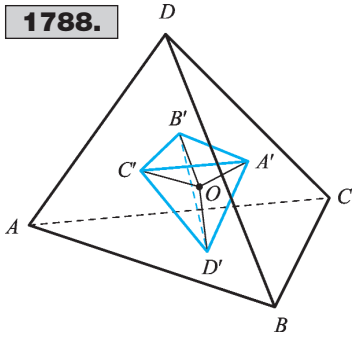
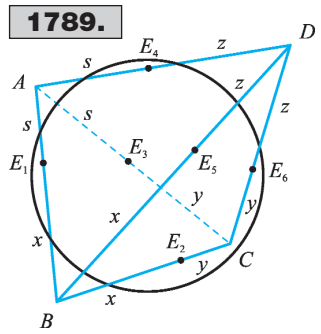
1788.



1789.



1788. Legyenek a gömb érintési pontjai a lapsíkokkal A', B', C' és D'. $OD' \perp [ABC] \Rightarrow$ $\Rightarrow OD' \perp BC$; $OA' \perp [BCD] \Rightarrow OA' \perp BC$. A két állításból $\Rightarrow BC \perp [OA'D'] \Rightarrow BC \perp A'D'$. Hasonlóan belátható, hogy $AB \perp C'D'$, $AC \perp B'D'$, $AD \perp B'C'$, $BD \perp A'C'$ és $DC \perp A'B'$.

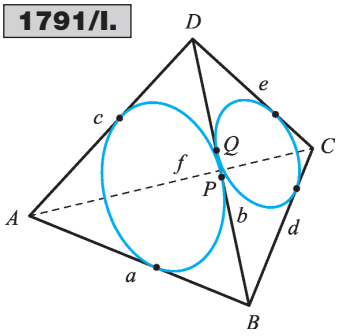
1789. Külső pontból a gömbhöz húzott érintő szakaszok egyenlő hosszúak, így az ábrán egyformán jelölt szakaszokra is ez teljesül. $BE_1 = BE_2 = BE_5 = x$; $CE_2 = CE_3 = CE_6 = y$; $DE_4 = DE_5 = DE_6 = z$; $AE_1 = AE_3 = AE_4 = s$. $AD + BC = s + z + x + y$; $AB + DC = s + x + y + z$; $AC + BD = s + y + x + z$. Tehát a három szemközti élpár hosszának összege egyenlő.

1790. Egy gömb bármely síkmetszete kör. Az oldallap síkmetszeteken az éleknek nem lehet a metszetkörrel két közös pontjuk, mert a gömbbel is csak egy-egy van. Egy közös pontnak viszont lennie kell, hiszen a sík és a gömb közös részéről van szó. Legyen a BD közös élen az $ABD\triangle$-be írt kör érintési pontja P, a $BCD\triangle$-be írt kör érintési pontja Q. P és Q közös pontja a BD élnek és a gömbnek, ilyen pont pedig csak egy van $\Rightarrow P \equiv Q$.

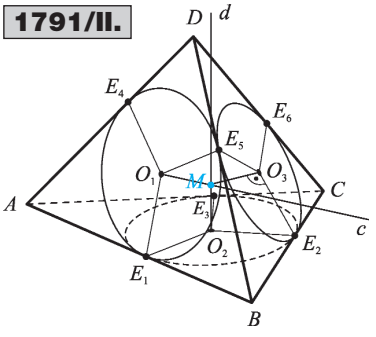
1791. Rajzoljuk meg az $ABD\triangle$, illetve a $BCD\triangle$ beírt körét. Ezek a BD élt P-ben, illetve Q-ban érintik. A beírt kör érintési pontjának helye: $BP = \dfrac{a+b+c}{2} - c = \dfrac{a+b-c}{2}$, illetve $BQ = \dfrac{b+d+e}{2} - e = \dfrac{b+d-e}{2}$. A feltétel szerint $a + e = c + d \Rightarrow BP = BQ$. Hasonlóan belátható, hogy a szomszédos lapok beírt köreinek érintési pontjai az élnek ugyanazon pontjára esnek. Ha van élérintő gömb, akkor annak középpontja a lapsíkokra a beírt körök középpontjában állított merőlegeseken kell legyen.

$AB \perp O_1E_1$ és $AB \perp c \Rightarrow AB \perp [O_1E_1; c]$; $AB \perp O_2E_1$ és $AB \perp d \Rightarrow AB \perp [O_2E_1; d]$. AB-re E_1-ben csak egy merőleges sík állítható, így c és d ebben a síkban vannak és metszik egymást. Legyen $c \cap d = M$. $M \in c \Rightarrow ME_1 = ME_5 = ME_4$; $M \in d \Rightarrow ME_1 = ME_2 = ME_3$. A két összefüggésből

1791/I.

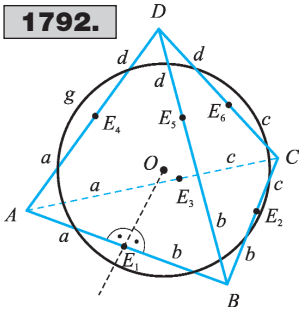


1791/II.

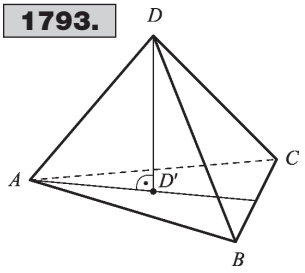


II

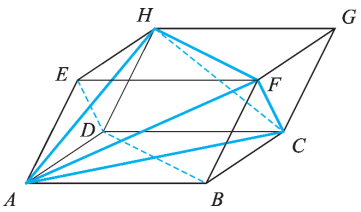
1792.



1793.



1794.



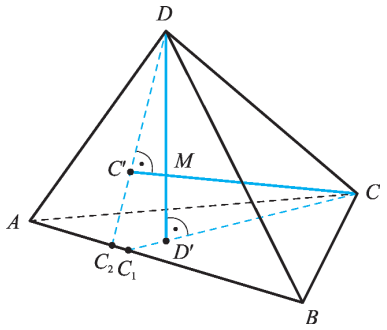
$ME_2 = ME_5$ (1) és $ME_3 = ME_4$ (2) következik. Az (1) egyenlőséget vizsgálva: mivel az O_3-ban állított merőleges is metszené a d-t a fenti gondolatmenet szerint, így arra a metszéspontra $M'E_2 = M'E_5 = M'E_6$ adódna, így M_1-nek és M-nek az E_2E_5 felező merőleges síkján kell lenni, ami d-vel csak egy közös pontot adhat $\Rightarrow M' \equiv M \Rightarrow ME_2 = ME_5 = ME_6$. Ezt a (2) egyenlőséggel összevetve $\Rightarrow M$ rajta van az O_4-ben állított merőlegesen $\Rightarrow$ van érintő gömb.

1792. Az 1791. feladatban láttuk, hogy a feltételnek eleget tevő tetraédernek van érintő gömbje. Ehhez az érintő gömbhöz az A csúcsból húzható érintők érintő szakaszai egyenlők egymással. Ugyanez mondható el a B, C illetve D csúcsokból húzott érintő szakaszokra is. Az A középpontú a sugarú g_A, B középpontú b sugarú g_B, C középpontú c sugarú g_C, D középpontú d sugarú g_D gömbök kölcsönösen érintik egymást: $AE_1 \perp E_1O$, mert g érintő gömb; $BE_1 \perp E_1O$, mert g érintő gömb $\Rightarrow$ e(E_1; O) a g_A és g_B gömbök E_1beli közös érintője. Hasonlóan megmutatható, hogy g_A E_3-ban érinti g_C-t és E_4-ben érinti g_D-t. A többi gömb páronként való érintése is ugyanígy belátható.

1793. $\underline{AD \perp BC}$ a feltétel miatt. $DD' \perp [ABC]$ a vetítés miatt $\Rightarrow DD'$ merőleges $[ABC]$ sík minden egyenesére $\Rightarrow \underline{DD' \perp BC}$. Az aláhúzottakból $\Rightarrow BC \perp [ADD'] \Rightarrow BC$ merőleges $[ADD']$ minden egyenesére $\Rightarrow \overline{BC \perp AD'} \Rightarrow AD'$ az $ABC\triangle$ A-ból induló magasságvonala. Hasonlóan megmutatható, hogy CD' is, BD' is magasságvonal. A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást $\Rightarrow D'$ a magasságpont az $ABC\triangle$-ben.

1794. Tekintsük azt az $ABCDEFGH$ paralelepipedont, melynek A; C; F; H csúcsai egyben a tetraéder csúcsai is. $AC \perp FH$ és $AH \perp FC \Rightarrow AC \perp BD$ és $AH \perp DE \Rightarrow ABCD$, illetve $ADEH$ paralelogramma rombusz. $\Rightarrow$ A paralelepipedon egy csúcsba futó élei egyenlők. $\Rightarrow$ A paralelepipedon minden lapja rombusz. $\Rightarrow$ A tetraéder harmadik élpárja is merőleges.

1795.

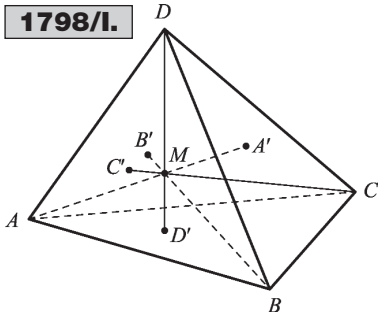


1795. $DD' \perp [ABC] \Rightarrow \underline{DD' \perp AB}$; $CC' \perp [ABD] \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{CC' \perp AB}$. Az aláhúzottak szerint AB merőleges a DD' és CC' metsző egyenesek síkjára: $AB \perp [CC'DD'] \Rightarrow$ $\Rightarrow AB$ merőleges a sík minden egyenesére $\Rightarrow AB \perp CD$.

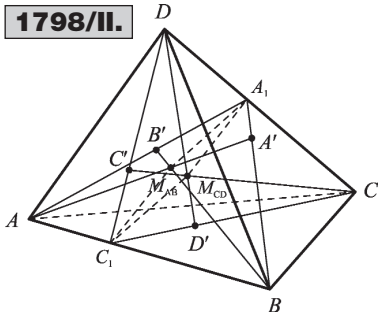
1796. Tekintsük az 1795. ábrát. $AB \perp DC$ és $AB \perp DD' \Rightarrow$ $\Rightarrow AB \perp [CDD'] \Rightarrow AB \perp CD'$. Legyen $AB \cap$ e(C; D') $= C_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow [ABD] \cap [CDD'] = DC_1 \Rightarrow \underline{AB \perp DC_1}$. $AB \perp DC$ és $AB \perp CC' \Rightarrow AB \perp [CDC'] \Rightarrow \overline{AB \perp DC'}$.

Legyen $AB \cap$ e(D; C') $= C_2 \Rightarrow [ABD] \cap [CDC'] = DC_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{AB \perp DC_2}$. Az aláhúzottakból $C_1 \equiv C_2$, mivel D-ből AB-re csak egy merőleges húzható $\Rightarrow [DD'C] \equiv [CC'D] \Rightarrow$ $\Rightarrow CC'$ és DD' metsző egyenesek (a $CC_1D\triangle$ magasságvonalai).

1798/I.



1798/II.



1797. Tekintsük az 1795. ábrát. Az 1795. feladatban láttuk, hogy ha $DD' \cap CC' \neq \emptyset$, akkor $DC \perp AB$. Az 1796. feladatban láttuk, hogy ha $AB \perp DC$, akkor $AA' \cap BB' \neq \emptyset$.

1798. I. Megmutatjuk, hogy ha egy tetraéder ortocentrikus, akkor szemközti élpárjai merőlegesek egymásra. Az 1795. feladatban láttuk, hogy ha CC' metszi DD'-t, akkor $\underline{DC \perp AB}$. Hasonlóan megmutatható, hogy $\underline{BD \perp AC}$ és $\underline{AD \perp BC}$. Az aláhúzottak éppen a bizonyítandó állítást jelentik.

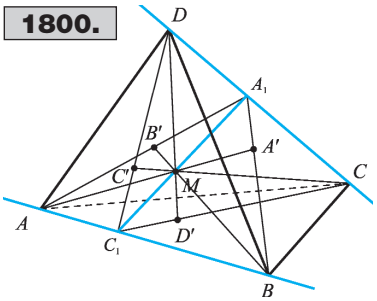
II. Megmutatjuk, hogy ha egy tetraéder szemközti élpárjai merőlegesek egymásra, akkor ortocentrikus. Az 1796. feladatban láttuk, hogy ha $AB \perp DC$, akkor DD' és CC' metszik egymást, síkjuk az AB élre merőleges és a síkmetszet magasságvonalai a DD' és CC' testmagasságok. $\Rightarrow$ $\Rightarrow M_{DC}$ a $DCC_1\triangle$ magasságpontja. Hasonlóan belátható, hogy M_{AB} az $ABA_1\triangle$ magasságpontja. Vegyük az $[ABA_1]$ és $[CDC_1]$ síkok metszetét. $C_1 \in AB$ és $A_1 \in DC$ miatt a metszésvonal a C_1A_1 szakasz. $DC \perp [ABA_1]$ miatt $DC \perp C_1A_1 \Rightarrow C_1A_1$ magasságvonal a $DCC_1\triangle$-ben $\Rightarrow M_{CD} \in C_1A_1$. Hasonlóan belátható, hogy $M_{AB} \in C_1A_1$. Mivel M_{AB} és M_{CD} az AD-re illeszkedő BC-re merőleges, illetve BC-re illeszkedő és AD-re merőleges síkon is rajta vannak, és ezek metszésvonala biztosan nem C_1A_1, így a négy sík közös részén is rajta kell legyenek, ami egyetlen pont. $\Rightarrow A$ testmagasságok egy pontban metszik egymást.

1799. Az 1794. ábra jelöléseit használjuk. Tekintsük azt az $ABCDEFGH$ paralelepipedont, melynek A; C; F; H csúcsai egyben a tetraéder csúcsai is. A szemközti élek merőlegessége miatt $ABCDEFGH$ lapjai rombuszok (1798. feladat és 1794. feladat). Pitagorasz tételét felírva a paralelepipedon éle mint átfogó és a tetraéder két szemközti élének fele mint befogó által meghatározott derékszögű háromszögekre:

$$\frac{AC^2}{4} + \frac{HF^2}{4} = b^2 = \frac{AF^2}{4} + \frac{HC^2}{4} = \frac{AH^2}{4} + \frac{FC^2}{4}. \Rightarrow \text{A}$$

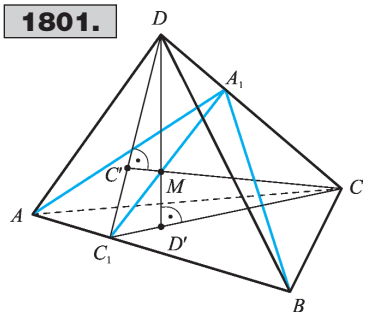
tetraéder szemközti éleinek négyzetösszege állandó.

1800.



1800. Az 1798. feladatban láttuk, hogy a tetraéder magasságvonalai illeszkednek a tetraéder egyik élén át a vele szemben levő élre merőleges síkra (pl. DD' benne van a DC-re illeszkedő, AB-re merőleges síkban). Az AB-re, illetve DC-re illeszkedő ilyen síkok A_1C_1 metszésvonala átmegy az M magasságponton és $A_1C_1 \perp AB$, illetve $A_1C_1 \perp DC$ (l. az 1798. feladat megoldását). A merőlegesség miatt A_1C_1 az AB és DC élek normáltranszverzálisa, ami így átmegy M-en.

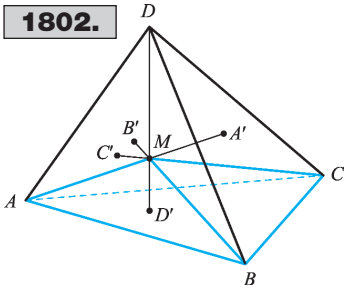
1801.



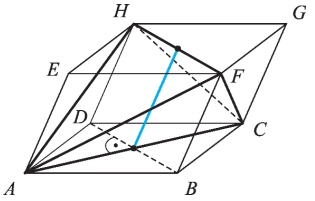
1801. Az 1800. feladatban láttuk, hogy az AB-re illeszkedő DC-re merőleges sík és a CD-re illeszkedő AB-re merőleges sík A_1C_1 metszésvonala az AB és DC élek nor-

II

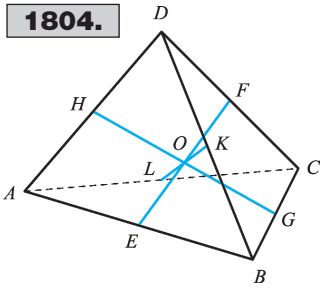
1802.



1803.



1804.



máltranszverzálisa, és átmegy M-en. Jelöljük az AB-re merőleges síkot S_{AB}-vel. $S_{AB} = [DCC_1]$, $AB \perp S_{AB} \Rightarrow AB \perp DC_1 \Rightarrow DC_1$ az $ABD\triangle$ magasságvonala, C_1 a magasságtalppont. Hasonlóan belátható, hogy BA_1 a $BCD\triangle$ magasságvonala $\Rightarrow A_1$ a magasságtalppont.

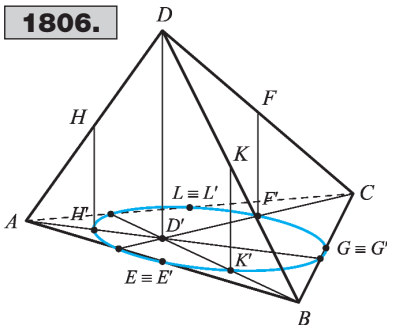
1802. $AA' \perp [BCD] \Rightarrow AA' \perp BC \Rightarrow AM \perp BC$. Hasonlóan megmutatható, hogy $BM \perp AC$ és $CM \perp AB$. A fentiekből következik, hogy az $ABCM$ tetraéder ortocentrikus. $DD' \perp [ABC] \Rightarrow$ $\Rightarrow MD'$ az $[ABC]$ síkhoz tartozó magasságvonal. $CC' \perp [ABD] \Rightarrow \underline{\underline{CC' \perp AD}} \Rightarrow CM \perp AD \Rightarrow$ $\Rightarrow ABCD$ tetraéder ortocentrikus $\Rightarrow \underline{\underline{BC \perp AD}}$. A kétszer aláhúzottakból következik, hogy $AD \perp [BCM] \Rightarrow AD$ a $[BCM]$ síkhoz tartozó magasságvonal $\Rightarrow AD \cap DD' = D$ az $ABCM$ tetraéder magasságpontja (mivel ortocentrikus, elég egy pár magasságvonal metszéspontja). Hasonlóan látható be az állítás a többi tetraéderre is.

1803. Tekintsük azt az $ABCDEFGH$ paralelepipedont, melynek A; C; F; H csúcsai egyben a tetraéder csúcsai is. A szemközti élek merőlegessége miatt a paralelepipedon lapjai rombuszok. A paralelepipedon szemközti lapközéppontjai a tetraéder szemközti élfelező pontjai, melyeket összekötő szakasz a paralelepipedon egyik élével párhuzamos és egyenlő. Mivel az ortocentrikus tetraédert magába foglaló paralelepipedon minden éle egyenlő, ezért a tetraéder élfelező pontjait összekötő szakaszok is egyenlők.

1804. Az 1803. feladatban láttuk, hogy $EF = GH = KL$. $EGFH$ paralelogramma átlói felezik egymást, így $HG \cap EF = O$ pontra $\underline{OE = OG = OF = OH}$. Az $ELFK$ paralelogramma átlóinak metszéspontja ugyancsak a fenti O pont, hiszen EF-nek csak egy felezéspontja van $\Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{OE = OL = OF = OK}$. Az aláhúzottakból $OE = OG = OL = OH = OK = OF \Rightarrow E$, G, L, H, K, F egy O középpontú gömbön vannak.

1805. Tekintsük az 1804. ábrát. Az $ABC\triangle$ Feuerbach köre átmegy az E, L és G pontokon. E, L és G egyértelműen meghatározzák a saját körüket, így a gömb és a sík metszete csak az $ABC\triangle$ Feuerbach köre lehet. Hasonlóan belátható a többi lapra is az állítás.

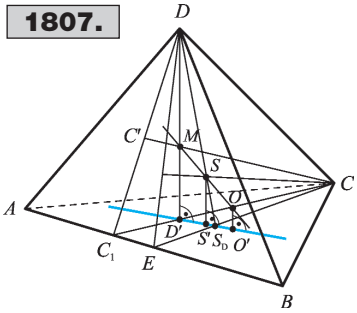
1806.



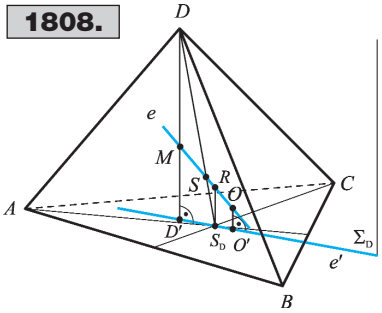
1806. $DD' \perp [ABC] \Rightarrow \underline{DD' \perp AB}$. $ABCD$ tetraéder ortocentrikus $\Rightarrow \underline{DC \perp AB}$. Az aláhúzottakból $\Rightarrow$ $\Rightarrow AB \perp [DD'C] \Rightarrow D'C \perp AB \Rightarrow D'C$ az $ABC\triangle$ C-ből induló magasságvonala. Hasonlóan igaz, hogy $D'A$ és $D'B$ is magasságvonal $\Rightarrow D'$ az $ABC\triangle$ magasságpontja. H felezi AD-t $\Rightarrow H'$ felezi AD'-t. Hasonlóan igaz, hogy K' felezi BD'-t és F' felezi CD'-t. E, G, $L \in [ABC] \Rightarrow E \equiv E'$, $G \equiv G'$, $L \equiv L'$. Az $ABC\triangle$-ben: E', G' és L' oldalfelező pontok; K', F' *és* H' felezik a csúcs és a magasságpont közti szakaszt. $\Rightarrow$ ezek a pontok rajta vannak az $ABC\triangle$ Feuerbach körén.

II

1807.



1808.



1807. Az 1806. feladatban megmutattuk, hogy az M magasságpont $[ABC]$ síkra vetett merőleges vetülete az $ABC\triangle$ D' magasságpontja. $OA = OB = OC$ miatt O' az $ABC\triangle$ körülírt körének középpontja. e(O'; D') az $ABC\triangle$ Euler egyenese, és az S_D súlypont az $O'D'$ szakasz O'-höz közelebbi harmadolópontja: $\underline{D'S_D = 2S_DO'}$. O', S_D, D' egy egyenesen vannak. Tudjuk, hogy $S \in DS_D \Rightarrow O$, S, M egy síkban vannak, a D, M és O pontok által kifeszített síkban, ami merőleges az $[ABC]$ síkra. Hasonlóan megmutatható, hogy O, S és M a B, M és O pontok által kifeszített síkban is benne vannak, így a két sík metszésvonalán is, ami egy egyenes $\Rightarrow O$, S, M egy egyenesen vannak. A merőleges vetítés aránytartó, így $MS : SO = M'S' = S'O'$. $DD'S_D\triangle$-ben: $DS : SS_D = 3 : 1 \Rightarrow D'S' : S'S_D = 3 : 1 \Rightarrow \underline{D'S' = 3S'S_D}$. Az aláhúzott állításokat vizsgálva: $2S_DO' = D'S_D = D'S' + S'S_D = 3S'S_D + S'S_D = 4S'S_D \Rightarrow S_DO' = 2S'S_D$. $\underline{S'O' = S'S_D + S_DO' = S'S_D + 2S'S_D = 3S'S_D = D'S'}$. $\Rightarrow S'$ felezi az $O'D'$ szakaszt, tehát S' az $ABC\triangle$ Feuerbach körének középpontja.

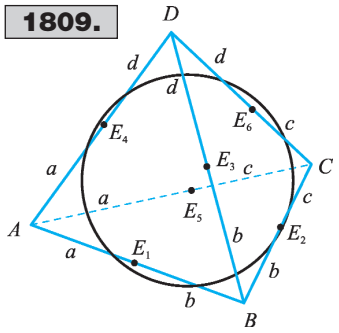
1808. Az 1807. feladatban láttuk, hogy D, M, S, O pontok az $[ABC]$ síkra merőleges Σ_D síkban vannak, és a két sík metszésvonala az $ABC\triangle$ e' Euler egyenese $\Rightarrow S_D$ súlypont is az e' Euler-egyenesen van $\Rightarrow$ az S_D-ben állított merőleges is a Σ_D síkban van és metszi az e egyenest $\Rightarrow R_D$. Az e' Euler-egyenes pontjaira teljesül, hogy $D'S_D = 2S_DO' \Rightarrow MR_D = 2R_DO$. Hasonlóan megmutatható, hogy a többi lapsúlypontba állított merőleges is metszi a tetraéder Euler egyenesét az MO szakasz O-hoz közelebbi harmadolópontjában, így $R_D = R_A = R_C = R_B = R$. Σ_D síkban: $SRS_D\triangle \sim SMD\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők (csúcsszögek, váltószögek) $\Rightarrow \underline{\lambda = \frac{SR}{SM} = \frac{RS_D}{MD}}$. Az 1807. feladatban láttuk, hogy $MS = SO$. Fönt megmutattuk, hogy $MR = 2RO \Rightarrow$

$$\Rightarrow MR = \frac{2}{3}MO = \frac{4}{3}MS \Rightarrow MS + SR = \frac{4}{3}MS \Rightarrow \underline{SR = \frac{1}{3}MS}.$$

$$\lambda = \frac{\frac{1}{3}MS}{MS} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{RS_D}{MD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\underline{MD = 3RS_D}}.$$

Hasonlóan belátható, hogy $MB = 3RS_B$, $MC = 3RS_C$, $MA = 3RS_A$.

