ábrát! $m = a \cdot \sin\alpha$; $t = 2r \cdot a \cdot \sin\alpha \Rightarrow r \approx 9{,}09\ \text{dm} \Rightarrow V \approx \underline{\underline{5061{,}2\ \text{dm}^3}}$.

Kúp, csonkakúp

II

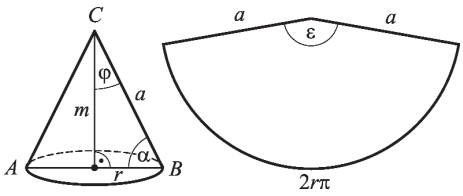
Kúp

2026.



2026. Az egyenesek közös M pontjából mérjünk fel mindhárom egyenesre x hosszúságú szakaszt, így az a-n A, a b-n B és a c-n C pontot kapunk. Az A, B és C pontok háromszöget alkotnak az egyenesek helyzete miatt. Az $ABC\triangle$ körülírt köre k. M rajta van az AB, illetve a BC szakaszok felezőmerőleges síkján, ezért M merőleges vetülete ABC síkra a k kör K középpontja. A kúp forgástengelye az MK egyenes, csúcsa M. Négy forgáskúpot találunk a három egyeneshez.

2027.



2027. $a^2 = m^2 + r^2 \Rightarrow m^2 = a^2 - r^2$.

a) $\underline{\underline{m = 8\,\text{cm}}}$; *b)* $m \approx \underline{\underline{93{,}05\,\text{cm}}}$; *c)* $m \approx \underline{\underline{0{,}088\,\text{m}}}$.

2028. *a)* $a \approx \underline{5{,}24\text{ cm}}$; *b)* $a \approx \underline{25{,}09\text{ dm}}$; *c)* $a \approx \underline{142{,}9\text{ cm}}$.

2029. *a)* $r \approx \underline{5{,}36\text{ dm}}$; *b)* $r \approx \underline{3{,}86\text{ cm}}$; *c)* $r \approx \underline{99{,}75\text{ mm}}$.

2030. A 2027. ábra jelöléseivel: *a)* $\frac{r}{a} = \sin\varphi \Rightarrow 2\varphi \approx \underline{56{,}8°}$; *b)* $\frac{m}{a} = \cos\varphi \Rightarrow 2\varphi \approx \underline{89°}$; *c)* $\frac{r}{m} = \operatorname{tg}\varphi \Rightarrow 2\varphi \approx \underline{79{,}7°}$.

2031. A 2027. ábra jelöléseivel: $\frac{2r\pi}{2a\pi} = \frac{\varepsilon}{360°} \Rightarrow \varepsilon = \frac{r}{a}\cdot 360°$. *a)* $\varepsilon = \underline{225°}$; *b)* $a^2 = m^2 + r^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow r \approx 8{,}46\text{ cm} \Rightarrow \varepsilon \approx \underline{242{,}5°}$.

2032. $CT = CK\cdot\sin\varphi = \underline{5\sqrt{3}\,\text{cm}}$ ($\approx 8{,}66$ cm) a magasság. $KT = CK\cdot\cos\varphi = 5\text{ cm} = KB \Rightarrow$ $\Rightarrow T \equiv B \Rightarrow CB = \underline{5\sqrt{3}\,\text{cm}}$ a legrövidebb alkotó. $ABC\triangle$-ben $CB = \underline{5\sqrt{3}\,\text{cm}}$, $AB = 10$ cm és $ABC\sphericalangle = 90° \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC = \underline{5\sqrt{7}\,\text{cm}}$ ($\approx 13{,}23$ cm) a leghosszabb alkotó.

2033. Tekintsük a 2032. ábrát. Legyen $KT = x. \Rightarrow AT = R + x$ és $BT = |R - x|$. (1) $k^2 = m^2 + x^2$; (2) $a_1^2 = m^2 + |R - x|^2$; (3) $a_2^2 = m^2 + (R + x)^2$; (2) és (3) $\Rightarrow a_2^2 - a_1^2 = 4Rx$, valamint (2) és (1) $\Rightarrow R^2 = 2Rx + a_1^2 - k^2 \Rightarrow R \approx \underline{17{,}7\text{ cm}}$ mindkét esetben.

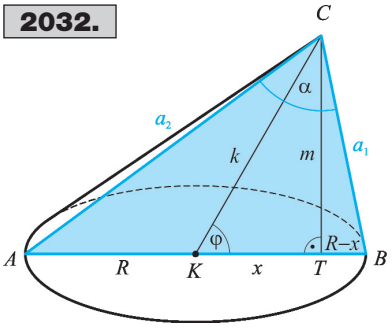
2034. A 2032. ábra jelöléseivel: legyen $KT = x. \Rightarrow AT = R + x$ és $BT = |R - x|$. (1) $a_1^2 = m^2 +$ $+ |x - R|^2$; (2) $k^2 = m^2 + x^2$; (3) $a_2^2 = m^2 + (R + x)^2$; (1) és (3) $\Rightarrow a_2^2 - a_1^2 = 4Rx \Rightarrow x \approx 45{,}8$ cm $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ **1. esetben** $BT = R - x < 0 \Rightarrow$ nincs ilyen test. **2. esetben** $BT = x - R \approx 14{,}1$ cm $\Rightarrow m \approx 50{,}67$ cm $\Rightarrow$ $\Rightarrow k \approx \underline{68{,}3\text{ cm}}$.

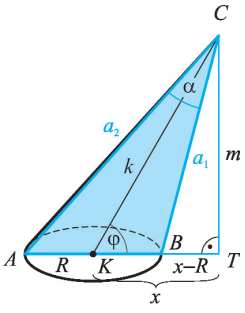
2035. A metszet is kör, hasonló az alapkörhöz. A hasonlóság aránya $\frac{m_1}{m}. \Rightarrow \frac{t_1}{t} = \left(\frac{m_1}{m}\right)^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow t_1 = \left(\frac{m_1}{m}\right)^2 \cdot t$. *a)* $t_1 = \underline{\frac{1}{4}r^2\pi}$; *b)* $t_1 = \underline{\frac{1}{16}r^2\pi}$; *c)* $t_1 = \underline{\left(\frac{m}{m+n}\right)^2 \cdot r^2\pi}$.

2036. *a)* $A = 388{,}7\pi \approx \underline{1221{,}1\text{ cm}^2}$; *b)* $A = 216\pi \approx \underline{678{,}6\text{ dm}^2}$; *c)* $A \approx 9878{,}8\pi \approx \underline{31\,035\text{ mm}^2}$.

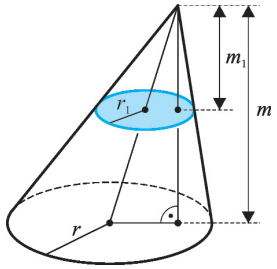
2037. A 2027. ábra jelöléseit használjuk. $A = r(r + a)\cdot\pi$; $t = r\cdot m \Rightarrow m = \frac{t}{r}$; $a^2 = r^2 + m^2 =$ $= r^2 + \frac{t^2}{r^2} \Rightarrow \underline{(ar)^2} = r^4 + t^2$, valamint $\frac{A}{\pi} = r^2 + ar \Rightarrow \underline{ar} = \frac{A}{\pi} - r^2$. Az aláhúzottakból követke-

2032.



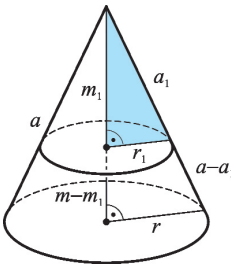


2035.



II

2044.



zik, hogy $\left(\frac{A}{\pi}-r^2\right)^2 = r^4+t^2 \Rightarrow r^2 = \frac{\pi}{2A}\cdot\left(\frac{A^2}{\pi^2}-t^2\right) \Rightarrow r \approx \underline{\underline{12{,}88\text{ cm}}} \Rightarrow$
$\Rightarrow m \approx \underline{\underline{15{,}8\text{ cm}}}$ és $a \approx \underline{\underline{20{,}38\text{ cm}}}$.

2038. $r = \underline{\underline{5\text{ cm}}}$; $m = \underline{\underline{5\sqrt{3}\text{ cm}}}$; $2\varphi = \underline{\underline{60°}}$.

2039. $m = \underline{\underline{\sqrt{15r}}}$.

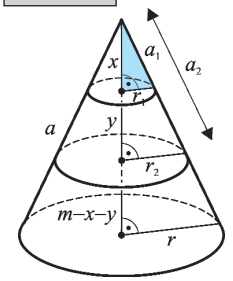
2040. $\varepsilon \approx \underline{\underline{145{,}36°}}$; $t_p \approx \underline{\underline{412{,}36\text{ cm}^2}}$.

2041. $t = \underline{\underline{12{,}5\text{ cm}^2}}$.

2042. $m \approx \underline{\underline{33{,}55\text{ cm}}}$.

2043. $m \approx \underline{\underline{2{,}04\text{ m}}}$.

2045.



2044. Hasonlóság miatt: $\frac{r_1}{r} = \frac{a_1}{a} = \frac{m_1}{m} = \lambda$. $t_p = ra\pi \Rightarrow r_1\cdot a_1\cdot\pi =$
$= \frac{1}{2}\cdot ra\pi$, azaz $\lambda r\cdot\lambda a = \frac{1}{2}ra \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot m \Rightarrow m_1 =$
$= \underline{\underline{23\sqrt{2}\text{ cm}}}$ ($\approx 32{,}53$ cm).

2045. Hasonlóság miatt: $\frac{r_1}{r} = \frac{a_1}{a} = \frac{x}{m} = \lambda_1$. $r_1\cdot a_1\cdot\pi = \frac{1}{3}\cdot ra\pi$,
azaz $\lambda_1 r\cdot\lambda_1 a = \frac{1}{3}ra \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot m \Rightarrow x = \underline{\underline{11\sqrt{3}\text{ cm}}}$
($\approx 19{,}05$ cm). $\frac{r_2}{r} = \frac{a_2}{a} = \frac{x+y}{m} = \lambda_2$. $r_2\cdot a_2\cdot\pi = \frac{2}{3}\cdot ra\pi$, azaz $\lambda_2 r\cdot\lambda_2 a = \frac{2}{3}ra \Rightarrow \lambda_2 = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow x+y = \frac{\sqrt{6}}{3}\cdot m \Rightarrow x+y = \underline{\underline{11\sqrt{6}\text{ cm}}}$ ($\approx 26{,}94$ cm).

