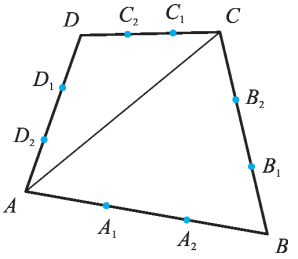
I

Háromszögek hasonlóságával megoldható feladatok

1201.



1201. Húzzuk meg a négyszög AC átlóját! Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételének megfordítását az $ABC\sphericalangle AC$ és A_1B_2 szelőire: $AC \parallel A_1B_2$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét az $ABC\sphericalangle AC$ és A_1B_2 párhuzamos szelőire: $AC : A_1B_2 = 3 : 2 \Rightarrow A_1B_2 = \frac{2}{3}AC$. Hasonlóan belátható, hogy $AC \parallel C_1D_2$ és $C_1D_2 = \frac{2}{3}AC$. A fentiekből következik, hogy $A_1B_2 \parallel C_1D_2$ és $A_1B_2 = C_1D_2 \Rightarrow A_1B_2C_1D_2$ paralelogramma.

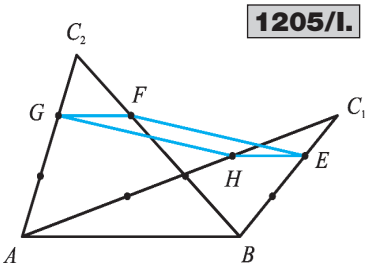
1202. Az 1201. ábra jelöléseit használjuk. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételének megfordítását az $ABC\sphericalangle AC$ és A_2B_1 szelőire: $AC \parallel A_2B_1$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételének megfordítását az $ADC\sphericalangle AC$ és C_2D_1 szelőire: $AC \parallel C_2D_1$. A fentiekből következik, hogy $C_2D_1 \parallel A_2B_1$. Hasonlóan belátható, hogy $A_1D_2 \parallel B_2C_1$. Az új négyszög szemközti oldalegyenesei párhuzamosak, tehát paralelogramma.

1203. Az 1201. ábra jelöléseit használjuk. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételének megfordítását az $ADC\sphericalangle AC$ és C_2D_1 szelőire: $AC \parallel C_2D_1$. Hasonlóan belátható, hogy $AC \parallel A_1B_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow C_2D_1 \parallel A_1B_2 \Rightarrow A_1B_2C_2D_1$ trapéz. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét az $ADC\sphericalangle AC$ és C_2D_1 párhuzamos szelőire: $D_1C_2 : AC = 1 : 3$. Hasonlóan belátható, hogy $A_1B_2 : AC = 2 : 3 \Rightarrow D_1C_2 : A_1B_2 = 1 : 2$.

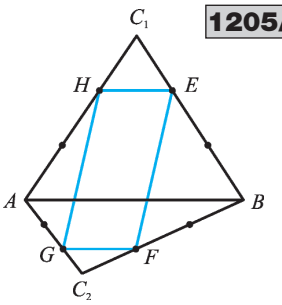
1204. Az 1201. ábra jelöléseit használjuk. Legyen a D_1B_2 és A_1C_2 szakaszok metszéspontja M. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételének megfordítását az $ADC\sphericalangle AC$ és C_2D_1 szelőire, valamint az $ABC\sphericalangle AC$ és A_1B_2 szelőire: $AC \parallel C_2D_1$ és $AC \parallel A_1B_2 \Rightarrow C_2D_1 \parallel A_1B_2$. A párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazva ugyanezekre a szögekre és szelőkre: $D_1C_2 : AC = 1 : 3$ és $A_1B_2 : AC = 2 : 3$. A párhuzamosság miatt $D_1MC_2\triangle \sim B_2MA_1\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. A hasonlóság aránya: $\lambda = \frac{A_1B_2}{D_1C_2} = \frac{\frac{2}{3}AC}{\frac{1}{3}AC} = 2$. A másik két oldalpár aránya: $\frac{A_1M}{MC_2} = \frac{B_2M}{MD_1} = 2$. A szakaszok $2 : 1$ arányban osztják egymást.

1205. **1. eset:** Ha a két háromszög ugyanabban a félsíkban van és egyenlő magas, akkor E; F; G; H ugyanabban a félsíkban ugyanolyan messze van AB egyenesétől $\Rightarrow$ egy egyenesen vannak.
2. eset: Egyébként: Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételének megfordítását az AC_2B, illetve

1205/I.



1205/II.



AC_1B szögek GF és AB, illetve HE és AB szelőire: $GF \parallel AB$ és $HE \parallel AB \Rightarrow \underline{GF \parallel HE}$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a fenti szögekre és szelőkre: $GF : AB = 1 : 3$ és $HE : AB = 1 : 3$, ezért $\underline{GF = HE}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $EFGH$ paralelogramma.

1206. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét a $DBA\sphericalangle$ és DA és MP párhuzamos szelőire: $\underline{DM : MB = AP : PB}$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét a $DBC\sphericalangle$ és DC és MQ párhuzamos szelőire: $\underline{DM : MB = CQ : QB}$. Az aláhúzottakból $AP : PB = CQ : QB$. A párhuzamos szelők tételének megfordítását alkalmazzuk az $ABC\sphericalangle$ és AC és PQ szelőire: $AC \parallel PQ$.

1207. Az átlók 3 : 1 arányban osztják egymást.

1208. Legyen F_a a BC oldal, F_b az AC oldal felezéspontja. Legyen $F_aA \cap F_bB = S$ a súlypont. F_aF_b a háromszög középvonala, tehát $F_aF_b \parallel AB$ és $F_aF_b = AB : 2$. $ABS\triangle \sim F_aF_bS\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. A hasonlóság aránya $\lambda = \dfrac{AB}{F_aF_b} = 2 \Rightarrow \dfrac{AS}{SF_a} = \dfrac{BS}{SF_b} = \dfrac{2}{1}$. Az állítás bármely két súlyvonalra hasonlóan belátható.

1209. Legyen T az átfogóhoz tartozó magasság talppontja. $ATC\triangle \sim CTB\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. A hasonlóság aránya: $\lambda = 2$. $\Rightarrow$ A megfelelő oldalak: $CT = 2AT$ és $TB = 2CT \Rightarrow$ $\Rightarrow TB = 2 \cdot 2AT = 4AT \Rightarrow AT : TB = 1 : 4$.

1210. $DE = \dfrac{4}{3}$ cm.

1211. $A_1AT_1\triangle \sim CAT\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda_1 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow A_1T_1 = \dfrac{1}{3} m_c$.

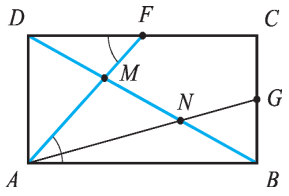
$B_2BT_2\triangle \sim CBT\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda_2 = \dfrac{2}{3} \Rightarrow B_2T_2 = \dfrac{2}{3} m_c$. A fentiekből következik, hogy $B_2T_2 = 2A_1T_1$. Az állítás derékszögű háromszögre is érvényes, ott azonban nem létezik az $A_1AT_1\triangle$. $A_1T_1 = \dfrac{1}{3} AC$ és $B_2T_2 = \dfrac{2}{3} AC \Rightarrow B_2T_2 = 2A_1T_1$.

1212. *a)* Legyen $AC \cap H_1F_4 = M$. $AF_4M\triangle \sim CH_1M\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow$ $\Rightarrow \lambda = 1 : 2 \Rightarrow H_1M : MF_4 = 1 : 2$, tehát az AC átló 1 : 2 arányban osztja a H_1F_4 szakaszt.
b) Legyen $AC \cap H_3F_5 = M$. $CH_3M\triangle \sim AF_5M\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow \lambda = 3 : 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow H_3M : MF_5 = 3$, tehát az AC átló 3 : 1 arányban osztja a H_3F_5 szakaszt.

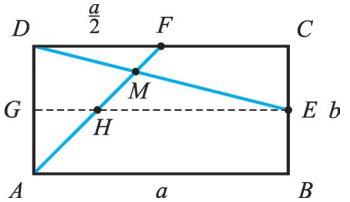
1213. $ABM\triangle \sim FDM\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow \lambda = \dfrac{AB}{DF} = 2 \Rightarrow \dfrac{BM}{MD} =$ $= \dfrac{AM}{MF} = 2 : 1$. Hasonlóan belátható, hogy $\dfrac{DN}{NB} = \dfrac{AN}{NG} = 2 : 1$.

1214. Húzzunk párhuzamost E-n át AB-vel $\rightarrow G$ és H. GE a téglalap középvonala $\Rightarrow GH$ az $AFD\triangle$ középvonala $\Rightarrow H$ felezi AF-et $\Rightarrow GH = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{4} a \Rightarrow HE = \dfrac{3}{4} a$. $HEM\triangle \sim FDM\triangle$,

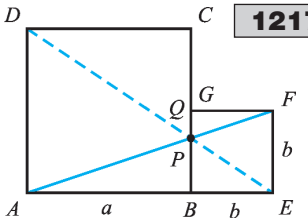
1213.



1214.



I



1217.

mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda = \frac{HE}{FD} = \frac{\frac{3}{4}a}{\frac{1}{2}a} = \frac{3}{2}$. $\Rightarrow$ $\Rightarrow HM : MF = 3 : 2$ és $\underline{\underline{EM : MD = 3 : 2}} \Rightarrow HM = 3x$, $MF = 2x$ és H felezi AF-et, ezért $AH = HF = 5x \Rightarrow AM = 8x$ és $MF = 2x \Rightarrow \underline{\underline{AM : MF = 4 : 1}}$.

1215. Legyenek A_1, A_2, ill. B_1, B_2 a szárak harmadolópontjai az alaptól a szárak metszéspontja felé haladva. $ABC\triangle \sim A_2B_2C\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\Rightarrow A_2B_2 = \frac{1}{3}a$. Legyen $e(A_2; B_1) \cap e(A; B) = M$. $BMB_1\triangle \cong B_2A_2B_1\triangle$, mert $B_2B_1 = BB_1$, $BB_1M\sphericalangle = B_2B_1A_2\sphericalangle$ (csúcsszögek), $B_1BM\sphericalangle = B_1B_2A_2\sphericalangle$ (váltószögek) $\Rightarrow A_2B_2 = MB \Rightarrow MB = \frac{1}{3}a$. Megjegyzés: az állítás Menelaosz tételének megfordításával is bizonyítható.

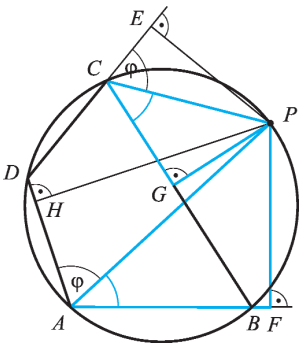
1216. Legyen $BP \cap AC = M$. $AMP\triangle \sim CMB\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda = \frac{AP}{CB} = \frac{AP}{DA} = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{PM}{MB} = \frac{1}{n} \Rightarrow MC = n \cdot AM$.

$AC = AM + MC = AM + n \cdot AM = (n+1) \cdot AM \Rightarrow \underline{\underline{\frac{AM}{AC} = \frac{1}{n+1}}}$.

1217. Legyen $AF \cap CB = P$! $APB\triangle \sim AFE\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda_1 = \frac{AB}{AE} = \frac{PB}{FE}$; $\lambda_1 = \frac{AB}{AB + BE} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow PB = \frac{a}{a+b} \cdot b$. Legyen $DE \cap CB = Q$! $EQB\triangle \sim EDA\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda_2 = \frac{BE}{AE} = \frac{BQ}{AD}$; $\lambda_2 = \frac{BE}{AB + BE} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow QB = \frac{b}{a+b} \cdot a$. A fentiekből: $PB = QB$, ezért $P \equiv Q$, tehát AF és DE a CB szakaszon metszik egymást.

1218. $PAF\triangle \sim PCG\triangle$, mert mindkettő derékszögű, és $FAP\sphericalangle = GCP\sphericalangle$, mivel a körben a BP íven nyugvó kerületi szögek. $\Rightarrow \underline{\frac{PF}{PG} = \frac{PA}{PC}}$. $PHA\triangle \sim PEC\triangle$, mert mindkettő derékszögű és $DAPC$ húrnégyszög miatt az A-nál lévő φ szög egyenlő a C-nél lévő külső szöggel. $\Rightarrow \underline{\frac{PH}{PE} = \frac{PA}{PC}}$. Az aláhúzott egyenlőségekből: $\frac{PF}{PG} = \frac{PH}{PE} \Rightarrow PF \cdot PE = PG \cdot PH$. Ha P valamelyik csúccsal azonos, akkor az abba a csúcsba futó oldalaktól való távolsága 0, tehát mindkét szorzat 0, az állítás igaz.

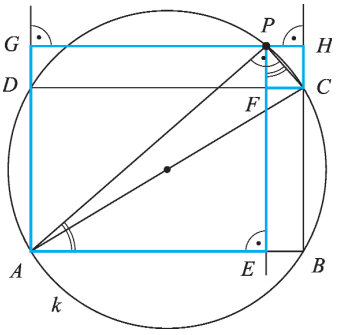
1218.



1219. Legyen a magasságpont M, az A-ból induló magasság talppontja A_1, a B-ből indulóé B_1. $AMB_1\triangle \sim BMA_1\triangle$, mert mindkettő derékszögű és M-nél lévő szögeik csúcsszögek. $\lambda = \frac{A_1M}{B_1M} = \frac{BM}{AM} \Rightarrow AM \cdot MA_1 = BM \cdot MB_1$.

1220. $ABCD$ téglalap $\Rightarrow AC$ a kör átmérője $\Rightarrow$ Thalész tétele miatt $APC\sphericalangle = 90°$; $PAE\sphericalangle = CPF\sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyesszögek ($PC \perp AP$, $PF \perp AE$) $\Rightarrow AEP\triangle \sim PFC\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow$ $AEPG$ téglalap hasonló az $FCHP$ téglalaphoz.

1220.



1221. $BA_1 = 2{,}25$ cm és $A_1C = 5{,}75$ cm.

1222. Legyen a derékszögű csúcs C, a szárakon lévő osztópontok A_2, A_1, ill. B_2, B_1, a négyzet AB-n levő csúcsai P és Q, AB felezőpontja F. $A_2B_2C\triangle \sim ABC\triangle$, mert két-két oldaluk aránya és az általuk bezárt szög egyenlő. $\lambda_1 = \dfrac{A_2C}{AC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_2B_2 = \dfrac{1}{3}AB$. $APA_2\triangle \sim AFC\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda_2 = \dfrac{AA_2}{AC} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow A_2P = \dfrac{2}{3}CF$. $CF = \dfrac{1}{2}AB$ miatt $A_2P = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{3}AB$. Hasonlóan megmutatható, hogy $B_2Q = \dfrac{1}{3}AB$. $\Rightarrow A_2B_2 = A_2P = B_2Q$ és $A_2PQ\sphericalangle = PQB_2\sphericalangle = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow A_2B_2QP$ négyzet.

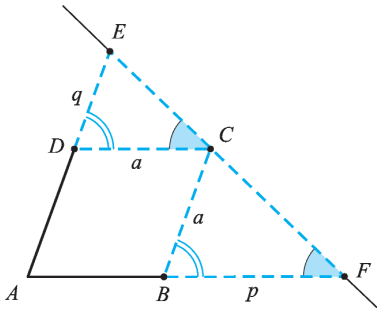
1223. Húzzuk meg a C-ből induló súlyvonalat: CC_1. Felhasználjuk, hogy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó súlyvonala merőleges az átfogóra és fele olyan hosszú. $CC_1 \cap AD = S$ az $ABC\triangle$ súlypontja. $ABD\triangle \sim ASC_1\triangle$, mert mindkettő derékszögű és az A csúcsnál lévő szögük közös. $\Rightarrow \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AC_1}{C_1S} = \dfrac{AC_1}{\frac{1}{3}CC_1} = \dfrac{AC_1}{\frac{1}{3}AC_1} = 3.$

1224. $DCE\triangle \sim BFC\triangle$, mert szögeik páronként egyállású szögek, tehát egyenlők. $\lambda = \dfrac{DE}{BC} =$

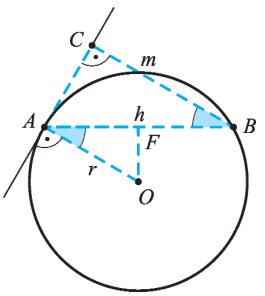
$= \dfrac{DC}{BF}$, azaz $\dfrac{q}{a} = \dfrac{a}{p} \Rightarrow a^2 = pq \Rightarrow a = \sqrt{pq}$.

1225. Állítás: $h = \sqrt{2rm}$. $AOF\triangle \sim BAC\triangle$, mert mindkettő derékszögű, és $OAB\sphericalangle = ABC\sphericalangle$, hiszen váltószögek. $\lambda = \dfrac{AO}{AB} = \dfrac{AF}{BC}$, azaz $\dfrac{r}{h} = \dfrac{\frac{h}{2}}{m} \Rightarrow h^2 = 2rm \Rightarrow h = \sqrt{2rm}$.

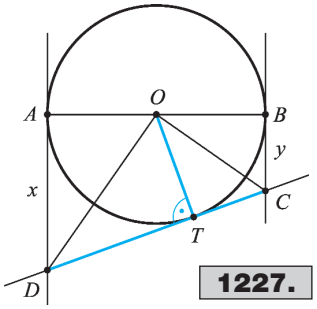
1224.



1225.



I



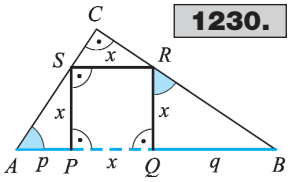
1227.

1226. Legyen a CD húrra merőleges átmérő AB! Thalész tétele miatt $ACB\triangle$ C-ben derékszögű, CT az átfogóhoz tartozó magassága. A magasságtételt alkalmazva az $ACB\triangle$-re: $\frac{h}{2} = \sqrt{m\cdot(2r-m)} \Rightarrow h = 2\sqrt{m(2r-m)}$.

1227. Állítás: $r = \sqrt{xy}$. $AOTD$ és $BOTC$ négyszögek deltoidok, mert két-két szomszédos oldaluk egyenlő. DO felezi az $AOT\sphericalangle$-et és CO felezi a $BOT\sphericalangle$-et. $AOT\sphericalangle$ és $BOT\sphericalangle$ mellékszögek, tehát szögfelezőik merőlegesek egymásra. $\Rightarrow DOC\sphericalangle = 90°$. $OT \perp CD$, mert az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. Alkalmazzuk a magasságtételt az ODC derékszögű háromszögre: $OT = \sqrt{DT\cdot TC}$. $DT = DA = x$ és $TC = CB = y$, mert az érintőszakaszok hossza egyenlő $\Rightarrow r = OT = \sqrt{xy}$.