1809.

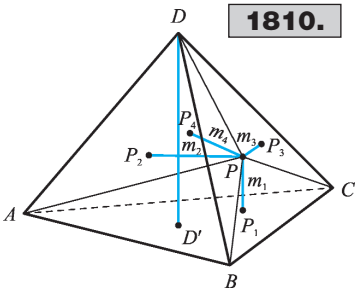


1809. Felhasználjuk: Egy tetraédernek akkor és csak akkor van élérintő gömbje, ha szemközti éleinek összege páronként egyenlő (1789. és 1791. feladat). Ortocentrikus tetraéder szemközti éleinek négyzetösszege páronként egyenlő (1799. feladat).

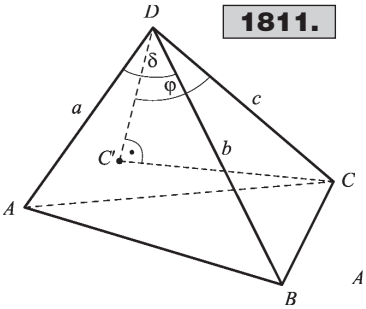
I. Ha $ABC\triangle$ szabályos és $DA = DB = DC$, akkor a szemközti élek összege páronként egyenlő $\Rightarrow$ van élérintő gömb.

II

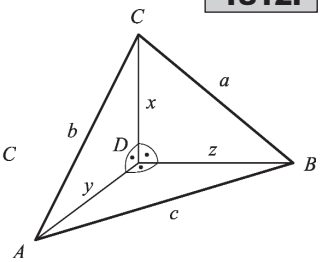
1810.



1811.



1812.



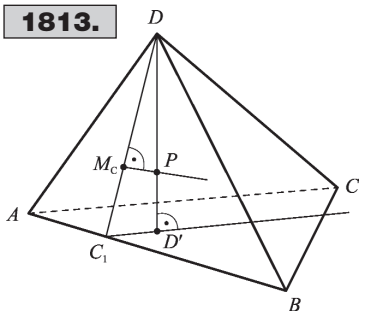
II. Válasszuk az ábra szerinti jelölést. A tetraéder ortocentrikus:
$(a+b)^2+(c+d)^2=(b+d)^2+(a+c)^2$ (1). $(b+d)^2+(a+c)^2=(a+d)^2+(b+c)^2$ (2).
(1) $\Rightarrow a^2+2ab+b^2+c^2+2cd+d^2=b^2+2bd+d^2+a^2+2ac+c^2 \Rightarrow ab+cd=bd+ac \Rightarrow$
$\Rightarrow b\cdot(a-d)=c\cdot(a-d)\Rightarrow(a-d)\cdot(b-c)=0$. (2)-t hasonlóan átalakítva: $(c-d)\cdot(a-b)=0$.
(1) megoldására a következő lehetőségek vannak: *a)* $a=d\Rightarrow$(2) $(c-a)(a-b)=0\Rightarrow c=a$ vagy $a=b$. *b)* $b=c\Rightarrow$(2) $(c-d)(a-c)=0\Rightarrow c=d$ vagy $a=c$. Pl. *a)* esetben, ha $c=a$: $AB=a+b$; $BC=c+b=a+b$; $CA=a+c=2a$; $DA=d+a=2a$; $DB=d+b=a+b$; $DC=d+c=2a\Rightarrow$
$\Rightarrow ADC\triangle$ szabályos: $AB=DB=CB$. A többi eset is hasonlóan belátható.

1810. Felhasználjuk: a szabályos tetraéder testmagasságai egyenlők és a tetraéder térfogata $V=\frac{t_{alap}\cdot M}{3}$. Bontsuk fel a tetraédert a P pontból induló PA, PB, PC és PD szakaszokkal négy részre. $V_{ABCD}=V_{ABCP}+V_{BCDP}+V_{ACDP}+V_{ABDP}$. $\frac{T_\Delta\cdot M}{3}=\frac{T_\Delta\cdot m_1}{3}+\frac{T_\Delta\cdot m_3}{3}+\frac{T_\Delta\cdot m_4}{3}+\frac{T_\Delta\cdot m_2}{3}$.
Egyszerűsítés után: $M=m_1+m_2+m_3+m_4$.

1811. $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{ab\cdot\sin\delta}{2}\cdot c\cdot\sin\varphi=\frac{1}{6}ab\cdot\sin\delta\cdot c\cdot\sin\varphi\le\frac{1}{6}abc$. $\sin\delta\le1$, egyenlőség $\delta=90°$ esetén. $\sin\varphi\le1$, egyenlőség $\varphi=90°$ esetén. Ha $\varphi=90°$, akkor $DC\perp[ABD]\Rightarrow DC\perp DB$, $DC\perp AD$. Maximális a térfogat, ha D-nél $\sphericalangle(a;b)=\sphericalangle(b;c)=\sphericalangle(c;a)=90°$.

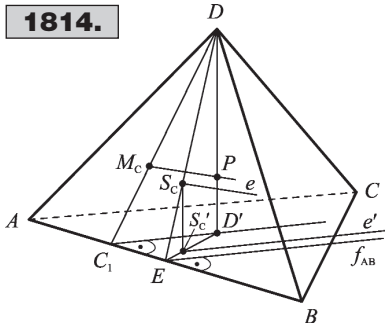
1812. Pitagorasz-tétel a D csúcsú derékszögű $\triangle$-ekre: $x^2+y^2=b^2$ (1); $y^2+z^2=c^2$ (2); $z^2+x^2=a^2$ (3). (1) + (2) + (3): $2(x^2+y^2+z^2)=a^2+b^2+c^2$; $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=s^2$;
$x^2+y^2\rightarrow$ (1)-be: $s^2-z^2=b^2\Rightarrow z=\sqrt{s^2-b^2}$; $y^2+z^2\rightarrow$ (2)-be: $s^2-x^2=c^2\Rightarrow x=\sqrt{s^2-c^2}$;
$z^2+x^2\rightarrow$ (3)-ba: $s^2-y^2=a^2\Rightarrow y=\sqrt{s^2-a^2}$; $V=\frac{1}{6}xyz=\frac{1}{6}\sqrt{(s^2-a^2)(s^2-b^2)(s^2-c^2)}$.

1813.

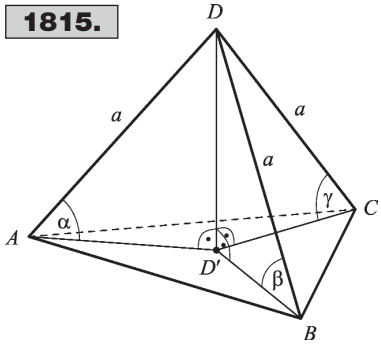


1813. Legyen DC_1 az $ABD\triangle$ magasságvonala $\Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{DC_1\perp AB}$. Legyen D pont vetülete $[ABC]$-ra $D'\Rightarrow$ $\Rightarrow DD'\perp[ABC]\Rightarrow \underline{DD'\perp AB}$. Az aláhúzottakból $AB\perp[DC_1D']$. Az M_C-ben $[ABD]$ síkra állított merőleges benne van a $[DC_1D']$ síkban $\Rightarrow$ e$(M_C;P)$ merőleges vetülete rajta van a C_1D' egyenesen. Hasonlóan megmutatható, hogy a másik két lapra állított merőleges vetülete is egy-egy D'-n átmenő egyenes, így metszéspontjuk a D' pont.

1814.



1815.



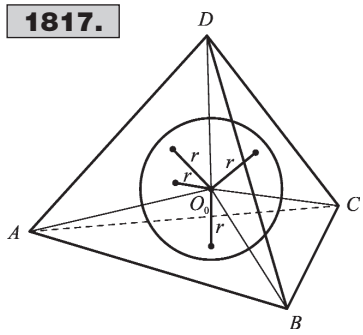
1814. $DS_C = 2S_CE$, mert S_C súlypont az $ABD\triangle$-ben. Az S_C-ben állított e merőleges párhuzamos M_CP-vel. e vetülete e' is párhuzamos M_CP vetületével C_1D'-vel. S_C' az ED szakasz E-hez közelebbi harmadolópontja. e' az S_C'-re illeszkedő AB-re merőleges egyenes. A D' középpontú $\frac{2}{3}$ arányú középpontos hasonlóság E-t S_C'-be, az E-re illeszkedő AB-re merőleges f_{AB} felező merőlegest e'-be viszi. Az $ABC\triangle$ oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ hasonló képeik, a merőleges vetületek is egy pontban metszik egymást.

1815. $DD'A\triangle \cong DD'B\triangle \cong DD'C\triangle$, mert mindhárom derékszögű, átfogóik egyenlők, egyik befogójuk közös $\Rightarrow$ másik befogójuk is egyenlő: $D'A = D'B = D'C \Rightarrow D'$ az $ABC\triangle$ körülírt körének középpontja.

1816. Tekintsük az 1815. ábrát. $DD'A\triangle \cong DD'B\triangle \cong DD'C\triangle$, mert mindhárom derékszögű, átfogóik egyenlők, egyik befogójuk közös $\Rightarrow$ DD'-vel szemközti szögeik is egyenlők $\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$.

1817. Bontsuk fel a tetraédert a beírható gömb középpontjából a csúcsokba húzott szakaszokkal négy részre. A kapott tetraéderek egy-egy lapja az eredeti tetraéderével közös, ehhez a laphoz tartozó magassága pedig r.

1817.



$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}\cdot t_{ABC}\cdot r + \frac{1}{3}\cdot t_{BCD}\cdot r + \frac{1}{3}\cdot t_{ACD}\cdot r + \frac{1}{3}\cdot t_{ABD}\cdot r =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot r\cdot A_{ABCD}.\ \frac{1}{3}\cdot t_{ABC}\cdot m_1 = \frac{1}{3}\cdot r\cdot A_{ABCD} \Rightarrow t_{ABC} = \frac{r\cdot A_{ABCD}}{m_1}.$$

Hasonlóan $t_{BCD} = \frac{r\cdot A_{ABCD}}{m_2}$, $t_{ACD} = \frac{r\cdot A_{ABCD}}{m_3}$, $t_{ABD} =$

$$= \frac{r\cdot A_{ABCD}}{m_4}.\ A_{ABCD} = t_{ABC} + t_{BCD} + t_{ACD} + t_{ABD} = \frac{r\cdot A_{ABCD}}{m_1} +$$

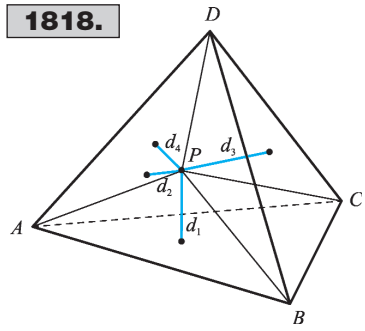
$$+ \frac{r\cdot A_{ABCD}}{m_2} + \frac{r\cdot A_{ABCD}}{m_3} + \frac{r\cdot A_{ABCD}}{m_4}.\quad \frac{A_{ABCD}}{r\cdot A_{ABCD}} = \frac{1}{m_1} +$$

$$+ \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}.$$

1818. Bontsuk fel a tetraédert P-ből a csúcsokba húzott szakaszokkal négy részre. $V = V_{ABCD} = \frac{1}{3}\cdot t_{ABC}\cdot m_1$;

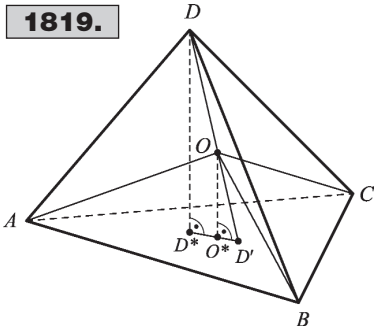
$V_1 = \frac{1}{3}\cdot t_{ABC}\cdot d_1 \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{d_1}{m_1}$. Hasonlóan megmutatható,

1818.

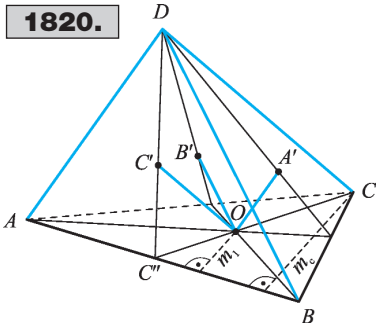


II

1819.



1820.



hogy $\frac{V_2}{V}=\frac{d_2}{m_2}$, $\frac{V_3}{V}=\frac{d_1}{m_1}$, $\frac{V_4}{V}=\frac{d_4}{m_4}$. $\frac{V_1}{V}+\frac{V_2}{V}+\frac{V_3}{V}+\frac{V_4}{V}=\frac{d_1}{m_1}+\frac{d_2}{m_2}+\frac{d_3}{m_3}+\frac{d_4}{m_4}\Rightarrow$
$\Rightarrow 1=\frac{d_1}{m_1}+\frac{d_2}{m_2}+\frac{d_3}{m_3}+\frac{d_4}{m_4}$.

1819. Vetítsük a D és O pontokat az $[ABC]$ síkra $\Rightarrow D^*$, O^*. $OO^*D'\triangle \sim DD^*D'\triangle$, mert szögeik egyállásúak $\Rightarrow \lambda=\frac{OO^*}{DD^*}=\frac{OD'}{DD'}$. $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot t_{ABC}\cdot DD^*$; $V_{ABCO}=\frac{1}{3}\cdot t_{ABC}\cdot OO^*\Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{V_{ABCO}}{V_{ABCD}}=\frac{OO^*}{DD^*}=\frac{OD'}{DD'}$. Hasonlóan megmutatható, hogy $\frac{V_{ABDO}}{V_{ABCD}}=\frac{OC'}{CC'}$, $\frac{V_{BCDO}}{V_{ABCD}}=\frac{OA'}{AA'}$, $\frac{V_{ACDO}}{V_{ABCD}}=\frac{OB'}{BB'}$. $\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}=\frac{V_{ABCO}+V_{BCDO}+V_{ACDO}+V_{ABDO}}{V_{ABCD}}=1$.

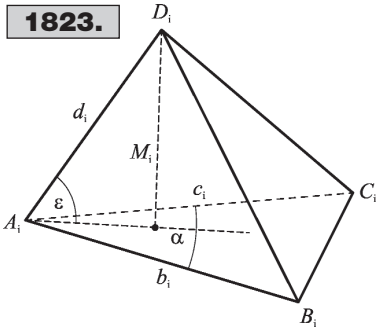
1820. $OC'\parallel DC\Rightarrow O$, C', C, D egy síkban vannak $\Rightarrow$ síkjuknak az $[ABC]$ síkkal való metszésvonala OC, az $[ABD]$ síkkal való metszésvonala $DC'\Rightarrow DC'$ és OC egyenese az $[ABC]$ és $[ABD]$ síkok AB metszésvonalán metszik egymást $\Rightarrow C''\in AB$. $OC'\parallel DC$ miatt $C''OC'\triangle\sim$
$\sim C''CD\triangle$, mert szögeik egyállású szögek $\Rightarrow \lambda=\frac{C'O}{DC}=\frac{C''O}{C''C}=\frac{m_1}{m_c}=\frac{t_{ABO}}{t_{ABC}}$. Hasonlóan belátható, hogy $\frac{B'O}{DB}=\frac{t_{ACO}}{t_{ABC}}$ és $\frac{A'O}{DA}=\frac{t_{BCO}}{t_{ABC}}$. $\frac{C'O}{DC}+\frac{B'O}{DB}+\frac{A'O}{DA}=\frac{t_{ABO}}{t_{ABC}}+\frac{t_{ACO}}{t_{ABC}}+\frac{t_{BCO}}{t_{ABC}}=$
$=\frac{t_{ABC}}{t_{ABC}}=1$.

1821. Legyen CD felezőpontja E, a vizsgált sík az $[ABE]$. E felezi DC-t $\Rightarrow BE$ súlyvonal a $BCD\triangle$-ben $\Rightarrow t_{BCE}=t_{BED}$. Az $ABED$ tetraéder $[BED]$ laphoz tartozó magassága egybeesik az $ABCE$ tetraéder $[BCE]$ laphoz tartozó magasságával (A-ból a $[DBC]$ síkra bocsátott merőleges). $V_{BECA}=\frac{1}{3}\cdot t_{BEC}\cdot M_A=\frac{1}{3}\cdot t_{BED}\cdot M_A=V_{BEDA}$.

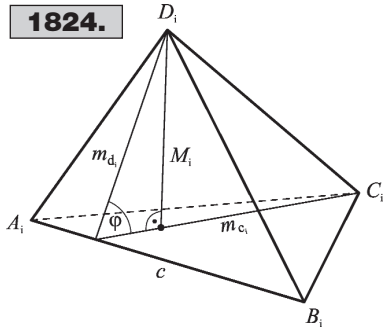
1822. Tekintsük az 1807. ábrán a $DD'S_D$ háromszöget. Felhasználjuk: a tetraéder súlypontja a súlyvonal oldalhoz közelebbi negyedelőpontja. Vegyük a D csúcspont és az S súlypont $[ABC]$ síkra vetett merőleges vetületét $\rightarrow D'S'$. $DD'S_D\triangle\sim SS'S_D\triangle$, mert szögeik egyállásúak $\Rightarrow \lambda=$
$=\frac{DS_D}{SS_D}=\frac{DD'}{SS'}$. $DS_D=4SS_D$-t felhasználva $DD'=4SS'$. $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot t_{ABC}\cdot DD'=\frac{1}{3}\cdot t_{ABC}\,4SS'=$
$=4\cdot\frac{1}{3}\cdot t_{ABC}\cdot SS'=4V_{ABCS}$. Hasonlóan megmutatható, hogy a súlypont a többi lappal is negyedakkora térfogatú tetraédert alkot, mint az $ABCD$ tetraéder.

II

1823.



1824.



1823. $V_1 = \frac{1}{3} \cdot t_{A_1B_1C_1} \cdot M_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{b_1 \cdot c_1 \cdot \sin\alpha}{2} \cdot d_1 \cdot \sin\varepsilon = \frac{1}{6} \cdot b_1 \cdot c_1 \cdot d_1 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varepsilon$.

Hasonlóan $V_2 = \frac{1}{6} \cdot b_2 \cdot c_2 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varepsilon$. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{6} \cdot b_1 \cdot c_1 \cdot d_1 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varepsilon}{\frac{1}{6} \cdot b_2 \cdot c_2 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varepsilon} = \frac{b_1 \cdot c_1 \cdot d_1}{b_2 \cdot c_2 \cdot d_2}$.

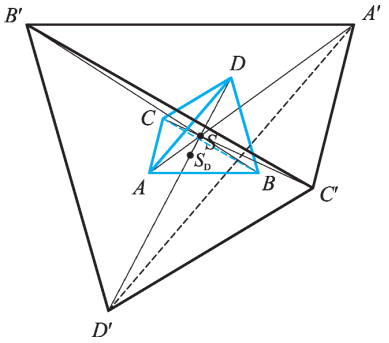
1824. $V_1 = \frac{1}{3} \cdot T_{A_1B_1C_1} \cdot M_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{c \cdot m_{c_1}}{2} \cdot m_{d_1} \cdot \sin\varphi = \frac{1}{6} c \cdot m_{c_1} \cdot m_{d_1} \cdot \sin\varphi$. Hasonlóan $V_2 =$

$= \frac{1}{6} c \cdot m_{c_2} \cdot m_{d_2} \cdot \sin\varphi$. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{c \cdot m_{c_1} \cdot m_{d_1}}{c \cdot m_{c_2} \cdot m_{d_2}} = \frac{\frac{1}{2} c \cdot m_{c_1} \cdot \frac{1}{2} c \cdot m_{d_1}}{\frac{1}{2} c \cdot m_{c_2} \cdot \frac{1}{2} c \cdot m_{d_2}} = \frac{T_{A_1B_1C_1} \cdot T_{A_1B_1D_1}}{T_{A_2B_2C_2} \cdot T_{A_2B_2D_2}}$.

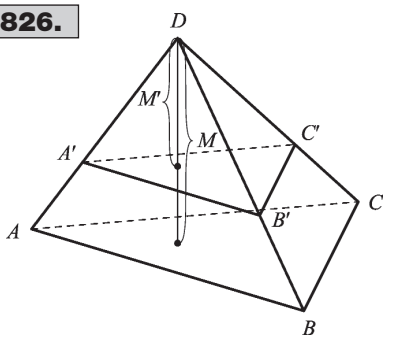
1825. Az $ABCD$ tetraéder DS_D súlyvonalát az S súlypont $1:3$ arányban osztja $\Rightarrow$ Az S középpontú (-3) arányú középpontos nagyítás S_D-t D-be viszi, tehát az $[ABC]$ síkot a D-n átmenő, vele párhuzamos síkba. Hasonlóan a többi oldallapra is megfelelő ez a hasonlóság, tehát a feladatban megadott tetraéderhez vezet. $\Rightarrow ABCD \sim A'B'C'D'$ és $\lambda = (-3) \Rightarrow \frac{V_{ABCD}}{V_{A'B'C'D'}} = \lambda^3 = \underline{\underline{27}}$.

1826. $\frac{F_{A'B'C'D}}{F_{ABCD}} = \frac{1}{2}$. A levágott tetraéder a D középpontból középpontosan hasonló az eredetihez: $\lambda = \frac{M'}{M} = \sqrt{\frac{F_{A'B'C'D}}{F_{ABCD}}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow M' = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot M}}$.

1825.

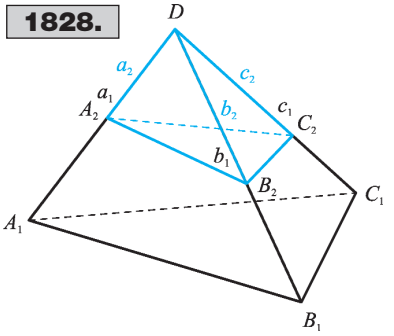


1826.



II

1828.



1827. Tekintsük az 1826. ábrát. $\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{ABCA'B'C'}} = q \Rightarrow$ $\Rightarrow V_{A'B'C'D} = q \cdot V_{ABCA'B'C'}$. A levágott tetraéder D középpontból középpontosan hasonló az eredetihez. $\lambda = \frac{M'}{M} = \sqrt[3]{\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{ABCA'B'C'} + V_{A'B'C'D}}} =$

$= \sqrt[3]{\frac{q \cdot V_{ABCA'B'C'}}{V_{ABCA'B'C'} + q \cdot V_{ABCA'B'C'}}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{\frac{q}{q+1}}}}$.

1828. Az 1823. feladatban láttuk, hogy $\frac{V_{A_2B_2C_2D}}{V_{A_1B_1C_1D}} =$

$= \frac{V_2}{V_1} = \frac{a_2 \cdot b_2 \cdot c_2}{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}$. A „maradék” test térfogata: $V = V_1 - V_2 = V_1 - \frac{a_2 \cdot b_2 \cdot c_2}{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1} \cdot V_1 =$

$= \frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 - a_2 \cdot b_2 \cdot c_2}{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1} \cdot V_1$. $\frac{V}{V_1} = \underline{\underline{\frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 - a_2 \cdot b_2 \cdot c_2}{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}}}$.

1829. Tekintsük az 1794. ábrát. Az F csúcsból induló lapátlók (FA; FC; FH) a tetraéder élei. Ezeknek F-től különböző végpontjait összekötő szakaszok: AC a $ABCD$ lap átlója; CH a $CDHG$ lap átlója; AH az $ADHE$ lap átlója.

1830. Az 1794. ábra jelöléseit használjuk. Az A csúcsból kiinduló lapátlók meghatározzák az $ACFH$ tetraédert. Ugyanehhez a tetraéderhez jutunk, ha a C; az F; illetve a H csúcsból induló lapátlókat tekintjük. A kihagyott négy csúcs (B; D; E; G) bármelyikéből indulunk ki, a $BDEG$ tetraédert kapjuk.

1831. Az AB élre DC-vel párhuzamos síkot fektetünk. A DC élre AB-vel párhuzamos síkot fektetünk. $\Rightarrow$ Ez a két sík párhuzamos egymással. Hasonlóan párhuzamos egymással a BC-re és AD-re; illetve a BD-re és AC-re fektetett két-két sík. Két-két-két párhuzamos sík által meghatározott test egy paralelepipedon, a síkok közül három-háromnak közös pontja a tetraéder négy csúcsa. $\Rightarrow$ Ez egy a tetraéder köré írható paralelepipedon.

1832. Ha egy paralelepipedon egy tetraéder köré írható, akkor a tetraéder egyik élét tartalmazó lapja párhuzamos kell legyen a szemközti lappal, azaz az azon lévő éllel is. $\Rightarrow$ A tetraéder köré írható paralelepipedon az 1831. feladatban ismertetett eljárással létrehozható, az pedig egyetlen testet határoz meg.