2046. Tekintsük a 2044. ábrát. $\frac{t_1}{t_p - t_1} = \frac{a}{b} \Rightarrow t_1 = \frac{a}{a+b}\cdot t_p$. Hasonlóság miatt: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a_1}{a_2} =$
$= \frac{m_1}{m} = \lambda$. $r_1\cdot a_1\cdot\pi = \frac{a}{a+b}\cdot r_2\cdot a_2\cdot\pi$, azaz $\lambda^2\cdot r_2\cdot a_2 = \frac{a}{a+b}\cdot r_2 a_2 \Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{a}{a+b}} \Rightarrow m_1 = \lambda m =$
$= \underline{\underline{\sqrt{\frac{a}{a+b}}\cdot m}}$.

2047. A 2044. ábrát vizsgáljuk. Legyen $a_1 = a_i$; $r_1 = r_i$; $m_1 = m_i$. Hasonlóság miatt:
$\frac{r_i}{r} = \frac{a_i}{a} = \frac{m_i}{m} = \lambda_i$ ($i = 1; 2; \ldots; n-1$). $r_i\cdot a_i\cdot\pi = \frac{i}{n}\cdot ra\pi$, azaz $\lambda_i r\cdot\lambda_i a = \frac{i}{n}ra \Rightarrow \lambda_i = \sqrt{\frac{i}{n}} \Rightarrow$
$\Rightarrow m_i = \lambda_i\cdot m \Rightarrow m_i = \underline{\underline{\sqrt{\frac{i}{n}}\cdot m}}$.

2048. *a)* $A \approx \underline{\underline{15{,}39\text{ cm}^2}}$ és $V \approx \underline{\underline{0{,}637\text{ cm}^3}}$; *b)* $A \approx \underline{\underline{76{,}94\text{ dm}^2}}$ és $V \approx \underline{\underline{36{,}88\text{ dm}^3}}$;
c) $A \approx \underline{\underline{31\,855{,}7\text{ cm}^2}}$ és $V \approx \underline{\underline{343\,062\text{ cm}^3}}$; *d)* $A \approx \underline{\underline{365\text{ cm}^2}}$ és $V \approx \underline{\underline{447\text{ cm}^3}}$.

2049. $\underline{\underline{\frac{A_1}{A_2} = 4}}$ és $\underline{\underline{\frac{V_1}{V_2} = 8}}$.

II

2050. $A \approx \underline{\underline{10\,310{,}3\ \text{cm}^2}}$ és $V \approx \underline{\underline{67\,871{,}3\ \text{cm}^3}}$.

2051. $A \approx \underline{\underline{1{,}54\ \text{m}^2}}$ és $V \approx \underline{\underline{0{,}36\ \text{m}^3}}$.

2052. $a \approx \underline{\underline{0{,}652\ \text{m}}}$.

2053. $a \approx \underline{\underline{1{,}64\ \text{m}}}$.

2054. $m^2 = a^2 - r^2 = 8r^2 \Rightarrow m = 2\sqrt{2}\cdot r$. $\qquad V = \frac{1}{3}\cdot r^2\pi \cdot 2\sqrt{2}\cdot r = \frac{2\sqrt{2}}{3}r^3\pi \Rightarrow r = 4{,}37\ \text{cm}$.

$A = r\cdot 4r\cdot \pi = 4r^2\pi \Rightarrow A \approx \underline{\underline{240\ \text{cm}^2}}$.

2055. A tengelymetszet területe: $m\cdot r = 1{,}56\ \text{m}^2$; $a^2 = m^2 + r^2 \Rightarrow a^2 + 2mr = (m+r)^2$ és $a^2 - 2mr = (m-r)^2 \Rightarrow$ **1. eset:** $m + r = 2{,}744$ és $m - r = 1{,}136 \Rightarrow m = 1{,}94$ és $r = 0{,}804 \Rightarrow$ $\Rightarrow V \approx \underline{\underline{1{,}31\ \text{m}^3}}$. **2. eset:** $m + r = 2{,}744$ és $m - r = -1{,}136 \Rightarrow m = 0{,}804$ és $r = 1{,}94 \Rightarrow V \approx \underline{\underline{3{,}17\ \text{m}^3}}$.

2056. $V \approx \underline{\underline{449{,}3\ \text{cm}^3}}$.

2057. $A \approx \underline{\underline{23\,360{,}1\ \text{cm}^2}}$ és $V \approx \underline{\underline{237\,203\ \text{cm}^3}}$.

2058. $A = \underline{\underline{\frac{3a^2\pi}{4}}}$ és $V = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}a^3\pi}{24}}}$.

2059. Tekintsük a 2027. ábrát. $\varepsilon = 240°$. $\frac{2}{3}\cdot 2a\pi = 2r\pi \Rightarrow r = \frac{2}{3}a = 8\ \text{cm} \Rightarrow m = 4\sqrt{5}\ \text{cm}. \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{256\sqrt{5}\cdot\pi}{3} \approx \underline{\underline{599{,}4\ \text{cm}^3}}$.

2060. $V \approx \underline{\underline{391{,}8\ \text{cm}^3}}$.

2061. $A \approx \underline{\underline{1973{,}1\ \text{cm}^2}}$ és $V \approx \underline{\underline{5723{,}34\ \text{cm}^3}}$.

2062. $V \approx \underline{\underline{3{,}56\ \text{m}^3}}$.

2063. $A \approx \underline{\underline{15{,}46\ \text{m}^2}}$.

2064. Tekintsük a 2044. ábrát. Hasonlóság miatt: $\frac{V_1}{V} = \lambda^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, valamint

$\frac{r_1}{r} = \frac{a_1}{a} = \frac{m_1}{m} = \lambda. \Rightarrow r_1 = \lambda r = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\cdot 12{,}7 \approx \underline{\underline{10{,}08\ \text{cm}}}$ és $m_1 = \lambda m = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\cdot 42{,}6 \approx \underline{\underline{33{,}81\ \text{cm}}}$.

2065. Tekintsük a 2044. ábrát. Hasonlóság miatt: $\frac{r_1}{r} = \frac{a_1}{a} = \frac{m_1}{m} = \lambda$ és $\frac{V_1}{V} = \lambda^3$. Mivel

$\frac{V_1}{V} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Rightarrow m_1 = \underline{\underline{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\cdot m}}$.

2066. A 2044. ábra jelöléseit használva a hasonlóság miatt: $\frac{r_1}{r} = \frac{a_1}{a} = \frac{m_1}{m} = \lambda$ és $\frac{V_1}{V} = \lambda^3$.

$V = \frac{1}{3}r^2\pi m \approx 26\,575{,}59\ \text{dm}^3$ és $V - V_1 = 7972{,}8\ \text{dm}^3 \Rightarrow V_1 \approx 18\,602{,}8\ \text{dm}^3 \Rightarrow \lambda \approx 0{,}88 \Rightarrow m_1 = \lambda m \approx$

$\approx \underline{\underline{47{,}41\ \text{dm}}}$.

II

2067. Tekintsük a 2027. ábrát. $a =$ állandó; $r = a \cdot \sin\varphi$; $m = a \cdot \cos\varphi$. Alkalmazzuk az $abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ középértékekre vonatkozó egyenlőtlenséget! $V = \frac{1}{3} r^2\pi m =$

$= \frac{\pi}{3} a^2 \cdot \sin^2\varphi \cdot a \cdot \cos\varphi = \frac{\pi}{3} a^3(1-\cos^2\varphi)\cdot\cos\varphi \Rightarrow V^2 = \frac{a^6\pi^2}{9} \cdot (1-\cos^2\varphi)\cdot(1-\cos^2\varphi)\cdot\cos^2\varphi =$

$= \frac{a^6\pi^2}{18} \cdot (1-\cos^2\cdot\varphi)(1-\cos^2\cdot\varphi)\cdot 2\cos^2\cdot\varphi\cdot \le \frac{a^6\pi^2}{18} \cdot \left(\frac{1-\cos^2\varphi+1-\cos^2\varphi+2\cos^2\varphi}{3}\right)^3 =$

$= \frac{a^6\pi^2}{18}\cdot\frac{8}{27} = \frac{4\pi^2a^6}{243}$. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $1-\cos^2\varphi = 2\cos^2\varphi$, azaz $|\cos\varphi| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Mivel φ a kúp nyílásszögének fele, ezért koszinusza nem lehet negatív, vagyis $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi \approx 54{,}74°$. $\Rightarrow$ A $2\varphi \approx 109{,}47°$ nyílásszögű kúp térfogata maximális az egyenlő alkotójú kúpok közül. Ekkor $V_{max.} = \sqrt{\frac{4\pi^2a^6}{243}} = \frac{2a^3\pi\sqrt{3}}{27}$.

2068. A 2027. ábra jelöléseivel: $m^2 = a^2 - r^2$; $A = r(r+a)\pi \Rightarrow a = \frac{A}{r\pi} - r$. $V = \frac{1}{3} r^2\pi m =$

$= \frac{1}{3} r^2\pi\sqrt{a^2-r^2} = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot \sqrt{\left(\frac{A}{r\pi}-r\right)^2 - r^2} = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot \frac{1}{r\pi}\cdot\sqrt{A^2-2Ar^2\pi} = \frac{r}{3}\cdot\sqrt{A^2-2Ar^2\pi} \Rightarrow$

$\Rightarrow V^2 = \frac{r^2}{9}\cdot(A^2-2Ar^2\pi) \Rightarrow 9V^2 = r^2A^2 - 2Ar^4\pi = -2A\pi\cdot\left(r^4 - \frac{r^2A}{2\pi}\right) =$

$= -2A\pi\cdot\left[\left(r^2-\frac{A}{4\pi}\right)^2 - \frac{A^2}{16\pi^2}\right]$. A másodfokú kifejezést a geometriai adatokkal összevetve akkor van maximum, amikor $r^2 = \frac{A}{4\pi} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{A\pi}}{2\pi}$. Ekkor $a = \frac{A}{r\pi} - r = \frac{A}{\frac{\sqrt{A\pi}}{2\pi}\cdot\pi} - \frac{\sqrt{A\pi}}{2\pi} =$

$= \frac{2A}{\sqrt{A\pi}} - \frac{\sqrt{A\pi}}{2\pi} = \frac{4\sqrt{A\pi}-\sqrt{A\pi}}{2\pi} = \frac{3\sqrt{A\pi}}{2\pi} = 3r$, vagyis akkor maximális a térfogat, ha az alkotó az alapkör sugarának háromszorosa.