1228. Állítás: $AB = \sqrt{AD\cdot AC}$. $ABC\triangle \sim ADB\triangle$, mert az A csúcsnál lévő szögük közös, B-nél, illetve D-nél lévő szögük pedig β. A hasonlóság aránya: $\lambda = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD\cdot AC \Rightarrow$ $\Rightarrow AB = \sqrt{AD\cdot AC}$.

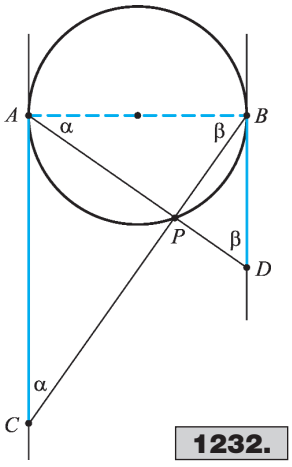
1229. Legyenek az $ABCD$ trapéz beírt körének érintési pontjai AB-n E, BC-n G, CD-n F és DA-n H. A trapéz egy száron lévő szögeinek összege 180°, tehát $EBC\sphericalangle + BCF\sphericalangle = \alpha + \beta = 180°$. A beírt kör középpontja a szögfelezők metszéspontja. A húrtrapéz alapon fekvő szögei egyenlők. $EBO\triangle \sim FOD\triangle$, mert mindkettő derékszögű, és $\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°$, tehát szögeik egymás pótszögei. $\Rightarrow AEOH \sim BEOG \sim OGCF \sim OFDH$.



1230.

1230. Állítás: $x = \sqrt{pq}$. $APS\triangle \sim RQB\triangle$, mert mindkettő derékszögű, és az egyformán jelölt szögek merőleges szárú hegyesszögek. $\lambda = \frac{PS}{QB} = \frac{AP}{RQ}$, azaz $\frac{x}{q} = \frac{p}{x} \Rightarrow x^2 = pq \Rightarrow x = \sqrt{pq}$.

1231. Állítás: $AB = \sqrt{BC\cdot BP}$. Kössük össze P-t A-val! $ABP\triangle$ egyenlő szárú, mert FP merőlegesen felezi az AB szakaszt. $ABC\triangle \sim$ $\sim PAB\triangle$, mert mindkettő egyenlő szárú és a B-nél lévő szögük közös. $\lambda = \frac{AB}{BP} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = BC\cdot BP$, tehát $AB = \sqrt{BC\cdot BP}$.



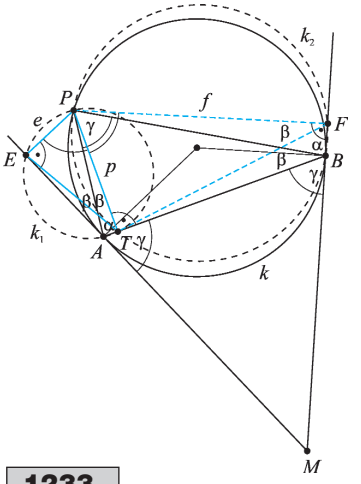
1232.

1232. Állítás: $AB = \sqrt{AC\cdot BD}$. $APB\triangle$ derékszögű Thalész tétele miatt. $DBA\sphericalangle = CAB\sphericalangle = 90°$, mert az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. $APB\triangle$ hegyesszögei: α és $\beta \Rightarrow$ $\Rightarrow ACB\sphericalangle = \alpha$ és $ADB\sphericalangle = \beta \Rightarrow ACB\triangle \sim BAD\triangle$. $\lambda = \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow$ $\Rightarrow AB^2 = AC\cdot BD$, tehát $AB = \sqrt{AC\cdot BD}$.

1233. $BAM\sphericalangle = ABM\sphericalangle = APB\sphericalangle = \gamma$, mert ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek. E és T pontból az AP szakasz 90° alatt látszik, ezért E és T rajta vannak az AP szakasz Thalész körén, k_1-en. $\Rightarrow \otimes EAP\sphericalangle = ETP\sphericalangle$, mert ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek k_1-ben. Jelöljük az $ABP\triangle$ $PAB\sphericalangle$-ét α-val, $PBA\sphericalangle$-ét β-val! $ABP\triangle$ belső szögeinek összege $\gamma + \alpha + \beta = 180°$. Az A csúcsnál az érintő

két félegyenese egyenesszöget alkot: $\gamma + \alpha + EAP\sphericalangle = 180°$. Az aláhúzottakból $EAP\sphericalangle = \beta$, $\otimes$-ból $ETP\sphericalangle = \beta$. $EATP$ húrnégyszögben $EAT\sphericalangle = \alpha + \beta \Rightarrow EPT\sphericalangle = \gamma$. Hasonlóan megmutatható, hogy F és T rajta vannak PB Thalész körén, k_2-n, a $TBFP$ húrnégyszögben $TBF\sphericalangle = \beta + \alpha$, $TPF\sphericalangle = \gamma$ és $TFP\sphericalangle = \beta$, mert a k_2 kör ugyanazon ívén nyugvó kerületi szögek. $ETP\triangle \sim TFP\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők (P csúcsnál γ; T, ill. F csúcsnál β).

$\lambda = \dfrac{EP}{PT} = \dfrac{PT}{PF} \Rightarrow PT^2 = EP \cdot PF \Rightarrow PT = \sqrt{EP \cdot PF}$, és ezt akartuk belátni.

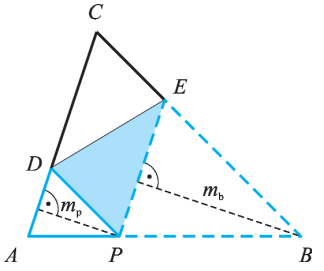


1233.

1234. Legyen T a C-ből induló magasság talppontja. Állítás: $CT = \sqrt{TA \cdot TB}$. $CAB\sphericalangle = \beta + 90° \Rightarrow CAT\sphericalangle = 90° - \beta \Rightarrow$ $\Rightarrow ACT\sphericalangle = \beta \Rightarrow ACT\triangle \sim CBT\triangle$, mert mindkettő derékszögű és egyik hegyesszögük β. $\Rightarrow \lambda = \dfrac{AT}{TC} = \dfrac{TC}{TB} \Rightarrow TC^2 =$ $= AT \cdot TB \Rightarrow TC = \sqrt{TA \cdot TB}$.

1235. Állítás: $T_{BDC} = \sqrt{T_{ABC} T_{DEC}}$. Legyen az $ABC\triangle$ C-ből induló magassága m_c, a $DEC\triangle$ C-ből induló magassága m! $T_{BDC} = T_{DEC} + T_{DEB} = \dfrac{DE \cdot m}{2} + \dfrac{DE \cdot (m_c - m)}{2} = \dfrac{DE \cdot m_c}{2}$. $T_{ABC} = \dfrac{AB \cdot m_c}{2}$ és $T_{DEC} = \dfrac{DE \cdot m}{2} \Rightarrow \otimes\, T_{ABC} \cdot T_{DEC} = \dfrac{AB \cdot DE \cdot m_c \cdot m}{4}$, $ABC\triangle \sim DEC\triangle$, mert egy szögük közös, másik két szögpárjuk egyállású. $\Rightarrow \lambda = \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{m}{m_c} \Rightarrow AB \cdot m = DE \cdot m_c$. Ezt a $\otimes$ összefüggésbe helyettesítve $T_{ABC} \cdot T_{DEC} = \left(\dfrac{DE \cdot m_c}{2}\right)^2 = (T_{BDC})^2 \Rightarrow T_{BDC} = \sqrt{T_{ABC} \cdot T_{DEC}}$.

1236. Állítás: $T_{DPE} = \sqrt{T_{APD} \cdot T_{PBE}}$. $APD\triangle \sim PBE\triangle$, mert szögeik páronként egyállású szögek. $\lambda = \dfrac{DA}{EP} = \dfrac{m_p}{m_b} \Rightarrow$ $\Rightarrow \otimes\, DA \cdot m_b = EP \cdot m_p$. $T_{DAP} = \dfrac{DA \cdot m_p}{2}$ és $T_{EPB} = \dfrac{EP \cdot m_b}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow T_{DAP} \cdot T_{EPB} = \dfrac{DA \cdot m_p}{2} \cdot \dfrac{EP \cdot m_b}{2}$. A $\otimes$ összefüggést felhasználva $T_{DAP} \cdot T_{EPB} = \left(\dfrac{EP \cdot m_p}{2}\right)^2 = (T_{EPD})^2 \Rightarrow T_{DPE} = \sqrt{T_{APD} \cdot T_{PBE}}$.



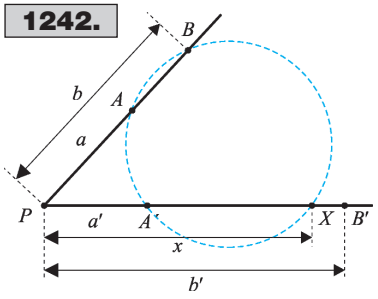
1236.

Szelődarabok szorzata

1237. Legyen az érintési pont E, a szelőnek a körrel való metszéspontjai pedig A (P-hez közelebbi) és B. $EPB\triangle \sim APE\triangle$, mert P-nél lévő szögük közös, és $AEP\sphericalangle = ABE\sphericalangle$, mivel a k kör AE ívén nyugvó kerületi szögek. $\lambda = \dfrac{EP}{AP} = \dfrac{BP}{EP} \Rightarrow EP^2 = AP \cdot BP \Rightarrow EP = \sqrt{AP \cdot BP}$.

I

1242.



1238. Legyenek a szelőkön a P-hez közelebbi metszéspontok A_1, ill. A_2, a távolabbiak B_1, ill. B_2. $PB_2A_1\triangle \sim PB_1A_2\triangle$, mert P-nél lévő szögük közös, $PB_2A_1\sphericalangle$ és $PB_1A_2\sphericalangle$ pedig a k kör ugyanazon ívén nyugvó kerületi szögek, tehát egyenlők. $\lambda = \dfrac{PA_2}{PA_1} = \dfrac{PB_1}{PB_2} \Rightarrow PA_2 \cdot PB_2 = PA_1 \cdot PB_1$.

1239. Legyenek az egyik szelő végpontjai A és B, az átmérőre merőleges másik szelőé C és D. $PBC\triangle \sim PDA\triangle$, mert P-nél lévő szögeik csúcsszögek, $CBP\sphericalangle$ és $CDA\sphericalangle$ pedig a k kör ugyanazon ívéhez tartozó kerületi szögek, tehát egyenlők. $\lambda = \dfrac{BP}{PD} = \dfrac{CP}{PA}$, amiből $CP = PD = \dfrac{h}{2}$-t felhasználva: $BP \cdot PA = \dfrac{h^2}{4} \Rightarrow \dfrac{h}{2} = \dfrac{h^2}{4} \Rightarrow$

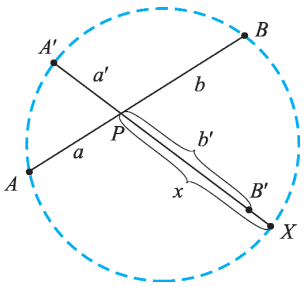
$\Rightarrow \dfrac{h}{2} = \sqrt{BP \cdot PA}$.

1240. Legyenek az egyik szelő végpontjai A_1, B_1, a másik szelőé A_2, B_2. $PA_2A_1\triangle \sim PB_1B_2\triangle$, mert P-nél lévő szögeik csúcsszögek, $PB_1B_2\sphericalangle$ és $PA_2A_1\sphericalangle$ pedig a k kör ugyanazon ívéhez tartozó kerületi szögek, tehát egyenlők. $\lambda = \dfrac{PB_1}{PA_2} = \dfrac{PB_2}{PA_1} \Rightarrow PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2$.

1241. A DC húrra rajzolt négyzet területe h^2. Az AF és BF oldalú téglalap területe $AF \cdot BF$. Alkalmazzuk a szelődarabok szorzatáról szóló tételt az F ponton átmenő DC és AB szelőkre!

$FA \cdot FB = FD \cdot FC$, azaz $FA \cdot FB = \dfrac{h}{2} \cdot \dfrac{h}{2} \Rightarrow 4 \cdot FA \cdot FB = h^2$, ami a bizonyítandó állítás.

1243.

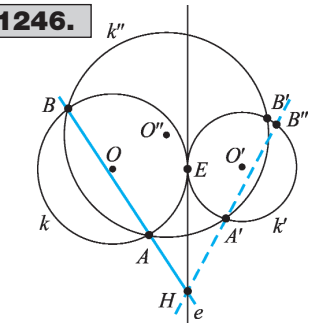


1242. Tekintsük az $ABA'\triangle$ körülírt körének a PA'-vel való X metszéspontját. A szelődarabok szorzatára vonatkozó tételt a P-ből induló szelőkre alkalmazva: $PA \cdot PB = PA' \cdot PX$, azaz $a \cdot b = a' \cdot x$. A feltétel szerint $a \cdot b = a' \cdot b'$, ezért $b' = x$. $\Rightarrow B' \equiv X$, tehát B'; A; B; A' egy körön vannak.

1243. Tekintsük az $ABA'\triangle$ körülírt körének a PA'-vel való X metszéspontját. A szelődarabok szorzatára vonatkozó tételt a P-ből induló szelőkre alkalmazva: $PA \cdot PB = PA' \cdot PX$, azaz $a \cdot b = a' \cdot x$. A feltétel szerint $a \cdot b = a' \cdot b'$, ezért $b' = x$. $\Rightarrow B' \equiv X$, tehát B'; A; B; A' egy körön vannak.

1244. HA, illetve HA' a H ponton át k-hoz húzott két szelő. A szelődarabok szorzatára vonatkozó tétel miatt $HA \cdot HB = HA' \cdot HB'$.

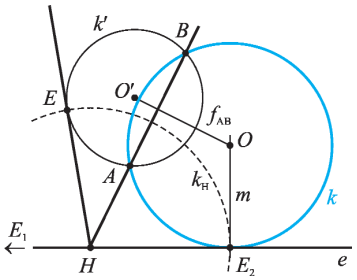
1246.



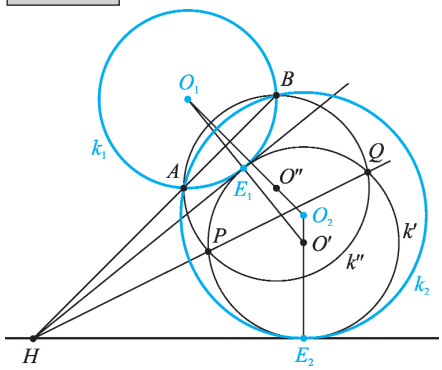
1245. Legyen E a körök érintési pontja, P a közös érintő tetszőleges pontja, A_1 és B_1 a k_1 kör és az egyik szelő, A_2 és B_2 a k_2 kör és a másik szelő közös pontja. P-ből a k_1 körhöz húzott szelőre a szelődarabokra vonatkozó összefüggés: $PA_1 \cdot PB_1 = PE^2$. P-ből a k_2-höz húzott szelőre: $PA_2 \cdot PB_2 = PE^2$. A két egyenlőségből $PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2$. A $B_1PB_2\sphericalangle$ szárain lévő PA_1, PB_1, illetve PA_2, PB_2 szakaszokra teljesül az 1242. feladat feltétele. E feladat állítása szerint A_1, A_2, B_1, B_2 egy körön vannak. A bizonyítás során nem használtuk ki, hogy a két kör kívülről érinti egymást.

1246. Legyen $AB \cap e = H$! A k körre a szelődarabokra vonatkozó összefüggés: $HA \cdot HB = HE^2$. Húzzunk H-ból A'-n át szelőt k'-höz! Legyen a második metszéspont B''.

1247.



1248.



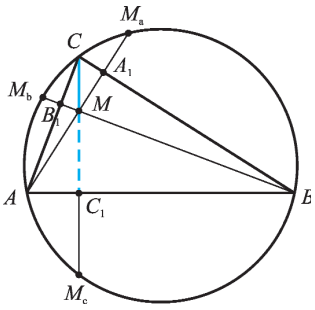
A k' körre vonatkozóan: $HA' \cdot HB'' = HE^2$. A két egyenlőségből: $HA \cdot HB = HA' \cdot HB''$. A $BHB''\sphericalangle$ száraira teljesül az 1242. feladat feltétele, így a feladat állítása szerint A, A', B'' és B egy körön vannak. A, A' és B köre a k'' kör, tehát $B'' \in k''$. A k' és k'' körök közös pontjai A', B'' és B', ami $B'' \equiv B'$-t kell jelentse. $\Rightarrow$ e$(A'; B') \cap e = H$.

1247. **1. eset:** Ha $AB \parallel e$, akkor $f_{AB} \cap e = E_2$ az érintési pont. Egyértelmű a megoldás. **2. eset:** AB nem párhuzamos e-vel. A szerkesztés: ① Vegyünk fel egy A-n, B-n átmenő tetszőleges k' kört! ② $AB \cap e = H$ ③ H-ból érintő k'-höz $\rightarrow E$. ④ H középpontú, HE sugarú k_H kör. ⑤ $k_H \cap e = E_i$. ⑥ $ABE_i\triangle$ körülírt köre: k. Indoklás: k és k' közös húrjára és H-ból húzott érintőire $HE^2 = HA \cdot HB = HE_2^2 \Rightarrow HE = HE_2$. 2 megoldás van.

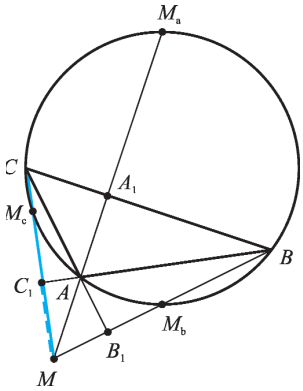
1248. Adott: A; B; k'. **1. eset:** $O' \notin f_{AB}$. A szerkesztés: ① Vegyünk fel egy A-n, B-n átmenő tetszőleges k'' kört, ami metszi k'-t! ② $k' \cap k'' = \{P; Q\}$. ③ e$(P; Q) \cap$ e$(A; B) = H$. ④ H-ból érintőt szerkesztünk k'-höz $\rightarrow E_1; E_2$. ⑤ $ABE_1\triangle$ körülírt köre: k_1. $ABE_2\triangle$ körülírt köre: k_2. Indoklás: A k_1, illetve k_2 kör érinti a k' kört. A k'' kör metszi k_1-et és k'-t, illetve k_2-t és k'-t. Az 1246. feladat feltételei teljesülnek a fenti körökre, így $AB \cap PQ = H$ független a k'' segédkörtől, $HE_1 = HE_2$-t egyértelműen meghatározza. **2. eset:** $O' \in f_{AB}$. Ekkor $PQ \parallel AB \Rightarrow f_{AB} \cap k'$ lesz az érintési pont. 2 megoldás lehet.

1249. Tudjuk, hogy a magasságpont oldalegyenesekre vonatkozó tükörképe a körülírt körön van. Alkalmazzuk a szelődarabok szorzatára vonatkozó tételt az M ponton átmenő szelőkre! $MC \cdot MM_c = MB \cdot MM_b = MA \cdot MM_a \Rightarrow MC \cdot 2MC_1 = MB \cdot 2MB_1 = MA \cdot 2MA_1 \Rightarrow MC \cdot MC_1 = MB \cdot MB_1 = MA \cdot MA_1$.