1833. A kockába írt tetraéder minden éle a kocka egy lapátlója. A kocka lapjai egybevágóak $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ lapátlói egyenlőek, tehát a tetraéder minden éle egyenlő.

1834. A szabályos tetraéder köré írható paralelepipedon szemközti lapjai olyan paralelogrammák, melyeknek két átlója egyenlő hosszú. $\Rightarrow$ Téglalapok, tehát a test téglatest. Vetítsük a tetraédert és a köré írható téglatestet merőlegesen valamelyik lapjának síkjára! Mivel a szabályos tetraéder szemközti élei merőlegesek egymásra, a téglatest lapjainak átlói is merőlegesek egymásra. $\Rightarrow$ Minden lapja négyzet, azaz a szabályos tetraéder köré írható paralelepipedon kocka.

1835. Mind a nyolc csúcsnál egy-egy egyenlő szárú derékszögű háromszög alapú tetraédert vágunk le, a magasságuk egyben az élük. $V_{\text{kocka}} = 6^3 = \underline{\underline{216\,\text{cm}^3}}$. Egy levágott csúcs térfogata:

$V' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^2}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}\,\text{cm}^2$. $V = V_{\text{kocka}} - 8V' = \underline{\underline{180\,\text{cm}^3}}$.

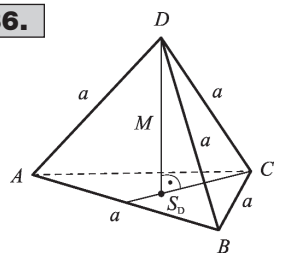
1836. Felhasználjuk: A szabályos tetraéder magasságtalppontja az oldallap súlypontja $\Rightarrow S_DC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Pitagorasz-tétel a $DS_DC\triangle$-re: $M^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2 \Rightarrow M = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3} = \underline{\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$;

$F = 4\cdot\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \underline{a^2\cdot\sqrt{3}}$.

a) $a = 8{,}6$ cm; $V = 53\cdot\sqrt{2} \approx \underline{\underline{74{,}96\text{ cm}^3}}$; $F = 73{,}96\cdot\sqrt{3} \approx$ $\approx \underline{\underline{128{,}1\text{ cm}^2}}$.

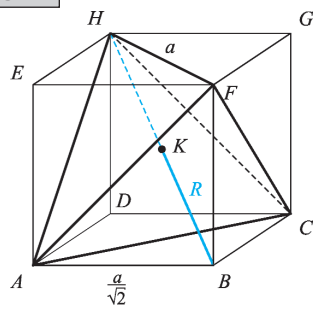
b) $a = \frac{1}{4}$ cm; $V = \frac{\sqrt{2}}{768} \approx 0{,}0018\ \text{m}^3 = \underline{\underline{1{,}8\text{ dm}^3}}$; $F = \frac{\sqrt{3}}{16} \approx 0{,}108\ \text{m}^2 = \underline{\underline{10{,}8\text{ dm}^2}}$.

1836.



1837. A szabályos tetraédert magába foglaló paralelepipedon egy kocka. A tetraéder körülírt gömbjének középpontja a kocka középpontja, sugara a kocka testátlójának fele: $R = \frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\cdot\sqrt{6}}{4}$.

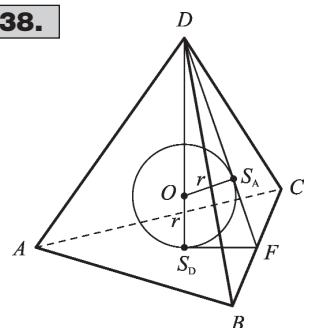
1837.



1838. A szabályos tetraéder térfogata: $V = \frac{a^3\cdot\sqrt{2}}{12}$. A térfogat másképp: $V = 4V_{ABCO} = 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot r = \frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{3}r$. A kettőt összehasonlítva:

$\frac{a^3\cdot\sqrt{2}}{12} = \frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{3}r \Rightarrow \underline{\underline{r = \frac{a\cdot\sqrt{6}}{12}}}$.

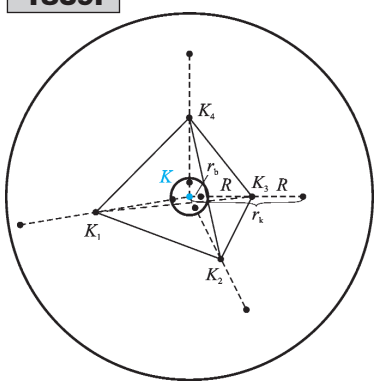
1838.



1839. Az egymást páronként érintő gömbök középpontjai egy $2R$ élű szabályos tetraéder négy csúcsában vannak. A belülről, illetve kívülről érintő gömbök koncentrikusak, középpontjuk a tetraéder középpontjával azonos. Az érintkezés feltétele: $r_b + 2R = r_k$. A szabályos tetraéder köré írható gömb sugara az 1837. feladat eredményéből $\frac{2R\sqrt{6}}{4} = \frac{R\sqrt{6}}{2}$. Az ábra szerint $\frac{R\sqrt{6}}{2} = r_b + R \Rightarrow r_b = R\frac{\sqrt{6}-2}{2}$ és $r_k = R\frac{\sqrt{6}+2}{2}$. A térfogatok aránya:

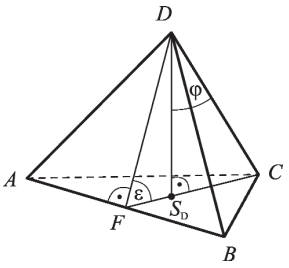
$\frac{V_b}{V_k} = \left(\frac{r_b}{r_k}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}\right)^3 = \underline{\underline{\left(5-2\sqrt{6}\right)^3}}$.

1839.



II

1841.



1840. Az 1836. feladatban láttuk, hogy a szabályos tetraéder magassága: $M = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Ebből $a = \frac{3M}{\sqrt{6}} = \frac{M\sqrt{6}}{2}$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot M = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{6M^2}{4} \cdot M = \underline{\underline{\frac{M^3 \cdot \sqrt{3}}{8}}}.$$

1841. A szabályos tetraéder magasságtalppontja az oldallap súlypontja $\Rightarrow S_DC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. A $DS_DC\triangle$-ben $\sin\varphi = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \underline{\underline{35{,}26°}}$. A DS_D magasság a DB és AD éllel is φ szöget zár be, AB, AC és BC élekre pedig merőleges, mert merőleges a síkjukra.

1842. Tekintsük az 1841. ábrát. A szabályos tetraéder magasságtalppontja az oldallap súlypontja $\Rightarrow FS_D = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. FS_DD derékszögű háromszögben: $\cos\varepsilon = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \varepsilon \approx \underline{\underline{70{,}53°}}$.

1843. Az 1836. feladatban láttuk, hogy a szabályos tetraéder térfogata: $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = \frac{30^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$. Az 1838. feladatban láttuk, hogy a beírt gömb sugara: $r = \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{30\sqrt{6}}{12} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$. Ha a lapokat 3 cm vastagságban csiszolják le, akkor a beírt gömb sugara 3 cm-rel csökken:

$$r' = \left(\frac{5\sqrt{6}}{2} - 3\right) \text{cm}; \quad a' = \frac{12r'}{\sqrt{6}} = \frac{12 \cdot \frac{5\sqrt{6}}{2} - 36}{\sqrt{6}} = \left(30 - 6\sqrt{6}\right) \text{cm};$$

$$V' = \frac{\left(30 - 6\sqrt{6}\right)^3 \cdot \sqrt{2}}{12}; \quad \Delta V = \frac{30^3 - \left(30 - 6\sqrt{6}\right)^3}{12} \cdot \sqrt{2};$$

$$\Delta m = \Delta V \cdot \varrho = \frac{30^3 - \left(30 - 6\sqrt{6}\right)^3}{12} \cdot \sqrt{2} \cdot 2{,}8; \quad \Delta m \approx 7726{,}97 \text{ g} \approx \underline{\underline{7{,}73 \text{ kg}}}.$$

Gúla, csonkagúla

II

Gúla

1844. Az oldallapok területösszege nagyobb, mint az alaplap síkjára eső vetületeik területösszege, hiszen $t_i' = t_i \cdot \cos\alpha < t_i$ (ahol α az oldallap és az alaplap szöge). A vetületek területösszege pedig nem kisebb az alaplap területénél.
$t_{\text{alaplap}} \leq t_1' + t_2' + \ldots + t_n' = t_1 \cdot \cos\alpha_1 + t_2 \cdot \cos\alpha_2 + \ldots + t_n \cdot \cos\alpha_n < t_1 + t_2 + \ldots + t_n$. (Az alaplap területe akkor egyenlő a vetületek területének összegével, ha a magasság talppontja az alaplap belső pontja.)

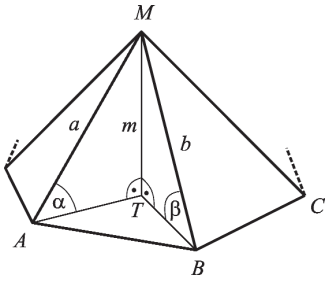
1845. ATM és BTM derékszögű háromszögben: $\sin\alpha = \frac{m}{a}$ és $\sin\beta = \frac{m}{b} \Rightarrow a \cdot \sin\alpha = m = b \cdot \sin\beta \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. A bizonyítás független attól, hogy a T talppont az alapsokszögnek belső pontja-e, vagy sem.

1846. A szabályos n oldalú gúla magasságának talppontja az alaplap köré írt kör középpontja. $PA_iT\triangle$-ben T-nél derékszög van, ezért $PA_i > A_iT$, azaz $a_n > R$. Adott R esetén $a_{n+1} < a_n$, és mivel $a_6 = R$, csak $2 < n < 6$ lehetséges. $\Rightarrow n \in \{3; 4; 5\}$.

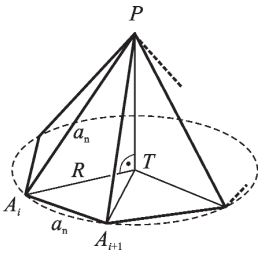
1847. Egy síkot párhuzamos síkokkal metszve a metszésvonalak párhuzamosak:
$S' \parallel S \Rightarrow A'B' \parallel AB, B'C' \parallel BC, \ldots$ Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét az $AMB\sphericalangle$ AB és $A'B'$ szelőire: $A'M : AM = B'M : BM$! Hasonlóan a többi lap M-be futó éleire: $B'M : BM = C'M : CM = D'M : DM = \ldots$ Az arányok egyenlőségéből visszajutunk az A ponthoz. Ez azt jelenti, hogy az A' pont az A pont M-re vonatkozó középpontos hasonló képe, B' a B pontnak, C' a C pontnak és így tovább. $\Rightarrow$ Az S' síkbeli metszet az alapsokszög M középpontú hasonló képe.

1848. Használjuk az 1847. ábra jelöléseit! Az 1847. feladatban láttuk, hogy a gúla alaplappal párhuzamos síkmetszetei hasonlók az alapsokszöghöz, ezért egymáshoz is. Hasonlóságuk aránya: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{MB'}{MB} = \frac{MT'}{MT} = \lambda$, ahol T', illetve T a síkokra az M csúcsból állított merőlegesek talppontjai. $\Rightarrow \frac{t_{A'B'C'D'\ldots}}{t_{ABCD\ldots}} = \lambda^2 = \left(\frac{MT'}{MT}\right)^2 = \frac{(MT')^2}{MT^2}$.

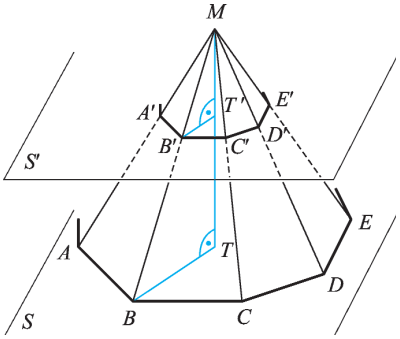
1845.



1846.

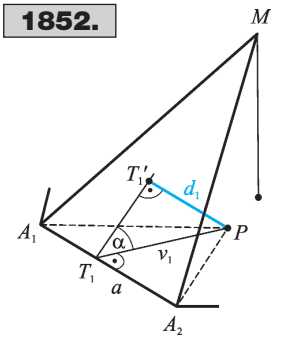


1847.



II

1852.



1849. Legyen az alaplapok területe t_1 és t_2, a síkmetszetek területe t_1' és t_2'! Az 1848. feladatban láttuk, hogy $\frac{t_1'}{t_1}=\left(\frac{M_1T_1'}{M_1T_1}\right)^2$ és $\frac{t_2'}{t_2}=\left(\frac{M_2T_2'}{M_2T_2}\right)^2$. A feltételek szerint $t_1=t_2$, $M_1T_1=M_2T_2$, $T_1T_1'=T_2T_2'$, ezért $M_1T_1'=M_2T_2'$. $\Rightarrow t_1'=t_1\cdot\left(\frac{M_1T_1'}{M_1T_1}\right)^2=$

$=t_2\cdot\left(\frac{M_2T_2'}{M_2T_2}\right)^2=t_2'$.

1850. Legyen a gúla magassága m, a csúcshoz közelebbi síkmetszet területe t'', a távolabbié t'! Az 1848. feladat alapján $t'':t':t=\left(\frac{m}{3}\right)^2:\left(\frac{2m}{3}\right)^2:m^2=\frac{1}{9}:\frac{4}{9}:1$. $\frac{t''}{t}=\frac{1}{9}\Rightarrow t''=\frac{1}{9}\cdot 900=$ $=\underline{\underline{100\text{ cm}^2}}$; $\frac{t'}{t}=\frac{4}{9}\Rightarrow t'=\frac{4}{9}\cdot 900=\underline{\underline{400\text{ cm}^2}}$.

1851. Az 1848. feladat szerint $\frac{t'}{t}=\left(\frac{m'}{m}\right)^2\Rightarrow m'=\sqrt{\frac{t'}{t}m^2}=\sqrt{\frac{t'}{t}}\cdot m$, ahol m' a csúcs és a metsző sík távolsága. *a)* $t'=\frac{1}{2}t\Rightarrow m'=\frac{m}{\sqrt{2}}=\underline{\underline{30\sqrt{2}\text{ cm}}}$. *b)* $t'=\frac{1}{3}t\Rightarrow m'=\frac{m}{\sqrt{3}}=\underline{\underline{20\sqrt{3}\text{ cm}}}$.

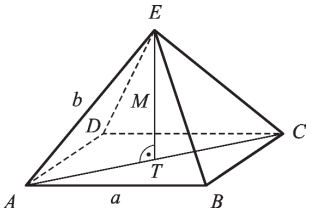
1852. A szabályos gúla minden oldallapja ugyanakkora α szöget zár be az alaplappal. Egy oldallaptól mért távolság $d_1=v_1\cdot\sin\alpha$ (T_1PT_1' derékszögű háromszög). Az oldallapoktól mért távolságok összege, felhasználva, hogy $t_{A_iA_{i+1}P}=t_i=\frac{a\cdot v_i}{2}$ a következő: $d_1+d_2+\ldots+d_n=$

$=v_1\cdot\sin\alpha+v_2\cdot\sin\alpha+\ldots+v_n\cdot\sin\alpha=\sin\alpha\cdot(v_1+v_2+\ldots+v_n)=\sin\alpha\cdot\left(\frac{2t_1}{a}+\frac{2t_2}{a}+\ldots+\frac{2t_n}{a}\right)=$

$=\frac{2\sin\alpha}{a}(t_1+t_2+\ldots+t_n)=\frac{2t_{\text{alap}}\cdot\sin\alpha}{a}=$ állandó.

1853. Tekintsük az 1841. ábrát! A magasság talppontja az $ABC\triangle$ S_D súlypontja, ezért $FS_D=\frac{1}{3}FC=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Pitagorasz tétele az $FS_DD\triangle$-re: $m_a^2=m^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2=m^2+\frac{a^2}{12}$.

1854.



Pitagorasz tétele az $AFD\triangle$-re: $b^2=m_a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=m^2+\frac{a^2}{12}+$ $+\frac{a^2}{4}=m^2+\frac{a^2}{3}$. Az oldalél: $b=\underline{\underline{\sqrt{m^2+\frac{a^2}{3}}}}$.

1854. AC az $ABCD$ négyzet átlója, ezért $AC=a\sqrt{2}\Rightarrow$ $\Rightarrow a=\frac{AC}{\sqrt{2}}$. ATE derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele:

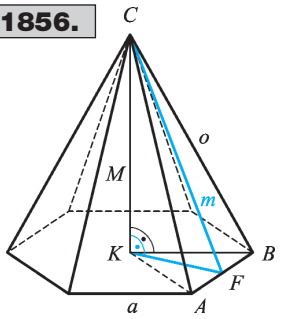
$b^2 = AT^2 + M^2 \Rightarrow AT = \sqrt{b^2 - M^2} \Rightarrow AC = 2AT = 2\sqrt{b^2 - M^2} \Rightarrow a = \dfrac{2\sqrt{b^2 - M^2}}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2 \cdot (b^2 - M^2)}}}$

az alapél.

1855. Tekintsük az 1841. ábrát. A magasság talppontja az $ABC\triangle$ S_D súlypontja, ezért $FS_D = \dfrac{1}{3} FC = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Pitagorasz tétele az $AFD\triangle$-re: $b^2 = FD^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow FD = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}}$. Pitagorasz tétele az $FS_D D\triangle$-re: $DS_D^2 = DF^2 - FS_D^2 = \left(b^2 - \dfrac{a^2}{4}\right) - \dfrac{a^2}{12} = b^2 - \dfrac{a^2}{3} \Rightarrow$

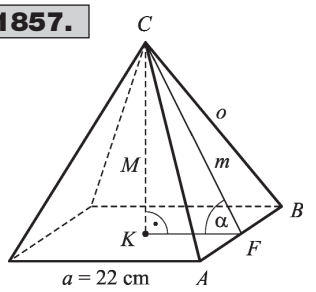
$\Rightarrow DS_D = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{3}} \approx \underline{\underline{19{,}61\text{ cm}}}$.

1856.



1856. Az alaplap szabályos sokszög, ezért $ABK\triangle$ szabályos. $\Rightarrow KB = a$. Pitagorasz tétele a CKB derékszögű háromszögre: $a^2 = o^2 - M^2 \Rightarrow a = \sqrt{205} \approx \underline{\underline{14{,}32\text{ cm}}}$.

1857.

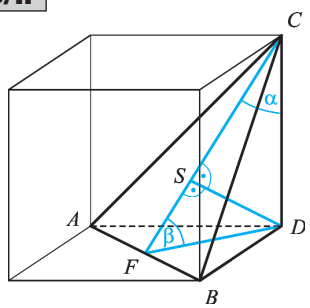


1857. KFC derékszögű háromszögben $KF = a : 2 = 11$ cm; $\alpha = 63{,}6°$; $\cos\alpha = \dfrac{11}{m} \Rightarrow m \approx 24{,}74$ cm; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{M}{11} \Rightarrow M \approx$ $\approx \underline{\underline{22{,}16\text{ cm}}}$. $ABC\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow F$ felezéspont esetén $AFC\triangle$ derékszögű. Pitagorasz tétele szerint: $o^2 = m^2 + \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow$

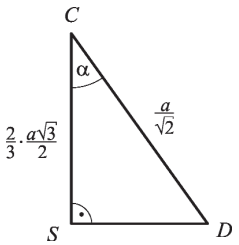
$\Rightarrow o \approx \underline{\underline{27{,}07\text{ cm}}}$.

1858. Döntsük a gúlát az egyik oldallapjára! Ágyazzuk be a testet egy kockába! Ha az alapélek a hosszúságúak, akkor az oldalélek (egyben a kocka élei) $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ hosszúságúak. A D csúcsnak az alapra vetett merőleges vetülete az a oldalú szabályos háromszög S súlypontja. Az oldalél és az alaplap szöge a DSC derékszögű háromszögből számolható: $\cos\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} : \dfrac{a}{\sqrt{2}} =$

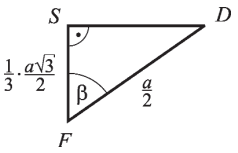
1858/I.



1858/II.

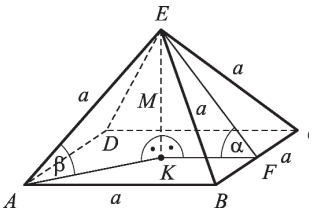


1858/III.



II

1859.



$= \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \alpha \approx \underline{\underline{35{,}26°}}$. Az oldallap és az alaplap szöge a DSF derékszögű háromszögből számolható: $\cos\beta = \frac{a\sqrt{3}}{6} : \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta \approx \underline{\underline{54{,}74°}}$. DS testmagasság az $FSD\triangle$-re felírt Pitagorasz-tételből: $M^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{36} \Rightarrow M = \underline{\underline{\frac{a\sqrt{6}}{6}}}$.

1859. Az 1895. ábra jelöléseit használjuk. *a)* Pitagorasz tétele a KFE derékszögű háromszögre, ahol $KF = \frac{a}{2}$; $EF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $KE = M$. $M^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow M = \underline{\underline{\frac{a\sqrt{2}}{2}}}$.

b) oldallap és alaplap szöge KFE derékszögű háromszögben: $\cos\alpha = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \approx \underline{\underline{54{,}73°}}$.

c) oldalél és alaplap szöge az AKE derékszögű háromszögben: $AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $EK = M = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

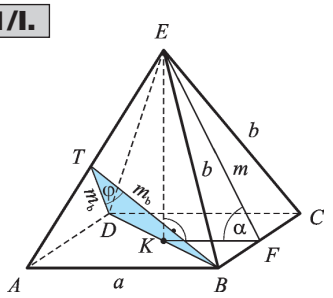
$\Rightarrow$ a háromszög egyenlő szárú $\Rightarrow \beta = \underline{\underline{45°}}$.

1860. Tekintsük a 1841 ábrát! A D pont $[ABC]$ síkra vetett merőleges vetülete az $ABC\triangle$ súlypontja, ezért a $BCD\triangle$ alapsíkra vetett merőleges vetülete a $BCS_D\triangle$. Jelöljük az alaplap területét t-vel! $t_{S_D BC} = \frac{t}{3}$ a súlypont tulajdonsága miatt, $t_{BCD} = \frac{2t}{3}$ a feltétel miatt. A vetület területe az eredeti terület $\cos\varepsilon$-szorosa, azaz $\frac{t}{3} = \frac{2t}{3} \cdot \cos\varepsilon \Rightarrow \cos\varepsilon = 0{,}5 \Rightarrow \varepsilon = \underline{\underline{60°}}$.

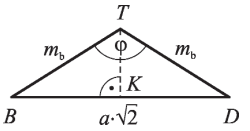
1861. A gúla felszíne: $A = a^2 + 2am$. A feltétel szerint $A : a^2 = 2{,}56$, azaz $(a^2 + 2am) : a^2 = 2{,}56 \Rightarrow \frac{m}{a} = 0{,}78$. Használjuk az 1861/I. ábra jelöléseit!

a) KEF derékszögű háromszögből: $\cos\alpha = \frac{a}{2} : m = \frac{a}{2m} = 0{,}641 \Rightarrow \alpha \approx \underline{\underline{50{,}13°}}$ az oldallap és az alaplap szöge.

1861/I.



1861/II.



II

b) EBC oldallap területe kétféleképpen: $\frac{am}{2} = \frac{bm_b}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{am}{b} = m_b$. Vegyük a BDT síkmetszetet! $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : m_b =$

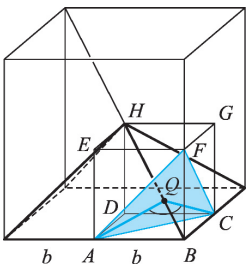
$= \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{am}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{b}{m}$.

Az EFB derékszögű háromszögre írt Pitagorasz-tételből:

$b^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow \frac{b^2}{m^2} = 1 + \frac{a^2}{4m^2} = 1 + \frac{1}{4 \cdot 0{,}78^2} \Rightarrow \frac{b}{m} = 1{,}18 \Rightarrow$

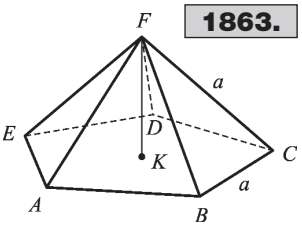
$\Rightarrow \sin\frac{\varphi}{2} = 0{,}8399 \Rightarrow \varphi \approx \underline{\underline{114{,}26°}}$.

1862.



1862. Legyen a gúla alapéle $2b$! Helyezzük rá egy $2b$ élű kocka alaplapjára a gúlát! Tekintsük a kockának az 1862. ábrán látható $ABCDEFGH$ részét, ami egy b élű kocka! A BH testátló merőleges az $[ACF]$ síkra, és azt az $ACF\triangle$ Q súlypontjában metszi. $\Rightarrow AQC\sphericalangle = 120° \Rightarrow$ A H pont a gúla csúcsa. $\Rightarrow$ A gúla magassága $\underline{\underline{b = 16\text{ cm}}}$.

1863.



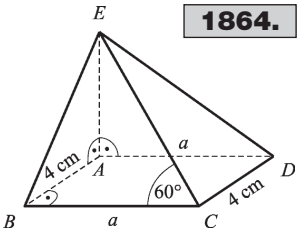
1863. Az 1863. ábra szerint az FC oldalél szögét keressük a különböző alapélekkel.

