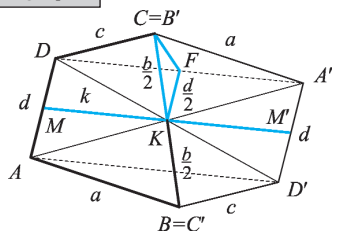
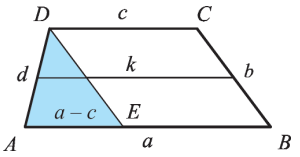
402/I.



402/II.



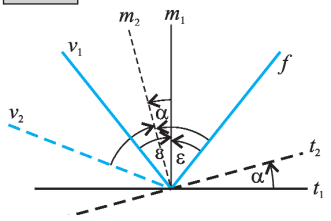
400. Tükrözzük a trapézt a BC szár felezőpontjára $\Rightarrow AD'A'D$ paralelogramma.
a) A szerkesztés: ① $a+c, m, d \Rightarrow AD'A'\triangle$. ② AA' felezőpontja $\Rightarrow F$; F középpontú, $b/2$ sugarú kör $\Rightarrow k$. ③ $k \cap AD' = \{B_1; B_2\}$. ④ B_i tükörképe F pontra $\Rightarrow C_i$; D' tükörképe F pontra $\Rightarrow D$. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 lehet.
b) A szerkesztés: ① $a+c, m, \alpha \Rightarrow AD'A'D$ paralelogramma. ② AA' felezőpontján, F ponton át AD'-vel párhuzamos egyenes $\Rightarrow p$. ③ F pontból a p középpárhuzamosra β szöget mérünk $\Rightarrow g$ egyenes. ④ $g \cap AD' = B$; $g \cap DA' = C$. Egy megoldás van.
c) A szerkesztés: ① $a+c, e, f \Rightarrow AD'C\triangle$. ② C ponton át AD'-vel párhuzamos $\Rightarrow g$ egyenes; C középpontú b sugarú kör $\Rightarrow k$. ③ $k \cap AD' = \{B_1; B_2\}$. ④ C pontból g egyenesen $D'B_i$ távolság $\Rightarrow \{D_1; D_2\}$. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 lehet.

401. D pontot tükrözzük a BC szár felezőpontjára $\Rightarrow BD'CD$ paralelogramma. Kétféle trapézt szerkeszthetünk aszerint, hogy a φ szögű szögtartomány az alapot vagy a szárat tartalmazza-e.
a) Két egymástól független szerkesztést végzünk. ① $e, f, \varphi \Rightarrow AD'C\triangle$ és $e, f, 180° - \varphi \Rightarrow$ $\Rightarrow AD'C\triangle$. ② A középpontú a sugarú kör $\Rightarrow k$, B középpontú f sugarú kör $\Rightarrow l$. ③ AB-vel párhuzamos C-n át $\Rightarrow t$. ④ $k \cap AD' = B$, $l \cap t = D$. 2, 1 vagy 0 megoldás van.
b) Két egymástól független szerkesztést végzünk. ① $e, f, \varphi \Rightarrow AD'C\triangle$ és $e, f, 180° - \varphi \Rightarrow$ $\Rightarrow AD'C\triangle$, az alapok összege $AD' = a + c$. ② $[(a+c) + (a-c)] : 2 = a$ és $[(a+c) - (a-c)] : 2 =$ $= c$. ③ A középpontú a sugarú kör $\Rightarrow k$, C középpontú c sugarú kör $\Rightarrow l$. ④ AD'-vel párhuzamos C-n át $\Rightarrow t$. ⑤ $k \cap AD' = B$, $l \cap t = D$. 2, 1 vagy 0 megoldás van.

402. Tükrözzük az $ABCD$ négyszöget a BC oldal K felezőpontjára $\Rightarrow AD'A'D$ négyszög paralelogramma, aminek az MM' szakasz a középvonala $\Rightarrow DA' = 2k$.
1. eset: $2k, a, c$ szakaszokra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.
A szerkesztés: ① $2k, a, c \Rightarrow DA'C$. ② DA' felezőpontja F. ③ CF, $b/2$, $d/2 \Rightarrow FCK_1\triangle$ és $FCK_2\triangle$. ④ C pont tükörképe K_i pontra $\Rightarrow B_i$, A' pont tükörképe K pontra A_i. 2, 1 vagy 0 megoldás lehet.
2. eset: $a + c = 2k$. A szerkesztés: ① $a - c, b, d \Rightarrow AED\triangle$. ② D ponton át AE-vel párhuzamos egyenes $\Rightarrow e$, D középpontú c sugarú kör $\Rightarrow l$. ③ $l \cap e = C$, C középpontú b sugarú kör $\Rightarrow t$. ④ $t \cap AE = B$. A megoldások száma 0 vagy 1.
3. eset: $a + c \neq 2k$ és a, c, $2k$ szakaszokra nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség $\Rightarrow$ nincs megoldás.

Pont körüli forgatás

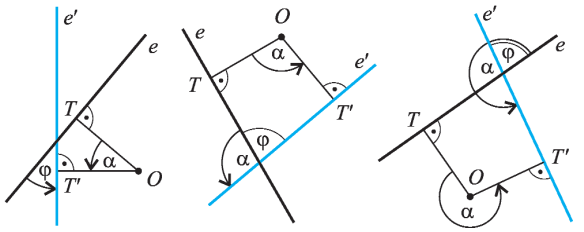
404.



403. $AC \parallel BC'$ miatt $CAB\sphericalangle$ és $C'BA\sphericalangle$ társszögek: $39° + 98° + \varphi = 180° \Rightarrow \varphi = 43°$. 43°-kal negatív irányban kell elforgatni B körül a BC oldalt.
404. Az ábra jelöléseit használjuk. A visszaverődés törvénye szerint: $\sphericalangle(f; m_1) = \sphericalangle(m_1; v_1) = \varepsilon$ és $\sphericalangle(f; m_2) = \sphericalangle(m_2; v_2) =$ $= \varepsilon + \alpha$. Az ábráról leolvasható: $\sphericalangle(v_1; m_2) = \varepsilon - \alpha$; $\sphericalangle(v_2; v_1) =$ $= \sphericalangle(v_2; m_2) - \sphericalangle(v_1; m_2) = \varepsilon + \alpha - (\varepsilon - \alpha) = 2\alpha$.
A **405.** és **406.** feladat megoldását az olvasóra bízzuk.

I.

409.



407. *a)* A szerkesztés: ① tetszőleges $P \in e$, P pont O körül α szöggel elforgatott képe $\rightarrow P'$ pont. ② $P'O$ egyenes $\rightarrow e'$.
b) Szerkesztés: ① tetszőleges $P, Q \in e$; P és Q pont O körül α szöggel elforgatott képe $\rightarrow P'$ és Q' pont. ② $P'Q'$ egyenes $\rightarrow e'$.

408. Adott az e egyenes, az O középpont és a P pont. Szerkesztés: *a)* ① O középpontú OP sugarú kör $\rightarrow k$. ② $k \cap e = P'$, $P'OP\sphericalangle = \alpha$. ③ Q pontot O körül α szöggel elforgatva $\rightarrow Q'$ pont. ④ $P'Q'$ egyenes $\rightarrow e'$ a megoldás. Az *a)* és *b)* részben a megoldások száma kettő, ha $d(O; e) < d(O; P)$; egy, ha $d(O; e) = d(O; P)$; nulla, ha $d(O; e) > d(O; P)$.

409. Legyen a T pont az O középpont merőleges vetülete az adott e egyenesen; az e egyenes O pont körül α szöggel elforgatott képe e'; e és e' egyenes hajlásszöge φ! Ekkor $T' \in e$; és $OT \perp e$ miatt $OT' \perp e' \Rightarrow TOT'\sphericalangle = \alpha$; és e, e' irányított szöge α.
1. eset: $0° \leq \alpha \leq 90° \Rightarrow \varphi = \alpha$.
2. eset: $90° < \alpha \leq 180° \Rightarrow \varphi = 180° - \alpha$.
3. eset: $180° < \alpha \leq 270°$ esetén $\varphi = \alpha - 180°$ és $270° < \alpha < 360°$ esetén $\varphi = 360° - \alpha$.

410. *a)* Legyenek az e és f egyenesek által bezárt szögek α és $180° - \alpha$. Szerkesztés: ① P pontból e-re állított merőleges egyenes talppontja $\rightarrow T$. ② T pontot elforgatjuk P körül α, illetve $180° - \alpha$ szöggel $\rightarrow T_1'$ és T_2'. ③ P-ben merőlegest állítunk PT_1'-re, illetve PT_2'-re $\rightarrow e'$ és e'' egyenes a megoldás. Egy megoldás van, ha P rajta van az e egyenesen vagy az e és f egyenes szögfelezőjén, két megoldás van egyébként.
b) Szerkesztés: ① tetszőleges f-re merőleges egyenes $\rightarrow g$. ② Az e egyenest az *a)* részben leírtak szerint P pont körül elforgatjuk úgy, hogy g-vel párhuzamos legyen. Egy megoldás van, ha P rajta van az e egyenesen, két megoldás van egyébként.

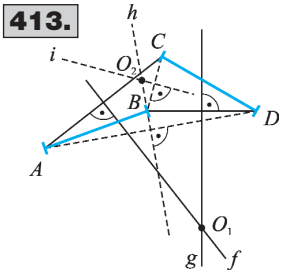
411. Az AB szakasz felező merőlegesének bármely pontja megoldás.

412. Legyen a középpont O, egy megfelelő pontpár P és P'. A pont körüli forgatás definíciója szerint $OP = OP' \Rightarrow PP'$ szakasz felezőmerőlegese átmegy az O ponton. Hasonlóan igazolható az állítás a két alakzat bármely megfelelő pontpárjára.

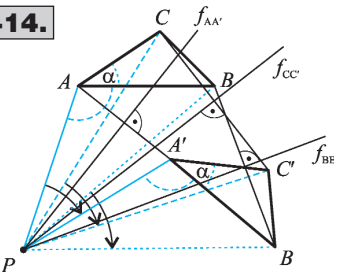
413. Szerkesztés: ① AC szakasz felezőmerőlegese $\rightarrow f$, BD szakasz felezőmerőlegese $\rightarrow g \Rightarrow f \cap g = O_1$ ② AD szakasz felezőmerőlegese $\rightarrow h$, BC szakasz felezőmerőlegese $\rightarrow i \Rightarrow h \cap i = O_2$. ③ Az O_i pont akkor megoldás, ha az egymásnak megfeleltetett pontokat egyező irányú és nagyságú elforgatás viszi egymásba. A megoldások száma 2 vagy 1.

414. Legyen a P pont az AA' és BB' felezőmerőlegeseinek metszéspontja! $PA = PA'$, $PB = PB'$, $AB = A'B' \Rightarrow PAB\triangle \cong PA'B'\triangle \Rightarrow PAB\sphericalangle = PA'B'\sphericalangle$. $PA = PA'$, $PAC\sphericalangle = PA'C'\sphericalangle$, $AC = A'C' \Rightarrow PAC\triangle \cong PA'C'\triangle \Rightarrow PC = PC' \Rightarrow P$ pont rajta van a CC' szakasz felezőmerőlegesén is $\Rightarrow$ a három felezőmerőleges egy ponton megy át.

413.



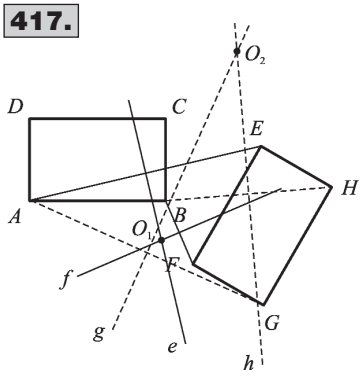
414.



415. A 414. feladatban láttuk, hogy AA', BB', CC' felező merőlegese egy ponton megy át. Ez a pont a forgatás középpontja, mert $APA' \sphericalangle = BPB' \sphericalangle = CPC' \sphericalangle$, és azonos irányú az elforgatás szöge. Egyértelmű a megoldás, mivel a feltételek miatt $f_{AA'}$, $f_{BB'}$, $f_{CC'}$ nem párhuzamosak.

416. A forgatás során a körüljárási irány nem változik $\Rightarrow$ $\Rightarrow ABC$ háromszög elforgatottjának megfelelő csúcsai DEF, EFD, FDE lehetnek.
Szerkesztés: ① AD, BE, CF szakaszok felezőmerőlegesei $\rightarrow$ $\rightarrow f, g, h \Rightarrow f \cap g \cap h = O_1$. ② AE, BF, CD szakaszok felezőmerőlegesei $\rightarrow i, j, k \Rightarrow i \cap j \cap k = O_2$. ③ AF, BD, CE szakaszok felezőmerőlegesei $\rightarrow l, m, n \Rightarrow l \cap m \cap n = O_3$. ④ Az O_i pont akkor megoldás, ha az egymásnak megfeleltetett pontokat egyező irányú és nagyságú elforgatás viszi egymásba. 3, 2 vagy 1 megoldás lehet.

417.



417. Az adott téglalapok $ABCD \cong EFGH$. $ABCD$ elforgatottjának megfelelő csúcsai $EFGH$ vagy $GHEF$ lehetnek a körüljárási irány szerint. Szerkesztés: ① AE szakasz felezőmerőlegese: e, BF szakasz felezőmerőlegese: f. ② $e \cap f = O_1$. ③ AG szakasz felezőmerőlegese: g, BH szakasz felezőmerőlegese: h. ④ $g \cap h = O_2$. ⑤ Az O_i pont akkor megoldás, ha az egymásnak megfeleltetett pontokat egyező irányú és nagyságú elforgatás viszi egymásba. A megoldások száma 2 vagy 1.

418. Szerkesztés: ① AA' szakasz felezőmerőlegese: e. ② BB' szakasz felezőmerőlegese: f. ③ $e \cap f = T$. Mivel T az $ABCD$ téglalap belső pontja, megfelel a forgatás középpontjának. Egy megoldás van.

419. A forgatás középpontja az átlók metszéspontja, szögének nagysága 90°, 180°, 270°, 360°-os lehet, iránya tetszőleges.

420. A forgatás középpontja a háromszög köré írt körének középpontja, szögének nagysága 120°, 240°, 360°-os lehet, iránya tetszőleges.

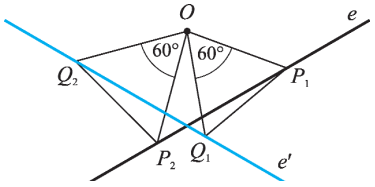
421. *a)* ① $C' \equiv B$. ② tetszőleges D pont: $D \in e$, $D \not\equiv C$. D pontot A körül elforgatjuk $CAB \sphericalangle$-gel $\rightarrow D'$. ③ $D'B$ egyenes $\rightarrow e'$.
b) ① $C'' \equiv A$. ② tetszőleges D pont: $D \in e$, $D \not\equiv C$. D pontot O körül elforgatjuk $COA \sphericalangle$-gel $\rightarrow$ $\rightarrow D''$. ③ $D''A$ egyenes $\rightarrow e''$.

422. Az e egyenes tetszőleges P pontjára $PO = OQ$ és $POQ \sphericalangle = 60°$, ezért Q pont a P-nek O pont körül 60°-kal elforgatott képe. A Q pontok halmaza az e egyenes O pont körüli 60°-os elforgatottja.

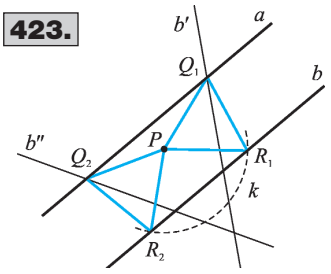
423. Szerkesztés: ① b egyenes elforgatása P pont körül +60°-kal és −60°-kal: b', b''. ② $b' \cap a = Q_1$, $b'' \cap a = Q_2$. ③ P középpontú Q_iP sugarú kör: k. ④ $k \cap b = \{R_1; R_2\}$. Két egybevágó megoldás van.

424. Szerkesztés: ① c egyenes elforgatása a b egyenes tetszőleges P pontja körül +60°-kal és −60°-kal: c', c''. ② $c' \cap a = Q_1$, $c'' \cap a = Q_2$. ③ P középpontú Q_iP sugarú kör: k. ④ $k \cap b = \{R_1; R_2\}$. A szerkesztés független attól, hogy a b egyenes az a és c között van-e vagy sem. Végtelen sok egybevágó háromszög a megoldás.

422.

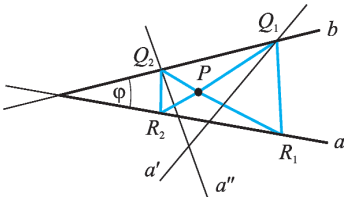


423.

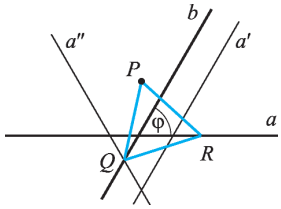


I.

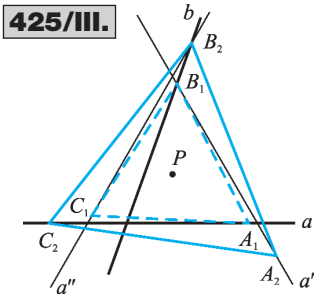
425/I.



425/II.



425/III.



425. *a)* Legyen az adott a és b egyenes hajlásszöge φ, a szerkesztendő háromszög PQR.
Szerkesztés: ① az a egyenest az adott P pont körül $+60°$-kal és $-60°$-kal elforgatjuk: a', a''. ② $a' \cap b = Q_1$, $a'' \cap b = Q_2$. ③ Q_1 pontot P körül $-60°$-kal elforgatjuk: R_1; Q_2 pontot P körül $+60°$-kal elforgatjuk: R_2. Egy megoldás van, ha $\varphi = 60°$, két megoldás van egyébként.
b) Legyen az adott a és b egyenes hajlásszöge φ, a szerkesztendő háromszög ABC.
Szerkesztés: ① az a egyenest az adott P pont körül elforgatjuk $+120°$-kal és $-120°$-kal: a', a''. ② $a' \cap b = B_1$, $a'' \cap b = B_2$. ③ B_1 pontot P körül $-120°$-kal és $+120°$-kal elforgatjuk: A_1, C_1. ④ B_2 pontot P körül $-120°$-kal és $+120°$-kal elforgatjuk: A_2, C_2. Egy megoldás van, ha $\varphi = 60°$, két megoldás van egyébként.

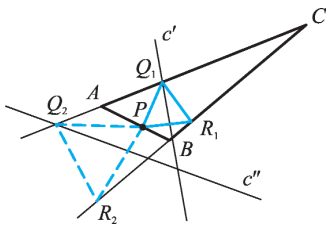
426. Szerkesztés: ① a BC egyenest az adott P pont körül $+60°$-kal és $-60°$-kal elforgatjuk: c', c''. ② $c' \cap e(A; C) = Q_1$, $c'' \cap e(A; C) = Q_2$. ③ Q_1 pontot P körül $-60°$-kal elforgatjuk: R_1, Q_2 pontot P körül $+60°$-kal elforgatjuk: R_2. A megoldások száma 1 vagy 0 aszerint, hogy létrejön-e a Q_1 és Q_2 metszéspont, illetve a Q_i és R_i belső pontja-e az $ABC\triangle$ oldalainak.

427. Szerkesztés: ① az a egyenest az adott P pont körül $+90°$-kal és $-90°$-kal elforgatjuk $\rightarrow$ $\rightarrow a', a''$. ② $a' \cap b = Q_1$, $a'' \cap b = Q_2$. ③ Q_1 pontot P körül $-90°$-kal elforgatjuk $\Rightarrow R_1$, Q_2 pontot P körül $+90°$-kal elforgatjuk $\rightarrow R_2$. Ha a P pont az a és b egyenes metszéspontja, akkor vagy végtelen sok megoldás van (a két egyenes merőleges egymásra), vagy nincs megoldás (a két egyenes nem merőleges egymásra). Két egybevágó megoldás van, ha $a \parallel b$. Egyébként két nem egybevágó megoldás van.