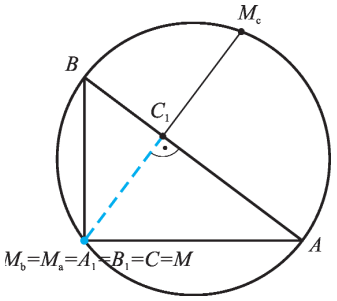
1249/I.



1249/II.

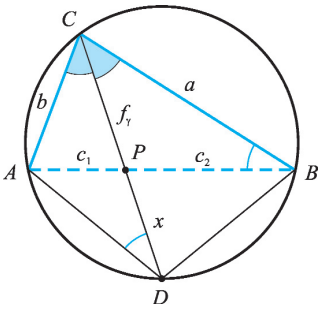


1249/III.



I

1250.



1250. Állítás: $f_\gamma^2 = a \cdot b - c_1 \cdot c_2$. Legyen a CP szögfelezőnek a körülírt körrel való metszéspontja D. A P-n átmenő AB és CD szelőkre alkalmazzuk a szelődarabok szorzatára vonatkozó tételt: $f_\gamma \cdot x = c_1 \cdot c_2$. Az $ADC\sphericalangle$ és az $ABC\sphericalangle$ ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek, tehát egyenlők. $ADC\triangle \sim PBC\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\Rightarrow$ A megfelelő oldalak aránya egyenlő, azaz $a : f_\gamma = (f_\gamma + x) : b \Rightarrow ab = f_\gamma \cdot (f_\gamma + x) = f_\gamma^2 + c_1 \cdot c_2 \Rightarrow f_\gamma^2 = a \cdot b - c_1 \cdot c_2$.

1251. Az 1250. feladatban láttuk, hogy $f_\gamma^2 = a \cdot b - c_1 \cdot c_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f_\gamma^2 < ab \Rightarrow f_\gamma < \sqrt{ab}$.

Hasonlóságon alapuló szerkesztések

Az **1252–1255.** feladat megoldását az olvasóra bízzuk.

1256. Legyen a szög csúcsa M. A szerkesztés: ① Vegyünk fel az e és f szárakon MA' és MB' szakaszokat úgy, hogy $\frac{MB'}{MA'} = \frac{a}{b}$. ② Húzzunk párhuzamost $A'B'$-vel P-n át $\rightarrow A; B$. ③ $AMB\triangle \sim$ $\sim A'MB'\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\frac{BM}{AM} = \frac{MB'}{MA'} = \frac{a}{b}$. Egyértelmű a megoldás.

1257. Adott: γ; m_c; $\frac{AT}{TB}$ arány, ahol T az m_c magasság talppontja. A szerkesztés: ① $A'T'$ és $T'B'$ szakasz felvétele egy egyenesen úgy, hogy $A'T' : T'B' = AT : TB$ legyen. ② T'-ben merőleges $A'B'$-re : m'. ③ $A'B'$ γ szögű látószögköríve: k_γ. ④ $k_\gamma \cap m' = C' \Rightarrow C'T' = m_c'$. ⑤ Alkalmazzunk $A'B'C'\triangle$-re $\frac{m_c}{m_c'}$ arányú hasonlóságot $\rightarrow ABC\triangle$. Megjegyzés: ha $AT : TB < 0$, akkor A' elválasztja T'-t és B'-t. Két egybevágó megoldás van.

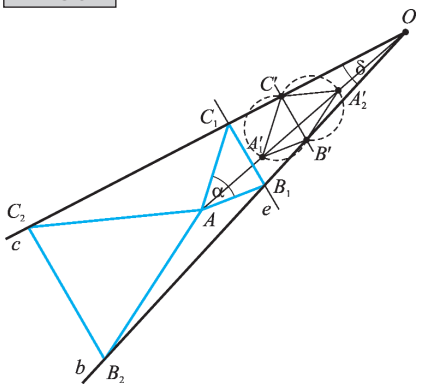
1258. Adott: $a + b - c$; α; β. A szerkesztés: ① Szerkesszünk $A'B'C'\triangle$-et α és β szögekkel! ② Adjuk meg az $(a' + b' - c')$ szakaszt! ③ Alkalmazzunk $A'B'C'\triangle$-re $\frac{a + b - c}{a' + b' - c'}$ arányú hasonlóságot $\rightarrow ABC\triangle$. Egyértelmű a megoldás.

1259. Felhasználjuk: Az O középpontú hasonlóság az e-vel párhuzamos, szögszárakat összekötő $A'C'$-t vele párhuzamos szakaszba viszi, tehát teljesül az első feltétel. A fenti hasonlóság C'-t OC' egyenesére, tehát a δ szög egyik szárára, A'-t a δ szög másik szárára viszi, tehát teljesül a második feltétel. $\lambda = \frac{OB}{OB'}$ miatt B' képe B. A szerkesztés: ① Szerkesszünk $A'B'C'\triangle$-et a δ szög szárai közé úgy, hogy $A'C' \parallel e, B' \in OB$ és $C'A' = C'B'$ legyen! ② Alkalmazzunk O középpontú hasonlóságot az $A'B'C'\triangle$-re úgy, hogy B' képe B legyen! $\rightarrow ABC\triangle$. Ha az $A'B'C'$ segédháromszöget úgy vesszük fel, hogy $C'A' \parallel e$ és $C'A' = A'B'$ legyen, akkor újabb két megoldást kaphatunk. 2; 3 vagy 4 megoldás lehet.

1260. Adott: A; α; δ; e. Felhasználjuk: Az O középpontú hasonlóság $B'C'$-t vele párhuzamos szakaszba viszi, tehát teljesül a $BC \parallel e$ feltétel. A fenti hasonlóság C'-t OC' egyenesére, tehát a δ szög egyik szárára, B'-t a másik szárára viszi, tehát teljesül a $C \in c$ és $B \in b$ feltétel. $\lambda = \frac{OA}{OA'}$

miatt A' képe A. A szerkesztés: ① A szerkesztendővel hasonló $A'B'C'\triangle$-et szerkesztünk: *a)* e-vel párhuzamos $C'B'$ szakasz δ szárai között. *b)* $C'D'$ α szögű látószögköríve: k_α. *c)* $k_\alpha \cap AO = A'$. ② $A'B'C'\triangle$-et O középpontú hasonlóságnak vetjük alá úgy, hogy A' képe A legyen $\rightarrow ABC\triangle$. 1 vagy 2 megoldás lehet.

1260.

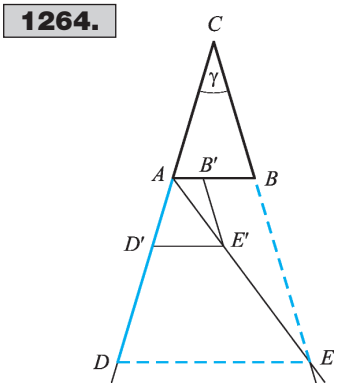


1261. Adott: γ; $|a - c| = d$. Felhasználjuk: Ha $\gamma < 60°$, akkor $a > c \Rightarrow d = a - c$. Ha $\gamma = 60°$, akkor $a = c \Rightarrow d = 0$ kell legyen, csak ekkor szerkeszthető háromszög. Ha $\gamma > 60°$, akkor $c > a \Rightarrow d = c - a$. A szerkesztés: ① γ szárszögű $A'B'C'\triangle$-et szerkesztünk, alapja c', szára a'. ② $d' = |a' - c'|$ szakasz felvétele. ③ Alkalmazzunk $\frac{d}{d'}$ arányú hasonlóságot $A'B'C'\triangle$-re $\rightarrow ABC\triangle$. 0; 1 vagy végtelen sok megoldás lehet.

1262. A szerkesztés: ① $ABC\triangle$-höz hasonló $A'B'C'\triangle$-et szerkesztünk: *a)* C csúcsú $\sphericalangle$ felvétele. *b)* a $\sphericalangle$ egyik szárára tetszőleges CB' szakasz. *c)* a $\sphericalangle$ felező félegyenese. *d)* a szögfelezőre CB'-vel egyenlő szakasz felvétele $\rightarrow P'$. *e)* $B'P'$ egyenesének és a $\sphericalangle$ másik szárának metszéspontja $A' \Rightarrow B'A' = c'$. ② Alkalmazzunk $\frac{c}{c'}$ arányú C középpontú hasonlóságot az $A'B'C'\triangle$-re $\rightarrow$ $\rightarrow ABC\triangle$. Egyértelmű a megoldás.

1263. A szerkesztés: ① $ABC\triangle$-höz hasonló $A'B'C'\triangle$-et szerkesztünk: *a)* C csúcsú γ szög felvétele $\rightarrow e$; *f*. *b)* e félegyenesre tetszőleges CA' szakasz. *c)* γ szögfelezőjére CA'-vel egyenlő szakasz felvétele $\rightarrow P'$. *d)* $A'P' \cap f = B' \Rightarrow A'B' = c'$. ② Alkalmazzunk C középpontú $\frac{c}{c'}$ arányú hasonlóságot $A'B'C'\triangle$-re $\rightarrow ABC\triangle$. $\gamma \geq 120°$ esetén nincs megoldás, $\gamma < 120°$ esetén egyértelmű a megoldás.

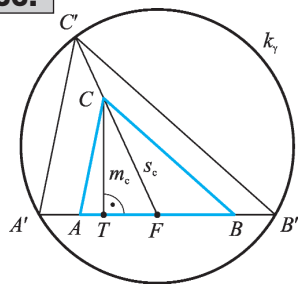
1264.



1264. A szerkesztés: ① Szerkesszünk az A csúcshoz egy, a feltételnek eleget tevő toldással hasonló $AD'E'B'$ trapézt, amelyre $AD' = D'E' = E'B'$. ② Alkalmazzunk olyan A középpontú hasonlóságot, melynek során E' képe a CB egyenesen van $\rightarrow D$; E. Ha $\gamma \geq 60°$, akkor nincs megoldás.

1265. Legyen $AC = BC$ és a BC oldal felezőpontja F. A szerkesztés: ① $ABC\triangle$-höz hasonló $A'B'C'\triangle$-et szerkesztünk: *a)* F csúcsú φ szög felvétele $\rightarrow s$; *a*. *b)* F-ből tetszőleges egyenlő szakaszok felvétele *a*-ra $\rightarrow B'$; C'. *c)* C' középpontú, $C'B'$ sugarú kör: k. *d)* $k \cap s = A' \Rightarrow A'F = s'_a$. ② F középpontú $\frac{s_a}{s'_a}$ arányú középpontos hasonlóság $A'B'C'\triangle$-et $ABC\triangle$-be viszi. Egyértelmű a megoldás.

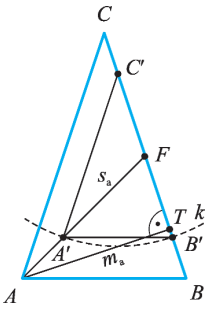
1266.



1266. 1. eset: Ha $s_c > m_c$, akkor a szerkesztés: ① $CTF\triangle$ szerkesztése m_c és s_c felhasználásával. ② A szerkesztendőhöz hasonló $A'B'C'\triangle$ szerkesztése úgy, hogy F az $A'B'$ felezéspontja legyen: *a)* F-ből tetszőleges egyenlő szakaszok felmérése FT egyenesre $\rightarrow A'$; B'. *b)* $A'B'$ γ szögű látószögköríve: k_γ.

I

1267.



c) $k_\gamma \cap e(F; C) = C'$. ③ F középpontú $\frac{m_c}{m_c'}$ arányú hasonlóság $A'B'C'\triangle$-et $ABC\triangle$-be viszi. **2. eset:** Ha $s_c = m_c$, akkor a háromszög egyenlő szárú. 0 vagy 1 megoldás lehet.

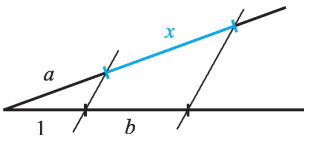
1267. A szerkesztés: ① $ATF\triangle$ szerkesztése m_a, $\sphericalangle$ és s_a felhasználásával. ② A szerkesztendőhöz hasonló $A'B'C'\triangle$ szerkesztése úgy, hogy F legyen a $B'C'$ szár felezéspontja: *a)* F-ből tetszőleges szakaszok felvétele FT egyenesére $\rightarrow B'$; C'. *b)* C' középpontú, $C'B'$ sugarú kör: k. *c)* $k \cap AF = A' \Rightarrow A'F = s_a'$. ③ F középpontú $\frac{s_a}{s_a'}$ arányú hasonlóság az $A'B'C'\triangle$-et az $ABC\triangle$-be viszi. Ha $s_a < m_a$, akkor nincs megoldás. Ha $s_a = m_a$, akkor a háromszög szabályos. Ha $s_a > m_a$, akkor a háromszög egyenlő szárú, de nem szabályos.

1268. Az *a)*; *b)*; *c)*; *d)*; *e)* és *f)* feladatrészekben egy tetszőleges szög szárait párhuzamos egyenesek metszik. Alkalmazzuk rájuk a párhuzamos szelők tételét! *a)* $ab = x \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{1}{b}$. *b)* $\frac{1}{a} = x \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{a}{1}$. *c)* $\frac{a}{b} = x \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{b}{a}$, egyik szögszáron b és a, másikon $1 \rightarrow x$. *d)* $a^2 = x \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{1}{a}$, egyik szögszáron 1 és a, másikon $a \rightarrow x$. *e)* $\frac{ab}{c} = x \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{c}{b}$, egyik szögszáron c és b, másikon $a \rightarrow x$. *f)* $\frac{a^2}{b} = x \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{a}$, egyik szögszáron b és a, másikon $a \rightarrow x$. *g)* Alkalmazzuk a magasságtételt az $a + 1$ átfogójú derékszögű $\triangle$-re. *h)* Alkalmazzuk a magasságtételt az $a + b$ átfogójú derékszögű $\triangle$-re.

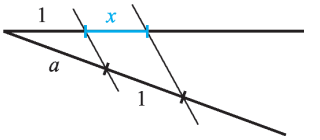
1269. Írjuk fel a háromszög területét háromféleképpen! $T = \frac{a \cdot m_a}{2} \Rightarrow m_a = \frac{2T}{a}$, hasonlóan $T = \frac{b \cdot m_b}{2} \Rightarrow m_b = \frac{2T}{b}$ és $T = \frac{c \cdot m_c}{2} \Rightarrow m_c = \frac{2T}{c}$. $m_a : m_b : m_c = \frac{2T}{a} : \frac{2T}{b} : \frac{2T}{c} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

1270. Felhasználjuk az 1269. feladat állítását: $m_a : m_b : m_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$. A szerkesztés: ① $ABC\triangle$-höz hasonló $A'B'C'\triangle$ szerkesztése: *a)* Tetszőleges $A'B' = c'$ szakasz felvétele. *b)* $\frac{1}{c'} : \frac{1}{a'} = m_c' : m_a' = m_c : m_a \Rightarrow \frac{m_c}{a'} = \frac{m_a}{c'} \rightarrow a'$ szakasz. *c)* $\frac{1}{c'} : \frac{1}{b'} = m_c' : m_b' = m_c : m_b \Rightarrow \frac{m_c}{b'} = \frac{m_b}{c'} \rightarrow b'$ szakasz. *d)* $A'B'C'\triangle$ megszerkesztése a', b', c' szakaszokból $\rightarrow m_a'$, m_b', m_c'. ② Alkalmazzunk $\frac{m_c}{m_c'}$ arányú hasonlóságot $A'B'C'\triangle$-re $\rightarrow ABC\triangle$. Nincs megoldás, ha $\frac{1}{m_a}$, $\frac{1}{m_b}$, $\frac{1}{m_c}$ szakaszokra nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

1268/I.



1268/II.



1271. Az 1269. feladatból tudjuk, hogy $m_a : m_b : m_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$. $\Rightarrow a : b : c = \frac{1}{m_a} : \frac{1}{m_b} : \frac{1}{m_c}$.

A szerkesztés: ① Tetszőleges K' szakaszt osszunk fel $\frac{1}{m_a} : \frac{1}{m_b} : \frac{1}{m_c}$ arányban $\rightarrow a', b', c'$ szakasz. ② Szerkesszünk háromszöget a', b', c' oldalakkal $\rightarrow A'B'C'\triangle$. ③ Adjuk meg $A'B'C'\triangle$ beírt körének sugarát: r'_0. ④ Alkalmazzunk $\frac{r_0}{r'_0}$ arányú hasonlóságot az $A'B'C'\triangle$-re $\rightarrow ABC\triangle$.

Nincs megoldás, ha $\frac{1}{m_a}, \frac{1}{m_b}, \frac{1}{m_c}$ szakaszokra nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

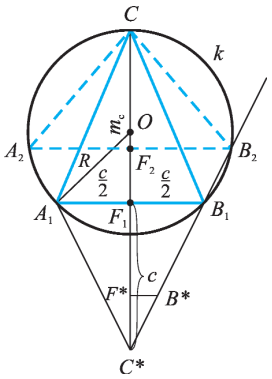
1272. Az 1269. feladatból tudjuk, hogy $m_a : m_b = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} \Rightarrow a : b = \frac{1}{m_a} : \frac{1}{m_b}$. A szerkesztés: ① Osszuk fel az $(a + b)$ szakaszt $\frac{1}{m_a} : \frac{1}{m_b}$ arányban $\rightarrow a, b$ szakasz. ② O középpontú, R sugarú kör: k. ③ k-ban közös C kezdőpontú a és b hosszúságú húrok felvétele $\rightarrow A$ és B. 0; 2 vagy 2-2 egybevágó megoldás lehet.

1273. A szerkesztés: ① O középpontú, R sugarú kör: k. ② Tetszőleges C pontból húzzunk átmérőt és mérjük rá az egyenesére a $(c + m_c)$ szakaszt $\rightarrow C^*$. ③ C^*FB derékszögű háromszögben $C^*F : FB = c : \frac{c}{2} = 2 : 1$, ezért $C^*F^*B^*$ derékszögű háromszög szerkesztése $C^*F^* : F^*B^* = 2 : 1$ arányú befogókkal. ④ C^* középpontú hasonlóságot alkalmazunk a $C^*F^*B^*\triangle$-re úgy, hogy B^* képe a k körön legyen $\rightarrow B_1; B_2$. ⑤ B_1-et, B_2-t tükrözzük CC^*-ra $\rightarrow A_1; A_2$. 2 megoldás van, ha C^* a kör külső vagy belső pontja. 1 megoldás van, ha C^* a kör pontja.