1. eset: BC és DC alapélekkel: $\underline{60°}$.

2. eset: AB és ED alapélekkel ugyanakkora szöget zár be. Felhasználjuk, hogy szabályos ötszögben az ED oldal párhuzamos az AC átlóval, AB oldal pedig párhuzamos az EC átlóval. AB és FC kitérő egyenesek szöge egyenlő az EC és FC metsző egyenesek szögével. Vegyük az ECF síkmetszetet, ami egy egyenlő szárú háromszög, alapja az EC átló, szárai az EF és FC egyenlő élek! Ez a háromszög egybevágó az $ECD\triangle$-gel, mert EC oldaluk közös, másik két oldaluk pedig a hosszúságú. $EDC\sphericalangle = 108° \Rightarrow ECD\sphericalangle = DEC\sphericalangle = 36° \Rightarrow \sphericalangle(AB; FC) = \sphericalangle(ED; FC) = \underline{\underline{36°}}$.

3. eset: EA alapéllel. Vegyük a gúla $[FKC]$ síkkal való tengelymetszetét! FK merőleges az alapsíkra, ezért merőleges annak minden egyenesére. $\Rightarrow \underline{FK \perp EA}$. KC egyenes az ötszög szimmetriatengelye, ezért $\underline{KC \perp EA}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $EA \perp [FKC] \Rightarrow EA$ merőleges $[FKC]$ minden egyenesére $\Rightarrow EA \perp FC$, tehát EA és FC élek szöge $\underline{\underline{90°}}$.

1864.



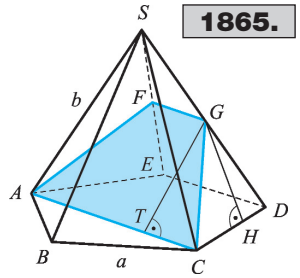
1864. $EBC\triangle$ derékszögű, mert $\underline{BC \perp AB}$ ($ABCD$ téglalap), $EA \perp [ABCD] \Rightarrow \underline{EA \perp BC}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $BC \perp [EAB] \Rightarrow BC \perp EB$. $EBC\triangle$-ben 60° és 30° a hegyesszögek $\Rightarrow$

$\Rightarrow EC = 2BC = 2a$ és $EB = \sqrt{3} \cdot a$; $AD = AE$ feltétel miatt $M = a$.

Pitagorasz tétele az ABE derékszögű háromszögre: $EB^2 = AB^2 +$

$+ AE^2$, azaz $3a^2 = 4^2 + a^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \Rightarrow M = \underline{\underline{2\sqrt{2}\text{ cm}}}$.

1865.



1865. A síkmetszet az $ACGF$ húrtrapéz. FG középvonala az $EDS\triangle$-nek, ezért $FG = \frac{a}{2}$. CG a $CDS\triangle$ súlyvonala, ezért $CH : HD = 3 : 1$. Pitagorasz tételét alkalmazva GHD, majd GHC derékszögű háromszögben: $GH^2 = GD^2 - HD^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2$ és

II

$GC^2 = GH^2 + HC^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{b^2 + 2a^2}{4}$. AC egy a oldalú szabályos ötszög átlója, ezért $AC = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)a}{2}$. $ACGF$ húrtrapézban $TC = \frac{AC - FG}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{4}$. GTC derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele: $GT^2 = GC^2 - CT^2 = \frac{4b^2 + 3a^2}{16}$.

$t_{ACGF} = \frac{(AC + FG)\cdot GT}{2} = \frac{\left(2+\sqrt{5}\right)\cdot a \cdot \sqrt{4b^2 + 3a^2}}{16}$ a síkmetszet területe.

1866. *a)* $A \approx \underline{618\,\text{cm}^2}$. *b)* $A \approx \underline{409{,}54\,\text{cm}^2}$. *c)* $A \approx \underline{845{,}46\,\text{cm}^2}$. *d)* $A \approx \underline{1625{,}5\,\text{cm}^2}$.

1867. $35{,}17\,\text{m}^2$ önlemez szükséges.

1868. *a)* $V \approx \underline{26{,}97\,\text{dm}^3}$. *b)* $V = \underline{321{,}9\,\text{dm}^3}$. *c)* $V \approx \underline{0{,}101\,\text{m}^3}$.

d) Tekintsük az 1854. ábrát. Legyen $a = 56$ cm, $b = 78$ cm! Pitagorasz tétele a $TEC\triangle$-re, ahol $TC = \frac{56\cdot\sqrt{2}}{2} \Rightarrow M^2 = 78^2 - \left(\frac{56\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow M \approx 67{,}2$ cm. $V = \frac{1}{3}\cdot 56^2 \cdot 67{,}2 = 70\,248\ \text{cm}^3 = \underline{70{,}248\,\text{dm}^3}$.

e) Tekintsük az 1855. ábrát, legyen $a = 5{,}9$ cm, $o = 12{,}3$ cm! $KAB\triangle$ szabályos, ezért $KB = 5{,}9$ cm. Pitagorasz tétele a $CKB\triangle$-re: $M^2 = 12{,}3^2 - 5{,}9^2 \Rightarrow M \approx 10{,}8$ cm. $V = \frac{1}{3}\cdot 6 \cdot \frac{5{,}9^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot 10{,}8 = \underline{325{,}36\,\text{cm}^3}$.

1869. Tekintsük az 1854. ábrát, legyen $AC = e$ és $b = a$! $e = 6$ cm $\Rightarrow a = 3\sqrt{2}$ cm.

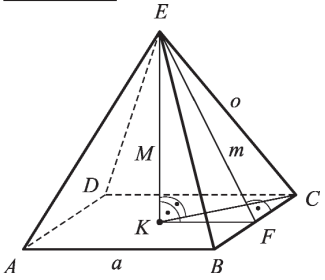
Pitagorasz tétele az $ETC\triangle$-re: $M^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 3^2 \Rightarrow M = 3$ cm. $V = \frac{1}{3}\cdot\left(3\sqrt{2}\right)^2 \cdot 3 = \underline{18\,\text{cm}^3}$ és

$A = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + 4\cdot\frac{\left(3\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \underline{18\left(1+\sqrt{3}\right)\text{cm}^2}$.

1870. Tekintsük az 1812. ábrát, legyen $x = 32$ cm, $y = 12$ cm, $z = 18$ cm!

$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{12\cdot 18}{2}\cdot 32 = \underline{1152\,\text{cm}^3}$. Pitagorasz tétele az ABD, BCD, illetve CDA derékszögű háromszögekre: $AB^2 = 12^2 + 18^2 \Rightarrow AB = 6\cdot\sqrt{13} \approx 21{,}63$ cm. $BC^2 = 18^2 + 32^2 \Rightarrow BC \approx 36{,}72$ cm. $AC^2 = 12^2 + 32^2 \Rightarrow AC \approx 34{,}18$ cm. $ABC\triangle$-ben $s = 46{,}3$ cm, ezért a Heron-képlet felhasználásával

1871.

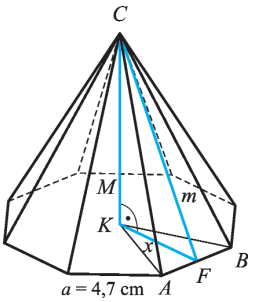


$t_{ABC\triangle} = 364{,}17\ \text{cm}^2 \Rightarrow A = \frac{12\cdot 18}{2} + \frac{18\cdot 32}{2} + \frac{32\cdot 12}{2} + t_{ABC} = \underline{952{,}17\,\text{cm}^2}$.

1871. A feltétel szerint az oldallapok olyan egyenlő szárú háromszögek, amiknek a szárszöge 45°, alapja 8 cm. Az oldallapok magasságára: $\text{tg}\,22{,}5° = \frac{4}{m} \Rightarrow m \approx 9{,}66$ m. Pitagorasz tétele a $KFE\triangle$-re (1871. ábra): $M^2 = 9{,}66^2 - 4^2 \Rightarrow M = 8{,}79$ cm. $\Rightarrow$ $\Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot 8^2 \cdot 8{,}79 \approx \underline{187{,}5\,\text{cm}^3}$.

1872. *a)* Tekintsük az 1871. ábrát, legyen $a = 7$ cm!

1872.



$A = a^2 + 4 \cdot \frac{am}{2} \Rightarrow m = \frac{A - a^2}{2a} = 15{,}93$ cm. Pitagorasz tétele a KFE derékszögű háromszögre: $m^2 = M^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow M = \sqrt{m^2 - \frac{a^2}{4}} = 15{,}54$ cm.

$V = \frac{1}{3} a^2 M \approx \underline{\underline{253{,}8\ \text{cm}^3}}$.

b) Tekintsük az 1856. ábrát, legyen $a = 5{,}5$ cm!

$A = 6 \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{am}{2} \right) \Rightarrow m = \frac{A - \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}}{3a} = 1172$ cm. $ABK\triangle$ szabályos, ezért $KF = \frac{5{,}5 \cdot \sqrt{3}}{2}$ cm. Pitagorasz tétele a KFC derékszögű háromszögre: $m^2 = M^2 + KF^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow M = \sqrt{m^2 - KF^2} = 10{,}71$ cm. $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} M = \underline{\underline{280{,}58\ \text{cm}^3}}$.

c) Tekintsük az 1871. ábrát! $ABK\triangle$ egyenlő szárú, szárszöge 45°, ezért $\text{tg}\ \frac{45°}{2} = \frac{a}{2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{a}{2\ \text{tg}\ 22{,}5°} \Rightarrow x = 5{,}67$ cm $\Rightarrow t_{\text{alap}} = 8 \cdot \frac{4{,}7 \cdot 5{,}67}{2} = 106{,}56\ \text{cm}^2$, valamint $A = t_{\text{alap}} + 8 \cdot t_{\text{oldallap}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 272 = 106{,}56 + 8 \cdot \frac{4{,}7\, m}{2} \Rightarrow m = 8{,}79$ cm. Pitagorasz tétele a KFC derékszögű háromszögre:

$m^2 = M^2 + x^2 \Rightarrow M = \sqrt{m^2 - x^2} = 6{,}72$ cm. $V = \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot M \approx \underline{\underline{238{,}9\ \text{cm}^3}}$.

1873. *a)* Tekintsük az 1871. ábrát, legyen $a = 6{,}3$ cm! $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 M \Rightarrow M = 3V : a^2 = 40{,}34$ cm. Pitagorasz tétele az EKC derékszögű háromszögre, melyben $KC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow o^2 = M^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow o = \underline{\underline{40{,}58\ \text{cm}}}$.

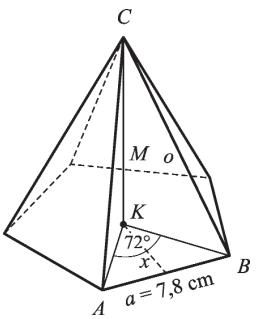
b) Tekintsük az 1873. ábrát! ABK olyan egyenlő szárú háromszög, aminek szárszöge 72°, ezért

$\text{tg}\ 36° = \frac{3{,}9}{x} \Rightarrow x = \frac{3{,}9}{\text{tg}\, 36°} = 5{,}37$ cm. $V = \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot M = \frac{5 \cdot \frac{ax}{2} \cdot M}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow M = 15{,}3$ cm; $ABK\triangle$-ből $KB = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} = 6{,}64$ cm. Pitagorasz tétele a KBC derékszögű háromszögre: $o^2 = 15{,}3^2 + 6{,}64^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow o = \underline{\underline{16{,}68\ \text{cm}}}$.

1873.



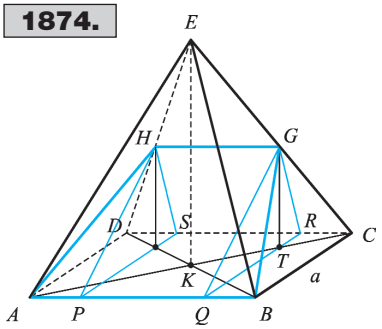
c) Tekintsük az 1856. ábrát, legyen $a = 5{,}9$ cm! $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot M \Rightarrow$

$\Rightarrow M = \frac{2V}{a^2\sqrt{3}} \approx 17{,}7$ cm; $ABK\triangle$ szabályos, ezért $KB = a = 5{,}9$ cm. Pitagorasz tétele a KBC derékszögű háromszögre: $o^2 = M^2 + a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow o = \underline{\underline{18{,}66\ \text{cm}}}$.

II

1874.



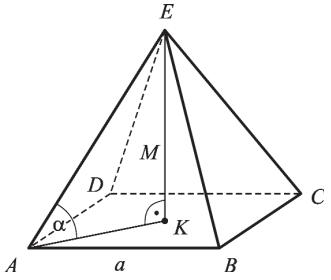
1874. Legyen a gúla alapéle a, magassága M, a keresett távolság $m = GT$! A síkmetszet az $ABGH$ húrtrapéz. $ABCDE$ gúla térfogata: $V = \frac{1}{3}\, a^2\, M$; $ABCDGH$ test térfogata: $\frac{1}{2}\, V = \frac{1}{6}\, a^2\, M$. $ABCDGH$ test felbontható egy háromszög alapú hasábra ($QRGPSH$) és két egybevágó téglalap alapú gúlára ($APSDH$ és $QBCRG$). A hasáb térfogata: $V_1 = \frac{QR \cdot GT}{2} \cdot GH = \frac{am}{2} \cdot GH$. A téglalap alapú gúla térfogata: $V_2 = \frac{1}{3}\, QB \cdot BC \cdot GT = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB - GH}{2} \cdot am =$ $= \frac{(a - GH)am}{6}$. Az E középpontú hasonlóság alapján: $\frac{GH}{DC} = \frac{EK - GT}{EK} \Rightarrow \frac{GH}{a} = \frac{M - m}{M} \Rightarrow$ $\Rightarrow GH = \frac{(M-m)a}{M}$. $V_1 + 2V_2 = 0{,}5\, V \Rightarrow \frac{am}{2} \cdot \frac{(M-m)a}{M} + 2 \cdot \frac{\left(a - \frac{(M-m)a}{M}\right) \cdot am}{6} = \frac{a^2 M}{6} \Rightarrow$ $\Rightarrow m^2 - 3mM + M^2 = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\, M > M$, ez nem lehet. $m_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot M$ a keresett távolság.

1875. Az 1875. ábra jelölései szerint: $\alpha = 72°28'$, $a = 2{,}56$ m. AKE derékszögű háromszögben $AK = \frac{2{,}56 \cdot \sqrt{2}}{2} = 1{,}81$ m és $\operatorname{tg} 72°28' = \frac{M}{1{,}81} \Rightarrow M = 5{,}74$ m. $V = \frac{1}{3}\, a^2 M = \underline{\underline{12{,}54\ \text{m}^3}}$.

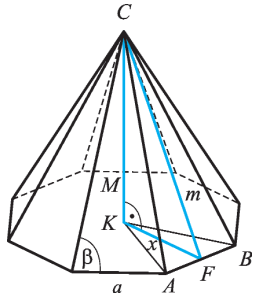
1876. Tekintsük az 1812. ábrát, legyen $a = b = c = 2{,}54$ cm, $x = y = z$! Döntsük a gúlát az egyik oldallapjára! Az oldallapok olyan egyenlő szárú derékszögű háromszögek, amiknek 2,54 cm az átfogója. $\Rightarrow o = \frac{2{,}54}{\sqrt{2}}$. $A = \frac{2{,}54^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{2{,}54^2}{4} \approx \underline{\underline{7{,}63\ \text{cm}^2}}$ és $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{o^2}{2} \cdot o = \frac{o^3}{6} \approx$ $\approx \underline{\underline{0{,}97\ \text{cm}^3}}$.

1877. Tekintsük az 1877. ábrát, legyen $a = 4$ dm, $\beta = 75°$! KAB olyan egyenlő szárú háromszög, aminek szárszöge 45°, ezért $\operatorname{tg} \frac{45°}{2} = \frac{a}{2x} \Rightarrow x = \frac{4}{2 \operatorname{tg} 22{,}5°} = 4{,}83$ dm $\Rightarrow t_{\text{alap}} = 8 \cdot \frac{ax}{2} =$

1875.



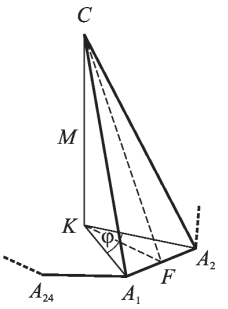
1877.



$= 77{,}25\ \text{dm}^2$. ABC olyan egyenlő szárú háromszög, aminek alapon fekvő szöge 75°, ezért $\text{tg}\,75° = \dfrac{2m}{a} \Rightarrow m = \dfrac{4\,\text{tg}\,75°}{2} = 7{,}46\ \text{dm} \Rightarrow t_{\text{oldallap}} = \dfrac{am}{2} =$ $= 14{,}92\ \text{dm}^2$.

$A = t_{\text{alap}} + 8t_{\text{oldallap}} = 196{,}68\ \text{dm}^2$. Pitagorasz tétele a KFC derékszögű háromszögre: $M^2 + x^2 = m^2 \Rightarrow M = 5{,}68\ \text{dm}$; $V = \dfrac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot M = \underline{\underline{146{,}4\ \text{m}^3}}$.

1879.



1878. Tekintsük az 1877. ábrát! $M = 37{,}65\ \text{m}$; $KA = r = 3{,}15\ \text{m}$. KAB olyan egyenlő szárú háromszög, aminek szárszöge 45°, ezért $t_{\text{alap}} =$ $= 8 \cdot \dfrac{r^2 \sin 45°}{2} = 28{,}06\ \text{m}^2 \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}\, t_{\text{alap}} \cdot M = = \underline{\underline{352{,}2\ \text{m}^3}}$.

1879. Tekintsük az 1879. ábrát! $A_1A_2 = 1{,}9\ \text{cm}$; $KFC \sphericalangle = 87°11'$. Az alaplap a köré írható kör középpontjából a csúcsokhoz vezető sugarakkal 24 db olyan egyenlő szárú háromszögre bontható, amelyek szárszöge 15°. KFA_2 derékszögű háromszögből: $\text{tg}\,7{,}5° = \dfrac{1{,}9}{2KF} \Rightarrow KF = 7{,}21\ \text{cm}$. CKF derékszögű háromszögből: $\text{tg}\,87°11' = \dfrac{M}{7{,}21} \Rightarrow M = 146{,}54\ \text{cm}$. $t_{\text{alap}} = 24 \cdot \dfrac{1{,}9 \cdot 7{,}21}{2} =$ $= 164{,}39\ \text{cm}^2 \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot \text{M} \approx 8029{,}8\ \text{cm}^3 \approx \underline{\underline{8{,}03\ \text{dm}^3}}$.

1880. Használjuk az 1871. ábra jelöléseit! $V = 864\ \text{cm}^3$; $a : M = 2 : 3$, ezért $a = \dfrac{2}{3} M$; $V = \dfrac{1}{3}\, a^2 M = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4}{9} M^3 = \dfrac{4}{27} M^3 \Rightarrow 864 = \dfrac{4}{27} M^3 \Rightarrow M = 18\ \text{cm} \Rightarrow a = 12\ \text{cm}$. Pitagorasz tétele a CKF derékszögű háromszögre: $m^2 = M^2 + \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow m = 6\sqrt{10} \approx 18{,}97\ \text{cm}$;

$A = a^2 + 4 \cdot \dfrac{am}{2} = 144 + 144\sqrt{10} = \underline{\underline{144\left(1 + \sqrt{10}\right)\text{cm}^2}} \approx \underline{\underline{599{,}37\ \text{cm}^2}}$.

1881. Az 1871. ábra jelöléseivel: $M = 2\sqrt{2a} \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}\, a^2 \cdot M = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{2\sqrt{2}}} =$

$= 3{,}75\ \text{m} \Rightarrow M = 10{,}62\ \text{m}$. Pitagorasz tétele a $KFE\triangle$-re: $m^2 = M^2 + \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow m = 10{,}78\ \text{m}$;

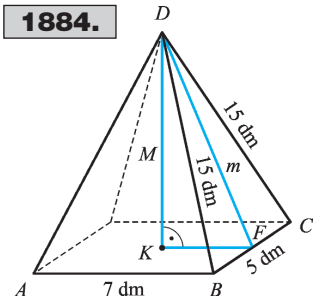
$A = a^2 + 4 \cdot \dfrac{am}{2} = \underline{\underline{94{,}94\ \text{m}^2}}$.

1882. Az 1871. ábra jelöléseivel: Az oldallapok szabályos háromszögek, ezért $m = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Pitagorasz tétele a KFC derékszögű háromszögre: $m^2 = M^2 + \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow M = \sqrt{\dfrac{3}{4} a^2 - \dfrac{1}{4} a^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

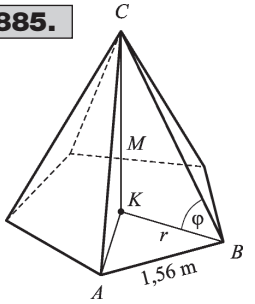
$V = \dfrac{1}{3}\, a^2 M = \dfrac{1}{6}\, a^3 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\dfrac{6V}{\sqrt{2}}} \approx \underline{\underline{6\ \text{cm}}}$.

II

1884.



1885.



1883. Használjuk az 1875. ábra jelöléseit, legyen $\alpha = 46°20'$, $V = 4{,}86\ \text{cm}^3$! AKE derékszögű háromszögben $AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 46°20' = \frac{2M}{a\sqrt{2}} \Rightarrow M = \frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} 46°20'$; $V = \frac{1}{3}a^2 M =$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a^3 \cdot \operatorname{tg} 46°20' \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{6V}{\sqrt{2}\operatorname{tg} 46°20'}} \approx \underline{\underline{2{,}7\ \text{m}}}$.

1884. Pitagorasz tétele a DFC derékszögű háromszögre: $m^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 15^2 \Rightarrow m^2 = \frac{875}{4}\ \text{dm}^2$.

Pitagorasz tétele a KFD derékszögű háromszögre: $M^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{875}{4} \Rightarrow M = 14{,}37\ \text{dm}$;

$V = \frac{1}{3}\cdot 7\cdot 5\cdot 14{,}37 \approx \underline{\underline{167{,}65\ \text{dm}^3}}$.

1885. KAB olyan egyenlő szárú háromszög, aminek szárszöge $72° \Rightarrow \sin 36° = \frac{1{,}56}{2r} \Rightarrow r \approx$

$\approx 1{,}33\ \text{cm}$. CKB derékszögű háromszögben: $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} 72°45' = \frac{M}{1{,}33} \Rightarrow M = 4{,}27\ \text{cm}$;

$V = t_{\text{alap}}\cdot M = \frac{1}{3}\cdot 5\cdot\frac{1{,}33\cdot\sin 72°}{2}\cdot 4{,}27 \approx 5{,}99\ \text{cm}^3 \Rightarrow m = \varrho\cdot V = 7{,}2\cdot 5{,}99 \approx \underline{\underline{43{,}1\ \text{g}}}$.

1886. Az 1871. ábra jelöléseit használva: $t_{\text{alap}} = a^2 = 1024\ \text{cm}^2 \Rightarrow a = 32\ \text{cm} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot t_{\text{alap}}\cdot M =$

$= \underline{\underline{16{,}47\ \text{cm}}}$. Pitagorasz tétele a KFE derékszögű háromszögre: $m^2 = 16^2 + 16{,}47^2 \Rightarrow m =$

$= 22{,}96\ \text{cm} \Rightarrow t_{\text{palást}} = 4\cdot\frac{am}{2} \approx 1469{,}58\ \text{cm}^2 \approx \underline{\underline{14{,}7\ \text{dm}^2}}$.

1887. Az 1871. ábra jelöléseit használva: $a = 45\ \text{cm} = 4{,}5\ \text{dm}$. $V =$ tömeg : sűrűség $=$

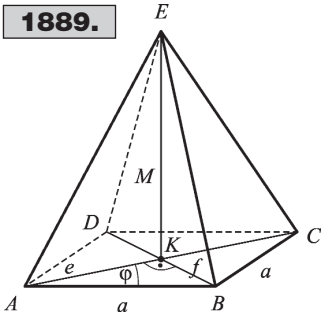
$= 134{,}96\ \text{dm}^3$; $V = \frac{1}{3}\cdot t_{\text{alap}}\cdot M \Rightarrow 134{,}96 = V = \frac{1}{3}\cdot 4{,}5^2\cdot M \Rightarrow M \approx \underline{\underline{20\ \text{dm}}}$.

1888. Tekintsük az 1856. ábrát, legyen $a = 4{,}5\ \text{cm}$, $m = 9\ \text{cm}$! $ABK\triangle$ szabályos, ezért $KF = \frac{4{,}5\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}$. Pitagorasz tétele a KFC derékszögű háromszögre: $9^2 = M^2 + \left(\frac{4{,}5\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow$

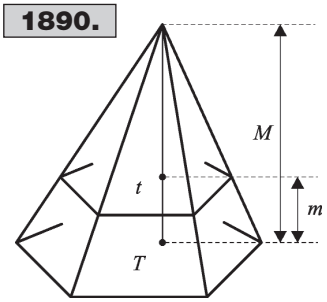
$\Rightarrow M \approx 8{,}11\ \text{cm}$; $V = \frac{1}{3}\cdot 6\cdot\frac{4{,}5\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot 8{,}11 \approx \underline{\underline{142{,}27\ \text{cm}^3}}$.