2069. A 2068. feladatban láttuk, hogy az A felszínű kúpok közül annak maximális a térfogata, amelyre $r = \frac{\sqrt{A\pi}}{2\pi}$ és $a = 3r$. $\Rightarrow m = \sqrt{a^2-r^2} = 2r\cdot\sqrt{2}$. $V_{max.} = \frac{1}{3} r^2\pi m = \frac{1}{3} r^2\pi\cdot 2r\cdot\sqrt{2} =$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3} r^3\pi = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{\frac{A^3}{64\pi^3}}\cdot\pi = \sqrt{\frac{A^3}{72\pi}}$. $V \le V_{max.} \Rightarrow V \le \sqrt{\frac{A^3}{72\pi}} \Rightarrow 72\pi V^2 \le A^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[3]{72\pi V^2} \le A \Rightarrow A_{min.} = \sqrt[3]{72\pi V^2}$, azaz a minimális felszínhez tartozó térfogat pont $V_{max.}$, tehát $\underline{\underline{a = 3r}}$.

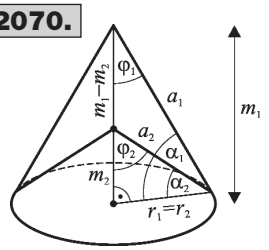
2070. $a = \dfrac{r}{\cos\alpha}$ és $m = r \cdot \operatorname{tg}\alpha$. $A = t_{p_1} + t_{p_2} = r_1 a_1 \pi + r_2 a_2 \pi =$

$= r\pi(a_1 + a_2) = r\pi \cdot \left(\dfrac{r}{\cos\alpha_1} + \dfrac{r}{\cos\alpha_2}\right) = r^2\pi \cdot \left(\dfrac{1}{\cos\alpha_1} + \dfrac{1}{\cos\alpha_2}\right) \approx$

$\approx \underline{\underline{492{,}7\ \text{cm}^2}}$. $V = V_1 - V_2 = \dfrac{1}{3} r_1^2 \pi m_1 - \dfrac{1}{3} r_2^2 \pi m_2 = \dfrac{1}{3} r^2\pi(m_1 - m_2) =$

$= \dfrac{1}{3} r^2\pi(r \cdot \operatorname{tg}\alpha_1 - r \cdot \operatorname{tg}\alpha_2) = \dfrac{1}{3} r^3\pi(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2) \approx \underline{\underline{600\ \text{cm}^3}}$.

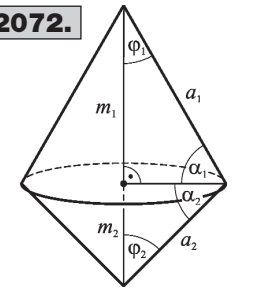
2070.



2071. Mivel a kúpok szimmetriatengelye közös, a térfogat nem függ a kisebb kúp nagyobb kúpon belüli helyzetétől. Hasonlóság miatt: $\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{m_2}{m_1} \Rightarrow m_2 = 14{,}4$ cm. $V = V_1 - V_2 = \dfrac{1}{3} r_1^2 \pi m_1 -$

$- \dfrac{1}{3} r_2^2 \pi m_2 = \dfrac{1}{3} \pi(r_1^2 m_1 - r_2^2 m_2) \approx \underline{\underline{919{,}8\ \text{cm}^3}}$.

2072.



2072. $\varphi_2 = 45° \Rightarrow m_2 = r$ és $\varphi_1 = 30° \Rightarrow m_1 = r \cdot \sqrt{3}$.

1. eset: A 2070. ábrának megfelelően $3{,}2 = m_1 - m_2 = r\left(\sqrt{3} - 1\right) \Rightarrow$

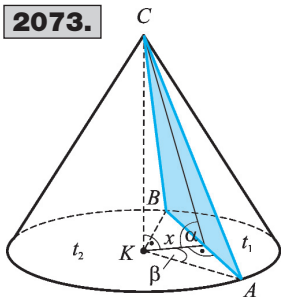
$\Rightarrow r \approx 4{,}37$ dm. $V = V_1 - V_2 = \dfrac{1}{3} r^2\pi m_1 - \dfrac{1}{3} r^2\pi m_2 =$

$= \dfrac{1}{3} r^2\pi(m_1 - m_2) \approx \underline{\underline{64{,}03\ \text{dm}^3}}$.

2. eset: $3{,}2 = m_1 + m_2 = r\left(\sqrt{3} + 1\right) \Rightarrow r \approx 1{,}17$ dm. $V = V_1 + V_2 =$

$= \dfrac{1}{3} r^2\pi(m_1 + m_2) \approx \underline{\underline{4{,}59\ \text{dm}^3}}$.

2073.



2073. $t_{\text{alap}} = r^2\pi \approx 201{,}06\ \text{cm}^2$. $\dfrac{m}{x} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow x = \dfrac{m}{\operatorname{tg}\alpha} \approx 2{,}98$ cm.

$\dfrac{x}{r} = \cos\beta \Rightarrow \beta \approx 68{,}16° \Rightarrow t_1 = r^2\pi \cdot \dfrac{2\beta}{360°} - \dfrac{1}{2} r^2 \cdot \sin 2\beta \approx 54\ \text{cm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_2 = t - t_1 \approx 147{,}06\ \text{cm}^2$. $V_1 = \dfrac{1}{3} t_1 m \approx \underline{\underline{252\ \text{cm}^3}}$ és $V_2 = \dfrac{1}{3} t_2 m \approx \underline{\underline{686{,}28\ \text{cm}^3}}$.

2074. $t_{ABC\triangle} = \sqrt{s(s-2r)(s-a_1)(s-a_2)} = \dfrac{1}{2} \cdot 2rm = rm$, ahol $s = \dfrac{2r + a_1 + a_2}{2} \Rightarrow m \approx 25{,}97$ cm;

$V = \dfrac{1}{3} r^2\pi m \approx \underline{\underline{2719{,}3\ \text{cm}^3}}$.

2075. A 2032. ábrának megfelelően, az alapkör sugarát r-rel jelölve: $\alpha = 45°$; $a_1 + a_2 = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_2 = 8 - a_1$; $t_{ABC\triangle} = \dfrac{15\sqrt{2}}{4}$. $t_{ABC\triangle} = \dfrac{1}{2} a_1 a_2 \cdot \sin\alpha = \dfrac{1}{2} a_1(8 - a_1) \cdot \sin\alpha \Rightarrow a_1 = 3$ dm és $a_2 =$

$= 5$ dm. Koszinusztétel $ABC\triangle$-re: $(2r)^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cdot \cos\alpha \Rightarrow r^2 = 3{,}20 \Rightarrow r \approx 1{,}79$ dm. $t_{ABC\triangle} =$

$= rm \Rightarrow m \approx 2{,}96$ dm; $V = \dfrac{1}{3} r^2\pi m \approx \underline{\underline{9{,}92\ \text{dm}^3}}$.

2076. A 2032. ábra szerint (az alapkör sugarát r-rel jelölve): $a_1 = 32$ cm; $a_2 = 58$ cm;

$\varepsilon = CBA\sphericalangle = 65°15'$. $m = a_1 \cdot \sin\varepsilon \approx 29{,}06$ cm. Koszinusztétel $ABC\triangle$-re: $a_2^2 = a_1^2 + (2r)^2 -$

$- 2a_1 2r \cdot \cos\varepsilon \Rightarrow r \approx 31{,}79\ \text{cm} \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} r^2\pi m \approx \underline{\underline{30\,754{,}3\ \text{cm}^3}}$.

II

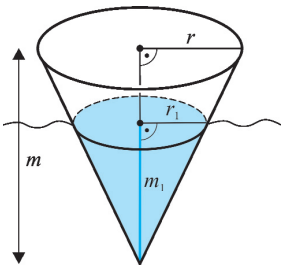
2077. Tekintsük a 2027. ábrát. $t_p = k \cdot t_a$, azaz $ra\pi = k \cdot r^2\pi \Rightarrow a = kr$. $\frac{\varepsilon}{360°} = \frac{2r\pi}{2ra} = \frac{r}{a} = \frac{1}{k} \Rightarrow \varepsilon = \frac{360°}{k}$.

2078. A 2027. ábra jelöléseivel: $\varepsilon = 36°$. $\frac{\varepsilon}{360°} = \frac{t}{a^2\pi} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{10t}{\pi}} \Rightarrow t = ar\pi = \sqrt{\frac{10t}{\pi}} \cdot r\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow r = \frac{t}{\sqrt{10t\pi}}$. $m^2 = a^2 - r^2 = \frac{10t}{\pi} - \frac{t^2}{10t\pi} = \frac{99t}{10\pi} \Rightarrow m = \sqrt{\frac{99t}{10\pi}}$. $V = \frac{1}{3} r^2\pi m =$
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^2}{10t\pi} \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{99t}{10\pi}} = \frac{t\sqrt{11t}}{10\sqrt{10\pi}}$.

2079. A homokkúp $5{,}76\,\text{m}$ széles és $1{,}73\,\text{m}$ magas.

2080. A 2044. ábra jelöléseivel: $2r_1\pi = 25{,}12 \Rightarrow r_1 \approx 4\text{m} = 40\text{ dm}$; $m_1^2 = a_1^2 - r_1^2 \Rightarrow m_1 \approx 30\text{ dm}$.
A kiálló rész és az egész tömb hasonló. A hasonlóság aránya $\lambda = \frac{m_1}{m} = \frac{r_1}{r} = \frac{a_1}{a}$ és $\frac{V_1}{V} = \lambda^3$.
$(V - V_1) \cdot \varrho_{\text{víz}} = V \cdot \varrho_{\text{jég}}$. Ezért $(V - \lambda^3 V) \cdot \varrho_{\text{víz}} = V \cdot \varrho_{\text{jég}} \Rightarrow 1 - \lambda^3 = 0{,}9 \Rightarrow \lambda^3 = 0{,}1$. $V = \frac{V_1}{\lambda^3} =$
$= \frac{\frac{1}{3} r_1^2\pi m_1}{\lambda^3} = \frac{1600\pi \cdot 30}{3 \cdot 0{,}1} = 160\,000\pi$. A jégtömb tömege: $V \cdot \varrho_{\text{jég}} =$
$= 160\,000\pi \cdot 0{,}9 \approx 452\,389\text{ kg}$.

2081.



2081. Hasonlóság miatt: $\frac{r_1}{r} = \frac{m_1}{m} \Rightarrow r_1 = \frac{m_1}{m} \cdot r$. $\frac{1}{3} r^2\pi m\varrho =$
$= \frac{1}{3} r_1^2\pi m_1 \varrho_{\text{víz}} \Rightarrow r^2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}73 = r_1^2 \cdot m_1 \cdot 1 \Rightarrow r^2 \cdot 0{,}1825 =$
$= \frac{m_1^2}{m^2} \cdot r^2 \cdot m_1 \Rightarrow m_1^3 = 0{,}1825\text{ m}^2 \Rightarrow m_1 \approx 0{,}225\text{ dm}$. $2{,}25\,\text{cm}$-re merül a víz alá.