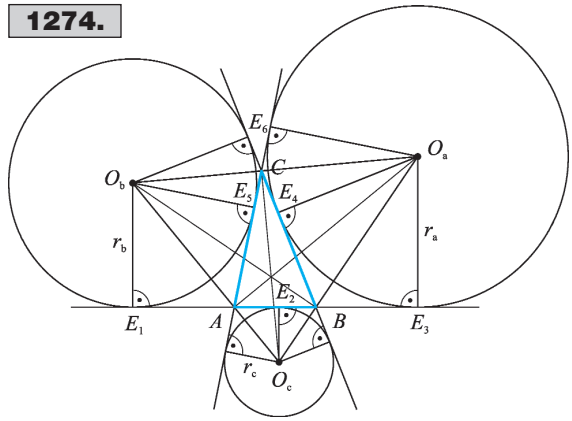
1274. Felhasználjuk: Az $AE_2O_c\triangle \sim AE_1O_b\triangle$, mert mindkettő derékszögű és A-nál lévő szögeik csúcsszögek. $AE_2 = s - b$; $AE_1 = s - c$, ahol $s = (a + b + c) : 2$. Ezt a hasonlóságnál felhasználva $\lambda = \frac{AE_2}{AE_1} = \frac{E_2O_c}{E_1O_b}$, azaz $\frac{s-b}{s-c} = \frac{r_c}{r_b}$. Hasonlóan belátható, hogy $\frac{s-b}{s-a} = \frac{r_a}{r_b}$ és $\frac{s-a}{s-c} = \frac{r_c}{r_a}$.

A szerkesztés: ① Felveszünk egy tetszőleges $(s' - a')$ szakaszt. ② $\frac{r_b}{r_a} = \frac{s'-a'}{s'-b'}$ arányt felhasználva negyedik arányos szerkesztésével $(s' - b')$ megszerkesztése. ③ $s' - a' + s' - b' = c'$ oldal

1273.

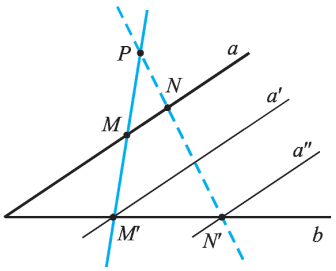


1274.

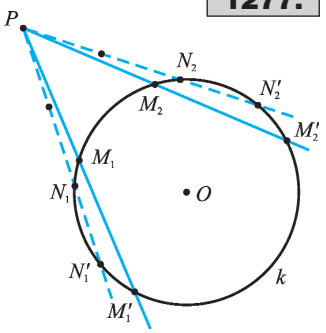


I

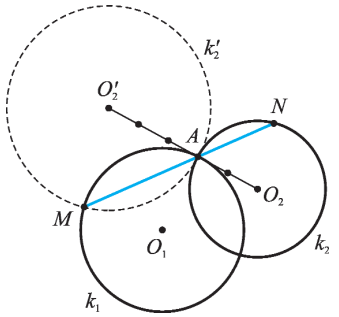
1276.



1277.



1278.



a fenti két szakasz összege. ④ Hasonlóan juthatunk az a' és b' szakaszokhoz is. ⑤ $a'; b'; c' \to$ $\to A'B'C'\triangle$. ⑥ $A'B'C'\triangle$ hasonló a szerkesztendőhöz, pl. $\frac{r_c}{r_c'}$ arányú középpontos hasonlósággal $ABC\triangle$-höz jutunk. 0 vagy 1 megoldás lehet.

1275. Legyen az átlók metszéspontja M, az adott szögek $MCB\sphericalangle = \varphi$ és $MBC\sphericalangle = \varepsilon$. A szerkesztés: ① Szerkesszünk egy $M'B'C'\triangle$-et ε; φ szögekkel. ② $ABM\triangle \sim CDM\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda = \frac{a}{c} = \frac{BM}{DM} = \frac{AM}{CM} \Rightarrow DM = \frac{c}{a} \cdot BM$ és $AM = \frac{a}{c} \cdot CM$. ③ Alkalmazzunk B'-re M' középpontú $\left(-\frac{c}{a}\right)$ arányú hasonlóságot $\to D'$. ④ Alkalmazzunk C'-re M' középpontú $\left(-\frac{a}{c}\right)$ arányú hasonlóságot $\to A'$. ⑤ $A'B'C'D'$ trapéz hasonló a szerkesztendő trapézhoz, mert részháromszögeik hasonlók. ⑥ Alkalmazzunk $A'B'C'D'$ trapézra $\frac{c}{c'}$ arányú hasonlóságot $\to ABCD$ trapéz. Egyértelmű a megoldás.

1276. A szerkesztés: *a)* $PM = MM' \Rightarrow 2PM = PM'$. Alkalmazzunk P középpontú $\lambda_1 = 2$ arányú hasonlóságot a-ra $\to a'$. $a' \cap b = M'$, $M'P$ a keresett egyenes. *b)* $2PN = NN' \Rightarrow PN' = 3PN$. Alkalmazzunk P középpontú $\lambda_2 = 3$ arányú hasonlóságot a-ra $\to a''$. $a'' \cap b = N'$, $N'P$ a keresett egyenes. Egyértelmű a megoldás.

1277. A szerkesztés: *a)* $PM = MM' \Rightarrow 2PM = PM'$. Alkalmazzunk a k körre P középpontú $\lambda_1 = 2$ arányú hasonlóságot $\to k'$. $k' \cap k = M'$, $M'P$ egyenes a keresett szelő. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet. *b)* $PN = 2NN' \Rightarrow PN' = \frac{3}{2}PN$. Alkalmazzunk a k körre P középpontú $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ arányú hasonlóságot $\to k''$. $k'' \cap k = N'$, $N'P$ egyenes a keresett szelő. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

1278. **1. eset:** 3 egységnyi húr a k_1 körben, 2 egységnyi húr a k_2-ben, A elválasztja M-et és N-et. $MA : AN = 3 : 2 \Rightarrow AM = \frac{3}{2}AN$. A szerkesztés: ① Alkalmazzunk A középpontú $\lambda = -\frac{3}{2}$ arányú hasonlóságot a k_2 körre $\to k_2'$. ② $k_2' \cap k_1 = M$. ③ MA egyenes metszi ki a körökből a keresett húrokat.

2. eset: 2 egységnyi húr a k_1 körben, 3 egységnyi húr a k_2-ben, A elválasztja M-et és N-et. $MA : AN = 2 : 3 \Rightarrow AM = \frac{2}{3}AN \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$.

3. eset: 3 egységnyi húr a k_1 körben, 2 egységnyi húr a k_2-ben, A nem választja el M-et és N-et. $MA : AN = 3 : 2 \Rightarrow AM = \frac{3}{2}AN \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}$.

4. eset: 2 egységnyi húr a k_1 körben, 3 egységnyi húr a k_2-ben, A nem választja el M-et és N-et. $MA : AN = 2 : 3 \Rightarrow AM = \frac{2}{3}AN \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$. 4 megoldás van.

1279. Adott: k; OA; OB. A szerkesztés: ① Osszuk fel az AB szakaszt három egyenlő részre $\rightarrow H_1; H_2$. ② Alkalmazzunk O középpontú hasonlóságot az AB húrra úgy, hogy H_1 és H_2 képe a körvonalon legyen. ③ $A'A = B'B$-vel kell meghosszabbítani az r_1 és r_2 sugarakat. Megjegyzés: ha AB átmérő, akkor mindkét irányban saját hosszával kell meghosszabbítani, hogy a feltételnek eleget tevő szelőhöz jussunk. Egyértelmű a megoldás.

1280. Adott: k; OA; OB. A szerkesztés: ① Hosszabbítsuk meg az AB húrt saját hosszával mindkét irányban $\rightarrow C$ és D. ② $OC \cap k = C'$ és $OD \cap k = D'$. ③ O középpontú $\frac{OC'}{OC}$ arányú hasonlóság DC-t a vele párhuzamos $D'C'$-be viszi, és a középpontos hasonlóság aránytartása miatt $D'A' = A'B' = B'C'$. Ha AB átmérő, akkor nincs megoldás, egyébként egyértelmű a $C'D'$ húr.

1281. Felhasználjuk: $BOA\sphericalangle = AOP\sphericalangle \Rightarrow OA$ szögfelező a $BOP\triangle$-ben. A szögfelezőtétel miatt $BA : AP = OB : OP$, azaz $BA : AP = r : p \Rightarrow \frac{BP}{AP} = \frac{BA + AP}{AP} = \frac{BA}{AP} + 1 = \frac{r}{p} + 1 = \frac{r+p}{p}$.
A szerkesztés: ① Alkalmazzunk P középpontú $\frac{r+p}{p}$ arányú hasonlóságot a k körre $\rightarrow k'$. ② $k' \cap k = B$. ③ BP a keresett szelő. 2 megoldás van.

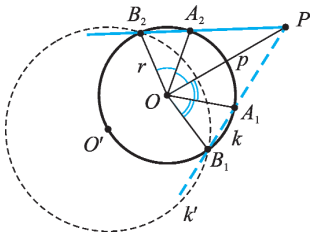
1282. Felhasználjuk: l_i kör E_i középpontú hasonlósággal k_1 körbe vihető. Ekkor L_i képe O_1; P képe A_i és $L_iP \parallel O_1A_i$, valamint O_2; P és L_i egy egyenesen vannak. A szerkesztés: ① O_1-en át párhuzamos O_2P-vel $\rightarrow g$. ② $g \cap k_1 = \{A_1; A_2\}$. ③ $A_iP \cap k_1 = E_i$. ④ $E_iO_1 \cap O_2P = L_i$. ⑤ L_i középpontú, L_iP sugarú kör $\rightarrow l_i$. Két megoldás van.

1283. Adott: A; c; s; C ($A \in c$ és $A \in s$). Felhasználjuk: $CF = FB \Rightarrow CB = 2CF$. A szerkesztés: ① Alkalmazzunk C középpontú $\lambda = 2$ arányú hasonlóságot s-re $\rightarrow s'$. ② $s' \cap c = B$. Egyértelmű a megoldás.

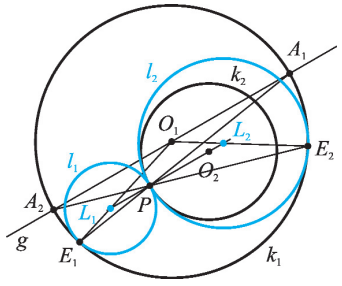
1284. Adott: A; B; s; γ ($A \in s$). Felhasználjuk: $BF = FC \Rightarrow BC = 2BF$. A szerkesztés: ① AB γ szögű látószögköríve: k. ② B középpontú $\lambda = 2$ arányú hasonlóság s egyenesre $\rightarrow s'$. ③ $s' \cap k = C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

1285. Az $ABC\triangle$ S súlypontja a C pont F középpontú $\lambda = \frac{1}{3}$ arányú kicsinyített képe, ahol F az AB felezőpontja. Az AB fölé rajzolt háromszögek súlypontjai a k kör F középpontú $\lambda = \frac{1}{3}$

1281.

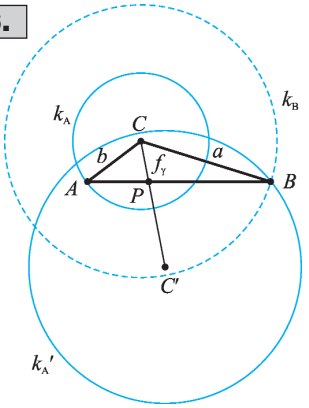


1282.

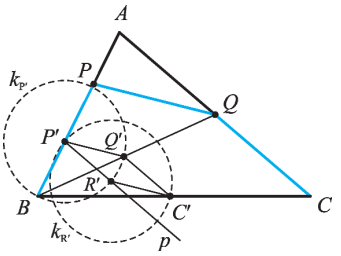


I

1286.



1287.



arányú k' kicsinyített képén vannak rajta. A k' kör A'-től és B'-től különböző minden S pontja megfelel egy k körülírt körű $ABC\triangle$-nek, hiszen F középpontú $\lambda' = 3$ arányú hasonlósággal S pont képe k-ra kerül. A keresett ponthalmaz tehát a k' kör az AB húrra eső A' és B' pontok kivételével.

1286. Felhasználjuk: A szögfelezőtétel szerint $PA : PB = b : a \Rightarrow PB = \frac{a}{b} \cdot PA$. A szerkesztés: ① $CP = f_\gamma$ szakasz felvétele. ② C középpontú, a sugarú kör: k_B. C középpontú, b sugarú kör: k_A. ③ Alkalmazzunk P középpontú $\lambda = -\frac{a}{b}$ arányú hasonlóságot a k_A körre. Ennél a hasonlóságnál A képe B, így $A \in k_A$-ból $B \in k_A'$ következik. ④ $k_A' \cap k_B = B$. ⑤ $BP \cap k_A = A$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

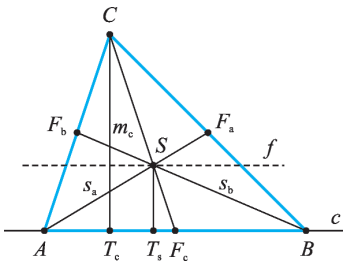
1287. Induljunk ki a kész ábrából! Jelölje $P \in AB$ az első, $Q \in AC$ a második elágazást! A feltétel szerint $BP = PQ = QC$. Induljunk ki a szerkesztendőhöz hasonló $BP'Q'C'$ töröttvonalból! Húzzunk párhuzamost P'-n át $Q'C'$-vel, azaz AC-vel és vegyünk fel rajta $P'R' = Q'C' (= P'Q' = = P'B)$ szakaszt. Ekkor $P'R'C'Q'$ rombuszhoz jutunk. A $BP'R'C'$ töröttvonal megszerkeszthető: ① P'-n át párhuzamost húzunk AC-vel $\rightarrow p$. ② P' középpontú, $P'B$ sugarú kör: $k_{P'}$. ③ $k_{P'} \cap p = = R'$. ④ R' középpontú, $P'B$ sugarú kör: $k_{R'}$. ⑤ $k_{R'} \cap BC = C'$. ⑥ P'-n át párhuzamos $R'C'$-vel, majd ennek $k_{P'}$-vel való metszete Q'. ⑦ B középpontú hasonlóságot alkalmazunk a $BP'Q'C'$ töröttvonalra úgy, hogy Q' képe AC-n legyen. B helyzete miatt P' képe P AB-n lesz, $Q'C' \parallel AC$ miatt C' képe C lesz, és a hasonlóság aránytartása miatt $BP = PQ = QC$. Egyértelmű a megoldás.

1288. *a)* Felhasználjuk: F felezi BC-t, ezért a B középpontú $\lambda = 2$ arányú hasonlóságnál F képe C. A szerkesztés: ① $AB = c$ szakasz felvétele. ② AB γ szögű látószögköríve: k_γ. ③ A középpontú, s_a sugarú kör: k_A. ④ k_A kör B középpontú $\lambda = 2$ arányú hasonló képe: k_A' ⑤ $k_A' \cap k_\gamma = C$. 0 vagy 2 egybevágó megoldás lehet.

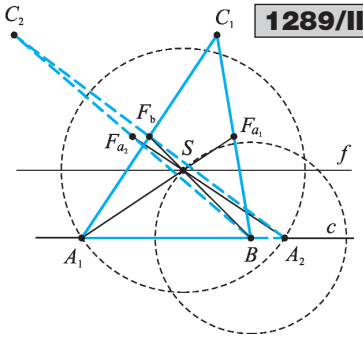
b) Felhasználjuk: F felezi BC-t, ezért a B középpontú $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú hasonlóságnál C képe F. A szerkesztés: ① $AB = c$ szakasz felvétele. ② A-ban α szög felvétele AB-re $\rightarrow e$. ③ B középpontú $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú hasonlóságnál e képe e'. ④ A középpontú, s_a sugarú kör: k_A. ⑤ $k_A \cap e' = F$. ⑥ B-t tükrözzük F-re: C. Egyértelmű a megoldás, ha $s_a > c/2$. 0; 1 vagy 2 megoldást kaphatunk, ha $s_a < c/2$. Nincs megoldás, ha $s_a = c/2$.

c) Felhasználjuk: B_1 pontból az AB szakasz 90° alatt látszik, tehát B_1 rajta van az AB Thalész körén. F felezi BC-t, ezért a B középpontú $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú hasonlóságnál C képe F. A szerkesztés:

1289/I.



1289/II.

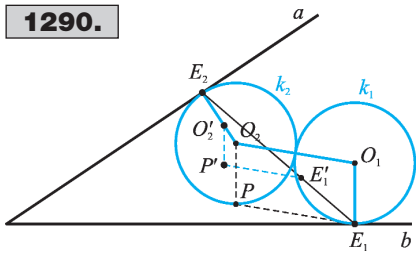


① $AB = c$ szakasz felvétele. ② AB Thalész köre: k_T. ③ B középpontú, m_b sugarú kör: k_B. ④ $k_T \cap k_B = B_1$, AB_1 egyenese f. ⑤ B középpontú $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú hasonlóságnál f képe f'. ⑥ A középpontú, s_a sugarú kör: k_A. ⑦ $k_A \cap f' = F$. ⑧ e$(B; F) \cap f = C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

1289. Felhasználjuk: I. S a CF_c szakasz C-től távolabbi harmadolópontja.

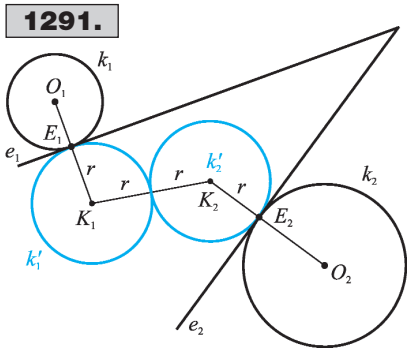
II. $ST_SF_c\triangle \sim CT_cF_c\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. III. $\lambda = \frac{1}{3}$ a hasonlósági arány $\Rightarrow ST_S = \frac{1}{3}m_c$ az $ABS\triangle$ AB-hez tartozó magassága. A szerkesztés: ① $\frac{2}{3}s_a$; $\frac{2}{3}s_b$; $\frac{1}{3}m_c \rightarrow ABS\triangle$. ② AS-re S-ből A-val ellentétes oldalra $\frac{1}{3}s_a \rightarrow F_a$. ③ B-t tükrözzük F_a-ra $\rightarrow C$. Nincs megoldás, ha $\frac{2}{3}s_b \leq \frac{1}{3}m_c$ vagy ha $\frac{2}{3}s_a \leq \frac{1}{3}m_c$. Egy megoldás van, ha $\frac{2}{3}s_b = \frac{2}{3}s_a > \frac{1}{3}m_c$. Két megoldás van, ha $\frac{2}{3}s_b > \frac{1}{3}m_c$ vagy $\frac{2}{3}s_a > \frac{1}{3}m_c$ és $s_b \neq s_a$.

1290.



