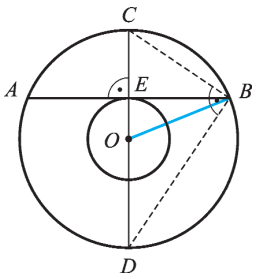
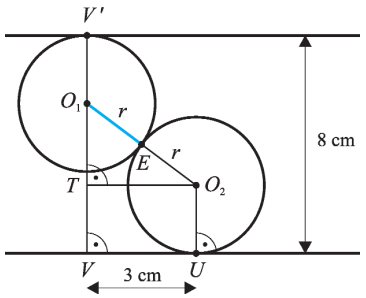
I

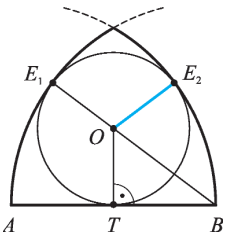
1408.



1409.



1410.



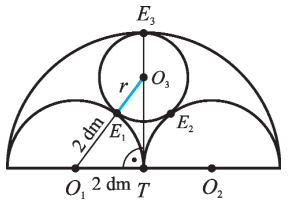
1408. $AE = EB = 2$ m; $EC = 0{,}8$ m. A Thalész-tétel szerint $CBD\triangle$ derékszögű $\Rightarrow$ alkalmazható a magasságtétel: $BE^2 = CE \cdot ED$. Az adatokat behelyettesítve: $2^2 = 0{,}8(r_1 + r_2) \Rightarrow r_2 = 5 - r_1$. A Pitagorasz-tétel az OEB derékszögű háromszögben: $2^2 + r_1^2 = r_2^2$. A két összefüggésből: $\underline{\underline{r_1 = 2{,}1\,\text{m}}}$ és $\underline{\underline{r_2 = 2{,}9\,\text{m}}}$.

1409. O_1TO_2 derékszögű háromszögben: $O_2T = 3$ cm; $O_1T = 8 - 2r$; $O_1O_2 = 2r$. A Pitagorasz-tétel: $3^2 + (8 - 2r)^2 = (2r)^2 \Rightarrow \underline{\underline{r \approx 2{,}28\,\text{cm}}}$.

1410. Felhasználjuk: Érintő körök középpontjai és érintési pontja egy egyenesen vannak. Egyenest érintő kör érintési pontba húzott sugara merőleges az egyenesre. OTB derékszögű háromszögben: $OT = r$; $OB = 60 - r$; $TB = 30$. Pitagorasz-tétel az OTB-ben: $30^2 + r^2 = (60 - r)^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{\underline{r = 22{,}5\,\text{cm}}}$.

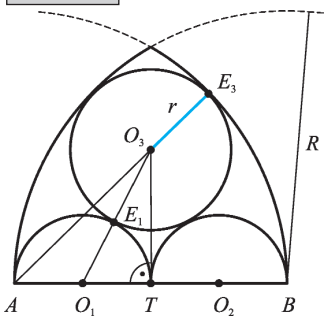
1411. Felhasználjuk: Érintő körök érintési pontja és középpontjaik egy egyenesen vannak. Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintő egyenesre. O_1TO_3 derékszögű háromszögben: $O_1T = 2$ dm; $O_3T = 4$ dm $- r$; $O_1O_3 = 2$ dm $+ r$. A Pitagorasz-tétel: $2^2 + (4 - r)^2 = (2 + r)^2 \Rightarrow r = \underline{\underline{\frac{4}{3}\,\text{dm} \approx 1{,}33\,\text{dm}}}$.

1411.



1412. Felhasználjuk: Érintő körök érintési pontja és középpontjaik egy egyenesen vannak. Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintő egyenesre.

1412.



AO_3T derékszögű háromszögben: $AO_3 = R - r$; $AT = \frac{R}{2}$.

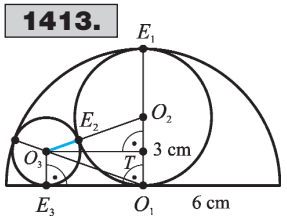
A Pitagorasz-tétel: $O_3T^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = (R - r)^2$. O_1O_3T derékszögű háromszögben: $O_1O_3 = r + \frac{R}{4}$; $O_1T = \frac{R}{4}$.

A Pitagorasz-tétel: $O_3T^2 + \left(\frac{R}{4}\right)^2 = \left(r + \frac{R}{4}\right)^2$.

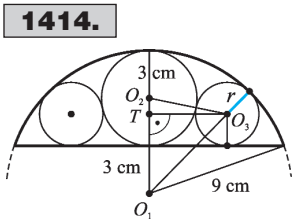
A két összefüggésből: $(R - r)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left(r + \frac{R}{4}\right)^2 - \left(\frac{R}{4}\right)^2$.

A megfelelő algebrai átalakítások után: $r = \frac{3R}{10}$.

1413.



1414.



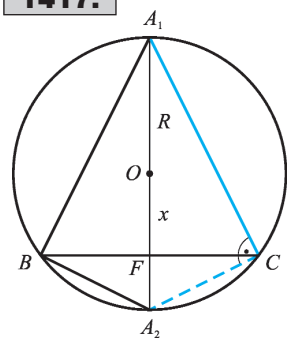
1413. Felhasználjuk: Érintő körök érintési pontja és középpontjaik egy egyenesen vannak. Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintő egyenesre. Legyen O_3T merőleges O_1E_1-re. $O_1E_3O_3$ derékszögű háromszögben: $O_3E_3 = r$; $O_1O_3 = 6 - r$. A Pitagorasz-tétel: $O_1E_3^2 + r^2 = (6-r)^2$. O_3TO_2 derékszögű háromszögben: $O_3T = O_1E_3$; $O_2T = 3 - r$; $O_2O_3 = 3 + r$. A Pitagorasz-tétel: $O_3T^2 + (3-r)^2 = (3+r)^2 \Rightarrow O_1E_3^2 + (3-r)^2 = (3+r)^2$. A két összefüggésből: $(6-r)^2 - r^2 = (3+r)^2 - (3-r)^2$. A megfelelő algebrai átalakítások után: $r = 1{,}5\,\text{cm}$.

1414. Felhasználjuk: Érintő körök érintési pontja és középpontjaik egy egyenesen vannak. Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintő egyenesre. O_1TO_3 derékszögű háromszögben: $O_1O_3 = 9 - r$; $O_1T = 3 + r$. A Pitagorasz-tétel: $O_3T^2 + (3+r)^2 = (9-r)^2$. O_2TO_3 derékszögű háromszögben: $O_2O_3 = 3 + r$; $O_2T = 3 - r$. A Pitagorasz-tétel: $O_3T^2 + (3-r)^2 = (3+r)^2$. A két összefüggésből: $(9-r)^2 - (3+r)^2 = (3+r)^2 - (3-r)^2$. A megfelelő algebrai átalakítások után: $r = 2\,\text{cm}$. Két ilyen kör van.

1415. A háromszög területe: $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2}$. Az adatokat a terület összefüggésben felhasználva: $3a = 4b$. Pitagorasz-tétel az AFC derékszögű háromszögben: $3^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$. Az alábbi összefüggést felhasználva: $3^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}a\right)^2$. A megfelelő algebrai átalakítások után: $a = \sqrt{28{,}8} \approx 5{,}37\,\text{cm}$ az alap. $b = \frac{3}{4}a = \frac{3}{4}\sqrt{28{,}8} \approx 4{,}02\,\text{cm}$ a szár.

1416. A Pitagorasz-tétel az AFC derékszögű háromszögben: $m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$. Az adatokat behelyettesítve: $b = 25$ cm. A háromszög területe: $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2}$. Az adatokkal: $\frac{30 \cdot 20}{2} = \frac{25 \cdot m_b}{2} \Rightarrow m_b = 24\,\text{cm}$ a szárhoz tartozó magasság.

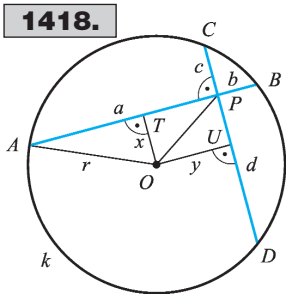
1417.



1417. A Thalész-tételt felhasználva: $A_1CA_2\sphericalangle = 90°$. Magasságtétel az $A_1CA_2\triangle$-re: $CF_2^2 = A_1F \cdot FA_2$. Számadatokkal: $4^2 = (5+x)(5-x) \Rightarrow x = 3$ cm. Két háromszög felel meg a feltételeknek: $A_1BC\triangle$-ben $A_1F = R + x = 8$ cm. A Pitagorasz-tétel az A_1FC derékszögű háromszögre: $A_1C^2 = 8^2 + 4^2 \Rightarrow A_1C = \sqrt{80} \approx 8{,}94\,\text{cm}$. $A_2BC\triangle$-ben $A_2F = R - x = 2$ cm. A Pitagorasz-tétel az A_2FC derékszögű háromszögre: $A_2C^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow A_2C = \sqrt{20} \approx 4{,}47\,\text{cm}$.

I

1418.



1418. Állítás: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 =$ állandó. Bizonyítás: $d(O; AB) = d(O; T) = x$ és $d(O; CD) = d(O; U) = y$. Pitagorasz tétele az $AOT\triangle$-re: $r^2 = AT^2 + TO^2$ és $AT = \frac{a+b}{2}$; $TO = x \Rightarrow r^2 = \frac{(a+b)^2}{4} + x^2 \otimes$. Pitagorasz tétele az $OUD\triangle$-re: $r^2 = OU^2 + UD^2$ és $UD = \frac{d+c}{2}$; $OU = y \Rightarrow r^2 = \frac{(d+c)^2}{4} + y^2 \oplus$. $\otimes + \oplus$: $2r^2 = \frac{(a+b)^2 + (c+d)^2}{4} + x^2 + y^2 \Rightarrow 8r^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + dc) + 4x^2 + 4y^2$. A szelődarabok szorzatára tanult tétel szerint $cd = ab = (r - OP)(r + PO) = r^2 - OP^2$. Ezt felhasználva: $8r^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2 \cdot 2 \cdot (r^2 - OP^2) + 4x^2 + 4y^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 4r^2 - 4OP^2 + 4OP^2 \Rightarrow 4r^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, tehát $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 =$ állandó.

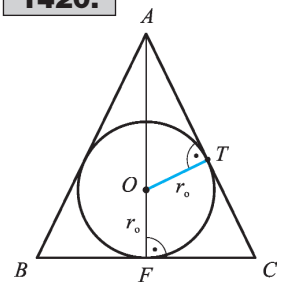
1419. $BC = AF \Rightarrow BAC\sphericalangle$ hegyesszög $\Rightarrow O$ az $ABC\sphericalangle$ belső pontja. OFC derékszögű háromszögben: $OF = 6 - r$; $FC = 3$; $OC = r$. A Pitagorasz-tétel: $(6 - r)^2 + 3^2 = r^2$. A megfelelő algebrai átalakítások után: $\underline{\underline{r = 3{,}75\text{ cm}}}$.

1420. Felhasználjuk: $T_\triangle = r_o s$, ahol s a félkerület. Külső pontból a körhöz húzott érintő szakaszok egyenlők: $CF = CT = 15$ cm $\Rightarrow AT = AC - CT = 39 - 15 = 24$ cm. A Pitagorasz-tétel az AFC derékszögű háromszögre: $AF^2 + 15^2 = 39^2 \Rightarrow AF = 36$ cm. A háromszög területe: $T_\triangle = \frac{30 \cdot 36}{2} = \frac{30 + 2 \cdot 39}{2} r_0 \Rightarrow \underline{\underline{r_0 = 10\text{ cm}}}$.

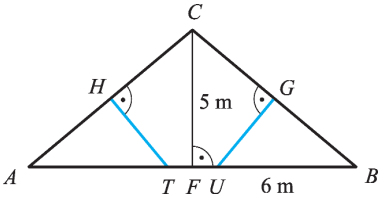
1421. Az 1420. ábra jelöléseit használjuk. Külső pontból a körhöz húzott érintő szakaszok: $CF = CT = 30$ cm. $AO > OF \Rightarrow AO : OF = 17 : 15 \Rightarrow AO = 17x$; $OF = OT = r_0 = 15x$. $OTA\triangle \sim CFA\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow \lambda = \frac{OT}{FC} = \frac{OA}{AC} \Rightarrow \frac{15x}{30} = \frac{17x}{AC} \Rightarrow AC = 34\text{ cm} \Rightarrow AT = 4$ cm. A Pitagorasz-tétel az OTA derékszögű háromszögre: $(17x)^2 = (15x)^2 + 4^2 \Rightarrow x = 0{,}5$ cm. $r_0 = 15x = \underline{\underline{7{,}5\text{ cm}}}$ a beírt kör sugara.

