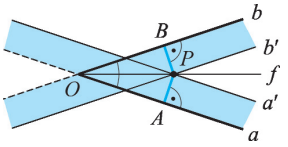
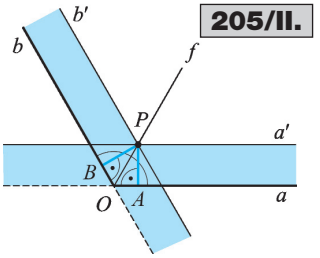
I

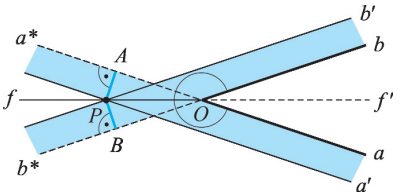
205/I.



205/II.



205/III.



205. **1. eset:** A szög konvex (205/I. és 205/II. ábra). A szögfelező P pontjára $PA = PB = \mathrm{d}(a; a') = \mathrm{d}(b; b')$. **2. eset:** A szög konkáv (205/III. ábra). A szögfelező P pontjára $PA = PB = \mathrm{d}(a'; a^*) = \mathrm{d}(b'; b^*)$.

206. A keresett ponthalmaz egy O középpontú, r sugarú kör, ahol $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$. A k kör tetszőleges P pontjának k_1, illetve k_2 körtől mért távolsága $\mathrm{d}(P; k_1) = r - r_1 = \frac{r_2 - r_1}{2}$, illetve $\mathrm{d}(P; k_2) = r_2 - r = \frac{r_2 - r_1}{2}$. Tehát a két távolság egyenlő. A k kört a k_1 és k_2 körök középkörének nevezzük.

207. $f_{AB} \cap e = M$ lehet a keresett pont. Ha AB nem merőleges e-re, akkor egyetlen pont a megoldás. Ha AB merőleges e-re és $\mathrm{d}(e; A) \neq \mathrm{d}(e; B)$, akkor nincs megoldás. Ha AB merőleges e-re és $\mathrm{d}(e; A) = \mathrm{d}(e; B)$, akkor az e egyenes minden pontja rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.

208. **1. eset:** $\beta < 90°$. $P = \mathrm{e}(A; B) \cap f_{BC}$. P az AB belső pontja, ha $AB > AC$. P az AB külső pontja, ha $AB < AC$, tehát az AB szakaszon nincs a feltételnek eleget tevő pont. $P \equiv A$, ha $AB = AC$.
2. eset: $\beta = 90°$. $\mathrm{e}(A; B) \cap f_{BC} = \emptyset$, nincs ilyen pont.
3. eset: $\beta > 90°$. $P = \mathrm{e}(A; B) \cap f_{BC}$. $AC > AB$ miatt P mindig az AB külső pontja, tehát az AB szakaszon nincs a feltételnek eleget tevő pont.

209. A keresett pont az $ACB\sphericalangle$ szögfelezőjének a szemközti AB oldallal való metszéspontja. A külső szögfelező C-től különböző összes pontja a háromszögön kívül van, tehát az AB szakasszal nincs közös pontja.

210. Tekintsük a metszéspontoknál keletkezett szögek szögfelezőit! Ezek páronkénti metszéspontjai lesznek a keresett pontok. Két megoldás van.

211. Bármely körvonal öt különböző pontja rendelkezik a kívánt tulajdonsággal, mert egyenlő távol van a kör középpontjától.

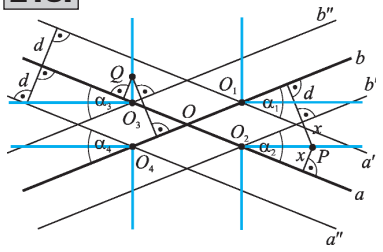
212. $f_{AB} \cap f_{CD} = O \Rightarrow O \in f_{AB}$ és $O \in f_{CD} \Rightarrow AO = BO$ és $CO = DO$. Ezekből viszont nem következik BO és DO egyenlősége, tehát O nem lehet az $ABCD$ négyszög körülírt körének középpontja.

213. Legyen a két szakasz AB és CD. $f_{AB} \cap f_{CD} = E$ lehet az egyenlő szárú háromszögek közös csúcsa. **1. eset:** AB nem párhuzamos CD-vel. $f_{AB} \cap f_{CD} \notin AB \wedge f_{AB} \cap f_{CD} \notin CD. \Rightarrow$ Egy megoldás van.
2. eset: AB nem párhuzamos CD-vel. $f_{AB} \cap f_{CD} \in CD. \Rightarrow$ Nem léteznek ilyen háromszögek.
3. eset: AB párhuzamos CD-vel. $f_{AB} \equiv f_{CD}$. f_{AB} minden pontja megfelelő a szakasz felezőpontjának kivételével.
4. eset: AB párhuzamos CD-vel. f_{AB} párhuzamos f_{CD}-vel. $\Rightarrow$ Nem léteznek ilyen háromszögek.

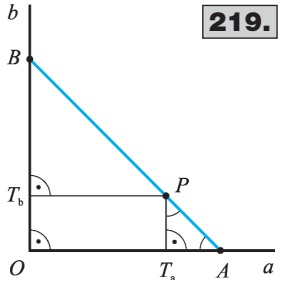
214. Vegyük az α szögfelezőjét! P-ből állítsunk merőlegest f_α-ra! A merőleges A és B pontban metszi a szög szárait. $OAB\triangle$ szögfelezője merőleges a szemközti oldalra, tehát $OA = OB$, vagyis a merőleges egyenlő szakaszokat vág le a szögszárakból.

215. A keresett pontok a szögfelező félegyenesnek és a P középpontú, 3 cm sugarú körnek a közös részét alkotják. 2, 1 vagy 0 megoldás lehet.

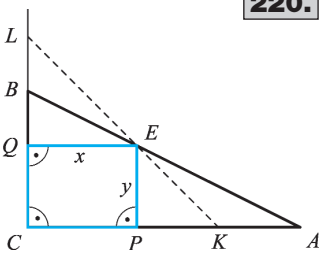
218.



219.



220.



216. **1. eset:** a egyenes nem párhuzamos b-vel. Legyen $b_1, b_2 \parallel b$ és $d(b; b_1) = d(b; b_2) = t$! $b_1 \cap a = M_1$, $b_2 \cap a = M_2$. Metsző egyenesek esetében két megoldás van.
2. eset: $a \parallel b$. Csak akkor van megoldás, ha $d(a; b) = t$. Ekkor a minden pontja megfelel a feladat követelményeinek.

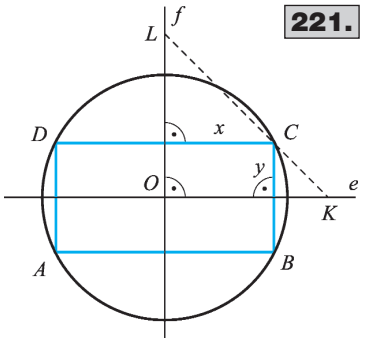
217. Az e egyenestől a távolságra levő pontok halmaza az e_1 és e_2 párhuzamos egyenespár. A P ponttól a távolságra levő pontok halmaza a P középpontú, a sugarú k_P kör. Mindkét feltételnek az $e_1 \cap k_P$, illetve $e_2 \cap k_P$ pontok tesznek eleget. Két megoldás van, ha $0 \le d(e; P) < 2a$. Egy megoldás van, ha $d(e; P) = 2a$. Nincs megoldás, ha $d(e; P) > 2a$.

218. a-val és b-vel d távolságban párhuzamosokat húzunk. A keletkezett α_1, α_2, α_3, α_4 szögek belső és külső szögfelezőinek megjelölt része a megoldás.

219. $OA = OB = d \Rightarrow OAB\sphericalangle = 45° \Rightarrow$ ha $P \in AB$, akkor $PT_aA\triangle$ egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow$ $\Rightarrow PT_a = T_aA$. PT_bOT_a téglalap $\Rightarrow PT_b = OT_a$; $PT_b + PT_a = OT_a + T_aA = OA = d \Rightarrow$ a BA szakasz minden pontja megfelel a feltételeknek.

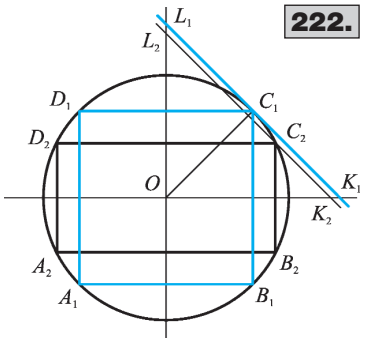
220. Felhasználjuk a 219. feladat eredményét, miszerint azok az E pontok, melyekre $x + y = \frac{k}{2}$, a $\frac{k}{2}$ befogójú CKL egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóján vannak. A szerkesztés: ① $ACB\sphericalangle$ száraira C-ből $\frac{k}{2}$ távolság felvétele $\Rightarrow K$, L. ② $KL \cap AB = E$. ③ E-ből merőleges CA-ra $\Rightarrow P$. E-ből merőleges CB-re $\Rightarrow Q$.

221.



221. Felhasználjuk: A téglalap C csúcsa rajta van a körön és a $\frac{k}{4}$ befogójú OKL egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóján. A szerkesztés: ① Az adott kör két egymásra merőleges átmérője $\Rightarrow e$ és f. ② O-ból e-re és f-re $\frac{k}{4}$ szakasz felvétele $\Rightarrow K, L$. ③ KL és az adott kör közös pontja C. ④ C-t tükrözzük e-re, f-re és O-ra $\Rightarrow B, D, A$. KL és a kör helyzetétől függően két egybevágó téglalapot vagy egy négyzetet kapunk, vagy egyáltalán nincs megoldás.

222.



222. A körbe írt négyzetek és téglalapok elforgathatók úgy, hogy oldalaik párhuzamosak legyenek. A 221. feladatban láttuk, hogy az $A_1B_1C_1D_1$ téglalap kerülete $4OK_1$, az $A_2B_2C_2D_2$ téglalap kerülete pedig $4OK_2$. K_1L_1 a kör érintője, K_2L_2 pedig a szelője $\Rightarrow OK_1 > OK_2 \Rightarrow$ a négyzet kerülete nagyobb bármelyik beírt téglalap kerületénél.

I

Háromszögek szerkesztése (I. rész)

223. A szerkesztés: ① AB-vel párhuzamos m_c távolságra e_1 és e_2. ② $e_1 \cap e = C_1$; $e_2 \cap e = C_2$. Ha $e \parallel$ e $(A; B)$, de d$(e;$ e$(A; B)) \neq m_c$, akkor nincs megoldás. Ha $e \parallel$ e $(A; B)$ és d$(e;$ e$(A; B)) = m_c$, akkor minden $C \in e$ pont megfelelő.

224. A szerkesztés: ① e-vel párhuzamos m_c távolságra $\Rightarrow g_1$ és g_2. ② $g_1 \cap f = C_1$; $g_2 \cap f = C_2$. ③ C_1, (ill. C_2) középpontú, a sugarú kör $\Rightarrow k_a$. $k_a \cap e = B_1$; B_2. ④ C_1, (ill. C_2) középpontú, b sugarú kör $\Rightarrow k_b$. $k_b \cap e = A_1$; A_2. ⑤ A_i, B_i, C_i pontok határozzák meg a szerkesztendő háromszöget. A megoldások száma végtelen sok vagy 4-4 egybevágó vagy 2-2 egybevágó háromszög lehet, de nulla megoldást is kaphatunk.

225. A szerkesztés: ① AB-vel párhuzamos, m_c távolságra lévő egyenes $\Rightarrow e$. ② A csúcsnál AB-re α szög; a másik szára a g egyenes. ③ $e \cap g = C$. Egy megoldás van.

226. A szerkesztés: ① $AB = c$ oldal $\Rightarrow A$, B. ② AB-vel párhuzamos, m_c távolságra lévő egyenes $\Rightarrow g$. ③ A középpontú, b sugarú kör $\Rightarrow k_A$. ④ $k_A \cap g = C$. Két különböző megoldás van, ha $b > m_c$. Egy derékszögű megoldás van, ha $b = m_c$. Nincs megoldás, ha $b < m_c$.

227. A szerkesztés: ① $AB = c$ szakasz $\Rightarrow A$, B. ② A csúcsnál AB-re α szög; a másik szára a g egyenes. ③ AB szakasz felezéspontja F. ④ F középpontú, s_c sugarú kör $\Rightarrow k_F$. ⑤ $k_F \cap g = C$. Egy megoldás van, ha $s_c > \frac{c}{2}$. Kettő, egy vagy nulla megoldás van, ha $s_c < \frac{c}{2}$ (ekkor az $FAC\triangle$-ben két oldal és a kisebbel szemben fekvő szög adott).

228. A szerkesztés: ① $AB = c$ szakasz $\Rightarrow A$, B. ② AB-vel párhuzamos m_c távolságra $\Rightarrow g$ egyenes. ③ AB szakasz felezéspontja F. ④ F középpontú, s_c sugarú kör $\Rightarrow k_F$. ⑤ $k_F \cap g = C$. Két egybevágó megoldás van, ha $s_c > m_c$. Egyetlen egyenlő szárú megoldás van, ha $s_c = m_c$. Nincs megoldás, ha $s_c < m_c$.

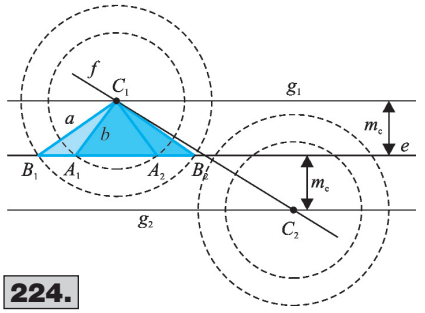
229. Adott: m_c; f_γ és β. A szerkesztés: ① β szög $\Rightarrow e, f$ és B. ② e-vel párhuzamos, m_c távolságra lévő egyenes $\Rightarrow g$. ③ $g \cap f = C$. ④ C középpontú, f_γ sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ⑤ $k_C \cap e = P$. ⑥ $PCB\sphericalangle$ tükrözése CP egyenesére $\Rightarrow h$ félegyenes. ⑦ $h \cap e = A$. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 lehet.

230. A szerkesztés: ① 60°-os szög $\Rightarrow B, e, f$. ② m távolságra párhuzamos e-vel $\Rightarrow g$. ③ $f \cap g = C$. ④ C középpontú, CB sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ⑤ $k_C \cap e = A$. Egyértelműen megoldható.

231. A szerkesztés: ① A-ból merőleges e-re $\Rightarrow$ metszéspontjuk F. ② A-ban AF-re 30°-os szög az AF által határolt két félsíkban $\Rightarrow f$ és g. ③ $f \cap e = B \Rightarrow g \cap e = C$. Egyértelműen megoldható, ha $A \notin e$.