1290. Induljunk ki a kész ábrából! Az $E_2O_2O_1E_1$ töröttvonal szakaszai $E_2O_2 = r$, $O_2O_1 = 2r$, $O_1E_1 = r$ hosszúak, arányuk 1 : 2 : 1 Húzzunk párhuzamost O_2-n át O_1E_1-gyel, és vegyünk fel rá r szakaszt $\rightarrow P$. $O_2PE_1O_1$ paralelogramma, tehát $PE_1 = 2r$. Az $E_2O_2PE_1$ töröttvonal szakaszai $E_2O_2 = r$ és $E_2O_2 \perp a$, $O_2P = r$ és $O_2P \parallel O_1E_1 \perp b$, $PE_1 = 2r$. Ehhez a töröttvonalhoz hasonlót szerkeszthetünk az E_2 pontból kiindulva: ① E_2-ben a-ra állított merőlegesen tetszőleges O_2' pont. ② O_2'-ből merőleges b-re, majd erre E_2O_2' hosszú szakasz felvétele $\rightarrow P'$. ③ P' középpontú $2E_2O_2'$ sugarú kör: $k_{P'}$. ④ $k_{P'} \cap E_1E_2 = E_1'$. ⑤ E_2 középpontú hasonlóságot alkalmazunk az $E_2O_2'P'E_1'$ töröttvonalra úgy, hogy E_1' képe E_1 legyen $\rightarrow E_2O_2PE_1$. ⑥ E_1-ben merőleges b-re és O_2-ben párhuzamos PE_1-gyel, ezek metszéspontja O_1. Egyértelmű a megoldás.

1291.



1291. 1. eset: O_1, E_1, O_2, E_2 nincsenek egy egyenesen. Induljunk ki a kész ábrából! k_1 E_1-ben érinti k_1'-t, ha E_1-ben közös az érintőjük: e_1. Hasonlóan k_2 és k_2'

I

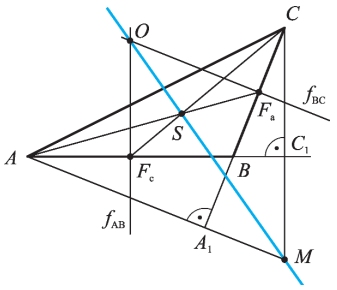
köröknek E_2-ben közös az érintője: e_2. Olyan köröket keresünk, amelyek az e_1 egyenest az E_1 pontban, az e_2 egyenest az E_2 pontban érintik, és a sugaruk egyenlő. Ennek a problémának a megoldása az 1290. feladatban megtalálható.

2. eset: O_1, E_1, O_2, E_2 egy egyenesen vannak. E_1E_2 szakasz E_1-hez, illetve E_2-höz közelebbi negyedelőpontjai adják a keresett körök középpontját. Egyértelmű a megoldás.

Euler-egyenes, Feuerbach-kör, Simson-egyenes, Apollonius-kör

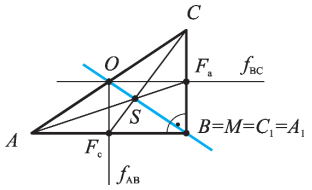
1292. Legyen F_a a BC, F_b az AC és F_c az AB oldal felezéspontja. $ABC\triangle \sim F_aF_bF_c\triangle$, mert oldalaik páronként párhuzamosak, szögeik váltószögek, $\lambda = 2$. CF_c, AF_a, BF_b a háromszög súlyvonalai, melyek az S súlypontban metszik egymást. Az S középpontú $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú hasonlóság C-t F_c-be, B-t F_b-be, A-t F_a-ba viszi, mivel a súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja. Tehát a hasonlóság középpontja a súlypont.

1293/I.



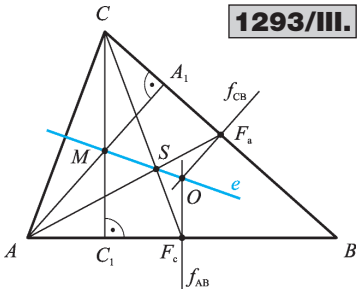
1293. Tekintsük az S középpontú, $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot! Mivel a súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja, a fenti hasonlóságnál: F_c képe C; F_c-n átmenő, AB-re merőleges f_{AB} képe C-n átmenő, vele párhuzamos, tehát AB-re merőleges egyenes: CC_1. F_a képe A; F_a-n átmenő, CB-re merőleges f_{CB} képe A-n átmenő, vele párhuzamos, tehát CB-re merőleges egyenes: AA_1. A fentiekből következik, hogy $f_{AB} \cap f_{CB} = O$; az O képe $e(C; C_1) \cap e(A; A_1) = M$. Ha az S középpontú $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú hasonlóság O-t M-be viszi, akkor $S \in OM$ és $2OS = OM$.

1293/II.

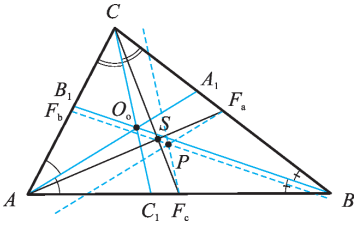


1294. Tekintsük az S középpontú, $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot! Mivel a súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja, a fenti hasonlóságnál C képe F_c; a C-n átmenő CC_1 szögfelező képe az F_c-n átmenő, CC_1-gyel párhuzamos egyenes. Hasonlóan megmutatható, hogy BB_1 képe az F_b-n átmenő, BB_1-gyel párhuzamos egyenes, AA_1 képe az F_a-n átmenő, AA_1-gyel párhuzamos egyenes. Az egy ponton átmenő egyenesek képei is egy ponton mennek át, így az egymást O_0-ban metsző AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek képei is, ami a bizonyítandó állítás volt.

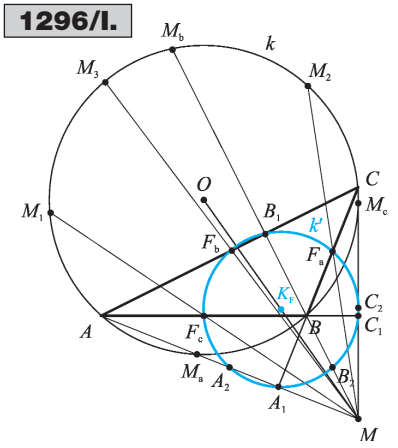
1293/III.



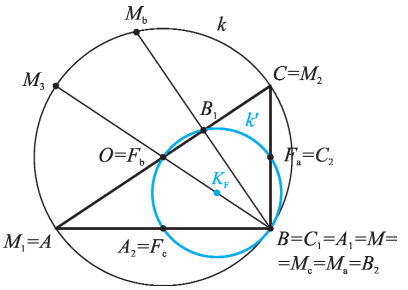
1294.



1296/I.

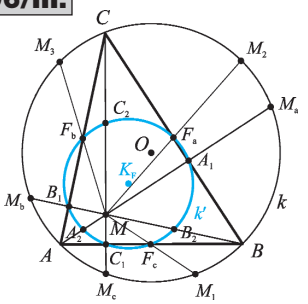


1296/II.



1295. Felhasználjuk: A súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja. A súlypont az MO szakasz O-hoz közelebbi harmadolópontja (M magasságpont, O a körülírt kör középpontja) → lásd az 1293. feladatot az Euler-egyenesről. A szerkesztés: ① Alkalmazzuk az S középpontú, $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot! M képe O; A képe F_a. ② AM egyenes az A-ból induló magasságvonal. ③ F_a-ból merőlegest állítunk AM egyenesre: a oldal egyenese, f. ④ O középpontú, OA sugarú kör a háromszög körülírt köre: k. ⑤ $k \cap f = \{ C; B \}$. 0 vagy 1 megoldás van.

1296/III.



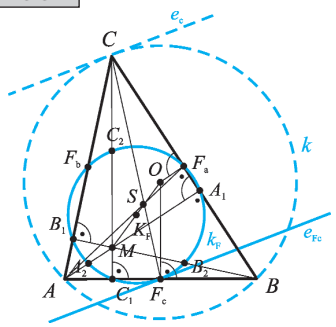
1296. Felhasználjuk: A magasságpont oldalegyenesekre vonatkozó tükörképe a háromszög körülírt körén van. A magasságpont oldalfelezéspontokra vonatkozó tükörképe a háromszög körülírt körén van. Alkalmazzunk M középpontú, $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot! C_1 felezi M_cM-et, tehát M_c képe C_1. A_1 felezi M_aM-et, tehát M_a képe A_1. B_1 felezi M_bM-et, tehát M_b képe B_1. F_b felezi M_3M-et, tehát M_3 képe F_b. F_c felezi M_1M-et, tehát M_1 képe F_c. F_a felezi M_2M-et, tehát M_2 képe F_a. C_1, A_1, B_1, F_b, F_c, F_a rajta vannak a k körülírt kör k' képén, melynek sugara $\frac{1}{2}R$, középpontja pedig az MO szakasz felezéspontja. Ugyanezen a körön vannak a feles kicsinyítés miatt a CM szakasz C_2, az AM szakasz A_2 és BM szakasz B_2 felezéspontjai is. Megjegyzés: a Feuerbach-kör középpontja MO felezéspontja, ezért rajta van a háromszög Euler-egyenesén.

1297. A szóban forgó négy háromszög: $ABM\triangle$, $BCM\triangle$, $CAM\triangle$, $ABC\triangle$. A négy háromszög magasságtalppontjai megegyeznek: A_1; B_1; C_1. Három nem egy egyenesen lévő pont egyértelműen meghatározza a saját körét, így a fenti talppontok is a háromszögek Feuerbach körét (lásd az 1296. feladatot). Tehát az állítás igaz.

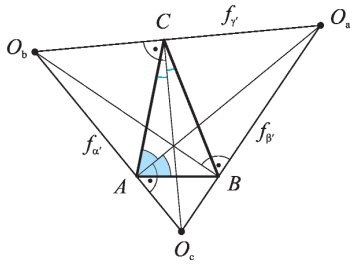
1298. A Feuerbach-kör középpontja rajta van a háromszög Euler egyenesén (MO felezéspontja), és a négy háromszög Feuerbach köre megegyezik. ⇒ A négy háromszög Euler egyenesei egy ponton mennek át, a közös Feuerbach-kör középpontján.

I

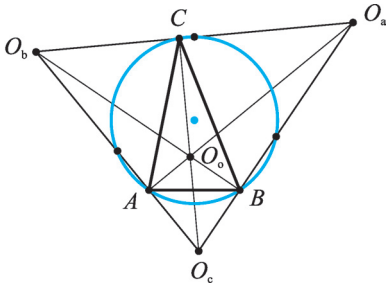
1299.



1300.



1301.



1299. Az 1293. feladatban láttuk, hogy az S súlypont az MO szakasznak $2:1$ arányú osztópontja. $\Rightarrow$ $\Rightarrow SO = \frac{1}{3}MO$. Az 1296. feladatban láttuk, hogy a Feuerbach-kör K_F középpontja felezi az MO szakaszt. $\Rightarrow$ $\Rightarrow K_FO = \frac{1}{2}MO$. Az aláhúzottakból következik, hogy $K_FS = K_FO - SO = \frac{1}{2}MO - \frac{1}{3}MO = \frac{1}{6}MO$, vagyis S a K_FO szakasz $1:2$ arányú osztópontja. Alkalmazzunk S középpontú, $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot! Ennek során O képe K_F, k képe k_F, C képe F_c, e_c képe e_{F_c}. Ha e_c érinti k-t C-ben, akkor e_{F_c} érinti k_F-et F_c-ben. A középpontos hasonlóságnál a középponton át nem menő egyenes és képe párhuzamosak, tehát $e_c \parallel e_{F_c}$.

1300. Felhasználjuk: A hozzáírt kör középpontja két külső és egy belső szögfelező metszéspontja. A háromszög ugyanazon csúcshoz tartozó külső és belső szögfelezői az $ABC\triangle$ belső szögfelezői merőleges egymásra. Az $ABC\triangle$ belső szögfelezői az $O_aO_bO_c$ magasságvonalai; A, B és C a magasságtalppontok. Az 1296. feladat szerint a magasságtalppontok az ún. Feuerbach-körön vannak, ami a háromszög körülírt körének feles kicsinyítése. Az $ABC\triangle$ körülírt köre az $O_aO_bO_c\triangle$ Feuerbach köre, tehát valóban igaz, hogy $O_aO_bO_c\triangle$ körülírt körének sugara kétszerese az $ABC\triangle$ köré írt kör sugarának.

1301. Az 1300. feladatban láttuk, hogy az $O_aO_bO_c\triangle$ Feuerbach köre az $ABC\triangle$ körülírt köre. A, B, C pontok a Feuerbach-kör 9 pontja közül a magasságtalppontok. Rajtuk kívül rajta vannak az $O_aO_bO_c\triangle$ oldalfelezéspontjai is, tehát igaz, hogy az $ABC\triangle$ körülírt köre felezi az $O_aO_bO_c\triangle$ oldalait (átmegy annak felezéspontjain). A beírt kör középpontját bármelyik hozzáírt kör középpontjával összekötő szakasz felezőpontja is a körülírt körön van. Így az $O_aO_bO_c\triangle$ Feuerbach-körének mind a kilenc kitüntetett pontját megkaptuk.

1302. Az 1300. feladatban láttuk, hogy az $O_aO_bO_c\triangle$ Feuerbach köre az $ABC\triangle$ körülírt köre. Az $ABC\triangle$ belső szögfelezői az $O_aO_bO_c\triangle$ magasságvonalai. Az $O_aO_bO_c\triangle$-ben tehát K a körülírt kör középpontja, O a Feuerbach-kör középpontja, O_0 a magasságpontja. Az 1296. feladatban láttuk, hogy a Feuerbach-kör középpontja felezi a magasságpont és a körülírt kör középpontja közti szakaszt, azaz O felezi KO_0-t, tehát K, O_0 és O egy egyenesen vannak. Megjegyzés: ez az egyenes az $O_aO_bO_c\triangle$ Euler egyenese.

1303. Felhasználjuk: Az $O_aO_bO_c\triangle$ magasságvonalai az $ABC\triangle$ belső szögfelezői; A, B és C a magasságtalppontok. O_0 az $O_aO_bO_c\triangle$ magasságpontja. A szerkesztés: ① Az O_a, O_b, O_c, O_0 pontok által meghatározott háromszögek közül bármelyiknek a kimaradó negyedik csúcs a magasságpontja. Eszerint bármely három ismeretében a negyedik megadható. ② $O_aO_bO_c\triangle$ magasságtalppontjai A, B, és C. 0 vagy 1 megoldás lehet.

1304. *a)* Felhasználjuk: Az $ABC\triangle$ körülírt köre az $O_aO_bO_c\triangle$ Feuerbach köre, ezért átmegy az $O_aO_bO_c\triangle$ oldalfelezéspontjain és magasságtalppontjain. Az $ABC\triangle$ belső szögfelezői az $O_aO_bO_c\triangle$ magasságvonalai, A, B és C a magasságtalppontok. A szerkesztés: ① O_aO_c szakasz felezéspontja: F. ② O középpontú, OF sugarú kör: k ($ABC\triangle$ körülírt köre vagy az $O_aO_bO_c\triangle$ Feuerbach köre). ③ $k \cap e(O_a; O_c) = B$ (magasságtalppont $e(O_a; O_c)$-n). ④ O_aO_c Thalész köre: k_T. ⑤ $k_T \cap k = \{A; C\}$ (magasságtalppontok $e(O_b; O_c)$-n, ill. $e(O_b; O_a)$-n). 0 vagy 1 megoldás lehet.

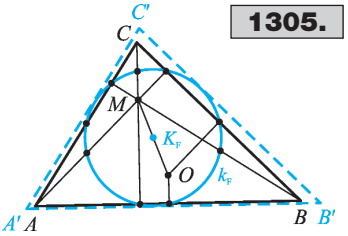
b) Felhasználjuk: Az $ABC\triangle$ körülírt köre az $O_aO_bO_c\triangle$ Feuerbach köre. Az $ABC\triangle$ belső szögfelezői az $O_aO_bO_c\triangle$ magasságvonalai, A, B és C a magasságtalppontok. A magasságpont és egy csúcs közti szakasz felezéspontja rajta van a Feuerbach-körön. A szerkesztés: ① O_0O_c szakasz felezéspontja: F. ② O középpontú, OF sugarú kör: k. ③ O_0O_c Thalész köre: k_T. ④ $k_T \cap k = \{A; B\}$. ⑤ $k \cap e(O_0; O_c) = C$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

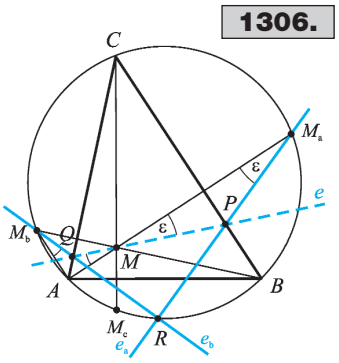
1305. Legyen r_0 az $ABC\triangle$ beírt körének, r_F a Feuerbach körének, R a körülírt körének sugara! Nagyítsuk fel úgy az $ABC\triangle$-et, hogy oldalai érintsék az $ABC\triangle$ Feuerbach körét $\rightarrow A'B'C'\triangle$. Nagyításról lévén szó $r_0 \le r_0'$, $r_F \le r_F'$ és $R \le R'$. Az $ABC\triangle$ Feuerbach köre az $A'B'C'\triangle$ beírt köre,

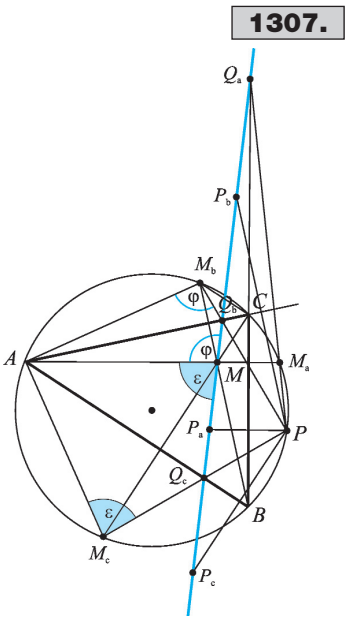
és az 1296. feladatban láttuk, hogy $r_F = \dfrac{R}{2}$, ezért $r_0 \le r_0' = r_F = \dfrac{R}{2}$. $\Rightarrow r_0 \le \dfrac{R}{2}$.

1306. Felhasználjuk: A magasságpont oldalegyenesekre vonatkozó tükörképe a háromszög körülírt körén van. Elég belátni, hogy bármely két tükörkép metszéspontja a körülírt körön van, hiszen a tükörkép egyenesnek a körrel való egyik metszéspontja a magasságpont megfelelő tükörképe, másik metszéspont pedig csak egy van, így nem lehet az egyik tükörképpel a kör egyik, a másik tükörképpel a kör másik pontja. Legyen $e \cap e(C; B) = P$ és $e \cap e(C; A) = Q$, az e tükörképei e_a és e_b. A tükrözés miatt $M_aMP\sphericalangle = MM_aP\sphericalangle = \varepsilon$. $QMA\sphericalangle$ és $M_aMP\sphericalangle$ csúcsszögek, így $QMA\sphericalangle = \varepsilon$. A tükrözés miatt $QMA\sphericalangle = QM_bA\sphericalangle = \varepsilon$. Legyen $e_a \cap e_b = R$! $AM_bR\sphericalangle = AM_aR\sphericalangle = \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy AR az M_a és M_b pontokból egyenlő szögek alatt látszik. $\Rightarrow M_a$ és M_b rajta vannak AR látószögkörívén. Mivel A, M_a és M_b meghatározzák a körüket, az $ABC\triangle$ körülírt körét, így R is ezen a körön van. $\Rightarrow e_a$ és e_b a körülírt körön metszik egymást. Megjegyzés: általában igaz, hogy A, M_a, R és M_b egy körön vannak, mert vagy $AM_bR\sphericalangle = AM_aR\sphericalangle$, vagy $AM_bR\sphericalangle + AM_aR\sphericalangle = 180°$.