1422. A Pitagorasz-tétel a BFC derékszögű háromszögben: $BC^2 = 5^2 + 6^2 \Rightarrow BC = \sqrt{61}$ m $\Rightarrow CG = GB = 0{,}5\sqrt{61}$ m. $BFC\triangle \sim BGU\triangle$, mert egy szögük közös, egy szögük 90^0: $\frac{GU}{GB} = \frac{CF}{BF} \Rightarrow GU = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{61}}{12} \approx 3{,}25\text{ m}}}$.

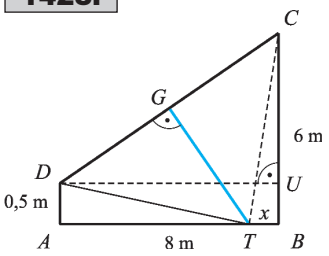
1420.



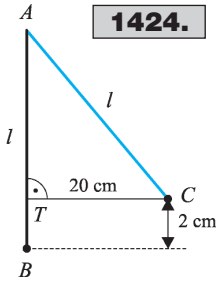
1422.



1423.



1424.



1423. Legyen DU párhuzamos AB-vel. DUC derékszögű háromszögben: $DU = 8$ m; $UC = BC - AD = 5{,}5$ m. A Pitagorasz-tétel a $DUC\triangle$-ben: $8^2 + 5{,}5^2 = DC^2 \Rightarrow DC \approx 9{,}71$ m $\Rightarrow DG = GC = 4{,}86$ m. A Pitagorasz-tétel a $TBC\triangle$-ben: $x^2 + 6^2 = TC^2$. A Pitagorasz-tétel a $TAD\triangle$-ben: $(8 - x)^2 + 0{,}5^2 = TD^2 = TC^2$. A két összefüggésből: $x \approx 1{,}77$ m $\Rightarrow TC^2 = 39{,}12$. A Pitagorasz-tétel a CGT derékszögű háromszögben: $GC^2 + GT^2 = CT^2$. A fent kiszámolt adatokat felhasználva: $GT \approx 3{,}94$ m.

1424. ATC derékszögű háromszögben: $AT = l - 2$ cm; $TC = 20$ cm; $AC = l$. Pitagorasz-tétel: $(l - 2)^2 + 20^2 = l^2 \Rightarrow l = 101$ cm.

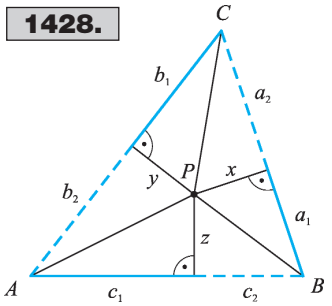
1425. Mivel $AB > AC, BC$, az m_c magasság talppontja az AB szakasz belső pontja. A Pitagorasz-tétel az ATC derékszögű háromszögre: $x^2 + m_c^2 = 25^2$. A Pitagorasz-tétel a BTC derékszögű háromszögre: $(63 - x)^2 + m_c^2 = 52^2$. A két összefüggésből: $25^2 - x^2 = 52^2 - (63 - x)^2 \Rightarrow x = 15$ cm $\Rightarrow m_c = 20$ cm.

1426. A leghosszabb oldalhoz tartozó magasság talppontja az oldal belső pontja. A Pitagorasz-tétel az ATB és az ATC derékszögű háromszögekre: $x^2 + m_a^2 = c^2$, illetve $(a - x)^2 + m_a^2 = b^2 \Rightarrow x = \dfrac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}$ és $m_a^2 = c^2 - \left(\dfrac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}\right)^2$. A háromszög területe: $T_\triangle = \dfrac{a \cdot m_a}{2} = \dfrac{b \cdot m_b}{2} = \dfrac{c \cdot m_c}{2} \Rightarrow m_b = \dfrac{a}{b} \cdot m_a$ és $m_c = \dfrac{a}{c} \cdot m_a$. Az adatok behelyettesítése után: $m_a = 12$ cm; $m_b = 12{,}6$ cm; $m_c = 19{,}38$ cm.

1427. Legyen a trapéz hosszabb alapja AB, rövidebb alapja DC, a D-ből induló magasság talppontja T. Legyen DB' párhuzamos a BC szárral $\Rightarrow AB' = 10$ cm. A Pitagorasz-tétel az ATD és a $B'TD$ derékszögű háromszögekre: $x^2 + m^2 = 9^2$, illetve $(10 + x)^2 + m^2 = 17^2 \Rightarrow x = 5{,}4$ cm és $m = 7{,}2$ cm.

1428. Pitagorasz tételének többszöri alkalmazásával:

1428.



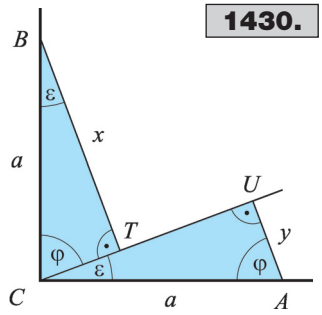
$a_1^2 = BP^2 - x^2$; $a_2^2 = CP^2 - x^2$; $b_1^2 = CP^2 - y^2$; $b_2^2 = AP^2 - y^2$; $c_1^2 = AP^2 - z^2$; $c_2^2 = BP^2 - z^2$. A fentiekből következik, hogy $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = AP^2 + BP^2 + CP^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$.

1429. A derékszögű háromszög oldalaira Pitagorasz tételét felírva: $a^2 + b^2 = c^2$.

A derékszögű háromszög területét kétféleképpen felírva: $\dfrac{ab}{2} = \dfrac{cm_c}{2} \Rightarrow 2ab = 2\,cm_c$.

I

1430.



A fentiekből következik, hogy $a^2+b^2+2ab+m_c^2=c^2+2\ \text{cm}_c++m_c^2 \Rightarrow (a+b)^2+m_c^2=(c+m_c)^2$, azaz $a+b$; m_c és $c+m_c$ szakaszok derékszögű háromszöget alkotnak, Pitagorasz tételének megfordítása miatt.

1430. $\varepsilon+\varphi=90°$. $AUC\triangle \cong CTB\triangle$, mert szögeik ε, φ, 90° és átfogójuk $a \Rightarrow CT=y$ és $CU=x$. Pitagorasz tételét alkalmazva az egybevágó derékszögű háromszögekre: $x^2+y^2=a^2$, tehát x^2+y^2 csak a-tól függ.

1431. Legyen $T \in BC$ a magasság talppontja. ABT derékszögű háromszögben $a^2=m^2+c^2$ és ACT derékszögű háromszögben $b^2=m^2+d^2 \Rightarrow a^2+2b^2=m^2+c^2+2(m^2+d^2)=3m^2+2d^2+c^2$, tehát igaz az állítás.

1432. CDO derékszögű háromszögben a hegyesszögek 30° és 60°, ezért $CD=\dfrac{r}{\sqrt{3}} \Rightarrow BD=$ $=BC-CD=3r-\dfrac{r}{\sqrt{3}}$. Pitagorasz tétele az ADB derékszögű háromszögre:

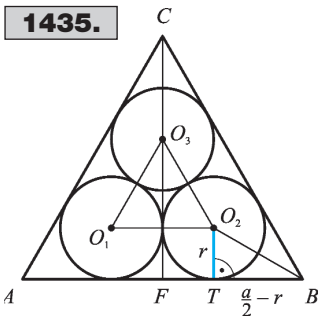
$$(2r)^2+\left(3r-\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2=AB^2 \Rightarrow AB=\sqrt{\frac{40-6\sqrt{3}}{3}}\cdot r \approx \underline{\underline{3{,}1415r \approx k_{\text{félkör}}}}.$$

1433. Legyen O a kör középpontja, A az egyik külső négyzet csúcsa, T az O-ból a négyzet oldalegyenesére bocsátott merőleges talppontja. OTA derékszögű háromszögben: $OT=\dfrac{a}{2}$; $AT=\dfrac{3}{2}a$; $OA=r$. A Pitagorasz-tétel: $\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}a\right)^2=r^2 \Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{10}}{5}r$.

1434. Felhasználjuk: Érintő körök érintési pontja és középpontjaik egy egyenesen vannak. $\Rightarrow O_3O=r-r'$. A 120°-os forgásszimmetria miatt $O_1O_2O_3\triangle$ szabályos, középpontja O, ami súlypont is. $\Rightarrow O_3E_3=1{,}5O_3O=1{,}5(r-r')$. A Pitagorasz-tétel az $O_1E_3O_3$ derékszögű háromszögben: $(r')^2+(1{,}5(r-r'))^2=(2r')^2$. $\Rightarrow r'=\left(2\sqrt{3}-3\right)r$.

1435. ABC szabályos háromszögben $CF=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. A szögszárakkal való érintkezés miatt BO_2 szögfelező $\Rightarrow TBO_2\sphericalangle=30°$. $O_2TB\triangle \sim BFC\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow \dfrac{\frac{a}{2}-r}{r}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \underline{\underline{r=\dfrac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}}}$.

1435.



1436. Legyenek a szabályos nyolcszög szomszédos csúcsai A_1, A_2, A_3; $A_1A_3 \perp A_2O$ és $A_1A_3 \cap A_2O=F \Rightarrow A_1OA_3\sphericalangle=90°$. $A_1A_3=r\sqrt{2} \Rightarrow A_1F=A_3F=OF=\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$. A_1FA_2 derékszögű

háromszögben $A_2F = r - \frac{r\sqrt{2}}{2}$ és $A_1F = \frac{r\sqrt{2}}{2}$. A Pitagorasz-tétel: $A_1A_2^2 = \left(r - \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow A_1A_2 = \underline{\underline{r\sqrt{2-\sqrt{2}}}}$ a szabályos nyolcszög oldala.

1437. Legyenek a szabályos tizenkétszög szomszédos csúcsai A_1, A_2, A_3; $A_1A_3 \perp OA_2$ és $A_1A_3 \cap OA_2 = F \Rightarrow A_1OA_3\sphericalangle = 60°$. $A_1A_3 = r \Rightarrow OF = \frac{r\sqrt{3}}{2}$. A_1FA_2 derékszögű háromszögben $A_2F = r - \frac{r\sqrt{3}}{2}$ és $A_1F = \frac{r}{2}$. A Pitagorasz-tétel: $A_1A_2^2 = \left(r - \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow A_1A_2 = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$ a szabályos tizenkétszög oldala.

1438. Szabályos hatszögben $AOB\triangle$ szabályos. Legyen F a BO szakasz felezőpontja. $\Rightarrow AF = AB\frac{\sqrt{3}}{2} = 2{,}5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$; $2AF = x' = 2{,}5 \cdot \sqrt{3} \approx 4{,}33\,\text{cm} \Rightarrow x = x' + 2 \cdot 0{,}05 \approx \underline{\underline{4{,}43\,\text{cm}}}$.

1439. Legyen a négyzet középpontja K, P-ből az AC átlóra bocsátott merőleges talppontja T, a BD-re bocsátott merőleges talppontja U. $ABCD$ négyzetben $BK = \frac{a}{\sqrt{2}}$. $APT\triangle \sim ABK\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow \underline{\underline{PT = \frac{b}{\sqrt{2}}}}$. $BUP\triangle \sim BKA\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{PU = \frac{a-b}{\sqrt{2}}}}$.

1440. $ABD\triangle$ egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow AD = a\sqrt{2}$. Az 1437. feladatban láttuk: az r sugarú körbe írt szabályos tizenkétszög oldala $r\sqrt{2-\sqrt{3}}$. CD egy a sugarú körbe írt szabályos tizenkétszög oldala, mert $CB = DB = a$ és $CDB\sphericalangle = 30° \Rightarrow CD = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

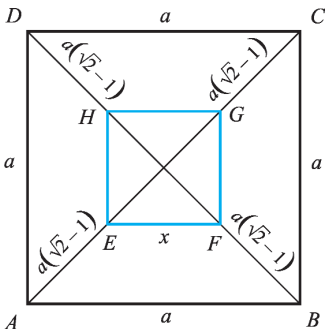
1441. *a)* A belső $EFGH$ négyszögben az átlók merőlegesen felezik egymást és egyenlő hosszúak, tehát az $EFGH$ négyszög négyzet.

b) Legyen $EH = x$! Az átló az oldal $\sqrt{2}$-szerese:

$EG = a\sqrt{2} - 2a\left(\sqrt{2} - 1\right) = a \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right) = \sqrt{2} \cdot x \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{x = a \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)}}$.

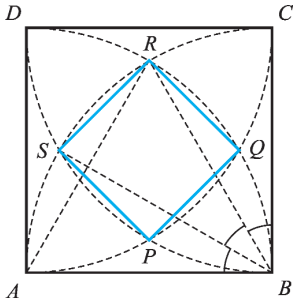
1441.