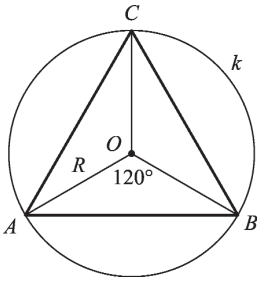
232. Adott: AB oldal egyenese, e és a középpont, M. A szerkesztés: ① M-ből merőleges e-re $\Rightarrow m$ egyenes $\Rightarrow e \cap m = F$. ② MF-re M csúccsal pozitív és negatív irányban 60°-os szög $\Rightarrow f$ és g. ③ $f \cap e = A$; $g \cap e = b$. ④ A középpontú, AB sugarú kör $\Rightarrow k_A$. ⑤ $k_A \cap m = C$. Egyértelműen megoldható, ha $M \notin e$.

233. *a)* Az egyenlő oldalú háromszög 120°-os forgásszimmetriáját felhasználva: ① O középpontú, R sugarú kör $\Rightarrow k$. ② 120°-os középponti szögek $\Rightarrow A$; B; C. Egyértelmű a megoldás. *b)* Az egyenlő oldalú háromszög 120°-os forgásszimmetriáját felhasználva: ① O_0 középpontú,

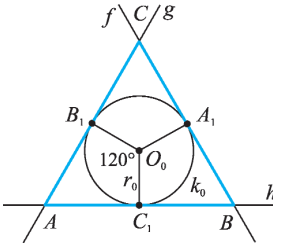


224.

233/I.



233/II.



r_0 sugarú kör $\Rightarrow k_0$. ② 120°-os középponti szögek $\Rightarrow A_1, B_1, C_1$. ③ k_0 körhöz érintő A_1-, B_1-, C_1-ben $\Rightarrow f, g, h$. ④ $f \cap g = C$; $g \cap h = A$; $f \cap h = B$. Egyértelmű a megoldás.

234. Adott: A; B és az AC szár egyenese, e. A szerkesztés: ① AB szakasz felező merőlegese $\Rightarrow f_{AB}$. ② $f_{AB} \cap e = C$. Nincs megoldás, ha e merőleges AB-re.

235. A szerkesztés: ① γ szög $\Rightarrow C$; a; b. ② γ szög felezője $\Rightarrow f_\gamma$. ③ C-től m_c távolságra merőleges egyenest állítunk f_γ -ra $\Rightarrow g$. ④ $g \cap a = A$ és $g \cap b = B$. Egyértelműen megoldható.

236. A szerkesztés: ① γ szög $\Rightarrow C$; a; b. ② γ szögfelezője $\Rightarrow f_\gamma$. ③ $\frac{c}{2}$ távolságra párhuzamos f_γ-val $\Rightarrow e, f$. ④ $e \cap a = B$; $b \cap f = A$. Egyértelműen megoldható.

237. A szerkesztés: ① α szög $\Rightarrow A$; e; f. ② A középpontú, b sugarú kör k_A. ③ $k_A \cap e = C$. ④ C középpontú, b sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ⑤ $k_C \cap f = B$. Egyértelműen megoldható.

238. A szerkesztés: ① $AB = c$ szakasz $\Rightarrow A$, B. ② AB felezéspontja és felező merőlegese $\Rightarrow F, f_{AB}$. ③ F középpontú, m_c sugarú kör $\Rightarrow k_F$. ④ $k_F \cap f_{AB} = C$. Egyértelműen megoldható.

239. A szerkesztés: ① C csúcsú derékszög $\Rightarrow e, f$. ② C középpontú, b sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ③ $k_C \cap e = A$. ④ A középpontú, c sugarú kör $\Rightarrow k_A$. ⑤ $k_A \cap f = B$. Egy megoldás van, ha $c > b$, nincs megoldás, ha $c \le b$.

240. A szerkesztés: ① $m_a = AT$ szakasz $\Rightarrow A, T$. ② T-ben merőleges AT-re $\Rightarrow e$. ③ A középpontú, c sugarú kör $\Rightarrow k_A$. ④ $k_A \cap e = B$. ⑤ AB felező merőlegese $\Rightarrow f_{AB}$. ⑥ $f_{AB} \cap e = C$. Egy megoldás van, ha $c > m_a$, nincs megoldás, ha $c \le m_a$.

241. Felhasználjuk: $SC = 2SG$. A szerkesztés: ① $AB = c$ szakasz $\Rightarrow A$, B. ② AB felező merőlegese f_{AB}. ③ A csúcshoz $BAF\sphericalangle = \delta \Rightarrow f$ félegyenes. ④ $f \cap f_{AB} = S$. ⑤ f_{AB}-re G-vel ellentétes oldalra S-ből $2SG \Rightarrow C$. $\delta < 90°$ esetén egyértelműen megoldható.

242. Legyen az AB alap felezőpontja F, valamint az f_α szögfelező és az m_c magasság metszéspontja P, szöge δ! Felhasználjuk: $PAF\sphericalangle = 90° - \delta$, $CAF\sphericalangle = 2PAF\sphericalangle = 180° - 2\delta$.
A szerkesztés: ① $AB = c$ szakasz $\Rightarrow A$, B. ② A-ban és B-ben AB-re $(180° - 2\delta)$ szög $\Rightarrow$ a szögszárak metszéspontja C. Egy megoldás van, ha $0° < 180° - 2\delta < 90° \Rightarrow 45° < \delta < 90°$.

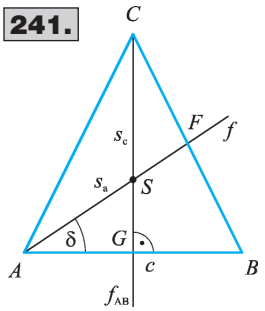
243. A szerkesztés: ① m_a; $\sphericalangle$; $a \Rightarrow ATC\triangle$. ② C középpontú, a sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ③ $k_C \cap e(T;\ C) = B$. Nincs megoldás, ha $a < m_a$. 1 derékszögű megoldás van, ha $a = m_a$. 1 hegyesszögű és 1 tompaszögű megoldás van, ha $a > m_a$.

244. A szerkesztés: ① s_a; $\frac{a}{2}$; $a \Rightarrow AFC\triangle$. ② C-t tükrözzük F-re $\Rightarrow B$. Nincs megoldás, ha $AFC\triangle$-re nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

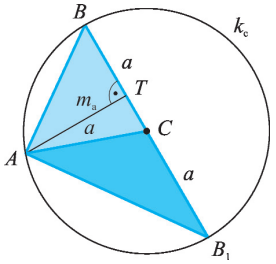
245. Adott a BC szár és a T magasságtalppont. A szerkesztés: ① T-ben merőlegest állítunk BC-re $\Rightarrow m$. ② C középpontú, CB sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ③ $k_C \cap m = A$. Ha T a BC B-n túli meghosszabbításán van vagy $B \equiv T$, akkor nincs megoldás. Ha T a BC belső pontja, akkor hegyesszögű a háromszög. Ha $T \equiv C$, akkor derékszögű a háromszög. Ha T a BC C-n túli meghosszabbításán van, akkor tompaszögű a háromszög.

246. A szerkesztés: ① $a = BC \Rightarrow B$; C. ② F a BC szakasz felezéspontja. ③ F-ben BC-re felmérjük δ-t $\Rightarrow e$. ④ C középpontú, a sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ⑤ $k_C \cap e = A$. Ha $\delta = 90°$, akkor a háromszög szabályos. Ha $\delta \neq 90°$, akkor két különböző megoldás van.

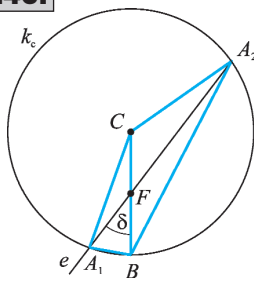
241.



243.

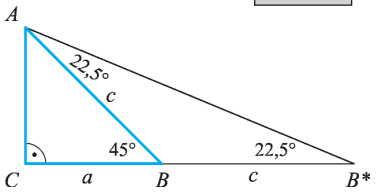


246.

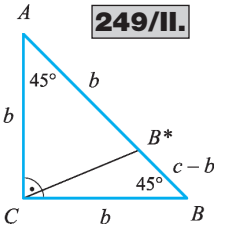


I

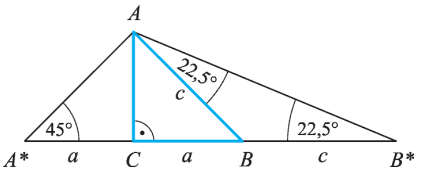
249/I.



249/II.



250.



247. A szerkesztés: ① $AB = c \Rightarrow A$; B. ② AB-re A-ban és B-ben $45° \Rightarrow e$; f. ③ $e \cap f = C$. Egyértelműen megoldható.

248. *a)* Legyen az AB átfogó felezőpontja F, egyenese e! Felhasználjuk: $AF = FB = FC$ és $FC \perp AB$. A szerkesztés: ① C-ből $\perp e$-re $\Rightarrow m$. ② $m \cap e = F$. ③ F középpontú, FC sugarú kör $\Rightarrow$ $\Rightarrow k_F$. ④ $k_F \cap e = \{A; B\}$. Egyértelműen megoldható.

b) A szerkesztés: ① B-ből $\perp f$-re $\Rightarrow m$. ② $m \cap f = C$. ③ C középpontú, CB sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ④ $k_C \cap f = A$. Egyértelműen megoldható.

249. *a)* Felhasználjuk: $AB = BB^*$; $BAB^* \sphericalangle = BB^*A \sphericalangle = \dfrac{45°}{2}$.

A szerkesztés: ① $a + c$; $\sphericalangle$; $22{,}5° \Rightarrow ACB^*\triangle$. ② C középpontú, CA sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ③ $k_C \cap CB^* = B$. Egyértelműen megoldható.

b) Felhasználjuk: $AC = AB^*$; $ACB^* \sphericalangle = AB^*C \sphericalangle = 67{,}5°$; $CB^*B \sphericalangle = 112{,}5°$.

A szerkesztés: ① $(c - b)$; $45°$; $112{,}5° \Rightarrow CBB^*\triangle$. ② C középpontú, CB sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ③ $k_C \cap \mathrm{e}(B; B^*) = A$. Egyértelműen megoldható.

250. Felhasználjuk: $AC = CB = A^*C$; $AB = BB^*$; $AA^*B^* \sphericalangle = 45°$; $AB^*A^* \sphericalangle = 22{,}5°$.

A szerkesztés: ① $K = a + a + c$; $45°$; $22{,}5° \Rightarrow AA^*B^*\triangle$. ② A-ból $\perp A^*B^*$-ra $\Rightarrow$ C. ③ C-ből B^* felé AC távolság $\Rightarrow B$. Egyértelműen megoldható.

251. **1. eset:** Az adott szög a háromszög alapon fekvő szöge, α. Felhasználjuk: $AC = CB = BB^*$; $BB^*C \sphericalangle = BCB^* \sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$.

A szerkesztés: ① $(a + c)$; α; $\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow$ $CAB^*\triangle$. ② CB^* felező merőlegese $\Rightarrow f$. ③ $f \cap AB^* = B$.

2. eset: Az adott szög a háromszög szárszöge, γ. Ebből az alapon fekvő szög: $\alpha = \dfrac{180° - \gamma}{2}$.

Alkalmazzuk a továbbiakban az 1. esetnél vázolt szerkesztést.

Ha az adott szög hegyesszög, akkor két megoldás van (az első és a második esetnél is egy-egy).

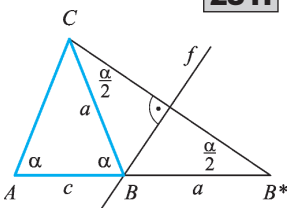
Ha az adott szög derékszög vagy tompaszög, akkor egy megoldás van (csak a második esetnél).

252. *a)* Az adott szög az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szöge, α.

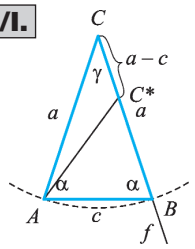
1. eset: $a > c$. Van olyan $C^* \in BC$, amelyre $AB = BC^* \Rightarrow BAC^* \sphericalangle = BC^*A \sphericalangle = 90° - \dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow AC^*C \sphericalangle = 90° + \dfrac{\alpha}{2}$. Felhasználjuk továbbá, hogy $ACB \sphericalangle = 180° - 2\alpha$.

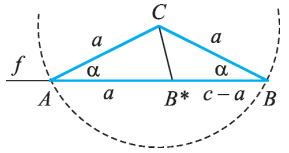
251.



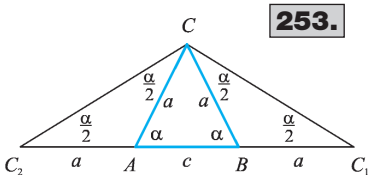
252/I.



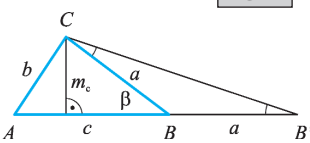
252/II.



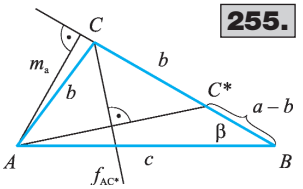
253.



254.



255.



A szerkesztés: ① $a-c$; $90°+\frac{\alpha}{2}$; $180°-2\alpha \Rightarrow AC^*C\triangle$. ② C középpontú, CA sugarú kör $\Rightarrow$ $\Rightarrow k_C$. ③ CC^* félegyenes $\Rightarrow f$. ④ $k_C \cap f = B$

2. eset: $a < c$. Van olyan $B^* \in AB$, amelyre $AC = AB^* \Rightarrow AB^*C\sphericalangle = ACB^*\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}$. $\Rightarrow CB^*B\sphericalangle = 90° + \frac{\alpha}{2}$. A szerkesztés: ① $c-a$; $90°+\frac{\alpha}{2}$; $\alpha \Rightarrow B^*BC\triangle$. ② C középpontú, CB sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ③ BB^* félegyenes $\Rightarrow f$. ④ $f \cap k_C = A$.

Ha $a = c$ és a szög 60°, akkor tetszőleges oldalú szabályos háromszög a megoldás. Ha $a = c$ és a szög nem 60°, akkor nincs megoldás.

b) Az adott szög az egyenlő szárú háromszög szárszöge, γ. Az $\alpha = \frac{180° - \gamma}{2}$ összefüggés segítségével a feladat visszavezethető az *a)* esetre.

253. Felhasználjuk: $AC_2 = AC = BC = BC_1 \Rightarrow AC_2C\sphericalangle = ACC_2\sphericalangle = BC_1C\sphericalangle = BCC_1\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$.

A szerkesztés: ① $k = 2a + c$; $\frac{\alpha}{2}$; $\frac{\alpha}{2} \Rightarrow C_1C_2C\triangle$. ② CC_1 felező merőlegese $\Rightarrow f_{CC_1}$; CC_2 felező merőlegese $\Rightarrow f_{CC_2}$. ③ $f_{CC_1} \cap C_1C_2 = B$; $f_{CC_2} \cap C_1C_2 = A$. Egyértelműen megoldható, ha $\alpha < 90°$.

254. Felhasználjuk: $CB = BB^* \Rightarrow BCB^*\sphericalangle = BB^*C\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$.

A szerkesztés: ① $a + c$; $\frac{\beta}{2}$; $m_c \Rightarrow AB^*C\triangle$. ② CB^* felező merőlegese $\Rightarrow f_{CB}$.