II

1889.



1890.

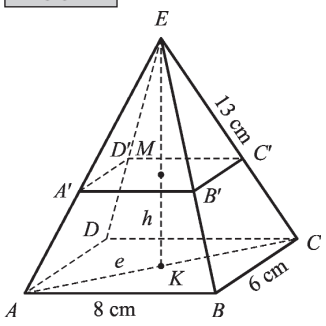


1889. $M = 9$ cm; $V = 62{,}52$ cm^3; $t_{ACE} = 36{,}7$ cm^2. $V = \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot M \Rightarrow t_{\text{alap}} = \frac{3V}{M} = 20{,}84$ cm^2; $t_{ACE} = \frac{e \cdot M}{2} \Rightarrow e = \frac{2t_{ACE}}{M} = 8{,}16$ cm; $t_{\text{alap}} = \frac{e \cdot f}{2} \Rightarrow f = \frac{2t_{\text{alap}}}{e} = 5{,}11$ cm. ABK derékszögű háromszögben $\operatorname{tg} \varphi = \frac{f}{2} : \frac{e}{2} = \frac{f}{e} = 0{,}6263 \Rightarrow \varphi = 32° \Rightarrow$ Az alaplap egyik szöge $\underline{\underline{64°}}$. Pitagorasz tétele az $ABK\triangle$-re: $a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 \Rightarrow a = \underline{\underline{4{,}81\,\text{cm}}}$.

1890. $M = 14$ cm; $m = 4{,}2$ cm; $t = 60$ cm^2. Az alappal párhuzamos sík egy, az eredetivel hasonló gúlát metsz le a gúlából. $\lambda = \frac{M-m}{M} = 1 - \frac{m}{M} = 1 - \frac{4{,}2}{14} = \frac{7}{10}$. A levágott gúla térfogata: $V' = \frac{1}{3} t(M-m) = 196$ cm^3. Hasonló testek térfogatának aránya: $\frac{V'}{V} = \lambda^3 \Rightarrow$ $\Rightarrow V = \frac{V'}{\lambda^3} \Rightarrow V = \frac{196 \cdot 10^3}{7^3} = \frac{4}{7} \cdot 10^3 \approx \underline{\underline{571{,}43\,\text{cm}^3}}$.

1891. Az alaplap átlója az ABC derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével: $e^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow e = 10$ cm. Pitagorasz tétele a KCE derékszögű háromszögre: $M^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow M = 12$ cm. Az $A'B'C'D'$ sík egy, az eredetivel hasonló gúlát metsz le a gúlából. A két gúla térfogatának aránya: $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, másrészt $\lambda = \frac{M-h}{M} = 1 - \frac{h}{M}$. A kettőt összevetve: $1 - \frac{h}{12} =$ $= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow h = 12 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ cm $\approx 2{,}48$ cm.

1891.

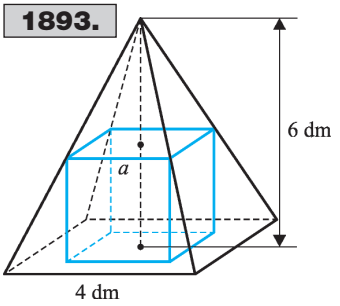


1892. A csúcshoz közelebbi sík egy olyan gúlát metsz le, amely hasonló az eredeti gúlához. Térfogatuk aránya: $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{3} = \lambda_1^3 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow \frac{m_1}{M} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow m_1 = \frac{45}{\sqrt[3]{3}} \approx \underline{\underline{31{,}2\,\text{cm}}}$.

A csúcstól távolabbi sík is egy olyan gúlát metsz le, amely hasonló az eredeti gúlához. Térfogatuk aránya: $\frac{V_2'}{V} = \frac{2}{3} = \lambda_2^3 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lambda_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{m'_2}{M} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \Rightarrow m'_2 = 45 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 39{,}31$ cm.

II

1893.



A csúcstól számított második test magassága: $m_2 = m_2' - m_1 \approx$ $\approx \underline{\underline{8{,}11\text{ cm}}}$. A csúcstól számított harmadik test magassága: $m_3 = M - m_2' \approx \underline{\underline{5{,}69\text{ cm}}}$.

1893. A kocka fedőlapjának síkja egy, az eredetivel hasonló gúlát metsz le. A lemetszett gúla magassága $m = 6 - a$, alapéle a. A hasonlóság aránya: $\lambda = \frac{a}{4}$, másrészt $\lambda = \frac{6-a}{6} \Rightarrow \frac{a}{4} =$ $= \frac{6-a}{6} \Rightarrow a = 2{,}4\text{ dm} \Rightarrow V = a^3 = \underline{\underline{13{,}824\text{ dm}^3}}$.

Csonkagúla

1894. Legyen $PQHE$ a csonkagúla alapsíkra merőleges metszete. $\Rightarrow EP \perp AB \Rightarrow EP = m$ az $ABFE$ oldallap magassága. A feltétel szerint: $a^2 + b^2 = 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot m \Rightarrow m = \frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$.

Pitagorasz tétele a $PTE\triangle$-re: $M^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = m^2$, azaz $M^2 + \frac{(a-b)^2}{4} = \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{4(a+b)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow M^2 = \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{4(a+b)^2} - \frac{(a-b)^2\cdot(a+b)^2}{4(a+b)^2} = \frac{\left(a^2+b^2\right)^2 - \left(a^2-b^2\right)^2}{4(a+b)^2} =$$

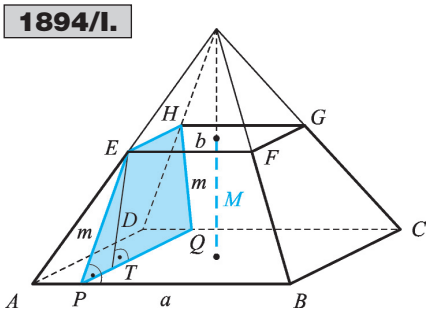
$$= \frac{\left(a^2+b^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-a^2+b^2\right)}{4(a+b)^2} = \frac{2a^2\cdot 2b^2}{4(a+b)^2} \Rightarrow M = \underline{\underline{\frac{ab}{a+b}}}.$$

1895. Az 1894/I. ábra jelöléseivel: $M = 52$ cm; $a = 55$ cm; $b = 32$ cm. Vegyük a csonkagúla EH élre illeszkedő, alapsíkra merőleges metszetét! A síkmetszet olyan húrtrapéz, aminek szárai a csonkagúla oldallapjainak magasságával egyenlők, magassága pedig a testmagassággal. Az 1894/II. ábrát tekintve: $PT = (55 - 32) : 2 = 11{,}5$ cm. Pitagorasz tétele a $PTE\triangle$-re: $m^2 = 11{,}5^2 + 52^2 \Rightarrow$

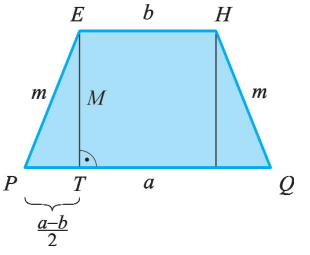
$\Rightarrow m = 53{,}26$ cm. $A = 55^2 + 32^2 + 4 \cdot \frac{55+32}{2} \cdot 53{,}26 \approx 13\,316{,}2\text{ cm}^2 \approx \underline{\underline{1{,}33\text{ m}^2}}$.

$V = \frac{52}{3} \cdot (55^2 + 55 \cdot 32 + 32^2) \approx 100\,689{,}3\text{ cm}^3 \approx \underline{\underline{100{,}69\text{ dm}^3}}$.

1894/I.

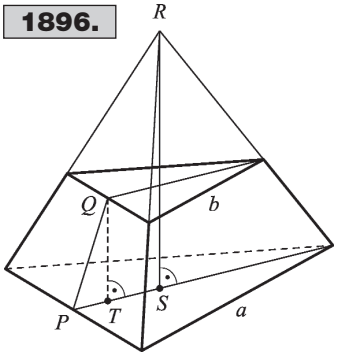


1894/II.

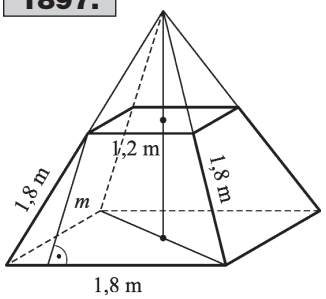


II

1896.



1897.



1896. Tekintsük a csonkagúla kiegészítő gúláját! Az egyesített test hasonló a kiegészítő gúlához. A hasonlóság aránya: $\lambda = \dfrac{PS - PT}{PS} = 1 - \dfrac{PT}{PS}$. Az alap háromszög súlypontja S, tehát $PS = \dfrac{49{,}5\sqrt{3}}{6}$. $QPT\sphericalangle = 60°$ és $QT = 20\,\text{cm} \Rightarrow QP = \dfrac{40}{\sqrt{3}}$ és $PT = \dfrac{20}{\sqrt{3}} \Rightarrow \lambda =$

$= 1 - \dfrac{20}{\sqrt{3}} : \dfrac{49{,}5\sqrt{3}}{6} = \dfrac{9{,}5}{49{,}5}$. A fedőlap és az alaplap hasonlóságából $b = \lambda \cdot a = \dfrac{9{,}5}{49{,}5} \cdot 49{,}5 =$

$= 9{,}5\,\text{cm}$. $A = \dfrac{49{,}5^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{9{,}5^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \dfrac{49{,}5 + 9{,}5}{4} \cdot \dfrac{40\sqrt{3}}{3} \approx 3144\,\text{cm}^2 \approx \underline{\underline{31{,}44\,\text{dm}^2}}$.

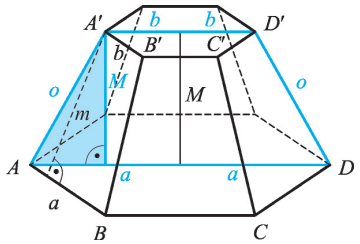
$V = \dfrac{20}{3} \cdot \left(\dfrac{49{,}5^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{49{,}5 \cdot 9{,}5\sqrt{3}}{4} + \dfrac{9{,}5^2\sqrt{3}}{4} \right) \approx 8691{,}3\,\text{cm}^3 \approx \underline{\underline{8{,}69\,\text{dm}^3}}$.

1897. Az oldallapok magassága Pitagorasz tételével: $m^2 = 1{,}8^2 - \dfrac{(1{,}8 - 1{,}2)^2}{4} \Rightarrow m = 1{,}77\,\text{m}$.

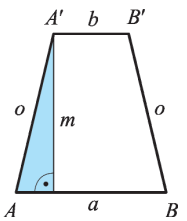
$A' = 1{,}2^2 + 4 \cdot \dfrac{1{,}2 + 1{,}8}{2} \cdot 1{,}77 \approx \underline{\underline{12{,}06\,\text{m}^2}}$.

1898. Vegyük a csonkagúla olyan tengelymetszetét, ami az alaplap egyik szimmetriaátlójára illeszkedik! Ez a síkmetszet egy olyan húrtrapéz, aminek magassága a testmagasság, szárai a csonkagúla oldalélei, alapjai az alapél, illetve a fedőél kétszeresei. Legyen $2a = 7{,}4\,\text{cm}$,

1898/I.

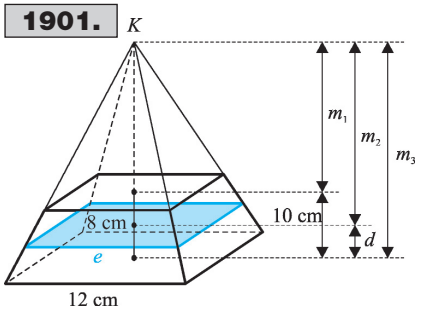


1898/II.



II

1901.



$2b = 4{,}8$ cm, $M = 7{,}4$ cm! Pitagorasz tétele az 1898/I. ábrán kiemelt háromszögre: $o^2 = 7{,}4^2 + \frac{(7{,}4 - 4{,}8)^2}{4} \Rightarrow$ $\Rightarrow o = 7{,}51$ cm. Számítsuk ki egy oldallap magasságát! Pitagorasz tétele az 1898/II. ábrán kiemelt háromszögre: $m^2 = 7{,}51^2 - \frac{(3{,}7 - 2{,}4)^2}{4} \Rightarrow m = 7{,}48$ cm.

$$A = 6 \cdot \left(\frac{3{,}7^2\sqrt{3}}{4} + \frac{2{,}4^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3{,}7 + 2{,}4}{2} \cdot 7{,}48 \right) \approx$$

$\approx \underline{\underline{187{,}42\ \text{cm}^2}}$.

$$V = \frac{7{,}4}{3} \cdot 6 \cdot \left(\frac{3{,}7^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3{,}7 \cdot 2{,}4 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{2{,}4^2\sqrt{3}}{4} \right) \approx \underline{\underline{181{,}55\ \text{cm}^3}}.$$

1899. $V = \frac{12}{3}\left(25 + \sqrt{25t} + t\right) = 916 \Rightarrow \left(\sqrt{t}\right)^2 + 5\sqrt{t} - 204 = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{t}\right)_1 < 0$, ez nem lehet. $\left(\sqrt{t}\right)_2 = 12 \Rightarrow t = \underline{\underline{144\ \text{m}^2}}$.

1900. Tekintsük az 1894/I. ábrát, legyen $a = 32$ cm, $b = 9$ cm! $A = a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot m$, azaz $2873 = 32^2 + 9^2 + 82m \Rightarrow m \approx 21{,}56$ cm. Az 1894/II. ábra szerint Pitagorasz tétele a kiemelt háromszögre: $M^2 = m^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \Rightarrow M \approx 18{,}24$ cm;

$$V = \frac{1}{3} M \left(a^2 + \sqrt{a^2 b^2} + b^2\right) = \frac{1}{3} M \left(a^2 + ab + b^2\right) \Rightarrow V \approx 8469{,}44\ \text{cm}^3 \approx \underline{\underline{8{,}47\ \text{dm}^3}}.$$

1901. K középpontú hasonlóság miatt $m_1 : 8 = m_2 : e = m_3 : 12$; $m_3 = m_1 + 10 \Rightarrow m_1 : 8 = (m_1 + 10) : 12 \Rightarrow m_1 = 20\ \text{cm} \Rightarrow m_3 = 30$ cm. $V_1 = \frac{1}{3} m_1 t_1 = \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 8^2 \approx 426{,}7\ \text{cm}^3$ és $V_3 = \frac{1}{3} m_3 t_3 = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 12^2 = 1440\ \text{cm}^3 \Rightarrow V_2 = V_1 + (V_3 - V_1) : 2 = 933{,}35\ \text{cm}^3$. $V_2 : V_1 = m_2^3 : m_1^3 \Rightarrow$

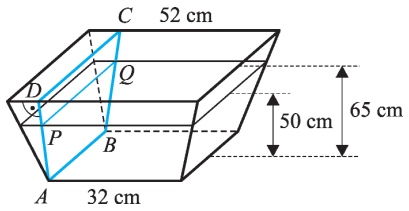
$\Rightarrow m_2 = \sqrt[3]{\frac{V_2}{V_1}} \cdot m_1 \approx 25{,}96\ \text{cm} \Rightarrow d \approx \underline{\underline{4{,}04\ \text{cm}}}$. $e : 8 = m_2 : m_1 \Rightarrow e = 8 \cdot \frac{m_2}{m_1} \approx \underline{\underline{10{,}38\ \text{cm}}}$.

1902. **1. eset:** a medence tele van. $T = 196\ \text{m}^2$; $t = 49\ \text{m}^2$; $m = = 6\ \text{m} \Rightarrow V = \underline{\underline{686\ \text{m}^3}}$.

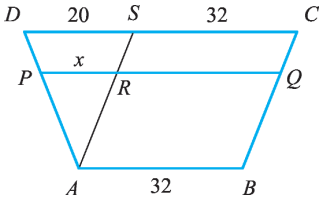
2. eset: a medence félig van. $t = 49\ \text{m}^2$; $m = 3$ m. A felső lap éle ekkor az oldallap trapéz középvonala. $\Rightarrow$ A felső lap egy $(14 + 7) : 2 = 10{,}5$ m oldalú négyzet, ezért területe $T = 110{,}25\ \text{m}^2$. $\Rightarrow$ $\Rightarrow V = \underline{\underline{232{,}75\ \text{m}^3}}$.

II

1903/I.



1903/II.



1903. A 1903/I. és 1903/II. ábra jelöléseivel: $ARP\triangle \sim ASD\triangle$, mert szögeik egyenlők, ezért oldalaik aránya egyenlő magasságaik arányával: $\frac{x}{20}=\frac{50}{65}\Rightarrow x=\frac{200}{13}\Rightarrow PQ=\frac{616}{13}$. A ládában levő virágföld csonkagúla alakot vesz fel, alsó négyzetlapjának oldala 32 cm, a felsőé $\frac{616}{13}\approx 47{,}4$ cm.

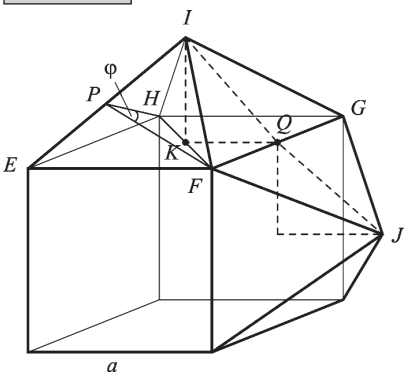
$V_{\text{csonkagúla}}=\frac{1}{3}m\left(T+\sqrt{Tt}+t\right)=\frac{1}{3}\cdot 50\cdot\left(47{,}4^2+\sqrt{47{,}4^2\cdot 32^2}+32^2\right)\approx 79\,792{,}7\ \text{cm}^3\approx 0{,}079\ \text{m}^3$.

A föld tömege: $0{,}079\cdot 1400\approx \underline{\underline{111{,}7\ \text{kg}}}$.

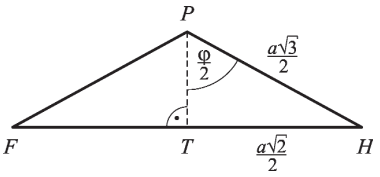
Poliéderek, szabályos testek

1904. Legyen az 1904. ábrák jelöléseivel a kocka éle a, az EI szakasz felezőpontja P! $FP=HP=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, mert egy-egy a oldalú szabályos háromszög súlyvonalai. $FH=a\sqrt{2}$, mert egy a oldalú négyzet átlója. A gúla két oldallapjának szöge: $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\Rightarrow\varphi\approx 109{,}47°$. A kocka

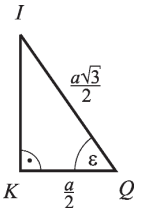
1904/I.



1904/II.

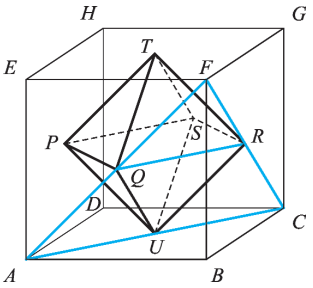


1904/III.



II

1905.



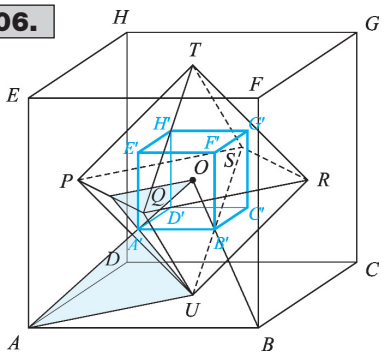
egy élére illeszkedő két szabályos háromszög lapszöge, azaz $IQJ\sphericalangle$ kiszámítása: $\cos\varepsilon = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varepsilon \approx 54{,}74° \Rightarrow IQJ\sphericalangle = 2\varepsilon + 90° + \varepsilon \approx 199{,}47° \neq \varphi$. A keletkezett test szomszédos lapjai különböző szögeket zárnak be. $\Rightarrow$ Nem szabályos a test.

1905. Legyen a kocka élhossza a. A kocka bármely két szomszédos lapközéppontjának távolsága egyenlő a kocka egy lapátlójának felével. Például az 1905. ábra jelöléseivel $QR = \dfrac{1}{2}AC$, mert QR középvonala az ACF háromszögnek. A keletkezett test minden éle $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ hosszúságú $\Rightarrow$ lapjai egybevágó szabályos háromszögek. A $PQRS$ egyenlő oldalú négyszög, tehát rombusz. PR, illetve QS átlója párhuzamos és egyenlő a kocka AB, illetve BC élével $\Rightarrow$ átlói egyenlő hosszúak $\Rightarrow$ $PQRS$ négyszög négyzet. Hasonlóan $QUST$ és $PURT$ négyszög is négyzet. A $PQRSTU$ test egy csúcsból induló négy éle egy-egy egybevágó négyzet alapú szabályos gúla négy oldaléle $\Rightarrow$ szögletei egybevágók. A kocka lapközéppontjai egy szabályos test (egy szabályos oktaéder) csúcsai.

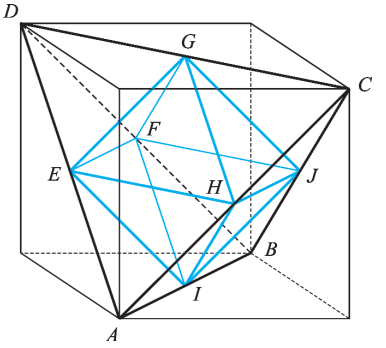
1906. A kocka középpontjára szimmetrikus mindhárom test. Az oktaéder lapközéppontjai az oldallap szabályos háromszögek súlypontjai. Vetítsük az O középpontból a PUQ lap A' középpontját a kocka felületére! A súlypont harmadoló tulajdonsága miatt az A' pont az A pontba kerül, a vetítés pedig egy O középpontú $\lambda' = 3$ arányú középpontos hasonlóság. Ezt bármelyik lapközépponttal megismételhetjük. Az oktaéder lapközéppontjai tehát egy olyan kocka csúcsai, amely az eredetinek O középpontú, $\lambda = \dfrac{1}{3}$ arányú hasonlósággal nyert képe.

1907. A szabályos tetraédert származtathatjuk egy kockából úgy, hogy a tetraéder élei a kocka lapátlói legyenek. A tetraéder élfelező pontjai egyben a kocka lapközéppontjai is. Az 1905. feladatban bizonyítottak szerint a szabályos tetraéder élfelező pontjai egy szabályos oktaéder csúcsai.

1906.

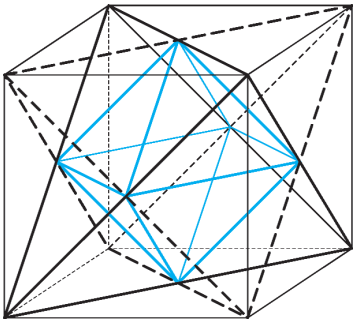


1907.



1908. A két tetraéder élei a felezőpontjukban metszik egymást. A metszéspontok a kocka lapközéppontjai, amelyek az 1905. feladatban bizonyítottak szerint egy szabályos oktaéder csúcsai.

1908.



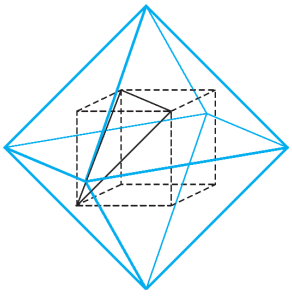
1909. Az 1905. feladatban láttuk, hogy a szabályos oktaéder elhelyezhető egy kockában úgy, hogy az oktaéder csúcsai a kocka lapközéppontjai. ⇒ Az oktaéder testátlói a kocka két szemközti lapjának középpontjait összekötő szakaszok. ⇒ A testátlók párhuzamosak a kocka egy csúcsból induló éleivel, amelyek páronként merőlegesek egymásra. ⇒ Az oktaéder testátlói merőlegesek egymásra.

1910. Az 1906. feladatban beláttuk, hogy a szabályos oktaéder lapközéppontjai kockát határoznak meg. Az oktaéder lapjait a kocka három-három egymáshoz csatlakozó lapátlója síkjával párhuzamos síkok határozzák meg. Ha egy kocka minden csúcsán át a szomszédos három csúcs által kifeszített síkkal párhuzamosan felveszünk egy síkot, éppen a fent említett szabályos oktaéderhez jutunk.