1307. M magasságpont tükörképei az oldalegyenesekre M_a; M_b; M_c, amelyek az $ABC\triangle$ körülírt körén találhatók. P tükörképei az oldalegyenesekre P_a; P_b; P_c. PM_b egyenesnek az AC egyenesre vonatkozó tükörképe P_bM, ezért e két egyenes az AC egyenesen metszi egymást. $\Rightarrow$

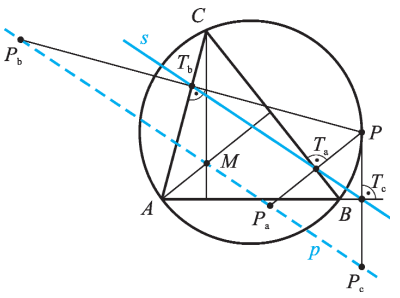




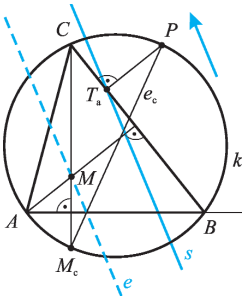


I

1308.



1309.



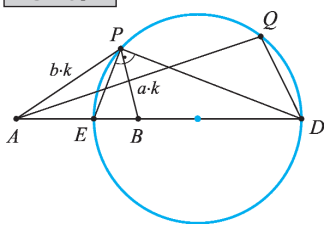
$\Rightarrow PM_b \cap AC = Q_b$ e két egyenesnek a tükörtengelyen levő metszéspontja $\Rightarrow P_b \in e(M; Q_b)$. Hasonlóan megmutatható, hogy $P_c \in e(M; Q_c)$. A tengelyes szimmetria miatt $Q_bM_bA\sphericalangle = Q_bMA\sphericalangle = \varphi$, valamint $Q_cM_cA\sphericalangle = Q_cMA\sphericalangle = \varepsilon$. PM_bAM_c húrnégyszög, ezért $\varphi + \varepsilon = 180° \Rightarrow Q_c; M; Q_b$ egy egyenesen vannak $\Rightarrow P_c; M; P_b$ egy egyenesen vannak. Hasonlóan igazolható, hogy a PM_a és BC egyenesek Q_a metszéspontja és egyúttal a P_a tükörkép is az M ponton átmenő $P_cM\,P_b$ egyenesre illeszkedik.

1308. Az 1307. feladatban láttuk, hogy a P pontnak a, b és c oldalegyenesekre vonatkozó P_a, P_b, P_c tükörképei magasságponton átmenő egyenesen vannak. A tükrözésnél a tükörtengely merőlegesen felezi a pontot a képével összekötő szakaszt, így $PP_a = 2PT_a$; $PP_b = 2PT_b$ és $PP_c = 2PT_c$ miatt a P középpontú $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóság P_a-t T_a-ba, P_b-t T_b-be és P_c-t T_c-be viszi. Mivel P_a, P_b és P_c egy egyenesen voltak, így a képek is egy egyenesen lesznek, méghozzá az M-en átmenő egyenes P középpontú feles kicsinyített képén.

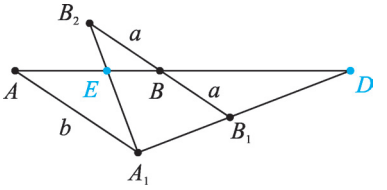
1309. Felhasználjuk: A magasságponton átmenő egyenes oldalegyenesekre vonatkozó tükörképei a körülírt kör egy pontjában metszik egymást. A körülírt kör P pontjából az oldalegyenesekre állított merőlegesek talppontjai egy egyenesen vannak, ami párhuzamos a P-hez tartozó M-en átmenő egyenessel. A szerkesztés: ① M-en át párhuzamos az adott iránnyal: e. ② e-t tükrözzük a c oldalegyenesre: e_c. ③ $e_c \cap k = P$. ④ P-ből merőlegest állítunk CB-re $\rightarrow T_a$. ⑤ T_a-n át párhuzamos e-vel: s. A fentiek miatt s az $ABC\triangle$ adott irányú Simson egyenese.

1310. Tegyük fel, hogy a P pont megfelel a feltételeknek: $PA : PB = \frac{b}{a}$, ami egy 1-től különböző állandó. A belső szögfelezőre vonatkozó tétel miatt $AE : EB = b : a$, a külső szögfelezőre vonatkozó tétel miatt $AD : DB = b : a$. Az egy csúcsból induló belső és külső szögfelező merőleges egymásra, tehát $EPD\sphericalangle = 90° \Rightarrow P$ rajta van az ED szakasz Thalész körén. Az ED átmérőjű kör minden pontja megfelelő. Legyen Q a Thalész-kör egy tetszőleges pontja. Szerkesszük meg az $XY = \frac{a}{b} \cdot AQ$ szakaszt. Ha AB, AQ és XY szakaszokból lehet háromszöget szerkeszteni,

1310/I.



1310/II.



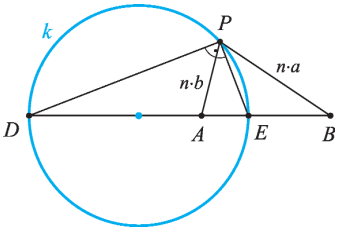
akkor készen vagyunk, mert vagy az $AQB\triangle$-ről, vagy ennek AB-re vonatkozó tengelyes tükörképéről van szó. Meg kell tehát mutatni, hogy $\frac{a}{b}\cdot AQ + AQ > AB$ és $\left|\frac{a}{b}\cdot AQ - AQ\right| < AB$. Az A középpontú, AE sugarú kör E-ben érinti a Thalész-kört, ezért a Thalész-kör minden pontja külső pont az A középpontú, AE sugarú körben. Tehát $AQ > AE$ és $XY > \frac{a}{b}\cdot AE = BE$. Így $AQ + XY > AE + EB = AB$. Az A középpontú, AD sugarú kört a Thalész-kör belülről érinti. Így $AQ < AD$ és $XY < \frac{a}{b}\cdot AD = BD$, ezért $XY - AQ < |BD - AD| = AB$. Az E és D pontok megszerkeszthetők AB és $\frac{a}{b}$ ismeretében: $AA_1 \downdownarrows BB_1$ (párhuzamos szelőszakaszok tétele az $A_1DA\sphericalangle$-re) $\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{AD}{DB} \to D$. $AA_1 \downuparrows BB_2$ (párhuzamos szelőszakaszok tétele az $A_1EA\sphericalangle$-re) $\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{AE}{EB} \to E$.

1311. Legyen a két adott szakasz hossza a és b. **1. eset:** $a \neq b$. Felhasználjuk: A keresett pontok az AB szakasz $\frac{b}{a}$ arányú Apollonius körén vannak, melynek átmérője a DE szakasz (D az AB szakasz $b:a$ arányú külső osztópontja, E az AB szakasz $b:a$ arányú belső osztópontja) (lásd 1310. feladat). ① Szerkesszünk háromszöget AB, $n\cdot a$, $n\cdot b$ szakaszokból, ahol n olyan alkalmas pozitív valós szám, hogy a három szakaszra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség $\to ABP\triangle$. ② $ABP\triangle$ P-hez tartozó belső és külső szögfelezője. ③ A két szögfelező és az AB egyenes metszéspontja: D és E. ④ DE átmérőjű kör: k. Bármely $P \in k$ esetén $PA:PB = b:a$. **2. eset:** Ha $a = b$, akkor az AB szakasz felezőmerőlegese a megoldás.

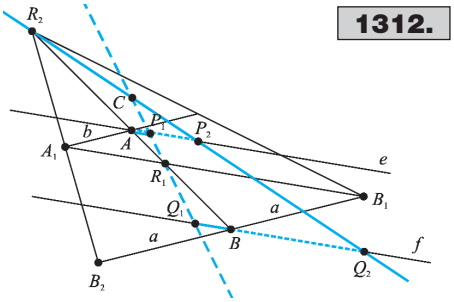
1312. Tegyük fel, hogy az e egyenes elválasztja C-t és B-t! $AP:BQ = b:a$ kell legyen a feltétel szerint. **1. eset:** $e(C;P_1)\cap e(A;B) = R_1$. $AR_1P_1\triangle \sim BR_1Q_1\triangle$, mert szögeik csúcsszögek, illetve váltószögek. $\lambda = \frac{AP_1}{Q_1B} = \frac{AR_1}{R_1B} = \frac{b}{a} \Rightarrow R_1$ az AB szakasz $b:a$ arányú osztópontja és CR_1 a szerkesztendő egyenes.

2. eset: $e(C;P_2)\cap e(A;B) = R_2$. $AR_2P_2\triangle \sim BR_2Q_2\triangle$, mert egy szögük közös, a másik egyállású. $\lambda = \frac{AP_2}{Q_2B} = \frac{AR_2}{R_2B} = \frac{b}{a} \Rightarrow R_2$ az AB szakasz $b:a$ arányú külső osztópontja és CR_2 a szerkesztendő egyenes. A szerkesztés: ① A-n át $AA_1 = b$. ② B-n át párhuzamos AA_1-gyel és ezen ellentétes irányban $BB_1 = a$, $BB_2 = a$. $e(A_1;B_1)\cap e(A;B) = R_1$ és $e(A_1;B_2)\cap e(A;B) = R_2$. ③ $e(C;R_i)\cap e = P_i$ és $e(C;R_i)\cap f = Q_i$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

1311.

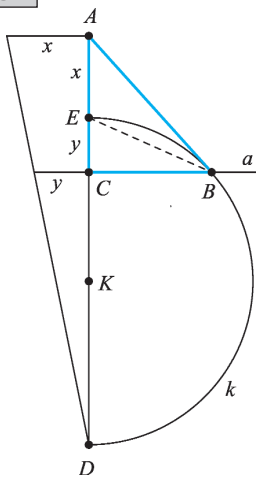


1312.



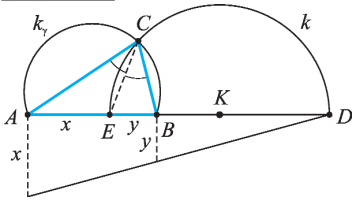
I

1313.



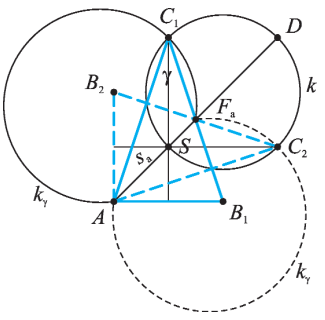
1313. Adottak az x; y szeletek, amelyeket β szögfelezője vág ki az AC befogóból. A szerkesztés: ① $AC = x + y$ hosszú szakasz E osztóponttal, AC szakasz $x : y$ arányú Apollonius köre: k (lásd az ábrán, illetve az 1311. feladatnál). ② C-ben merőleges AC-re: a. ③ $a \cap k = B$. Ha $x \neq y$, akkor két, az AC egyenesre tengelyesen szimmetrikus megoldás van. Ha $x =$ y, akkor nincs megoldás.

1314.



1314. A szerkesztés: **1. eset:** $x \neq y$. ① AB γ szögű látószögköríve: k_γ. ② AB szakasz $x : y$ arányú Apollonius köre: k. (lásd az ábrán, illetve az 1311. feladatnál). ③ $k_\gamma \cap k = C$. **2. eset:** $x = y$. ① AB γ szögű látószögköríve: k_γ. ② AB szakasz felezőmerőlegese: f_{AB}. ③ $k_\gamma \cap f_{AB} = C$. Két, az AB egyenesre tengelyesen szimmetrikus megoldás van.

1315.



1315. Felhasználjuk: S a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja. CS szögfelező az $AF_aC\triangle$-ben, ezért C rajta van az AF_a szakasz 2 : 1 arányú Apollonius körén. A szerkesztés: ① $AF_a = s_a$ hosszú szakasz felvétele. ② AF_a szakasz 2 : 1 arányú Apollonius köre: k. ③ AF_a szakasz γ szögű látószögköríve: k_γ. ④ $k_\gamma \cap k = C$. ⑤ C-t tükrözzük F_a-ra: B. Két, az AF_a egyenesre tengelyesen szimmetrikus megoldás van.

1316. A szerkesztés: ① $AB = c$ hosszú szakasz. Ha $b \neq a$, akkor AB szakasz $b : a$ arányú Apollonius köre: k (lásd az 1311. feladatnál). Ha $b = a$, akkor AB felezőmerőlegese: f_{AB}. ② Párhuzamos AB-vel m_c távolságra: e. ③ $e \cap k = C$, illetve $f_{AB} \cap e = C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

1317. Adott: BD; AD; γ. A szerkesztés: ① AD és BD szakaszok felvétele úgy, hogy AD tartalmazza BD-t. ② AB szakasz $AD : BD$ arányú Apollonius köre: k. ③ AB szakasz γ szögű látószögköríve: k_γ. ④ $k_\gamma \cap k = C$. Két, az AB egyenesre tengelyesen szimmetrikus megoldás van.

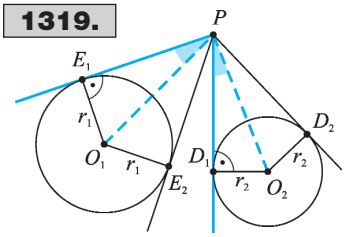
1318. *a)* Adott: f_γ; m_c; $\frac{a}{b}$. A szerkesztés: ① $CC_1 = m_c$ hosszú szakasz felvétele. ② C_1-ben merőleges CC_1-re: e. ③ C középpontú, f_γ sugarú kör: k_C. ④ $k_C \cap e = E$ (a belső szögfelezőnek a szemközti oldallal való metszéspontja). ⑤ C-ben merőleges f_γ-ra, ennek e-vel való metszéspontja D (a külső szögfelezőnek a szemközti oldalegyenessel való metszéspontja). ⑥ Szögfelezőtételek miatt $AE : EB = b : a$ és $AD : DB = b : a$. Legyen $AE = bx$, $EB = ax$, $AD = by$, $BD = ay$. $AD = AB + BD$-t felhasználva $by = bx + ax + ay \Rightarrow y =$

$$= \frac{b+a}{b-a} \cdot x \Rightarrow BD = ax\,\frac{b+a}{b-a} \Rightarrow \frac{EB}{BD} = \frac{b-a}{b+a} = \frac{1-\frac{a}{b}}{1+\frac{a}{b}}.$$

⑦ ED szakasz $\frac{1-\frac{a}{b}}{1+\frac{a}{b}}$ arányú felosztása $\rightarrow B$. ⑧ B tükrözése f_γ egyenesére: B^*. ⑨ $CB^* \cap e =$ $= A$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

b) Adott: $f_{\gamma'}$; m_c; $\frac{a}{b}$. A szerkesztés: ① $CC_1 = m_c$ hosszú szakasz felvétele. ② C_1-ben merőleges CC_1-re: e. ③ C középpontú, $f_{\gamma'}$ sugarú kör: k_C. ④ $k_C \cap e = D$ (a külső szögfelezőnek a szemközti oldalegyenessel való metszéspontja). ⑤ C-ben merőleges CD-re, ennek e-vel való metszéspontja E (a belső szögfelezőnek a szemközti oldallal való metszéspontja). A feladat megoldása a 6. ponttól kezdve megegyezik az *a)* rész megoldásával. 0 vagy 1 megoldás lehet.

1319.



1319. Ha P eleget tesz a feltételnek, akkor $E_1PE_2\sphericalangle = D_1PD_2\sphericalangle \Rightarrow \underline{E_1PO_1\sphericalangle = D_1PO_2\sphericalangle}$. $O_1E_1P\triangle \sim O_2D_1P\triangle$, mert mindkettő derékszögű, és P-nél lévő hegyesszögük az aláhúzott állítás miatt egyenlő. $\lambda = \frac{E_1O_1}{D_1O_2} = \frac{O_1P}{O_2P} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{O_1P}{O_2P}$. ① Ha $r_1 \neq r_2$, akkor a P pont rajta van az O_1O_2 szakasz $r_1 : r_2$ arányú Apollonius körén. Az Apollonius-kör O_1O_2 egyenesére eső átmérőjének két végpontja a k_1 és k_2 kör belső és külső hasonlósági pontja. Ha $k_1 \cap k_2 = \emptyset$, akkor az Apollonius-kör minden pontja megfelelő tulajdonságú. Ha k_1 és k_2 metszik egymást, akkor az Apollonius-körnek csak a k_1-en és k_2-n kívüli pontjaiból húzhatók érintők k_1-hez és k_2-höz. ② Ha $r_1 = r_2$, akkor a P pont rajta van O_1O_2 szakasz felezőmerőlegesén. Ha $k_1 \cap k_2 = \emptyset$, akkor a felezőmerőleges minden pontja megfelelő tulajdonságú. Ha k_1 és k_2 metszik egymást, akkor a felezőmerőlegesnek csak a k_1-en és k_2-n kívüli pontjaiból húzhatók érintők k_1-hez és k_2-höz.

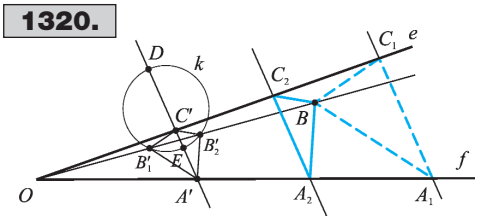
1320. A szerkesztés: ① Vegyünk fel az adott iránnyal párhuzamos egyenest $\rightarrow A'; C'$. ② Ha $c \neq a$, akkor adjuk meg $A'C'$ szakasz $c : a$ arányú Apollonius körét: k. Ha $c = a$, akkor adjuk meg $A'C'$ szakasz felezőmerőlegesét: $f_{A'C'}$. ③ $k \cap OB = B'$, illetve $f_{A'C'} \cap OB = B'$. ④ O középpontú középpontos hasonlóságot alkalmazunk az $A'B'C'\triangle$-re úgy, hogy B' képe B legyen. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet. Indoklás: A szerkesztett háromszög megfelel az elvárásoknak, mert a középpontos hasonlóságnál a középponton át nem menő egyenes képe vele párhuzamos egyenes, tehát $A'C' \parallel AC$. A középpontos hasonlóság aránytartó, tehát $\frac{AB}{CB} = \frac{A'B'}{C'B'} = \frac{c}{a}$. $C' \in e$ és $O \in e \Rightarrow C \in e$, valamint $A' \in f$ és $O \in f \Rightarrow A \in f$.