③ $AB^* \cap f_{CB} = B$. Ha $AB^* \cap f_{CB} = \emptyset$, akkor nincs megoldás.

255. Felhasználjuk: $CA = CC^*$.

A szerkesztés: ① $a-b$; m_a; $\beta \Rightarrow ABC^*\triangle$. ② AC^* felező merőlegese $\Rightarrow f_{AC^*}$.

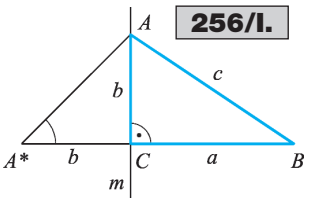
③ $f_{AC^*} \cap e(B; C^*) = C$. Ha $f_{AC^*} \cap e(B; C^*) = \emptyset$ vagy $f_{AC^*} \cap e(B; C^*)$ rajta van C^*B félegyenesen, akkor nincs megoldás.

256. *a)* Adatok: $a + b$; c. Felhasználjuk: $A^*C = CA \Rightarrow AA^*C\sphericalangle = 45°$.

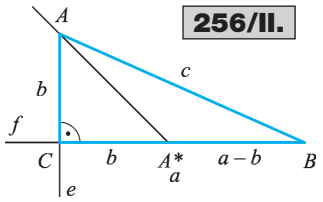
A szerkesztés: ① $b + a$; 45°; $c \Rightarrow A^*BA\triangle$. ② A-ból merőleges A^*B-re $\Rightarrow m$. ③ $m \cap A^*B = C$.

Az $A^*BA\triangle$ nem mindig szerkeszthető, mert két oldal és a kisebbel szemben fekvő szög adott. Ha nem szerkeszthető, illetve $a + b < c$, akkor nincs megoldás.

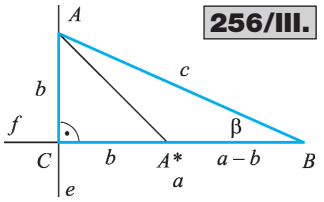
256/I.



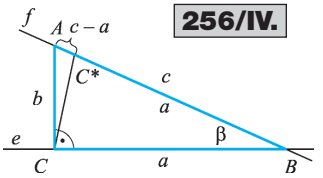
256/II.

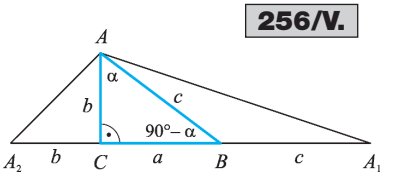


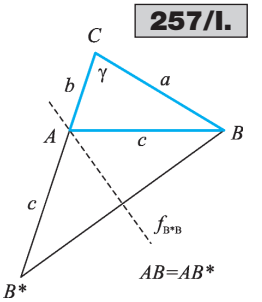
256/III.



I







b) Adatok: $a-b$; c. Felhasználjuk: $A^*C = CA \Rightarrow AA^*C\sphericalangle = 45° \Rightarrow$ $\Rightarrow AA^*B\sphericalangle = 135°$. A szerkesztés: ① $a-b$; 135°; $c \Rightarrow AA^*B\triangle$. ② A-ból merőleges e(A^*; B) egyenesre $\Rightarrow e$. ③ $e \cap$ e(A^*; B) $= C$. Egyértelműen megoldható, ha $a-b<c$.

c) Adatok: $a-b$; α. Felhasználjuk: $A^*C = CA \Rightarrow AA^*C\sphericalangle = 45° \Rightarrow AA^*B\sphericalangle = 135°$. $\beta = 90° - \alpha$. A szerkesztés: ① $a-b$; 135°; $90° - \alpha \Rightarrow A^*BA\triangle$. ② A-ból merőleges e(A^*; B)-re $\Rightarrow e$. ③ $e \cap$ e(A^*; B) $= C$. $45° < \alpha < 90°$ esetén egyértelműen megoldható. Egyébként nincs megoldás.

d) Adatok: $c-a$; α. Felhasználjuk: $CB = C^*B$ és $\beta = 90° - \alpha \Rightarrow BCC^*\sphericalangle = BC^*C\sphericalangle =$ $= 45° + \frac{\alpha}{2}\sphericalangle \Rightarrow CC^*A\sphericalangle = 135° - \frac{\alpha}{2}$. A szerkesztés: ① $c-a$; α; $135° - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow AC^*C\triangle$. ② C-ben merőleges AC-re $\Rightarrow e$. ③ $e \cap$ e(A; C^*) $= B$. $0° < \alpha < 90°$ esetén egyértelműen megoldható.

e) Adatok: $a+b+c$; α. Felhasználjuk: $CA_2 = CA \Rightarrow AA_2C\sphericalangle = 45°$; $BA_1 = BA \Rightarrow BAA_1\sphericalangle =$ $= BA_1A\sphericalangle = 45° - \frac{\alpha}{2}$. A szerkesztés: ① $a+b+c$; 45°; $45° - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow A_2A_1A\triangle$. ② AA_2 felező merőlegese $\Rightarrow f_{AA_2}$; AA_1 felező merőlegese $\Rightarrow f_{AA_1}$. ③ $f_{AA_2} \cap A_1A_2 = C$; $f_{AA_1} \cap A_1A_2 = B$. $0° < \alpha < 90°$ esetén egyértelműen megoldható.

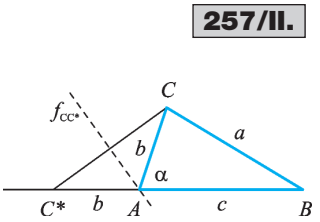
257. *a)* Adatok: $b+c$; a; γ. Felhasználjuk: $AB = AB^*$.

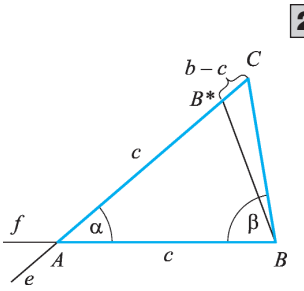
A szerkesztés: ① $b+c$; a; $\gamma \Rightarrow CB^*B\triangle$. ② BB^* felező merőlegese $\Rightarrow f_{BB^*}$. ③ $f_{BB^*} \cap B^*C = A$. Ha $f_{BB^*} \cap B^*C = \emptyset$, akkor nincs megoldás.

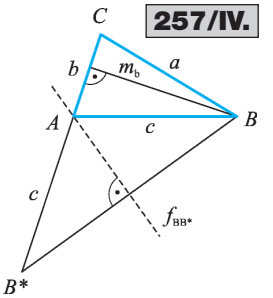
b) Adatok: $b+c$; a; α. Felhasználjuk: $CA = C^*A \Rightarrow C^*CA\sphericalangle = CC^*A\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$.

A szerkesztés: ① $b+c$; a; $\frac{\alpha}{2} \Rightarrow BCC^*\triangle$. ② CC^* felező merőlegese $\Rightarrow f_{CC^*}$.

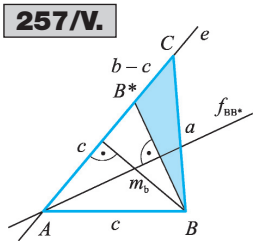
③ $f_{CC^*} \cap C^*B = A$; $b+c>a$ miatt a $BCC^*\triangle$-et két oldalából és a kisebbel szemben fekvő szögéből kell megszerkeszteni, így a megoldás nem egyértelmű. Kaphatunk egy vagy két megoldást, de az is előfordulhat, hogy az adatok nem határoznak meg háromszöget. Ha $f_{CC^*} \cap C^*B = \emptyset$, akkor nincs megoldás.



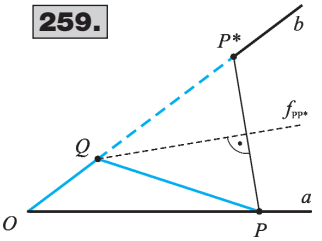




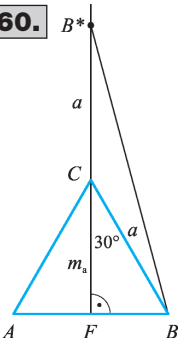
257/V.



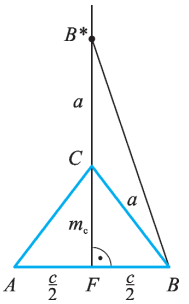
259.



260.



261.



c) Adatok: $b-c$, α; β. Felhasználjuk: $AB=AB^* \Rightarrow$ $\Rightarrow ABB^* \sphericalangle = AB^*B \sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow BB^*C \sphericalangle = 90° + \frac{\alpha}{2}$. $B^*CB \sphericalangle = 180° - (\alpha + \beta)$.

A szerkesztés: ① $b-c$; $90° + \frac{\alpha}{2}$; $180° - (\alpha + \beta) \Rightarrow CB^*B\triangle$. ② B-ben CB-re β szög $\Rightarrow f$. ③ $e(C; B^*) \cap f = A$. Nincs megoldás, ha $\beta + \frac{\alpha}{2} \le 90°$, mert ekkor $BB^*C \sphericalangle + BCB^* \sphericalangle \ge 180°$ lenne.

d) Adatok: $b+c$; a; m_b. Felhasználjuk: $AB=AB^*$. A szerkesztés: ① $b+c$; a; $m_b \Rightarrow B^*BC\triangle$. ② BB^* felező merőlegese $\Rightarrow f_{BB^*}$. ③ $f_{BB^*} \cap B^*C = A$. Ha $a < m_b$, akkor nincs megoldás. Ha $a = m_b$, akkor derékszögű háromszöget kapunk. Ha $a > m_b$, akkor két megoldás is lehet, amennyiben $f_{BB^*} \cap B^*C \neq \emptyset$.

e) Adatok: $b-c$; a; m_b. Felhasználjuk: $AB=AB^*$. A szerkesztés: ① $b-c$; a; $m_b \Rightarrow BB^*C\triangle$. ② BB^* felező merőlegese $\Rightarrow f_{BB^*}$. ③ $f_{BB^*} \cap e(C; B^*) = A$. Ha $b-c \ge a$ vagy $a \le m_b$, akkor nincs megoldás. Ha $b-c < a$ és $a > m_b$, akkor a kapott két $CB^*B\triangle$ közül csak az felel meg, amelyikben $CB^*B \sphericalangle > 90°$.

258. Felhasználjuk: Az összeg- és a különbségszakasz összegének fele az a oldal; az összeg- és a különbségszakasz különbségének fele a b oldal. A szerkesztés: ① a és b oldal megszerkesztése a fenti utasítás szerint. ② a; b; $\gamma \Rightarrow ABC\triangle$. $a+b > a-b$ esetén egyértelműen megoldható.

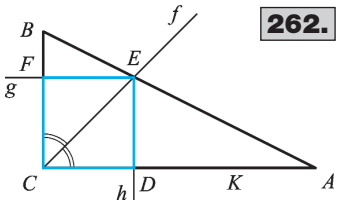
259. Felhasználjuk: $QP = QP^*$ és $OP^* = t$. A szerkesztés: ① O-ból b-re t felvétele $\Rightarrow P^*$. ② PP^* felező merőlegese $\Rightarrow f_{PP^*}$. ③ $f_{PP^*} \cap b = Q$. Ha $OQ + QP = t \le OP$, akkor nincs megoldás, mert az $OPQ\triangle$-re nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. Ha $OQ + QP = t > OP$, akkor egy megoldás van.

260. Felhasználjuk: $CB = CB^* \Rightarrow CB^*B \sphericalangle = CBB^* \sphericalangle = 15°$. A szerkesztés: ① $\triangle$; $m_a + a$; $15° \Rightarrow FBB^*\triangle$. ② BB^* szakaszfelező merőlegese $\Rightarrow f_{BB^*}$. ③ $f_{BB^*} \cap FB^* = C$. ④ B tükörképe F-re $\Rightarrow A$. Egyértelműen megoldható.

261. Felhasználjuk: $CB^* = CB$. A szerkesztés: ① $\frac{c}{2}$; $m_c + a$; $\triangle \Rightarrow FBB^*\triangle$. ② BB^* szakaszfelező merőlegese $\Rightarrow f_{BB^*}$. ③ $f_{BB^*} \cap FB^* = C$. ④ B tükörképe F-re $\Rightarrow A$. Ha $m_c + a \le \frac{c}{2}$, akkor nincs megoldás.

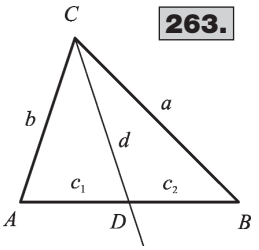
262. Felhasználjuk: Az EC átló felezi az $ACB \sphericalangle$-et.
A szerkesztés: ① $ACB \sphericalangle$ felezője $\Rightarrow f$.
② $f \cap AB = E$. ③ E-ből merőleges BC-re $\Rightarrow g$. E-ből merőleges AC-re $\Rightarrow h$. ④ $g \cap BC = F$ és $h \cap AC = D$. A négyzet egyértelműen szerkeszthető.

262.



I Egybevágóság

Háromszögek, sokszögek egybevágósága



263. Két egybevágó részre csak csúcson átmenő egyenessel vágható szét a háromszög, különben egy háromszög és egy négyszög keletkezne. $ADC \cong BDC\triangle$ lehetséges csak, vagyis az a, d, c_2 és a b, d, c_1 oldalak páronként egyenlők. **1. eset:** Ha $a = b$, akkor $ABC\triangle$ egyenlő szárú. **2. eset:** Ha $a = d$, $d = b$, $c_2 = c_1 \Rightarrow a = d = b \Rightarrow CAD\sphericalangle = CDA\sphericalangle = CDB\sphericalangle = CBD\sphericalangle = \sphericalangle$, ami lehetetlen. Ha $a = d, d = c_1, c_2 = b \Rightarrow c = c_1 + c_2 = d + b = a + b$, ami lehetetlen. **3. eset:** Ha $a = c_1$, $d = d$, $c_2 = b \Rightarrow c = c_1 + c_2 = a + b$, ami lehetetlen. **4. eset:** Ha $a = c_1$, $d = b$, $c_2 = d \Rightarrow c = c_1 + c_2 = a + d = a + b$, ami lehetetlen.

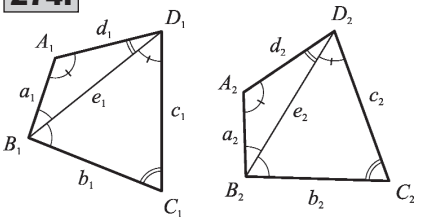
A **264–269.** feladatok megoldását az olvasóra bízzuk.

270. $b_1 = b_2 = 2$ cm, $\alpha_1 = \alpha_2 = 60°$, $\gamma_1 = \beta_2 = 90°$, mégsem egybevágó a két háromszög.

271. $c_1 = b_2 = 2$ cm, $\alpha_1 = \alpha_2 = 80°$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 20°$, mégsem egybevágó a két háromszög.

272. $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $m_1 = m_2$, mégsem egybevágó a két háromszög, ha $\alpha_1 < 90°$ és $\alpha_2 > 90°$.