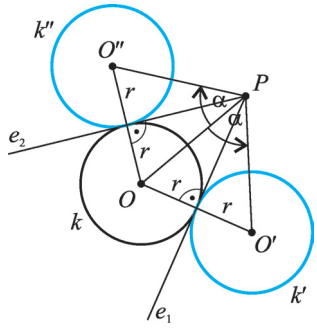
428. Legyen $a \parallel b$, $PQRS$ a szerkesztendő négyzet.
Szerkesztés: ① a egyenest P pont körül $+90°$-kal és $-90°$-kal elforgatjuk $\rightarrow a'$, a''. ② $a' \cap b = Q_1$, $a'' \cap b = Q_2$. ③ Q_1 pontot $-90°$-kal, Q_2 pontot $+90°$-kal elforgatjuk P pont körül $\rightarrow S_1$, S_2. ④ P tükrözése Q_iS_i egyenesre $\rightarrow R_i$. Mindig két egybevágó megoldás van.

429. *a)* Szerkesztés: ① a k kör O középpontját az adott P pont körül $+90°$-kal és $-90°$-kal elforgatjuk $\rightarrow O'$, O''. ② O' középpontú OP sugarú kör $\rightarrow k'$, O'' középpontú OP sugarú kör $\rightarrow$ $\rightarrow k''$. Két megoldás van.
b) Szerkesztés: ① PO szárú, $2r$ alapú egyenlő szárú háromszög $\rightarrow$ szárszöge α. ② a k kört az adott P pont körül $+\alpha$ és $-\alpha$ szöggel elforgatjuk $\rightarrow k', k''$. Két megoldás van.

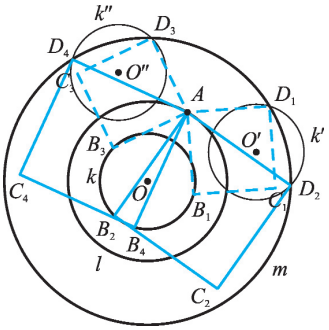
426.



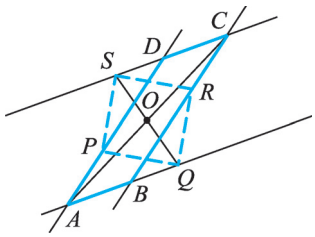
429.



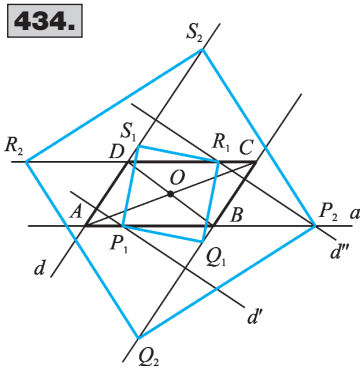
432.



433.



434.



430. Szerkesztés: ① az e egyenest az adott A pont körül elforgatjuk $+60°$-kal és $-60°$-kal $\rightarrow$ $\rightarrow e', e''$. ② $e' \cap k = \{C_1; C_2\}$, $e'' \cap k = \{C_3; C_4\}$. ③ C_1, C_2 $-60°$-os A körüli elforgatottja: B_1, B_2. ④ C_3, C_4 $+60°$-os A körüli elforgatottja: B_3, B_4. A megoldások száma 0, 1, 2, 3, 4 lehet.

431. Szerkesztés: ① a k kört az adott A pont körül elforgatjuk $+60°$-kal és $-60°$-kal $\rightarrow k', k''$. ② $k' \cap l = \{B_1; B_2\}$, $k'' \cap l = \{B_3; B_4\}$. ③ B_1, B_2 $-60°$-os A körüli elforgatottja: C_1, C_2. ④ B_3, B_4 $+60°$-os A körüli elforgatottja: C_3, C_4. A megoldások száma 0, 1, 2, 3, 4, vagy végtelen sok lehet.

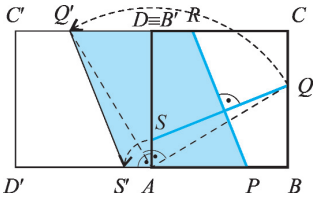
432. Szerkesztés: ① a k kört az l kör tetszőleges A pontja körül elforgatjuk $+90°$-kal és $-90°$-kal $\rightarrow k', k''$. ② $k' \cap m = \{D_1; D_2\}$, $k'' \cap m = \{D_3; D_4\}$. ③ D_1, D_2 $-90°$-os A körüli elforgatottja: B_1, B_2. ④ D_3, D_4 $+90°$-os A körüli elforgatottja: B_3, B_4. ⑤ D_i középpontú AD_i sugarú kör $\rightarrow p_i$; B_i középpontú AD_i sugarú kör $\rightarrow q_i$. ⑥ $p_i \cap q_i = C_i$. Adott A pont esetén a megoldások száma 0, 2, 4 lehet, két-két négyzet mindig egybevágó a szimmetria miatt. Mivel A tetszőleges, 0 vagy végtelen sok egybevágó megoldás lehet.

433. $PQRS$ négyzet középpontja $O \Rightarrow PO = OR \Rightarrow O$ pont egyenlő távolságra van az AD és BC párhuzamos egyenesektől. $\Rightarrow O$ rajta van az AD és BC középpárhuzamosán. Hasonlóan O rajta van az AB és CD középpárhuzamosán. $\Rightarrow O$ a két középpárhuzamos metszéspontja $\Rightarrow$ O az $ABCD$ paralelogramma középpontja.

434. Legyen $AB \parallel CD, AB = CD$. $PQRS$ a szerkesztendő négyzet. Szerkesztés: ① $e(A; C) \cap e(B; D) = O$, $e(A; D) = d$, $e(A; B) = a$. ② d egyenest O pont körül $+90°$-kal és $-90°$-kal elforgatjuk $\rightarrow d', d''$. ③ $d' \cap a = P_1$, $d'' \cap a = P_2$. ④ P_1 pontot $-90°$-kal, P_2 pontot $+90°$-kal elforgatjuk O pont körül $\rightarrow S_1, S_2$. ⑤ P_i tükrözése O pontra $\rightarrow R_i$; S_i tükrözése O pontra $\rightarrow Q_i$. Nincs megoldás, ha $ABCD$ téglalap és $AB \neq AD$. Végtelen sok megoldás van, ha $ABCD$ négyzet. Egyébként két megoldás van.

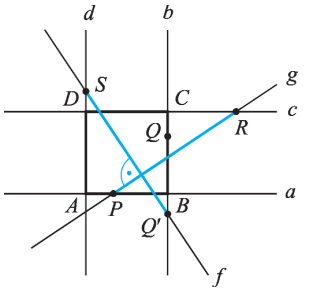
435. Adott az $ABCD$ négyzet, $SQ \perp RP$. Forgassuk el $ABCD$-t A körül $+90°$-kal: $ADC'D'$ négyzet. QS elforgatottja $Q'S' \Rightarrow$ $\Rightarrow Q'S' \parallel RP$, valamint $Q'R \parallel S'P \Rightarrow RPS'Q'$ paralelogramma $\Rightarrow$ $\Rightarrow QS = Q'S' = RP$.

435.



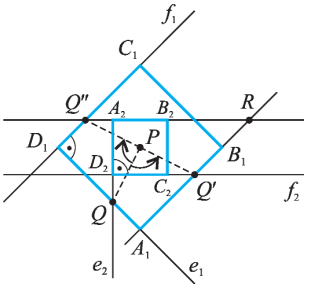
436. A 435. feladatban láttuk, hogy ha $f \perp g$, akkor $PR = SQ'$. Szerkesztés: ① S pontból merőlegest állítunk PR egyenesre $\rightarrow f$. ② S középpontú PR sugarú kör $\rightarrow k$. ③ $k \cap f = Q'$. ④ QQ' a négyzet egyik oldalegyenese $\rightarrow b$. ⑤ P pontból merőlegest állítunk QQ'-re $\rightarrow a$; R pontból merőlegest állítunk QQ'-re $\rightarrow c$; S pontból merőlegest állítunk a-ra $\rightarrow d$. ⑥ $a \cap d = A$, $a \cap b = B$, $b \cap c = C$, $c \cap d = D$. Egyértelmű a megoldás, ha az adott P, Q, R, S pontok sorban az a, b, c, d, egyenesek pontjai.

436.

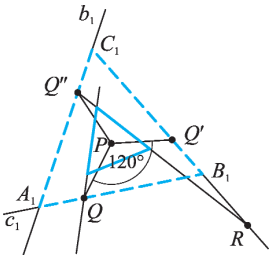


I.

437.



438.



437. Szerkesztés: ① Q pontot elforgatjuk P pont körül $+90°$-kal és $-90°$-kal $\rightarrow Q'$, Q''. ② $Q'R$ és $Q''R$ egyenest tükrözzük P pontra $\rightarrow f_1$, f_2. ③ Q pontból merőlegest állítunk $Q'R$ és $Q''R$ egyenesre $\rightarrow e_1$, e_2. ④ $e_1 \cap f_1 = D_1$, $e_2 \cap f_2 = D_2$, $e_1 \cap Q'R = A_1$, $e_2 \cap Q''R = A_2$. ⑤ A_i tükrözése P pontra $\rightarrow C_i$; D_i tükrözése P pontra $\rightarrow B_i$. A megoldások száma 2 vagy végtelen sok.

438. Szerkesztés: ① Q pontot elforgatjuk P pont körül $+120°$-kal és $-120°$-kal $\rightarrow Q'$, Q''. ② $Q'R$ egyenest elforgatjuk P pont körül $-120°$-kal és $+120°$-kal $\rightarrow c_1$, b_1. ③ $Q''R$ egyenest elforgatjuk P pont körül $+120°$-kal és $-120°$-kal $\rightarrow c_2$, b_2. ④ $c_1 \cap b_1 = A_1$, $c_2 \cap b_2 = A_2$, $c_1 \cap Q'R = B_1$, $c_2 \cap Q''R = B_2$, $b_1 \cap Q'R = C_1$, $b_2 \cap Q''R = C_2$. Két megoldás van, ha Q_iR, végtelen sok megoldás van, ha $Q_i = \mathrm{R}$.

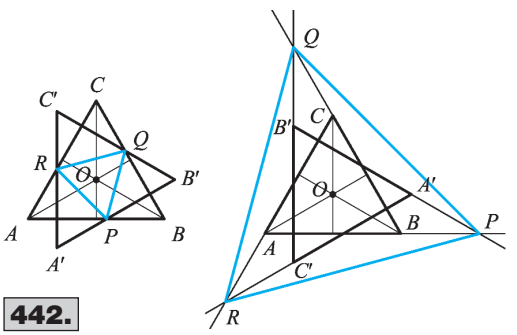
439. Szerkesztés: ① e egyenest elforgatjuk C pont körül $+\alpha$ és $-\alpha$ szöggel $\rightarrow e'$, e''. ② $e' \cap f = B_1$, $e'' \cap f = B_2$,. ③ C középpontú CB_i sugarú kör $\rightarrow k_i$. ④ $k_1 \cap e = A_1$, $k_2 \cap e = A_2$. A megoldások száma lehet 1, 2, végtelen sok.

440. $ABC\triangle$ szabályos, középpontja O; $PQR\triangle$ szabályos és $P \in BC$, $Q \in AC$; $R \in AB$. $PQR\triangle$ szabályos $\Rightarrow AQR\sphericalangle = 180° - (60° + ARQ\sphericalangle)$ és $PRB\sphericalangle = 180° - (ARQ\sphericalangle + 60°)$. $AQR\sphericalangle = PRB\sphericalangle$, $QR = PR$, $QAR\sphericalangle = PBR\sphericalangle = 60° \Rightarrow ARQ\triangle \cong BPR\triangle \Rightarrow AR = BP$ és $QA = RB$. $ABC\triangle$-et O pont körül $+120°$-kal elforgatva $A' \equiv B$, $(AR)' = BP$, $(QA)' = RB \Rightarrow R' \equiv B$, $Q' \equiv R \Rightarrow O$ pont rajta van a QR és az RP szakasz felező merőlegesén, vagyis $PQR\triangle$-nek is középpontja.

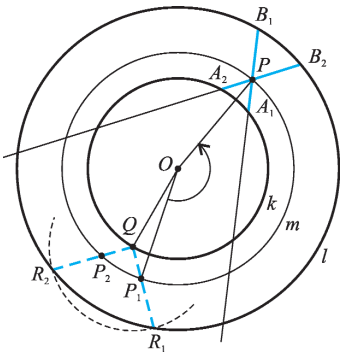
441. ABC szabályos háromszögbe írunk b oldalú $A'B'C'$ szabályos háromszöget. A 439. feladatban láttuk, hogy $ABC\triangle$ és $A'B'C'\triangle$ középpontja egybeesik. Szerkesztés: ① b oldalú szabályos háromszög szerkesztése $\rightarrow PQR\triangle$. ② $PQR\triangle$ középpontja K; $ABC\triangle$ középpontja O. ③ O középpontú PK sugarú kör $\rightarrow k$. ④ $k \cap BC = \{A'; A''\}$, $k \cap AC = \{B'; B''\}$, $k \cap AB = \{C'; C''\} \Rightarrow$ $\Rightarrow A'B'C'\triangle$ és $A''B''C''\triangle$. Két egybevágó háromszög a megoldás, ha $\frac{a}{2} < b < a$. Egy megoldás van, ha $b = \frac{a}{2}$. Nincs megoldás, ha $b < \frac{a}{2}$ vagy $b \geq a$.

442. Legyen az $ABC\triangle$ O pont körüli φ szögű elforgatottja $A'B'C'\triangle$. Forgassuk el O pont körül $+120°$-kal az $ABC\triangle$-et: A képe B; B képe C; C képe A. Forgassuk el O pont körül $+120°$-kal az $A'B'C'\triangle$-et: A' képe B'; B' képe C'; C' képe A'. Mivel két egyenes metszéspontjának elforgatottja megegyezik az elforgatott egyenesek metszéspontjával: $AB \cap A'B' = P \Rightarrow BC \cap B'C' = P'$ és $BC \cap B'C' = Q \Rightarrow$ $\Rightarrow CA \cap C'A' = Q'$ és $CA \cap C'A' = R \Rightarrow AB \cap A'B' = R'$. Ezek szerint $P' \equiv Q$; $Q' \equiv R$; $R' \equiv P$. $\Rightarrow$ $\Rightarrow PQR$-et az O pont körüli $+120°$-os elforgatás önmagába viszi $\Rightarrow PQR\triangle$ szabályos. Ha $\varphi = 120°$, vagy $\varphi = 180°$, vagy $\varphi = 240°$, akkor nem jön létre a $PQR\triangle$.

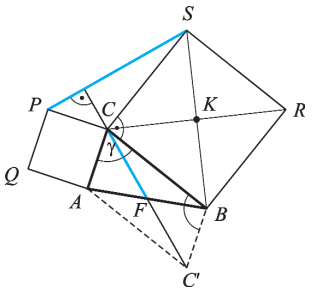
442.



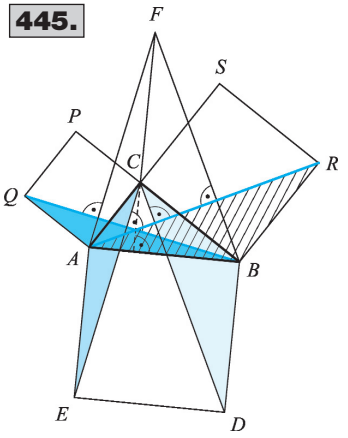
443.



444.



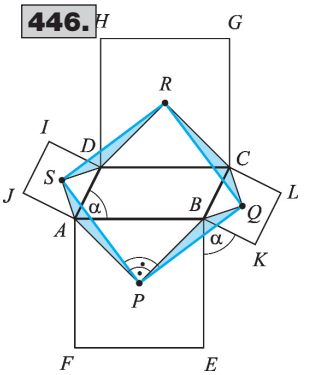
445.



443. Legyen Q pont a k kör tetszőleges pontja, d az adott hosszúság. Szerkesztés: ① Q középpontú d sugarú kör és k kör közös pontjai: R_1, R_2. ② O középpontú OP sugarú kör $\rightarrow m$. ③ $m \cap QR_1 = P_1$, $m \cap QR_2 = P_2$. ④ QR_1 szakaszt elforgatjuk O pont körül $P_1OP\sphericalangle$-gel $\rightarrow A_1B_1$. ⑤ QR_2 szakaszt elforgatjuk O pont körül $P_2OP\sphericalangle$-gel $\rightarrow A_2B_2$. A megoldások száma 2, 1 vagy 0.

444. A C csúcshoz tartozó súlyvonal felezi az AB szakaszt $\rightarrow F$. C pont F pontra vonatkozó tükörképe C'. $AF = FB$ és $CF = C'F \Rightarrow$ $\Rightarrow AC'BC$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow AC \parallel BC'$, $AC = BC'$ és $C'BC\sphericalangle = 180° - \gamma$. $BC' = AC = CP$ ($ACPQ$ négyzet oldalai), $CB = CS$ ($CBRS$ négyzet oldalai), $180° - \gamma = PCS\sphericalangle = C'BC\sphericalangle \Rightarrow$ $\Rightarrow PCS\triangle \cong C'BC\triangle$. $CB \perp CS \Rightarrow PCS\triangle$ a $C'BC\triangle$ K pont körüli $-90°$-os elforgatottja $\Rightarrow PS = CC'$ és $PS \perp CC' \Rightarrow PS = 2CF$ és $PS \perp CC'$.

446.



445. $BRSC$, $ACPQ$, $ABDE$ négyzetek, $CF = AB$ és $CF \perp AB$. $BCD\triangle$ B pont körüli $-90°$-os elforgatása $\Rightarrow B' \equiv B$, $C' \equiv R$, $D' \equiv A \rightarrow BRA\triangle \Rightarrow CD \perp AR$. $ACE\triangle$ A pont körüli $+90°$-os elforgatása $\Rightarrow A' \equiv A$, $C' \equiv Q$, $E' \equiv B \rightarrow AQB\triangle \Rightarrow CE \perp BQ$. $CF = AB$ és $CF \perp AB \Rightarrow CF = BD$. $CF = AE$, $CF \parallel BD \parallel AE \Rightarrow CDBF$ és $CEAF$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow CD \parallel BF$, $CE \parallel AF \Rightarrow BF \perp AR$, $AF \perp BQ$. $ABF\triangle$-ben CF, AR és BQ magasságvonalak, azaz egy pontban metszik egymást. CF egyenes az $ABC\triangle$-nek is magasságvonala $\Rightarrow$ $\Rightarrow AR \cap BQ \in CF$.

446. $ABEF$, $BCLK$, $CDHG$, $ADIJ$ négyzetek, $AB \parallel CD$ és $AB = CD$. $AP = PB$ ($ABEF$ négyzet félátlói), $AS = BQ$ ($ADIJ$, illetve $BCLK$ négyzet félátlói), $SAP\sphericalangle = QBP\sphericalangle = 45° + \alpha + 45° \Rightarrow$ $\Rightarrow SAP\triangle \cong QBP\triangle$. $APB\sphericalangle = 90° \Rightarrow SAP\triangle$ P pont körüli 90°-os elforgatottja a $QBP\triangle \Rightarrow SP = PQ$ és $SPQ\sphericalangle = 90°$. Hasonlóan belátható, hogy $PQ = QR$ és $PQR\sphericalangle = 90° \Rightarrow PQRS$ négyszög négyzet.

447. Megoldását az olvasóra bízzuk.

Eltolás

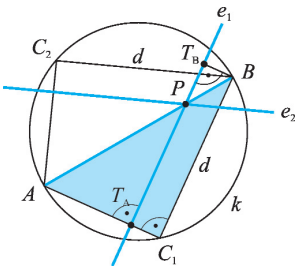
448. $ABCD$ négyzet $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{DP}$ vektorral való eltolása lehet a megoldás.

449. $\overrightarrow{OK}$ vektorral toljuk el a négyzetet, ahol a négyzet középpontja O, a köré pedig K.

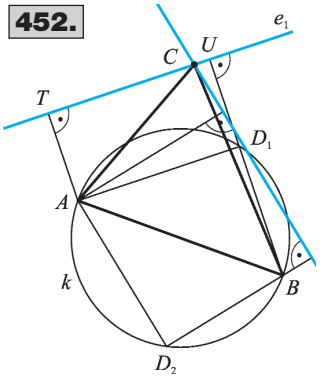
450. Legyen a b egyenesen lévő szakasz merőleges vetülete az a egyenesen d hosszúságú. Szerkesztés: ① Tetszőleges $TU = d$ szakasz felvétele az a egyenesen. ② T-ben és U-ban merőlegest állítunk a-ra $\rightarrow m$, n. ③ $m \cap b = P$, $n \cap b = Q$. Végtelen sok megoldás van.