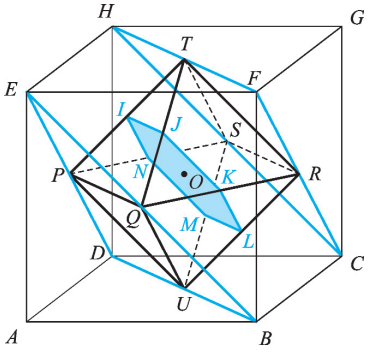
1911. Legyenek az I, J, K, L, M, N pontok az oktaéder élfelező pontjai. Az oktaéder PUQ lapja középvonal-háromszög az EBD háromszögben, SRT lapja pedig középvonal-háromszög a CFH háromszögben. $[EBD] \parallel [CFH] \Rightarrow [PUQ] \parallel [SRT]$. Mivel IJ középvonala PQT háromszögnek, az IJ szakasz benne van a $[PUQ]$ és az $[SRT]$ középpárhuzamos síkjában és $IJ = \frac{1}{2} PQ$. Hasonlóan belátható, hogy JK, KL, LM, MN, NI szakaszok is ebben a síkban vannak, és hosszuk az oktaéder élhosszának a fele. ⇒ Az $IJKLMN$ egy síkbeli egyenlő oldalú hatszög. $IJ \parallel PQ \parallel DB$ és $JK \parallel TR \parallel CH \parallel BE \Rightarrow DBE\sphericalangle$ és $IJK\sphericalangle$ párhuzamos szárú szögek, valamint JK és BE száruk ellentétes irányú ⇒ $IJK\sphericalangle = 180° - 60° = 120°$. Hasonlóan igazolható, hogy az $IJKLMN$ sokszög minden szöge egyenlő. Az aláhúzottakból következik, hogy az oktaéder $IJKLMN$ síkmetszete egy szabályos hatszög.

1912. Egy adott a élű kockából származtassuk a $BGDE$ szabályos tetraédert és a $PQRSTU$ szabályos oktaédert az 1905. és az 1907. feladatban ismertetett módon. A tetraéder élei lapátlók, hosszuk $a\sqrt{2}$. Az oktaéder csúcsai lapközéppontok, egyben a tetraéder élfelező pontjai,

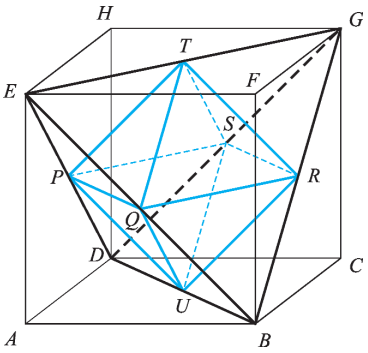
1910.



1911.

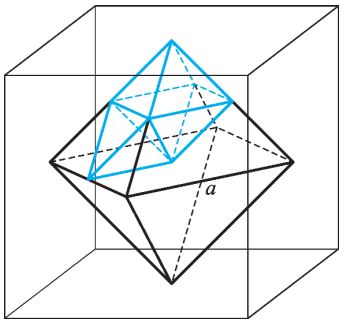


1912.

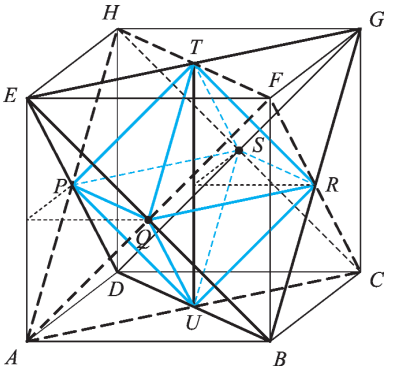


II

1913.



1914.



ezért az oktaéder élhossza $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. A tetraéderből az élfelező pontok négy egybevágó $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ élhosszúságú szabályos tetraédert vágnak le, a *PQTE*, *RSTG, PUSD, URQB* testeket. E négy tetraéderből és az oktaéderből a kívánt módon összeállítható a kétszeres élű *DBGE* szabályos tetraéder.

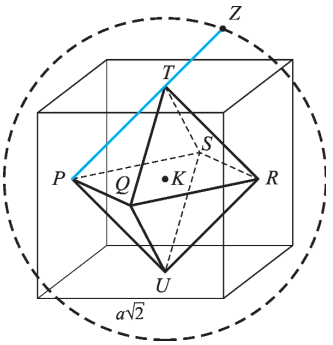
1913. Az oktaéder egy csúcsa, azzal szomszédos négy élfelező pontja és középpontja fele akkora élű, az eredetihez hasonló szabályos oktaédert határoz meg. Az oktaéder mind a hat csúcsánál levághatunk ilyen egybevágó, $\frac{a}{2}$ élű oktaédert. Így az eredeti oktaédernek mind a nyolc lapján megmarad a középvonal háromszög, s ahhoz kapcsolódva egy-egy $\frac{a}{2}$ élű szabályos tetraéderrel kitölthető az a élű oktaéder. Tehát hat darab $\frac{a}{2}$ élű szabályos oktaéderből és nyolc darab $\frac{a}{2}$ élű szabályos tetraéderből összeállítható egy a élű szabályos oktaéder.

1914. A két tetraéder közös része egy szabályos oktaéder, a *PQRSTU* test. Ennek 12 éléhez illeszkednek a kimaradt részek, az *EAQP* tetraéderrel egybevágó testek. Az *EAQP* test $\overrightarrow{AU}$ vektorral való eltoltja a *TURS* test $\Rightarrow$ *EAQP* $\cong$ *TURS*. *TURS* éppen negyede a *PQRSTU* szabályos oktaédernek. $\Rightarrow$ A 12 kimaradó részből 3 darab szabályos oktaéder állítható össze, amelyek mindegyike egybevágó a két tetraéder közös részével, a *PQRSTU* oktaéderrel.

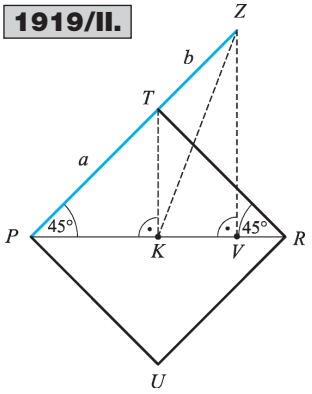
1915. Az 1914. feladatban láttuk, hogy egy a élű kockába beírt két tetraéder nyolc darab $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ élű szabályos tetraédert, egy $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ élű szabályos oktaédert és tizenkét darab $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ élű „szabályos oktaéder-negyedet” határoz meg. Rakjuk ki kockákkal a teret, ez lehetséges. Bontsunk fel minden kockát a fentiekben megadott módon! Így a közös élben találkozó négy kockában egymáshoz csatlakoznak a „szabályos oktaéder-negyedek”. $\Rightarrow$ Kitölthető a tér egyenlő élű szabályos tetraéderekkel és oktaéderekkel.

1916. Az 1914. feladat megoldásában láttuk, hogy egy kocka szétdarabolható 1 szabályos oktaéderre, 8 szabályos tetraéderre és 12 „szabályos oktaéder-negyed”-re. Két kockában 2 szabályos oktaéder, 16 szabályos tetraéder és 24 „szabályos oktaéder-negyed” van. Ennyi „oktaéder-

1919/I.



1919/II.



negyed”-ből 6 darab, az előzőkkel egyenlő élű szabályos oktaéder rakható össze. Így összesen két kockából 8 oktaéderünk és 16 tetraéderünk van. Az 1913., illetve az 1912. feladat szerint 6 oktaéderből és 8 tetraéderből 1 darab kétszeres élű szabályos oktaéder, illetve 2 oktaéderből és 8 tetraéderből 2 darab kétszeres élű szabályos tetraéder lesz. Tehát a kockát átdarabolhatjuk két szabályos tetraéderbe és egy szabályos oktaéderbe.

1917. A szabályos oktaéder beírható egy kockába úgy, hogy az oktaéder csúcsai a kocka lapközéppontjai. A kocka beírt gömbje a lapközéppontokban érinti a kocka lapjait. Ez a gömb egyben az oktaéder köré írható gömb, amelynek középpontja az oktaéder és a kocka közös középpontja, sugara pedig az oktaéder testátlójának fele.

1918. A szabályos oktaéder lapközéppontjai olyan kockát határoznak meg, amelynek testátlói merőlegesek az oktaéder szemközti lappárjaira. Tehát a kocka körülírt gömbje egyúttal az oktaéder beírt gömbje, melynek átmérője a kocka testátlója.

1919. Legyen a szabályos oktaéder éle a, a meghosszabbítás b. Vizsgáljuk a $PURT$ síkmetszetet! A kocka éle $PR = a\sqrt{2}$. A TZ szakasz PR egyenesre eső merőleges vetülete $KV = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

A PT szakasz PR egyenesre eső merőleges vetülete $PK = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow VZ = PV = PK + KV =$

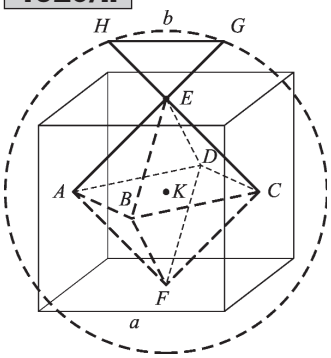
$= \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$. A gömb sugara $KZ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, mert a kocka testátlójának fele. A KVZ derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel szerint: $KV^2 + VZ^2 = KZ^2$, azaz

$$\left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{b^2}{2} + \frac{a^2+2ab+b^2}{2} =$$

$$= \frac{3a^2}{2} \Rightarrow 2b^2 + 2ab - 2a^2 = 0 \Rightarrow b^2 = a^2 - ab = a(a-b) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$. Tehát a TZ meghosszabbítás az oktaéder élének hoszszabbik aranymetszete.

1920/I.

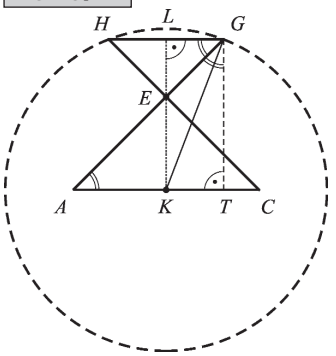


1920. Legyen az oktaéder AE és CE élének a körülírt gömbbel való metszéspontja G és H.

Az AC és a GH szakasz szimmetrikus az EF egyenesre $\Rightarrow$ $\Rightarrow GH \parallel AC$. $CAE\sphericalangle = 45° \Rightarrow EGH\sphericalangle = 45° \Rightarrow GEH\triangle$ egyenlő

II

1920/II.



szárú derékszögű háromszög. Tekintsük az oktaéder *A, F, C, E* csúcsait tartalmazó síkot, ami a kocka köré írt gömbből a *K* középpontú *KG* sugarú főkört metszi ki!

$KG = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AK = KC = \frac{a}{2}$; $LG = KT = \frac{b}{2}$; $GT = AT = \frac{a+b}{2}$, hiszen $\Rightarrow ATG\triangle$ is egyenlő szárú derékszögű háromszög. *KTG* derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel szerint: $GK^2 = KT^2 + GT^2$, azaz $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right) + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 = a^2 - ab \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$, tehát a *GH* távolság a kocka élének hosszabbik aranymetszete. Mivel a *LEG*△ egyenlő szárú derékszögű, $LE = \frac{b}{2}$, ami a *GH* szakasz távolsága az alatta levő kockalaptól. Megjegyzés: $b^2 + ab - a^2 = 0$ alapján $b = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)a}{2}$ kiszámítható.

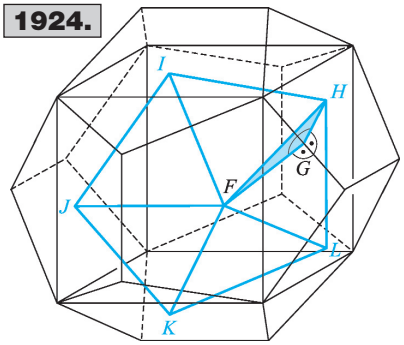
1921. Az 1920. feladatban láttuk, hogy az *a* élű kockából a megadott származtatással kapott *Z, Y* pontokra $ZY \parallel DE$; $GC = \frac{1}{2}ZY = \frac{b}{2}$, ahol $b^2 + ab - a^2 = 0$. *a)* $DE \parallel MN \Rightarrow ZY \parallel MN \Rightarrow$ $\Rightarrow$ *MZYN* síkbeli négyszög és trapéz. Be kell látnunk, hogy az *X* pont is az *MZYN* trapéz síkjában van. Ehhez elegendő azt megmutatni, hogy *X*, *F* és *G* pontok egy egyenesen vannak. Vizsgáljuk az *A, C, B* pontokat tartalmazó síkot! $XX' = \frac{b}{2}$; $FC = \frac{a}{2}$; $X'F = \frac{a-b}{2}$; $CG = \frac{b}{2}$; $\frac{XX'}{FC} = \frac{b}{a}$; $\frac{X'F}{CG} = \frac{a-b}{b}$; $\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b} \Leftrightarrow b^2 + ab - a^2 = 0 \Rightarrow \frac{XX'}{FC} = \frac{X'F}{CG} \Rightarrow XX'F \triangle \sim FCG\triangle$, mert két-két oldaluk aránya és az azok által közrezárt szögük egyenlő $\Rightarrow$ megfelelő szögeik egyenlők. Például $X'XF\sphericalangle \Rightarrow CFG\sphericalangle \Rightarrow X, F, G$ egy egyenesen van.

b) A származtatásból következik, hogy az *M*, *Z*, *Y*, *N*, *X* pontok a kocka köré írható gömb pontjai. Mivel egy síkban vannak, és a gömb síkmetszetei körök $\Rightarrow$ *MZYNX* húrsokszög.

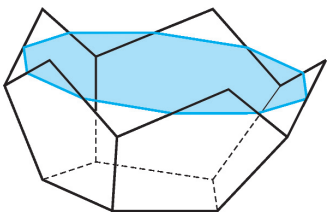
c) A származtatás szerint $MX = MZ = NX = NY$. Pitagorasz-tétel az *X'XF* derékszögű háromszögben: $XF^2 = XX'^2 + X'F^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - 2ab + 2b^2}{4}$. Pitagorasz-tétel az *MFX* derékszögű háromszögben: $MX^2 = MF^2 + XF^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2 - 2ab + 2b^2}{4} = \frac{b^2 - ab + a^2}{2}$. Az *a)* pontban kapott $b^2 + ab - a^2 = 0$ összefüggést felhasználva $MX^2 = b^2$ adódik. $\Rightarrow MX = b \Rightarrow$ Az *MZYNX* ötszög oldalai egyenlők. Az előző pontban beláttuk, hogy ez az ötszög körbe írható. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Szabályos ötszög csúcsai a vizsgált pontok.

1922. Az 1921. feladat megoldásában láttuk, hogy az *a* élű kockából a megadott módon származtatott 12 pont, valamint a kocka 8 csúcsa rajta van a kocka köré írt gömbön, és a megfelelő

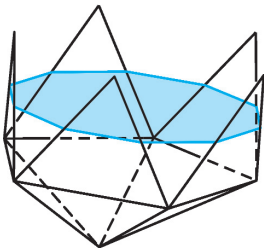
1924.



1925/I.



1925/II.



pontok 12 darab egybevágó szabályos ötszöget alkotnak. ⇒ A test 12 darab olyan egybevágó szabályos ötszög alapú gúlára bontható, amelyeknek oldalélei egyenlők, s ezek az oldalélek a kocka köré írt gömb sugarai. ⇒ A test 12 szöglete egybevágó. A test szabályos tizenkétlapú test, vagyis dodekaéder.

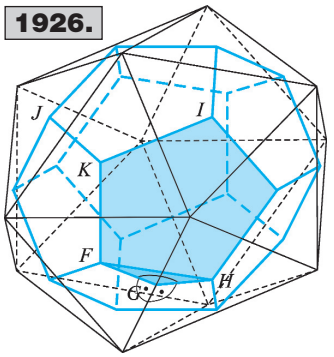
1923. A dodekaédert az 1922. feladatban leírt módon származtathatjuk. ⇒ A dodekaéder 8 megfelelő csúcsa éppen egy beírt kocka csúcsait adja meg. A kocka éle egyenlő a dodekaéder egy lapátlójával, és a beírt kocka egy éle párhuzamos a dodekaéder két szemközti élével. Egy szabályos ötszöglap minden átlójához illeszthető beírt kocka. ⇒ 5 különböző helyzetű, egybevágó kocka írható a dodekaéderbe.

1924. A dodekaéder 12 lapközéppontja egy 12 csúcsú testet határoz meg. Mivel a dodekaéder szabályos test, lapszögei, megfelelő hosszúságadatai egyenlők. ⇒ A keletkezett test minden élének hossza egyenlő az FGH egyenlő szárú háromszög alapjának hosszával, ahol F és H két szomszédos lapközéppont, G pedig e lapok közös élének felezéspontja. ⇒ A test lapjai szabályos háromszögek. A dodekaéder bármely lapközéppontja a hozzá csatlakozó szomszédos lapok középpontjaival szabályos ötoldalú gúlát határoz meg. A kiszemelt lapközéppontnál a gúla élszögei egyenlők. Tehát a szabályos dodekaéder lapközéppontjai 12 csúcsú szabályos testet, azaz szabályos ikozaédert határoznak meg.

1925. *a)* A szabályos dodekaéder két szemközti párhuzamos lapjának középpontját összekötő szakasz felező merőleges síkja tízszögben metszi a dodekaédert. A tízszög csúcsai élfelező pontok, a tízszög oldalának hossza feleakkora, mint a dodekaéder lapátlója. ⇒ A tízszög egyenlő oldalú sokszög. A tízszög csúcsai egyenlő távol vannak a dodekaéder körülírt gömbjének középpontjától, hiszen ez a távolság egyenlő a dodekaéder egy éle és a gömb középpontja által meghatározott egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magasságával. ⇒ A tízszög csúcsai egy körön vannak. A körbe írható egyenlő oldalú tízszög szabályos.

b) A szabályos ikozaéder két átellenes csúcsát összekötő szakasz felező merőleges síkja tízszögben metszi az ikozaédert. A tízszög csúcsai élfelező pontok, és a tízszög oldala feleakkora, mint az ikozaéder éle. ⇒ A tízszög egyenlő oldalú sokszög. A tízszög csúcsai egyenlő távol vannak az ikozaéder körülírt gömbjének középpontjától, hiszen ez a távolság egyenlő az ikozaéder egy éle és a gömb középpontja által meghatározott egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magasságával. ⇒ A tízszög csúcsai egy körön vannak. A körbe írható egyenlő oldalú tízszög szabályos.

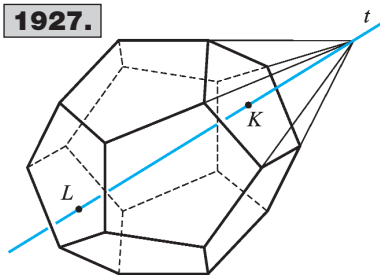
1926.



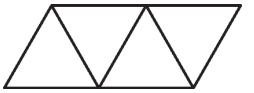
1926. A szabályos ikozaéder 20 lapközéppontja 20 csúcsú testet határoz meg. Mivel az ikozaéder szabályos test, lapszögei és megfelelő hosszúságadatai egyenlők. ⇒ A keletkezett

II

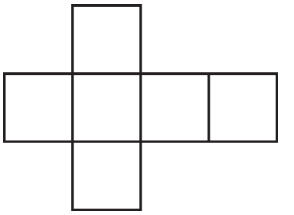
1927.



1929/I.



1929/II.



test minden élének hossza egyenlő az FGH egyenlő szárú háromszög alapjának hosszával, ahol F és H két szomszédos lap középpontja, G pedig e lapok közös élének felezéspontja. Az ikozaéder bármely lapközéppontja a hozzá csatlakozó szomszédos lapok középpontjaival szabályos háromoldalú gúlát határoz meg. A kiszemelt lapközéppontnál a gúla élszögei egyenlők. Tehát a szabályos ikozaéder lapközéppontjai 20 csúcsú szabályos testet, azaz szabályos dodekaédert határoznak meg.

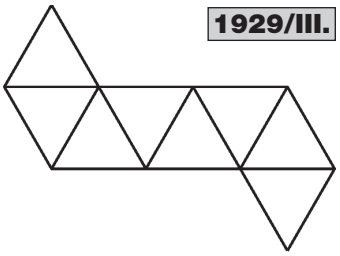
1927. Mivel a szabályos dodekaéder forgásszimmetrikus a két átellenes lapközéppontján átmenő egyenes körüli 72°-os elforgatásra, a megadott élek ezen az egyenesen metszik egymást.

1928. Tekintsük a szabályos dodekaéder egy lapjának csúcsaiba érkező azon éleket, amik nem illeszkednek e lap síkjára. Az 1927. feladatban láttuk, hogy ez az öt egyenes egy ponton megy át. Ez a metszéspont rajta van az adott lap középpontját a dodekaéder középpontjával összekötő egyenesen. A dodekaéder szabályos test, ezért minden laphoz tartozik egy ilyen metszéspont. Ezek a metszéspontok egyenlő távol vannak a dodekaéder középpontjától, ezért a dodekaéder lapközéppontjainak középpontos hasonlósággal nyerhető képei (a hasonlóság középpontja a szabályos dodekaéder köré írt gömbjének középpontja). Az 1924. feladatban láttuk, hogy a szabályos dodekaéder lapközéppontjai szabályos ikozaéder csúcsai. ⇒ A feladat feltételeinek megfelelő öt-öt él metszéspontjai is egy szabályos ikozaéder csúcsai.

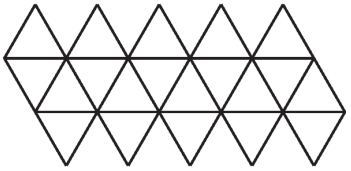
1929. A szabályos testek egy-egy hálóját ábrázoltuk.
A szabályos tetraéder hálója: 1929/I. ábra.
A kocka hálója: 1929/II. ábra.
A szabályos oktaéder hálója: 1929/III. ábra.
A szabályos ikozaéder hálója: 1929/IV. ábra.
A szabályos dodekaéder hálója: 1929/V. ábra.

1930. Tekintsük az 1905. ábrát, legyen $AB = x$, $QR = a$! A szabályos oktaédert beírhatjuk egy kockába úgy, hogy az oktaéder csúcsai a kocka lapközéppontjai. Az oktaéder éle feleakkora, mint a kocka lapátlója. Az ACF háromszögben a QR szakasz középvonal $\Rightarrow QR = \frac{1}{2} AC$ és $a = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} x\sqrt{2}$. Az oktaéder két szemközti élének távolsága a felezéspontokat összekötő

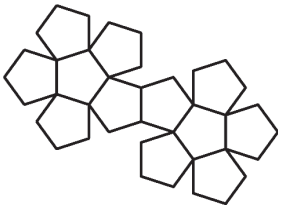
1929/III.



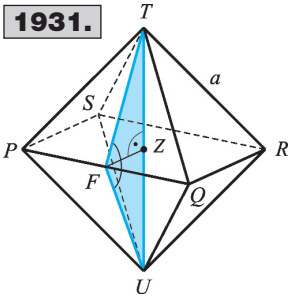
1929/IV.



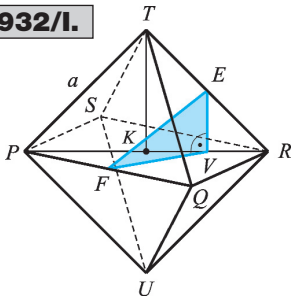
1929/V.



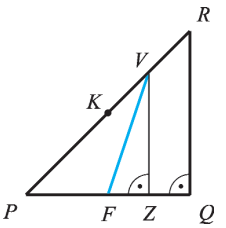
1931.



1932/I.



1932/II.



szakasz hossza, ami egyenlő az oktaéder élhosszával. $\Rightarrow \underline{\underline{d = a}}$. Az oktaéder testátlója $QS = x = \frac{2a}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{a\sqrt{2}}}$.

1931. $FT = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, mert a TUF szabályos háromszög magassága. $TU = a\sqrt{2}$, mert egy a oldalú négyzet átlója. $TZ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, mert Z a TU szakasz felezéspontja. $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{TZ}{TF} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \varphi \approx \underline{\underline{109{,}47°}}$ két szomszédos lap szöge.

1932. EV középvonal az RTK háromszögben $\Rightarrow EV = \frac{1}{2}TK = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. $VZ \parallel RQ$ és V negyedelőpont $\Rightarrow Z$ negyedelőpont a PQ szakaszon $\Rightarrow ZQ = \frac{1}{4}a$, $VZ = \frac{3}{4}a$ és $FZ = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}a$. Pitagorasz-tétel az FZV derékszögű háromszögben: $FV^2 = FZ^2 + VZ^2$. $FV^2 = \frac{a^2}{16} + \frac{9a^2}{16} \Rightarrow FV^2 = \frac{5a^2}{8}$.

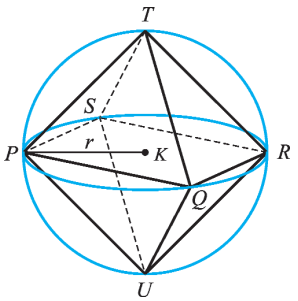
Pitagorasz-tétel az FVE derékszögű háromszögben: $FE^2 = FV^2 + EV^2$. $FE^2 = \frac{5a^2}{8} + \frac{2a^2}{16} \Rightarrow FE = \underline{\underline{\frac{a\sqrt{3}}{2}}}$.

1933. Az a oldalú szabályos oktaéder köré írható gömb átmérője az a oldalú négyzet átlója.

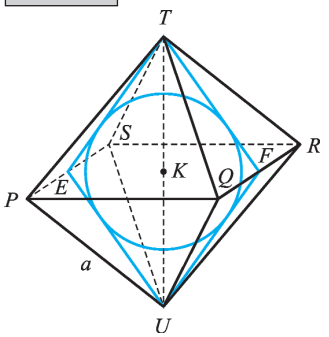
$2r = 2PK = PR \Rightarrow$ Az oktaéder köré írt gömb sugara $r = \underline{\underline{\frac{a\sqrt{2}}{2}}}$.