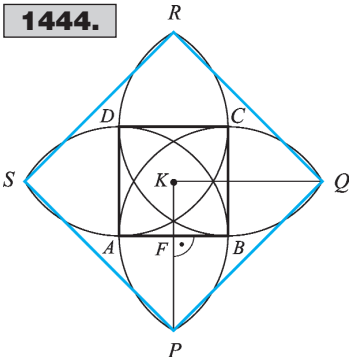
1442. **1. eset:** a metszéspont belső pont. $ABE\triangle$ szabályos, azaz $EB = AE = a$. $EB = BC$ és $EBC\sphericalangle = 30° \Rightarrow EC$ egy a sugarú körbe írt szabályos tizenkétszög oldala. Az 1437. feladat alapján $EC = DE = \underline{\underline{a\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$.

I

1443.



1444.



2. eset: a metszéspont külső pont. $ABE'\triangle$ szabályos, azaz $E'B = AE' = a$. CFE' derékszögű háromszögben $CF = \frac{a}{2}$ és $FE' = a + \frac{a\sqrt{3}}{2}$. A Pitagorasz-tétel: $E'C^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow E'C = DE' = \underline{\underline{a\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

1443. A 90°-os forgásszimmetria miatt $SP = PQ = QR = SR \Rightarrow PQRS$ négyszög négyzet. $ABR\triangle$ a oldalú szabályos háromszög $\Rightarrow ABR\sphericalangle = 60° \Rightarrow RBC\sphericalangle = 30°$. $SBC\triangle$ a oldalú szabályos háromszög $\Rightarrow SBC\sphericalangle = 60° \Rightarrow ABS\sphericalangle = 30° \Rightarrow SBR\sphericalangle = 30°$. SR egy a sugarú körbe írt szabályos tizenkétszög oldala. Az 1437. feladat szerint $SR = \underline{\underline{a\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$.

1444. A 90°-os forgásszimmetria miatt $SP = PQ = QR = SR \Rightarrow PQRS$ négyszög négyzet. $ABP\triangle$ szabályos $\Rightarrow PF = a\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow KP = \frac{a}{2} + a\frac{\sqrt{3}}{2}$. $KPQ\triangle$ egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow PQ =$

$= KP \cdot \sqrt{2} = \left(\frac{a}{2} + a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt{2} = \underline{\underline{a\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

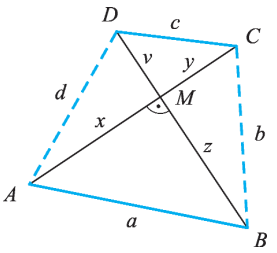
1445. A megadott adatokkal m_c magasság T talppontja az AB szakasz belső pontja. Legyen F az AB szakasz felezéspontja. CTF derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele: $TF^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow TF = 5$ cm $\Rightarrow AT = AF - TF = 25$ cm és $BT = BF + TF = 35$ cm. ATC derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele: $25^2 + 12^2 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{769} \approx \underline{\underline{27{,}73\,\text{cm}}}$. BTC derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele: $35^2 + 12^2 = c^2 \Rightarrow c = \underline{\underline{37\,\text{cm}}}$.

1446. Legyenek $F \in BC$, $G \in AC$ és $H \in AB$ az oldalfelező pontok. Az ABC derékszögű háromszögben $a^2 + b^2 = c^2$ és a CH súlyvonalra $s_c = \frac{c}{2}$ Thalész tétele szerint. A CGB derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele: $s_b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2$. Az AFC derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele: $s_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$. $s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}\left(a^2+b^2\right) + \frac{c^2}{4} = \frac{5}{4}c^2 +$

$+ \frac{c^2}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{2}c^2}}$ bármely c átfogójú derékszögű háromszögben.

1447. Pitagorasz tételét alkalmazva a derékszögű háromszögekre: $AMB\triangle$-ben $a^2 = x^2 + z^2$; $BMC\triangle$-ben $b^2 = z^2 + y^2$; $CMD\triangle$-ben $c^2 = y^2 + v^2$; $DMA\triangle$-ben $d^2 = v^2 + x^2$. A fentiekből következik, hogy $a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + v^2 + z^2 = b^2 + d^2$, tehát igaz az állítás.

1447.



1448. **1. eset:** a négyszög nem téglalap. Legyen DT és CU az AB egyenesre merőleges.
$DT = CU$; $AT = BU$; $AU = AB + BU$; $BT = |AB - AT|$. A Pitagorasz-tétel az ATD derékszögű háromszögre: $AT^2 + DT^2 = AD^2$ (I.). A Pitagorasz-tétel az AUC derékszögű háromszögre: $AU^2 + CU^2 = AC^2$, ami a feltételek felhasználásával: $(AB + AT)^2 + DT^2 = AC^2$ (II.). A Pitagorasz-tétel a BTD derékszögű háromszögre: $|AB - AT|^2 + DT^2 = BD^2$ (III.). II. + III. $\Rightarrow AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AT^2 + DT^2) = 2(AB^2 + AD^2)$, ami azt jelenti, hogy $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.
2. eset: a négyszög téglalap. Közvetlenül adódik, hogy $e^2 = f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.

1449. Felhasználjuk, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével, azaz $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$. *a)* $e^2 + 7^2 = 2(6^2 + 10^2) \Rightarrow e = \sqrt{223} \approx \underline{\underline{14{,}93\text{ cm}}}$. *b)* $12^2 + 18^2 = 2(a^2 + 9^2) \Rightarrow a = \sqrt{153} \approx \underline{\underline{12{,}37\text{ cm}}}$. *c)* $40^2 + 74^2 = 2(a^2 + 51^2) \Rightarrow a = \sqrt{937}$. Legyen $DT \perp AB$. Pitagorasz tétele az ATD és a BTD derékszögű háromszögekre:
$AT^2 + m_b^2 = 937$ és $(51 - AT)^2 + m_b^2 = 40^2 \Rightarrow AT = 19 \Rightarrow \underline{\underline{m_b = 24\text{ cm}}}$.

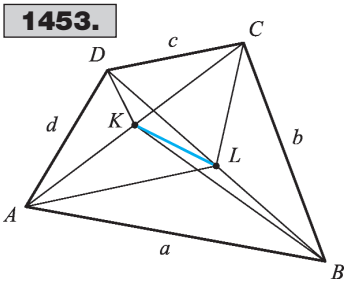
1450. Legyenek EG és HF a középvonalak. Felhasználjuk, hogy a négyszög oldalfelező pontjai olyan paralelogrammát határoznak meg, aminek átlói a négyszög középvonalai, oldalai pedig a négyszög átlóinak felével egyenlők. A paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével, azaz $EG^2 + HF^2 = 2HE^2 + 2EF^2 = 2\left(\frac{BD}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \frac{BD^2}{2} + \frac{AC^2}{2} \Rightarrow \underline{\underline{BD^2 + AC^2 = 2\left(EG^2 + HF^2\right)}}$. Megjegyzés: az állítás konkáv négyszögre is igaz.

1451. Legyen AB felezéspontja F, C középpontos tükörképe F-re C'.
Az $AC'BC$ paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével, azaz $c^2 + (2s_c)^2 = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow s_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$. *a)* $s_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$; $s_b = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}$; $s_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$. *b)* $a = 7$ cm; $b = 11$ cm; $s_c = 6$ cm. $c^2 + (2s_c)^2 = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow$
$\Rightarrow c = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4s_c^2} = \underline{\underline{14\text{ cm}}}$.

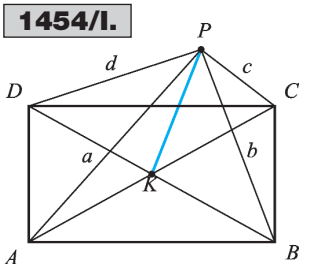
1452. Legyen AB felezéspontja F, C középpontos tükörképe F-re C'. Az $AC'BC$ paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével, azaz $c^2 + (2s_c)^2 = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow s_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$. Hasonlóan kaphatjuk, hogy $s_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}$ és $s_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$. $s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} =$
$= \underline{\underline{\frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}}$.

I

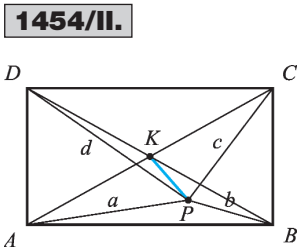
1453.



1454/I.



1454/II.



1453. Felhasználjuk, hogy az a, b, c oldalú háromszögben $c^2 + (2s_c)^2 = 2(a^2 + b^2)$. KL súlyvonal az $ALC\triangle$-ben és a $BDK\triangle$-ben, ezért $2(KD^2 + KB^2) = BD^2 + (2KL)^2$ és $2(LA^2 + LC^2) = AC^2 + (2KL)^2 \Rightarrow 2(KD^2 + KB^2 + LA^2 + LC^2) = BD^2 + AC^2 + 8KL^2$. DK súlyvonal az $ACD\triangle$-ben, BK az $ABC\triangle$-ben, CL a BCD-ben, AL pedig az $ABD\triangle$-ben. $\Rightarrow 2(c^2 + d^2) = AC^2 + (2KD)^2$; $2(a^2 + b^2) = AC^2 + (2KB)^2$; $2(b^2 + c^2) = BD^2 + (2CL)^2$; $2(a^2 + d^2) = BD^2 + (2AL)^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 2(AC^2 + BD^2) + 4(KD^2 + KB^2 + AL^2 + CL^2) = 2(AC^2 + BD^2) +$ $+ 2(AC^2 + BD^2) + 16KL^2 \Rightarrow \underline{\underline{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = AC^2 + BD^2 + 4KL^2}}$.

1454. A téglalap átlói felezik egymást, ezért PK súlyvonala az $ACP\triangle$-nek és a $BPD\triangle$-nek is. Ezért az 1451. feladatban bizonyított összefüggés szerint $2(a^2 + c^2) = AC^2 + (2PK)^2$, illetve $2(b^2 + d^2) = BD^2 + (2PK)^2$. $AC = BD$, mert az $ABCD$ téglalap átlói, így $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

1455. Az 1451. feladatban láttuk, hogy $2(PA^2 + PB^2) = AB^2 + (2PK)^2$, ha K az AB felezőpontja. $PA^2 + PB^2 = d^2 \Rightarrow AB^2 + (2PK)^2 = 2d^2 \Rightarrow PK^2 = \dfrac{2d^2 - AB^2}{4} \Rightarrow \mathrm{d}(P;\ K) = \dfrac{\sqrt{2d^2 - AB^2}}{2}$ állandó megadható. A keresett pontok rajta vannak a K középpontú, $\dfrac{\sqrt{2d^2 - AB^2}}{2}$ sugarú k körön. A k kör minden pontja megoldás. A keresett ponthalmaz a k kör, ha $d > \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$; az AB szakasz felezőpontja, ha $d = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$ és nincs megoldás, ha $d < \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$.

Területszámítás, területátalakítás és alkalmazásai

1456. $t = \underline{\underline{60\,\mathrm{m}^2}}$. **1457.** $a = \underline{\underline{2\sqrt{34}\,\mathrm{cm}}}$. **1458.** Kilencszeresére nő a terület.

1459. Tizenötszörösére nőtt a terület. **1460.** $\underline{\underline{\sqrt{5} = \lambda}}$. **1461.** $t = \underline{\underline{2{,}25\,\mathrm{km}^2}}$.

1462. $m_b = \underline{\underline{7{,}5\,\mathrm{cm}}}$.

1463. $K_{\text{paralelogramma}} = 2(a + b) = 48$ cm, $m_a : m_b = 5 : 7$, $T_{\text{paralelogramma}} = a \cdot m_a = b \cdot m_b \Rightarrow b = 24 -$ $- a$, $m_b = \dfrac{7}{5} m_a \Rightarrow a \cdot m_a = (24 - a) \cdot \dfrac{7}{5} m_a \Rightarrow \underline{\underline{a = 14\,\mathrm{cm}}}$ és $\underline{\underline{b = 10\,\mathrm{cm}}}$.

1464. $0{,}5t_t = t_p \Rightarrow 0{,}5ab = am_a \Rightarrow 0{,}5b = m_a \Rightarrow$ A magasság által levágott derékszögű háromszögben az átfogó kétszerese az α-val szemközti befogónak, tehát $\underline{\underline{\alpha = 30°}}$ és $\underline{\underline{\beta = 150°}}$ a paralelogramma szögei.

1465. $\underline{\underline{t = 28\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2}}$. *b)* $\underline{\underline{t = 28\,\mathrm{cm}^2}}$. *c)* $\underline{\underline{t = 28\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2}}$.