273. C_1T_1 és C_2T_2 magasság. **1. eset:** Ha α, $\beta \neq 90°$; $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $\beta_1 = \beta_2 \Rightarrow 180° - \beta_1 = 180° - \beta_2$; egy oldal és két megfelelő szög egyenlőségéből $\Rightarrow C_1B_1T_1\triangle \cong C_2B_2T_2\triangle \Rightarrow m_1 = m_2$; két oldal és a hosszabbal szemközti szög egyenlőségéből $\Rightarrow A_1T_1C_1\triangle \cong A_2T_2C_2\triangle \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ közvetlenül, illetve $180° - \alpha_1 = 180° - \alpha_2$ miatt $\Rightarrow A_1B_1C_1\triangle \cong A_2B_2C_2\triangle$.
2. eset: Ha $\alpha = 90°$ vagy $\beta = 90°$, akkor két megfelelő oldal és a hosszabbikkal szemközti szög egyenlősége miatt az állítás nyilvánvaló.

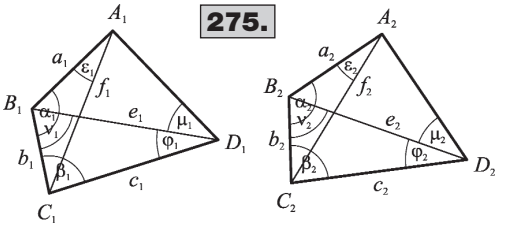


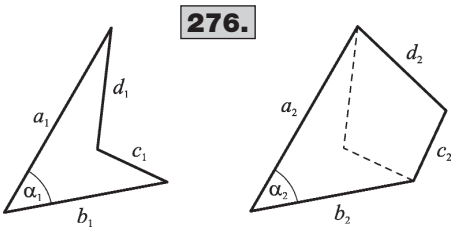
274. $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2, e_1 = e_2$ a 274. ábra szerint. $a_1 = a_2, d_1 = d_2, e_1 = e_2 \Rightarrow A_1B_1D_1\triangle \cong A_2B_2D_2\triangle$ és $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, $e_1 = e_2 \Rightarrow B_1C_1D_1\triangle \cong B_2C_2D_2\triangle \Rightarrow$ a két-két háromszög megfelelő szögei egyenlők $\Rightarrow$ a két négyszög szögei páronként egyenlők, megfelelő oldalaik is egyenlők, tehát egybevágók.

275. $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ a 275. ábra szerint. $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, $\beta_1 = \beta_2 \Rightarrow B_1C_1D_1\triangle \cong B_2C_2D_2\triangle \Rightarrow$ megfelelő szögeik egyenlők $\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$, $\nu_1 = \nu_2$. Hasonlóan $A_1B_1C_1\triangle \cong A_2B_2C_2\triangle \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$; $e_1 = e_2$, $a_1 = a_2$, $\alpha_1 - \nu_1 = \alpha_2 - \nu_2 \Rightarrow B_1D_1A_1\triangle \cong B_2D_2A_2\triangle \Rightarrow d_1 = d_2$, $\mu_1 = \mu_2$. $A_1B_1C_1D_1 \cong A_2B_2C_2D_2$, mert megfelelő szögeik és oldalaik páronként egyenlők.

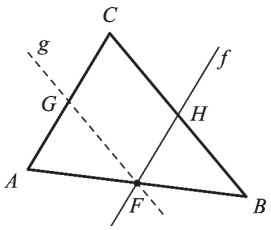
276. $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2, \alpha_1 = \alpha_2$, de a két négyszög közül az egyik konvex, a másik konkáv, tehát nem egybevágók.

277. *a)* G, F felező pontok a szárak belső pontjai; $BCF\triangle \cong BCG\triangle$, mert két oldaluk és azok közrezárt szöge egyenlő $\Rightarrow BF = CG$.

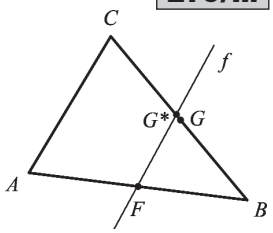




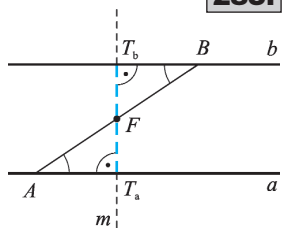
279/I.



279/II.



285.



b) T_1 és T_2 magasságtalppont. Ha $\alpha \neq 90°$, akkor $BCT_1\triangle \cong BCT_2\triangle$ (egy oldaluk és megfelelő szögeik egyenlők) $\Rightarrow BT_1 = CT_2$. Ha $\alpha = 90°$, akkor a szárakhoz tartozó magasságok egyenlők e befogókkal, tehát egymással is.
c) BP és CQ szögfelezők. $BCP\triangle \cong BCQ\triangle$, mert egy oldaluk és megfelelő szögeik egyenlők $\Rightarrow$ $\Rightarrow BP = CQ$.

278. CF súlyvonal $\Rightarrow F$ felezi AB-t; CF magasság $\Rightarrow CF \perp AB$; $AF = FB$, CF közös, $CFA\sphericalangle = CFB\sphericalangle \Rightarrow AFC\triangle \cong BFC\triangle \Rightarrow AC = BC \Rightarrow$ Az $ABC\triangle$ egyenlő szárú.

279. *a)* $AF = FB$, $f \parallel AC$, $f \cap BC = H$; Az F ponton át BC-vel húzott párhuzamos az AC oldalt a G pontban metszi. $GAF\sphericalangle = HFB\sphericalangle$ egyállású szögek, $GFA\sphericalangle = HBF\sphericalangle$ egyállású szögek, $AF = FB \Rightarrow GAF\triangle \cong HFB\triangle \Rightarrow GA = HF$ és $GF = HB$. $CGFH$ négyszög paralelogramma, mert szemközti oldalai párhuzamosak $\Rightarrow CG = HF$ és $GF = CH$; $HF = GA = CG$, $AC = AG + GC = 2HF$, $HB = GF = CH \Rightarrow$ a H pont felezi a BC oldalt.
b) Az F felező ponton át CA-val húzott FG^* párhuzamos felezi BC-t (az *a)* részben bizonyítottuk) $\Rightarrow CG^* = G^*B$ és $CG = GB \Rightarrow G \equiv G^*$. Tehát $FG \parallel AC$ és $FG = \frac{1}{2}AC$. FG a háromszög egyik középvonala.

280. F_1F_2 középvonal az $ABC\triangle$-ben, S_1S_2 pedig az $ABS\triangle$-ben $\Rightarrow F_1F_2$ és S_1S_2 párhuzamos AB-vel és hosszuk feleakkora, mint AB. $\Rightarrow F_1F_2S_1S_2$ paralelogramma $\Rightarrow SF_1F_2\triangle \cong SS_1S_2\triangle$.

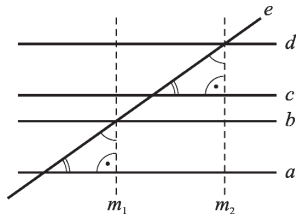
281. A 280. feladat jelöléseit használjuk. $S_1A = S_1S$, mert S_1 felezi AS-t; $S_1S = SF_1$, mert $SF_1F_2\triangle \cong SS_1S_2\triangle \Rightarrow SA : SF_1 = 2 : 1$; hasonlóan látható, hogy $SB : SF_2 = 2 : 1$.

282. Legyen BC felezőpontja F_1, AC felezőpontja F_2! F_1F_2 középvonal az $ABC\triangle$-ben $\Rightarrow$ $\Rightarrow F_1F_2 \parallel AB$ és $AF_1 = BF_2$ a feltétel szerint, ezért ABF_1F_2 húrtrapéz $\Rightarrow AF_2 = BF_1 \Rightarrow AC = BC$.

283. T_a és T_b a magasságok talppontjai. $AT_a = BT_b$ a feltétel szerint, $ACT_a\sphericalangle = BCT_b\sphericalangle$ és $AT_aC\sphericalangle = BT_bC\sphericalangle = 90° \Rightarrow AT_aC\triangle \cong BT_bC\triangle \Rightarrow AC = BC$.

284. Az O csúcsú szög felezőjének F pontjában emelt merőleges A-ban, illetve B-ben metszi a szárakat. $BFO\sphericalangle = AFO\sphericalangle = 90°$, OF közös, $BOF\sphericalangle = FOA\sphericalangle$ a szögfelezés miatt $\Rightarrow OAF\triangle \cong OFB\triangle \Rightarrow$ $\Rightarrow OA = OB$.

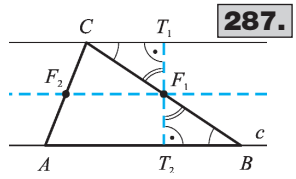
286.



285. Legyen $m \perp a$ és $F \in m$! $FA = FB$, $BT_bF\sphericalangle = AT_aF\sphericalangle = 90°$, $T_bBF\sphericalangle = FAT_a\sphericalangle$ váltószögek $\Rightarrow AT_aF\triangle \cong BT_bF\triangle \Rightarrow FT_a = FT_b$. Az F pont egyenlő távolságra van a-tól és b-től, rajta van a középpárhuzamoson.

286. $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\mathrm{d}(a; b) = \mathrm{d}(c; d)$. A jelölt háromszögek egybevágók, mert egyik oldaluk a sáv szélessége, szögeik pedig egyállású szögek. Az átfogójuk – ami az e egyenesből a sávok által kimetszett két szakasz – is egyenlő. A gondolatmenet független a párhuzamos sávok távolságától.

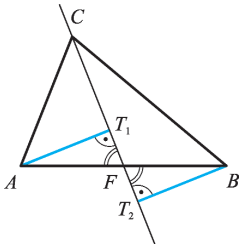
287.



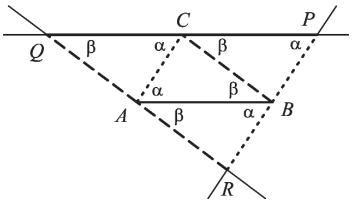
287. $CF_1T_1\sphericalangle = BF_1T_2\sphericalangle$ csúcsszögek, $T_1CF_1\sphericalangle = T_2BF_1\sphericalangle$ váltószögek, $CF_1 = F_1B \Rightarrow CF_1T_1\triangle \cong BF_1T_2\triangle \Rightarrow F_1T_1 = F_1T_2$, $\mathrm{d}(F_1; c) = \mathrm{d}(F_1; c')$. Hasonlóan $\mathrm{d}(F_2; c) = \mathrm{d}(F_2; c')$. $\Rightarrow$ Az F_1F_2 egyenes egyenlő távolságra van a c és c' egyenestől és az azokra illeszkedő A, B, C pontoktól.

I

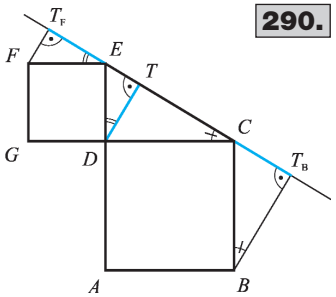
288.



289.



290.



288. $AF = FB$, $AT_1F\sphericalangle = BT_2F\sphericalangle = 90°$, $AFT_1\sphericalangle = BFT_2\sphericalangle$ csúcsszögek $\Rightarrow AFT_1\triangle \cong BFT_2\triangle \Rightarrow$ $\Rightarrow AT_1 = BT_2$.

289. Szemközti oldalaik párhuzamossága miatt az $ARBC$, a $CABP$, az $ABCQ$ négyszögek paralelogrammák $\Rightarrow AR = CB$ és $AC = BR$, $CA = PB$ és $AB = CP$, $AB = CQ$ és $BC = QA$. $\Rightarrow$ $\Rightarrow ARB\triangle \cong CBP\triangle \cong QAC\triangle \cong BCA\triangle$.

290. $DE = FE$ négyzetoldalak, $FT_FE\sphericalangle = DTE\sphericalangle = 90°$, $FET_F\sphericalangle = EDT\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek $\Rightarrow EDT\triangle \cong ET_FF\triangle \Rightarrow ET_F = DT$. Hasonlóan $DTC\triangle \cong CT_BB\triangle \Rightarrow CT_B = DT$. A fentiekből következik, hogy $CT_B = ET_F$.

291. $OA = OC \Rightarrow OAC\triangle$ egyenlő szárú és $OB = OD \Rightarrow OBD\triangle$ egyenlő szárú. Szárszögük közös, alapon fekvő szögeik egyenlők, ezért $AC \parallel BD$ (1). $AB = OB–OA = OD–OC = CD$ (2). (1) és (2) $\Rightarrow ABDC$ húrtrapéz. Az $AOC\triangle$ és $BOD\triangle$ szárszögének szögfelezője szimmetriatengelye mindkét háromszögnek $\Rightarrow$ szimmetriatengelye az $ABDC$ trapéznak $\Rightarrow$ átmegy az AD és BC átlók M metszéspontján.

292. $CR = AP = BQ = a + x$, $CQ = AR = BP = x$, $QCR\sphericalangle = RAP\sphericalangle = PBQ\sphericalangle = 120° \Rightarrow RAP\triangle \cong$ $\cong BRQ\triangle \cong CQR\triangle \Rightarrow PQ = QR = RP$.

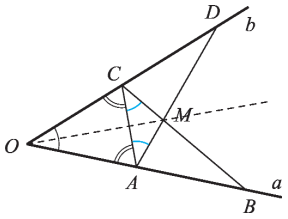
293. $ARQ\triangle \cong BPR\triangle \cong CQP\triangle$, mert két oldaluk ($x$ és y) és azok közrezárt szöge (60°) egyenlő. ($ARQ\triangle$-nek O körüli +120°-os elforgatottja $BPR\triangle$, −120°-os elforgatottja $CQP\triangle$.) Harmadik oldaluk is egyenlő, $QR = RP = PQ$.

294. $ABC\triangle$ és $PQR\triangle$ szögei 60°-osak, $\varepsilon + \varphi + 60° = 180° \Rightarrow RBP\triangle$ szögei ε, φ és 60°.
$QR = PR$, $RQA\sphericalangle = PRB\sphericalangle$, $QAR\sphericalangle = RBP\sphericalangle \Rightarrow QAR\triangle \cong RBP\triangle \Rightarrow QA = RB$ és $AR = BP$.
PRB és QPC háromszöget tekintve $CQ = BP$ és $QA = CP \Rightarrow AR : RB = BP : PC = CQ : QA$.

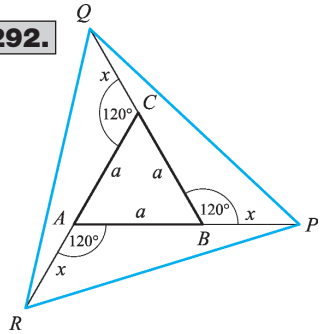
295. *a)* $DQR\triangle$ szabályos $\Rightarrow DR = DQ$; $ABCD$ négyszög négyzet $\Rightarrow DA = DC$ és $DAR\sphericalangle =$ $= DCQ\sphericalangle = 90° \Rightarrow DAR\triangle \cong DCQ\triangle$, mert két oldaluk és a hosszabbal szemközti szögük egyenlő.
b) $DCQ\triangle \cong DAR\triangle \Rightarrow ADR\sphericalangle = QDC\sphericalangle \Rightarrow DB$ felezi az RDQ szöget. D pontban DB átlóra mindkét irányban 30°-os szöget szerkesztünk, szárai kimetszik a szabályos háromszög másik két csúcsát.