I

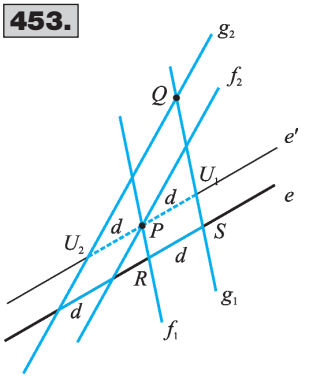
451.



452.



453.



451. $T_BT_A \xrightarrow{\overrightarrow{T_BB}} BC_1 \Rightarrow ABC_1\triangle$ derékszögű. Szerkesztés: ① AB Thalész köre $\rightarrow k$. ② B középpontú d sugarú kör $\rightarrow l$. ③ $l \cap k = \{C_1; C_2\}$. ④ BC_i-vel P ponton át párhuzamost húzunk $\rightarrow$ $\rightarrow e_i$ egyenes. Két megoldás van, ha $d < AB$. Egy megoldás van, ha $d = AB$. Nincs megoldás, ha $d > AB$.

452. A 451. feladat módszerével szerkesztünk: ① AB Thalész köre $\rightarrow k$. ② A középpontú d sugarú kör $\rightarrow l$. ③ $l \cap k = \{D_1; D_2\}$. ④ AD_i-vel C ponton át párhuzamost húzunk $\rightarrow e_i$ egyenes. Két megoldás van, ha $d < AB$. Egy megoldás van, ha $d = AB$. Nincs megoldás, ha $d > AB$. Hasonló a szerkesztés A, illetve B csúcson átmenő egyenesek esetén is.

453. Adott az e egyenes, valamint P és Q pontok.

1. eset: PQ nem párhuzamos az e egyenessel. Szerkesztés: ① P ponton át párhuzamost húzunk e egyenessel $\rightarrow e'$. ② P középpontú d sugarú kör $\rightarrow l$. ③ $l \cap e' = \{U_1; U_2\}$. ④ U_iQ egyenes $\rightarrow g_i$. ⑤ g_i-vel P ponton át párhuzamost húzunk $\rightarrow f_i$ egyenes. Két megoldás van.

2. eset: Ha $PQ \parallel e$ és $d(P; Q) = d$, akkor végtelen sok megoldás van, mert bármely P-n, ill. Q-n áthaladó párhuzamos egyenespár megfelelő.

3. eset: Ha $PQ \parallel e$ és $d(P; Q) \neq d$, akkor nincs megoldás.

454. Toljuk el az $ABC\triangle$-et az e egyenessel párhuzamosan úgy, hogy B csúcsa az f egyenesre kerüljön. Szerkesztés: ① B ponton át párhuzamost húzunk e egyenessel $\rightarrow e'$. ② $f \cap e' = B'$. ③ $\overrightarrow{BB'}$ vektorral eltoljuk A és C pontot $\rightarrow A'$ és C'. Nincs megoldás, ha $e' \parallel f$, végtelen sok megoldás van, ha $e' \equiv f$, egyébként egy megoldás van.

455. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow ABB'A'$ paralelogramma $\Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Hasonlóan $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

456. O_1 és O_2 a k_1, ill. k_2 kör középpontja. A k_1 kört $\overrightarrow{O_1O_2}$ vektorral eltolva k_2 kör adódik. $A_i \in k_1$ és $A_iB_i \parallel O_1O_2$ és $B_i \in k_2 \Rightarrow B_i$ pont az A_i-nek $\overrightarrow{O_1O_2}$ vektorral való eltoltja $\Rightarrow A_iB_i = O_1O_2$.

457. Adott a és b egyenes, AB szakasz. Szerkesztés: ① a eltoltja $\overrightarrow{AB}$-ral: a''. ② a eltoltja $\overrightarrow{BA}$-ral: a'. ③ $a' \cap b = C_2$ és $a'' \cap b = C_1$. ④ C_1 eltoltja $\overrightarrow{BA}$-ral: D_1 és C_2 eltoltja $\overrightarrow{AB}$-ral: D_2. Két megoldás van.

458. Szerkesztés: ① $e \xrightarrow{\overrightarrow{AB}} e'$ és $e \xrightarrow{\overrightarrow{BA}} e''$ ② $e' \cap f = C_1$ és $e'' \cap f = C_2$. ③ $C_1 \xrightarrow{\overrightarrow{BA}} D_1$ és $C_2 \xrightarrow{\overrightarrow{AB}} D_2$. A megoldások száma 0, 1, 2 vagy végtelen sok lehet.

459. Adott az $ABC\triangle$ és a PQ szakasz. A, B, C pontokon át párhuzamosakat húzunk PQ-val $\rightarrow f, g, h$. Közülük valamelyik metszi az egyik oldalt, például f egyenes metszi a BC szakaszt. $\Rightarrow BC$ oldalon lesz két csúcs, ezért az a oldalegyenesből indul ki a szerkesztés.

Szerkesztés: ① $a \xrightarrow{\overrightarrow{QP}} a'$. ② $a' \cap AC = G$ és $a' \cap AB = J$. ③ $G \xrightarrow{\overrightarrow{PQ}} H$ és $J \xrightarrow{\overrightarrow{PQ}} I \Rightarrow$ $\Rightarrow GHIJ$ paralelogramma. A megoldások száma 1 vagy 0.

460. Adott a k kör és az AB szakasz. Szerkesztés: ① $k \xrightarrow{\overrightarrow{AB}} k'$. ② $k \cap k' = \{M_1; M_2\}$. ③ $M_1 \xrightarrow{\overrightarrow{BA}} N_1$ és $M_2 \xrightarrow{\overrightarrow{BA}} N_2$. Két megoldás van, ha $d(A; B) < 2r$; egy megoldás van, ha $d(A; B) = 2r$; nincs megoldás, ha $d(A; B) > 2r$.

461. Szerkesztés: ① $k \xrightarrow{\overrightarrow{AB}} k'$. ② $k \cap k' = \{C_1; C_2\}$. ③ $C_1 \xrightarrow{\overrightarrow{BA}} D_1$ és $C_2 \xrightarrow{\overrightarrow{BA}} D_2$. Két megoldás van, ha $d(A; B) < 2r$; egy megoldás van, ha $d(A; B) = 2r$; nincs megoldás, ha $d(A; B) > 2r$ vagy C_i, D_i, A, B egy egyenesen vannak.

462. Adott a k kör és az AB szakasz. Szerkesztés: ① $k \xrightarrow{\overrightarrow{AB}} k'$. ② $k \cap k' = \{C_1; C_2\}$. ③ C_iA szakasz felezőpontja O_i. Két megoldás van, ha $d(A; B) < 2r$; egy megoldás van, ha $d(A; B) = 2r$; nincs megoldás, ha $d(A; B) > 2r$.

463. Adott a k és l kör, valamint a PQ szakasz. Szerkesztés: ① $k \xrightarrow{\overrightarrow{PQ}} k'$ és $k \xrightarrow{\overrightarrow{QP}} k''$. ② $l \cap k' = \{M_1; M_2\}$ és $l \cap k'' = \{M_3; M_4\}$. ③ $M_1 \xrightarrow{\overrightarrow{QP}} N_1$ és $M_2 \xrightarrow{\overrightarrow{QP}} N_2$, $M_3 \xrightarrow{\overrightarrow{PQ}} N_3$ és $M_4 \xrightarrow{\overrightarrow{PQ}} N_4$. 0; 1; 2; 3; 4 vagy végtelen sok megoldás lehet.

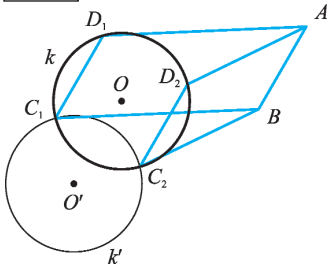
464. Adott az e egyenes, a k kör és az AB szakasz. Szerkesztés: ① $e \xrightarrow{\overrightarrow{AB}} e'$ és $e \xrightarrow{\overrightarrow{BA}} e''$. ② $k \cap e' = \{E_1; E_2\}$ és $k \cap e'' = \{E_3; E_4\}$. ③ $E_1 \xrightarrow{\overrightarrow{BA}} F_1$, $E_2 \xrightarrow{\overrightarrow{BA}} F_2$, $E_3 \xrightarrow{\overrightarrow{AB}} F_3$ és $E_4 \xrightarrow{\overrightarrow{AB}} F_4$. ④ E_iF_i egyenesek a megoldások. Négy, három, kettő, egy vagy nulla megoldás lehet.

465. Szerkesztés: ① O pontból az OY sugárra d távolságot mérünk $\rightarrow R$. ② R ponton át OX sugárral párhuzamost húzunk $\rightarrow e$. ③ Az e egyenes és XY ív metszéspontja $\rightarrow Q$. ④ Q pontot $\overrightarrow{RO}$ vektorral eltoljuk $\rightarrow P$. ⑤ PQ szakasz. ⑥ Hasonlóan adódik ST szakasz. A megoldások száma 2 vagy 0.

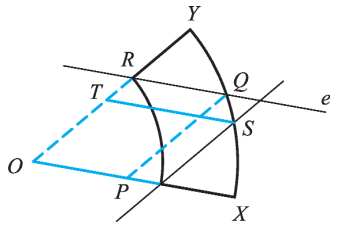
466. Legyen az $ABC\triangle$-ben $AC = BC$; valamint $P \in AB$; $Q \in AC$; $R \in BC$ úgy, hogy $PQ \parallel BC$ és $PR \parallel AC$. $PQ \parallel CR$, $PR \parallel QC \Rightarrow$ a $PRCQ$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow \underline{PR = QC}$. $APQ\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \alpha$, mert egyállású szögek $\Rightarrow APQ\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow \underline{AQ = QP}$. $PQ + PR = AQ + QC = AC$, ami állandó.

467. Adott az $ABC\triangle$ és egy d hosszúságú szakasz. A 466. feladatban láttuk, hogy CPQ egyenlő szárú háromszögben PQ szakasz pontjaira fennáll az $RR' + RR'' = CP$ egyenlőség.
Szerkesztés: ① $CP = CQ = d$, ahol P a CA félegyenes, Q pedig a CB félegyenes pontja. ② $PQ \cap AB = R$. Egy adott oldalhoz nulla vagy egy vagy végtelen sok megoldás lehet.

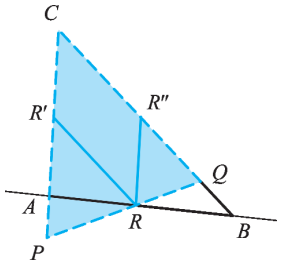
461.



465.

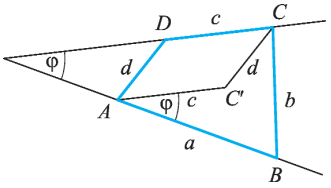


467.

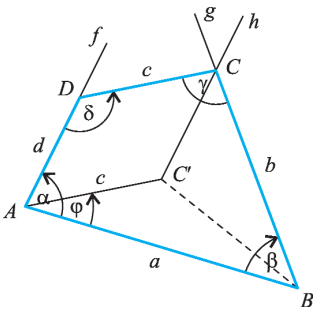


I

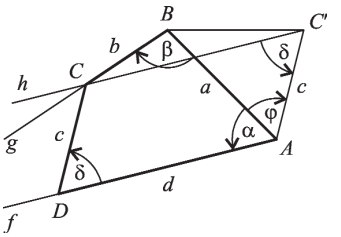
469.



470/I.



470/II.



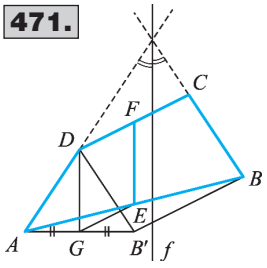
468. Az $ABCD$ trapéz alapjai: $AB \geq CD$. Toljuk el a B csúcsot $\overrightarrow{CD}$ vektorral: E.
Szerkesztés: ① $a - c, b, d \rightarrow AED\triangle$. ② AE szakasszal párhuzamos egyenest húzunk D ponton át $\rightarrow e$. ③ e egyenesre D pontból c szakasz felmérése $\rightarrow C$ (AD-nek E-vel azonos oldalán). ④ C pontot $\overrightarrow{DE}$-ral eltoljuk $\rightarrow B$ pont. Nincs megoldás, ha $a - c, b, d$ szakaszokra nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, egyébként egy megoldás van.

469. Ha C pont $\overrightarrow{DA}$ vektorral eltolt képe C' pont, akkor $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DA}$ és $C'AB\sphericalangle = \varphi$.
Szerkesztés: ① $a, c, \varphi \rightarrow ABC'\triangle$. ② C' középpontú d sugarú kör és B középpontú b sugarú kör metszéspontja C_1, C_2. ③ $C_1 \xrightarrow{\overrightarrow{C'A}} D_1$ és $C_2 \xrightarrow{\overrightarrow{C'A}} D_2$. Ha $\varphi \neq 0$, akkor 2, 1 vagy 0 lehet a megoldások száma. Ha $\varphi = 0$, akkor $AB \parallel CD \Rightarrow$ az $ABCD$ trapéz négy oldal ismeretében megszerkeszthető (lásd 468. feladat megoldását).

470. Toljuk el a C csúcsot $\overrightarrow{DA}$ vektorral $\rightarrow C'$ pont és $AC'CD$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow$
$\Rightarrow |BAC'\sphericalangle| = |\alpha - (180^\circ - \delta)| = |\alpha + \delta - 180^\circ|$.
1. eset: $\alpha + \delta \neq 180^\circ$. Szerkesztés: ① $a, c, \alpha + \delta - 180^\circ$ vagy $a, c, 180^\circ - (\alpha + \delta) \rightarrow ABC'\triangle$. ② A pontban AB egyenesre α szöget mérünk $\rightarrow f$ félegyenes; B pontban BA egyenesre β szöget mérünk φ-vel ellentétes irányban $\rightarrow g$ félegyenes. ③ f félegyenessel párhuzamost húzunk C' ponton át $\rightarrow h$. ④ $h \cap g = C$. ⑤ $C \xrightarrow{\overrightarrow{C'A}} D$.
2. eset: $\alpha + \delta = 180^\circ$. Ekkor trapéz szerkesztése a feladat.

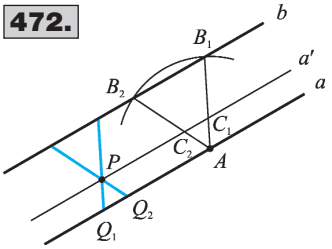
471. Legyen $AD = BC$ és EF az $ABCD$ négyszög középvonala $\Rightarrow DF = FC$ és $AE = EB$. Az AD és BC szögfelezője legyen f. BC szakaszt $\overrightarrow{CD}$ vektorral eltolva $B'D$ szakasz adódik $\Rightarrow$

471.

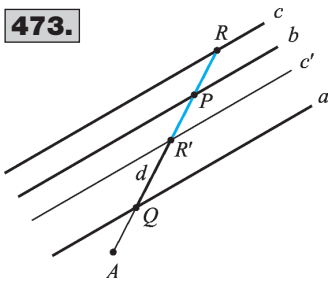


$\Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BB'}$ és $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'D} \Rightarrow \overrightarrow{FD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$. $AB'B\triangle$ GE középvonalára $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$. Tehát $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{FD}$, ezért $GEFD$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow \underline{EF \parallel GD}$. $AD = BC = B'D \Rightarrow AB'D\triangle$ egyenlő szárú és DG az $ADB'\sphericalangle$ szögfelezője. $B'D \parallel BC \Rightarrow \underline{DG \parallel f}$. Az aláhúzottakból $\Rightarrow$
$\Rightarrow EF \parallel f$. Húrtrapéz esetén EF középvonal egyben az f szögfelező $\Rightarrow$
$\Rightarrow EF \parallel f$ elfajulóan teljesül.

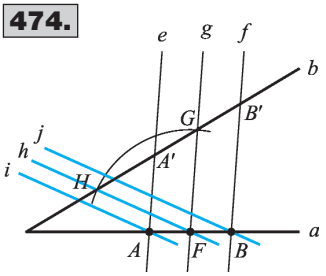
472.



473.



474.



472. Szerkesztés: ① Az a egyenes tetszőleges A pontja köré d sugarú kört rajzolunk $\rightarrow k$. ② $k \cap b = \{B_1; B_2\}$. ③ P ponton át párhuzamost húzunk a egyenessel $\rightarrow a'$. ④ $a' \cap AB_i = C_i$. ⑤ $A \xrightarrow{\overrightarrow{C_iP}} Q_i$. ⑥ Q_iP egyenes a keresett szelő. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 a d szakasz hosszától és az a, b egyenesek távolságától függően.

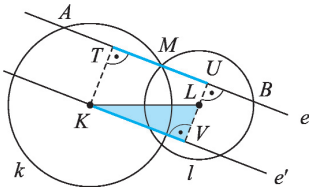
473. c-t tükrözzük b-re $\rightarrow c'$, ami egyúttal c középpontos tükörképe is b bármely pontjára. $\Rightarrow PR = PR'$ és $|PQ - PR| = |PQ - PR'| = R'Q$. Az A ponton át olyan szelőt szerkesztünk, amelyből az a és a vele párhuzamos c' egyenes d hosszúságú szakaszt metsz ki (lásd a 472. feladatot).

474. $AA' \parallel BB'$, $AA' + BB' = d$, $ABB'A'$ négyszög trapéz, melynek középvonala $FG = d/2$. Szerkesztés: ① AB szakasz felezőpontja F, F középpontú $d/2$ sugarú kör $\rightarrow k$. ② $k \cap b = \{G; H\}$. ③ GF-fel párhuzamos egyenest húzunk A ponton át $\rightarrow e$. GF-fel párhuzamos egyenest húzunk B ponton át $\rightarrow f$. HF-fel párhuzamos egyenest húzunk A ponton át $\rightarrow i$. HF-fel párhuzamos egyenest húzunk B ponton át $\rightarrow j$. A megoldások száma 2, 1 vagy 0.

475. KT az AM húr, LU az MB húr felező merőlegese $\Rightarrow \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{TM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$ és $\overrightarrow{MU} = \overrightarrow{UB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$. $\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{TM} + \overrightarrow{MU} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{UB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Általában $TU = \frac{1}{2}MB$.

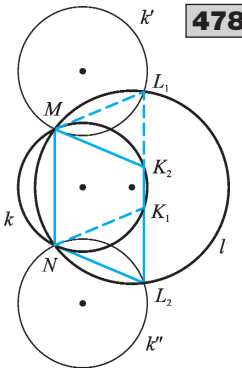
476. A 475. feladatban láttuk, hogy két kör metszéspontján átmenő szelők esetén $TU = \frac{1}{2}AB$. AB maximális, ha TU is az. TU egy derékszögű trapéz alapra merőleges szára, KL a másik szár. TU maximális, ha TU szakasz párhuzamos és egyenlő KL szakasszal.

476.



477. A 476. ábra jelöléseit használjuk. A 475. feladatban láttuk, hogy $\overrightarrow{TU} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow TU = d/2$. Toljuk el az e egyenest $\overrightarrow{TK}$ vektorral $\rightarrow e'$ egyenes. Legyen e' és UL egyenes metszéspontja V. Ekkor $KVL\triangle$ derékszögű és $KV = d/2$. Szerkesztés: ① KL, $d/2$, $90° \Rightarrow KLV_i\triangle$. ② M ponton át párhuzamost húzunk KV_i egyenessel $\rightarrow e_i$. ③ $e_i \cap k = A_i$, $e_i \cap l = B_i$. ④ e_i egyenes megoldás, ha M elválasztja az A_i és B_i pontokat. Adott metszésponthoz 2, 1 vagy 0 megoldás lehet.

I



478. Szerkesztés: ① $k \xrightarrow{\overrightarrow{NM}} k'$ és $k \xrightarrow{\overrightarrow{MN}} k''$. ② $l \cap k' = \{M; L_1\}$ és $l \cap k'' = \{N; L_2\}$. ③ $N \xrightarrow{\overrightarrow{ML_1}} K_1$; $M \xrightarrow{\overrightarrow{NL_2}} K_2$. Két egybevágó megoldás van (ha $r_1 = r_2$, akkor nincs paralelogramma).