1466. Ha $0° < \alpha < 90°$, akkor $m_a < b$ a magasság által levágott derékszögű háromszögben. $\Rightarrow t = am_a < ab$. Ha $\alpha = 90°$, akkor $m_a = b \Rightarrow t = ab$. Tehát a téglalap területe a legnagyobb.
1467. A rombuszt e és f átlói négy egybevágó derékszögű háromszögre bontják, ezért $t = 4t_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} = \frac{1}{2} ef$.

1468. $t = 40\ \text{cm}^2$. **1469.** $m = 9{,}6$ cm. **1470.** $t = 17{,}5 \cdot \sqrt{11}\ \text{cm}^2$. **1471.** $t = 42\ \text{cm}^2$.

1472. $t = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$. **1473.** $a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$ egység. **1474.** $t = \frac{m^2}{\sqrt{3}}$. **1475.** $c = 2\sqrt{t}$.

1476. *a)* $t = 63\sqrt{527}\ \text{cm}^2$. *b)* $t = 36\sqrt{145}\ \text{cm}^2$. *c)* $t = 13\sqrt{155}\ \text{cm}^2$.

1477. $\gamma = 30° \Rightarrow b = 2m$; $\beta = 45° \Rightarrow$ az A-ból induló magasság talppontja $(a - m)$ és m szakaszokra bontja a-t. Pitagorasz tétele: $b^2 = m^2 + (a - m)^2$, azaz $2m^2 = m^2 + (a - m)^2 \Rightarrow 2m^2 + 2am - a^2 = 0 \Rightarrow m_{1;2} = \frac{-2a \pm 2\sqrt{3}\, a}{4} \Rightarrow m_1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} a$ és $m_2 = \frac{-\sqrt{3} - 1}{2} a$, amelyek közül $m_2 < 0$, ezért nem megoldás. $t = \frac{1}{2} am = \frac{\sqrt{3} - 1}{4} a^2$.

1478. A kapott terület megegyezik az a oldalú szabályos háromszög területével, $\left(t = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right)$, ami átdarabolással is megmutatható.

1479. $t = t_1 + 3t_2 + 3t_3$, ahol $t_1 = t_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ és $t_2 = a^2$; $t = 4t_1 + 3t_2 = \sqrt{3}a^2 + 3a^2 = \left(\sqrt{3} + 3\right) a^2$.

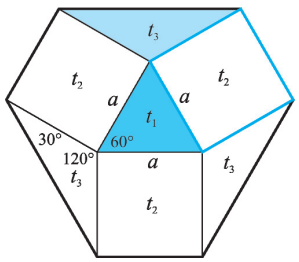
1480. $\gamma = 60° \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} b$; $t = \frac{1}{2} am_a = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} b = \frac{\sqrt{3}}{4} ab$.

1481. $\gamma = 120° \Rightarrow \gamma' = 60° \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} b$; $t = \frac{1}{2} a \cdot m_a = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} b = \frac{\sqrt{3}}{4} ab$.

1482. $T_{\text{háromszög}} = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} \Rightarrow m_b = \frac{a}{b} \cdot m_a \Rightarrow m_b = \frac{5}{2}\ \text{cm}$.

1483. $T_{\text{háromszög}} = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2}$; $m_a + m_b = 14\ \text{cm} \Rightarrow 16 \cdot m_a = 12 \cdot (14 - m_a) \Rightarrow m_a = 6\ \text{cm}$ és $m_b = 8\ \text{cm}$.

1479.



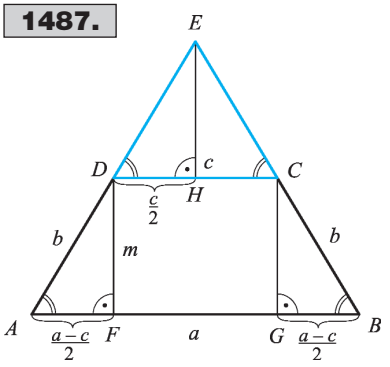
1484. Ha $\alpha' = 180° - \alpha$, akkor a két háromszög az A csúcsával egymás mellé tehető úgy, hogy AB oldaluk közös, C_1A, ill. C_2A oldaluk pedig A-ban egymáshoz csatlakozik. $t_{C_1AB\triangle} = \frac{1}{2} b \cdot m_b = t_{C_2AB\triangle}$. Ha $\alpha = \alpha'$, akkor a két háromszög egybevágó, tehát egyenlő területű.

1485. $t = 80\ \text{cm}^2$.

1486. $t = 16\sqrt{6}\ \text{cm}^2$.

I

1487.



1487. $\frac{c}{2} = 1\text{ cm} = \frac{a-c}{2} \Rightarrow AFD\triangle \cong DHE\triangle \cong CHE\triangle \cong$
$\cong BGC\triangle \Rightarrow EH = DF = m.$

Pitagorasz tétele: $b^2 = m^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 \Rightarrow m = 2\sqrt{2}$ cm;

$t_{DEC\triangle} = \frac{1}{2}\, c \cdot m = \underline{\underline{2\sqrt{2}\text{ cm}^2}}.$

1488. $\alpha = 45°$, ezért $AB = 2m + DC \Rightarrow m =$
$= \frac{AB - DC}{2} = 6\text{ cm}$; $t = \frac{(AB + CD)m}{2} = \underline{\underline{288\text{ cm}^2}}.$

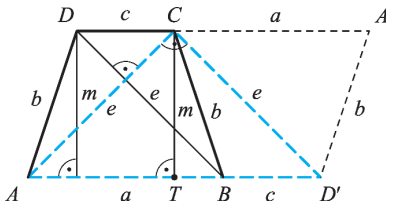
1489. Legyen $x = \frac{a-c}{2}$, a hosszabbik alap magasság által levágott szelete. Pitagorasz tétele $\Rightarrow e^2 - (a-x)^2 = b^2 - x^2$, azaz $39^2 - (44-x)^2 = 17^2 - x^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 8$ m és $c = 28$ m; $t = \frac{(a+c)m}{2} = \underline{\underline{540\text{ m}^2}}.$

1490. $ACD'\triangle$ egyenlő szárú derékszögű háromszög $\Rightarrow CT$ magasság felezi AD'-t és $ACD'\sphericalangle$-et is $\Rightarrow AT = CT = TD'$; $t = \frac{(a+c)m}{2} = \frac{2m \cdot m}{2} = \underline{\underline{m^2}}.$

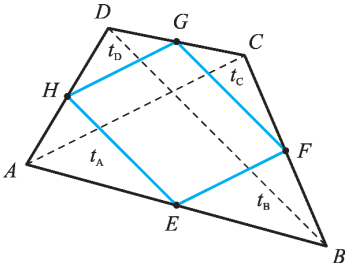
1491. A rövidebb alap egyik csúcsából induló magasság talppontja $\frac{a-c}{2}$ és $\left(a - \frac{a-c}{2}\right)$ szakaszokra bontja a hosszabb alapot. Az átló és a szár merőlegessége miatt a magasságtétel $\Rightarrow$
$\Rightarrow m^2 = \frac{a-c}{2} \cdot \left(a - \frac{a-c}{2}\right) = 144\text{ cm}^2 \Rightarrow m = 12$ cm; $t = \frac{(a+c)m}{2} = \underline{\underline{216\text{ cm}^2}}.$

1492. HE középvonal az $ABD\triangle$-ben $\Rightarrow t_A = \frac{1}{4} t_{ADB}$ és FG középvonal a $DCB\triangle$-ben $\Rightarrow$
$\Rightarrow t_C = \frac{1}{4} t_{DCB} \Rightarrow t_A + t_C = \frac{1}{4} \cdot (t_{ADB} + \Rightarrow t_{DCB}) = \frac{1}{4} t$. Hasonlóan belátható, hogy $t_B + t_D =$
$= \frac{1}{4}(t_{DAC} + t_{ABC}) = \frac{1}{4} t. \Rightarrow t_{EFGH} = t - (t_A + t_B + t_C + t_D) = t - \frac{1}{2} t = \frac{1}{2} t.$

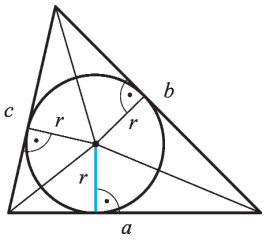
1490.



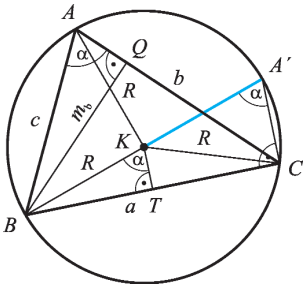
1492.



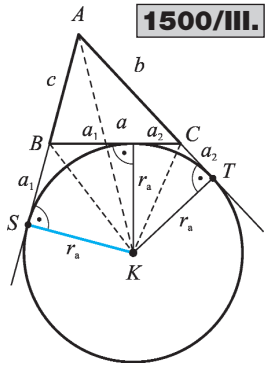
1500/I.



1500/II.



1500/III.



1493. Vegyünk fel az $ABCD$ négyszög csúcsain át az átlókkal párhuzamos egyeneseket. Ezek metszéspontjait jelöljük rendre K-, L-, M- és N-nel.
$MN \parallel AC \parallel KL$ és $NK \parallel DB \parallel ML \Rightarrow KLMN$; $PDNA$; $PDMC$; $PCLB$; $PBKA$ paralelogrammák $\Rightarrow$
$\Rightarrow t_{ADP} = t_{ADN}$; $t_{PDC} = t_{DMC}$; $t_{PCB} = t_{CBL}$; $t_{PAB} = t_{ABK} \Rightarrow t_{ABCD} = \frac{1}{2} t_{KLMN}$ és a paralelogramma területe csak oldalaitól (az eredeti négyszög átlóitól) és ezek szögétől függ.

1494. A négyszög csúcsain át az átlókkal húzott párhuzamosok egy téglalapot határoznak meg. $t = \frac{1}{2} t_{\text{téglalap}} = \frac{1}{2} ef = \underline{\underline{48\,\text{cm}^2}}$.

1495. Az $ABCD$ négyszög csúcsain át az átlókkal húzott párhuzamosok a $KLMN$ négyszöget határozzák meg. $t_{ABCD} = \frac{1}{2} t_{KLMN}$, ahol $KLMN$ az $AC \parallel MN \parallel KL$ és $BD \parallel NK \parallel ML$ és $AC \perp BD$ miatt téglalap $\Rightarrow t_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot KL \cdot LM = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

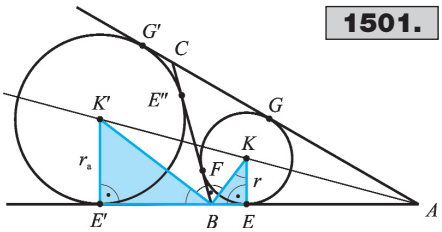
1496. $t = \underline{\underline{428\,\text{cm}^2}}$. **1497.** $t = \underline{\underline{741\,\text{m}^2}}$. **1498.** *a)* $t = \underline{\underline{48\,\text{cm}^2}}$; *b)* $t = \underline{\underline{30\,\text{cm}^2}}$; *c)* $t = \underline{\underline{36\,\text{cm}^2}}$.

1499. $t = \underline{\underline{14{,}24\ \text{m}^2}}$.

1500. *a)* $t = \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr = \frac{1}{2} r(a+b+c) \Rightarrow r = \underline{\underline{\frac{2t}{a+b+c}}} \left(= \frac{t}{s} \right)$. *b)* $BQA\triangle \sim BCA'\triangle$, mert szögeik egyenlők a kerületi szögek tétele miatt. $\frac{BA'}{BC} = \frac{BA}{BQ}$, azaz $\frac{2R}{a} = \frac{c}{m_b}$ és $t = \frac{1}{2} bm_b \Rightarrow m_b = \frac{2t}{b} \Rightarrow \frac{2R}{a} = \frac{cb}{2t} \Rightarrow R = \frac{abc}{4t}$. *c)* $t = t_{AKS} + t_{AKT} - 2t_{KBC} = \frac{1}{2} r_a(c + a_1) +$
$+ \frac{1}{2} r_a(b + a_2) - 2 \cdot \frac{1}{2} ar_a = \frac{1}{2} r_a(c + b - a) \Rightarrow r_a = \underline{\underline{\frac{2t}{c+b-a}}}$.

1501. $KB \perp K'B$, mert a B-nél lévő belső és külső szög szögfelezői. Emiatt: $KBE\sphericalangle + K'BE'\sphericalangle = 90°$ és $KBE\sphericalangle + BKE\sphericalangle = 90° \Rightarrow \underline{K'BE'\sphericalangle = BKE\sphericalangle}$.
$\underline{K'E' \perp E'B}$ és $\underline{KE \perp BE}$, mert érintési pontba húzott sugarak. Az aláhúzottakból következik, hogy $K'E'B\triangle$ szögei megegyeznek $KEB\triangle$ szögeivel, azaz $K'E'B\triangle \sim KEB\triangle$.

1501.