296. $e \parallel f, g \perp f$ és $h \perp e \Rightarrow g \parallel h \Rightarrow PQRS$ négyszög téglalap. $AQB\triangle \cong BRC\triangle \cong CSD\triangle \cong DPA\triangle$, mert szögeik 90°, φ és átfogójuk a négyzet oldala $\Rightarrow AP = BQ = CR = DS$ és $AQ = BR = CS =$ $= DP$.

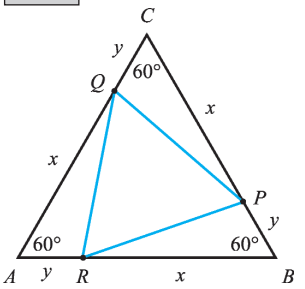
291.



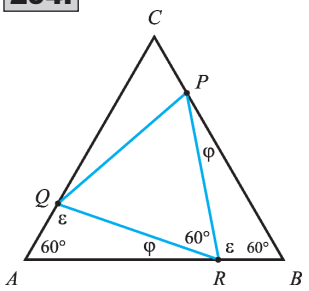
292.



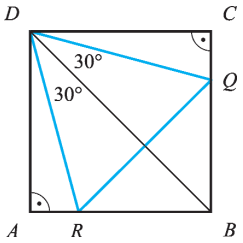
293.



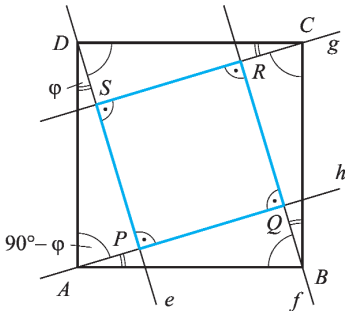
294.



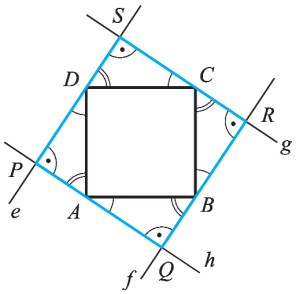
295.



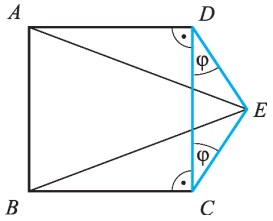
296/I.



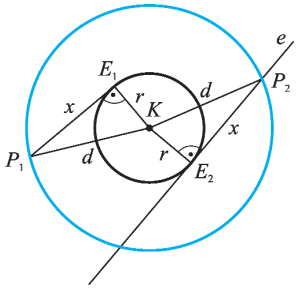
296/II.



297.



301.



1. eset: $PQ = AQ - AP = DP - DS = SP$ (lásd 296/I. ábra)
2. eset: $PQ = AQ + AP = DP + DS = SP$ (lásd 296/II. ábra).
A $PQRS$ téglalap szomszédos oldalai egyenlők $\Rightarrow$ a $PQRS$ négyszög négyzet.

297. $ABCD$ négyzet $\Rightarrow AD = BC$, $DCE\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow \Rightarrow DE = CE$, $ADE\sphericalangle = 90° + \varphi = BCE\sphericalangle \Rightarrow ADE\triangle \cong BCE\triangle \Rightarrow \Rightarrow BE = AE$.

298. $ABFG$ négyzet $\Rightarrow AB = AG$, $ACDE$ négyzet $\Rightarrow AE = \ = AC$, $GAC\sphericalangle = 90° + \alpha = EAB\sphericalangle$ $\Rightarrow GAC\triangle \cong BAE\triangle$ ($BAE\triangle$ a $GAC\triangle$ A pont körüli $-90°$-os elforgatottja) $\Rightarrow GC = EB$.

299. $PQ \parallel AC \Rightarrow PACS$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow PA = \ = SC$, $RACQ$ négyszög paralelogramma $AR = CQ$, $PAR\sphericalangle = \ = SCQ\sphericalangle$ egyállású szögek $\Rightarrow PAR\triangle \cong SCQ\triangle \Rightarrow PR = SQ$.

300. $AD = BC$ és $DAB\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \alpha$. $DB \parallel PQ$, $DP \parallel BQ \Rightarrow DBQP$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow DP = BQ$, $ADP\sphericalangle = CBQ\sphericalangle = 180° - \alpha$, $AD = BC \Rightarrow ADP\triangle \cong CBQ\triangle \Rightarrow AP = CQ$.

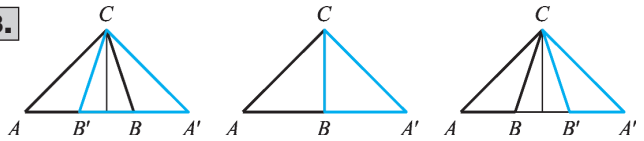
301. $KE_i = r$, $E_iP_i = x$, $KE_iP_i\sphericalangle = 90° \Rightarrow KE_iP_i$ háromszögek egybevágók $\Rightarrow KP_i = d$ állandó.
A keresett ponthalmaz a K középpontú, d sugarú kör.

Tengelyes tükrözés

302. Ha a pont az egyenesen van, akkor tükörképe önmaga. Ha a pont nincs az egyenesen, tükörképét egy olyan rombusz átellenes csúcsaként szerkeszthetjük, amelynek egyik átlóegyenese az adott egyenes.

I

303.



303. *a)*

Az alakzat és a képe együtt:	Ha a tükrözött háromszög:	És a tükörtengely tartalmazza:
négyzet	egyenlő szárú derékszögű	az átfogót
rombusz	egyenlő szárú	az alapot
egyenlő szárú háromszög	derékszögű	az egyik befogót
szabályos háromszög	30°, 60°-os szögű derékszögű	a 30°-os szöggel szomszédos befogót
konvex deltoid	tetszőleges	azt az oldalt, amelyen két hegyesszög van
konkáv deltoid	tompaszögű	azt az oldalt, amelyen a tompaszög van

b) A háromszög és tükörképe együtt konkáv deltoidot vagy egyenlő szárú háromszöget alkot. *c)* A 303. ábra mutatja a megoldást.

304. Szerkesztés: ① K középpont tükörképe e egyenesre $\Rightarrow K'$. ② K' középpontú, r sugarú kör $\Rightarrow k'$.

305. Mivel tengelyes tükrözés esetén $(P')' = P$, ezért P pont tükörképe a egyenesre P_1; P_1 pont tükörképe b egyenesre P_2; P_2 pont tükörképe c egyenesre P_3; P_3 pont tükörképe c egyenesre P_2; P_2 pont tükörképe b egyenesre P_1; P_1 pont tükörképe a egyenesre ismét P pont. (Transzformációk szorzatával: Jelöljük a tükrözéseket t_a, t_b, t_c-vel. $t_a \cdot t_b \cdot t_c \cdot t_c \cdot t_b \cdot t_a = t_a \cdot t_b \cdot (t_c \cdot t_c) \cdot t_b \cdot t_a = t_a \cdot t_b \cdot I \cdot t_b \cdot t_a = t_a(t_b \cdot t_b) \cdot t_a = t_a \cdot I \cdot t_a = t_a \cdot t_a = I$, ahol I az identitás.)

306. Ha $P \in t \Rightarrow P' = P$, ha $P \notin t \Rightarrow PP' \perp t$. Ezért a tengely és a tengelyre merőleges egyenesek egyeznek meg a tükörképükkel.

307. Legyen az e egyenes tükörképe a t tengelyre e'. Ha $e \equiv t$, akkor $e' \equiv e \equiv t$ és $\sphericalangle(e; t) = \sphericalangle(e'; t) = 0°$. Ha $e \neq t$, akkor legyen $e \cap t = M$ és $AA' \cap t = T$, ahol $A \in e \Rightarrow A' \in e'$. Ekkor $M' = M$ és $T' = T$. A tengelyes tükrözés távolságtartó $\Rightarrow MA = M'A'$ és $AT = A'T'$; $ATM\sphericalangle = A'T'M'\sphericalangle = 90° \Rightarrow ATM\triangle \cong A'T'M\triangle \Rightarrow AMT\sphericalangle = A'MT\sphericalangle$, azaz $\sphericalangle(e; t) = \sphericalangle(e'; t)$.

308. Legyen a P_i tükörképe a t tengelyre P_i'! Legyen $R \in t$! Ha $P_1 \in t$, akkor $P_1R = P_1'R$. Ha $P_2 \notin t$, akkor $P_2T = P_2'T$, ahol $P_2P_2' \cap t = T$ és $T = T'$. $P_2T = P_2'T$, $TR = T'R$, $P_2TR\sphericalangle = P_2'T'R\sphericalangle = 90° \Rightarrow P_2TR\triangle = P_2'TR\triangle \Rightarrow P_2R = P_2'R$.

309. Ha $a \equiv t_1$ vagy $a \equiv t_2$, akkor $a' \equiv a$ és $a'' \equiv a$ miatt igaz az állítás. Ha $a \neq t_1$, $a \neq t_2 \Rightarrow a$ egyenes t_1 tengelyre vonatkozó tükörképe a', t_2-re vonatkozó képe a''. $\Rightarrow \sphericalangle(a; t_1) = \sphericalangle(a'; t_1) = \alpha$ és $\sphericalangle(a; t_2) = \sphericalangle(a''; t_2) = \beta$. $t_1 \perp t_2 \Rightarrow \alpha + \beta = 90° \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow a' \equiv a''$.

310. A két kör középpontját összekötő szakasz felező merőlegese a tengely.

311. Az alap felező merőlegese szimmetriatengely $\Rightarrow$ nem szabályos egyenlő szárú háromszögnek egy, szabályos háromszögnek három szimmetriatengelye van.

312. t_1 szimmetriatengely $\Rightarrow AC = BC$, t_2 szimmetriatengely $\Rightarrow AB = AC \Rightarrow AB = BC = AC \Rightarrow$ $\Rightarrow ABC\triangle$ szabályos $\Rightarrow$ három szimmetriatengelye van.

313. Legyen az $ABC\triangle$ derékszöge C-ben, a 30°-os szög B-ben. Tükrözzük a háromszöget a CB befogóra! Az eredeti háromszög és a tükörkép együtt egy szabályos háromszöget alkot.

$$AB = A'B = AA' = 2AC \Rightarrow \underline{\underline{AC = \frac{1}{2} AB}}.$$

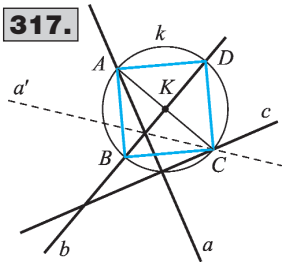
314. $\alpha + 2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 30°$; $2\alpha = 60°$. CA befogóra való tengelyes tükrözéssel az eredeti háromszög és a tükörképe szabályos háromszöget alkotnak, így $2BC = AB$ teljesül.

315. Például a körvonal, a körlap, a körgyűrű minden átmérőjének egyenesére; a sík annak bármely egyenesére; egy egyenes önmagára és a rá merőleges egyenesekre szimmetrikus.

316. A szerkesztés: ① c egyenes tükörképe b egyenesre c'. ② $c' \cap a = A$. ③ A pont tükörképe b egyenesre C. ④ A szerkesztendő egyenes az AC egyenes. Nincs megoldás, ha $c' \parallel a$. Végtelen sok megoldás van, ha $c' \equiv a$.

317. BD a négyzet átlója és szimmetriatengelye $\Rightarrow$ az A pont b egyenesre vonatkozó tükörképe C, ami rajta van az a egyenes b-re vonatkozó a' tükörképén. A szerkesztés: ① a egyenes tükrözése b egyenesre $\Rightarrow a'$. ② $a' \cap c = C$. ③ C pont tükrözése b egyenesre $\Rightarrow A$. ④ $AC \cap b = K$. ⑤ K középpontú, KA sugarú kör $\Rightarrow k$. ⑥ $k \cap b = \{B, D\} \Rightarrow$ $\Rightarrow ABCD$ négyzet. Ha $a' \parallel c \Rightarrow$ nincs megoldás, ha $a' \equiv c \Rightarrow$ végtelen sok, egyébként egy megoldás van.

317.



318. **1. eset:** Ha A és B pontot elválasztja a t egyenes, akkor $AB \cap t = T$ a megoldás.
2. eset: Ha A és B pont a t egyenesnek ugyanazon félsíkjában van, akkor egyiket t egyenesre tükrözve, a feladat visszavezethető az 1. esetre.

319. Jelölje az utat t; a községeket A és B! Legyen az A pont t egyenesre vonatkozó tükörképe A' pont! Ha $P \in t$, akkor $AP = A'P$ és APB töröttvonal hossza egyenlő $A'PB$ töröttvonal hosszával. $A'PB$ akkor a legrövidebb, ha szakasz. A szerkesztés: ① A pont tükrözése t egyenesre $\Rightarrow A'$. ② $A'B \cap t = T$. ③ ATB töröttvonal a megoldás.

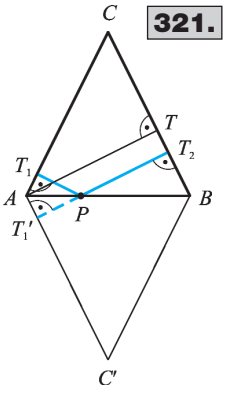
320. Legyen a tükör t, a beesési merőleges m és $m \cap t = T$! A tükrözés optikai törvénye szerint a beesési és a visszaverődési szög egyenlő $\Rightarrow \sphericalangle (AT; m) = \sphericalangle (BT; m) \Leftrightarrow \sphericalangle (AT; t) = \sphericalangle (BT; t) =$ $= \sphericalangle (A'T; t) \Rightarrow A'$, T, B pontok egy egyenesen vannak $\Rightarrow A'TB$ a legrövidebb az A'-t és B-t összekötő, t-t érintő töröttvonalak közül $\Rightarrow A'T + TB = AT + TB$.

321. Tükrözzük az AB egyenesre az ABC háromszöget! $PT_1 + PT_2 = PT_1' + PT_2 = \mathrm{d}(AC'; BC)$. Ez a távolság az $ABC\triangle$ szárhoz tartozó magassága, ami állandó.

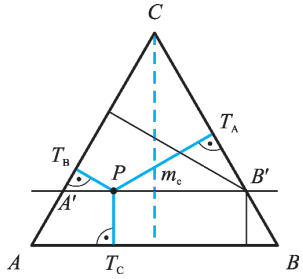
322. Húzzunk AB oldallal párhuzamos egyenest a P ponton át! A 321. feladatban láttuk, hogy $PT_B + PT_A =$ állandó $= m_c'$, ami az $A'B'C$ háromszög magassága. $PT_C + PT_B + PT_A = PT_C + m_c' =$ $= m_c =$ állandó.