Csonkakúp

2082. $a \approx 11{,}9\,\text{cm}$ és $\alpha \approx 40{,}9°$.

2083. $m \approx 0{,}67\,\text{cm}$ és $\alpha \approx 16{,}96°$.

2084. $r \approx 11{,}91\,\text{cm}$ és $\alpha \approx 44{,}5°$.

2085. $m = 20{,}7\,\text{cm}$ és $a \approx 29{,}27\,\text{m}$.

2086. *a)* $A = 2027{,}08\,\text{cm}^2$; *b)* $A \approx 127\,372\text{ mm}^2 \approx 1273{,}7\,\text{cm}^2$.

2087. $t_p \approx 2803{,}9\,\text{cm}^2$.

2088. $628{,}17 = [(r+6)^2 + r^2 + (2r+6) \cdot 12{,}6] \cdot \pi \Rightarrow r = 2{,}125\,\text{cm}$ és $R = 8{,}125\,\text{cm}$.

2089. $t_p = 4r \cdot a \cdot \pi$; $\frac{R-r}{a} = \cos\alpha \Rightarrow a = \frac{R-r}{\cos\alpha} = \frac{2r}{\cos\alpha} \Rightarrow$

$t_p = 4r \cdot \frac{2r}{\cos\alpha} \cdot \pi = \frac{8r^2\pi}{\cos\alpha} \Rightarrow r^2 = \frac{t_p \cdot \cos\alpha}{8\pi} \Rightarrow r^2 \approx 20{,}3\ \text{cm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r \approx \underline{4{,}505\ \text{cm}} \Rightarrow R \approx \underline{13{,}515\ \text{cm}}$.

2090. $R^2\pi = 25 \Rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$ és $r^2\pi = 17 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{\pi}}$. $t_p = (R+r) \cdot a \cdot \pi =$

$= \frac{\sqrt{17}+5}{\sqrt{\pi}} \cdot 12 \cdot \pi = \left(\sqrt{17}+5\right) \cdot 12\sqrt{\pi} \approx \underline{194\ \text{cm}^2}$.

2091. $m \approx \underline{4{,}96\ \text{cm}}$.

2092. $m \approx \underline{1{,}33\ \text{dm}}$.

2093. $t_{p_1} = t_{p_2} = 0{,}5\,t_p$, azaz $(r+\varrho) \cdot a_1 \cdot \pi = (\varrho+R) \cdot a_2 \cdot \pi = 0{,}5 \cdot (r+R) \cdot a \cdot \pi \Rightarrow (r+\varrho) \cdot a_1 =$

$= 0{,}5 \cdot (r+R) \cdot a$, valamint $(\varrho+R) \cdot (a-a_1) = 0{,}5 \cdot (r+R) \cdot a \Rightarrow a_1 \approx 10{,}47\ \text{cm}$ és $\varrho \approx \underline{14{,}3\ \text{cm}}$.

$m_1^2 = a_1^2 - (\varrho - \text{r})^2 \Rightarrow m_1 \approx \underline{10{,}14\ \text{cm}}$.

2094. *a)* $V \approx \underline{439{,}7\ \text{cm}^3}$; *b)* $V \approx \underline{0{,}019\ \text{cm}^3}$; *c)* $V \approx \underline{4460{,}5\ \text{cm}^3}$; *d)* $V \approx \underline{113{,}89\ \text{cm}^3}$.

2095. A vízgyűjtőbe körülbelül $\underline{490{,}61}$ víz fér.

2096. $V \approx \underline{2075{,}5\ \text{cm}^3}$.

2097. $2R\pi = 50 \Rightarrow R \approx 7{,}96$ és $2r\pi = 30 \Rightarrow r \approx 4{,}77$. $V = \frac{1}{3}(R^2 + r^2 + Rr) \cdot m \cdot \pi \Rightarrow m \approx 2{,}67$

és $\frac{m}{R-r} = \text{tg}\,\alpha \Rightarrow \alpha \approx \underline{39{,}9°}$.

2098. $2021{,}6 = \frac{1}{3} \cdot (5{,}7^2 + r^2 + 5{,}7r) \cdot 32{,}5\pi \Rightarrow r^2 + 5{,}7r - 26{,}91 = 0$. $r = \underline{3{,}05\ \text{dm}}$.

2099. $V_k = 0{,}5V_h$, azaz $\frac{1}{3} \cdot (R^2 + r^2 + Rr) \cdot m \cdot \pi = 0{,}5 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot m \Rightarrow R^2 - 2Rr - 2r^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow R_1 = r \cdot \left(1 - \sqrt{3}\right) < 0$, ez nem lehet. $R_2 = r \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right) \Rightarrow \frac{R}{r} = \underline{1 + \sqrt{3}}$.

2100. Maximális teher: $t = 36 \cdot V \cdot \varrho_{\text{víz}} - 36 \cdot V \cdot \varrho = 36 \cdot V \cdot (\varrho_{\text{víz}} - \varrho)$, ahol

$V = \frac{1}{3}(1{,}4^2 + 1^2 + 1{,}4 \cdot 1) \cdot 120 \cdot \pi \approx 547{,}9\ \text{dm}^3 \Rightarrow t = 36 \cdot 547{,}9 \cdot (1 - 0{,}6) \approx \underline{7889{,}76\ \text{kg}}$.

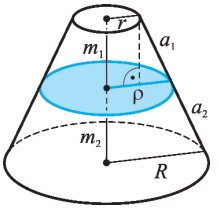
2101. A folyadék tömege $\underline{35{,}26\ \text{kg}}$.

2102. $p = 2r \Rightarrow m = \sqrt{3}\,r$; $r^2\pi = 3 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$; $R^2\pi = 12 \Rightarrow R = 2\sqrt{\frac{3}{\pi}}$.

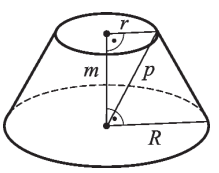
$V = \frac{1}{3} \cdot \left(12 + 3 + 2\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{3}{\pi}}\,\pi\right)\sqrt{3}\sqrt{\frac{3}{\pi}} = (15+6) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{21}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow$

$\Rightarrow V \approx \underline{11{,}85\ \text{m}^3}$.

2103. $5V \approx \underline{157{,}16\ \text{m}^3}$.



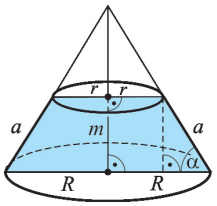
2093.



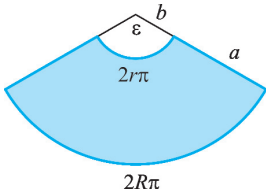
2102.

II

2104.



2109.



2104. $a = 2r$; $k_{\text{trapéz}} = 2r + 2a + 2R = 6r + 2R = 15 \Rightarrow R = 7{,}5 - 3r$. $a^2 = m^2 + (R-r)^2$, azaz $4r^2 = 9 + (R-r)^2 \Rightarrow 4r^2 = 9 + (7{,}5 - 4r)^2 \Rightarrow 0 = r^2 - 5r + 5{,}4375 \Rightarrow r_1 = 3{,}4 \Rightarrow R = -2{,}7$ (ez nem lehet). $r_2 = 1{,}6 \Rightarrow R = 2{,}7$. $A \approx \underline{\underline{74{,}14\ \text{m}^2}}$ és $V \approx \underline{\underline{44{,}52\ \text{m}^3}}$.

2105. A testet a fejtetőre állított 2104. ábrán szemléltetjük. $V \approx 35\,137{,}7\ \text{cm}^3 \approx 35{,}14\ \text{dm}^3$; $a^2 = m^2 + (R-r)^2 \Rightarrow a \approx 38{,}8\ \text{cm}$. A vödör teteje nyitott, ezért $A = \left(r^2 + (R+r)\,a\right) \cdot \pi \Rightarrow$ $\Rightarrow A \approx 4675{,}3\ \text{cm}^2$. A hulladékot is számítva: $A' = 1{,}06 \cdot A \approx 4955{,}8\ \text{cm}^2 \approx 50\ \text{dm}^2$. A vödör elkészítéséhez $\underline{\underline{50\ \text{dm}^2}}$ bádog kell és kb. $\underline{\underline{35}}$ l víz fér bele.

2106. Tekintsük a 2104. ábrát. $\dfrac{R-r}{a} = \cos\alpha \Rightarrow a = \dfrac{R-r}{\cos\alpha} \approx 65\ \text{cm}$; $m = a \cdot \sin\alpha \approx 56\ \text{cm}$. $128{,}64\ \text{dm}^2 = 12\,864\ \text{cm}^2 = (r+R)\,a\pi \Rightarrow r + R = 63\ \text{cm}$ és $R - r = 33\ \text{cm} \Rightarrow R = 48\ \text{cm}$ és $r = 15\ \text{cm}. \Rightarrow V \approx \underline{\underline{190\,531\ \text{cm}^3}}$.

2107. (1) $(R^2 + r^2 + (R+r)\,a) \cdot \pi = 527{,}5\ \text{dm}^2$; (2) $(r+R)a\pi = 314{,}2\ \text{dm}^2$; (3) $a = 10{,}3\ \text{dm}$; (1) és (2) egyenletekből: $R^2 + r^2 \approx 67{,}9$; valamint (2) és (3) egyenletekből: $R + r \approx 9{,}71 \Rightarrow r \approx$ $\approx 1{,}6325\ \text{dm}$ és $R \approx 8{,}0775\ \text{dm}$. $m^2 = a^2 - (R-r)^2 \Rightarrow m \approx 8{,}03\ \text{dm}. \Rightarrow V \approx \underline{\underline{682\ \text{dm}^3}}$.

2108. $a^2 = m^2 + (R-r)^2 \Rightarrow R - r \approx 7{,}38$, valamint $t_p = (R+r)a\pi \Rightarrow R + r \approx 16{,}5$. $R \approx 11{,}94\ \text{dm}$ és $r \approx 4{,}56\ \text{dm} \Rightarrow V \approx \underline{\underline{1436{,}93\ \text{dm}^3}}$.