1321. Adott: AC; BD; α; β. Felhasználjuk: Az átlók metszéspontját a kiegészítő háromszög csúcsával összekötő egyenes az $ABE\triangle$ súlyvonala (lásd az 1197. feladatot). A DB és AC egyenesek által meghatározott csúcsszögek AB és DC párhuzamos szelőire alkalmazva a párhuzamos szelők tételét: $\frac{AC}{BD} = \frac{AM}{BM}$.

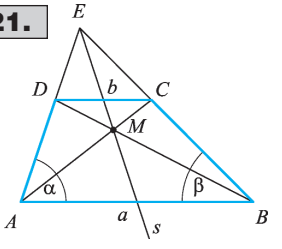
1. eset: $AC \neq BD$. A szerkesztés: ① α; $\beta \rightarrow A'B'E'\triangle$. ② $A'B'$ szakasz $AC : BD$ arányú Apollonius köre: k'. ③ $A'B'E'\triangle$ E'-ből induló súlyvonala: s'. ④ $s' \cap k' = M'$. ⑤ $e(A'; M') \cap e(B'; E') = C'$ és $e(B'; M') \cap e(A'; E') = D'$. ⑥ Alkalmazzunk $\frac{AC}{A'C'}$ arányú hasonlóságot az $A'B'C'D'$ trapézra $\rightarrow ABCD$ trapéz.

2. eset: $AC = BD$. $\alpha \neq \beta$ esetén nincs megoldás, $\alpha = \beta$ esetén végtelen sok megoldás van.

1320.



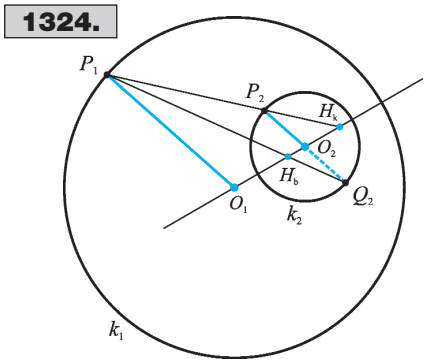
1321.



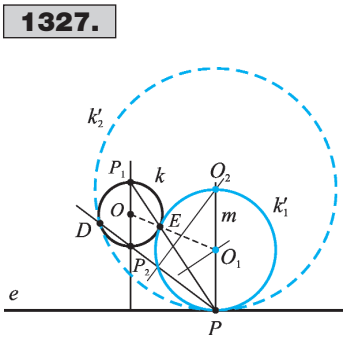
I

1322. *a)* Ha a két kör sugara egyenlő, akkor $O_1O_2 \parallel P_1P_2$, ezért nincs metszéspontjuk. Különböző sugarak esetén $O_1P_1 \parallel O_2P_2$, ezért a párhuzamos szelőszakaszok tétele miatt $O_1P_1 : O_2P_2 = O_1H_k : O_2H_k =$ állandó $\Rightarrow H_k$ helye a centrálison csak a sugarak arányától függ.
b) **1. eset:** A két kör sugara egyenlő. O_1-ben és O_2-ben merőlegest állítunk a körök centrálisára. Ezeknek a körökkel való E_1, F_1, ill. E_2, F_2 metszéspontjai lesznek az érintési pontok. E_1E_2 egyenese az egyik, F_1F_2 egyenese a másik érintő.
2. eset: A két kör sugara különböző. ① Felveszünk mindkét körben egy-egy sugarat, amelyek párhuzamosak és egyirányúak $\rightarrow P_1$, P_2. ② $e(O_1; O_2) \cap e(P_1; P_2) = H_k$ a két kör külső hasonlósági pontja. ③ A H_k-ból k_2-höz húzott érintő a két kör közös érintője, hiszen a k_2-höz húzott érintő képe a k_1-et kell, hogy érintse, ez az egyenes pedig átmegy H_k-n, tehát invariáns, képe önmaga.
1323. *a)* $O_1P_1 \parallel O_2P_2$, ezért a párhuzamos szelőszakaszok tétele miatt $O_1P_1 : O_2P_2 = O_1H_b : O_2H_b =$ állandó $\Rightarrow H_b$ helye a centrálison csak a sugarak arányától függ.
b) ① Felveszünk mindkét körben egy-egy sugarat, amelyek párhuzamosak és ellentétes irányúak $\rightarrow P_1$, P_2. ② $e(O_1; O_2) \cap e(P_1; P_2) = H_b$ a két kör belső hasonlósági pontja. ③ A H_b-ból k_2-höz húzott érintő a két kör közös érintője, hiszen a k_2-höz húzott érintő képe a k_1-et kell, hogy érintse, ez az egyenes pedig átmegy H_b-n, tehát invariáns, képe önmaga. Megjegyzés: két körnek akkor létezik közös belső érintője, ha $r_1 + r_2 \geq O_1O_2$. Egyenlőség esetén egy közös belső érintő van.
1324. A szerkesztés: ① Legyen $P_1O_1 \parallel P_2O_2$ a k_1, illetve k_2 kör egyirányú párhuzamos sugara! $P_1P_2 \cap O_1O_2 = H_k$ külső hasonlósági pont. ② Legyen $P_1O_1 \parallel O_2Q_2$ a k_1, illetve k_2 kör ellentétes irányú párhuzamos sugara! $P_1Q_2 \cap O_1O_2 = H_b$ belső hasonlósági pont. Koncentrikus körök belső, illetve külső hasonlósági pontja azonos a két kör közös középpontjával.
1325. *a)* A két kör kívülről érinti egymást: A külső hasonlósági pont a körökön kívül a kisebb kör oldalán a centrálison van úgy, hogy O_2 az O_1H_k szakasz $r_1 : r_2$ arányú osztópontja (egyenlő sugarú körök esetében nem létezik). A belső hasonlósági pont a két kör érintési pontja.
b) A két kör egyike belülről érinti a másikat: A külső hasonlósági pont a két kör érintési pontja. A belső hasonlósági pont az O_1O_2 szakasz $r_1 : r_2$ arányú osztópontja. A hasonlósági pontok szerkesztéséről l. az 1324. feladatot.
1326. A szerkesztés: ① $P_1O_1 \parallel P_2O_2$ *a* k_1, illetve k_2 kör egyirányú párhuzamos sugara; $e(P_1; P_2) \cap e(O_1; O_2) = H_k$ külső hasonlósági pont, mivel $P_2O_2H_k\triangle \sim P_1O_1H_k\triangle$ és $r_1 : r_2 = H_kO_1 : H_kO_2$. Egyenlő sugarú köröknek nincs külső hasonlósági pontja. ② $P_1O_1 \parallel Q_2O_2$ a k_1, illetve k_2 kör ellentétes irányú párhuzamos sugara; $e(P_1; Q_2) \cap e(O_1; O_2) = H_b$ belső hasonlósági pont, mivel $Q_2O_2H_b\triangle \sim P_1O_1H_b\triangle$ és $r_1 : r_2 = H_bO_1 : H_bO_2$.
1327. A szerkesztés: ① Keressük meg a k kör és a szerkesztendő kör hasonlósági pontját! {Az érintési pont a belső hasonlósági pontja az egymást kívülről érintő köröknek, külső hasonlósági pontja a két körnek, ha az egyik belülről érinti a másikat.}. ② A P-ben e-re állított m me-

1324.



1327.



rőleges lesz a k' kör sugarának egyenese, az O-ból e-re állított merőleges pedig a k kör sugarának egyenese $\rightarrow P_1$; $P_2 \in k$. ③ $e(P_1; P) \cap k = E$ az egymást kívülről érintő körök belső hasonlósági pontja, tehát az érintési pont. EP felezőmerőlegesének és m-nek a metszéspontja O_1. ④ O_1 középpontú, O_1P sugarú kör: k_1'. ⑤ $e(P_2; P) \cap k = D$ a belülről érintő körök külső hasonlósági pontja, tehát az érintési pont. DP felezőmerőlegesének és m-nek a metszéspontja O_2. ⑥ O_2 középpontú, O_2P sugarú kör: k_2'. 2 megoldás van.

1328. **1. eset:** OE nem merőleges f-re. A szerkesztés: ① A k kört E-ben érintő k' körnek és k-nak E-ben közös az érintő egyenese, az OE-re E-ben állított merőleges: e. ② $e \cap f = P$. ③ A P csúcsú, e és f szárú szög szárait érintő körök középpontjai a szögfelezőkön vannak: g_1; g_2. ④ $g_1 \cap e(O; E) = O_1'$ és $g_2 \cap e(O; E) = O_2'$. ⑤ O_1' középpontú, $O_1'E$ sugarú kör: k_1' és O_2' középpontú, $O_2'E$ sugarú kör: k_2'. 2 megoldás van.

2. eset: Ha $OE \perp f$, akkor $e \parallel f$, tehát nem használhatjuk a vázolt gondolatmenetet. Ekkor kaphatunk 0 megoldást, 1 megoldást vagy végtelen sok megoldást.

1329. ① A szerkesztendő k' kör belülről érinti a k kört. Az 1325. feladatban láttuk, hogy a közös érintési pont a két kör külső hasonlósági pontja. ② A k' kör egyik sugáregyenese az e-re E pontban állított m merőleges. A k kör vele párhuzamos és egyirányú sugara OP. ③ $e(E; P) \cap k = D$ a külső hasonlósági pont, vagyis az érintési pont. ④ $e(O; D) \cap m = O'$; O' középpontú $O'D$ sugarú kör $\Rightarrow k'$. 2 megoldás van.

Pitagorasz tételének alkalmazása

1330. $x \approx 31{,}63$ m. (Még egy tízszintes toronyház is elférne.)

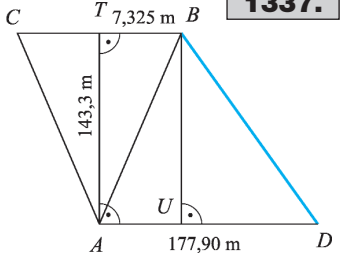
1331. $h \approx 6{,}11$ m hosszú a rúd. **1332.** $BD \approx 4{,}97$ m. **1333.** Körülbelül 20,04 m hosszú.

1334. $l \approx 2{,}25$ m az átlóvas hossza. **1335.** $x \approx 10{,}77$ m a csúszda hossza.

1336. P-ből a szárakra állított merőlegesek talppontjai T, U, a derékszög csúcsa C. $d(P; T) = a$, $d(P; U) = b \Rightarrow CTPU$ négyszög téglalap $\Rightarrow CT = b$. Pitagorasz-tétel szerint CTP derékszögű háromszögben $a^2 + b^2 = d^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2} = d(P; C)$.

1337. T felezi CB szakaszt $\Rightarrow ADBT$ négyszög derékszögű trapéz. BU merőleges AD-re $\Rightarrow BUD$ háromszög derékszögű, befogói 143,3 m és 170,575 m. Pitagorasz-tétel BUD derékszögű háromszögben: $BD^2 = 143{,}3^2 + 170{,}575^2 \Rightarrow BD \approx$ $\approx 222{,}78$ m hosszú a feszítő kötél.

1337.



1338. AMC derékszögű háromszögben $AM^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow AM = 12$ m. $BM = AM - AB = 7{,}8$ m. BMC derékszögű háromszögben $7{,}8^2 + 5^2 = x^2 \Rightarrow x \approx 9{,}26$ m a rúd hossza.

1339. $m = 15$ cm a magasság.

1340. Az egyenlő szárú háromszöget az alaphoz tartozó magassága két egybevágó derékszögű háromszögre bontja, melynek befogói $24x$ és 35 cm, átfogója $25x$ hosszú. $(24x)^2 + 35^2 = (25x)^2 \Rightarrow x = 5$ cm $\Rightarrow 48x =$ $= 240$ cm az alap, $25x = 125$ cm a szár.

1341. Szabályos háromszög oldalfelező merőlegese és magassága megegyezik. Beírt és köré írt körének középpontja a súlypont, ami a magasság csúcstól távolabbi harmadolópontja. AFC derékszögű háromszögben $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + CF^2 = a^2 \Rightarrow CF = \frac{a\sqrt{3}}{2} = m$ a magasság, $CS = \frac{2}{3}m =$ $= \frac{a\sqrt{3}}{3} = R$ a körülírt kör sugara, $SF = \frac{1}{3}m = \frac{a\sqrt{3}}{6} = r$ a beírt kör sugara.

I

1342. Szabályos háromszög köré írt körének sugara $\frac{2}{3}$-a a magasságának $\Rightarrow R = \frac{2}{3}m =$
$= \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{3}} R = \sqrt{3}R.$

1343. Pitagorasz-tétel a magasság által lemetszett egyik derékszögű háromszögre: $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 =$
$= a^2 \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}} h = \frac{2\sqrt{3}h}{3}.$

1344. BCE szabályos háromszög magassága $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. BC felezőpontja $F \Rightarrow AFE$ háromszög derékszögű és befogóinak hossza $\frac{3}{2}a$, illetve $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. $AE^2 = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow AE =$
$= \sqrt{3}a = ED$. A két gerenda hossza $\sqrt{3} \cdot 3{,}6\,\text{m} \approx 6{,}24\,\text{m}$.

1345. A hálózat egyeneseinek távolsága 14 mm, illetve 24,25 mm.

1346. A háromszög egy szabályos háromszög „fele”: $a^2 + b^2 = (2a)^2 \Rightarrow b = a\sqrt{3}$.

1347. A háromszög egy szabályos háromszög „fele”: $a^2 + b^2 = (2a)^2 \Rightarrow a = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{b\sqrt{3}}{3}.$

1348. Szabályos háromszögben $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. A feladat szerint $m = a - d \Rightarrow a - d = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow a = \frac{2d}{2 - \sqrt{3}} = \left(4 + 2\sqrt{3}\right)d.$

1349. A befogó $\approx 3{,}46$ m, az átfogó $\approx 6{,}93$ m.

1350. $ABC\triangle$ szabályos háromszög, $A'B'C\triangle$ szabályos háromszög $\Rightarrow ABC\triangle \sim A'B'C\triangle$;
$m_{ABC} = \frac{D\sqrt{3}}{2}$; $m_{A'B'C'} = \frac{d\sqrt{3}}{2}$; $ABB'A'$ trapéz magassága $h \Rightarrow m_{A'B'C} + h = m_{ABC}$.
a) $d = 16{,}5$ cm, $h = 7{,}5$ cm, $\frac{d\sqrt{3}}{2} + h = \frac{D\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{16{,}5\sqrt{3}}{2} + 7{,}5 = \frac{D\sqrt{3}}{2} \Rightarrow D = 16{,}5 + \frac{15}{\sqrt{3}} \approx$
$\approx 25{,}16$ cm. *b)* $D = 30$ cm, $h = 9{,}5$ cm, $\frac{d\sqrt{3}}{2} + h = \frac{D\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{d\sqrt{3}}{2} + 9{,}5 = \frac{30\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d = 30 -$
$- \frac{19}{\sqrt{3}} \approx 19{,}03$ cm. *c)* $D = 35$ cm, $d = 22$ cm, $\frac{d\sqrt{3}}{2} + h = \frac{D\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{22\sqrt{3}}{2} + h = \frac{35\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h =$
$= \frac{13\sqrt{3}}{2} \approx 11{,}26$ cm.

1351. A szárak hossza $\approx 2{,}83$ cm.

1352. $AC = 29$ cm.

1353. **1. eset:** $AB = 25$ cm. **2. eset:** $AB = 11$ cm.

1354. *a)* $d = a\sqrt{2}$. *b)* $a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$.

1355. a oldalú négyzet átlója $a\sqrt{2}$. Ha $a\sqrt{2} = a + 2$, akkor $a = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} \approx 4,83\,\text{cm}$.

1356. A négyzet átlója a köré írt kör átmérője. Az a oldalú négyzet átlója $a\sqrt{2} \Rightarrow a = r\sqrt{2}$.

1357. $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

1358. Thalész-tétel szerint a téglalap átlója egyenlő a köré írt kör átmérőjével. Pitagorasz-tételt alkalmazva: $d^2 \geq 35^2 + 20^2 \Rightarrow d \geq 40{,}31$ cm.

1359. Thalész- és Pitagorasz-tételt alkalmazva $d^2 \geq 32^2 + 32^2 \Rightarrow d \geq 45{,}25$ mm.

1360. $d^2 \geq 10^2 + 10^2 \Rightarrow d \geq 14{,}14$ cm. Nem lehet belőle 10 cm alapélű gerendát készíteni.

1361. $68^2 = (8x)^2 + (15x)^2 \Rightarrow x = 4$ cm. Az oldalak 32 cm, 60 cm hosszúak.

1362. Thalész-tétel szerint a derékszögű háromszög átfogója egyenlő a háromszög köré írt körének átmérőjével. Pitagorasz-tételt alkalmazva $(2r)^2 = 8^2 + 18^2 \Rightarrow \sqrt{97}$. A köré írt kör sugara kerekítve 9,85 cm.

1363. A derékszögű háromszög átfogójához tartozó súlyvonala egyenlő a háromszög köré írt kör sugarával. Alkalmazva Pitagorasz-tételt $(2r)^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow r = 10$ cm. A súlyvonal hossza 10 cm.

1364. $a = 37$ cm.

1365. $k = 1\,\text{m} \Rightarrow a = 25$ cm a rombusz oldala. Az átlók a rombuszt négy egybevágó derékszögű háromszögre bontják. Ha az átlók aránya 3 : 4, akkor a félátlók aránya is ennyi. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt: $25^2 = (3x)^2 + (4x)^2 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow 15$ cm és 20 cm a befogók hossza $\Rightarrow$ az átlók hossza 30 cm és 40 cm.

1366. A rombusz területe kétféleképpen: $t = \frac{e \cdot f}{2} = a \cdot m_a$. A félátlók által meghatározott derékszögű háromszögben $a^2 = 7^2 + 24^2 \Rightarrow a = 25$ cm $\Rightarrow m_a = \frac{e \cdot f}{2a} = \frac{14 \cdot 48}{2 \cdot 25} = \frac{336}{25} \approx 13{,}44$ cm.

1367. A másik átló $2 \cdot 13{,}75 = 27{,}5$ cm hosszú.

1368. $m = 2$ cm a trapéz magassága.

1369. ATD derékszögű háromszögben $AT^2 + 40^2 = 41^2 \Rightarrow AT = 9$ cm. $k = \frac{AB + CD}{2} = 45$ és $AT = \frac{AB - CD}{2} = 9 \Rightarrow AB = 54$ cm és $CD = 36$ cm az alapok hossza.

1370. Legyenek az érintési pontok E, F, G és H. A trapéz magassága a kör átmérője, azaz 6 cm. Külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $AE = AH = 5\,\text{cm} = BE = BF$ és $DH = DG = CG = CF = x$. ATD derékszögű háromszögben $AT = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x$, $DT = 6$ cm és $AD = 5 + x$. Pitagorasz-tétel szerint: $(5 - x)^2 + 6^2 = (5 + x)^2 \Rightarrow x = 1{,}8$ cm. A trapéz szárai 6,8 cm, alapja 3,6 cm és 10 cm hosszúak.