323. A hegyesszögű háromszöghöz szerkesztünk egy olyan egyenlő szárú háromszöget, amelynek szárhoz tartozó magassága egyenlő az adott szakasszal. Felhasználjuk, hogy az egyenlő szárú háromszög alapján felvett bármely pont száraktól mért távolságösszege egyenlő a szárhoz tartozó magassággal (321. feladat). A szerkesztés: ① BC oldallal párhuzamos egyenes d távol-

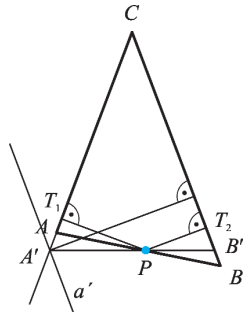
321.



322.

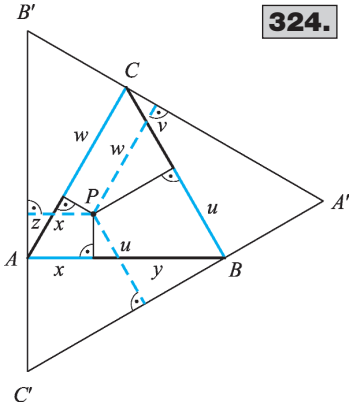


323.



I

324.



ságban $\Rightarrow a'$ egyenes. ② $a' \cap AC = A'$. ③ C középpontú, CA' sugarú kör $\Rightarrow k$. ④ $k \cap BC = B'$. ⑤ $A'B' \cap AB = P$ a szerkesztendő pont. A megoldhatóság feltétele $a \leq b$ esetén $m_b \leq d \leq m_a$. Végtelen sok megoldás van, ha $m_a = m_b = d$.

324. Állítsunk merőlegest A pontban AB egyenesre, B-ben BC-re, C-ben AC-re! Ezek az egyenesek újabb szabályos háromszöget fognak közre, amelynek P pontjából az oldalaira állított merőleges szakaszok hossza éppen x, u, w (322. feladat). Ezek összege a szabályos háromszög magasságával egyenlő, tehát független a belső pont választásától.

325. A P pontból indulva a szögszárakat T-ben, illetve U-ban érintjük. $PT + TU + UP = P'T + TU + UP''$ akkor a legrövidebb, ha a $P'TUP''$ töröttvonal egy szakasz. A szerkesztés: ① P pont tükrözése a egyenesre $\Rightarrow P'$, P pont tükrözése b egyenesre $\Rightarrow P''$. ② $P'P'' \cap a = T$, $P'P'' \cap b = U$. ③ $PTUP$ a legrövidebb útvonal. Egyértelmű a megoldás.

326. *a)* $P'R = PR$, $P''Q = PQ$, $P'RQP''$ töröttvonal hossza a beírt PQR háromszög kerülete, ami akkor minimális, ha P', R, Q, P'' egy egyenesen van. A szerkesztés: ① P pont tükrözése AC egyenesre $\Rightarrow P'$, P pont tükrözése BC egyenesre $\Rightarrow P''$. ② $P'P'' \cap AC = R$, $P'P'' \cap BC = U$. ③ $PTUP$ a legrövidebb útvonal. Hegyesszögű háromszög esetén mindig létrejön az R és Q metszéspont, mert $PP' \perp AC \Rightarrow PP'$ belső pontban metszi AC-t, és $PP'' \perp BC \Rightarrow PP''$ belső pontban metszi BC-t.

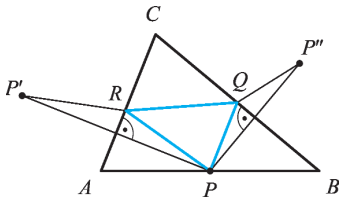
b) Adott $P \in AB$ esetén $PQ + QR + RP$ akkor a legrövidebb, ha $P'P''$ metszi ki. A tükrözés miatt $CP' = CP = CP'' \Rightarrow CP'P''\triangle$ egyenlő szárú, alapja a $PQR\triangle$ kerülete. $P'CA\sphericalangle = ACP\sphericalangle$ és $PCB\sphericalangle = P''CB\sphericalangle \Rightarrow P'CP''\sphericalangle = 2 \cdot ACB\sphericalangle \Rightarrow P'CP''\triangle$ alapja csak akkor csökkenhet, ha a CP szár hossza csökken. CP szakasz hossza akkor a legkisebb, ha CP az $ABC\triangle$ AB oldalhoz tartozó magassága $\Rightarrow P$ a magasság talppontja.

327. Felhasználjuk, hogy egy adott oldal pontjai közül a magasság talppontjából szerkesztett beírt háromszög kerülete a legkisebb (326. feladatban láttuk) $\Rightarrow$ a másik két csúcs is magasságtalppont. A beírt háromszögek közül a talpponti háromszög kerülete a legkisebb.

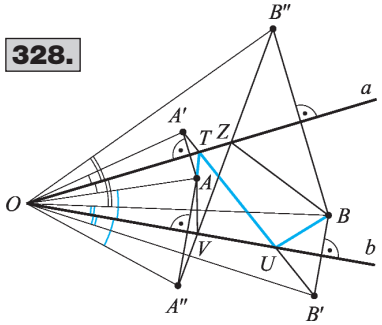
328. A pontot az a, B pontot a b szögszárra tükrözve $\Rightarrow AT + TU + UB = A'T + TU + UB'$ akkor a legrövidebb, ha az $A'TUB'$ vonal egy szakasz. A pontot a b, B pontot az a szárra tükrözve $\Rightarrow AV + VZ + ZB = A''V + VZ + ZB''$ akkor a legrövidebb, ha az $A''VZB''$ vonal egy szakasz. A tükrözés tulajdonságai miatt $OA' = OA''$, $OB' = OB''$, $A''OB''\sphericalangle > A'OB'\sphericalangle \Rightarrow A''B'' > A'B'$. A szerkesztés: ① Az A pontot tükrözzük arra a szögszárra, amelyik az OA egyenes B-t nem tartalmazó félsíkjában van $\Rightarrow A'$, a B pontot tükrözzük a másik szögszárra $\Rightarrow B'$. ② $A'B'$ egyenes metszéspontja a szögszárakkal $\Rightarrow T$, U. ③ $ATUB$ töröttvonal a legrövidebb út. Ha O, A és B egy egyenesre esik, akkor az A pontot bármelyik szögszárra tükrözhetjük az első lépésben.

329. Adott sorrendben érintett oldalak esetén a visszaverődések során megtett út a lehető legrövidebb. Négy lehetőség van. A szerkesztés: a keresett töröttvonalat az oldalakra vonatkozó

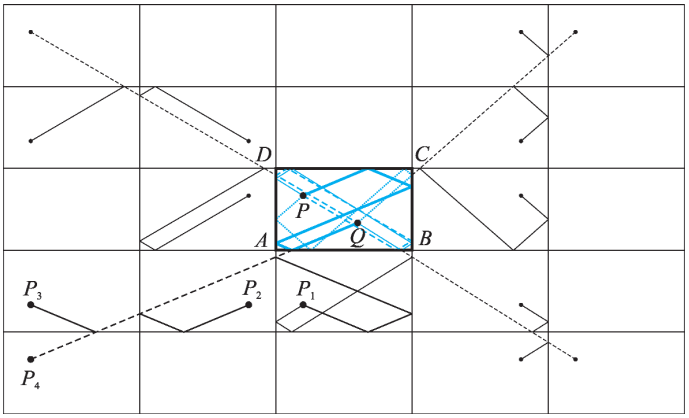
326.



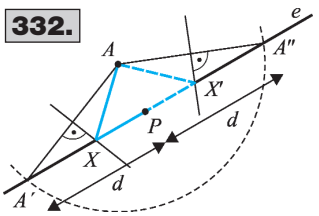
328.



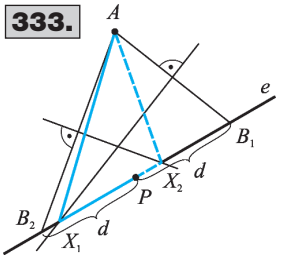
329.



332.



333.



tükrözésekkel „kiegyenesítjük”. Áttekinthetőbb az ábra, ha a téglalapot is tükrözzük az adott oldalra. P_4Q szakasznak az oldalakkal adott metszéspontjait sorban visszafelé tükrözve adódik egy megoldás a négy közül.

330. Ha az e egyenes nem választja el az A és B pontot, akkor az egyenes bármely Q pontjára fennáll az $|QA - QB| \leq AB$ egyenlőtlenség. $|QA - QB| = AB \Rightarrow Q, A$ és B egy egyenesen van. AB és e egyenes metszéspontja a megoldás. Ha az e egyenes elválasztja az A és B pontot, akkor az A pont e egyenesre vonatkozó A' tükörképére és az egyenes bármely P pontjára $|PA–PB| = |PA' - PB|$. A' és B pontra alkalmazzuk az előbbieket.

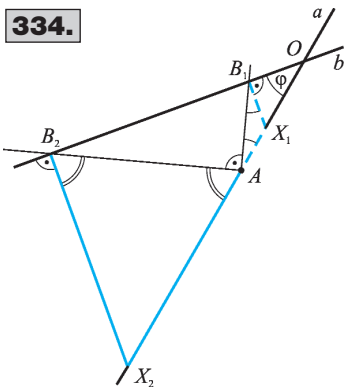
331. Legyen a P pont BC egyenesre vonatkozó tükörképe P' pont és $R \in BC$! A legrövidebb PRQ útra $PR + RQ = P'R + RQ = P'Q$. $P'Q \parallel BD \Rightarrow P'Q = BD$.

332. Legyen az adott szakasz hossza d, és legyenek az e egyenesnek P ponttól d távolságra levő pontjai A', A''. A szerkesztendő pontra $PX + XA = PX + XA' = PA' = d. \Rightarrow AA'$, illetve AA'' egyenesek felező merőlegese metszi ki az e egyenesből az X pontot. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 a felező merőlegesek helyzetétől függően.

333. $AX - XP = d \Rightarrow AX = XP + d = XP + PB$. Legyenek az e egyenesnek P ponttól d távolságra levő pontjai B_1, B_2! Az AB_1, illetve AB_2 szakaszok felező merőlegese metszi ki az e egyenesből az X pontot. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 a felező merőlegesek helyzetétől függően.

334. **1. eset:** Ha $a \parallel b \Rightarrow$ d $(X; b) =$ d $(a; b) =$ d $(A; X)$, két pont felel meg a feltételeknek. Az A középpontú, d $(a; b)$ sugarú kör metszi ki az a egyenesből az X_1, X_2 pontot.

334.

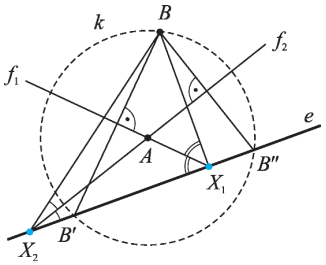


2. eset: Ha $0° < \varphi = \sphericalangle (a; b) \leq 90°$, $a \cap b = O$ és d $(A; X_i) =$ = d $(X_i; b) \Rightarrow AX_1 = X_1B_1$ és $OX_1B_1\sphericalangle = 90° - \varphi \Rightarrow X_1AB_1\sphericalangle = AB_1X_1\sphericalangle = 45° - \varphi/2$, $AX_2 = X_2B_2$ és $OX_2B_2\sphericalangle = 90° - \varphi \Rightarrow$ $\Rightarrow X_2AB_2\sphericalangle = AB_2X_2\sphericalangle = 45° + \varphi/2 \Rightarrow OAB_2\sphericalangle = 135° - \varphi/2$. A szerkesztés: ① B_1, B_2 szerkesztése úgy, hogy $B_1 \in b$, $B_2 \in b$ és $OAB_1\sphericalangle = 45° - \varphi/2$, $OAB_2\sphericalangle = 135° - \varphi/2$. ② B_i pontban b egyenesre állított merőleges kimetszi az a egyenesből az X_i pontot. Két megoldás van, ha $A \neq O$ és $0° < \varphi < 90°$; egy megoldás van, ha $A \neq O$ és $\varphi = 90°$ vagy $A \equiv O$ és $0° < \varphi <$ $< 90°$; végtelen sok megoldás van, ha $A \equiv O$ és $\varphi = 90°$.

335. AX felezi az $\sphericalangle (e; X_iB)$ szöget, B pont AX egyenesre vonatkozó tükörképe $B' \Rightarrow B' \in e \Rightarrow AB = AB'$.
A szerkesztés: ① A középpontú, AB sugarú kör $\Rightarrow k$.

I

335.



② $k \cap e = \{B'; B''\}$. ③ BB' felező merőlegese f_1, BB'' felező merőlegese f_2. ④ $f_1 \cap e = X_1$, $f_2 \cap e = X_2$. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 lehet.

336. A szerkesztés: ① a egyenes tükrözése t egyenesre $\Rightarrow a'$. ② $a' \cap b = B$. ③ B pont tükrözése t egyenesre $\Rightarrow A$. Végtelen sok megoldás van, ha $a' \equiv b$; nincs megoldás, ha $a' \parallel b$ vagy $BC \perp t$ vagy $a \cap b \in t$ és $a' \neq b$; egy megoldás van egyébként.

337. A szerkesztés: ① a egyenes tükrözése f egyenesre $\Rightarrow a'$. ② $a' \cap b = B$. ③ B pont tükrözése f egyenesre $\Rightarrow A$. ④ A középpontú, AB sugarú kör $\Rightarrow k$. ⑤ $k \cap f = \{C_1; C_2\}$. Végtelen sok megoldás van, ha $a' \equiv b$; nincs megoldás, ha $a' \parallel b$ vagy $a \cap b \in f$ és $a' \neq b$; két egybevágó megoldás van egyébként.

338. Legyen adott k és l kör, valamint m egyenes! A szerkesztés: ① k kör tükrözése m egyenesre $\Rightarrow k'$. ② $k' \cap l = \{B_1; B_2\}$. ③ B_i tükrözése m egyenesre $\Rightarrow A_i$. ④ A_1 középpontú, A_1B_1 sugarú kör $\Rightarrow k_1$, A_2 középpontú, A_2B_2 sugarú kör $\Rightarrow k_2$. ⑤ $k_1 \cap m = \{C_1; C_2\}$, $k_2 \cap m = \{C_3; C_4\}$. Két-két egybevágó vagy két egybevágó háromszög a megoldás, vagy nincs megoldás.

339. Q pont e egyenesre vonatkozó tükörképe Q' pont $\Rightarrow PQ = PQ' \Rightarrow Q'$ pontok a P középpontú, PQ sugarú k körön vannak. Ennek a körnek minden pontja létrejön valamely e egyenesre vonatkozó tükrözéssel, mert tetszőleges $R \in k$ esetén RQ felező merőlegese átmegy P ponton. A keresett ponthalmaz a k kör.

340. A 340. ábra jelöléseit használjuk: RP egyenesre tükrözve $A' = Q$, $R' = R$, $M' = M \Rightarrow$ $\Rightarrow (RAM\sphericalangle)' = RQM\sphericalangle \Rightarrow RAM\sphericalangle = RQM\sphericalangle$.