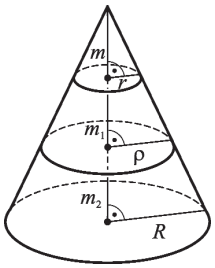
2109. $\varepsilon = 120° \Rightarrow \dfrac{1}{3} \cdot 2b \cdot \pi = 2r\pi \Rightarrow r = \dfrac{1}{3}\,b \approx 0{,}83\ \text{cm}$ és $\dfrac{1}{3} \cdot 2(b+a)\pi = 2R\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \dfrac{1}{3}\,(a+b) = 2\ \text{cm}$; $a = 6\ \text{cm} - 2{,}5\ \text{cm} = 3{,}5\ \text{cm}$; $m^2 = a^2 - (R-r)^2 \Rightarrow m \approx 3{,}3\ \text{cm} \Rightarrow$ $A \approx \underline{\underline{45{,}85\ \text{cm}^2}}$ és $V \approx \underline{\underline{2{,}94\ \text{cm}^3}}$.

2110. A 2109. és a 2104. ábra jelöléseit használva: $b = a$. $\dfrac{\varepsilon}{360°} = \dfrac{2r\pi}{2a\pi} = \dfrac{2R\pi}{4a\pi} \Rightarrow R = 2r$ és $a = r \cdot \dfrac{360°}{\varepsilon}$. $t_p = (R+r) \cdot a \cdot \pi = 3r \cdot r \cdot \dfrac{360°}{\varepsilon} \cdot \pi \Rightarrow r \approx 2{,}68\ \text{cm} \Rightarrow R \approx 5{,}36\ \text{cm}$ és $a \approx 8\ \text{cm}$; $m^2 = a^2 - (R-r)^2 \Rightarrow m \approx 7{,}54\ \text{cm} \Rightarrow V \approx \underline{\underline{396{,}98\ \text{cm}^3}}$.

2111. Tekintsük a 2093. ábrát. $R = 8{,}6\ \text{m}$, $r = 5{,}8\ \text{m}$, $m_1 + m_2 = 7\ \text{m}$, $m_2 = 2\ \text{m}$. $(a_1 + a_2)^2 =$ $= (m_1 + m_2)^2 + (R-r)^2 \Rightarrow a_1 + a_2 \approx 7{,}54\ \text{m}$. Párhuzamos szelők tétele miatt $a_1 : a_2 = m_1 : m_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_1 \approx 5{,}39\ \text{m}$ és $a_2 \approx 2{,}15\ \text{m}$. $a_1^2 = m_1^2 + (\varrho - \text{r})^2 \Rightarrow \varrho \approx 7{,}81\ \text{m}$. $V_1 = \dfrac{1}{3}\,(r^2 + \varrho^2 + r \cdot \varrho) \cdot m_1 \cdot \pi$ és $V_2 = \dfrac{1}{3}\,(\varrho^2 + R^2 + \varrho \cdot R) \cdot m_2 \cdot \pi \Rightarrow V_1 \approx \underline{\underline{732{,}7\ \text{m}^3}}$ és $V_2 \approx \underline{\underline{423{,}3\ \text{m}^3}}$.

2112. Tekintsük a csonkakúp kiegészítő kúpját! A háromszögek hasonlósága miatt: $\frac{m}{m_1+m_2+m}=\frac{r}{R}$, azaz $\frac{m}{m+14}=\frac{6}{8}\Rightarrow m=42$ dm a kiegészítő kúp magassága. A kúpok hasonlósága miatt:



$\left(\frac{r}{\varrho}\right)^3=\frac{V}{V+V_1}$, ahol $V=\frac{1}{3}r^2\pi m\approx 1583{,}36\ \text{dm}^3$ és

$V_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(r^2+R^2+r\cdot R)\cdot(m_1+m_2)\cdot\pi\approx 1084{,}9\ \text{dm}^3\Rightarrow\varrho=1{,}19r_1\approx$

$\approx \underline{\underline{7{,}14\ \text{dm}}}$ a metszetkör sugara. A háromszögek hasonlósága miatt: $\frac{m+m_1}{m}=\frac{\varrho}{r}\Rightarrow m_1\approx 7{,}98$ dm, tehát a fedőkör síkjától mérve $\underline{\underline{7{,}98\ \text{dm}}}$ távolságban kell metszeni a csonkakúpot.

2113. Tekintsük a 2104. ábrát. Legyen $M-m=m_0\Rightarrow M=10$ m, $R=5$ m. $V_{\text{kúp}}=\frac{1}{3}R^2\pi M\approx$

$\approx 261{,}8\ \text{m}^3$ és $V_{\text{csonkakúp}}=20\ \text{m}^3\Rightarrow V_{\text{kis kúp}}=V_{\text{kúp}}-V_{\text{csonkakúp}}\approx 241{,}8\ \text{m}^3$. $V_{\text{kis kúp}}=\frac{1}{3}r^2\pi m_0$, valamint hasonlóság miatt $\frac{m_0}{r}=\frac{M}{R}=2\Rightarrow m_0=2r\Rightarrow V_{\text{kis kúp}}=\frac{1}{3}r^2\pi\cdot 2r=\frac{2}{3}r^3\pi\Rightarrow r\approx 4{,}87$ m $\Rightarrow$

$\Rightarrow m=M-m_0=2R-2r\Rightarrow m\approx \underline{\underline{0{,}26\ \text{méter}}}$ távolságban kell a kúpot metszeni.

2114. Tekintsük a 2112. ábrát. $m_1+m_2=4$ dm, $R=5$ dm, $r=3$ dm, ϱ a vízfelszínnel egy szinten levő kör sugara. $V_t\cdot\varrho_t=V_t'\cdot\varrho_f\Rightarrow V_t'=V_t\cdot\frac{\varrho_t}{\varrho_f}=(9+25+15)\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot 0{,}6\approx 123{,}15\ \text{dm}^3$.

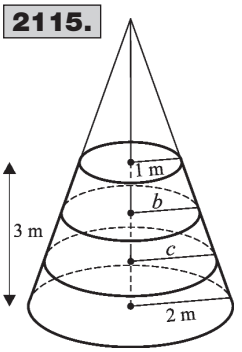
$\frac{m}{m+4}=\frac{3}{5}\Rightarrow 5m=3m+12\Rightarrow m=6$ dm. $V_{\text{kis kúp}}=\frac{1}{3}\cdot 3^2\cdot\pi\cdot 6=18\pi\approx 56{,}54\ \text{dm}^3$ és $V_t-V_t'=$

$=82{,}1\ \text{dm}^3\Rightarrow V_{\text{kis kúp}}+V_t-V_t'=138{,}64\ \text{dm}^3$. Hasonlóság miatt: $6:3=(6+4-m_2):\varrho\Rightarrow 6\varrho=$

$=3(10-m_2)\Rightarrow 10-2\varrho=m_2$. $\quad 138{,}64=\frac{1}{3}\varrho^2\pi\cdot(6+4-m_2)=\frac{1}{3}\varrho^2\pi\cdot 2\varrho=\frac{2}{3}\varrho^3\pi\Rightarrow\varrho\approx$

$\approx 4{,}04\Rightarrow m_2=\underline{\underline{1{,}92\ \text{dm}}}$.

2115. Tekintsük a csonkakúpot a kiegészítő kúpjával együtt. Az egyesített kúpot metsző síkok a kiegészítő kúppal hasonló kúpokat vágnak le. Bármely két hasonló kúp térfogatának aránya egyenlő a hasonlósági arány köbével. A kúpok térfogata a csúcstól lefelé haladva rendre: V_1; V_2; V_3; V_4. $\frac{V_2}{V_1}=\left(\frac{b}{1}\right)^3$ $\frac{V_3}{V_1}=\left(\frac{c}{1}\right)^3$ $\frac{V_4}{V_1}=\left(\frac{2}{1}\right)^3$. A feladat feltétele szerint



a csonkakúpok térfogataránya: $(V_2-V_1):(V_4-V_1)=2:(2+3+7)=$

$=1:6\Rightarrow(V_1\cdot b^3-V_1):(V_1\cdot 2^3-V_1)=(b^3-1):(2^3-1)=1:6\Rightarrow$

$\Rightarrow b^3=\frac{13}{6}\Rightarrow b=\sqrt[3]{\frac{13}{6}}$. $\quad (V_3-V_1):(V_4-V_1)=(2+3):(2+3+7)=$

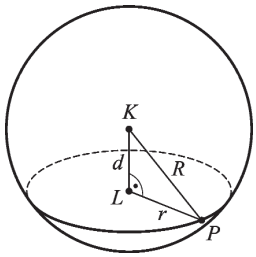
$=5:12\Rightarrow(V_1\cdot c^3-V_1):(V_1\cdot 2^3-V_1)=(c^3-1):(2^3-1)=5:12\Rightarrow$

$\Rightarrow c^3=\frac{47}{12}\Rightarrow c=\sqrt[3]{\frac{47}{12}}$.

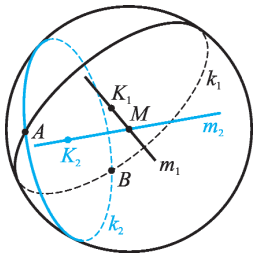
Gömb

II

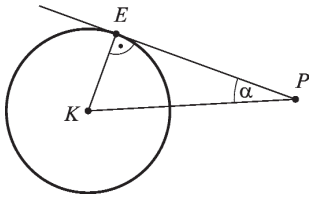
2116.



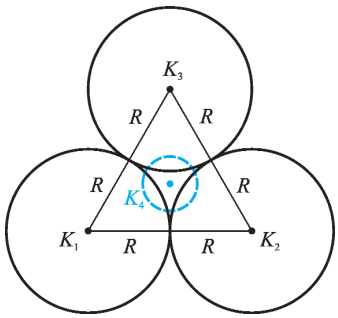
2117.



2121.



2122/I.



2116. KLP derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele: $R^2 = d^2 + r^2$.

2117. $k_1 \cap k_2 = \{A; B\}$. k_1 összes pontjától egyforma távolságra lévő pontok halmaza a k_1 kör K_1 középpontjában k_1 síkjára állított merőleges egyenes: m_1. k_2 összes pontjától egyforma távolságra lévő pontok halmaza a k_2 kör K_2 középpontjában k_2 síkjára állított merőleges egyenes: m_2. A fentiekből következik, hogy m_1 és m_2 is benne van az AB szakasz felezőmerőleges síkjában és m_1 nem párhuzamos m_2-vel. $\Rightarrow m_1$ metszi m_2-t és $m_1 \cap m_2 = M$. Az M középpontú, MA sugarú gömb az egyetlen, aminek k_1 és k_2 is síkmetszete.