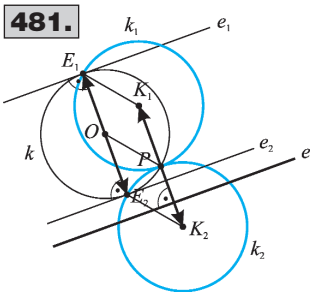
479. $ABXY$ paralelogramma $\Rightarrow \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow Y$ pontok rajta vannak a k kör $\overrightarrow{BA}$ vektorral eltolt képén: $Y \in k'$. Ha $X \equiv B$ vagy $X \equiv A$, akkor nem szerkeszthető paralelogramma $\Rightarrow A'$ és B' pontok nem lehetnek paralelogramma csúcsai. A keresett ponthalmaz a k' kör, kivéve az A' és B' pontokat.

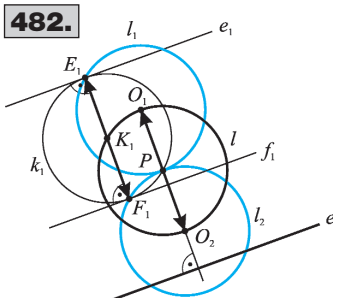
480. A PQR $\triangle$-ben $A \in PQ$; $B \in RQ$ és $X \in e$ ($P_i R$). PR egyenes $\rightarrow$ $\rightarrow e$, $AB \cap e = M$, $ABXY$ paralelogramma $\Rightarrow \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow Y$ pontok rajta vannak az e egyenes $\overrightarrow{BA}$ vektorral eltolt képén: $Y \in e'$. Ha $X \equiv M$, akkor nem szerkeszthető paralelogramma $\Rightarrow M'$ pont nem lehet paralelogramma csúcsa. A keresett ponthalmaz az e' egyenes, kivéve az M' pontot.

481. Jelölje a P ponton átmenő körök sugarát r. $PK_1 = PK_2 = r$, $K_1K_2 \perp e$. Legyenek a tetszőleges P-n áthaladó k kör e egyenessel párhuzamos érintőinek érintési pontjai E_1, $E_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow OE_1 = OE_2 = r$, $E_1E_2 \perp e$. $\Rightarrow \overrightarrow{OE_1} = \overrightarrow{PK_1}$ és $\overrightarrow{OE_2} = \overrightarrow{PK_2} \Rightarrow \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{K_1E_1} = \overrightarrow{K_2E_2} \Rightarrow K_1E_1 = K_2E = r$. Az érintési pontok rajta vannak a K_1, illetve a K_2 középpontú r sugarú körökön $\rightarrow$ $\rightarrow k_1, k_2$. E két kör minden pontja lehet érintési pont. A keresett ponthalmaz a k_1, k_2 kör.

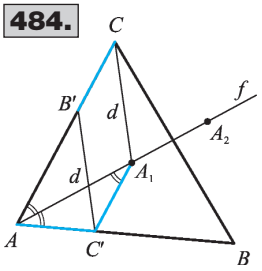
482. Legyen az adott irány e egyenessel párhuzamos, és jelölje az adott P középpontú kört l. A k_i körök sugara r, középpontjukra $K_i \in l$. $O_1P = O_2P = r$ és $O_1O_2 \perp e$. Legyenek a k_i körök e egyenessel párhuzamos érintői e_i, f_i és az érintési pontok E_i és F_i. Ekkor $K_iE_i = K_iF_i = r$ és $E_iF_i \perp m \Rightarrow \overrightarrow{K_iE_i} = \overrightarrow{PO_1}$ és $\overrightarrow{K_iF_i} = \overrightarrow{PO_2} \Rightarrow \overrightarrow{PK_i} = \overrightarrow{O_1E_i} = \overrightarrow{O_2F_i} \Rightarrow O_1E_i = O_2F_i = PK_i$. A keresett pontok rajta vannak az O_1, illetve az O_2 középpontú l körrel egyenlő sugarú körökön $\rightarrow l_1, l_2$. E két kör minden pontja lehet érintési pont. A keresett ponthalmaz az l kör $\overrightarrow{PO_1}$ és $\overrightarrow{PO_2}$ vektorral való eltoltja: l_1, l_2 kör.

483. Legyen $B'C = AC'$ és $B'C' \parallel BC$, valamint $B'C$ szakasz $\overrightarrow{B'C'}$ vektorral való eltoltja a $C'A'$ szakasz. Ekkor $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{C'A'}$, vagyis $B'C$ szakasz párhuzamos és egyenlő a $C'A'$ szakasszal. $AC'A'\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow A'AC' \sphericalangle = AA'C' \sphericalangle$ és $CAA' \sphericalangle = AA'C' \sphericalangle$, mert váltószögek $\Rightarrow AA'$ a $CAB \sphericalangle$ szögfelezője. Szerkesztés: ① $CAB \sphericalangle$ szögfelezője $\rightarrow f$. ② Az f egyenes és BC szakasz metszéspontja $\rightarrow A'$. ③ A' ponton át AC-vel párhuzamost húzunk $\rightarrow AB$-ből kimetszi C' pontot. ④ C' ponton át BC-vel párhuzamost húzunk $\rightarrow AC$-ből kimetszi B' pontot. ⑤ $B'C'$ a keresett szelő. Egyértelmű a megoldás.

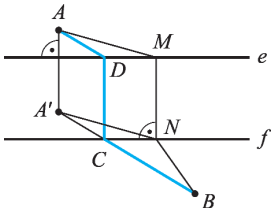




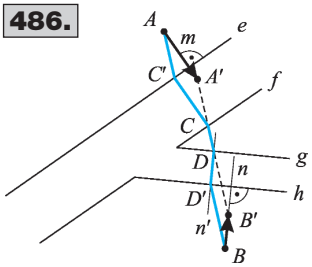
484.



485.



486.



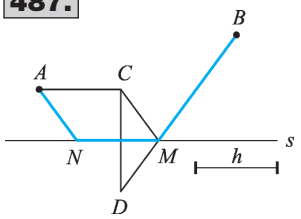
484. Legyen $B'C = AC'$ és $B'C' = d$, valamint $B'C$ szakasz $\overrightarrow{B'C'}$ vektorral való eltoltja a $C'A_1$ szakasz. Ekkor $CB'C'A_1$ négyszög paralelogramma. $AC'A_1\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow A_1AC' \sphericalangle = AA_1C' \sphericalangle$ és $CAA_1 \sphericalangle = AA_1C' \sphericalangle$, mert váltószögek $\Rightarrow AA_1$ a $CAB \sphericalangle$ szögfelezője.
Szerkesztés: ① $CAB \sphericalangle$ szögfelezője $\Rightarrow f$. ② C középpontú d sugarú kör $\Rightarrow k$. ③ Az f egyenes és k kör közös pontjai $\Rightarrow A_1, A_2$. ④ A_i pontokon át CA-val párhuzamost húzunk $\Rightarrow AB$-ből kimetszik a C_i' pontokat. ⑤ C_i' pontokon át CA_i-vel párhuzamosokat húzunk $\Rightarrow AC$-ből kimetszik a B_i' pontokat. ⑥ B_i', C_i' a keresett pontok. 2, 1 vagy 0 megoldás lehet.

485. MN szakasz legyen merőleges az e egyenesre, és $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$. Az út hossza ($AM + MN + NB = AA' + A'N + NB$) akkor a legrövidebb, ha az A', N és B pontok egy egyenesen vannak.
Szerkesztés: ① Az A pontot e egyenesre merőlegesen eltoljuk d(e; f) távolsággal $\rightarrow A'$ pont. ② $A'B \cap f = C$. ③ C pontot eltoljuk $\overrightarrow{A'A}$ vektorral $\rightarrow D$ pont. ④ $ADCB$ a keresett útvonal.

486. Szerkesztés: ① Az A pontot e egyenesre merőlegesen eltoljuk d(e; f) távolsággal $\rightarrow A'$ pont. ② A B pontot h egyenesre merőlegesen eltoljuk d(g; h) távolsággal $\rightarrow B'$ pont. ③ $A'B' \cap f = C$ és $A'B' \cap g = D$. ④ C pontot eltoljuk $\overrightarrow{A'A}$ vektorral $\rightarrow C'$ pont. ⑤ D pontot eltoljuk $\overrightarrow{B'B}$ vektorral $\rightarrow D'$ pont. ⑥ $AC'CDD'B$ a keresett útvonal.

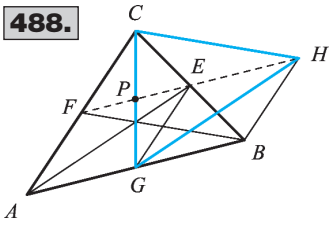
487. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{NM}$, d($N$; M) $= h \Rightarrow AN = CM$. Legyen a C pont tükörképe az s egyenesre a D pont és $DB \cap s = M \Rightarrow CM = MD$. Legrövidebb idő alatt a legrövidebb utat megtéve halad a gép egyenletes sebességgel. Az út hossza ($AN + h + MB = CM + AC + MB = AC + CM + + MB = AC + DM + MB$) akkor a legrövidebb, ha a D, M, és B pontok egy egyenesen vannak.
Szerkesztés: ① Az A pontot s egyenessel párhuzamosan eltoljuk h távolsággal $\rightarrow C$ pont. ② C pontot tükrözzük s egyenesre $\rightarrow D$ pont. ③ $DB \cap s = M$. ④ Az M pontot eltoljuk $\overrightarrow{CA}$ vektorral $\rightarrow N$ pont. ⑤ $ANMB$ a keresett útvonal.

487.



488. *a)* $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{FB} \Rightarrow$ az $FBHC$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{FC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Az $ABC\triangle$ középvonala $EG \Rightarrow \overrightarrow{GE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow$ $AGEF \cong GBHE$ paralelogrammák $\Rightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{GH}$. Tehát CG, AE, BF szakaszokból eltolással háromszög szerkeszthető.
b) A HP szakasz a $GHC\triangle$ egyik súlyvonala $\Rightarrow HP = 3PE = \frac{3}{2}GB = \frac{3}{4}AB$.

488.



I

Egybevágósági transzformációk egymásutánja

489. $TU = \mathrm{d}(a; b)$. A tengelyes tükrözés tulajdonságai miatt $\underline{AB = A'B' = A''B''}$ és $\sphericalangle(AB; a) = -\sphericalangle(A'B'; a)$ és $\sphericalangle(A'B'; b) = -\sphericalangle(A''B''; b)$. Váltószögek miatt $\sphericalangle(A'B'; a) = \sphericalangle(A'B'; b) \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle(AB; a) = \sphericalangle(A''B''; b) \Rightarrow \underline{AB \parallel A''B''}$. Ha AB nem merőleges az a egyenesre, akkor az aláhúzottak szerint $AA''B''B$ négyszög paralelogramma, ezért $AA'' \parallel BB''$ és $AA'' = BB''$. Ha $AB \perp a$, akkor A, A'', B'', B egy egyenesre esik és $AA'' = 2\mathrm{d}(a; b) = BB''$. Hasonlóan belátható, hogy $BB'' \parallel CC''$ és $BB'' = CC''$. Tehát $ABC\triangle$-t $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{TU}$ vektorral eltolva $A''B''C''\triangle$ adódik.

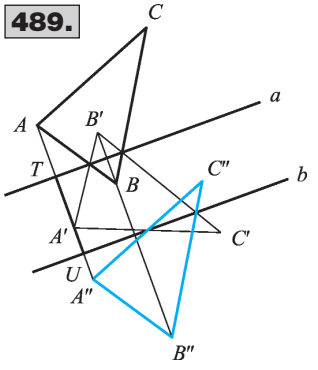
490. Legyen a P pont merőleges vetülete a-n T_a; b-n T_b. P tükörképe a-ra $P' \Rightarrow \overrightarrow{PT_a} = \overrightarrow{T_aP'}$. P' tükörképe b-re $P'' \Rightarrow \overrightarrow{P'T_b} = \overrightarrow{T_bP''}$. $\overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{PT_a} + \overrightarrow{T_aP'} + \overrightarrow{P'T_b} + \overrightarrow{T_bP''} = 2\overrightarrow{T_aP'} + 2\overrightarrow{P'T_b} = 2\overrightarrow{T_aT_b}$.

491. **1. eset:** $P \notin t_1$ és $P \notin t_2$. P-t t_1 egyenesre tükrözve $\Rightarrow POT_1\triangle \cong P'OT_1\triangle$. P'-t t_2 egyenesre tükrözve $\Rightarrow P'OT_2\triangle \cong P''OT_2\triangle$. A fentiekből következik, hogy $PO = P'O = P''O$ és $\alpha + \beta = 90°$ $\Rightarrow POP'' \sphericalangle = 180° \Rightarrow P''$ pont a P pont O-ra vonatkozó tükörképe.
2. eset: $P \in t_1$ vagy $P \in t_2$. $P \equiv P'$, $PO = OP''$, $POP'' \sphericalangle = 180°$ vagy $P' \equiv P''$, $PO = OP''$, $POP'' \sphericalangle = 180° \Rightarrow P''$ pont a P pont O-ra vonatkozó tükörképe. Az O pont helyzete független a tengelyes tükrözések sorrendjétől.

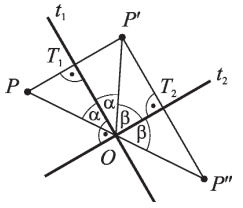
492. Legyen P tükörképe A-ra P_A; P tükörképe B-re P_B. $PA = AP_A$ és $P_AB = BP' \Rightarrow AB \parallel PP'$ és $AB = \frac{1}{2}PP'$, mert AB vagy középvonala a PP_AP' háromszögnek, vagy egy egyenesbe eső szakaszokról van szó $\Rightarrow \overrightarrow{PP'} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$. A fentiekhez hasonlóan $PB = BP_B$ és $P_BA = AP'' \Rightarrow AB \parallel PP''$ és $AB = \frac{1}{2}PP'' \Rightarrow \overrightarrow{PP''} = 2 \cdot \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = -\overrightarrow{PP''} \Rightarrow P'', P, P'$ egy egyenesre illeszkedik és P felezi a $P'P''$ szakaszt.

493. Ha P, A és B pont háromszöget alkot, akkor $PA = AP'$ és $P'B = BP'' \Rightarrow AB$ középvonala a $PP''P'$ háromszögnek $\Rightarrow \overrightarrow{PP''} = 2\overrightarrow{AB}$. Ha P, A és B pont egy egyenesen van, akkor $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP'}$ és $\overrightarrow{P'B} = \overrightarrow{BP''} \Rightarrow \overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP''} = (\overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{P'B}) + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$.
(Transzformációk szorzatával a megoldás: Jelöljük t_2-vel az AB egyenesre vonatkozó tükrözést, t_1-gyel és t_3-mal az A pontban és B pontban AB-re állított merőleges egyenesekre vonatkozó tükrözést, I-vel az identitást, $f_{O;\varphi}$-vel az O pont körüli φ szögű elforgatást és $\tau_{2\overrightarrow{AB}}$-vel a $2\overrightarrow{AB}$-ral való eltolást. $f_{B;\,180°} \cdot f_{A;\,180°} = (t_3 \cdot t_2) \cdot (t_2 \cdot t_1) = t_3 \cdot (t_2 \cdot t_2) \cdot t_1 = t_3 \cdot I \cdot t_1 = t_3 \cdot t_1 = \tau_{2\overrightarrow{AB}}$).

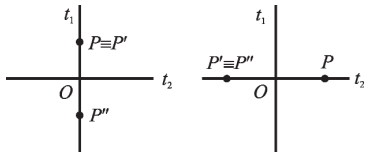
489.



491/I.



491/II.



494. Jelöljük a tükrözéseket t_a, t_b, t_c-vel, az identitást I-vel és az O pont körüli φ szögű elforgatást $f_{O;\,\varphi}$-vel, ahol $O = a \cap c \cap b$ és $\varphi = 2 \cdot \sphericalangle(a; b)$. $t_c \cdot (t_b \cdot t_a) = t_c \cdot f_{O;\,\varphi} = t_c \cdot (t_c \cdot t) = (t_c \cdot t_c)t = It = t$, ahol t a t_c-hez megválasztható tengelyes tükrözés. $t_c \cdot t_b \cdot t_a \cdot t_c \cdot t_b \cdot t_a = t \cdot t = I$, tehát a tükrözéssorozattal visszajutunk az eredeti pontba.

495. Jelöljük a tükrözéseket t_a, t_b, t_c-vel, az identitást I-vel és a $\underline{v}$-ral való eltolást $\tau_{\underline{v}}$-vel, ahol $\underline{v} \perp a$; a-tól b felé mutat és $|\underline{v}| = 2 \cdot d(a; b)$. $t_c \cdot (t_b \cdot t_a) = t_c \cdot \tau_{\underline{v}} = t_c(t_c \cdot t) = (t_c \cdot t_c)t = It = t$, ahol t a t_c-hez megválasztható tengelyes tükrözés. $t_c \cdot t_b \cdot t_a \cdot t_c \cdot t_b \cdot t_a = t \cdot t = I$, tehát a tükrözéssorozattal visszajutunk az eredeti pontba.

496. A $\underline{d}$ vektorral való eltolás egyenlő bármely olyan K és L pontra vonatkozó középpontos tükrözések egymásutánjával, ahol $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\underline{d}$.

497. Az $ABC\triangle$ BC és AC oldalának felezőpontja rendre P és Q. Ha A-t Q-ra tükrözzük, akkor C-t kapjuk, ha C-t P-re tükrözzük, akkor B-t kapjuk. Az A pont tehát a B pontba két középpontos tükrözés egymásutánjával kerül, ami helyettesíthető egy eltolással. Az eltolás vektora: $2 \cdot \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AB}$.

498. Adott $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. A tükrözések során és $P \xrightarrow{A} P_A \xrightarrow{B} P'$ és $P \xrightarrow{C} P_C \xrightarrow{D} P''$ $\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{PP''} = 2\overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PP''} \Rightarrow$ P' és P'' pont azonos.

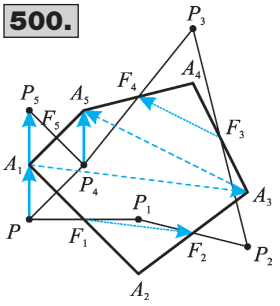
499. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. $P \xrightarrow{B} P_B \xrightarrow{D} P_D \Rightarrow \overrightarrow{PP_D} = 2\overrightarrow{BD}$ és $P \xrightarrow{A} P_A \xrightarrow{C} P_C$ $\Rightarrow \overrightarrow{PP_C} = 2\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{PP_D} = \overrightarrow{PP_C} \Rightarrow P_D \equiv P_C$.

500. $\overrightarrow{PP_2} = 2\overrightarrow{F_1F_2} = \overrightarrow{A_1A_3}$ és $\overrightarrow{P_2P_4} = 2\overrightarrow{F_3F_4} = \overrightarrow{A_3A_5} \Rightarrow \overrightarrow{PP_4} = \overrightarrow{A_1A_5} \Rightarrow \overrightarrow{P_4A_5} = \overrightarrow{PA_1}$. F_5 pontra tükrözve $\Rightarrow \overrightarrow{P_4A_5} = -\overrightarrow{P_5A_1} \Rightarrow \overrightarrow{PA_1} = -\overrightarrow{P_5A_1} = \overrightarrow{A_1P_5} \Rightarrow A_1$ pont felezi a PP_5 szakaszt.

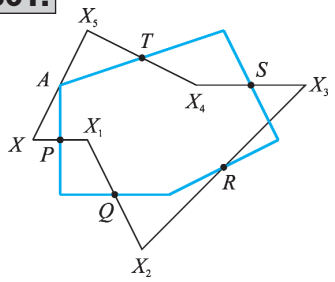
501. Tetszőleges X pontot sorban a P, Q, R, S, T felezőpontokra tükrözve, az utolsó tükörképet a kiindulási ponttal összekötő szakasz felezőpontja az ötszög P-vel és T-vel szomszédos csúcsa (ábránkon az A csúcs). Ennek a csúcsnak a P, Q, R, S, T pontokra vonatkozó tükörképei az ötszög többi csúcsai (B, C, D, E). Nincs megoldás, ha az öt felezőpont egy egyenesen van.