I

1502. Az 1501. ábra jelöléseit használjuk. Az 1501. feladatból tudjuk, hogy $K'E'B\triangle \sim KEB\triangle$, ezért $r : BE \Rightarrow E'B : r_a$, vagyis $\underline{r \cdot r_a = EB \cdot E'B}$. $E'B = E''B$ és $E''C = CG' \Rightarrow E'A + G'A = AB + BC + CA = 2s \Rightarrow E'A = s \Rightarrow \underline{E'B = s - c}$. $BE = BF$ és $FC = CG$ és $GA = AE \Rightarrow BE + CG + GA = s \Rightarrow \underline{BE = s - b}$. Az aláhúzottakból és az 1500. feladatból következik, hogy $\frac{t}{s} \cdot \frac{t}{s-a} = (s-b)(s-c)$, amiből $\underline{\underline{t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}}$.

1503. $s = (a+b+c) : 2$ és $\underline{\underline{t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}}$. *a)* $t = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1} = \underline{\underline{10\sqrt{2}\,\text{cm}^2}}$; *b)* $t = \sqrt{30 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 24} = \underline{\underline{60\,\text{cm}^2}}$; *c)* $t = \sqrt{54 \cdot 27 \cdot 18 \cdot 9} = \underline{\underline{486\,\text{cm}^2}}$.

1504. $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{45 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9} = 360\,\text{cm}^2$. $t = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2} \Rightarrow$ A leghosszabb oldalhoz tartozik a legrövidebb magasság, így m_c a legkisebb: $m_c = \frac{2t}{c} = \underline{\underline{20\,\text{cm}}}$.

1505. $t_{\text{paralelogramma}} = 2t_{\text{háromszög}} = 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 2\sqrt{13 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 7} = \underline{\underline{2\sqrt{455}\ \text{cm}^2}}$.

1506. A négyszög területét a két háromszög területének összegeként kaphatjuk meg. $t = \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14} + \sqrt{20 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 12} = \underline{\underline{144\,\text{cm}^2}}$.

1507. $t_{K_1K_2B} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{50 \cdot 33 \cdot 11 \cdot 6} = 330\,\text{cm}^2$. Szimmetria miatt K_1K_2 felezi AB-t; $t_{K_1K_2B} = \frac{1}{2} K_1K_2 \cdot \frac{1}{2} AB \Rightarrow AB = \frac{4t_{K_1K_2B}}{K_1K_2} = \underline{\underline{30\,\text{cm}}}$.

1508. A paralelogrammát az átlói négy egyenlő területű háromszögre bontják. $t_{ABCD} = 4t_{ABM} = 4\sqrt{s(s-a)\left(s-\frac{e}{2}\right)\left(s-\frac{f}{2}\right)}$, ahol $s = \frac{1}{2}\left(a + \frac{e}{2} + \frac{f}{2}\right) = 54 \Rightarrow t_{ABCD} = 4\sqrt{54 \cdot 3 \cdot 34 \cdot 17} = \underline{\underline{1224\,\text{cm}^2}}$.

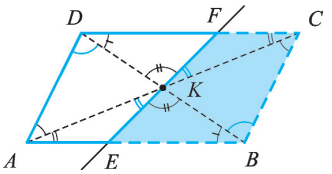
1509. Alkalmazzuk a Heron-képletet az átló által létrehozott két háromszögre! $t_{ABCD} = t_{ABC} + t_{ACD} = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 12 \cdot 14} + \sqrt{35 \cdot 7 \cdot 18 \cdot 10} = \underline{\underline{546\,\text{cm}^2}}$.

1510. Jelöljük x-szel a hosszabb alapnak azt a szeletét, amit a d szár végpontjából induló magasság levág belőle. Így a b szár végpontjából induló magasság által levágott szelet $(a - c - x)$. Pitagorasz tételéből következik, hogy $d^2 - x^2 = m^2 = b^2 - (a - c - x)^2$, azaz $169 - x^2 = 1369 - (40 - x)^2 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow m^2 = d^2 - x^2 \Rightarrow m = 12$ cm; $t = \frac{(a+c)m}{2} = \underline{\underline{480\,\text{cm}^2}}$.

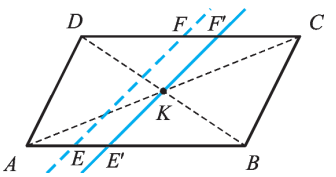
1511. $a = 9$ cm, $b = 12$ cm, $c = 7$ cm és $a + c = b + d \Rightarrow d = 4$ cm; $t = \frac{1}{2} r\,(a + b + c + d) \Rightarrow r = \frac{2t}{a+b+c+d} = \underline{\underline{3\,\text{cm}}}$.

1512. $t_1 = \frac{1}{2} AF \cdot m_1$ és $t_2 = \frac{1}{2} BF \cdot m_2$; $AF = BF$, mert CF súlyvonal és $m_1 = m_2 = \text{d}(C; \text{e}(A; B))$, ezért $t_1 = t_2$.

1513.



1514.



1513. $AEK\triangle \cong CFK\triangle$ és $ADK\triangle \cong CBK\triangle$ és $DFK\triangle \cong BEK\triangle$, mert oldalaik és szögeik páronként egyenlők (váltószögek, illetve csúcsszögek) $\Rightarrow t_{AEK} = t_{CFK}$ és $t_{ADK} = t_{CBK}$ és $t_{DFK} = t_{BEK} \Rightarrow t_{AEFD} = t_{CBEF}$.

1514. Húzzunk az átlók metszéspontján át párhuzamost EF-fel, nyerjük az E' és F' pontokat. $t_{AEFD} = t_{CBEF}$, míg az 1513. feladatból tudjuk, hogy $t_{AE'F'D} = t_{E'BCF'}$; $t_{AEFD} = t_{AE'F'D} - t_{EE'F'F}$ és $t_{EBCF} = t_{E'BCF'} + t_{EE'F'F} = t_{AE'F'D} + t_{EE'F'F} \Rightarrow t_{EE'F'F} = 0 \Rightarrow EF \equiv E'F' \Rightarrow EF$ átmegy K-n.

1515. $r = 2$ egység. **1516.** *a)* $r \approx \underline{0{,}8\text{ cm}}$; *b)* $r \approx \underline{4\text{ cm}}$; *c)* $r \approx \underline{2{,}33\text{ dm}}$. **1517.** $t \approx \underline{5{,}1\text{ cm}^2}$.

1518. $k \approx \underline{15{,}08\text{ cm}}$. **1519.** $d \approx \underline{4\text{ cm}}$.

1520. C_1 átmérője 16 cm $\Rightarrow r_1 = 8$ cm és C_2 átmérője 12 cm $\Rightarrow r_2 = 6$ cm. $t_3 = t_1 + t_2 = r_1^2\,\pi + r_2^2\,\pi = (r_1^2 + r_2^2)\,\pi \Rightarrow r_3^2\,\pi = (r_1^2 + r_2^2)\,\pi \Rightarrow r_3^2 = r_1^2 + r_2^2 \Rightarrow r_3 = 10$ cm $\Rightarrow C_3$ átmérője $\underline{20\text{ cm}}$.

1521. A négyzet oldala egyenlő a kör átmérőjével. $t_{\text{kör}} + 4{,}3 = t_{\text{négyzet}} \Rightarrow r^2\,\pi + 4{,}3 = (2r)^2 \Rightarrow \Rightarrow r^2 \approx 5 \Rightarrow t_{\text{kör}} \approx 5\,\pi \approx \underline{15{,}7\text{ cm}^2}$.

1522. Legyen a külső kör sugara r_1, a belső köré r_2, a középköré r_3. $K = 12$ m és $K = 2r_3\,\pi \Rightarrow \Rightarrow r_3 = 1{,}91$ m; $r_3 = (r_1 + r_2)$: $2 \Rightarrow r_1 + r_2 = 3{,}82$ m és $r_1 - r_2 = 2$ m $\Rightarrow r_1 = 2{,}91$ m és $r_2 = 0{,}91$ m. $t = r_1^2\,\pi - r_2^2\,\pi = (r_1^2 - r_2^2)\,\pi \approx \underline{24\text{ cm}^2}$.

1523. $AB = a$ és $AF = FB$; $t = r_1^2\,\pi - r_2^2\,\pi = (r_1^2 - r_2^2)\,\pi = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi \Rightarrow t = \frac{a^2\pi}{4}$.

1524. *a)* $\underline{t = 0{,}1875r^2\pi}$; *b)* $\underline{t = 0{,}043\,75r^2\pi}$.

1525. *a)* $t = \frac{1}{4}r^2\pi - \frac{1}{2}r^2 = \underline{\frac{r^2}{4}(\pi - 2)}$; *b)* $t = \frac{1}{6}r^2\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = r^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

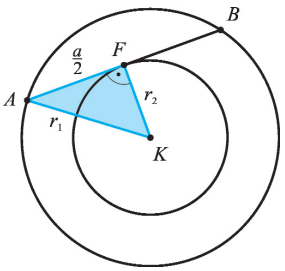
1526. *a)* $r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow t = \frac{1}{3}r^2\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 =$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{3}\cdot\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a^2}{3} = \underline{\frac{a^2}{36}\cdot\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}$. *b)* $2r^2 = a^2 \Rightarrow r =$

$= \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{1}{4}r^2\pi - \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\pi - \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{2} = \underline{\frac{a^2}{8}\cdot(\pi - 2)}$.

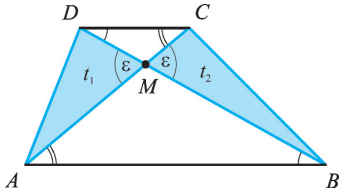
c) $t = \frac{1}{6}a^2\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{a^2}{12}\cdot\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$.

1523.



I

1528.



1527. A körívszakaszokból álló rész egy körgyűrű része, amit a közös kezdőpontból induló sugarak vágnak ki. Területe egyenesen arányos a középponti szöggel.

$t = \frac{r_1^2\widehat{\alpha}}{2} - \frac{r_2^2\alpha}{2} = \frac{\left(r_1^2 - r_2^2\right)}{2}\widehat{\alpha} = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2)\frac{\widehat{\alpha}}{2} =$

$= (r_1 - r_2)\cdot\frac{(r_1 + r_2)\widehat{\alpha}}{2} = d \cdot r_3 \cdot \widehat{\alpha}$, ahol $r_3 \cdot \widehat{\alpha}$ a középkör ívének hossza. $\Rightarrow$ Az úttest területe 10 m $\cdot$ 310 m = $\underline{\underline{3100\,\text{m}^2}}$.

1528. $t_{ADC} = \frac{DC \cdot \mathrm{d}\left(A; \mathrm{e}\left(D;C\right)\right)}{2} = \frac{DC \cdot \mathrm{d}\left(B; \mathrm{e}\left(D;C\right)\right)}{2} = t_{BDC}$; $t_{ADC} = t_{AMD} + t_{DMC}$ és $t_{BDC} =$

$= t_{BMC} + t_{DMC} \Rightarrow t_{AMD} = t_{BMC} \Rightarrow t_1 = t_2$.

1529. $DF = \frac{a}{2}$; $t_{ADF} = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot m_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot m_a = \frac{1}{4} a m_a = \frac{1}{4} t_{ABCD}$.

1530. $t_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \mathrm{d}(P; \mathrm{e}(A;B)) = \frac{1}{2} \cdot t_{ABCD}$.

1531. $AE = EB = \frac{1}{2} AB$ és $AE \parallel DF$ és $DF = FC = \frac{1}{2} DC$ és $EB \parallel CF \Rightarrow AEFD$ és $EBCF$ egybevágó paralelogrammák $\Rightarrow t_{AEFD} = t_{EBCF} = \frac{1}{2} t_{ABCD}$. Az 1530. feladatból tudjuk, hogy $t_{EPF} =$

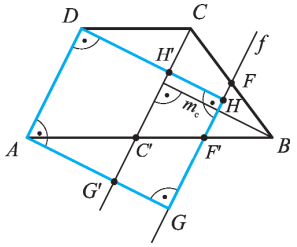
$= \frac{1}{2} t_{AEFD}$ és $t_{EQF} = \frac{1}{2} t_{EBCF} \Rightarrow t_{EQFP} = t_{EPF} + t_{EQF} = \frac{1}{2} t_{AEFD} + \frac{1}{2} t_{EBCF} = \frac{1}{2} t_{ABCD}$.