341. Az A pontot az f, g, h, i szögfelezőkre tükrözve az A_f, A_g, A_h, A_i tükörképek rajta vannak a BC egyenesen.

342. A 341. feladatban láttuk, hogy A-t szögfelezőkre tükrözve, a négy tükörkép a BC egyenesre kerül. A merőlegesek talppontjai az AA_x szakaszok felezőpontjai $\Rightarrow$ az $ABC\triangle$ BC-vel párhuzamos középvonalára illeszkednek.

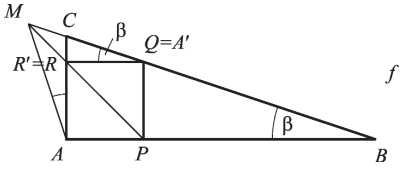
343. Legyen egy tetszőleges $P \in BC$ f_γ egyenesre vonatkozó tükörképe P'; P' f_α-ra vonatkozó tükörképe P''; P'' f_β-ra vonatkozó tükörképe P'''. Mivel a háromszög két oldalegyenese szimmetrikus a metszéspontjukon átmenő szögfelező egyenesre, $P' \in CA$, $P'' \in AB$, $P''' \in BC$.

344. Az f, g, h egyenesek között ne legyenek merőlegesek, különben nincs megoldás!

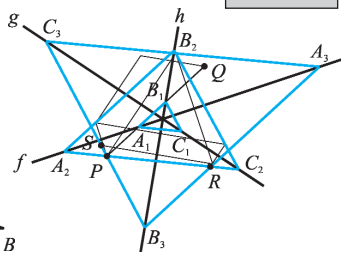
Az adott P pontot f, g, h (vagy h, g, f) egyenesre tükrözve ugyanazon oldalegyenes még egy Q pontját kapjuk (343. feladat állítása) $\Rightarrow PQ \cap f = A_1$, $PQ \cap h = B_1$. A kapott A_1B_1 oldal egyenesét f-re vagy h-ra tükrözve adódik C_1. Hasonlóan f, h, g (vagy g, h, f) szögfelezőkre tükrözve is ugyanazon oldal még egy R pontját kapjuk. $\Rightarrow PR \cap f = A_2$, $PR \cap g = C_2$. A kapott A_2C_2 egyenest f-re vagy g-re tükrözve adódik B_2. Harmadik megoldás adódik, ha g, f, h (vagy h, f, g) sorrendben tükrözünk. Ha valamely tükrözéssorozat végén az adott pontba jutunk vissza, akkor is meghatározható az A_i, B_i, C_i pont, mert a megszerkesztett három háromszög oldalai páronként párhuzamosak.

Előfordulhat, hogy a háromszögnek az adott egyenesek egy belső és két külső szögfelezőjét alkotják.

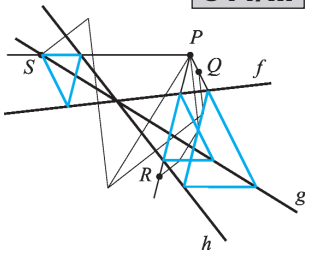
340.



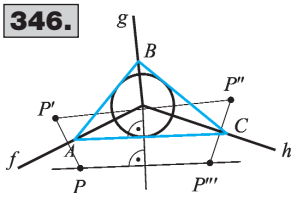
344/I.



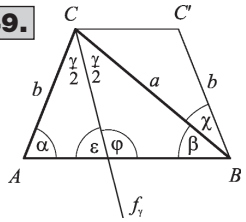
344/II.



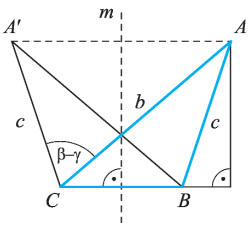
346.



349.



350.



345. Az adott A vagy B csúcsot tükrözzük az f_c szögfelezőre. A tükörképpontot a másik csúccsal összekötő e egyenes metszi ki a szögfelező egyeneséből a harmadik csúcsot. Végtelen sok megoldás van, ha A és B tengelyesen szimmetrikus a szögfelezőre. Nincs megoldás, ha a szögfelező nem választja el a két adott pontot, vagy $e \parallel f_c$, vagy $e \perp f_c$ és A, B különböző távolságra van f_c-től. Egyébként egy megoldás van.

346. Legyen P pont az f és h félegyenes g-t nem tartalmazó szögtartományában!
A szerkesztés: ① Tükrözzük az adott P pontot f, g, h egyenesére $\Rightarrow P'''$. (A 343. feladat állítását alkalmazva belátható, hogy $PP''' \parallel AC$.) ② PP'''-vel párhuzamos érintő a körhöz $\Rightarrow b$ egyenes. ③ $b \cap f = A$, $b \cap h = C$. ④ Az A pontból érintő a körhöz $\Rightarrow c$ egyenes. ⑤ $c \cap g = B$. Nincs megoldás, ha valamelyik két félegyenes szöge nem tompaszög.

347. Tükrözzük az $ABC\triangle$-et az AB oldal felező merőlegesére! A tengelyes tükrözés tulajdonságai miatt $ABC' \sphericalangle = CAB \sphericalangle = \alpha \Rightarrow \varphi = CBC' \sphericalangle = \alpha - \beta$.

348. A 347. feladatban láttuk, hogy ha a C pontot tükrözzük az AB felező merőlegesére, akkor $CBC' \sphericalangle = \alpha - \beta$, és a tükrözés miatt $C'B = CA$.
A szerkesztés: ① $CB = a$, $C'B = b$, $CBC' \sphericalangle = \alpha - \beta \Rightarrow CBC'\triangle$. ② CC' felező merőlegese $\Rightarrow f$. ③ B tükrözése f egyenesre $\Rightarrow A$. Egy megoldás van.

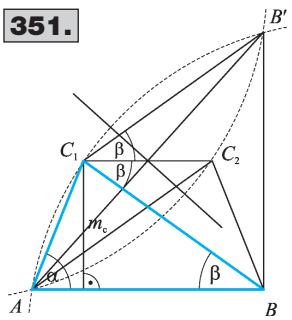
349. A 347. feladat alapján: $\alpha + \varepsilon = 180° - \gamma/2 = \varphi + \beta$ és $\varphi - \varepsilon = \alpha - \beta$.
A szerkesztés: ① $\varphi - \varepsilon$, a, $b \Rightarrow CBC'\triangle$. ② CC' felező merőlegese $\Rightarrow m$ egyenes. ③ B pont tükrözése m egyenesre $\Rightarrow A$.

350. A feladat adataiból következik, hogy $b > c$. Ha BC felező merőlegese m, és A pont m egyenesre vonatkozó tükörképe $A' \Rightarrow ACA' \sphericalangle = \beta - \gamma$ és m_a az $ACA'\triangle$ AA'-höz tartozó magassága is.
A szerkesztés: ① b; m_a; $\beta - \gamma \Rightarrow ACA'\triangle$. ② AA' felező merőlegese $\Rightarrow m$. ③ C pont tükrözése m egyenesre $\Rightarrow B$. Egy megoldás van, ha $b > m_a$, egyébként nincs megoldás.

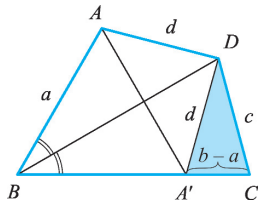
351. Ha $\alpha \neq \beta \Rightarrow ACB' \sphericalangle = \gamma + 2\beta = 180° - (\alpha + \beta) + 2\beta = 180° - \alpha + \beta = 180° - (\alpha - \beta)$.
A szerkesztés: ① $AB = c$. ② AB-vel párhuzamos egyenes m_c távolságban $\Rightarrow c'$. ③ B tükrözése c' egyenesre $\Rightarrow B'$. ④ AB' szakasz $180° - (\alpha - \beta)$ szögű látószögköríve $\Rightarrow k_1, k_2$. ⑤ $k_i \cap c' = C_i \Rightarrow$ $\Rightarrow ABC_1\triangle \cong ABC_2\triangle$ a megoldás.
Ha $\alpha = \beta$, akkor $AC = BC \Rightarrow$ egyenlő szárú háromszög szerkesztése a feladat, adott alap és ahhoz tartozó magasság esetén.

352. BD felezi ABC szöget és A pont BD-re vonatkozó tükörképe $A' \Rightarrow A' \in e(B; C) \Rightarrow CA' = |b - a|$, $AD = A'D = d$.

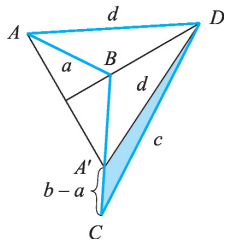
351.



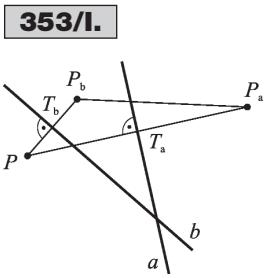
352/I.



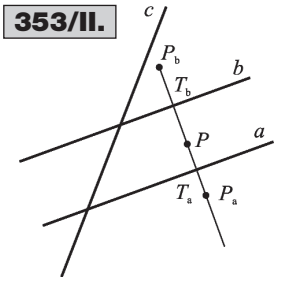
352/II.



I



353/I.



353/II.

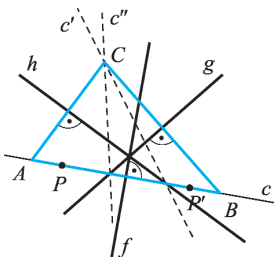
A szerkesztés: ha $a \neq b$ és $c \neq d$. ① $c, d, |b-a| \Rightarrow A'CD\triangle$. ② CA'-re C pontból b hosszúságú szakasz $\Rightarrow B$. ③ A' tükrözése BD egyenesre $\Rightarrow A$. Nincs megoldás, ha $|b-a|, c, d$ szakaszokra nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. Ha $a = b$ és $c = d \Rightarrow$ deltoid szerkesztése a feladat.

353. **1. eset:** Ha a, b, c páronként metszők $\Rightarrow PP_aP_b\triangle$ középvonala $T_aT_b \Rightarrow T_aT_b \parallel P_aP_b$, hasonlóan $T_bT_c \parallel P_bP_c \Rightarrow P_a, P_b, P_c$ akkor és csak akkor van egy egyenesen, ha T_a, T_b, T_c is.
2. eset: Ha a, b, c egy pontban metszi egymást $\Rightarrow$ sem a talppontok, sem a tükörképpontok nincsenek egy egyenesen $\Rightarrow$ igaz az állítás.
3. eset: Ha $a \parallel b \parallel c \Rightarrow T_c, T_a, T_b, P_a, P_b, P_c$ egy egyenesre illeszkedik $\Rightarrow$ igaz az állítás.
4. eset: Ha a párhuzamos b-vel, de nem párhuzamos c-vel $\Rightarrow P, T_a, T_b, P_a, P_b$ egy egyenesen vannak $\Rightarrow m$ egyenes $\Rightarrow$ ha $P \in c \Rightarrow P_c = T_c = P \Rightarrow P_c \in m$ és $T_c \in m$; vagy ha $P \notin c \Rightarrow P_c \notin m$ és $T_c \notin m \Rightarrow T_a, T_b, T_c$ egy egyenesen van $\Leftrightarrow P_a, P_b, P_c$ egy egyenesen van.

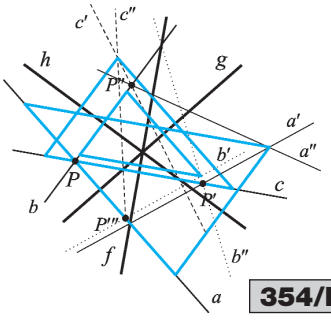
354. Adottak $f; g; h$ oldalfelező merőlegesek és P pont. A szerkesztés: ① P pont tükörképe az f egyenesre $\Rightarrow P'$, $e(P; P') \equiv e(A; B)$. ② PP' egyenes tükörképe h egyenesre $\Rightarrow c'$, PP' egyenes tükörképe g egyenesre $\Rightarrow c''$. ③ $c' \cap c'' = C$. ④ C tükörképe h, illetve g egyenesre $\Rightarrow A$, illetve B. Még két megoldás adódik, ha az első lépésben a P pontot a h egyenesre tükrözzük $\Rightarrow e(P; P'') \equiv e(A; C)$, illetve a g egyenesre tükrözve $\Rightarrow e(P; P''') \equiv e(B; C)$. A három háromszög oldalai párhuzamosak. Nincs megoldás, ha az adott egyenesek nem illeszkednek egy pontra vagy a P pont a közös pontjuk.

355. Legyen a k kör e egyenesre vonatkozó tükörképe k'. $\Rightarrow \sphericalangle(E_kP; e) = \sphericalangle(E_{k'}P; e) = \sphericalangle(E_lP; e) \Rightarrow E_{k'}, P, E_l$ egy egyenesen van, $E_{k'}E_l$ egyenes a k' és l körök közös érintője. Az érintőnek az e egyenessel való metszéspontja megoldás. k' és l kört elválasztja az e egyenes $\Rightarrow$ a két körnek négy közös érintője van. Ha a közös belső érintők az e egyenesen metszik egymást, három megoldás adódik, egyébként négy megoldás van.

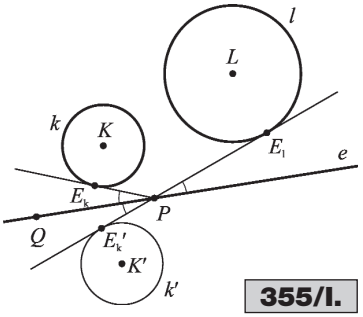
356. Legyen a P pont b egyenesre vonatkozó tükörképe P'. $\Rightarrow \varepsilon + \varphi = \alpha = \beta$ és $P'CQ\sphericalangle = 2\varepsilon + \gamma = 2(\alpha - \varphi) + \gamma = 2\alpha + \gamma - 2\varphi = 180° - 2\varphi > 0$.
A szerkesztés: ① P tükörképe b egyenesre $\Rightarrow P'$. ② $P'Q$ szakasz $180° - \varphi$ szögű látószögköríve $\Rightarrow k_1, k_2$. ③ $k_i \cap b = C_i$. ④ $C_iP \cap a = A_i$ és $C_iQ \cap a = B_i$. P pont a egyenesre vonatkozó tükrözésével újabb megoldás adódhat.



354/I.

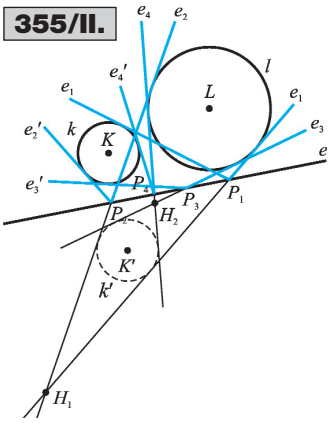


354/II.

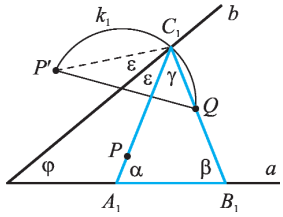


355/I.

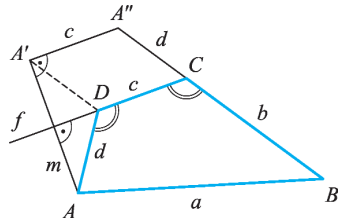
355/II.



356.



357.