2118. Használjuk a 2117. ábra jelöléseit. k_1 és k_2 kör síkja párhuzamos. K_1-et és K_2-t összekötő m egyenes merőleges a k_1 és k_2 körök síkjaira, ezért m minden pontja egyforma messze van k_1 pontjaitól, valamint k_2 pontjaitól, így m-en lesz a keresett kör középpontja. Tekintsük k_1 és k_2 körök $r_1 \parallel r_2$ sugarát! Ezek metszéspontja k_1-gyel, illetve k_2-vel A, illetve B. A-tól és B-től egyforma távolságra lévő pontok halmaza az AB szakasz felezőmerőleges síkja: S. S és m helyzetéből következik, hogy m döfi S-et. Legyen $m \cap S = M$. Az M középpontú, MA sugarú gömb az egyetlen, aminek k_1 és k_2 is síkmetszete.

2119. Használjuk a 2117. ábra jelöléseit. k_1 és k_2 körnek egy közös pontja van. Legyen $k_1 \cap k_2 = A$. k_1 kör K_1 középpontjában k_1 síkjára állított merőleges m_1; k_2 kör K_2 középpontjában k_2 síkjára állított merőleges m_2. $e \perp AK_1$ és $e \perp m_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow e \perp [m_1; A]$, valamint $e \perp AK_2$ és $e \perp m_2 \Rightarrow e \perp [m_2; A]$. Mivel e-re A-ban csak egy merőleges sík állítható, m_1 és m_2 egy síkban van. m_1 és m_2 nem párhuzamos, ezért metszik egymást, $m_1 \cap m_2 = M$. M egyforma távolságra van k_1 pontjaitól és k_2 pontjaitól. $\Rightarrow M$ középpontú, MA sugarú gömb az egyetlen, aminek k_1 és k_2 is síkmetszete.

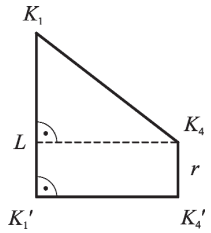
2120. A k kör pontjaitól egyforma távolságra lévő pontok halmaza a k körre a K középpontban állított merőleges: m. Legyen $A \in k$. A-tól és P-től egyforma távolságra lévő pontok halmaza az AP szakasz felezőmerőleges síkja: S. P nincs rajta k_1 síkján $\Rightarrow m$ nem párhuzamos S-sel $\Rightarrow m$ döfi S-et, $m \cap S =$
$= M$. Az M középpontú, MP sugarú gömb az egyetlen, aminek síkmetszete k és áthalad P-n.

2121. P-ből húzott érintő érintési pontja: E. $PE \perp EK$, ezért felírható Pitagorasz tétele a $PEK\triangle$-re: $PK^2 = PE^2 + EK^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow PE^2 = PK^2 - KE^2 =$ állandó $\Rightarrow PE$ állandó és $\sin \alpha = \dfrac{KE}{KP}$ szintén állandó $\Rightarrow \alpha$ is állandó $\Rightarrow PE$ alkotója a PK tengelyű, 2α nyílásszögű forgáskúpnak.

2122. Az R sugarú gömbök középpontjainak merőleges vetületei a közös érintősíkra $2R$ oldalú szabályos háromszöget határoznak meg. E háromszög középpontja a negyedik gömb

középpontjának vetülete, ezért $K_1'K_4' = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2R = 2\frac{\sqrt{3}}{3} R$. Készítsünk az S-re merőleges síkmetszetet K_1-en és K_4-en át! $K_1K_1' = R$; $K_4K_4' = r$, a negyedik gömb sugara; $K_1L = K_1K_1' - K_4K_4' = R - r$; $LK_4 = K_1'K_4'$; $K_1K_4 = R + r$. Pitagorasz tétele a $K_1LK_4\triangle$-re: $K_1K_4^2 = K_1L^2 + LK_4^2$, azaz $(R + r)^2 =$

2122/II.



$= (R - r)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} R\right)^2 \Rightarrow R^2 + 2Rr + r^2 = R^2 - 2Rr + r^2 + \frac{4}{3} R^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \underline{\underline{\frac{1}{3} R}}$.

2123. A tetraéder egy csúcsból induló a; b; c élei páronként merőlegesek egymásra, ezért a tetraéder beilleszthető egy téglatestbe. A téglatest középpontos szimmetriája miatt a tetraéder köré írható gömb megegyezik a téglatest köré írható gömbbel, aminek átmérője a téglatest testátlója. $\Rightarrow r = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$.

2124. *a)* $r = \underline{\underline{2{,}99\text{ cm}}}$; *b)* $r = \underline{\underline{44\text{ m}}}$.

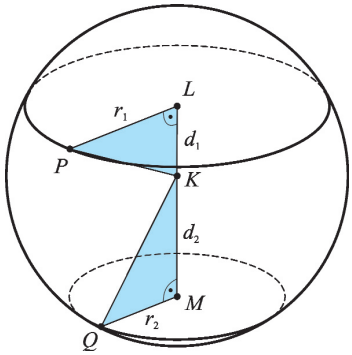
2125. A keresett terület: $t = \underline{\underline{\frac{3}{4} R^2\pi}}$.

2126. A keresett távolság: $KL = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2} R}}$.

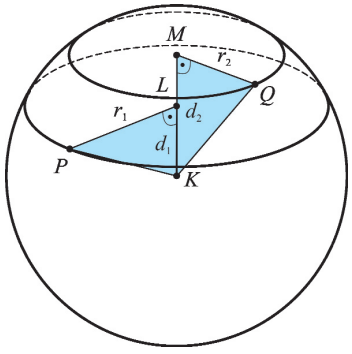
2127. A gömb főkörének területe kétszerese a metszet területének. A 2116. ábra jelöléseit használva: $KP^2 \cdot \pi = 2LP^2 \cdot \pi \Rightarrow KP^2 = 2LP^2$. Pitagorasz tétele a KLP derékszögű háromszögre: $KP^2 = KL^2 + LP^2 \Rightarrow KL^2 = KP^2 - LP^2 = KP^2 - 0{,}5\,KP^2 = 0{,}5\,KP^2$. A keresett távolság: $KL = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2} R}}$.

2128. Pitagorasz tétele a PLK, illetve a QMK derékszögű háromszögekre: $KP^2 = KL^2 + LP^2$ és $KQ^2 = KM^2 + MQ^2$, azaz $r^2 = 36x^2 + 49$ és $r^2 = 25x^2 + 225 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow r = \underline{\underline{25\text{ cm}}}$. A megoldás független attól, hogy K elválasztja-e az M és L pontokat, vagy sem.

2128/I.



2128/II.



II

2129. **1. eset:** A két metszősíkot elválasztja a gömb középpontja. Tekintsük a 2128/I. ábrát. Pitagorasz tétele a PLK, illetve a QMK derékszögű háromszögekre: $R^2 = d_1^2 + r_1^2$ és $R^2 = d_2^2 + r_2^2 \Rightarrow d_1^2 + r_1^2 = d_2^2 + r_2^2 \Rightarrow d_1^2 + 20^2 = (6 - d_1)^2 + 25^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow d_1 = 21{,}75 > 6$, ez nem lehet.
2. eset: A két metszősíkot nem választja el a gömb középpontja. Tekintsük a 2128/II. ábrát. Pitagorasz tétele a PLK, illetve a QMK derékszögű háromszögekre: $R^2 = d_1^2 + r_1^2$ és $R^2 = d_2^2 + r_2^2 \Rightarrow d_1^2 + r_1^2 = d_2^2 + r_2^2 \Rightarrow d_1^2 + 20^2 = (d_1 - 6)^2 + 25^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow d_1 = 21{,}75 \Rightarrow d_2 = 15{,}75$ és $R = \underline{\underline{29{,}55\text{ cm}}}$.

2130. $BL = BK \cdot \cos\varphi \approx 4303{,}51$ km; $i = \dfrac{1}{360^\circ} \cdot 2 \cdot BL \cdot \pi \Rightarrow$ $\Rightarrow i \approx \underline{\underline{75{,}11\text{ km}}}$.

2131. *a)* $A = 4900\pi\text{ cm}^2 \approx \underline{\underline{15\,394\text{ cm}^2}}$; *b)* $A = 5{,}76\pi\text{ cm}^2 \approx$ $\approx \underline{\underline{18{,}1\text{ cm}^2}}$; *c)* $A \approx 1082{,}28\pi\text{ m}^2 \approx \underline{\underline{3400{,}08\text{ m}^2}}$.

2132. *a)* $R \approx \underline{\underline{2\text{ m}}}$; *b)* $R \approx \underline{\underline{4{,}53\text{ dm}}}$; *c)* $R \approx \underline{\underline{9{,}46\text{ cm}}}$.

2133. *a)* Négyszeresére nő. *b)* Kilencszeresére nő. *c)* k^2-szeresére változik.

2134. $t \approx \underline{\underline{292\text{ m}^2}}$.

2135. $t \approx \underline{\underline{169\,968\,121{,}3\text{ km}^2}}$ $(\approx 1{,}7 \cdot 10^8\text{ km}^2)$.

2136. $A_k - A_b \approx \underline{\underline{236{,}75\text{ cm}^2}}$.

2137. $\dfrac{A - A'}{A} = 1 - \dfrac{A'}{A} = 1 - \dfrac{4(r - 0{,}8)^2\pi}{4r^2\pi} = 1 - \left(\dfrac{r - 0{,}8}{r}\right)^2 = 1 - \left(\dfrac{11{,}2}{12}\right)^2 \approx 0{,}13 \Rightarrow$ 13%-kal lett kisebb a csapágygolyó felszíne.

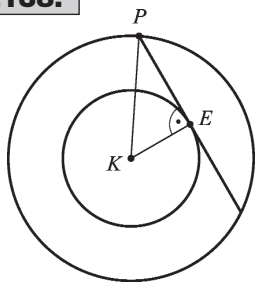
2138. Tekintsük a gömböknek az érintősíkra merőleges, a koncentrikus gömbök középpontján áthaladó síkmetszetét. KE a kisebb, KP a nagyobb koncentrikus gömb, PE a harmadik gömb sugara. Pitagorasz tétele a PKE derékszögű háromszögre: $KP^2 = KE^2 + EP^2 \Rightarrow \underline{\underline{A_n - A_k}} =$ $= 4KP^2 \cdot \pi - 4KE^2 \cdot \pi = 4\pi(KP^2 - KE^2) = 4\pi \cdot EP^2 = \underline{\underline{A_3}}$.

2139. Pitagorasz tétele szerint: $r_3^2 = r_1^2 + r_2^2$. $A_3 = 4\pi \cdot r_3^2 = 4\pi \cdot (r_1^2 + r_2^2) = 4\pi \cdot r_1^2 + 4\pi \cdot r_2^2 =$ $= A_1 + A_2$.