502. Legyenek a középpontok rendre A, B, C. $f_{C;\,180°} \cdot (f_{B;\,180°} \cdot f_{A;\,180°}) = f_{C;\,180°} \cdot \tau_{2\overrightarrow{AB}} =$ $= f_{C;180°} \cdot (t_2 \cdot t_1) = (t_3 \cdot t_2) \cdot (t_2 \cdot t_1) = t_3 \cdot (t_2 \cdot t_2) \cdot t_1 = t_3 \cdot I \cdot t_1 = t_3 \cdot t_1 = f_{D;180°}$. A fenti gondolatsorban az első két tükrözés egymásutánját egy eltolással helyettesítettük, majd azt két párhuzamos tengelyre vonatkozó tükrözés szorzatával. A harmadik középpontos tükrözés két egymásra merőleges tengelyre való tükrözés szorzata. A tükörtengelyeket úgy választjuk meg, hogy t_2 átmegy C-n és merőleges AB-re, t_1 a t_2-vel párhuzamos és tőle AB távolságra van. t_3 a két párhuzamos tengelyre merőleges és a C ponton megy keresztül. $D = t_1 \cap t_3$. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ miatt $ABCD$ négyszög valóban paralelogramma.

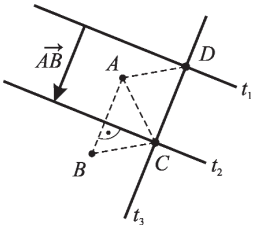
500.



501.

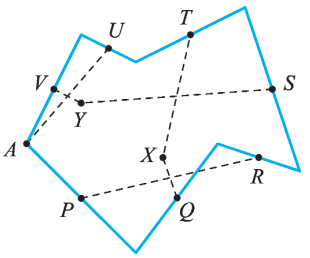


502.

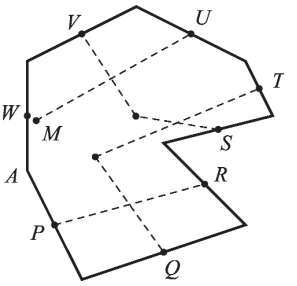


I

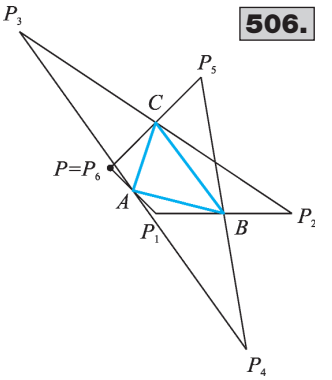
504.



505.



506.



503. Legyenek a középpontok rendre A, B, C, P. Az előző feladat állítását felhasználva: $f_{P;180^\circ} \cdot (f_{C;180^\circ} \cdot f_{B;180^\circ} \cdot f_{A;180^\circ}) = f_{P;180^\circ} \cdot f_{D;180^\circ} = \tau_{2\overrightarrow{DP}}$, $\tau_{2\overrightarrow{DP}} = I \Leftrightarrow D \equiv P$.

504. Jelölje P, Q, R, S, T, U, V az oldalfelező pontokat, A a hétszög egyik csúcsát az ábra szerint. A-t tükrözzük P-re, a tükörképet Q-ra, és így tovább V-ig, visszajutunk A-ba.

$f_{V;\,180^\circ} \cdot f_{U;\,180^\circ} \cdot f_{T;\,180^\circ} \cdot f_{S;\,180^\circ} \cdot (f_{R;\,180^\circ} \cdot f_{Q;\,180^\circ} \cdot f_{P;\,180^\circ}) = f_{V;\,180^\circ} \cdot f_{U;\,180^\circ} \cdot (f_{T;\,180^\circ} \cdot f_{S;\,180^\circ} \cdot f_{X;\,180^\circ}) =$
$= f_{V;\,180^\circ} \cdot f_{U;\,180^\circ} \cdot f_{Y;\,180^\circ} = f_{A;\,180^\circ}$, ahol X a Q pont tükörképe RP felezőpontjára, Y az S pont tükörképe TX felezőpontjára, A az U pont tükörképe VY felezőpontjára. A transzformációk egymásutánjának fixpontja tehát A, ami a fentiek alapján megszerkeszthető, ha az oldalfelező pontok közül legfeljebb hat van egy egyenesen. Az A pont ismeretében a többi csúcspont középpontos tükrözéssel megkapható.

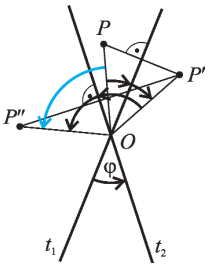
505. Az ábra jelöléseit használva az $f_{W;\,180^\circ} \cdot f_{V;\,180^\circ} \cdot f_{U;\,180^\circ} \cdot f_{T;\,180^\circ} \cdot f_{S;\,180^\circ} \cdot f_{R;\,180^\circ} \cdot f_{Q;\,180^\circ} \cdot f_{P;\,180^\circ}$ transzformációsorozat A-t saját magába viszi. Az 504. feladatban láttuk, hogy a hét felezőpontra vonatkozó tükrözés egymásutánja egyetlen középpontos tükrözéssel helyettesíthető, így a transzformációsorozat $f_{W;\,180^\circ} \cdot f_{M;\,180^\circ}$ lesz. Két középpontos tükrözés egymásutánja vagy nullvektortól különböző vektorral való eltolás vagy identitás. Az eltolásnak nincs fixpontja, ezért $f_{W;\,180^\circ} \cdot f_{M;\,180^\circ} = I$ kell legyen, ami akkor és csak akkor teljesül, ha $W \equiv M$, azaz W egyértelműen megadható P, Q, …., U ismeretében.

506. $\overrightarrow{PP_2} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{P_2P_4} = 2\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{P_4P_6} = 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{PP_6} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = 0 \Rightarrow P \equiv P_6$.

507. Legyen a t_1, t_2 tengely metszéspontja O. Tetszőleges P pontra irányított szögekkel: $\sphericalangle(PO; t_1) = \sphericalangle(t_1; P'O)$ és $\sphericalangle(P'O; t_2) = \sphericalangle(t_2; P''O)$. $\sphericalangle(PO; P''O) = \sphericalangle(PO; t_1) + \sphericalangle(t_1; P'O) +$
$+ \sphericalangle(P'O; t_2) + \sphericalangle(t_2; P''O) = 2 \cdot \sphericalangle(t_1; P'O) + 2 \cdot \sphericalangle(P'O; t_2) = 2 \cdot \sphericalangle(t_1; t_2)$.

508. Az O pont körüli α szögű forgatás során $O' \equiv O$, ezért a két tengely metszéspontja az O pont. Ha t_1 tetszőleges O pontra illeszkedő egyenes és t_2 olyan O ponton átmenő egyenes, amelynek t_1 egyenessel bezárt irányított szöge $\alpha/2$, akkor az O pont körüli α szögű forgatás helyettesíthető a t_1 és t_2 tengelyre vonatkozó tükrözések egymásutánjával.

507.



Szerkesztés: ① Tetszőleges O-tól különböző P pontot elforgatunk α szöggel $\rightarrow P'$. ② PO egyenes: t_1 és PP' felező merőlegese: t_2. Végtelen sok megoldás van.

509. *a)* Az O pontra vonatkozó tükrözés esetén $O' \equiv O$, O-tól különböző P pontra $P'O = PO$ és $POP' \sphericalangle = 180^\circ$. Ez az O pont körüli 180°-os forgatás definíciója.

b) Az O pont körüli 180°-os forgatás esetén $O' \equiv O$, O-tól különböző P pontra $P'O = PO$ és $POP' \sphericalangle = 180^\circ \Rightarrow O$ pont felezi a PP' szakaszt. Ez az O pontra vonatkozó tükrözés definíciója.

A háromszög nevezetes vonalai és körei

I

Középvonal

510. A háromszög középvonala feleakkora, mint a nem felezett oldal. *a)* 3,5 cm; 4,5 cm; 6 cm. *b)* $\frac{1}{3}$ cm; $\frac{2}{5}$ cm; $\frac{7}{12}$ cm. *c)* m; $\frac{3}{2}n$; $\frac{l}{4}$. *d)* $\frac{2m+3n}{2}$; $\frac{2m-3n}{2}$; $\frac{3}{4}m$.

511. A háromszög középvonala feleakkora, mint a nem felezett oldal. A háromszög megfelelő oldalai: *a)* 4 cm; 8 cm; 10 cm. *b)* 1 cm; $\frac{4}{3}$ cm; $\frac{5}{2}$ cm. *c)* m; $\frac{4n}{3}$; $m+n$.

512. Az $ABC\triangle$ oldalfelező pontjai rendre E; F; D. $S_4 = k_{AED} + k_{EBF} + k_{DFC} + k_{DEF}$;

$$S_4 = \left(\frac{c}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)+\left(\frac{c}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)+\left(\frac{c}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)+\left(\frac{c}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right) = 2c+2a+2b = 2k_{ABC};$$

$k_{ABC} = \frac{S_4}{2}$. *a)* 10 cm. *b)* $\frac{15}{4}$ cm. *c)* $\frac{d}{2}$ cm.

513. A az $OBC\triangle$ OB oldalának felezéspontja → az A-n át húzott párhuzamos a háromszög középvonala → P felezi BC-t.

514. Legyenek a szög szárai a és b, csúcsa O. A szerkesztés: ① P-n át párhuzamos b-vel → e. ② $e \cap a = A$. ③ $O \xrightarrow{A\text{-ra tükr.}} B$. ④ $e(B;P) \cap b = C$. $AP \parallel OC$ és $AO = AB$ miatt AP az $OCB\triangle$ középvonala ⇒ P felezi BC-t.

515. A háromszög 12 cm hosszú befogójával párhuzamos középvonala az átfogó felezéspontjának távolsága a másik befogótól. A keresett távolság 6 cm.

516. A tető metszetháromszögének a 4,8 m hosszú oldalával párhuzamos középvonala az összekötő gerenda. Hossza 2,4 m.

517. Az R repülőtérről A_1, B_1 pontokba jutnak fél óra alatt: $A_1B_1 = 180$ km. A_2, B_2 pontokba jutnak 1 óra múlva. A_1 felezi az A_2R szakaszt, B_1 felezi a B_2R szakaszt ⇒ A_1B_1 az $A_2B_2R\triangle$ középvonala ⇒ $A_2B_2 = 360$ km.

518. Az $A_iB_iC_i\triangle$ oldalfelező pontjai rendre E_i; F_i; D_i.

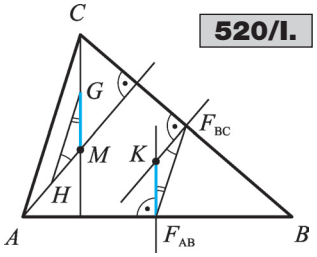
$$\left.\begin{aligned} A_1B_1 &= 2D_1F_1 = 2D_2F_2 = A_2B_2 \\ B_1C_1 &= 2D_1E_1 = 2D_2E_2 = B_2C_2 \\ A_1C_1 &= 2E_1F_1 = 2E_2F_2 = A_2C_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_1B_1C_1\triangle \cong A_2B_2C_2\triangle.$$

519. Az $ABC\triangle$ csúcsait P-vel összekötő AP, BP, CP szakaszok felezőpontjai rendre E, F, D. EF középvonal az $ABP\triangle$-ben ⇒ $EF = \frac{c}{2}$. FD középvonal a $BPC\triangle$-ben ⇒ $FD = \frac{a}{2}$. ED középvonal az $APC\triangle$-ben ⇒ $ED = \frac{b}{2}$. Az $EFD\triangle$ oldalai: $\frac{c}{2}$; $\frac{a}{2}$; $\frac{b}{2}$, tehát függetlenek P helyzetétől.

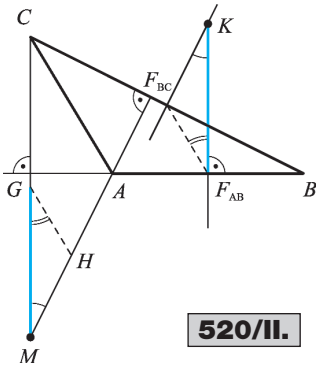
Megjegyzés: Ha P az A, B vagy C csúcsok valamelyikével megegyezik, akkor is igaz, hogy a felezéspontok által alkotott háromszög oldalai feleakkorák, mint az ABC háromszög oldalai. Ebben az esetben P maga lesz a felezéspont is.

520. **1. eset:** A háromszög hegyesszögű vagy tompaszögű. Legyen G az MC szakasz, H az MA szakasz felezéspontja! $F_{AB}F_{BC}$ középvonal az $ABC\triangle$-ben ⇒ $F_{AB}F_{BC} = \frac{AC}{2}$ és $F_{AB}F_{BC} \parallel AC$.

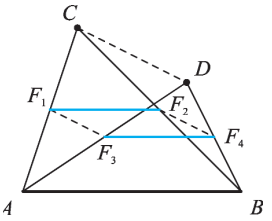
520/I.



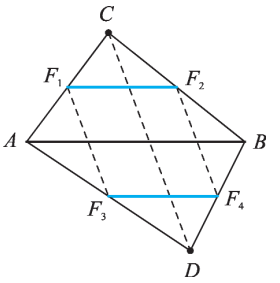
I



520/II.



522/I.



522/II.

GH középvonal az $AMC\triangle$-ben $\Rightarrow GH = \frac{AC}{2}$ és $GH \| AC$. $\Rightarrow GH = F_{AB}F_{BC}$ és $GH \| F_{AB}F_{BC} \Rightarrow$ az ábrán egyformán jelölt szögek váltószögek, tehát egyenlők $\Rightarrow GHM\triangle \cong F_{AB}F_{BC}K\triangle \Rightarrow MG = KF_{AB} \Rightarrow \underline{\underline{MC = 2KF_{AB}}}$.

2. eset: A háromszög derékszögű. $KF_{AB} \| AC = MC$ és $KF_{AB} = \frac{AC}{2} = \frac{MC}{2}$.

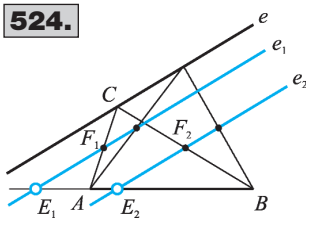
521. P-t összekötjük az e egyenes Q_1, Q_2, Q_3 pontjával. $PQ_1 = Q_1R_1$ és $PQ_2 = Q_2R_2$ miatt Q_1Q_2 középvonal az $R_1R_2P\triangle$-ben $\Rightarrow R_1R_2 \| Q_1Q_2 \Rightarrow R_1R_2 \| e$.
Hasonlóan megmutatható, hogy $R_2R_3 \| e$. Mivel R_2-n át e-vel csak egy párhuzamos húzható, R_1 és R_3 is ezen az egyetlen párhuzamoson kell legyenek. A keresett ponthalmaz egy az e-vel párhuzamos olyan egyenes, amely kétszer olyan távol van P-től, mint e.

522. F_1 felezi AC-t, F_2 felezi BC-t $\Rightarrow F_1F_2$ középvonal az $ABC\triangle$-ben $\Rightarrow F_1F_2 = \frac{AB}{2}$. F_3 felezi AD-t, F_4 felezi BD-t $\Rightarrow F_3F_4$ középvonal az $ABD\triangle$-ben $\Rightarrow F_3F_4 = \frac{AB}{2}$. A két következményt összevetve: $F_1F_2 = F_3F_4$. F_1 felezi AC-t, F_3 felezi AD-t $\Rightarrow F_1F_3$ középvonal az $ADC\triangle$-ben $\Rightarrow F_1F_3 = \frac{CD}{2}$. F_2 felezi BC-t, F_4 felezi BD-t $\Rightarrow F_2F_4$ középvonal az $BCD\triangle$-ben $\Rightarrow F_2F_4 = \frac{CD}{2}$. A két következményt összevetve: $F_1F_3 = F_2F_4$. Ezzel megmutattuk a két egyenlő szakaszpárt.

523. **1. eset:** AB nem merőleges e-re és A és B közül legfeljebb az egyik van e-n. AB merőleges vetülete e-re A_1B_1. AB-t eltoljuk $\overrightarrow{AA_1}$-ral: A_1B_2 $(F \to F_2)$. F_2F_1 középvonala az $A_1B_1B_2\triangle$-nek. $\Rightarrow$ $\Rightarrow F_1$ felezi A_1B_1-et.
2. eset: $A \in e$ és $B \in e$. A; F; B fixpontok $\Rightarrow$ az állítás igaz.
3. eset: $AB \perp e$. A; F; B képe T.

524. $C \in e$, F_1 felezi AC-t $\Rightarrow$ az F_1 pontok az e-vel párhuzamos e_1 egyenesen vannak, amelyre $d(A; e) = 2d(e_1; e)$. F_2 felezi BC-t $\Rightarrow$ az F_2 pontok az e-vel párhuzamos e_2 egyenesen vannak, amelyre $d(B; e) = 2d(e_2; e)$. e_1, illetve e_2 egyenesnek AB egyenesével való E_1, illetve E_2 metszéspontja nem tartozik a ponthalmazhoz, mivel ebben az esetben $C \in e(A; B)$ miatt nem létezik a háromszög.

524.



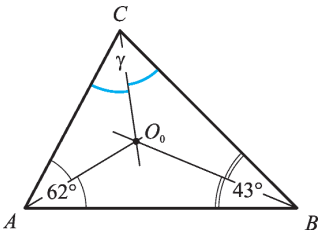
525. CF_c az $ABC\triangle$ súlyvonala. FF_c az $F_bF_cF_a\triangle$ súlyvonala. $F_bF_c \| CF_a$ és $F_cF_a \| F_bC$ miatt az $F_bF_cF_aC$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow F_bF_a$ átló felezi a CF_c átlót $\Rightarrow F_cF$ része a CF_c átlónak $\Rightarrow$ $\Rightarrow F_bF_cF_a\triangle$ súlyvonala része az $ABC\triangle$ súlyvonalának.
A másik két súlyvonalra az állítás hasonlóan belátható.

Magasságvonal

526. Az $ABC\triangle$ oldalfelező pontjai F_a; F_b; F_c. Az $F_aF_bF_c\triangle$ F_c-ből induló m_c magasságvonala merőleges F_bF_a-ra. $F_bF_a \parallel AB$ miatt $m_c \perp AB$. F_c felezi AB-t és $F_c \in m_c$, így m_c az AB szakasz felező merőlegese. Hasonlóan belátható, hogy az $F_aF_bF_c\triangle$ másik két magasságvonala is oldalfelező merőleges az ABC háromszögben. Tehát az $F_aF_bF_c\triangle$ magasságpontja az ABC háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja, azaz körülírt körének középpontja.

527. *a)* $\gamma = 180° - 62° - 43° = 75°$. A beírt kör középpontja a belső szögfelezők O_0 metszéspontja. $AO_0B\sphericalangle = 180° - (62° : 2) - (43° : 2) = \underline{\underline{127,5°}}$. $BO_0C\sphericalangle = 180° - (43° : 2) - (75° : 2) = \underline{\underline{121°}}$. $AO_0C\sphericalangle = 360° - 127,5° - 121° = \underline{\underline{111,5°}}$.

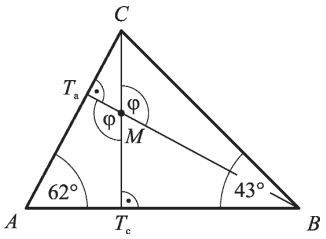
527/I.



b) A háromszög hegyesszögű, ezért a magasságpont belső pont. $\Rightarrow$ Az AT_aMT_c négyszögben $\varphi = 360° - (90° + 62° + 90°) = 118°$. Az M-nél levő csúcsszögek miatt BC oldal $118°$-os szögben látszik a magasságpontból. Ennek mintájára belátható, hogy $AMC\sphericalangle = \underline{\underline{137°}}$ és $AMB\sphericalangle = \underline{\underline{105°}}$

528. Legyen D magasságpont az $ABC\triangle$-ben $\Rightarrow$ I. $CD \perp AB$, II. $AD \perp BC$, III. $BD \perp AC$. Megmutatjuk, hogy A magasságpont a $BCD\triangle$-ben: $AB \perp CD$ az I. feltétel miatt, $AC \perp BD$ a III. feltétel miatt, $AD \perp BC$ a II. feltétel miatt. AB, AC és AD magasságvonalak a $BCD\triangle$-ben, tehát A a magasságpont ebben a háromszögben. A másik két állítás hasonlóan belátható. Megjegyzés: A gondolatmenet nem függ a D pont helyzetétől.

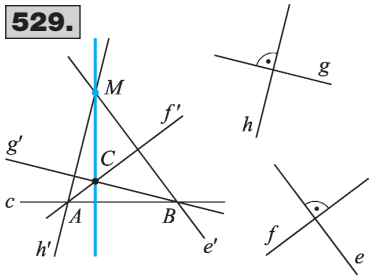
527/II.