1532. $CF = FB$ és $f \parallel AD$. Húzzunk C-n át párhuzamost f-fel! Ez a két merőlegest H' és G'; AB-t C' pontban metszi. $\underline{t_{AG'H'D} = t_{AC'CD}}$, mert mindkettő paralelogramma, megegyezik egy-egy oldaluk és a hozzájuk tartozó magasság (AD, illetve DH'). $t_{G'GHH'} = G'H' \cdot H'H = AD \cdot H'H$ és $t_{CC'B} = \frac{1}{2} \cdot CC' \cdot m_c = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot m_c$. Mivel $f \parallel AD \parallel CC'$ és F felezi CB-t, az FF' középvonal $CC'B\triangle$-ben, ezért f felezi m_c-t: $m_c = 2HH' \Rightarrow \underline{t_{CC'B}} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot HH' \cdot 2 = \underline{t_{G'GHH'}}$. Az aláhúzottakból: $t_{ADHG} = t_{ABCD}$.

1533. Legyen E a BC szár felezőpontja. $AF = FD$ és $BE = EC \Rightarrow FE$ a trapéz középvonala, ezért felezi a trapéz magasságát, illetve $FECD$ és $ABEF$ is trapéz. $t_{FBC} = t_{FBE} + t_{FCE} = \frac{1}{2} \cdot FE \cdot \frac{m}{2} +$

$+ \frac{1}{2} \cdot FE \cdot \frac{m}{2} = \frac{1}{2} \cdot FE \cdot m = \frac{1}{2} \frac{AB + CD}{2} \cdot m = \frac{1}{2} t_{ABCD}$.

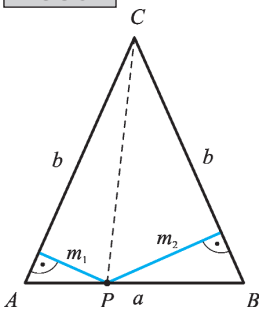
1532.



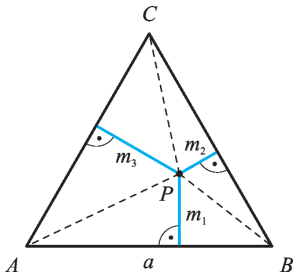
1534. Legyen M az átlók metszéspontja. $AM = MC \Rightarrow t_{ADM} =$ $= t_{CDM}$, illetve $t_{ABM} = t_{CBM}$, mert egy-egy oldaluk és az ahhoz tartozó magasságuk egyenlő. $\Rightarrow \underline{t_{ABD}} = t_{ADM} + t_{ABM} = t_{CDM} + t_{CBM} =$ $= \underline{t_{DBC}}$.

1535. $AF = FB$; CF súlyvonal $\Rightarrow t_{AFC} = t_{BFC} \Rightarrow \mathrm{d}(A;\ \mathrm{e}(C;F)) =$ $= \mathrm{d}(B; \mathrm{e}(C;F)) \Rightarrow t_{APC} = t_{BPC}$.

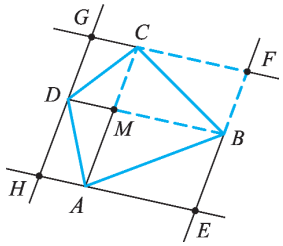
1536.



1537.



1538.



1536. Bontsuk fel az $ABC\triangle$-et a PC egyenessel két háromszögre! m_1 az $APC\triangle$ AC-hez, m_2 a $BPC\triangle$ BC-hez tartozó magassága. $T_{ABC}=\dfrac{b\cdot m_b}{2}=\dfrac{b\cdot m_1}{2}+\dfrac{b\cdot m_2}{2}\Rightarrow m_b=m_1+m_2$.

1537. Bontsuk fel a szabályos háromszöget a PA, PB, PC szakaszokkal három darab háromszögre! $T_{ABC}=T_{APB}+T_{BPC}+T_{APC}$. $\Rightarrow\dfrac{a\cdot m}{2}=\dfrac{a\cdot m_1}{2}+\dfrac{a\cdot m_2}{2}+\dfrac{a\cdot m_3}{2}\Rightarrow m=m_1+m_2+m_3$. A három távolság összege a háromszög magasságával egyenlő, ami P-től függetlenül állandó.

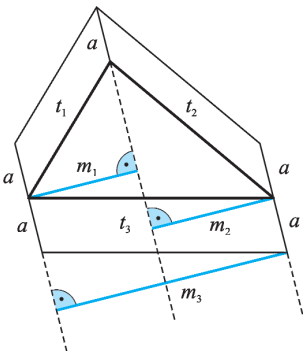
1538. $GH\|CA\|EF$ és $EH\|DB\|GF\Rightarrow DMCG$; $CMBF$; $HAMD$ és $AEBM$ paralelogramma $\Rightarrow$
$\Rightarrow t_{MCD}=\dfrac{1}{2}t_{DMCG}$; $t_{CMB}=\dfrac{1}{2}t_{MBFC}$; $t_{MDA}=\dfrac{1}{2}t_{HAMD}$; $t_{ABM}=\dfrac{1}{2}t_{AEBM}\Rightarrow t_{ABCD}=\dfrac{1}{2}t_{EFGH}$.

1539. $t_1+t_2=a\cdot m_1+a\cdot m_2=a\cdot(m_1+m_2)=a\cdot m_3=t_3$.

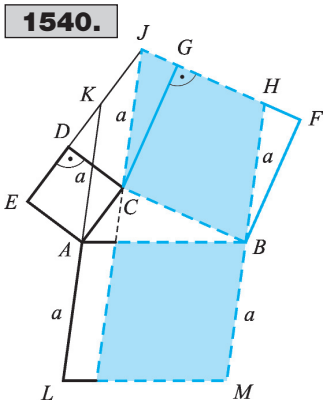
1540. $t_{ACDE}=t_{ACJK}$, illetve $t_{CBFG}=t_{CBHJ}$, mert közös egy-egy oldaluk és a hozzá tartozó magasságuk. Az 1539. feladatban láttuk, hogy $t_{ACJK}+t_{CBHJ}=t_{ABML}$. A fenti egyenlőségeket felhasználva: $t_{ACDE}+t_{CBFG}=t_{ABLM}$.

1541. $m_1+m_2=m_3+m_4\Rightarrow t_1+t_2=am_1+am_2=a(m_1+m_2)=a(m_3+m_4)=am_3+am_4=$
$=t_3+t_4$.

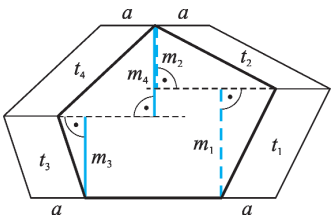
1539.



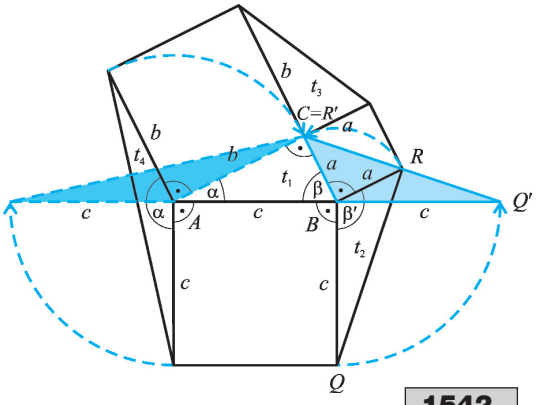
1540.



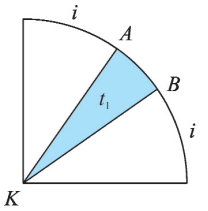
1541.

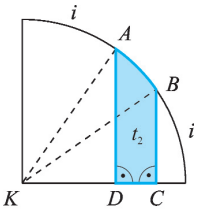


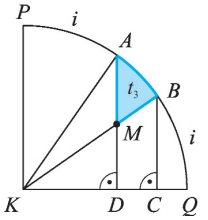
I



1542.







1543.

1542. ① $t_1 = \frac{1}{2}ab = t_3$. ② Forgassuk el a $BQR\triangle$-et B körül $+90°$-kal $\rightarrow BQ'R'\triangle \Rightarrow t_{BQ'R'} = t_{ABC} = t_1$, mert egy-egy oldaluk egyenlő és a hozzá tartozó magasságuk közös. ③ Hasonlóan láthatjuk be a negyedik háromszög területének az eredetivel való egyenlőségét.

1543. $PKA\sphericalangle = BKQ\sphericalangle$, mert i-hez tartozó középponti szögek és $PKA\sphericalangle = KAD\sphericalangle$, mert váltószögek. $\Rightarrow KAD\sphericalangle = BKQ\sphericalangle$, valamint $KA = KB \Rightarrow AKD\triangle \cong BKC\triangle$ (derékszögben is megegyeznek) $\Rightarrow t_{AKD} = t_{BKC}$; $t_{AKM} = t_{AKD} - t_{KMD} = t_{BKC} - t_{KDM} = t_{MDCB} \Rightarrow t_1 = t_{AKM} + t_3 = t_{MDCB} + t_3 = t_2$.

1544. Az AB húr és az AB ív határol egy körszeletet, ami egybevágó, tehát egyenlő területű az $A'B'$ húr és az $A'B'$ ív által határolt körszelettel. $\Rightarrow$ Az $AA'B'B$ téglalap területe egyenlő az AB ív által súrolt területtel.

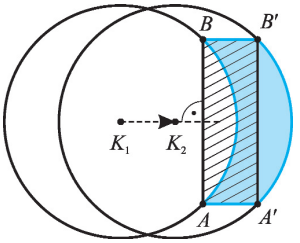
1545. $RS = \frac{1}{2}AC = PQ$, mert RS és PQ középvonal. $t_{RDSM} + t_{QMPB} = t_{RDS} + t_{RSM} + t_{MQP} + t_{QPB} =$

$= \frac{1}{2}\cdot RS\cdot m_1 + \frac{1}{2}\cdot RS\cdot m_2 + \frac{1}{2}\cdot QP\cdot m_3 + \frac{1}{2}\cdot QP\cdot m_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot AC\cdot(m_1+m_2+m_3+m_4) =$

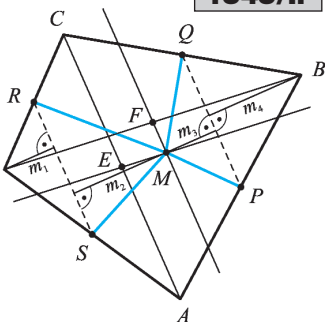
$= \frac{1}{2}t_{ABCD}$; $m_1 + m_2 = m_3 + m_4$ miatt $t_{RDSM} = t_{QMPB} = \frac{1}{4}t_{ABCD}$. Hasonlóan belátható, hogy $t_{CRMQ} =$

$= t_{ASMP} = \frac{1}{4}t_{ABCD}$.

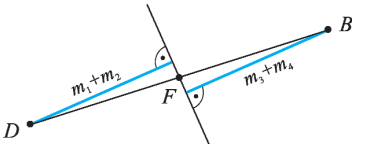
1544.



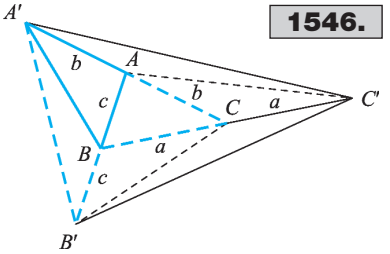
1545/I.



1545/II.

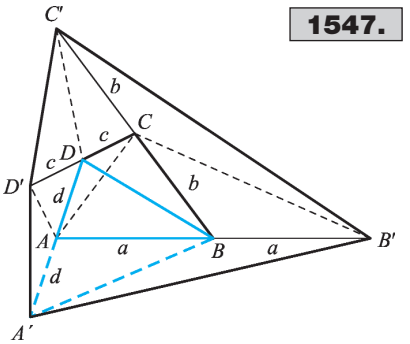


1546. AB súlyvonal $A'BC\triangle$-ben $\Rightarrow t_{A'AB} = t_{ABC}$ és $A'B$ súlyvonal $A'B'A\triangle$-ben $\Rightarrow t_{A'B'B} = t_{A'BA}$. AC súlyvonal $ABC'\triangle$-ben $\Rightarrow t_{ABC} = t_{ACC'}$ és AC' súlyvonal $A'CC'\triangle$-ben $\Rightarrow t_{A'AC'} = t_{ACC'}$. BC súlyvonal $AB'C\triangle$-ben $\Rightarrow t_{ABC} = t_{B'BC}$ és $B'C$ súlyvonal $B'BC'\triangle$-ben $\Rightarrow t_{B'BC} = t_{B'CC'}$. A fenti egyenlőségekből következik, hogy $t_{ABC} = t_{AA'B} = t_{A'B'B} = t_{BB'C} = t_{B'CC'} = t_{ACC'} = t_{A'AC'} \Rightarrow t_{A'B'C'} = \underline{\underline{7t_{ABC}}}$.



1546.