1934. Tekintsük az E, F felezéspontokon átmenő és T, U csúcsokat tartalmazó síkmetszetet!

1933.

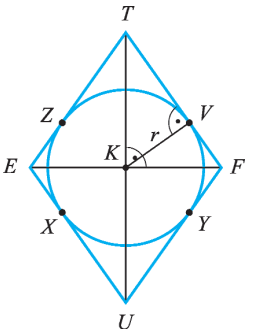


1934/I.

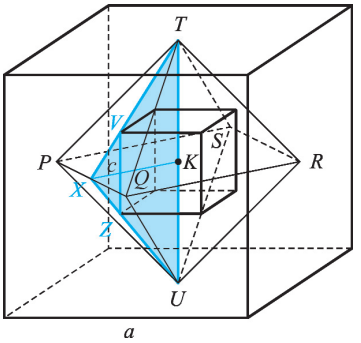


II

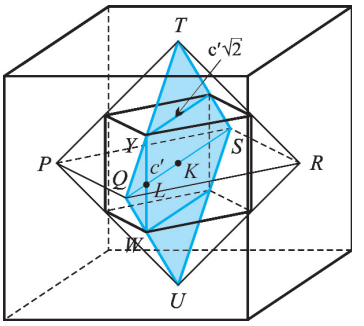
1934/II.



1936/I.



1936/II.



Az $EUFT$ négyszög rombusz, oldalainak hossza $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Az oktaédert a beírt gömb a lapok súlypontjában érinti $\Rightarrow X$, Y, V, Z harmadolja a rombusz oldalait. $KT=\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $KF=\frac{a}{2}$; $TF=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow VF=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Pitagorasz tétele a KVF derékszögű háromszögre:

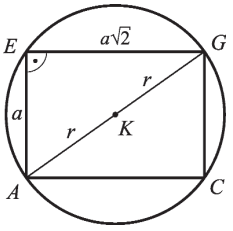
$$r^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{a^2}{6}\Rightarrow r=\underline{\underline{\frac{a\sqrt{6}}{6}}}.$$

1935. A szabályos oktaéder két párhuzamos lapja tartalmaz két kitérő élt, melyek normáltranszverzálisának hossza egyenlő a két lap síkjának távolságával. Ez egyenlő az oktaéder beírt gömbjének átmérőjével. Az 1934. feladatban láttuk, hogy az a élű szabályos oktaéder beírt gömbjének sugara $\frac{a\sqrt{6}}{6}\Rightarrow$ az átmérő hossza, s egyben két kitérő él távolsága $2r=\underline{\underline{\frac{a\sqrt{6}}{3}}}$.

1936. Az a élű kockába írt oktaéder éle: $b=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **1. eset:** a beírt kocka csúcsai az oktaéder lapközéppontjai (V, Z), éleinek hossza c. Ekkor V, illetve Z harmadolja TX, illetve UX súlyvonalat $\Rightarrow XV:XT=c:a=1:3$. A két kocka éleinek aránya $\underline{\underline{1:3}}$.

2. eset: a beírt kocka csúcsai az oktaéder éleire illeszkednek, éleinek hossza c'. Ekkor az a élű kockába írt oktaéder testátlója: $QS=a$. A c' élű beírt kocka átlós síkmetszetéből leolvasható, hogy $QS=c'+c'\sqrt{2}$. $\Rightarrow c'=\frac{a}{1+\sqrt{2}}$. A két kocka éleinek aránya $\underline{\underline{1:\left(1+\sqrt{2}\right)}}$.

1937/I.

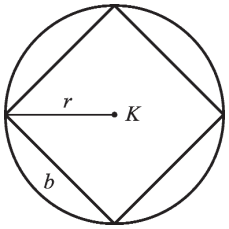


1937. Az r sugarú gömbbe a élű kockát írunk. Tekintsük a gömbnek egy négy kockacsúcsot tartalmazó főkörmetszetét! (1937/I. ábra)
Pitagorasz tétele az ACG derékszögű háromszögre:

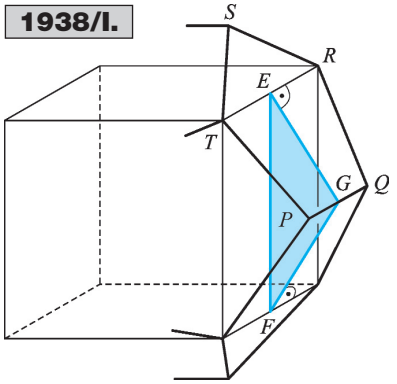
$$a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2=(2r)^2\Rightarrow 3a^2=4r^2\Rightarrow a=\frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Az a élű kockába írt gömb sugara $\underline{\underline{\varrho=\frac{a}{2}=\frac{r}{\sqrt{3}}}}$.

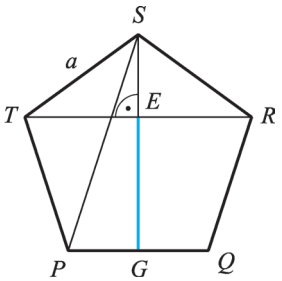
1937/II.



1938/I.



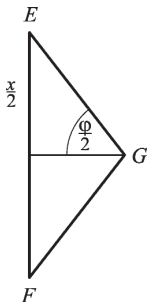
1938/II.



Az r sugarú gömbbe b élű oktaédert írunk. Tekintsük a gömbnek egy négy oktaédercsúcsot tartalmazó főkörmetszetét! (1937/II. ábra)

$b = r\sqrt{2}$. A b élű oktaéderbe írt gömb sugara az 1934. feladat szerint: $\underline{\underline{\rho' = \frac{b\sqrt{6}}{6} = \frac{r\sqrt{2}\sqrt{6}}{6} = \frac{r}{\sqrt{3}}}}$. $\Rightarrow \rho = \rho'$, a két beírt gömb sugara egyenlő.

1938/III.



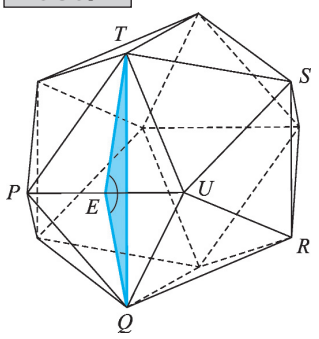
1938. Legyen a szabályos dodekaéder éle a, a beírt kocka éle x. Az 1920. feladat megoldásában láttuk, hogy $a = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)x}{2} \Rightarrow x = \frac{a\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$. Pitagorasz-tétel a TES és a PGS derékszögű háromszögekre: $SE = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$ és $SG = \sqrt{x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$. $EG = SG - SE =$

$$= \sqrt{x^2 - \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2 x^2}{16}} - \sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2 x^2}{4} - \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}\right).$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)} \Rightarrow \varphi \approx \underline{\underline{116{,}58^\circ}}$$

a szabályos dodekaéder két szomszédos lapjának szöge.

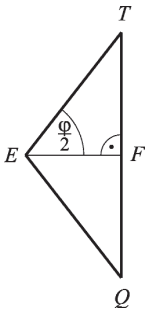
1939/I.



1939. A szabályos ikozaéder egy csúcsba futó öt éle egy szabályos ötoldalú gúlát határoz meg. Két szomszédos lap szögének kiszámításakor ezt a gúlát vizsgáljuk. (1939/I. ábra) Legyen az ikozaéder éle a! $TE = EQ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, mert egy-egy a oldalú szabályos háromszög magasságai. Az 1920. feladat megoldásában pedig láttuk, hogy az a oldalú $PQRST$ szabályos ötszög átlója $QT = \frac{a\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$. A $TQE\triangle$-ben. (1939/II. ábra)

II

1939/II.



$TF = \frac{1}{2} QT = \frac{a\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}$ és az EFT derékszögű háromszögben $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi \approx \underline{\underline{138{,}19°}}$ a szabályos ikozaéder bármely két szomszédos lapjának szöge.

1940.

A szabályos test	éleinek száma	egy élének hossza, ha az élek összege $12a$
tetraéder	6	$2a$
kocka	12	a
oktaéder	12	a
ikozaéder	30	$\frac{2a}{5}$
dodekaéder	30	$\frac{2a}{5}$

1941. Tekintsük az 1941. ábrát. Adott a $PQRS$ négyzet átlója: $PR = d \Rightarrow PQ = \frac{\sqrt{2}}{2} d$, valamint $PR = TU \Rightarrow TK = \frac{1}{2} d$. $V = 2 \cdot V_{PQRST} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot t_{PQRS} \cdot TK = \frac{2}{3} \cdot PQ^2 \cdot TK = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot d^2 \cdot \frac{1}{2} d = \underline{\underline{\frac{1}{6} d^3}}$.

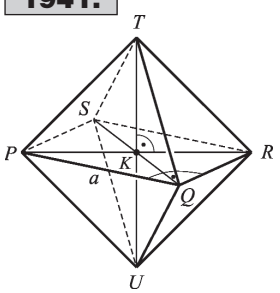
1942. **1. eset:** Kocka; felszíne $6a^2 \Rightarrow$ az éle: $\underline{a}$.

2. eset: Tetraéder; éle b; felszíne $4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 = 6a^2 \Rightarrow b = \underline{\underline{\sqrt[4]{12} \cdot a}}$.

3. eset: Oktaéder; éle c; felszíne $8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} c^2 = 6a^2 \Rightarrow c = \underline{\underline{\sqrt[4]{3} \cdot a}}$.

4. eset: Dodekaéder; éle d; felszíne $12 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot d \cdot \frac{d}{2} \cdot \operatorname{tg} 54° = 6a^2 \Rightarrow d = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2}{5 \cdot \operatorname{tg} 54°}} \cdot a}}$.

1941.



5. eset: Ikozaéder; éle e; felszíne $20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} e^2 = 6a^2 \Rightarrow e = \underline{\underline{\sqrt[4]{\frac{12}{25}} a}}$.

1943. A közös felszín F.

Tetraéder éle: a; felszíne $4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = F \Rightarrow a = \sqrt[4]{\frac{F^2}{3}}$; térfogata $V_t = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = \frac{\sqrt{2}}{36} F \cdot \sqrt[4]{F^2 \cdot 3}$.

II

Oktaéder éle: b; felszíne $8\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}b^2=F\Rightarrow a=\sqrt[4]{\frac{F^2}{12}}$; térfogata $V_o=\frac{\sqrt{2}}{3}b^3=\frac{\sqrt{2}}{36}F\cdot\sqrt[4]{F^2\cdot 12}$.

Kocka éle: c; felszíne $6c^2=F\Rightarrow c=\sqrt{\frac{F}{6}}$; térfogata $V_k=c^3=\frac{F}{6}\sqrt{\frac{F}{6}}$.

$$V_t:V_o:V_k=\left(\frac{\sqrt{2}}{36}F\cdot\sqrt[4]{F^2\cdot 3}\right):\left(\frac{\sqrt{2}}{36}F\cdot\sqrt[4]{F^2\cdot 12}\right):\left(\frac{F}{6}\cdot\sqrt{\frac{F}{6}}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{36}\cdot\sqrt[4]{F^2\cdot 3}\right):\left(\frac{\sqrt{2}}{36}\cdot\sqrt[4]{F^2\cdot 12}\right):\left(\frac{6}{36}\cdot\sqrt[4]{\frac{F^2}{36}}\right)=\sqrt[4]{12}:\sqrt[4]{48}:\sqrt[4]{36}=1:\sqrt[4]{4}:\sqrt[4]{3}=$$

$$=1:\sqrt{2}:\sqrt[4]{3}.$$

1944. A közös térfogat V.

Tetraéder éle: a; térfogata $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=V\Rightarrow a=\sqrt[6]{72V^2}$; felszíne $F_t=\sqrt{3}\cdot a^2=\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{72V^2}$.

Oktaéder éle: b; térfogata $\frac{\sqrt{2}}{3}b^3=V\Rightarrow b=\sqrt[6]{\frac{9V^2}{2}}$; felszíne $F_o=2\sqrt{3}\cdot b^2=2\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{9V^2}{2}}$.

Kocka éle: c; térfogata $c^3=V\Rightarrow c=\sqrt[3]{V}$; felszíne $F_k=6c^2=6\sqrt[3]{V^2}$.

$$F_t:F_o:F_k=\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{72V^2}\right):\left(2\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{9V^2}{2}}\right):\left(6\cdot\sqrt[3]{V^2}\right)=\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{72}\right):\left(2\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\right):6=$$

$$=\sqrt[6]{27\cdot 72^2}:\sqrt[6]{64\cdot 27\cdot\frac{81}{4}}:6=\left(6\cdot\sqrt[6]{3}\right):\left(6\cdot\sqrt[6]{\frac{3}{4}}\right):6=\left(\sqrt[6]{3}\right):\left(\sqrt[6]{\frac{3}{4}}\right):1=1:\sqrt[6]{\frac{1}{4}}:\sqrt[6]{\frac{1}{3}}.$$

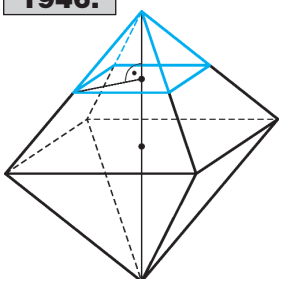
1945. Tetraéder éle: a; felszíne $\sqrt{3}\,a^2$; térfogata $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$. Oktaéder éle: a; felszíne $2\sqrt{3}\,a^2$; térfogata $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$. Kocka éle: a; felszíne $6a^2$; térfogata a^3.

a) $F_t:F_o:F_k=\left(\sqrt{3}\,a^2\right):\left(2\sqrt{3}\,a^2\right):\left(6a^2\right)=\sqrt{3}:2\sqrt{3}:6=1:2:2\sqrt{3}$.

b) $V_t:V_o:V_k=\left(\frac{\sqrt{2}}{12}a^3\right):\left(\frac{\sqrt{2}}{3}a^3\right):a^3=\frac{\sqrt{2}}{12}:\frac{\sqrt{2}}{3}:1=\sqrt{2}:4\sqrt{2}:12=1:4:6\sqrt{2}$.

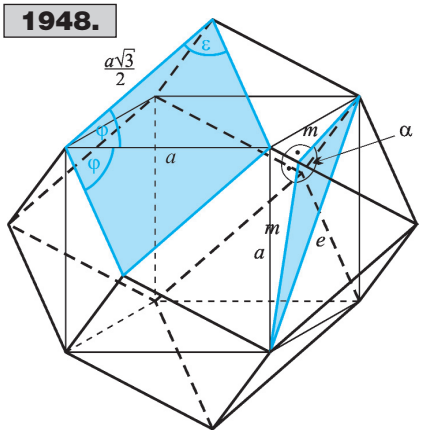
1946. Minden levágott „csúcs” hasonló az oktaédert alkotó két szabályos gúla egyikéhez. A hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$, a térfogatok aránya $\frac{1}{8}$. Az oktaéder hat csúcsánál az eredeti térfogat felének $\frac{6}{8}$-át, vagyis az eredeti térfogat $\frac{3}{8}$-át vágjuk le összesen. A megmaradó rész térfogata az eredeti térfogat $\frac{5}{8}$-a: $V=\frac{5}{8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}a^3=\frac{5\sqrt{2}}{24}a^3$.

1946.



II

1948.



1947. a élű tetraéder felszíne $\sqrt{3}\,a^2$; a élű oktaéder felszíne $2\sqrt{3}\,a^2$; a élű ikozaéder felszíne $5\sqrt{3}\,a^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow F_t : F_o : F_i = \left(\sqrt{3}\,a^2\right) : \left(2\sqrt{3}\,a^2\right) : \left(5\sqrt{3}\,a^2\right) =$
$= \underline{1 : 2 : 5}$.

1948. A kocka egy-egy lapjára egy-egy négyoldalú gúlát építettünk, aminek magassága a kocka élének fele. $\Rightarrow$ A gúla oldallapja 45°-ot zár be az alaplapjával. $\Rightarrow$ Két szomszédos gúla egymáshoz csatlakozó lapjai egy síkban vannak. $\Rightarrow$ A kocka élei nem élei az új testnek. *a)* Csúcsok: $6 + 8 = \underline{14}$. Minden kockaélhez csatlakozik egy lap. $\Rightarrow \underline{12}$ lapja van. 12 db négyszöglap csatlakozik egymáshoz. $\Rightarrow \underline{24}$ éle van. *b)* A határoló lapok négyszögek, amelyeknek minden oldala a kocka fél testátlójával egyenlő. $\Rightarrow$ Rombuszok határolják.

c) Nem szabályos test, mert a határoló lapok nem szabályos síkidomok.

d) Az él a kocka testátlójának fele: $\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,a}$.

e) $\cos\varphi = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi \approx 54{,}7° \Rightarrow 2\varphi \approx 109{,}4° \Rightarrow \varepsilon = 180° - 2\varphi \approx 70{,}6°$. Két szomszédos él hajlásszöge $\underline{70{,}6°}$, illetve $\underline{109{,}4°}$.

f) $m = a \cdot \sin\varphi = a \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $e = a\sqrt{2}$. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\frac{e}{2}}{m} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 60° \Rightarrow \underline{\alpha = 120°}$.

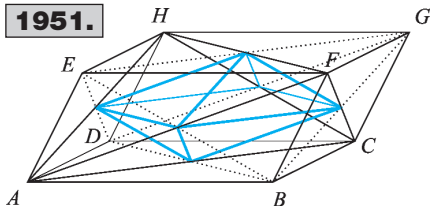
g) $F = 12 \cdot t_{\text{rombusz}} = 12 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2}\,a = \underline{6\sqrt{2} \cdot a^2}$.

h) $V = V_{\text{kocka}} + 6V_{\text{gúla}} = a^3 + 6 \cdot \dfrac{1}{3}\,a^2 \cdot \dfrac{a}{2} = \underline{2a^3}$.

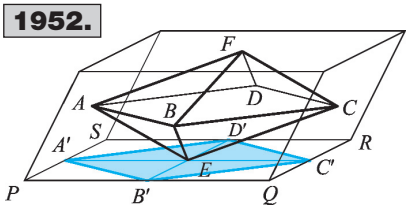
1949. A kocka egy lapjának oldalaira mint élekre fektetett síkok 45°-os szöget zárnak be ezzel a lappal. $\Rightarrow$ Egy közös pontjuk van, ami egyforma távolságra van mind a négy éltől, és a 45°-os hajlásszög miatt feleakkora távolságra a laptól, mint a kocka éle. A közös pont a kocka középpontjának tükörképe a lapra. $\Rightarrow$ A keletkező test rombdodekaéder (lásd 1948. feladat).

1950. Tudjuk, hogy a tér egybevágó kockákkal hézagtalanul kitölthető. Vegyünk hat egybevágó a élű kockát, amelyek körülzárnak egy velük egybevágó „üreget”. A hat kockából kialakítható rombdodekaéderek mindegyikének egy-egy része az „üregbe” nyúló a alapélű $\dfrac{a}{2}$ magasságú szabályos négyoldalú gúla. A hat gúla hézagmentesen kitölti az üreget, tehát a hat kockához tartozó rombdodekaéder is kitölti a tér aktuális részét. Az eljárás a rombdodekaéderek bármely csúcsánál megismételhető.

1951.



1952.



1951. Háromszögek határolják, 6 csúcsa, 8 lapja, 12 éle van. ⇒ A test oktaéder.

1952. Ez a test egy oktaéder. Térfogata: $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot t_{ABCD} \cdot \mathrm{d}(F;\ ABCD)$. Az oktaéder csúcsai az oldallapok középpontjai, ezért $AB \parallel CD \parallel SQ$; $BC \parallel DA \parallel PR$; $AB = SQ : 2$; $BC = PR : 2$; $DC = SQ : 2$ és $DA = PR : 2$, vagyis az $ABCD$ paralelogramma elhelyezhető a $PQRS$ paralelogrammában ($A'B'C'D'$ paralelogramma). $t_{PB'A'} = t_{PQS} : 4$; $t_{QB'C'} = t_{PQR} : 4$; $t_{RD'C'} = t_{RQS} : 4$; $t_{SA'D'} = t_{SPR} : 4$, ezért $t_{ABCD} = t_{PQRS} - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} t_{PQRS} = \frac{1}{2} t_{PQRS}$, valamint $\mathrm{d}(F;\ ABCD) = \frac{1}{2} \mathrm{d}(F;\ PQRS)$. Az aláhúzottakból következik, hogy $V_{\text{oktaéder}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot t_{PQRS} \cdot \frac{1}{2} \mathrm{d}(F;\ PQRS) = \frac{1}{6} V_{\text{paralelepipedon}}$.

1953. Tekintsük az 1951. ábrát. Jelölje S_E az E csúcsra illeszkedő síkot, S_B a B csúcsra illeszkedőt és így tovább! $S_E \parallel [AFH]$ és $S_B \parallel [AFC]$ és $S_G \parallel [CFH]$ és $S_D \parallel [ACH]$. $[AFH]$, $[AFC]$, $[CFH]$, $[ACH]$ síkok a paralelepipedon $ACFH$ beírt tetraéderét határozzák meg. Hasonlóan az S_A; S_F; S_C és S_H síkokkal párhuzamos síkok a paralelepipedon $EBGD$ beírt tetraéderét határozzák meg. A két beírt tetraéder közös része a paralelepipedon beírt oktaédere. ⇒ Az S_A; S_B; …; S_H síkok által meghatározott test is egy oktaéder, ami a paralelepipedon középpontjából nagyított képe a beírt oktaédernek. Mivel $[AFH]$ és $[BGD]$ síkok harmadolják az EC testátlót, a nagyítás háromszoros. $V = 3^3 \cdot V_o = 27 \cdot \frac{1}{6} V_p = = \frac{9}{2} V_p$.

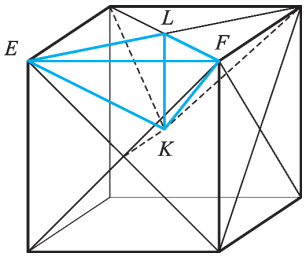
1954. Az átlóssíkok metszésvonalai a kocka testátlói és a kocka párhuzamos lapközéppontjait összekötő egyenesek. ⇒ Az átlóssíkok a kockát $6 \cdot 4 = 24$ db egybevágó derékszögű tetraéderre bontják. Legyen a kocka éle: a. Egy tetraéder térfogata $V = \frac{a^3}{24}$. Egy tetraéder felszíne

$$A = t_{ELF} + t_{ELK} + t_{FLK} + t_{EFK} = t_{ELF} + 2t_{ELK} + t_{EFK} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a =$$

$$= \frac{1}{4} a^2 + \frac{\sqrt{2}}{4} a^2 + \frac{\sqrt{2}}{4} a^2 = \frac{2\sqrt{2} + 1}{4} a^2.$$

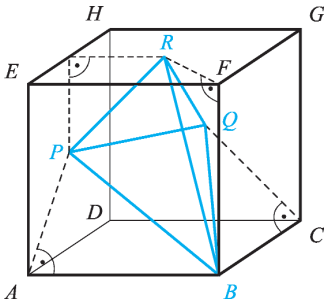
1954.



1955. Maga a gúla 1 térrész. Minden laphoz illeszkedik 1-1 térrész → 5 db. Minden élnél kialakul 1-1 térrész → 8 db. Minden csúcsnál kialakul 1-1 szöglet → 5 db. Összesen 19 részre bontják a lapsíkok a teret.

II

1958.



1956. Maga az oktaéder 1 térrész. Minden laphoz illeszkedik 1-1 térrész → 8 db. Minden élnél kialakul 1-1 térrész → 12 db. Minden csúcsnál kialakul 1-1 szöglet → 6 db. Összesen $\underline{\underline{27}}$ részre bontják a lapsíkok a teret.

1957. Vegyük a két gúla közös alapsíkját és azt az n síkot, melyek mindegyike átmegy mindkét gúla csúcspontján és négy élt tartalmaz. A test minden éle ezen síkok valamelyikén, de csak az egyiken van rajta. Maximális számú metszéspontot kapunk, ha a metszősík ezen síkok mindegyikét olyan egyenesben metszi, amelyiknek a síkon levő két éllel van metszéspontja. *a)* $\underline{6}$; *b)* $\underline{8}$; *c)* $\underline{\underline{10}}$; *d)* $\underline{\underline{2(n+1)}}$.