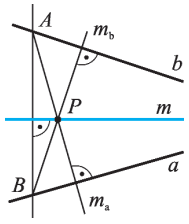
529. A szerkesztés: ① Húzzunk párhuzamost M-en át h-val: h'. $\Rightarrow h' \cap c = A$. ② Húzzunk párhuzamost M-en át e-vel: e'. $\Rightarrow$ $\Rightarrow e' \cap c = B$. ③ Húzzunk párhuzamost A-n át f-fel: f'. $\Rightarrow$ $\Rightarrow f' \perp e'$. ④ Húzzunk párhuzamost B-n át g-vel: g'. $\Rightarrow g' \perp h'$. Legyen $f' \cap g' = C \Rightarrow h'$ az $ABC\triangle$ A-ból induló magasságvonala, e' az $ABC\triangle$ B-ből induló magasságvonala $\Rightarrow h' \cap e' = M$ az $ABC\triangle$ magasságpontja $\Rightarrow MC$ az $ABC\triangle$ C-ből induló magasságvonala $\Rightarrow MC \perp c$.

530. $\left.\begin{matrix} m_b \perp b \\ m_a \perp a \end{matrix}\right\} \Rightarrow m_a \cap m_b = P$ az $ABM\triangle$ magasságpontja $\left.\begin{matrix} m \perp AB \\ P \in m \end{matrix}\right\} \Rightarrow m$ az $ABM\triangle$ harmadik magasságvonala, tehát átmegy a háromszög harmadik csúcsán, M-en.

529.

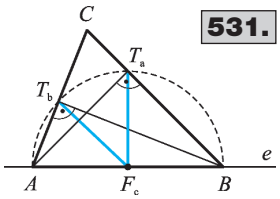


530.



I

Thalész-kör



531.

531. T_b és T_a pontokból az AB szakasz derékszög alatt látszik $\Rightarrow$ $\Rightarrow T_b$ és T_a rajta vannak az AB szakasz Thalész körén, melynek középpontja F_c. $\Rightarrow F_cT_b = F_cT_a$, hiszen a fenti Thalész-kör két sugaráról van szó.

532. A 531. ábra jelöléseit használhatjuk. Felhasználjuk: I. T_a és T_b pontok rajta vannak az AB szakasz Thalész körén. II. A húrfelező merőleges átmegy a kör középpontján.

A szerkesztés: ① T_bT_a szakaszfelező merőlegese $\rightarrow f$. ② $f \cap e = F_c$. ③ F_c középpontú F_cT_a sugarú kör $\rightarrow k_T$. ④ $k_T \cap e = \{A; B\}$. ⑤ $e(A; T_b) \cap e(B; T_a) = C$. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

533. Az AB szakasz A_1 és B_1 pontból is derékszög alatt látszik $\Rightarrow$ bármely $ABC\triangle$ ($C \notin AB$) esetén az A_1 és B_1 magasságtalppontok rajta vannak AB Thalész körén. A Thalész-körnek bármely, A-tól és B-től különböző alkalmas pontpárjához egyértelműen tartozik háromszög. $AB_1 \cap BA_1 = C$ mindig létezik (bármely $A_1 \in k$-hoz létezik $B_1 \in k$, hogy AB_1 és A_1B ne legyenek párhuzamosak). Tehát AB mint átmérő fölé rajzolt kör pontjai tartoznak a ponthalmazba, A és B kivételével.

534. A szerkesztés: ① AB szakasz felezőpontja F_c. ② F_c középpontú F_cB sugarú Thalész-kör $\rightarrow k_T$. ③ $k_T \cap e = C$. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

535. A szerkesztés: ① PQ szakasz Thalész köre $\rightarrow k_T$. ② P középpontú d sugarú kör $\rightarrow k_P$. ③ $k_T \cap k_P = R$. ④ $e(R; Q) = f$ egyenes. ⑤ P-n át párhuzamos f-fel $\rightarrow e$. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás van.

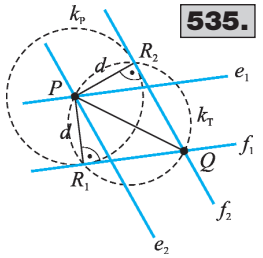
536. Az $ABC\triangle$ körülírt körének középpontja az AB átfogó F_c felezőpontja. AF_c, BF_c és CF_c ennek a Thalész-körnek a sugarai $\Rightarrow AF_c = BF_c = CF_c$. Mivel F_c felezi AB-t, $AF_c = BF_c = \frac{1}{2}AB \Rightarrow$

$\Rightarrow CF_c = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \underline{\underline{AB = 2CF_c}}$.

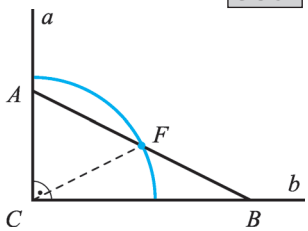
537. F_aF_c középvonal az $ABC\triangle$-ben $\Rightarrow F_aF_c = \frac{1}{2}AC$ (1). T_a pontból az AC szakasz derékszög alatt látszik $\Rightarrow T_a$ rajta van az AC szakasz Thalész körén $\Rightarrow F_bT_a = \frac{1}{2}AC$ (2). (1) és (2) összehasonlításából $F_aF_c = F_bT_a$. **1. eset:** Ha $T_a \equiv F_a$, akkor $F_bF_cF_a\triangle$ egyenlő szárú.

2. eset: Ha $T_a \not\equiv F_a$, akkor F_bF_c középvonal az $ABC\triangle$-ben $\Rightarrow F_bF_c \parallel BC \Rightarrow F_bF_c \parallel T_aF_a$. $\Rightarrow F_bF_cF_aT_a$ trapéz. $F_bT_a = F_cF_a$ és F_bT_a nem párhuzamos F_cF_a ($T_a \notin AC$) $\Rightarrow F_bF_cF_aT_a$ húrtrapéz.

538. A Thalész-tétel miatt $FC = \frac{1}{2}d$ bármely F felezéspont esetén $\Rightarrow$ az F pont rajta van a C középpontú $\frac{1}{2}d$ sugarú körön. A derékszög tartományába eső negyedkörvonal minden pont-



535.



538.

ja előáll felezőpontként. Az a és b szárakra eső körpontok is megfelelnek, mert ilyenkor AB az a vagy a b száron van. A szakasz felezőpontok tehát a derékszög szárai között elhelyezkedő negyedkörvonalat írják le.

539. A feltétel szerint $AC = CD$. A Thalész-tétel miatt $ACB\sphericalangle = \text{⦟} \Rightarrow CB$ az AD szakasz felező merőlegese $\Rightarrow CB$ az $ABD\triangle$ szimmetriatengelye $\Rightarrow \underline{AB = BD}$.

540. Legyen Q a PN szakasz és a kör közös pontja. A Thalész-tétel miatt $MQN\sphericalangle = \text{⦟}$. MQ az NPM egyenlő szárú háromszög NP alaphoz tartozó magassága $\Rightarrow \underline{Q \text{ felezi } NP\text{-t}}$.

541. Az AC szár, mint átmérő fölé írt kör Q-ban metszi az AB alapot. A Thalész-tétel miatt $AQC\sphericalangle = \text{⦟}$. CQ az ABC egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága $\Rightarrow \underline{Q \text{ felezi } AB\text{-t}}$.

542. A CF_c átmérőjű kör AC-t Q-ban, BC-t pedig P-ben metszi. A Thalész-tétel miatt $F_cQC\sphericalangle = \text{⦟} \Rightarrow AQF_c\sphericalangle = \text{⦟}$. Az $AQF_c\triangle$-ben 60° és 30° a hegyesszögek $\Rightarrow AQ = \frac{1}{2}AF_c = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AB = \underline{\frac{1}{4}AB}$. Hasonlóan belátható, hogy $BP = \frac{1}{4}BC$.

543. AB átmérőjű kör $\rightarrow k_c$. AC átmérőjű kör $\rightarrow k_b$. $k_c \cap k_b = A_1$. A_1-ből az AB és az AC szakasz is derékszög alatt látszik, (ill. *c)* esetben $A_1 \equiv C$) $\Rightarrow A_1 \in e(C; B) \Rightarrow k_c$ és k_b közös húregyenese az $ABC\triangle$ A-ból induló magasságvonala. Hasonlóan belátható, hogy k_a és k_b közös húregyenese a C-ből induló, k_a és k_c közös húregyenese a B-ből induló magasságvonal. A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást $\Rightarrow$ a fenti körök húregyenesei is egy ponton mennek át.

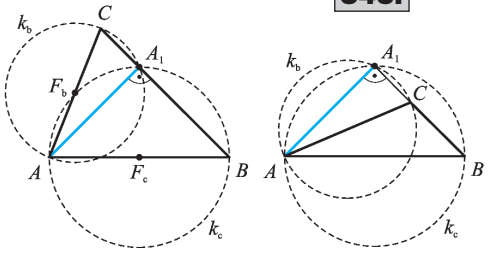
544. A C csúcs és az M magasságpont által meghatározott szakasz Thalész körét vizsgáljuk.
1. eset: Az $ABC\triangle$-ben az $ACB\sphericalangle = \text{⦟} \Rightarrow C \equiv M \Rightarrow MC$ fölé nem rajzolható Thalész-kör.
2. eset: Az $ABC\triangle$-ben $ACB\sphericalangle \neq \text{⦟}$. k az MC szakasz Thalész köre; $k \cap e(C; B) = A_1$; $k \cap e(A; C) = B_1$. A_1 rajta van CM Thalész körén $\Rightarrow CA_1M\sphericalangle = \text{⦟} \Rightarrow MA_1$ része az A-ból induló magasságvonalnak $\Rightarrow A_1$ az A-ból induló magasságvonal talppontja. Hasonlóan belátható, hogy B_1 a B-ből induló magasságvonal talppontja.

545. Felhasználjuk, hogy $BB_2 \perp AC$, ezért B_2 rajta van CM, illetve CB Thalész körén. Szerkesztés: ① C_3 középpontú, C_3B_2 sugarú kör: k_1. ② A_1 középpontú, A_1B_2 sugarú kör: k_2. ③ $k_1 \cap k_2 = C$. ④ C tükörképe A_1-re: B. ⑤ $e(C; C_3) \cap k_2 = C_2$. ⑥ $e(B; C_2) \cap e(C; B_2) = A$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

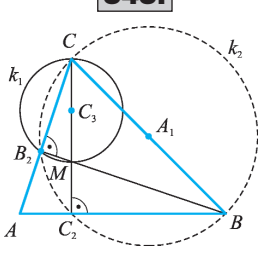
546. Az O_1 középpontú k_1 körnek és az O_2 középpontú k_2 körnek az érintési pontja E. A_1B_1 átmérő k_1-ben, A_1E a k_2-ből A_2-t, B_1E pedig B_2-t metszi ki. **1. eset:** Kívülről érintkező körökre: Thalész-tétel miatt $A_1EB_1\sphericalangle = 90°$. $A_1EB_1\sphericalangle$ és $A_2EB_2\sphericalangle$ csúcsszögek, ezért $A_2EB_2\sphericalangle = 90°$. Thalész-tétel megfordítása miatt $O_2 \in A_2B_2$.
2. eset: Belülről érintő körre: Thalész-tétel miatt $A_1EB_1\sphericalangle = 90°$. $A_1EB_1\sphericalangle$ megegyezik $A_2EB_2\sphericalangle$ szöggel. Thalész-tétel megfordítása miatt $O_2 \in A_2B_2$.

547. Legyen az $ABC\triangle$ köré írható kör középpontja O; az OA Thalész köre pedig k_T. Legyen $k_T \cap AB = E$ és $k_T \cap AC = F$! Thalész-tétel miatt $AEO\sphericalangle = 90°$. $OE \perp AB$ miatt OE az AB szakasz felezőmerőlegese, hiszen a körülírt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.

543.

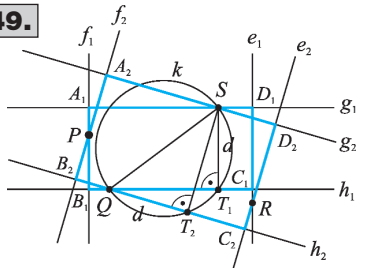


545.

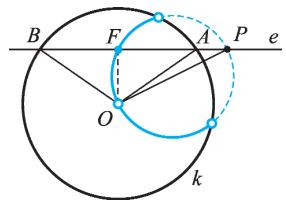


I

549.



553.



O-ból AB-re csak egy merőleges állítható, tehát annak a felezésponton kell átmennie. $\Rightarrow E$ felezi AB-t. Hasonlóan belátható, hogy F felezi AC-t.

548. AB a két kör közös húrja; AC átmérő a k_1 körben; AD átmérő a k_2 körben. **1. eset:** $B \neq D$. A Thalész-tétel miatt $CBA \sphericalangle = \llcorner$; $DBA \sphericalangle = \llcorner \Rightarrow C$, B és D egy egyenesen vannak.
2. eset: $B \equiv D$. Az állítás ebben az esetben nyilvánvaló.

549. A szerkesztés: ① SQ Thalész köre $\rightarrow k$. ② Az S középpontú d sugarú körnek k-val való metszéspontja T_1; a Q középpontú d sugarú kör k-val való metszéspontja T_2. Elegendő PS egyik félsíkjában rajzolni. ③ ST_i-vel párhuzamos R-en át $\rightarrow e_i$. ST_i-vel párhuzamos P-n át $\rightarrow f_i$. Q-ban merőleges f_i-re $\rightarrow h_i$. S-ben merőleges f_i-re $\rightarrow g_i$. ④ $e_i \cap g_i = D_i$; $e_i \cap h_i = C_i$; $f_i \cap g_i = A_i$; $f_i \cap h_i = B_i$. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehetséges.

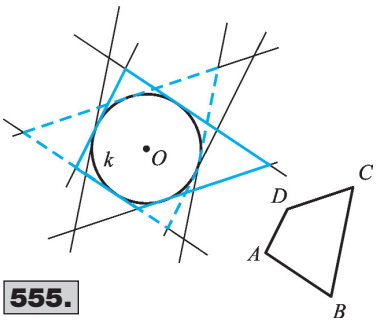
550. Egy tetszőleges, P-n áthaladó e egyenesen a Q talppont rajta van a TP szakasz Thalész körén. E Thalész-körnek bármely T-től és P-től különböző pontja egyértelműen meghatározza a hozzá tartozó egyenest. A keresett ponthalmaz a PT szakasz mint átmérő fölé rajzolt kör a P és T pontok kivételével.

551. A rombusz átlói merőlegesek egymásra, ezért az átlók M metszéspontja mindig rajta lesz a rögzített AB szakasz Thalész körén. A Thalész-kör minden pontjához megadható egy rombusz az A, ill. B pontok M-re való tükrözésével. A keresett ponthalmaz az AB átmérőjű kör, az A és B pontok kivételével.

552. Legyen az AB húr és az OB sugár Thalész körének metszéspontja Q. Q rajta van OB szakasz Thalész körén, ezért $OQB \sphericalangle = \llcorner$. OQ az AOB egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága $\Rightarrow Q$ felezi AB-t.

553. $AOB\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow OF \perp AB \Rightarrow OF \perp FP$. F rajta van OP Thalész körén. A Thalész-kör k-n belüli bármely F pontja egyértelműen meghatároz egy P-n átmenő húrt, aminek F a felezőpontja. Kivétel ez alól a P és O pont. A keresett ponthalmaz az OP átmérőjű kör k-n belüli része, az O és P pontokat kivéve.

A háromszög beírt és hozzáírt körei

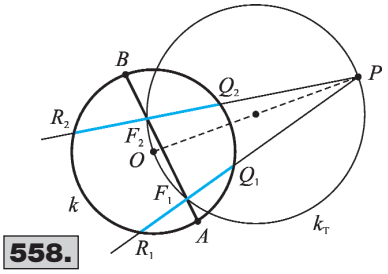


555.

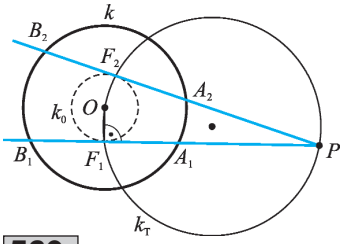
554. Felhasználjuk: az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre. A szerkesztés: ① O-ból merőleges e-re $\rightarrow m$. ② $m \cap k = \{E_1; E_2\}$. ③ E_1-en át párhuzamos e-vel $\rightarrow f_1$. ④ E_2-n át párhuzamos e-vel $\rightarrow f_2$. Két megoldás van.

555. A szerkesztés: ① A megadott négyszög különböző oldalegyeneseit kiválasztva megszerkesztjük a k körhöz a kiválasztott oldalegyenesekkel párhuzamos érintőket (l. 554. feladat). ② Az érintők közül úgy választunk oldalegyeneseket, hogy azok körülfogják a kört.

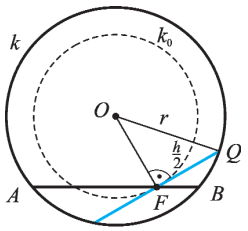
556. $OP = 3$ cm. P-n áthaladó egyenest szerkesztünk, ami O-tól 2 cm távolságra halad. A szerkesztés: ① O kö-



558.



560.



561.

zéppontú 2 cm sugarú kör $\rightarrow k$. ② OP Thalész köre $\rightarrow k_T$. ③ $k_T \cap k = \{E_1; E_2\}$. ④ e$(P; E_1\} = e_1$; e$(P; E_2) = e_2$.

557. Adott: O; P és az e távolság. Felhasználjuk: Az érintési pont rajta van a középpont és a külső pont fölé rajzolt Thalész-körön. A szerkesztés: ① OP Thalész köre $\rightarrow k_T$. ② P középpontú e sugarú kör $\rightarrow k_P$. ③ $k_T \cap k_P = \{E_1; E_2\}$. ④ O középpontú, OE_1 sugarú kör $\rightarrow k$. Nincs megoldás, ha $e \geq OP$, 1 megoldás van egyébként.

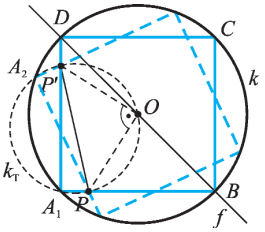
558. Olyan PR egyenest keresünk, amelyre $RF = FQ$. F felezi RQ-t $\Rightarrow OFQ\sphericalangle = \triangleright \Rightarrow F$ rajta van OP Thalész körén. A szerkesztés: ① OP Thalész köre $\rightarrow k_T$. ② $k_T \cap AB = F$. ③ e$(P; F)$ a megoldás. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

559. Az O középpontú kör h hosszúságú AB húrjának felezőpontja legyen F. FOB derékszögű háromszög átfogója r, egyik befogója $FB = \frac{h}{2}$. A másik befogó Pitagorasz-tétellel $FO = \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$ = állandó. Az egyenlő húrok F felezéspontjai az O középpontú $\sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$ sugarú körön vannak. E kör minden pontjához egyértelműen egy h hosszúságú húr tartozik. A keresett ponthalmaz egy k-val koncentrikus $\sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$ sugarú kör.

560. Felhasználjuk: $OF \perp BA \Rightarrow OFP\sphericalangle = \triangleright$. Az AB húr F felezéspontja $\sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$ távolságra van O-tól (559. feladat). A szerkesztés: ① OP Thalész köre $\rightarrow k_T$. ② O középpontú OF sugarú kör $\rightarrow k_0$. ③ $k_0 \cap k_T = F$. ④ e$(P; F) \cap k = \{A; B\}$. Két megoldás van.

561. Felhasználjuk: F felezi PQ-t $\Rightarrow OFQ\sphericalangle = \triangleright$. Az OFQ derékszögű háromszög OQ átfogója r, FQ befogója $\frac{h}{2} \Rightarrow OF$ befogó hossza megszerkeszthető. A szerkesztés: ① Az előzetesen megszerkesztett OF távolsággal mint sugárral O középpontú kör $\rightarrow k_0$. ② $k_0 \cap AB = F$. ③ F-ben merőleges OF-re $\rightarrow$ a keresett húr egyenese. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

562.