1371. $AB = 36\,\text{cm}$, $CD = 10\,\text{cm}$, $DT = 2r$, $AT = \frac{36 - 10}{2} = 13\,\text{cm}$, $AD = \frac{AB + CD}{2} = \frac{36 + 10}{2} = 23\,\text{cm}$. ATD derékszögű háromszögben: $13^2 + (2r)^2 = 23^2 \Rightarrow r = 3\sqrt{10}$ cm. A beírt kör sugara közelítőleg 9,49 cm.

I

1372. Legyen O_0 a beírt kör középpontja, E_1, E_2, E_3 és E_4 a négy érintési pont. $O_0AD\triangle$ derékszögű, mivel a trapéz egy száron levő szögeinek összege $\alpha + \delta = 180°$. $O_0E_4 \perp AD$. Az érintőszakaszok egyenlősége miatt $DE_4 = \frac{c}{2}$; $AE_4 = \frac{a}{2}$. Alkalmazzuk a magasságtételt az O_0AD-re: $r^2 = \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow 4r^2 = c \cdot a \Rightarrow A$ beírt kör átmérője az alapok mértani közepe.

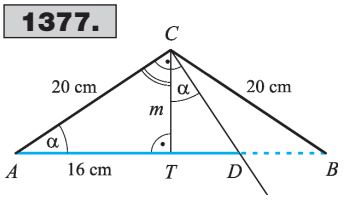
1373. Az átlók hossza 7 m.

1374. Legyen U pont a C-ből AB-re bocsátott merőleges talppontja. $DU = AC < BD$. $BU = b - a$. BUC derékszögű háromszögben: $CU^2 + (b-a)^2 = a^2 \Rightarrow CU^2 = b(2a-b) = DA^2$. ABD derékszögű háromszögben: $DB^2 = DA^2 + AB^2 \Rightarrow DB^2 = b(2a-b) + b^2 = 2ab$. $DB = \sqrt{2ab}$ a hosszabb átló hossza.

1375. $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $BD = e$, $AC = f$. ABD derékszögű háromszögben $a^2 + d^2 = e^2$ és ACD derékszögű háromszögben $d^2 + c^2 = f^2$, így $e^2 - f^2 = a^2 - c^2$.

1376. $AT : BT = 3 : 10$. ATP derékszögű háromszögben $(3x)^2 + m^2 = 41^2$ és BTP derékszögű háromszögben $(10x)^2 + m^2 = 50^2 \Rightarrow m = \underline{\underline{40\text{ cm}}}$.

1377.



ATC derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel szerint: $m^2 + 16^2 = 20^2 \Rightarrow m = 12$ cm. $TCD\sphericalangle = TAC\sphericalangle = \alpha$, mert merőleges szárú hegyesszögek; $ATC\triangle \sim CTD\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow$ megfelelő oldalaik aránya is egyenlő: $\frac{TD}{m} = \frac{m}{AT} \Rightarrow \frac{TD}{12} = \frac{12}{16} \Rightarrow$ $TD = 9$ cm $\Rightarrow$ $\underline{\underline{AD}} = AT + TD = \underline{\underline{25\text{ cm}}}$, $\underline{\underline{BD}} = AB - AD = \underline{\underline{7\text{ cm}}}$.

1378. $AD = 98$ cm; $BD = 527$ cm. D az AB szakasz belső pontja, mert $AC < BC \Rightarrow AB = AD + BD = 625$ cm. $AC = DC$, ezért a CT magasság az AD felezőmerőlegese $\Rightarrow AT = \frac{AD}{2} = 49$ cm és $BT = AB - AT = 576$ cm. A magasságtétel szerint ACB derékszögű háromszögben: $CT^2 = AT \cdot BT = 49 \cdot 576 = 28\,224$. A Pitagorasz-tétel szerint ATC és CTB derékszögű háromszögekben: $CA^2 = AT^2 + CT^2 = 49^2 + 28\,224 = 30\,625 \Rightarrow CA = \sqrt{30\,525} = 175$. $CB^2 = BT^2 + CT^2 = 576^2 + 28\,224 = 360\,000 \Rightarrow CB = 600$. A befogók hossza $\underline{\underline{175\text{ cm és }600\text{ cm}}}$.

1379. A szögfelezőtétel szerint $CB : CA = 2\frac{6}{7} : 2\frac{1}{7} = \frac{20}{7} : \frac{15}{7} = 4 : 3$. A Pitagorasz-tétel miatt az ABC derékszögű háromszögben $(4x)^2 + (3x)^2 = 5^2 \Rightarrow x = 1$. A befogók hossza $\underline{\underline{CB = 4\text{ cm}}}$, $\underline{\underline{CA = 3\text{ cm}}}$.

1380. Legyen $D \in AC$ a szögfelezőnek az AC befogóval való metszéspontja. A szögfelezőtétel szerint $CD : DA = a : a\sqrt{2}$, valamint $CD + DA = a \Rightarrow \underline{\underline{DA}} = \frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1} = \underline{\underline{a\left(2 - \sqrt{2}\right)}}$ és $\underline{\underline{CD = a\left(\sqrt{2} - 1\right)}}$.

1381. A szögfelezőtétel szerint $AB:AC=m:n$. A Pitagorasz-tétel szerint $(m+n)^2+(nx)^2=(mx)^2 \Rightarrow x^2=\frac{(m+n)^2}{m^2-n^2}=\frac{m+n}{m-n}$. Az átfogó hossza $AB=m\cdot\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$, a keresett befogó hossza $AC=n\cdot\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$.

1382. Pitagorasz-tétel az ABC derékszögű háromszögben: $AB^2=15^2+20^2 \Rightarrow AB=25$ cm. Az ABC háromszög területe kétféleképpen felírva: $T_{\triangle}=\frac{20\cdot 15}{2}=\frac{25\cdot CT}{2} \Rightarrow CT=12$ cm. Magasságtétel az ABC derékszögű háromszögben: $12^2=AT(25-AT) \Rightarrow AT^2-25AT+144=0$. A másodfokú egyenlet megoldásai $(AT)_1=16$ cm és $(AT)_2=9$ cm. $AT>BT \Rightarrow$ az átfogó szeleteinek hossza: $AT=16$ cm, $BT=9$ cm.

1383. A szögfelezőtétel szerint: $AD:DB=AC:CB=7:9$. A befogótétel szerint: $AT\cdot AB=(7x)^2$ és $BT\cdot AB=(9x)^2 \Rightarrow AT:BT=7^2:9^2=49:81$.

1384. Pitagorasz-tétel szerint az ABC derékszögű háromszögben: $AB^2=15^2+20^2 \Rightarrow AB=25$ cm. Az ABC háromszög területét kétféleképp felírva: $T_{ABC}=\frac{15\cdot 20}{2}=\frac{25\cdot m_c}{2} \Rightarrow m_c=12$ cm. Befogótétel az ABC háromszögben: $AT\cdot AB=AC^2 \Rightarrow AT=9$ cm, $BT=16$ cm. Szögfelezőtétel az ATC háromszögben: $AD:DT=15:12$, azaz $(9-DT):DT=15:12 \Rightarrow DT=4$ cm. Szögfelezőtétel a BTC háromszögben: $BE:ET=20:12$, azaz $(16-ET):ET=20:12 \Rightarrow ET=6$ cm. $DE=DT+ET=10$ cm hosszú szakaszt metsz ki az átfogóból a két szögfelező.

1385. Pitagorasz-tétel szerint a BFC derékszögű háromszögben $\Rightarrow CF^2+6^2=10^2 \Rightarrow CF=8$ cm. Szögfelezőtétel a BFC háromszögben $\Rightarrow CD:(CF-CD)=10:6$, azaz $CD:(8-CD)=10:6 \Rightarrow CD=5$ cm.

1386. $OF=39$ mm.

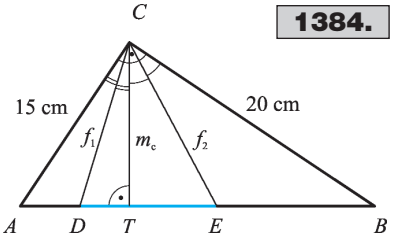
1387. $OF=\sqrt{9{,}75}\text{ cm}\approx 3{,}12$ cm.

1388. $AB\cap O_1O_2=F$. Pitagorasz-tétel az O_1FA derékszögű háromszögben: $O_1F^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=r_1^2$, azaz $O_1F^2+12^2=13^2 \Rightarrow O_1F=5$ cm. Pitagorasz-tétel az O_2FA derékszögű háromszögben: $O_2F^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=r_2^2$, azaz $O_2F^2+12^2=15^2 \Rightarrow O_2F=9$ cm.

1. eset: AB húr elválasztja a két kör középpontját $\Rightarrow$ $\Rightarrow O_1O_2=O_1F+O_2F=14$ cm.

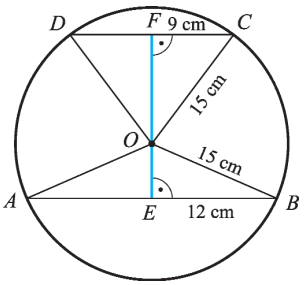
2. eset: AB húr nem választja el a két kör középpontját $\Rightarrow$ $\Rightarrow O_1O_2=O_2F-O_1F=4$ cm.

1384.



I

1389.



1389. Pitagorasz-tétel az OEB, illetve az OFC derékszögű háromszögekben: $OE^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow OE = 9$ cm, illetve $OF^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow OF = 12$ cm $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\mathrm{d}(AB;\ CD) = EF = OE + OF = 21\,\text{cm}}}$.

1390. $OE = 18$ cm, illetve $OF = 24$ cm. $\underline{\underline{\mathrm{d}(AB;\ CD) = EF = OF - OE = 6\,\text{cm}}}$.

1391. Felhasználjuk, hogy a Pitagorasz-tétel szerint $\mathrm{d}^2(O;\ AB) + \mathrm{d}^2(O;\ AB) + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2$. $OE^2 + 20^2 = 25^2 \Rightarrow OE = 15$ cm, illetve $OF^2 + 7^2 = 25^2 \Rightarrow OF = 24$ cm.

1. eset: a középpont a két húr között van $\Rightarrow EF = OE + OF = 39$ cm.

2. eset: a középpont a két húr sávján kívül van $\Rightarrow EF = OF - OE = 9$ cm. $\underline{\underline{\text{A két húr távolsága 39 cm vagy 9 cm.}}}$

1392. $EB = 24$ cm, $FC = 20$ cm. A Pitagorasz-tétel szerint: $OE^2 + 24^2 = r^2$ és $OF^2 + 20^2 = r^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow OF^2 - OE^2 = (OF - OE)\,(OF + OE) = 176$.

1. eset: az O pont az AB és a CD húr között van $\Rightarrow OE_1 + OF_1 = 22$ cm. $OF_1 - OE_1 = \frac{176}{22} =$ $= 8$ cm $\Rightarrow OF_1 = 15$ cm $\Rightarrow r_1^2 = 15^2 + 20^2 \Rightarrow \underline{\underline{r_1 = 25\,\text{cm}}}$.

2. eset: az O pont az AB és a CD húr sávján kívül van $\Rightarrow OF_2 - OE_2 = 22$ cm. $OF_2 + OE_2 =$ $= \frac{176}{22} = 8$ cm $\Rightarrow OE_1 = -7$, ami lehetetlen.

1393. **1. eset:** a körszelet nem tartalmazza a középpontot $\Rightarrow OE = r - h$.

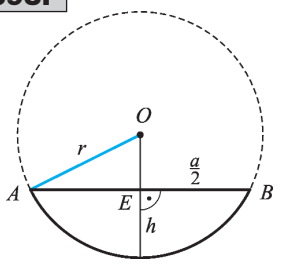
2. eset: a körszelet tartalmazza a középpontot $\Rightarrow OE = h - r$. Mindkét esetben $OE \perp AB \Rightarrow OE$ felezi az AB szakaszt $\Rightarrow$ az OEB háromszög derékszögű: átfogója r, befogói $\frac{a}{2}$ és $OE = |r - h|$.

A Pitagorasz-tétel szerint $r^2 = \left(|r - h|\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, azaz $r^2 = r^2 - 2rh + h^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow \underline{\underline{r = \frac{h}{2} + \frac{a^2}{8h}}}$.

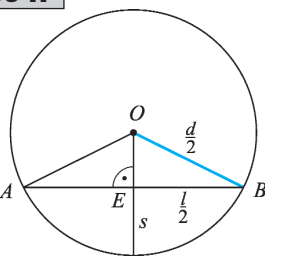
1394. Az OEB derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel szerint $\left(\frac{d}{2} - s\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2$, azaz $\frac{d^2}{4} - ds + s^2 + \frac{l^2}{4} = \frac{d^2}{4} \Rightarrow d = s + \frac{l^2}{4s}$. *a)* $d = 25 + \frac{200^2}{4 \cdot 25} = 425 \Rightarrow \underline{\text{Az átmérő 425 mm.}}$

b) Az átmérő hossza $\underline{\underline{d = s + \frac{l^2}{4s}}}$.

1393.



1394.



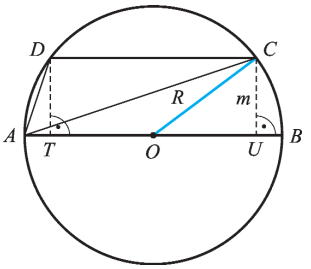
1395. $AT = UB = x$. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt az OUC, az AUC és az ATD derékszögű háromszögekben!

I. $(R-x)^2 + m^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - 2Rx + x^2 + m^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + m^2 = 2Rx$.

II. $(2R-x)^2 + m^2 = 84^2 \Rightarrow 4R^2 - 4Rx + x^2 + m^2 = 84^2 \Rightarrow 4R^2 - 2(x^2 + m^2) + x^2 + m^2 = 84^2 \Rightarrow 4R^2 - (x^2 + m^2) = 84^2$.

III. $x^2 + m^2 = 18^2$. II. és III. $\Rightarrow 4R^2 = 84^2 + 18^2 \Rightarrow \underline{R \approx 43\text{ cm}}$.

1395.



1396. $\underline{PE = 77\text{ cm}}$. **1397.** $\underline{PO = 61\text{ cm}}$.

1398. A Pitagorasz-tétel az OE_1P derékszögű háromszögben: $7^2 + E_1P^2 = 25^2 \Rightarrow E_1P = 24$ cm.

Az OE_1P háromszög területe: $t_{OE_1P} = \dfrac{7 \cdot 24}{2} = \dfrac{25 \cdot E_1T}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow E_1T = 6{,}72 \Rightarrow \underline{E_1E_2 = 13{,}44\text{ cm}}$.

1399. $E_1E_2 = 120$ cm $\Rightarrow E_1T = 60$ cm. $PE_1 = PE_2 = 156$ cm. A PE_1O háromszög területét kétféleképpen felírva: $\dfrac{PO \cdot 60}{2} = \dfrac{156 \cdot OE_1}{2} \Rightarrow PO = \dfrac{156 \cdot OE_1}{60}$. A Pitagorasz-tétel a PE_1O derékszögű háromszögben: $PO^2 = 156^2 + OE_1^2$. PO-t behelyettesítve a megfelelő algebrai átalakítások után: $\underline{OE_1 = 65\text{ cm}}$.

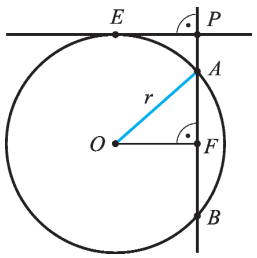
1400. A Thalész-tétel miatt D-nél derékszög van $\Rightarrow BD$ az ABC háromszög átfogóhoz tartozó magassága $\Rightarrow$ alkalmazható rá a magasságtétel: $BD^2 = AD \cdot DC = 32 \cdot 18 = 16 \cdot 36$. A Pitagorasz-tétel az $ABD\triangle$-re: $AB^2 = 32^2 + 16 \cdot 36 \Rightarrow AB = 40\text{ cm} \Rightarrow \underline{r = 20\text{ cm}}$.

1401. A Thalész-tétel szerint $ADB\sphericalangle = 90°$. $ADB\triangle \sim ABC\triangle \sim BDC\triangle$, mert szögeik egyenlők. $AB = 2r$; $BC = r \Rightarrow AB : BC = 2 : 1 \Rightarrow AD : DB = 2 : 1$ és $BD : DC = 2 : 1$. $\Rightarrow AD : DB : DC = 4 : 2 : 1 \Rightarrow \underline{AD : DC = 4 : 1}$.

1402. Alkalmazzuk a szelődarabok tételét: $PA \cdot PB = PE^2 \Rightarrow 10PB = 12^2 \Rightarrow PB = 14{,}4$ cm $\Rightarrow AB = 4{,}4$ cm. Mivel $EP \perp PA$, $d(E; P) = d(O; F) = 12$ cm. Pitagorasz-tétel az OFA derékszögű háromszögben: $OA^2 = OF^2 + AF^2 \Rightarrow r^2 = 12^2 + 2{,}2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{r = 12{,}2\text{ cm}}$.

1402.



1403. Legyenek E_1 és E_2 az érintési pontok, T az O_2E_2-re O_1-ből bocsátott merőleges talppontja. $e(E_1; E_2) \parallel e(O_1; T) \Rightarrow E_1E_2 = O_1T$. O_1TO_2 derékszögű háromszögben: $O_1T^2 + O_2T^2 = O_1O_2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow E_1E_2^2 + O_2T^2 = O_1O_2^2$. *a)* $O_2T = r_2 - r_1 = 2$ cm $\Rightarrow E_1E_2 = \underline{\sqrt{60} \approx}$

$\underline{\approx 7{,}75\text{ cm}}$.

b) $O_2T = r_2 + r_1 = 4$ cm $\Rightarrow E_1E_2 = \underline{\sqrt{48} \approx 6{,}93\text{ cm}}$.

1404. *a)* $\underline{E_1E_2 = 48\text{ cm}}$. *b)* $\underline{E_1E_2 = 30\text{ cm}}$. **1405.** $\underline{E_1E_2 = 40\text{ cm}}$.

1406. Pitagorasz-tétel az $O_1E_1O_2$ derékszögű háromszögben: $E_1O_2^2 + r_1^2 = (r_1 + r_2)^2$. Pitagorasz-tétel az $E_1E_2O_2$ derékszögű háromszögben: $E_1E_2^2 + r_2^2 = E_1O_2^2 = (r_1 + r_2)^2 - r_1^2 \Rightarrow E_1E_2 =$

$= \underline{\sqrt{2r_1r_2}}$.

1407. A Thalész-tétel szerint $ACB\sphericalangle = 90°$. Az adatokból $AT = 1$ m, $TB = 3$ m. Alkalmazzuk az ACB derékszögű háromszögre a magasságtételt: $CT^2 = AT \cdot TB$. Az adatokat behelyettesítve: $CT = \underline{\sqrt{3}\,\text{m} \approx 1{,}73\,\text{m}}$ magas az állvány.

1407.