2140. *a)* $V \approx \underline{\underline{7{,}24\text{ mm}^3}}$; *b)* $V \approx \underline{\underline{0{,}113\text{ cm}^3}}$; *c)* $V \approx 2000\text{ dm}^3 = \underline{\underline{2\text{ m}^3}}$; *d)* $V \approx 7643{,}67\text{ cm}^3 \approx$ $\approx \underline{\underline{7{,}64\text{ dm}^3}}$.

2141. *a)* $R \approx \underline{\underline{5{,}3\text{ m}}}$; *b)* $R \approx \underline{\underline{6{,}13\text{ dm}}}$; *c)* $R \approx \underline{\underline{7{,}16\text{ cm}}}$.

2138.



2142. $V \approx \underline{\underline{1662{,}95\text{ cm}^3}}$.

2143. $V = \dfrac{20}{11{,}38} = 1{,}757\text{ dm}^3$. $V_{\text{gömb}} \approx 523{,}6\text{ cm}^3 \approx 0{,}524\text{ dm}^3$.
$n = \dfrac{V}{V_{\text{gömb}}} = \dfrac{1{,}757}{0{,}524} \approx 3{,}35 \Rightarrow \underline{\underline{3\text{ db}}}$ ólomgolyót lehet önteni.

2144. $V = \dfrac{37{,}5}{7{,}2} = 5{,}21\text{ dm}^3$.
$V = \dfrac{4}{3}\left(R^3 - (R - d)^3\right)\pi \Rightarrow 5{,}21 = \dfrac{4}{3}\left(R^3 - (R - 0{,}4)^3\right)\pi =$

$= \frac{4}{3} \cdot 0{,}4 \cdot \left(3R^2 - 1{,}2R + 0{,}16\right) \cdot \pi \Rightarrow 0 = 3R^2 - 1{,}2R - 2{,}95 \Rightarrow R_1 < 0$, ez nem lehet. $R_2 = 1{,}21$. A vasgolyó átmérője $2R = \underline{\underline{2{,}42\ \text{dm}}}$.

2145. $r_1 = 2R \Rightarrow V_1 = 8V$, nyolcszorosára; $r_2 = 3R \Rightarrow V_2 = 27V$, huszonhétszeresére; $r_3 = nR \Rightarrow V_3 = n^3 V$, n^3-szörösére változik a térfogat.

2146. $V = \frac{4 \cdot 6^3 \cdot \pi}{3} \approx 904{,}78\ \text{cm}^3 \Rightarrow m = \varrho \cdot V = 0{,}8 \cdot 904{,}78 \approx 723{,}82\text{g} \approx \underline{\underline{0{,}72\ \text{kg}}}$.

2147. $V = \frac{4 \cdot 11{,}8^3 \cdot \pi}{3} \approx 6882{,}3\ \text{cm}^3 \Rightarrow m = \varrho \cdot V = 7{,}8 \cdot 6882{,}3 \approx 53\,682{,}1\ \text{g} \approx \underline{\underline{53{,}7\ \text{kg}}}$.

2148. A lebegés feltétele: $\frac{4}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right) \cdot 7{,}5 = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow 6{,}5R^3 = 7{,}5r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{13}{15}}\,R$.

2149. Az úszás feltétele: $\frac{4}{3}\pi\left(16^3 - 15{,}7^3\right) \cdot \varrho = \frac{2}{3}\pi \cdot 16^3 \Rightarrow \varrho = \frac{16^3}{2\left(16^3 - 15{,}7^3\right)} = \underline{\underline{9{,}06\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}}$.

2150. $20\,000 = \frac{4}{3}R^3\pi \Rightarrow R = 16{,}84\ \text{m} \Rightarrow d = \underline{\underline{33{,}68\ \text{m}}}$ a gáztartály belső átmérője. $260\,000 = \frac{4}{3}\pi\left((16{,}84 + x)^3 - 16{,}84^3\right) \cdot 7{,}5 \cdot 10^3 \Rightarrow x \approx 0{,}0097\ \text{m} \approx \underline{\underline{9{,}7\ \text{mm}}}$ a tartály falvastagsága.

2151. *a)* $V \approx \underline{\underline{523{,}6\ \text{m}^3}}$; *b)* $V \approx \underline{\underline{4{,}19\ \text{cm}^3}}$; *c)* $V \approx \underline{\underline{2{,}97\ \text{dm}^3}}$; *d)* $V \approx 0{,}001381\ \text{m}^3 \approx \underline{\underline{1{,}38\ \text{dm}^3}}$.

2152. *a)* $A \approx \underline{\underline{77{,}37\ \text{cm}^2}}$; *b)* $A \approx \underline{\underline{554{,}86\ \text{m}^2}}$; *c)* $A \approx \underline{\underline{122{,}95\ \text{dm}^2}}$; *d)* $A \approx 0{,}8978\ \text{m}^2 \approx \underline{\underline{89{,}78\ \text{dm}^2}}$.

2153. $V = \frac{m}{\varrho} = \frac{4}{0{,}6} \approx \underline{\underline{6{,}67\ \text{dm}^3}}$ a golyó térfogata. $\Rightarrow R \approx 1{,}17\ \text{dm} \Rightarrow A \approx 4 \cdot 1{,}17^2 \cdot \pi \approx$ $\approx \underline{\underline{17{,}13\ \text{dm}^2}}$ a golyó felszíne.

2154. $V_{ö} = 1\ \text{cm}^3 = 10^3\ \text{mm}^3$; $d = 3 \cdot 10^{-3}\ \text{mm} \Rightarrow r = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{mm}$. $V = \frac{4 \cdot 1{,}5^3 \cdot 10^{-9} \cdot \pi}{3} \approx$ $\approx 14{,}14 \cdot 10^{-9}\ \text{mm}^3 \Rightarrow n = \frac{V_{ö}}{V} \approx \underline{\underline{7 \cdot 10^{10}\ \text{db}}}$.

2155. $r_H = \frac{3}{11}r_F \Rightarrow A_H = 4r_H^2\pi = 4 \cdot \frac{9}{121}r_F^2\pi = \frac{9}{121}A_F \Rightarrow \frac{A_H}{A_F} = \underline{\underline{\frac{9}{121}}}$. $V_H = \frac{4r_H^3\pi}{3} =$ $= \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{27}{1331}r_F^3 = \frac{27}{1331}V_F \Rightarrow \frac{V_H}{V_F} = \frac{27}{1331}$.

2156. Bármely két gömb hasonló. $\frac{V'}{V} = 2 \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{2} \Rightarrow \frac{A'}{A} = \sqrt[3]{4} \Rightarrow A' = \sqrt[3]{4} \cdot 40 \approx \underline{\underline{63{,}5\ \text{cm}^2}}$.

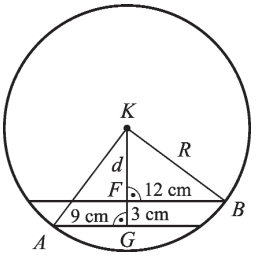
2157. Bármely két gömb hasonló. $\frac{A'}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 30 =$ $= \frac{15\sqrt{2}}{2} \approx \underline{\underline{10{,}6\ \text{cm}^3}}$.

2158. $R_2 = R_1 + 2\ \text{dm}$; $V_2 = V_1 + 1132{,}5\ \text{dm}^3$; $V_1 = \frac{4}{3}R_1^3\pi$; $V_2 = \frac{4}{3}R_2^3\pi = \frac{4}{3}(R_1 + 2)^3\pi$.

$V_2 - V_1 = \frac{4}{3}\pi[(R_1 + 2)^3 - R_1^3] = \frac{4}{3}\pi \cdot 2 \cdot [R_1^2 + R_1(R_1 + 2) + (R_1 + 2)^2] = \frac{8}{3}\pi(3R_1^2 + 6R_1 + 4) =$
$= 1132{,}5\ \text{dm}^3 \Rightarrow 3R_1^2 + 6R_1 - 131{,}18 = 0 \Rightarrow (R_1)_1 < 0$, ez nem lehet. $(R_1)_2 = \underline{\underline{5{,}69\ \text{dm}}}$ a gömb sugara.

II

2161.



2159. $4\pi\cdot[(r_2+0{,}9)^2+r_2^2]=5672{,}8\Rightarrow 0=2r_2^2+1{,}8r_2-450{,}62\Rightarrow$ $\Rightarrow (r_2)_1<0$, ez nem lehet. $(r_2)_2=\underline{\underline{14{,}57\text{ dm}}}\Rightarrow r_1=\underline{\underline{15{,}47\text{ dm}}}$.

2160. $r_1=r_2+1{,}3$ dm. $V_1-V_2=1683{,}72=\frac{4}{3}\pi(r_1^3-r_2^3)=$ $=\frac{4}{3}\pi(r_1-r_2)(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)=\frac{4}{3}\pi\cdot 1{,}3\cdot[(r_2+1{,}3)^2+(r_2+1{,}3)r_2+r_2^2]=$ $=\frac{5{,}2}{3}\pi(3r_2^2+3{,}9r_2+1{,}69)\Rightarrow r_2^2+1{,}3r_2-102{,}5=0\Rightarrow (r_2)_1<0$, ez nem lehet. $(r_2)_2\approx\underline{\underline{9{,}5\text{ dm}}}\Rightarrow r_1\approx\underline{\underline{10{,}8\text{ dm}}}$.

2161. Vetítsük merőlegesen a síkmetszeteket a gömb középpontján átmenő, a metsző síkokkal párhuzamos síkra. Pitagorasz tétele az AGK és a BFK derékszögű háromszögekre: $R^2=9^2+(3+d)^2$ és $R^2=12^2+d^2\Rightarrow 9^2+(3+d)^2=12^2+d^2\Rightarrow d=9\text{ cm}\Rightarrow R=15\text{ cm}\Rightarrow V=$ $=\frac{4}{3}\pi\cdot 15^3=4500\pi=14\,137{,}17\text{ cm}^3\approx 14{,}14\text{ dm}^3$.

Összetett térgeometriai alakzatok

Egymáshoz illesztett testek

2162. $V=V_{\text{henger}}+V_{\text{csonkakúp}}\approx 7{,}2\text{ cm}^3$; $m=\varrho\cdot V\approx\underline{\underline{56{,}55\text{ g}}}$.

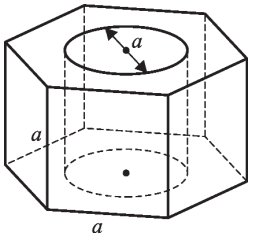
2163. $V=V_{\text{henger}}+2V_{\text{félgömb}}\approx 0{,}07\pi\approx\underline{\underline{0{,}222\text{ m}^3}}$.