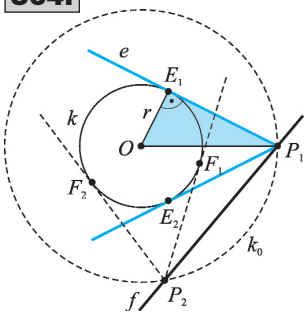


562. Felhasználjuk: a négyzet forgásszimmetrikus az O körüli 90°-os elforgatásra. A szerkesztés: ① P-t elforgatjuk O körül 90°-kal $\rightarrow$ $\rightarrow P'$. ② PP' Thalész köre $\rightarrow k_T$. ③ $k_T \cap k = A$. ④ A-t középpontosan tükrözzük O-ra $\rightarrow C$. ⑤ AC felező merőlegese $\rightarrow f$. ⑥ $f \cap k = \{B; D\}$. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

563. Az AB átmérő meghosszabbításán helyezkedik el P, amelyből a körhöz húzott érintők érintési pontjai E_1 és E_2. Az OE_1P derékszögű háromszögben ismerjük az $OE_1 = r$ befogót. Egy segédábrán

I

564.



az OP átfogó hossza megszerkeszthető. O-ból mindkét irányba felmérjük AB egyenesére a megszerkesztett OP távolságot. Két megoldás van.

564. Az OPE derékszögű háromszög két ismert befogójából az OP távolság megszerkeszthető. A P pont rajta van az O középpontú OP sugarú körön $\rightarrow k_0$. $k_0 \cap f = P$. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás van.

565. Az O középpontú körhöz P-ből húzott érintők érintési pontjai E_1 és E_2. $E_1PE_2\sphericalangle = 60° \Rightarrow E_1PO\sphericalangle = 30° \Rightarrow E_1OP$ derékszögű háromszögben $OP = 2OE_1 = 2r$. A keresett P pontok egy O középpontú $2r$ sugarú körön vannak. E kör minden pontja megfelel a feltételeknek. A keresett ponthalmaz a k-val koncentrikus $2r$ sugarú kör.

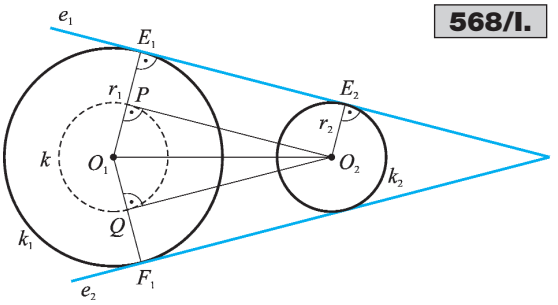
566. Az O középpontú körhöz P-ből húzott érintők érintési pontjai E_1 és E_2. $E_1PE_2\sphericalangle = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow OE_1PE_2$ négyszög egy r oldalú négyzet $\Rightarrow$ a P pontok egy O középpontú $r\sqrt{2}$ sugarú körön vannak. A szerkesztés: ① r oldalú négyzet átlója $\rightarrow r\sqrt{2}$ hosszúságú szakasz. ② O középpontú $r\sqrt{2}$ sugarú kör $\rightarrow k_0$. ③ $k_0 \cap f = P$. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

567. Legyen a két kör közös húrja AB, ami átmérő k-ban. A keresett körök K középpontjaira az AOK derékszögű háromszögben $OK = \sqrt{R^2 - r^2}$. A K középpontok egy O középpontú $\sqrt{R^2 - r^2}$ sugarú körön vannak. E kör minden pontja megfelel. A ponthalmaz egy k-val koncentrikus $\sqrt{R^2 - r^2}$ sugarú kör, ha $R > r$; nincs ilyen pont, ha $R \le r$.

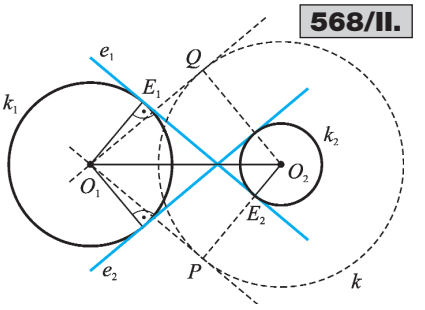
568. *a)* Két kör közös külső érintőinek meghatározása: **1. eset:** A két kör sugara egyenlő. O_1-ben és O_2-ben merőlegest állítunk a körök centrálisára. Ezeknek a körökkel való E_1, F_1, ill. E_2, F_2 metszéspontjai lesznek az érintési pontok. E_1E_2 egyenese az egyik, F_1F_2 egyenese a másik érintő. **2. eset:** A két kör sugara különböző: Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, ezért az $O_1E_1E_2O_2$ négyszög derékszögű trapéz. Húzzunk párhuzamost O_2-n át E_1E_2-vel $\rightarrow O_1O_2P$ derékszögű háromszög, melynek O_1P befogója $(r_1 - r_2)$ hosszú, O_2P befogója pedig párhuzamos a szerkesztendő érintővel. Az O_2 pontból érintőt szerkesztünk az O_1 középpontú $(r_1 - r_2)$ sugarú körhöz $\rightarrow P$, Q. O_1P félegyenesnek k_1-gyel való metszéspontja E_1. O_1Q félegyenesnek k_1-gyel való metszéspontja F_1. E_1-ben merőleges O_1E_1-re $\rightarrow e_1$ érintő. F_1-ben merőleges O_1F_1-re $\rightarrow e_2$ érintő.

b) Két kör közös belső érintőjének megszerkesztése: Toljuk el az e_1 érintőt az $\overrightarrow{E_1O_1}$ eltolásvektorral $(E_1O_1 \perp e_1, E_1O_1 = r_1) \Rightarrow E_1$ képe O_1, E_2 képe P. Szerkesszünk érintőt O_1-ből az O_2 középpontú $(r_1 + r_2)$ sugarú k körhöz $\rightarrow P$, Q. Toljuk el az O_1P érintőt O_1P-re merőlegesen a k_2 kör felé r_1 távolsággal. Ez az eltolás az O_1P egyenest a k_1 és k_2 körök egyik közös belső érintőjébe viszi. Hasonlóan járunk el az O_1Q egyenessel. Így a másik közös belső érintőhöz jutunk.

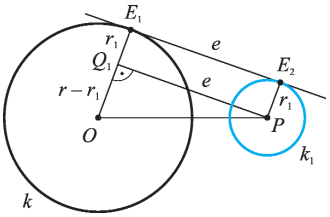
568/I.



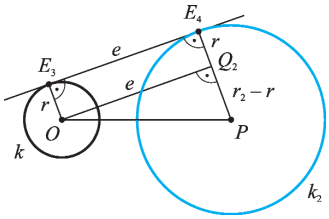
568/II.



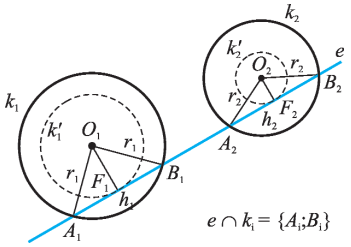
570/I.



570/II.



571.



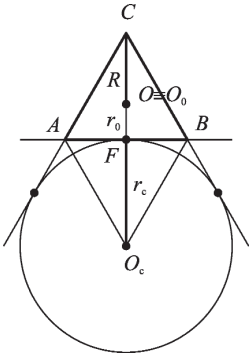
Megjegyzések: I. A belső érintő megszerkesztésénél nincs szükség az $r_1=r_2$ eset különválasztására. II. Két körnek akkor létezik közös belső érintője, ha $r_1+r_2\geq O_1O_2$. Egyenlőség esetén egy közös belső érintő van. III. Két körnek akkor létezik közös külső érintője, ha egyik sem tartalmazza a másikat.

569. A szerkesztés: ① O_1 középpontú 2 cm sugarú kör $\rightarrow k_1$. ② O_2 középpontú 1 cm sugarú kör $\rightarrow k_2$. ③ k_1-hez és k_2-höz a közös belső és külső érintők megszerkesztése.

570. 1. eset: Ha $e<OP$, akkor a szerkesztendő kör sugara kisebb is és nagyobb is lehet az adott kör sugaránál. *a)* A szerkesztendő kör sugara kisebb az adott kör sugaránál. Felhasználjuk: Az E_1E_2 közös külső érintő a Q_1P szakasz $\overrightarrow{PE_2}$ vektorral való eltolt képe.
A szerkesztés: ① e, OP, $\sphericalangle\rightarrow OPQ_1\triangle$. ② $r-OQ_1=r_1$. ③ P középpontú r_1 sugarú kör $\rightarrow k_1$.
b) A szerkesztendő kör sugara nagyobb az adott kör sugaránál. Felhasználjuk: Az E_3E_4 közös külső érintő a OQ_2 szakasz $\overrightarrow{OE_3}$ vektorral való eltolt képe. A szerkesztés: ① e, OP, $\sphericalangle\rightarrow OPQ_2\triangle$. ② $r+PQ_2=r_2$. ③ P középpontú r_2 sugarú kör $\rightarrow k_2$.
2. eset: Ha $e=OP$, akkor P középpontú r sugarú kör a megoldás.
3. eset: Ha $e>OP$, akkor nincs megoldás.

571. Felhasználjuk: A k_1 kör h_1 hosszúságú húrjainak F_1 felezőpontjai az O_1 középpontú $\sqrt{r_1^2-\frac{h_1^2}{4}}$ sugarú k_1' körön vannak (559. feladat). Hasonló igaz a k_2 kör h_2 hosszú húrjaira is $\rightarrow$ $\rightarrow k_2'$. $O_1F_1\perp A_1B_1\Rightarrow O_1F_1\perp e$. $O_2F_2\perp A_2B_2\Rightarrow O_2F_2\perp e$. A keresett e szelő a k_1' és k_2' körök közös érintője. A szerkesztés: ① O_1 középpontú $\sqrt{r_1^2-\frac{h_1^2}{4}}$ sugarú kör $\rightarrow k_1'$. ② O_2 középpontú $\sqrt{r_2^2-\frac{h_2^2}{4}}$ sugarú kör $\rightarrow k_2'$. ③ k_1' és k_2' körök közös külső és belső érintőinek megszerkesztése. 0; 1; 2; 3 vagy 4 egyenes lehetséges.

573.



572. Egyenlő oldalú háromszögben a beírt kör középpontja és a körülírt kör középpontja megegyezik a súlyponttal. A CF súlyvonalon $\underline{CS=2SF}$.. CS a körülírt kör sugara: R. SF a beírt kör sugara: r_0. Az aláhúzott állításba beírva: $\underline{\underline{R=2r_0}}$.

573. Szabályos háromszögben a beírt kör középpontja azonos a súlyponttal $\Rightarrow O_0C=2r_0$. $ABO_c\triangle\cong ABC\triangle$, mivel O_c az A-nál és B-nél levő 120°-os külső szögek felezőinek metszéspontja $\Rightarrow FO_c=FC\Rightarrow$ $\underline{\underline{r_c=3r_0}}$.

I

574. Az 573. ábra jelöléseit használjuk. $ABO_c\triangle \cong ABC\triangle$, mivel O_c az A-nál és B-nél levő 120°-os külső szögek felezőinek metszéspontja $\Rightarrow FO_c = FC$. A szabályos háromszög körülírt körének középpontja egybeesik a súlyponttal: $R = \frac{2}{3} FC = \frac{2}{3} FO_c = \frac{2}{3} r_c$.

575. Legyen az $ABC\triangle$ c oldalához írt kör középpontja O_c. Felhasználjuk: $ABO_c\triangle \cong ABC\triangle$, mivel O_c az A-nál és B-nél levő 120°-os külső szögek felezőinek metszéspontja. A szerkesztés: ① k_c egy átmérője $\rightarrow f$ egyenes, F pont. ② O_c-t tükrözzük F-re $\rightarrow C$. ③ C-ben $+30°$-os és $(-30°)$-os szög felvétele az f egyenesre $\rightarrow b$ és a. ④ F-ben merőleges f-re $\rightarrow c$. ⑤ $b \cap c = A$; $a \cap c = B$. A feladat egyértelműen megoldható.

576. Legyenek az $ABC\triangle$ a, b, c oldalaihoz írt körök középpontjai rendre O_a, O_b, O_c. Felhasználjuk: adott csúcsnál levő belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra. Az $O_aO_bO_c\triangle$ oldalai az ABC háromszög külső szögfelezői. Az O_cC szakasz rajta van a γ szög felezőjén, tehát merőleges a γ' külső szög szögfelezőjére $\Rightarrow f_\gamma$ belső szögfelező az $O_aO_bO_c\triangle$ O_c-ből induló magasságvonala. Hasonlóan megmutatható, hogy f_α az O_a-ból induló, f_β az O_b-ből induló magasságvonal az $O_aO_bO_c\triangle$-ben.

577. Felhasználjuk: külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő.

$AE = AG = x \Rightarrow EB = c - x \Rightarrow FB = c - x$. $GC = b - x \Rightarrow CF = b - x$. $a = CF + FB = b - x + c - x = b + c - 2x \Rightarrow x = \frac{b+c-a}{2} = \frac{b+c+a}{2} - a = s - a$, ahol s a félkerület $\Rightarrow$ $\underline{\underline{AE = AG = s - a}}$; $\underline{\underline{FB = EB}} = c - x = \underline{\underline{s - b}}$; $\underline{\underline{CF = CG}} = b - x = \underline{\underline{s - c}}$.

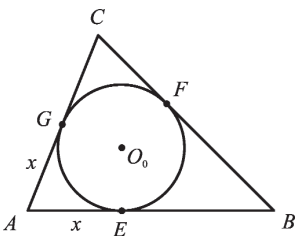
578. Felhasználjuk: külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő. $CE = CG$, $AE = AF$, $BG = BF$, $CE + CG = (CA + AE) + (CB + BG) = CA + AF + CB + BF = CA + CB + (AF + BF) = CA + CB + AB = k_{ABC}$, $CE = CG \Rightarrow 2CE = k_{ABC} \Rightarrow \underline{\underline{CE}} = \frac{k_{ABC}}{2} = \underline{s} \Rightarrow \underline{\underline{CG = s}}$.

579. Legyenek az a oldalt érintő hozzáírt kör érintési pontjai az AC, BC és AB oldalegyeneseken rendre D, E és F. Az 578. feladat állítása szerint $AF = s$. $BF = AF - AB = s - c$, $BF = BE$ miatt $\underline{\underline{BE = s - c}}$, $\underline{\underline{CE}} = BC - BE = a - (s - c) = \underline{\underline{s - b}}$.

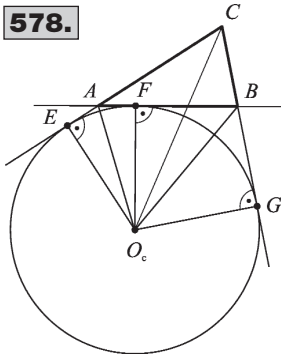
580. Az 577. feladat megoldásából $BE = s - b$. Az 579. feladat megoldásából $CF = s - b$. Tehát a két távolság valóban egyenlő.

581. Legyen a c oldalon a beírt kör érintési pontja E, a hozzáírt kör érintési pontja F. **1. eset:** Ha $a = b$, akkor $E \equiv F \Rightarrow EF = 0 = a - b$. **2. eset:** Ha $a \neq b$, akkor $a > b$ feltehető. Az 577. feladat megoldásából $AE = s - a$. Az 579. feladat megoldásából $AF = s - b$. $a > b \Rightarrow AE = s - a < s - b = AF$. $\underline{\underline{EF}} = AF - AE = s - b - (s - a) = \underline{\underline{a - b}}$.

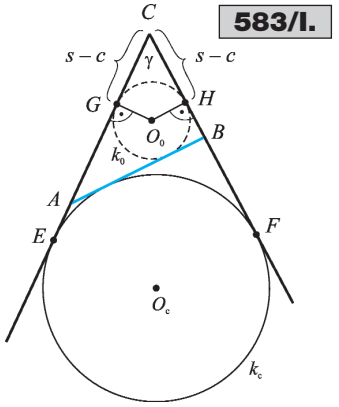
577.



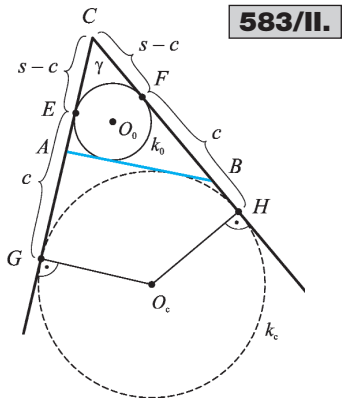
578.



583/I.



583/II.



582. Legyen a háromszög a oldalát érintő hozzáírt kör középpontja O_a, érintési pontja az AB oldalegyenesen pedig E. Az 578. feladat megoldásából $AE = s \Rightarrow$ az AEO_a derékszögű háromszög befogói $AE = s$ és $O_aE = r_a \Rightarrow$ a háromszög megszerkeszthető, $AEO_a\triangle$ hegyesszöge az AO_a szögfelező miatt $\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha$.

583. Az elhelyezendő szakasz egyenese el is választhatja a szögcsúcsot és a kört, de a kör és a szögcsúcs lehet az egyenes által határolt ugyanazon félsíkban is. **1. eset:** Az elhelyezendő szakasz a k_c kör és a C szögcsúcs között van. Olyan $ABC\triangle$-et kell szerkesztenünk, melynek adott a γ szöge, a c oldalához hozzáírt köre és a c oldal hossza. Az 578. feladat szerint $CE = CF = s$. Az 577. feladat szerint a háromszög beírt köre C-től $(s - c)$ távolságra érinti az AC és BC oldalakat. Az s és c ismeretében ezeket az érintési pontokat kijelöljük, majd ezekben a pontokban merőlegest állítunk a szög száraira → a merőlegesek metszéspontja a beírt kör középpontja → k_0 a beírt kör. A k_0 és k_c közös belső érintőjének megszerkesztése → AB. Nincs megoldás, ha $c \geq s$ vagy k_0 metszi k_c-t. Egy megoldás van, ha k_0 érinti k_c-t. Két megoldás van, ha k_0 kívül van k_c-n.

2. eset: Az elhelyezendő szakasz a k_0 körnek a C szögcsúccsal ellentétes oldalán van. Olyan $ABC\triangle$-et kell szerkesztenünk, aminek adott a γ szöge, a beírt köre és a c oldal hossza. Az 577. feladat szerint $CE = CF = s - c$. Az 578. feladat szerint a háromszög c oldalhoz hozzáírt köre C-től s távolságra érinti az AC és BC oldalegyeneseket. E-ből és F-ből C-vel ellentétes oldalra felmérjük a szögszárakra a c távolságot → a c oldalhoz hozzáírt kör G és H érintési pontjai. G-ben merőlegest állítunk GC-re, H-ban HC-re → a merőlegesek metszéspontja O_0, a c oldalhoz hozzáírt kör középpontja. O_c középpontú O_cG sugarú kör k_c. k_0 és k_c közös belső érintőjének a szögszárak közé eső darabja AB. Nincs megoldás, ha k_0 metszi k_c-t. Egy megoldás van, ha k_0 érinti k_c-t. Két megoldás van, ha k_0 kívül van k_c-n. A két esetben adódó megoldások számát összesítve 0 vagy 1; 2; 3; 4 megoldás lehetséges.

584. Adott: r_0, r_c, $a - b$. Legyen az AB oldalon a beírt kör érintési pontja E, a k_c hozzáírt köré F. Felhasználjuk: az EF szakasz az $(a - b)$ szakasszal egyenlő (581. feladat). A szerkesztés: ① $EF = a - b$ szakasz felvétele. ② E-ben merőleges EF-re, F-ben merőleges EF-re. ③ a merőlegesekre r_0, ill. r_c szakaszok felmérése ellentétes félsíkban → O_0, O_c. ④ O_0 középpontú r_0 sugarú kör → k_0. O_c középpontú r_c sugarú kör → k_c. ⑤ k_0 és k_c körök közös külső érintőinek megszerkesztése. ⑥ Az érintők metszéspontja C, az érintőknek EF egyenessel való metszéspontjai A és B. $r_0 \geq r_c$ esetében nincs megoldás, minden más esetben van.

585. Az 577. feladat megoldásából $AE_1 = s - a$. Az 578. feladat megoldásából $AE_2 = s$. $\underline{\underline{E_1E_2}} = AE_2 - AE_1 = s - (s - a) = \underline{\underline{a}}$.

586. Legyen az AB átfogójú derékszögű háromszög BC oldalának egyenesén a beírt kör érin-

I

tési pontja E_1, az átfogót érintő hozzáírt kör érintési pontja E_2. Az $O_0E_1C\triangle$ egyenlő szárú derékszögű, hiszen $O_0CE_1\sphericalangle = 45° \Rightarrow CE_1 = r_0 = s - c$ (l. 577. feladat). O_cE_2C -ben $CE_2 = r_c = s$ (l. 578. feladat). $r_c - r_0 = s - (s - c) = c$.