1547. AB súlyvonal $DBA'\triangle$-ben és $A'B$ súlyvonal $AA'B'\triangle$-ben $\Rightarrow t_{ADB} = t_{AA'B} = t_{A'BB'}$. CB súlyvonal $ACB'\triangle$-ben és CB' súlyvonal $BB'C'\triangle$-ben $\Rightarrow t_{ABC} = t_{BB'C} = t_{CC'B'}$. DC súlyvonal $BC'D\triangle$-ben és DC' súlyvonal $CC'D'\triangle$-ben $\Rightarrow t_{BDC} = t_{DCC'} = t_{DD'C'}$. AD súlyvonal $AD'C\triangle$-ben és AD' súlyvonal $A'D'D\triangle$-ben $\Rightarrow t_{ADC} = t_{ADD'} = t_{AA'D'}$. A fenti egyenlőségekből következik, hogy $t_{A'B'C'D'} = t_{ABCD} + t_{AA'B'} + t_{BB'C'} + t_{CC'D'} + t_{DD'A'} = t_{ABCD} + 2t_{ADB} + 2t_{ABC} + 2t_{BDC} + 2t_{ADC} = t_{ABCD} + 2t_{ABCD} + 2t_{ABCD} = \underline{\underline{5t_{ABCD}}}$.



1547.

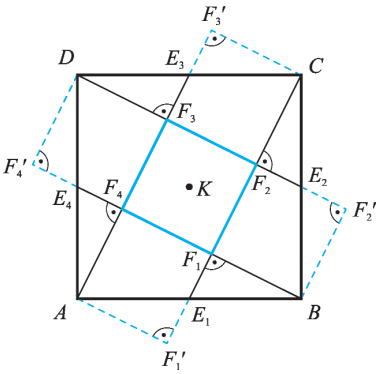
1548. $PQ = QR = RC$. AQ súlyvonal $APR\triangle$-ben és AR súlyvonal $AQC\triangle$-ben $\Rightarrow t_{APQ} = t_{AQR} = t_{ARC}$. BQ súlyvonal $BPR\triangle$-ben és BR súlyvonal $BQC\triangle$-ben $\Rightarrow t_{BPQ} = t_{BQR} = t_{BRC}$. A fenti egyenlőségekből következik, hogy $t_{ABQ} = t_{APQ} + t_{PBQ} = \frac{1}{3}t_{APC} + \frac{1}{3}t_{BPC} = \frac{1}{3}\underline{\underline{t_{ABC}}}$.

1549. Legyen M az átlók metszéspontja. $t_1 = t_2 \Rightarrow \underline{AM = MC}$, mert $ABM\triangle$ AM-hez tartozó magassága egyenlő $CBM\triangle$ CM-hez tartozó magasságával. Hasonlóan belátható, hogy $t_2 = t_3 \Rightarrow \underline{BM = MD}$. Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor a négyszög paralelogramma.

1550. A négyzet tengelyesen szimmetrikus AC-re, így tetszőleges $P \in AC$ esetén $PD = PB$. $\Rightarrow t_{PDC} = t_{BPC}$; $t_{ABPD} = 2t_{APB}$ szintén a szimmetria miatt. A szerkesztendő P pontra: $2t_{APB} = t_{PBC} \Rightarrow 2AP = PC$, mert a magasság egyenlő $\Rightarrow P$ az AC átló A-hoz közelebbi harmadolópontja.

1551. $AE_1C\triangle$-nek, $E_1E_2C\triangle$-nek és $E_2BC\triangle$-nek közös a C-ből induló magassága és egyenlő a C-vel szemközti oldala, ezért területük is egyenlő. $\Rightarrow t_{AE_1C} = \frac{1}{3}t_{ABC}$. E_1F súlyvonal az $AE_1C\triangle$-ben $\Rightarrow t_{AE_1F} = \frac{1}{2}t_{AE_1C} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot t_{ABC} = \underline{\underline{\frac{1}{6}t_{ABC}}}$.

1552. Tükrözzük F_i-t E_i-re $\Rightarrow F_i'$. K középpont körüli 90°-os forgásszimmetria miatt $F_1F_2F_3F_4$ négyzet, és egybevágó a többi kis négyzettel. $\Rightarrow t_{ABCD} = t_{AF_1'F_1BF_2'F_2CF_3'F_3DF_4'F_4} = 5t_{F_1F_2F_3F_4}$.



1552.

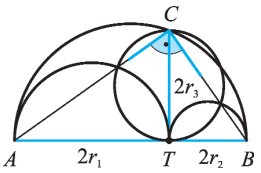
1553. Felhasználjuk, hogy az ABC derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint $a^2 + b^2 - c^2 = 0$.

$$t_1 + t_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2\pi + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{c}{2}\right)^2\pi =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 - c^2\right) + \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab = t_{ABC}.$$

I

1554.



1554. Thalész tétele szerint $ACB\sphericalangle = 90°$. Az ABC derékszögű háromszögben a magasságtétel miatt: $(2r_3)^2 = 2r_1 \cdot 2r_2 \Rightarrow r_3^2 = r_1 \cdot r_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} r_1^2 \pi - \frac{1}{2} r_2^2 \pi = \frac{1}{2} \pi \cdot 2r_1 r_2 = \pi \cdot r_3^2 = t_2.$

1555. Az a, b, c oldalak fölé írt hasonló sokszögek területe t_a; t_b; t_c. A derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint: $\frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1.$

A hasonlóság miatt: $t_a : t_b : t_c = a^2 : b^2 : c^2 \Rightarrow t_a = t_c \cdot \frac{a^2}{c^2}$ és $t_b = t_c \cdot \frac{b^2}{c^2} \Rightarrow t_a + t_b = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = t_c.$

1556. Az 1555. feladatból tudjuk, hogy ha a két adott szabályos háromszög oldala egy derékszögű háromszög két befogója, akkor az átfogóra emelt szabályos háromszög területe egyenlő lesz a két adott háromszög területének összegével.

1557. Jelöljük a harmadik oldalhoz tartozó magasságot m-mel. A keletkezett derékszögű háromszögekre az 1555. feladatból következik: $t_1 = t_3 + m^2$ és $t_2 = t_4 + m^2 \Rightarrow t_1 - t_3 = m^2 = t_2 - t_4$. Ha a háromszög derékszögű, akkor t_3 vagy t_4 0 is lehet, az állítás ekkor is igaz.

1558. A szögek egyenlősége miatt $AT_cC\triangle \sim BT_bA\triangle \Rightarrow AC : AT_c = BA : AT_b \Rightarrow b : c_2 = c : b_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow bb_2 = cc_2 \Rightarrow$ A színezett téglalapok területe egyenlő.

1559. Legyen a négyzet oldala $2a$, ekkor területe $4a^2$. A t_2 területet a $2a$ sugarú negyedkör és az a sugarú félkör területével fejezzük ki: $t_2 = \frac{1}{4} \cdot (2a)^2\pi - 2 \cdot \frac{1}{2} a^2\pi + t_1 = t_1$. Az ábrán a színezett síkidomok egybevágók. $\Rightarrow t_3 = a^2 = \frac{1}{4} t_{\text{négyzet}}.$

1560. Legyen az AB oldallal párhuzamos e egyenesre $AC \cap e = A_1$ és $BC \cap e = B_1$. $AB \parallel e \Rightarrow$

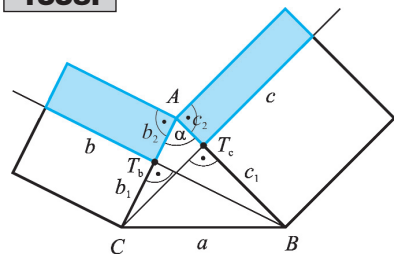
$\Rightarrow CA_1B_1\triangle \sim CAB\triangle \Rightarrow t_{CA_1B_1} = \lambda^2 \cdot t_{ABC} = \frac{1}{2} t_{ABC} \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow CA_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} CA$ és

$CB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} CB$ (CA_1 egy olyan derékszögű háromszög befogója, aminek átfogója CA.).

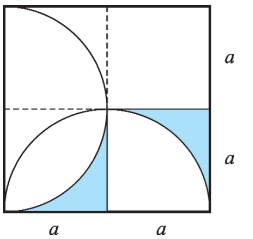
1561. Pitagorasz tétele alapján az adott négyzetek oldalaiból derékszögű háromszöget szerkesztünk, amelynek átfogója a nagyobb négyzet oldala, egyik befogója a kisebb négyzet oldala. A keresett négyzet oldala a derékszögű háromszög másik befogója.

1562. A szerkesztendő négyzet oldala b; $t_1 = a^2$ és $t_2 = b^2 = \frac{1}{3} a^2 = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a.$ A magasságtétel alapján b szakasz hossza megszerkeszthető egy $\left(a + \frac{1}{3} a\right)$ átfogójú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságaként.

1558.



1559.



1563. Az adott négyzet oldala a; területe $t_1 = a^2$; $t_2 + t_3 = t_1 \Rightarrow (b-x)^2 + x^2 = a^2 \Rightarrow$ Pitagorasz tétele alapján derékszögű háromszöget keresünk, aminek átfogója a, befogóinak összege pedig b. Forgassuk le a szerkesztendő $ABC\triangle$ $AC = x$ befogóját az AB befogó egyenesére $\Rightarrow D$ pont, és $DB = DA + AB = x + b - x = b$. $AC = AD \Rightarrow ADC\sphericalangle = 45°$; $b > a$. A szerkesztés: ① $DB = b$. ② D-ben 45° DB-re. ③ B középpontú, a sugarú kör. ④ A kör és a szög szárának metszéspontja C. ⑤ C merőleges vetülete DB-re A. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

1564. Bármely két kör hasonló, ezért $\frac{t'}{t} = 2 = \lambda^2$ miatt $\frac{r'}{r} = \lambda = \sqrt{2} \Rightarrow r' = \sqrt{2}\, r$ alapján r' szerkeszthető.

1565. Ha a körgyűrű területe egyenlő a belső kör területével, akkor $\frac{t'}{t} = \frac{1}{2}$. A körök hasonlósága miatt $\lambda^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{r'}{r} \Rightarrow r' = \frac{r}{\sqrt{2}}$ alapján r' szerkeszthető.

1566. Az adott csúccsal szemközti oldalt n darab egyenlő hosszúságú szakaszra osztjuk, és az osztópontokat összekötjük C-vel. Az így kapott kis háromszögek egy-egy oldala és az ehhez tartozó magassága egyenlő, így területük is egyenlő.

1567. AC átló felezi az $ABCD$ paralelogramma területét. Osszuk n darab egyenlő hosszúságú szakaszra BC-t és DC-t, az osztópontokat kössük össze A-val (C-t is). Így $2n$ darab egyenlő területű kis háromszöget kapunk. B-ből indulva minden második osztópontot tartsunk meg, így n darab egyenlő területű síkidomot kapunk. (Ha n páros, akkor háromszögek, ha n páratlan, akkor $(n-1)$ darab háromszög és egy négyszög.)

1568. CF súlyvonal, ezért $t_{AFC} = t_{BFC}$. Osszuk AC-t, illetve BC-t három-három egyenlő hosszú szakaszra! FP_1; FP_2; FC; FQ_2; FQ_1 az $ABC\triangle$-et hat egyenlő területű háromszögre bontja. $\Rightarrow$ $\Rightarrow t_{AFP_2} = t_{P_2FQ_2C} = t_{Q_2FB}$.

1569. AE súlyvonal felezi az $ABC\triangle$ területét. AE E-hez közelebbi P harmadolópontját B-vel, illetve C-vel összekötő szakaszok az $ABE\triangle$, illetve az $AEC\triangle$ területét 2 : 1 arányban osztják. $\Rightarrow$ $\Rightarrow t_{APC} = t_{ABP} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} t_{ABC} = \frac{1}{3} t_{ABC} \Rightarrow t_{PBC} = \frac{1}{3} t_{ABC}$. A megoldás a háromszög súlypontja.

1570. Legyen a háromszög átfogója $2b$, befogója a. Pitagorasz tételét alkalmazva: $a^2 = 2b^2$; $t_2 = \frac{1}{2} b^2 \pi + t_1 - \frac{1}{4} a^2 \pi = \frac{1}{2} b^2 \pi + t_1 - \frac{1}{4} \cdot 2b^2 \pi = t_1$.

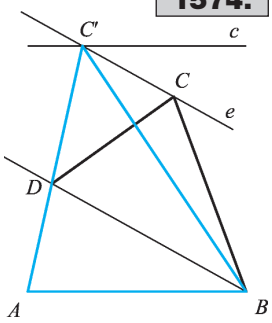
1571. A szerkesztés: ① AB-vel párhuzamos C-n át: e. ② AB-re A-ban adott α' szög $\rightarrow b'$. ③ $b' \cap e = C'$. $t_{ABC'} = t_{ABC}$, mert AB és a hozzá tartozó magasság közös.