2164. $V=V_{\text{henger}}+V_{\text{félgömb}}\approx 10{,}58\pi\approx\underline{\underline{33{,}24\text{ cm}^3}}$.

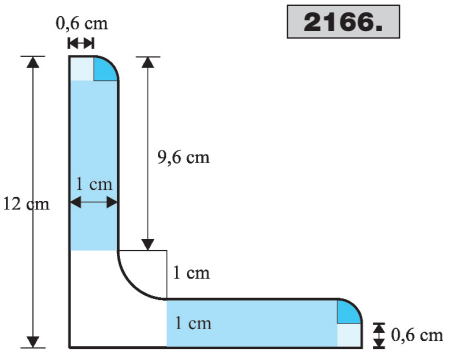
2165. $V=V_{\text{hasáb}}-V_{\text{henger}}\approx 14{,}5\text{ cm}$; $m=n\cdot V\cdot\varrho\approx\underline{\underline{113{,}11\text{ kg}}}$.

2166. A keresztmetszet területe: $T=2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4+2\cdot\frac{1}{4}\cdot 0{,}4^2\pi+2\cdot 1\cdot 9{,}6+2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot 1^2\pi\approx$ $\approx\underline{\underline{23{,}15\text{ cm}^2}}$. Az 1 méteres darab térfogata: $V=23{,}15\cdot 100\approx\underline{\underline{2315\text{ cm}^3}}$. Az 1 méteres darab tömege: $m=2315\cdot 7{,}8\approx 18\,057\text{ g}\approx\underline{\underline{18{,}06\text{ kg}}}$.

2165.

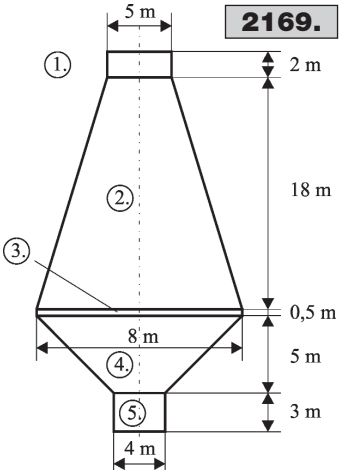


2166.

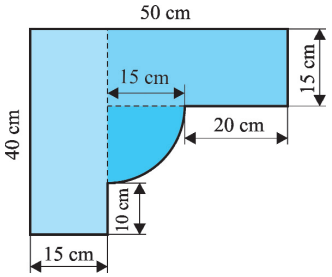


II

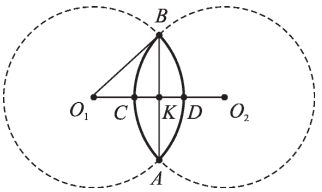
2169.



2170.



2171.



2167. A csonkakúp alakú részek alkotója: $a = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ dm. $A = 2 \cdot 2 \cdot 4\pi \cdot 3 + 2 \cdot (4 + 2) \cdot \sqrt{13} \cdot \pi + 2 \cdot 2 \cdot 2\pi \approx 311{,}85\,\text{dm}^2 \approx \underline{\underline{3{,}12\,\text{m}^2}}$.

2168. A kanna teljes térfogata: $\approx 67{,}39\,\text{dm}^3 \approx \underline{\underline{67{,}41}}$.

A csonkakúp alkotója: $a = \sqrt{0{,}8^2 + (2 - 0{,}4)^2} \approx \underline{\underline{1{,}79\,\text{dm}}}$.

A kanna felszíne: $A \approx \underline{\underline{90{,}49\,\text{dm}^2}}$. A felbecsült lemezszükséglet: $A' = 1{,}05A \approx \underline{\underline{95{,}45\,\text{dm}^2}}$.

2169. $V = 2{,}5^2\pi \cdot 2 + \frac{18}{3}\pi \cdot \left(2{,}5^2 + 2{,}5 \cdot 4 + 4^2\right) + 4^2\pi \cdot 0{,}5 + \frac{5}{3}\pi \cdot \left(4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2\right) + 2^2\pi \cdot 3 \approx$
$\approx \underline{\underline{856{,}6\,\text{m}^3}}$.

2170. A keresztmetszet területe: $T = 40 \cdot 15 + 35 \cdot 15 + \frac{1}{4} \cdot 15^2 \cdot \pi \approx \underline{\underline{1301{,}71\,\text{cm}^2}}$.

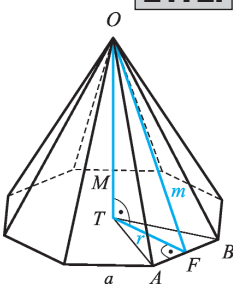
A párkány térfogata: $V = 1301{,}71 \cdot 100 \approx \underline{\underline{0{,}13\,\text{m}^3}}$.

A párkány tömege: $m = 0{,}13 \cdot 2440 = \underline{\underline{317{,}62\,\text{kg}}}$.

2171. $AB = 2 \cdot 4 = 8$ cm. $CD = 0{,}6$ cm $\Rightarrow DK = CK = 0{,}3$ cm $\Rightarrow O_1K =$
$= R - 0{,}3$ cm. Pitagorasz-tétel az $O_1KB\triangle$-re: $R^2 = (R - 0{,}3)^2 + 4^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\underline{R \approx 26{,}82\,\text{cm}}}$.

2172. $T_{\text{palást}} = A_{\text{félgömb}} \Rightarrow 8 \cdot \frac{a \cdot m}{2} = 2R^2\pi \Rightarrow m \approx \underline{\underline{13{,}09\,\text{m}}}$. $TFB\triangle$-ből
$\text{tg}\,22{,}5° = \frac{a}{2r} \Rightarrow r \approx \underline{\underline{1{,}61\,\text{m}}}$. Pitagorasz-tétel a TFO derékszögű há-
romszögre: $M^2 + r^2 = m^2 \Rightarrow M \approx \underline{\underline{1299\,\text{m}}}$.

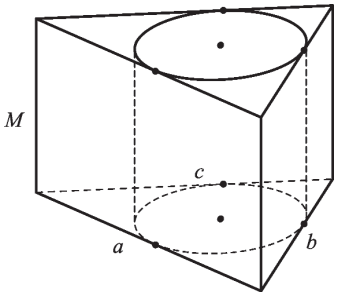
2172.



Egymásba írt testek

II

2173.



2173. $T_{alap} = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)} = 330\ \text{cm}^2$.

$M = \dfrac{V_{hasáb}}{T_{alap}} = \underline{\underline{60{,}15\ \text{cm}}}$. Az alapháromszögbe írható kör sugara:

$r = \dfrac{T_{alap}}{s} = 6{,}6\ \text{cm}$. $V_{henger} = 6{,}6^2 \cdot \pi \cdot 60{,}15 \approx \underline{\underline{8231{,}4\ \text{cm}^3}}$.

2174. $T_{nyolcszög} = 8\dfrac{R^2 \cdot \sin 45°}{2} \approx \underline{\underline{14{,}96\ \text{dm}^2}}$.

$V_{oszlop} = T_{nyolcszög} \cdot M \approx \underline{\underline{74{,}81\ \text{dm}^3}}$.

Az oszlop tömege: $m_{oszlop} = 74{,}81 \cdot 7{,}2 \approx \underline{\underline{538{,}65\ \text{kg}}}$.

2175. Legyen a gerenda-keresztmetszet körének átmérője $2R$. A körbe írható legnagyobb területű négyzet területe : $T_{négyzet} = 2R^2 = \underline{\underline{0{,}045\ \text{m}^2}}$. A hasáb térfogata: $V_{hasáb} = T_{négyzet} \cdot M = \underline{\underline{157{,}5\ \text{dm}^3}}$. A henger térfogata: $V_{henger} = R^2\pi \cdot M \approx \underline{\underline{247{,}4\ \text{dm}^3}}$. A hulladék térfogata: $V_{hulladék} = V_{henger} - V_{hasáb} \approx \underline{\underline{89{,}9\ \text{dm}^3}}$.

2176. $V_{henger} = 2R^3\pi \Rightarrow R \approx 5\ \text{m}$. Az R sugarú körbe írható szabályos nyolcszög a oldalára: $\dfrac{a}{2} = R \cdot \sin 22{,}5°$. $\Rightarrow \underline{\underline{a = 3{,}83\ \text{m}}}$ a hasáb alapéle és $o = M = 2R = \underline{\underline{10\ \text{m}}}$ a hasáb oldaléle.

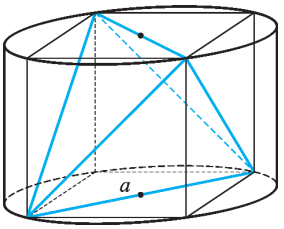
2177. Az r sugarú körbe írható legnagyobb területű négyzet oldala $a = r\sqrt{2}$. A hasáb oldaléle: $o = m$. Egy oldallap területe: $T = r \cdot m \cdot \sqrt{2}$.

2178. A két test alaplapjaira: a kör sugara r, a beírt négyzet átlója $2r$. A henger alapkörének sugara: $r = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. A henger magassága: $M = a$. A henger térfogata: $V_{henger} = r^2\pi \cdot M =$

$= \dfrac{a^2}{2} \cdot \pi \cdot a = \underline{\underline{\dfrac{a^3\pi}{2}}}$.

2179. A tetraéder elhelyezhető egy kockában úgy, hogy szemközti élei a kocka két-két szemköztes lapjának egymásra merőleges lapátlói. $\Rightarrow$ A keresett henger a kocka köré írható hengernek felel meg. A henger alapkörének sugara: $\dfrac{a}{2}$. A henger magassága (a kocka éle): $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. A henger térfogata: $V_{henger} = \dfrac{a^2}{4}\pi \cdot \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\dfrac{a^3\sqrt{2}\,\pi}{8}}}$.

2179.



2180. A csonkagúla alaplapjának területe: $T = 8\dfrac{R^2 \cdot \sin 45°}{2} =$

$= \underline{\underline{2\sqrt{2}\,R^2}}$. A csonkagúla fedőlapjának területe: $t = 8\dfrac{r^2 \cdot \sin 45°}{2} =$

$= \underline{\underline{2\sqrt{2}\,r^2}}$. A csonkagúla térfogata: $V_{csonkagúla} = \dfrac{M}{3}\left(T + \sqrt{Tt} + t\right) =$

$= \dfrac{M}{3}2\sqrt{2}\left(R^2 + Rr + r^2\right) = \underline{\underline{554\sqrt{2}}} \approx 783{,}47\ \text{dm}$.