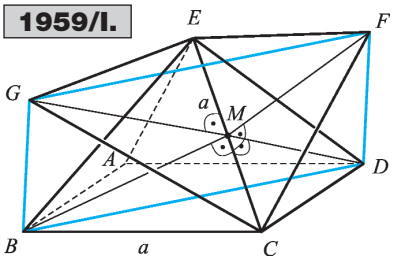
1958. $AB \perp [ADHE] \Rightarrow AB \perp AP$, ezért az $ABP\triangle$-re alkalmazható Pitagorasz tétele:

$BP^2 = AP^2 + AB^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + a^2 = \frac{3}{2}a^2 \Rightarrow BP = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a = \frac{\sqrt{6}}{2}a$. Hasonlóan RFB derékszögű háromszögből, illetve BCQ derékszögű háromszögből $RB = QB = PB = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{2}a}}$. Két lapközéppontból bocsássunk merőlegest a lapok közös élére, így létrejön egy derékszögű háromszög, aminek befogói $\frac{a}{2}$ hosszúságúak, átfogója pedig a lapközéppontokat összekötő szakasz. Pitagorasz tétele a PRS derékszögű háromszögre: $PR^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow PR = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}a}}$. Hasonlóan megmutatható, hogy $RQ = QP = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

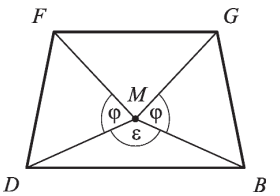
1959. Legyen EC felezőpontja M. $BCE\triangle$ szabályos, ezért $BM \perp EC$ és $CGE\triangle$ szabályos, ezért $GM \perp EC \Rightarrow EC \perp [BGM]$. Hasonlóan: $EC \perp [DFM]$. $\Rightarrow B; G; F; D$ és M egy síkban vannak.

A négyoldalú gúlából és a két tetraéderből álló test szimmetriája miatt $BDFG$ húrtrapéz. $DM = BM = GM = FM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, mert egy-egy a oldalú szabályos háromszög magasságai. $DB = \sqrt{2}\,a$; $FD = BG = a$. A koszinusztétel a $DBM\triangle$-re: $DB^2 = DM^2 + BM^2 - 2DM \cdot BM \cdot \cos\varepsilon$, azaz $2a^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}a^2 \cdot \cos\varepsilon \Rightarrow \cos\varepsilon = -\frac{1}{3} \Rightarrow \varepsilon \approx 109{,}47°$. A koszinusztétel az $FDM\triangle$-re: $FD^2 = FM^2 + DM^2 - 2FM \cdot DM \cdot \cos\varphi$, azaz $a^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}a^2 \cdot \cos\varphi \Rightarrow$

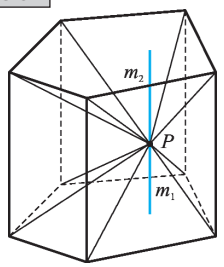
1959/I.



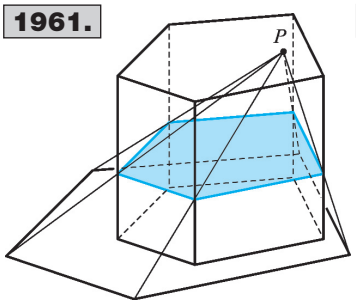
1959/II.



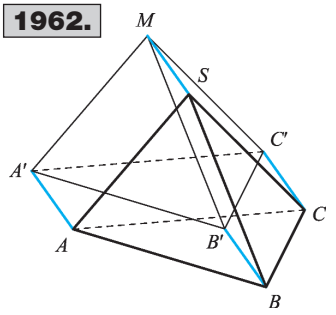
1960.



1961.



1962.



$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{3} \Rightarrow \varphi \approx 70{,}53°.\ 2\varphi + \varepsilon + FMG\sphericalangle = 360° \Rightarrow FMG\sphericalangle \approx 109{,}47° = \varepsilon \Rightarrow DMB\triangle \cong FMG\triangle \Rightarrow$

$\Rightarrow FG = DB = \underline{\underline{\sqrt{2}\cdot a}}.$

A fentiekből az is következik, hogy $DBGF$ téglalap, vagyis $DB \perp BG \parallel DF$.

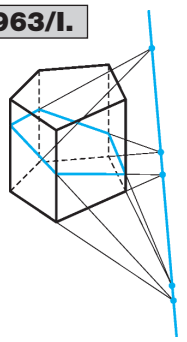
1960. Legyen a hasáb tetszőleges belső pontja P. Ha elvesszük a hasábból azokat a gúlákat, amelyeknek közös csúcsa P és alaplapjaik az oldallapok, akkor két gúla marad, amelyeknek közös csúcsa P és alaplapjaik a hasáb alap- és fedőlapja. Ezek térfogatát elvéve a hasáb térfogatából megkapjuk a keresett térfogatot.

$$V = V_{\text{hasáb}} - V_1 - V_2 = t_{\text{alap}} \cdot m - \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot m_1 - \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot m_2 = t_{\text{alap}} \cdot m - \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot (m_1 + m_2) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot m = \underline{\underline{\frac{2}{3} V_{\text{hasáb}}}} = \text{állandó}.$$

1961. A metszősík az alaplappal egybevágó síkidomot vág ki a hasábból. Legyen a fedőlap tetszőleges pontja P. A feltételeknek megfelelő P csúcsú gúla alaplapja a síkmetszet P középpontból nagyított képe, mert a metszősík párhuzamos az alaplappal. Ezért a feltételeknek megfelelő gúlához hasonló az a gúla, amelynek csúcsa P és alaplapja a síkmetszet. (A hasonlóság aránya λ.)

1963/I.

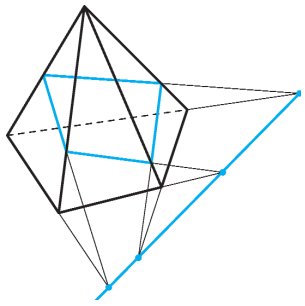


$V_h = t \cdot m;\quad V_g = \frac{1}{3} \cdot \lambda^2 \cdot t \cdot m,$ valamint $V_h = V_g. \Rightarrow \lambda^2 = 3 \Rightarrow \lambda =$

$= \sqrt{3}$. λ a két gúla magasságának is aránya $\Rightarrow \frac{m}{m_1} = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow m_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} m \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3} m}}$ távolságra kell legyen a fedőlaptól a metszősík.

1963/II.

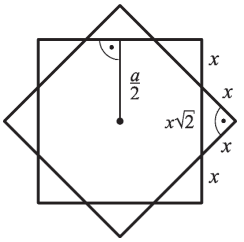


1962. $ABC\triangle$-et eltoljuk $\overrightarrow{SM}$-ral, az $A'B'C'\triangle$-et kapjuk. $ABCS$ tetraéder egybevágó $A'B'C'M$ tetraéderrel, így térfogatuk egyenlő. Az oldallapokra illeszkedő hasábok térfogatának összege: $V_{ABSA'B'M} + V_{BCSB'C'M} + V_{ACSA'C'M} = V_{ABCA'B'C'M} - V_{ABCS} = V_{ABCA'B'C'M} - V_{A'B'C'M} = V_{ABCA'B'C'}$, vagyis egyenlő az alaplapra illeszkedő hasáb térfogatával.

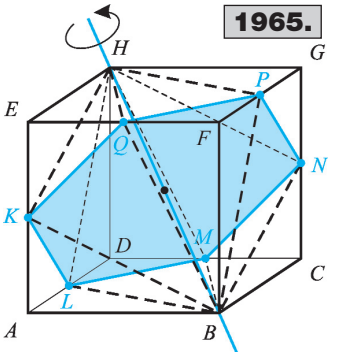
1963. Az alaplap oldalegyenesei az alaplap síkjában vannak. A síkmetszet oldalegyenesei a metsző síkon vannak. $\Rightarrow$ A síkmetszet oldalegyeneseinek az alaplap megfelelő oldalegyeneseivel való metszéspontjai mindkét síkon rajta vannak, vagyis a két sík metszésvonalának pontjai. $\Rightarrow$ Egy egyenesen vannak.

II

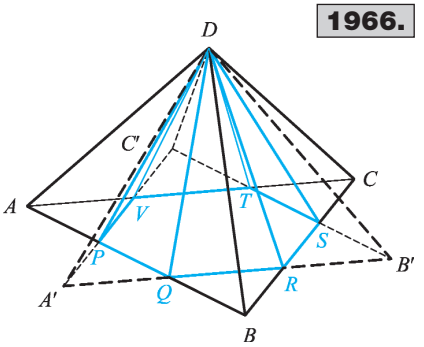
1964.



1965.



1966.



1964. Az 1964. ábrán az eredeti és az elforgatott kocka felülnézetben látható. *a)* Az eredeti és az elforgatott kocka közös része egy szabályos nyolcszög alapú hasáb, amelynek magassága a, alaplapjának egy oldala: $\left(\sqrt{2}-1\right)a$, mert $x+\sqrt{2}\cdot x+x=a \Rightarrow x=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}a \Rightarrow \sqrt{2}\cdot x=$

$=\left(\sqrt{2}-1\right)a$. $V_h=t_a\cdot m=8\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)a\cdot\dfrac{a}{2}\cdot a=\underline{\underline{2\left(\sqrt{2}-1\right)a^3}}$.

b) Az együttes térfogat: $V=2a^3-V_h=2a^3-2\left(\sqrt{2}-1\right)a^3=\underline{\underline{2\left(2-\sqrt{2}\right)a^3}}$.

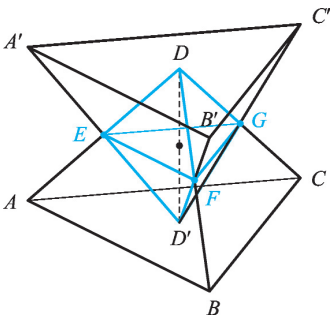
1965. A kockát a BH testátló körül forgatjuk el 60°-kal. $\Rightarrow$ B és H fixpontok. $KLMNPQ$ szabályos hatszög csúcsai a kocka élfelező pontjai, síkja merőleges a BH testátlóra. $\Rightarrow$ A hatszöget a forgatás saját magába viszi át, ezért $KLMNPQ$ az eredeti és az elforgatott kocka közös síkmetszete. $N'\equiv P$; $P'\equiv Q$; $H'\equiv H \Rightarrow G'$ a $PQH\triangle$ fölé írt gúla csúcsa lesz. $\Rightarrow$ Az eredeti és az elforgatott kocka közös része a $KLMNPQ$ alaplapú, H, illetve B csúcsú gúlákból álló test.

$$V=2\cdot\frac{1}{3}\cdot t_{KLMNPQ}\cdot\frac{BH}{2}=\frac{1}{3}\cdot t_{KLMNPQ}\cdot BH=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\cdot\sqrt{3}\cdot a=\underline{\underline{\frac{3}{4}a^3}}.$$

1966. Az $ABCD$ tetraédert elforgattuk 60°-kal a D-n áthaladó magasságvonala körül $\rightarrow$ $\rightarrow A'B'C'D$ tetraéder. A két tetraéder közös része a $PQRSTV$ szabályos hatszög alapú, D csúcsú egyenes gúla. (P; Q; R; S; T; V az alapélek harmadolópontjai.)

$$V=\frac{1}{3}\cdot t_{PQRSTV}\cdot m=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{a}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{18}a^3}}.$$

1967.



1967. A tetraéder és a sík közös pontjai a tükrözés fixpontjai, ezért $EFG\triangle$ az eredeti és a tükörkép tetraéder metszésvonala. D képe a magasság talppontja, tehát D' az $ABC\triangle$ súlypontja. $\Rightarrow$ D az $A'B'C'\triangle$ súlypontja. $\Rightarrow$ Az eredeti és a tükörkép tetraéder közös része az $EFGD$ és $EFGD'$ tetraéderekből álló test. E; F és G élfelező pontok, ezért $EFGD$ és $EFGD'$ tetraéderek szabályosak, minden élük $\dfrac{a}{2}$.

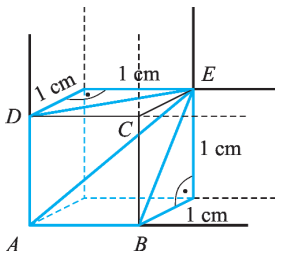
$$V=V_{EFGD}+V_{EFGD'}=2V_{EFGD}=2\cdot\frac{1}{8}\cdot V_{ABCD}=\frac{1}{4}\cdot V_{ABCD}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{48}a^3}}.$$

1968. Az egyenlő szárú derékszögű háromszög keresztmetszetű hasábot megkaphatjuk egy négyzet keresztmetszetű hasáb felezésével. ⇒ A sarokban egy kockából kell elvenni egy négyzet alapú gúlát ($ABCDE$). Ennek térfogata a kocka térfogatának harmada, így a megmaradó rész a kétharmada. A szükséges gitt térfogata:

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot(a-2)+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot(b-2)+$$
$$+4\cdot\left(1\cdot 1\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\right)=a-2+b-2+\frac{8}{3}=$$
$$=a+b-\frac{4}{3}.$$

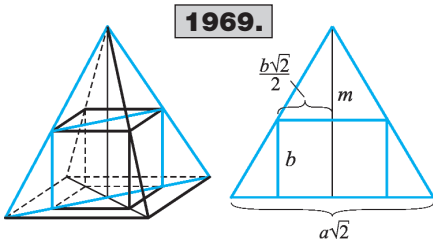
1968.



1969. Hasonlóság miatt:

$$\frac{m-b}{\frac{b\sqrt{2}}{2}}=\frac{m}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow ma-ab=mb\Rightarrow b=\frac{ma}{m+a}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow V=b^3=\left(\frac{ma}{m+a}\right)^3.$$

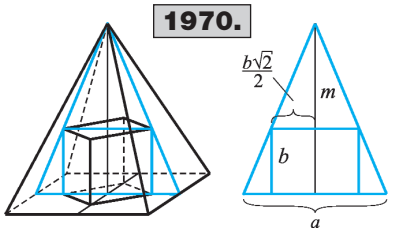
1969.



1970. Hasonlóság miatt:

$$\frac{m-b}{\frac{b\sqrt{2}}{2}}=\frac{m}{\frac{a}{2}}\Rightarrow ma-ab=mb\cdot\sqrt{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow b=\frac{ma}{m\sqrt{2}+a}\Rightarrow V=b^3=\left(\frac{ma}{m\sqrt{2}+a}\right)^3.$$

1970.



Henger

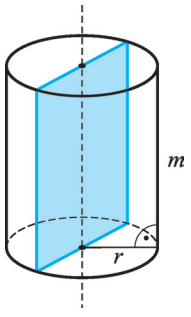
1971. $t_a=t_t$; $t_a=r^2\pi$ és $t_t=2r\cdot m\Rightarrow r^2\pi=2r\cdot m\Rightarrow m=1/2\,r\pi$.

1972. *a)* $A\approx 150{,}8\ \text{cm}^2$; *b)* $A\approx 588{,}1\ \text{dm}^2$; *c)* $A\approx 70\,664{,}42\ \text{m}^2$.

1973. $k_a=2r\pi=20{,}33$ cm; $m-r=11{,}6$ cm $\Rightarrow m=r+11{,}6$ cm.

$$A=2r\pi(r+m)=2r\pi(2r+11{,}6\ \text{cm})=$$
$$=k_a\cdot\left(\frac{k_a}{2\pi}\cdot 2+11{,}6\ \text{cm}\right)\approx 367{,}4\ \text{cm}^2.$$

1971.



1974. $A_2=2r_2\pi(r_2+m_2)=$
$=2(r_1+4)\cdot\pi\cdot(r_1+4+m_1+3)=$
$=2(r_1+4)\cdot\pi\cdot(r_1+m_1+7)=$
$=2\pi\cdot(r_1\cdot(r_1+m_1)+7\cdot r_1+4\cdot(r_1+m_1)+28)=$
$=2\,\pi\cdot r_1\cdot(r_1+m_1)+2\,\pi\cdot(7r_1+4(r_1+m_1)+28)=$
$=A_1+2\pi\cdot(11r_1+4m_1+28)$. ⇒ 923,4 =
$=2\pi\cdot(11r_1+4m_1+28)\Rightarrow m_1=29{,}74-2{,}75r_1$.
$A_1=2r_1\pi\cdot(r_1+29{,}74-2{,}75r_1)=$
$=2r_1\pi\cdot(29{,}74-1{,}75r_1)$. ⇒ $659{,}6=2r_1\pi\cdot(29{,}74-1{,}75r_1)$.

$1{,}75r_1^2 - 29{,}74r_1 + 104{,}98 = 0$. $(r_1)_1 \approx 12$ cm $\Rightarrow (m_1)_1 \approx -3{,}26$ cm, ez nem lehet; $(r_1)_2 \approx 5$ cm $\Rightarrow$ $\Rightarrow (m_1)_2 \approx 16$ cm. Az alapkör sugara $\underline{5\text{ cm}}$, a magasság $\underline{16\text{ cm}}$.

II

1975. $r \approx \underline{38{,}87\text{ cm}}$; $m \approx \underline{48{,}6\text{ cm}}$.

1976. $r \approx \underline{6{,}59\text{ cm}}$; $m \approx \underline{20{,}21\text{ cm}}$.

1977. Körülbelül $\underline{29{,}3\text{ óra}}$.

1978. Körülbelül $\underline{19{,}6\text{ cm}^2}$ bádoglemez kell.

1979. $\underline{1{,}84\text{ kg}}$ festékre lesz szükség.

1980. *a)* $V_1 \approx \underline{577{,}27\text{ cm}^2}$; *b)* $V_2 \approx 88\,053{,}4\text{ dm}^3 \approx \underline{88{,}05\text{ m}^3}$; *c)* $V_3 \approx 407\,777{,}6\text{ cm}^3 \approx \underline{407{,}8\text{ dm}^3}$.

1981. $t_p \approx \underline{263{,}9\text{ m}^2}$ és $V \approx \underline{1979{,}2\text{ m}^2}$.

1982. *a)* $m \approx \underline{21{,}14\text{ cm}}$; *b)* $m \approx \underline{17{,}86\text{ cm}}$.

1983. **1. eset:** $r = a = 5{,}6$ cm; $m = b = 7{,}9$ cm. $A_b \approx \underline{475\text{ cm}^2}$.

2. eset: $r = b = 7{,}9$ cm; $m = a = 5{,}6$ cm. $A_a \approx \underline{670{,}1\text{ cm}^2}$.

1984. $A \approx \underline{764{,}54\text{ cm}^2}$ és $V \approx \underline{1490{,}8\text{ cm}^3}$.

1985. $a = 21{,}7$ cm és $b = 36{,}8$ cm. *a)* a körüli forgatás $\Rightarrow a = m$; $b = r$. $A_a \approx \underline{13\,526{,}4\text{ cm}^2}$ és $V_a \approx \underline{92\,322\text{ cm}^3}$. *b)* b körüli forgatás $\Rightarrow a = r$; $b = m$. $A_b \approx \underline{7976{,}2\text{ cm}^2}$ és $V_b \approx \underline{54\,439{,}9\text{ cm}^3}$.

c) a felező merőlegese körüli forgatás $\Rightarrow r = \frac{a}{2}$; $m = b$. $A_{t_1} \approx \underline{3248{,}4\text{ cm}^2}$ és $V_{t_1} \approx \underline{13\,609{,}9\text{ cm}^3}$.

d) b felező merőlegese körüli forgatás $\Rightarrow$ $r = \frac{b}{2}$; $m = a$. $A_{t_2} \approx \underline{4635{,}9\text{ cm}^2}$ és $V_{t_2} \approx \underline{23\,080{,}5\text{ cm}^3}$.

1986. **1. eset:** $b = 2r_1\pi$ és $a = m \Rightarrow V_1 = \frac{b^2 a}{4\pi}$. **2. eset:** $a = 2r_2\pi$ és $b = m$ $\Rightarrow V_2 = \frac{a^2 b}{4\pi}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{b}{a} = \underline{\frac{33}{26}}$.

1987. A szükséges bádog körülbelül $\underline{627{,}35\text{ cm}^2}$.

1988. $m \approx \underline{21{,}68\text{ cm}}$.

1989. A víz szintje körülbelül $\underline{2{,}04\text{ dm}}$-t emelkedik.

1990. Két beosztás távolsága körülbelül $\underline{1{,}572\text{ cm}}$.

1991. A kapilláris cső belső átmérője kb. $\underline{1{,}248\text{ mm}}$.

1992. $V \approx \underline{64{,}34\text{ hl}}$.

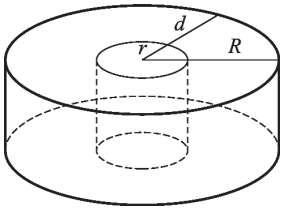
1993. $V = (R^2\pi - r^2\pi)\, m = m\pi\,(R^2 - r^2) \approx 0{,}1508\text{ m}^3 \approx 150{,}8\text{ dm}^3$.

A malomkő tömege: $V \cdot \varrho = \underline{377\text{ kg}}$.

1994. $r \approx \underline{9\text{ cm}}$; $m \approx \underline{37{,}64\text{ cm}}$.

1995. $\frac{V_1}{V_2} = \underline{\frac{r_1}{r_2}}$. **1996.** $\frac{A_{p_1}}{A_{p_2}} = \frac{r_1 m_1}{r_2 m_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} = \underline{\frac{r_2}{r_1}}$.

1993.



1997. $V = r^2\,\pi\, m \Rightarrow m = \frac{V}{r^2\pi}$. Felhasználjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget. $t_p + t_a = 2r\,\pi\, m + r^2\,\pi =$

$= 2r\,\pi \cdot \frac{V}{r^2\pi} + r^2\pi = \frac{2V}{r} + r^2\pi = \frac{V}{r} + \frac{V}{r} + r^2\pi \geq$

$\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r} \cdot r^2\pi} = 3 \cdot \sqrt[3]{V^2\pi} =$ állandó. Az összeg minimális,

II

ha egyenlőség van, azaz $\frac{V}{r}=r^2\pi\Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\Rightarrow m=\frac{V}{\sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2}}\cdot\pi}=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\Rightarrow \underline{\underline{m=r}}$. A henger magassága egyenlő az alapkör sugarával.

1998. Felhasználjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$A=2r^2\pi+2r\pi m\Rightarrow m=\frac{A}{2r\pi}-r\Rightarrow V=r^2\pi\cdot\left(\frac{A}{2r\pi}-r\right)=\frac{Ar}{2}-r^3\pi=r\left(\frac{A}{2}-r^2\pi\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow V^2=r^2\cdot\left(\frac{A}{2}-r^2\pi\right)\cdot\left(\frac{A}{2}-r^2\pi\right)=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot r^2\cdot\left(\frac{A}{2}-r^2\pi\right)\cdot\left(\frac{A}{2}-r^2\pi\right)\le$

$\le\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{2\pi r^2+\frac{A}{2}-r^2\pi+\frac{A}{2}-r^2\pi}{3}\right)^3=\frac{A^3}{54\pi}$. A térfogat maximális, ha egyenlőség van, azaz

$\frac{A}{2}-r^2\pi=2\pi r^2\Rightarrow r=\sqrt{\frac{A}{6\pi}}\Rightarrow m=2\cdot\sqrt{\frac{A}{6\pi}}=2r\Rightarrow \underline{\underline{m=2r}}$, azaz a henger egyenlő oldalú.

1999. $r:m=5:6\Rightarrow r=\frac{5}{6}\,m\Rightarrow V=r^2\pi m=\frac{25}{36}\,m^2\pi m\Rightarrow m^3=\frac{36}{25}\cdot\frac{V}{\pi}\Rightarrow m\approx 11{,}45\text{ cm}\Rightarrow$

$\Rightarrow r\approx 9{,}54\text{ cm}\Rightarrow A=2r\pi(r+m)\approx \underline{\underline{1258{,}17\text{ cm}^2}}$.

2000. $V\approx \underline{\underline{28{,}13\text{ cm}^3}}$.

2001. $t_t=2rm=969{,}5\text{ cm}^2$. $A=2r\pi(r+m)=2r\pi\cdot\left(r+\frac{969{,}5}{2r}\right)=2r^2\pi+969{,}5\,\pi=$

$=4532{,}6\text{ cm}^2\Rightarrow r^2=236{,}6\Rightarrow r\approx 15{,}38\text{ cm}\Rightarrow m\approx 31{,}52\text{ cm}\Rightarrow$

$\Rightarrow V=r^2\pi m\approx \underline{\underline{23\,428{,}84\text{ cm}^3}}$.

2002. $V\approx \underline{\underline{1{,}06\text{ m}^3}}$.

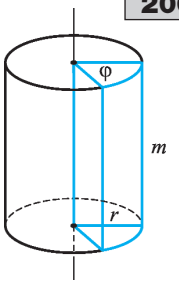
2003. $V\approx \underline{\underline{12\,379\text{ cm}^3}}$ és $A\approx \underline{\underline{2963\text{ cm}^2}}$.

2004. A keletkezett részek térfogatának aránya egyenlő az alapkörcikkek középponti szögeinek arányával. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{40^\circ}{360^\circ}=$

$=\frac{1}{9}\Rightarrow V_1=\frac{V}{9}$, ezért $V_1=\frac{r^2\pi m}{9}=\frac{36\cdot\pi\cdot 11}{9}=44\pi\Rightarrow V_1\approx$

$\approx \underline{\underline{138{,}23\text{ cm}^3}}$.

2004.



2005. $\cos\alpha=\frac{r-h}{r}\Rightarrow\alpha=52^\circ\Rightarrow\ \hat{\alpha}=0{,}908$.

$t=\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot 2\cdot\hat{\alpha}-\frac{1}{2}\cdot r^2\sin 2\alpha\approx\ 2{,}86\text{ cm}^2\Rightarrow V_{\text{beton}}=$

$=tm\approx 7144{,}9\text{ m}^3\Rightarrow m_{\text{cement}}\approx 7144{,}9\cdot 150\text{ kg}\approx 1\,071\,733{,}7\text{ kg}\approx$

$\approx \underline{\underline{1071{,}7\text{ t}}}$.

2005.