587. $CE_1O_0E_2$ négyszög minden szöge derékszög és $CE_1 = CE_2 \Rightarrow CE_1O_0E_2$ négyzet $\Rightarrow CE_1 = r_0$. Az 577. feladat megoldásából $CE_1 = s - c. \Rightarrow r_0 = s - c = \dfrac{a+b+c}{2} - c \Rightarrow 2r_0 + c = a + b.$

588. Az 587. feladat megoldásából: $a + b = 2r_0 + c \Rightarrow c = a + b - 2r_0 \Rightarrow$ Olyan derékszögű háromszöget kell szerkeszteni, amelyben ismert a befogók összege és az átfogó. Forgassuk el az A csúcsot C körül $(-90°)$-kal $\rightarrow A'. \Rightarrow AA'C\triangle$ egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow CA'A\sphericalangle = 45°$. A szerkesztés: ① $A'B = a + b$ hosszúságú szakasz felvétele. ② A'-ben $A'B$-re 45°-os szög $\rightarrow f$. ③ B középpontú c sugarú kör $\rightarrow k_B$. ④ $k_B \cap f = A$. ⑤ A-ból merőleges $A'B$-re $\Rightarrow C$. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

589. A háromszög derékszögű csúcsa C-ben van. *a)* Legyen a beírt kör érintési pontja AC-n E. $CE = r_0$, másrészt az 577. feladat megoldásából $CE = s - c \Rightarrow r_0 = s - c = \dfrac{a+b+c}{2} - c = \dfrac{a+b-c}{2}$. *b)* Legyen a k_c hozzáírt kör érintési pontja a CA egyenesen F. O_c rajta van a derékszög felezőjén, ezért $O_cFC\triangle$ egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow CF = r_c$. Az 578. feladat megoldásából $CF = s$, $r_c = s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

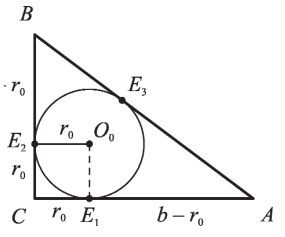
590. Legyen a k_c hozzáírt kör érintési pontja a CB, ill. CA befogók egyenesén E_1, ill. E_2. Derékszögű háromszögben az $O_cE_1CE_2$ négyszög négyzet, mert minden szöge derékszög és $E_2O_c = O_cE_1 = r_c$. A szerkesztés: ① r_c oldalú négyzet $\rightarrow O_cE_1CE_2$ négyzet. ② O_c középpontú r_c sugarú kör $\rightarrow k_c$. ③ E_2C-vel α szöget bezáró tetszőleges e egyenes szerkesztése. ④ e-vel párhuzamos, C-hez közelebbi érintő szerkesztése a k_c körhöz. ⑤ Az érintőnek a C csúcsú derékszög száraival való metszéspontjai A és B. Egy megoldás van.

591. Legyen C a derékszögű csúcs, és a k_c hozzáírt kör érintési pontjai a befogók egyenesén E_1 és E_2. Az 578. feladat megoldásából tudjuk, hogy $CE_2 = s$. $E_1O_cE_2C$ négyszög r_c oldalú négyzet. $CE_2 = r_c = s = \dfrac{a+b+c}{2} \Rightarrow c = 2r_c - (a+b)$. Az adatokat behelyettesítve: $c = 7$ cm.

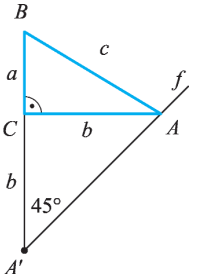
592. k_0 az $AC_1B_2\triangle$ hozzáírt köre, ezért az 578. feladat szerint $AE_1 = AE_3 = s_{AC_1B_2}$. Hasonlóan belátható, hogy $BE_1 = BE_2 = s_{BA_1C_2}$ és $CE_2 = CE_3 = s_{CB_1A_2}$.

$k_{ABC} = (AE_1 + E_1B) + (BE_2 + E_2C) + (CE_3 + E_3A) = s_{AC_1B_2} + s_{BA_1C_2} + s_{BA_1C_2} + s_{CB_1A_2} + s_{CB_1A_2} + s_{AC_1B_2} = 2s_{AC_1B_2} + 2s_{BA_1C_2} + 2s_{CB_1A_2} = k_{AC_1B_2} + k_{BA_1C_2} + k_{CB_1A_2}$.

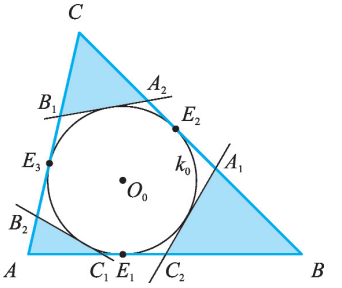
587.



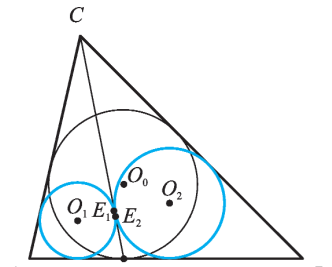
588.



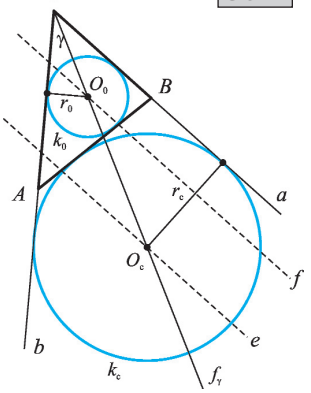
592.



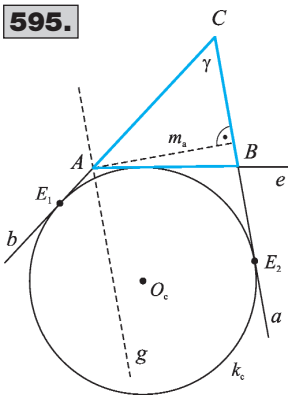
593.



594.



595.



593. Az $AEC\triangle$ oldalai: $AC = b$; $AE = s - a$; $CE = x$. Ebben a háromszögben a félkerület: $s_1 = \dfrac{b + s - a + x}{2}$. Az 577. feladat eredményét felhasználva $EE_1 = s_1 - b = \dfrac{b + s - a + x}{2} - b = \dfrac{s + x - a - b}{2}$. A $BEC\triangle$ oldalai: $BC = a$; $BE = s - b$; $CE = x$. Ebben a háromszögben a félkerület: $s_2 = \dfrac{a + s - b + x}{2}$. Az 577. feladat eredményét felhasználva $EE_2 = s_2 - a = \dfrac{a + s - b + x}{2} - a = \dfrac{s + x - a - b}{2}$. Az aláhúzottak egyenlősége miatt $E_1 \equiv E_2$.

594. A szerkesztés: ① γ szög felvétele $\rightarrow a$ és b félegyenes. ② γ szögfelezője f_γ. ③ párhuzamos a-tól r_c távolságra $\rightarrow e$. ④ $e \cap f_\gamma = O_c$, O_c középpontú r_c sugarú kör $\rightarrow k_c$. ⑤ párhuzamos a-tól r_0 távolságra $\rightarrow f$. ⑥ $f \cap f_\gamma = O_0$, O_0 középpontú r_0 sugarú kör $\rightarrow k_0$. ⑦ k_c és k_0 közös belső érintőinek b-vel való metszéspontja A, a-val való metszéspontja B. 0 vagy 1 egyenlő szárú vagy 2 egybevágó háromszög lehet.

595. Felhasználjuk az 578. feladat megoldását: $CE_1 = CE_2 = s$. A szerkesztés: ① γ szög felvétele $\rightarrow a$ és b félegyenes; C csúcs. ② a-ra és b-re C-ből $s = \dfrac{k_{ABC}}{2} \rightarrow E_1; E_2$. ③ E_1-ben merőleges b-re, E_2-ben merőleges a-ra; a merőlegesek metszéspontja $O_c \rightarrow$ a c oldalhoz hozzáírt kör k_c. ④ a-val párhuzamos m_a távolságra a szögtartományban $\rightarrow g$. ⑤ $g \cap b = A$. ⑥ A-ból érintő k_c-hez $\rightarrow e$. ⑦ $e \cap a = B$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

596. Az 578. feladat megoldásából $CE_1 = CE_2 = s$, ahol E_1 és E_2 a k_c hozzáírt kör érintési pontjai a CA és CB egyeneseken. A szerkesztés: ① γ szög felvétele $\rightarrow a$ és b félegyenes; C csúcs. ② r_0 távolságra párhuzamos a-val és b-vel a szögtartományban; metszéspontjuk $O_0 \rightarrow a$ beírt kör k_0. ③ γ száraira $s = \dfrac{k_{ABC}}{2}$ hosszú szakaszok felvétele $\rightarrow E_1; E_2$. ④ E_1-ben merőleges b-re, E_2-ben merőleges a-ra; a merőlegesek metszéspontja $O_c \rightarrow$ a c oldalhoz hozzáírt kör k_c. ⑤ k_c és k_0 közös belső érintőjének megszerkesztése $\rightarrow c$. ⑥ $c \cap a = B$; $c \cap b = A$. 0 vagy 1 egyenlő szárú vagy 2 egybevágó háromszög lehet.

597. Felhasználjuk az 578. feladat megoldását: $CE_1 = CE_2 = s$, ahol E_1 és E_2 a k_c hozzáírt kör érintési pontjai a CA és CB egyeneseken. A szerkesztés: ① γ szög felvétele $\rightarrow a$ és b félegyenes;

I

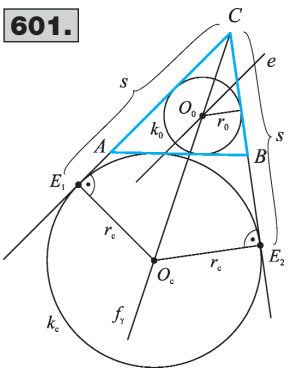
C csúcs. ② a-ra és b-re C-ből $s = \frac{k_{ABC}}{2} \to E_1$; E_2. ③ E_1-ben merőleges b-re, E_2-ben merőleges a-ra; a merőlegesek metszéspontja $O_c \to$ a c oldalhoz hozzáírt kör k_c. ④ C középpontú m_c sugarú kör $\to k$. ⑤ k és k_c közös belső érintőjének a-val való metszéspontja B, b-vel való metszéspontja A. 0 vagy 1 egyenlő szárú vagy 2 egybevágó háromszög lehet.

598. A szerkesztés: ① E-ben merőleges AB-re, majd a merőlegesen r_0 távolság kijelölése $\to$ $\to O_0$. ② O_0 középpontú r_0 sugarú kör $\to k_0$. ③ A-ból érintő k_0-hoz $\to b$. B-ből érintő k_0-hoz $\to a$. ④ $a \cap b = C$. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

599. Felhasználjuk az 577. feladat megoldásából $AE = s - a$, ahol E a beírt kör érintési pontja AB-n. $c - (a - b) = c + b - a = c + b + a - 2a = 2(s - a)$. A szerkesztés: ① $\frac{c-(a-b)}{2} = s - a$ szakasz megszerkesztése. ② $AB = c$ szakasz felvétele. ③ $AE = s - a$ szakasz kijelölése AB-n. ④ E-ben merőleges AB-re; a merőlegesen E-től r_0 távolságra O_0 középpont kijelölése. ⑤ O_0 középpontú r_0 sugarú kör $\to k_0$. ⑥ A-ból, B-ből érintő k_0-hoz; az érintők metszéspontja C. 0 vagy 1 megoldás lehet.

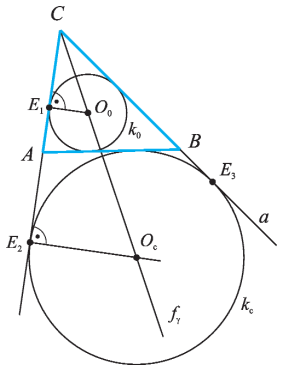
600. Felhasználjuk az 578. feladat megoldását: $CE_1 = CE_2 = s$, ahol E_1 és E_2 a k_c hozzáírt kör érintési pontjai CA és CB egyeneseken. ① a-ra és b-re C-ből $s = \frac{k_{ABC}}{2} \to E_1$; E_2. ② E_1-ben merőleges b-re, E_2-ben merőleges a-ra; a merőlegesek metszéspontja $O_c \to$ a c oldalhoz hozzáírt kör k_c. ③ P-ből érintő szerkesztése k_c-hez. Az érintőnek a-val való metszéspontja B, b-vel való metszéspontja A. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

601.



601. Felhasználjuk az 578. feladat megoldását: $CE_1 = CE_2 = s$. A szerkesztés: ① $s = \frac{k_{ABC}}{2}$ és r_c oldalú derékszögű deltoid $\to$ $\to CE_1O_cE_2$ négyszög; $E_1CE_2\sphericalangle = \gamma$. ② $E_1CE_2\sphericalangle$ szögfelezője f_γ. ③ r_0 távolságra párhuzamos a CE_1 szögszárral $\to e$. ④ $f_\gamma \cap e = O_0$. ⑤ O_0 középpontú r_0 sugarú kör $\to \to k_0$. O_c középpontú r_c sugarú kör $\to k_c$. ⑥ k_c és k_0 körök közös belső érintőjének a szög száraival való metszéspontjai A és B. 0 vagy 1 egyenlő szárú vagy 2 egybevágó megoldás lehet.

603.



602. Adott: k_{ABC}; r_c; α. Felhasználjuk az 578. feladat megoldását: $CE_1 = CE_2 = s = \frac{k_{ABC}}{2}$, ahol E_1 *és* E_2 a k_c hozzáírt kör érintési pontjai a CA és CB egyeneseken. A szerkesztés: ① O_c középpontú, r_c sugarú kör: k_c. ② $E_1 \in k_c$. ③ E_1-et O_c körül $(-\alpha)$ szöggel elforgatjuk: C_c. ④ C_c-ben merőleges O_cC_c-re: c. ⑤ E_1-ben merőleges E_1O_c-re: b. ⑥ $c \cap b = A$. ⑦ E_1 kezdőpontú, A-t tartalmazó félegyenesen C úgy, hogy $E_1C = s$ legyen. ⑧ C középpontú, s sugarú kör: k. ⑨ $k \cap k_c = E_2$. ⑩ $CE_2 \cap c = B$. Minden $\alpha < 180°$ szög esetén van megoldás.

603. Felhasználjuk: I. Az 577. feladat megoldásából $CE_1 = s - c$. II. Az 578. feladat megoldásából $CE_2 = s$. III. $\frac{(a+b)-c}{2} = s - c$.

A szerkesztés: ① $(s - c)$; r_0; $\measuredangle \rightarrow CE_1O_0\triangle$. ② C-ből CE_1 félegyenesre s távolság $\rightarrow E_2$. ③ E_2-ben CE_2-re állított merőleges és CO_0 egyenes metszéspontja O_c. ④ O_0 középpontú O_0E_1 sugarú kör $\rightarrow k_0$; O_c középpontú O_cE_2 sugarú kör $\rightarrow k_c$. ⑤ E_2-t tükrözzük a CO_c egyenesre $\rightarrow E_3$. ⑥ k_0 és k_c közös belső érintője $\rightarrow c$. ⑦ $c \cap e(C; E_1) = A$; $c \cap e(C; E_3) = B$. 0 vagy 1 egyenlő szárú vagy 2 egybevágó háromszög lehet.

Háromszögek szerkesztése (II. rész)

604. Felhasználjuk: az m_a, m_b, m_c metsző egyenesek magasságvonalak, tehát merőlegesek a háromszög egy-egy oldalára. A szerkesztés: ① P-ből merőleges m_b-re $\rightarrow b$. ② $b \cap m_a = A$, $b \cap m_c = C$. ③ C-ből merőleges m_a-ra $\rightarrow a$. ④ $a \cap m_b = B$. Nincs megoldás, ha $b \parallel m_a$ vagy $b \parallel m_c$. Végtelen sok megoldás van, ha $m_a \perp m_b$ és $P \in m_a$. Minden más esetben egy megoldás van.

605. *a)* A szerkesztés: ① γ szög felvétele $\rightarrow C$; a; b. ② a-val párhuzamos m_a távolságra $\rightarrow e$. ③ $e \cap b = A$. ④ C középpontú CA sugarú kör $\rightarrow k_C$. ⑤ $k_C \cap a = B$. Bármely $0° < \gamma < 180°$ esetén egyértelműen megoldható. *b)* A szerkesztés: ① m_a szakasz felvétele $\rightarrow A$; T pontok. ② T-ben merőleges AT-re $\rightarrow a$. ③ A középpontú, c sugarú kör $\rightarrow k_A$. ④ $k_A \cap a = B$. ⑤ AB felező merőlegese f_{AB}. ⑥ $f_{AB} \cap a = C$. Nincs megoldás, ha $c \leq m_a$. Minden más esetben két tengelyesen szimmetrikus megoldás van (a tengely az AT egyenes).

606. A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú k kör, benne c hosszúságú húr $\rightarrow A$; B. ② m_c távolságra AB-vel párhuzamos egyenespár $\rightarrow e_1$; e_2. ③ $k \cap e_i = C_i$. Nincs megoldás, ha $c > 2R$ vagy $k \cap e_i = \emptyset$. Más esetekben 0; vagy egyetlen egyenlő szárú háromszög; vagy két egybevágó háromszög; két egybevágó és egy harmadik egyenlő szárú háromszög vagy két-két egybevágó háromszög lehet a megoldás.

607. A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú k kör, benne c hosszú húr $\rightarrow A$; B. ② A-ban AB szárra α szög felvétele $\rightarrow b$ félegyenes. ③ $b \cap k = C$. Nincs megoldás, ha $c > 2r$ vagy b félegyenes A-ban érinti vagy elkerüli a kört. Minden más esetben egy megoldás van.

608. A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú k kör, benne c hosszúságú húr $\rightarrow A$; B. ② AB felezéspontja F. ③ F középpontú s_c sugarú kör $\rightarrow k_F$. ④ $k_F \cap k = C$. Nincs megoldás, ha $c > 2R$ vagy $k_F \cap k = \emptyset$. Minden más esetben vagy két egybevágó háromszög vagy egy egyenlő szárú háromszög lesz a megoldás.

609. Felhasználjuk: a Thalész-tétel miatt a szerkesztendő háromszög átfogója a köré írt kör átmérője. *a)* A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú kör, benne AB átmérő. ② A-ban AB szárra α szög felvétele $\rightarrow b$ félegyenes. ③ $b \cap k = C$. A feladat mindig egyértelműen megoldható. *b)* A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú kör, benne AB átmérő. ② m_c távolságra párhuzamos AB-vel $\Rightarrow e_1$, e_2. ③ $e_i \cap k = C_i$. 4 darab egybevágó megoldás van, ha $m_c < R$, 2 darab egybevágó egyenlő szárú megoldás van, ha $m_c = R$, nincs megoldás, ha $m_c > R$.

610. *a)* A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú k kör, benne c hosszúságú húr $\rightarrow A$; B. ② AB felező merőlegese f_{AB}. ③ $f_{AB} \cap k = C_i$. 0; 1 vagy két megoldás lehetséges. *b)* A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú kör $\rightarrow k$. ② $C \in k$ a kör tetszőleges pontja. ③ C középpontú a sugarú kör $\rightarrow k_C$. ④ $k_C \cap k = \{A; B\}$. Nincs megoldás, ha $a \geq 2R$, egy megoldás van, ha $a < 2R$. *c)* A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú kör $\rightarrow k$. ② $C \in k$ a kör tetszőleges pontja. ③ CO egyenesre m_c szakasz felvétele $\rightarrow F$. ④ F-ben merőleges CF-re $\rightarrow c$. ⑤ $c \cap k = \{A; B\}$. Nincs megoldás, ha $m_c \geq 2R$, egy megoldás van, ha $m_c < 2R$. *d)* A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú kör $\rightarrow k$. ② $C \in k$ a kör tetszőleges pontja. ③ CO átmérő egyenese. ④ C-ben CO-ra $\frac{\gamma}{2}$ és $\left(-\frac{\gamma}{2}\right)$ szög felvétele $\rightarrow a$ és b félegyenesek. ⑤ $b \cap k = A$, $a \cap k = B$. $\gamma < 180°$ esetén egyértelműen megoldható.