1572. Legyen DB a paralelogramma és a rombusz egyenlő átlója. Legyen $c \parallel e(D; B)$. Tetszőleges $C' \in c$ esetén $t_{DBC} = t_{DBC'} \Rightarrow t_{ABCD} = t_{A'BC'D}$. A szerkesztés: ① DB felezőmerőlegese: f. ② DB-vel párhuzamos C-n át: c. ③ DB-vel párhuzamos A-n át: a. ④ $f \cap c = C'$ és $f \cap a = A' \rightarrow$ $\rightarrow A'BC'D$ rombusz. ⑤ Ha az 1–4. lépéseket AC átlóból kiindulva végrehajtjuk, $AB'CD'$ rombuszhoz jutunk. 1 vagy 2 megoldás lehet.

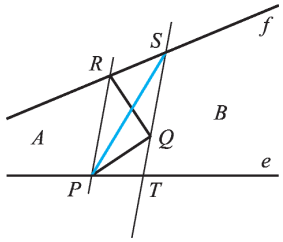
1573. Ha két paralelogramma egyik oldala és az ahhoz tartozó magassága egyenlő, akkor területük egyenlő. A szerkesztés: ① A középpontú, AB sugarú kör: k. ② $k \cap e(D; C) = D'$. ③ A-t tükrözzük BD' felezőpontjára: $C' \rightarrow ABC'D'$ rombusz. ④ A középpontú, AD sugarú kör: l. ⑤ $l \cap e(B; C) = B''$. ⑥ A-t tükrözzük $B''D$ felezőpontjára: $C'' \rightarrow ABC''D''$ rombusz. 2, 3 vagy 4 megoldás lehet.

I

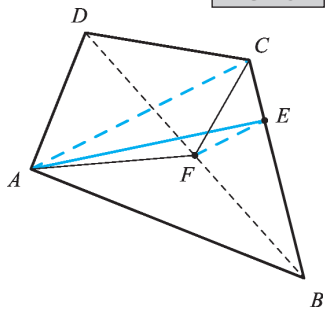
1574.



1575.



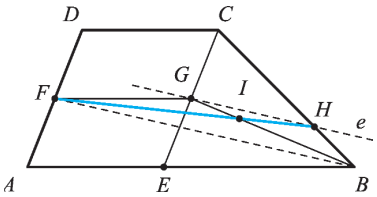
1576.



1574. Felhasználjuk, hogy $BCC'D$ trapézban $t_{BDC} = t_{BDC'}$. A szerkesztés: ① BD-vel párhuzamos C-n át: e. ② $e \cap e(A; D) = C' \rightarrow ABC'\triangle$ ($t_{ABC'} = t_{ABCD}$). ③ C'-n át párhuzamos AB-vel: c. ④ Bármely $C'' \in c$ esetén $ABC''\triangle$ is megoldás. A négyszög bármely oldalából indulunk ki, végtelen sok megoldás van.

1575. Felhasználjuk, hogy $PRST$ trapézban $PQR\triangle$ területe egyenlő $PRS\triangle$ területével. $\Rightarrow t_A$ nem változik, ha $PQR\triangle$ helyett $PRS\triangle$ tartozik az „A” síkidomhoz. Hasonlóan: $t_{TSP} = t_{TPQ} + t_{QPS} = t_{TPQ} + t_{QRS} \Rightarrow t_B$ nem változik, ha $TPQ\triangle$ és $QRS\triangle$ helyett $TSP\triangle$ tartozik a „B” síkidomhoz. A szerkesztés: ① Q ponton át párhuzamos PR egyenessel: t. ② $t \cap e = T$ és $t \cap f = S$. ③ PS vagy RT egyenese jelöli ki az új határvonalat. 2 megoldás van.

1577.

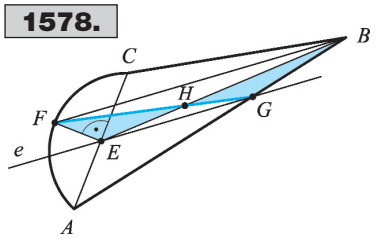


1576. Az $ABCD$ négyszög DB átlójának F felezőpontját A-val és C-vel összekötő szakaszok súlyvonalak. $\Rightarrow t_{ADF} = t_{ABF}$ és $t_{CDF} = t_{CBF} \Rightarrow t_{ADCF} = t_{AFCB}$. Legyen $FE \parallel AC$! $t_{AFC} = t_{AEC} \Rightarrow t_{ADCF} = t_{ADCE} \Rightarrow AE$ két egyenlő területű darabra vágja az $ABCD$-t. Ha $F \in AC$, akkor $ABCD$ deltoid, ezért az AC átló lehet a megoldás.

1577. **1. eset:** $AB > CD$. Felhasználjuk: Ha $CE \parallel AD$, illetve $CG = GE$, akkor $AECD$ paralelogramma és az FG középvonal felezi a paralelogramma területét, illetve GB súlyvonal és felezi az $EBC\triangle$ területét. $\Rightarrow t_{AFGB} = t_{FDCBG}$. Ha $GH \parallel FB$, akkor $t_{FBG} = t_{FBH} \Rightarrow t_{FIG} = t_{GIH} \Rightarrow t_{EABH} = t_{FHCD} \Rightarrow FH$ a keresett egyenes. A szerkesztés: ① C-n át párhuzamos DA-val $\rightarrow E \in AB$. ② CE felezőpontja: G. ③ G-n át párhuzamos FB-vel: e. ④ $e \cap BC = H \rightarrow FH$ a megoldás.

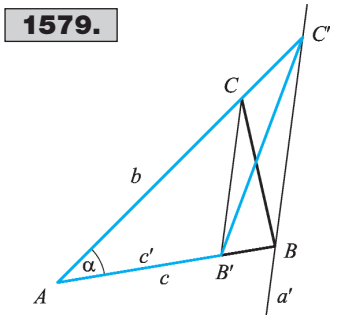
2. eset: Ha $AB = CD$, akkor $ABCD$ trapéz paralelogramma. $\Rightarrow$ A középvonal egyenese a megoldás.

1578.



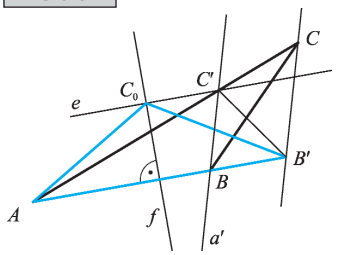
1578. $AE = EC \Rightarrow FE \perp AC \Rightarrow FE$ felezi az ACF körszelet területét. BE súlyvonal, ezért felezi az $ABC\triangle$ területét. Legyen $FB \parallel EG$! $\Rightarrow t_{FEB} = t_{FGB}$, valamint $t_{FEH} = t_{HBG} \Rightarrow$ $\Rightarrow FG$ a keresett egyenes. A szerkesztés: ① AC húr felezőpontja: E. ② AC ív felezőpontja: F. ③ E-n át párhuzamos BF-fel: e. ④ $e \cap e(A; B) = G \rightarrow FG$ a megoldás.

1579.

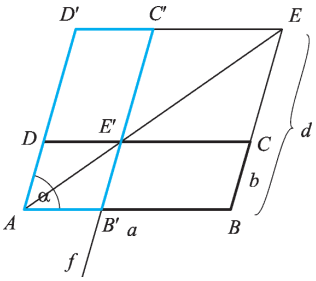


1579. A szerkesztés: ① $AB' = c'$. ② CB'-vel párhuzamos B-n át: a'. ③ $a' \cap e(A; C) = C'$. A szerkesztésből adódik, hogy a $B'BC'C$ négyszög trapéz $\Rightarrow t_{B'C'C} = t_{B'BC}$ ($B'C$ oldaluk és az ehhez tartozó magasságuk közös) $\Rightarrow$ $\Rightarrow t_{AB'C'} = t_{AB'C} + t_{B'C'C} = t_{AB'C} + t_{B'BC} = t_{ABC}$. Egyértelmű a megoldás.

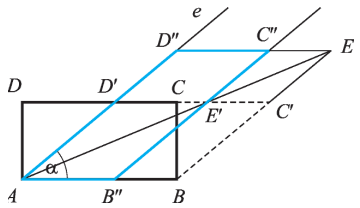
1580.



1581.



1582.

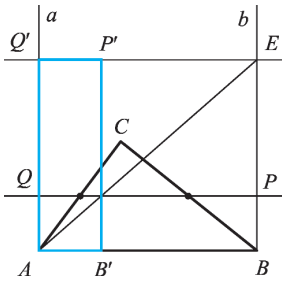


1580. Az 1579. feladatban láttuk, hogy ha $BC' \parallel B'C$, akkor $t_{AB'C'} = t_{ABC}$. Tetszőleges $P \in e$ esetén $t_{APB'} = t_{AC'B'}$. A szerkesztés: ① e(A; B)-re adott c' alap: AB'. ② $B'C$-vel párhuzamos B ponton át: a'. ③ $a' \cap$ e(A; C) = C'. ④ C'-n át párhuzamos AB-vel: e. ⑤ AB' felezőmerőlegese: f. ⑥ $f \cap e = C_o \Rightarrow AB'C_o\triangle$ a megoldás. Egyértelmű a megoldás.

1581. ① Szerkesszük meg az a, b oldalú α szögű $ABCD$ paralelogrammához az a, d oldalú α szögű $ABED'$ paralelogrammát. ② e(A;E) $\cap$ e(C;D) = E'. ③ Az E' ponton át AD-vel húzott párhuzamos: f. ④ $f \cap$ e(A;B) = B' és $f \cap$ e(D';E) = C'. A szerkesztésből adódik, hogy $AB'E'D$; $B'BCE'$; $E'CEC'$; $DE'C'D'$ négyszögek paralelogrammák. Felhasználva, hogy a paralelogramma átlója felezi a területet: $t_{B'BCE'} = t_{ABE} - t_{AB'E'} - t_{E'CE} = t_{AD'E} - t_{ADE'} - t_{E'C'E} = t_{DE'C'D'}$. A fenti egyenlőséget felhasználva: $t_{AB'C'D'} = t_{AB'E'D} + t_{DE'C'D'} = t_{AB'E'D} + t_{B'BCE'} = t_{ABCD}$. Tehát az $AB'C'D'$ paralelogramma a megoldás. A b, d oldalú α szögű paralelogrammából kiindulva $AB'C'D'$-vel egybevágó megoldáshoz jutunk.

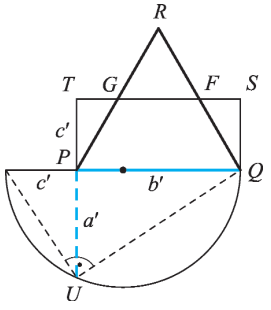
1582. A szerkesztés: ① AB-re A-ban α szög → szára e. ② $e \cap DC =$ $= D' \rightarrow ABC'D'$ paralelogramma ($t_{ABCD} = t_{ABC'D'}$). ③ adott szögű és oldalú $ABC'D'$-vel egyenlő területű paralelogramma: $AB''C''D''$ (lásd az 1581. feladat megoldásában látott eljárást).

1583.



1583. A szerkesztés: ① $ABC\triangle$ AB-vel párhuzamos középvonalának egyenese: k. ② A-ban merőleges AB-re: a. ③ B-ben merőleges AB-re: b. ④ $a \cap k = Q$ és $b \cap k = P \Rightarrow ABPQ$ téglalap ($t_{ABPQ} = t_{ABC}$). ⑤ adott oldalú $ABPQ$-val egyenlő területű téglalap → $AB'P'Q'$ (lásd az 1581. feladat megoldásában látott eljárást).

1584.



1584. Felhasználjuk: Bármely két szabályos háromszög, illetve bármely két négyzet hasonló.

Induljunk ki egy tetszőleges (b' oldalú) szabályos háromszögből és szerkesszünk egy vele egyenlő területű (a' oldalú) négyzetet. A szerkesztés: ① A $PQR\triangle$-gel egyenlő területű $PQST$ téglalap szerkesztése: *a)* $PQR\triangle$ PQ-val párhuzamos középvonalának egyenese → e(F; G). *b)* P-ben, illetve Q-ban PQ-ra állított merőlegesek kimetszik e(F; G)-ből a T és S pontokat ($t_{PQR} = 1/2 \cdot b' \cdot 2c' = b' \cdot c' =$ $= t_{PQST}$). ② A $PQST$ téglalappal egyenlő területű négyzet szerkesztése:

a) $t_{PQST} = b' \cdot c' = (a')^2 = t_{\text{négyzet}} \Rightarrow a'$ szakasz a b' és c' szakaszok mértani közepe.

b) a' a magasságtétel segítségével szerkeszthető (lásd az ábrát). Amilyen arányú hasonlóság viszi az a' oldalú négyzetet az adott négyzetbe, olyan arányú hasonlóságot alkalmazunk a b' oldalú szabályos háromszögre, és így a keresett háromszöget kapjuk.