357. Adott az a, c, m, $b + d$ szakasz és az $ADC\sphericalangle = DCB\sphericalangle$ egyenlőség. Legyen A tükörképe DC egyenesre A', valamint BC meghosszabbítása C-n túl d-vel A''. $AD = DA'$, $ADC\sphericalangle = A'DC\sphericalangle = DCB\sphericalangle \Rightarrow AD \parallel A''B \Rightarrow A'DCA''$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow A'A'' = DC$ és $A'A'' \parallel DC \Rightarrow A'A'' \perp AA'$.

A szerkesztés: ① $2m$, c befogók, $90° \Rightarrow A'A''A\triangle$. ② AA' felező merőlegese $\Rightarrow f$. ③ A középpontú, a sugarú kör és A'' középpontú, $d + b$ sugarú kör közös pontja $\Rightarrow B$. ④ $A''B \cap f = C \Rightarrow$ $\Rightarrow CA'' = d$. ⑤ C középpontú, c sugarú kör és A középpontú, d sugarú kör közös pontja $\Rightarrow D$.

358. Ha t és u két párhuzamos szimmetriatengely, akkor t-re tükrözve $A' = B$, u-ra tükrözve $A' = C$ lenne $\Rightarrow A$, B, C egy egyenesen lenne. $\Rightarrow$ Ha van két különböző szimmetriatengely, azok metszik egymást.

A szimmetriatengely felezi a sokszög területét $\Rightarrow$ a sokszögön belül metszi egymást a két különböző szimmetriatengely.

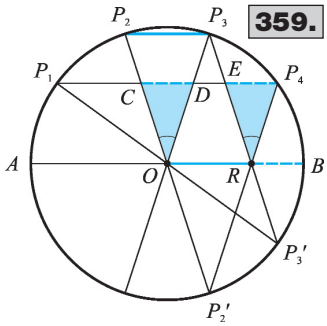
Ha három különböző szimmetriatengely metszéspontjai háromszöget alkotnának, akkor annak csúcspontjai a fentiek miatt belső pontok lennének. $\Rightarrow$ A háromszögnek van a sokszöghöz tartozó belső pontja. Ez a belső pont legyen P.

A sokszög P-től legtávolabbi csúcsa legyen a D pont. A tengelyek közt van olyan, amelynek P és D ugyanazon félsíkjában van.

Legyen a D' csúcs a D pontnak erre a tengelyre vonatkozó tükörképe $\Rightarrow PD < PD' \Rightarrow$ ez ellentmond annak, hogy D pont a P-től legtávolabbi csúcs. Ezzel beláttuk, hogy ha több szimmetriatengelye van egy sokszögnek, akkor azok egy ponton mennek át.

359. Bontsuk az $AB = 2r$ átmérőjű félkört öt egyenlő ívre! $\Rightarrow P_1P_4 \parallel AB$ és $P_2P_3 \parallel AB$. A P_2P_2' átmérőjű félkörben P_3, P_4, B, P_3' osztópontok $\Rightarrow P_3P_3' \parallel P_2P_2'$ és $P_4B \parallel P_2P_2' \Rightarrow CORE$ és ORP_4D négyszögek paralelogrammák $\Rightarrow CDO\triangle \cong EP_4R\triangle \Rightarrow CD = P_4E$; $P_4E \parallel RB$ és $P_4B \parallel ER \Rightarrow RBP_4E$ paralelogramma $\Rightarrow RB = P_4E$; $P_4E = RB$ és $P_2P_3 = OR \Rightarrow CD + P_2P_3 =$ $= BR + RO = BO = r$. Hasonlóan látható be az állítás, ha 3, 7, 9, … részre osztjuk a félkört.

359.



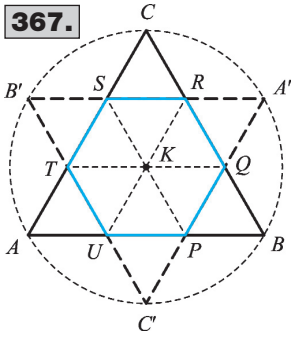
Középpontos tükrözés

A **360–364.** feladatok megoldását az olvasóra bízzuk.

365. AB párhuzamos és egyenlő DE-vel, ezért AB középpontos tükörképe G-re DE, ahol $AG = GD$. EA párhuzamos és egyenlő CD-vel, ezért EA középpontos tükörképe G-re CD. $\Rightarrow G$ az $ABCDEF$ hatszög tükörközéppontja. $\Rightarrow G$ felezőpontja FC és BE átlónak is. $\Rightarrow$ Az átlók egy ponton (G-n) mennek át.

I

367.



366. Ha egy háromszög középpontosan szimmetrikus lenne, akkor egyik csúcsának tükörképe egy másik csúcsa lenne, így az egyik oldal felezőpontja lenne a szimmetriaközéppont. Ettől különböző pont a harmadik csúcs, aminek tükörképe nem lehetne semelyik már említett csúcs sem, mert e tükörkép paralelogrammát alkotna a háromszög csúcsaival.

A háromszög nem lehet középpontosan szimmetrikus.

367. Felhasználjuk, hogy a háromszög K középpontja súlypont, ami $2:1$ arányban osztja a súlyvonalat. K pontra vonatkozó tükrözés $\Rightarrow AB \parallel A'B' \Rightarrow UC'P\triangle$ szabályos, mert szögei 60°-osak. $CK = KC'$ és K súlypont $\Rightarrow UC'P\triangle$ magassága $\frac{1}{2}\,CK$. Hasonlóan adódik, hogy $UC'P\triangle$, $PBQ\triangle$,…$TAU\triangle$ mindegyike szabályos háromszög és magasságuk $\frac{1}{2}\,CK \Rightarrow$ egybevágók $\Rightarrow UP = PQ = QR = RS = ST = TU$ és az $UPQRST$ hatszög minden szöge 120° $\Rightarrow$ a közös rész szabályos hatszög, oldala $\frac{1}{3}\,AB$.

368. Tükrözzük az $ABC\triangle$-et az AB átfogó F felezéspontjára! Az eredeti háromszög és a tükörképe együtt az $AC'BC$ téglalapot adja. A téglalap átlói egyenlők: $CC' = AB \Rightarrow 2CF = 2AF \Rightarrow$ $\Rightarrow CF = AF \Rightarrow ACF\triangle$ egyenlő szárú.

$CC' = AB \Rightarrow 2CF = 2BF \Rightarrow CF = BF \Rightarrow BFC\triangle$ egyenlő szárú.

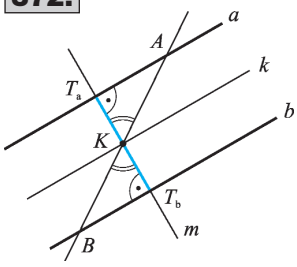
369. Húzzuk meg a háromszög átfogóhoz tartozó CF súlyvonalát! A 368. feladat állítását felhasználva $CF = FB = FA = \frac{1}{2}\,AB$. A $CFB\sphericalangle$ külső szög a CFA egyenlő szárú háromszögben, ezért $CFB\sphericalangle = 2 \cdot 15° = 30°$. A CFT derékszögű háromszögben $FCT\sphericalangle = 90° - 30° = 60°$. A 30°-os szöggel szembeni befogó fele az átfogónak: $\underline{\underline{CT}} = \frac{1}{2}\,CF = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\,AB = \underline{\underline{\frac{1}{4}\,AB}}$.

370. Tetszőleges $A \in e \Rightarrow A' \in e'$ és AA' felezőpontja a tükrözés középpontja. Ha $e \equiv e' \Rightarrow$ $\Rightarrow A' \in e \Rightarrow AA'$ szakasz része az e egyenesnek és a szakasz felezőpontja is az egyenesen van.

371. Jelöljük a tükörképeket rendre P^{I}; P^{II}; P^{III}; P^{IV}-gyel. Legyen $PP' \cap e = T_1$ és $P^{\mathrm{II}}\,P^{\mathrm{III}} \cap e =$ $= T_2$. Ha $P \notin e \Rightarrow$ a tengelyes tükrözés miatt $PT_1O\triangle \cong P'T_1O\triangle$; a középpontos tükrözés miatt $P'T_1O\triangle \cong OT_2P''\triangle$; a tengelyes tükrözés miatt $OT_2P''\triangle \cong OT_2P'''\triangle \Rightarrow PT_1O\triangle \cong P'''T_2O\triangle \Rightarrow$ $\Rightarrow P'''O = PO$ és $T_2O\,P'''\sphericalangle = T_1O\,P\sphericalangle \Rightarrow P'''\,O$ pontra vonatkozó tükörképe P. Ha $P \in e \Rightarrow P' =$ $= P$, $P'O = P''O$ és $P'' \in e \Rightarrow P''' = P'' \Rightarrow P^{\mathrm{IV}} = P$.

(A megoldás transzformációk szorzatával: Jelöljük az e egyenesre vonatkozó tükrözést t_e-vel, az O középpontú tükrözést O körüli 180°-os forgatásként értelmezve $f_{O;\,180°}$-kal, az identitást I-vel. $f_{O;\,180°}\,t_e = (t_1 \cdot t_e)t_e = t_1(t_e \cdot t_e) = t_1 \cdot I = t_1$, ahol t_1 a t_e-hez megválasztható tengelyes tükrözés. $(f_{O;\,180°}\,t_e)(f_{O;\,180°}\,t_e) = t_1 \cdot t_1 = I$, tehát a tükrözéssorozattal visszajutunk az eredeti pontba.)

372.

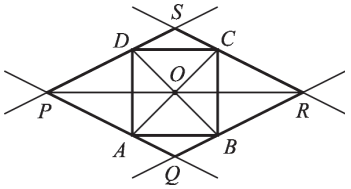


372. Legyen $a \parallel b$ középpárhuzamosa k és $m \perp k$. k definíciója szerint $K \in k$ és $KT_a = KT_b$. Ha a középvonalra nem merőleges, K ponton átmenő e egyenes az a egyenest A pontban, a b egyenest B pontban metszi, akkor $KT_aA\triangle \cong KT_bB\triangle \Rightarrow AK = BK$. Mindkét esetben K felezi az egyenesnek a párhuzamosak közé eső szakaszát.

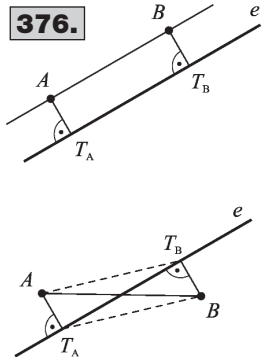
373. Legyen $a \parallel b$, középpárhuzamosuk k; $P, Q \in a$, $O \in k$, a PQ szakasz O pontra vonatkozó tükörképe a $P'Q'$ szakasz $\Rightarrow$ $\Rightarrow PQP'Q'$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow PQ \parallel P'Q'$ és PQ egyenes ugyanolyan messze van O-tól, mint $P'Q'$ egyenes $\Rightarrow P', Q' \in b$.

374. Az $ABCD$ paralelogramma és az e egyenes szimmetrikus az átlók metszéspontjára, K-ra, ezért $P' = Q$, $A' = C$, $B' = D$, ahol

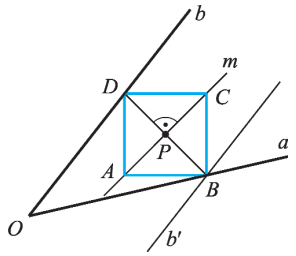
375.



376.



379.



P és *Q* az *e* egyenes és az *ABCD* paralelogramma közös pontjai. *APQD* négyszög *K* pontra vonatkozó tükörképe *CQPB* négyszög. Ha az *e* egyenes a paralelogramma átlója, akkor két középpontosan szimmetrikus háromszög adódik.

375. Az *ABCD* négyzet középpontja $O \Rightarrow AO = OC \Rightarrow O$ pont egyenlő távolságra van a *PQ* és *RS* párhuzamos egyenesektől. Az *O* pont felezi a rajta átmenő egyeneseknek *PQ* és *RS* párhuzamosok közé eső szakaszát. $\Rightarrow SO = OQ$ és $PO = OR \Rightarrow O$ pont a *PQRS* paralelogramma átlóinak felezőpontja, vagyis a paralelogramma középpontja.

376. Ha *A* és *B* azonos félsíkban van és $AT_A = BT_B$, $AT_A \parallel BT_B \perp e \Rightarrow AT_AT_BB$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow AB \parallel T_AT_B \Rightarrow AB \parallel e$. Ha *A* és *B* különböző félsíkban van és $AT_A = BT_B$, $AT_A \parallel BT_B \perp e \Rightarrow AT_ABT_B$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow$ átlói felezik egymást, T_AT_B felezi *AB*-t $\Rightarrow e$ felezi az *AB* szakaszt.

377. A háromszög három középvonalának egyenese a megoldás, mert két ponttól egyenlő távolságra levő egyenes vagy párhuzamos a két pontot összekötő szakasszal, vagy átmegy a szakasz felezőpontján.

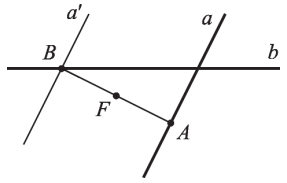
378. Az adott *P* pont felezi a szerkesztendő egyenes szögszárak közé eső *AB* szakaszát, ezért *P* a tükörközéppontja *AB*-nek. A szerkesztés: ① *b* szögszár *P* pontra vonatkozó tükörképe $\Rightarrow b'$. ② $b' \cap a = A$, ahol *a* a másik szögszár. Mindig egy megoldás van, az *AP* egyenes.

379. A szerkesztendő négyzet *BD* átlóját felezi a *P* pont.
A szerkesztés: ① *b* szögszár tükrözése *P* pontra $\Rightarrow b'$. ② $b' \cap a = B$. ③ $e(B; P) \cap b = D$. ④ *P* pontban *BD*-re merőleges egyenes $\Rightarrow m$; *P* középpontú, *PD* sugarú kör $\Rightarrow k$. ⑤ $k \cap m = \{A; C\}$. Mindig egy megoldás van, az *ABCD* négyzet.

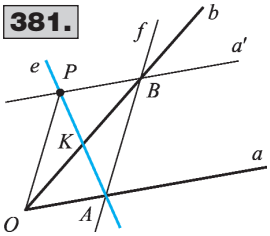
380. A keresett helyeket jelölje *A* és *B* pont. Ezek a pontok tükörképei egymásnak a fát jelölő *F* pontra. A szerkesztés: ① *a* egyenes tükörképe *F* pontra $\Rightarrow a'$. ② $a' \cap b = B$. ③ $e(B; F) \cap a = A$. Egy megoldás van, ha *a* és *b* nem párhuzamos. Ha $a \parallel b$, akkor vagy végtelen sok megoldás van, ha *F* a középvonalon van, vagy nincs megoldás, ha *F* nincs a középvonalon.

381. Az *OABP* négyszög paralelogramma, a *PA* és *OB* átlók felezik egymást. A szerkesztés: ① *P* ponton át *a*-val párhuzamos egyenes $\Rightarrow a'$. ② $a' \cap b = B$. ③ *B* ponton át *OP*-vel párhuzamos $\Rightarrow f$. ④ $f \cap a = A \Rightarrow e(A; P)$. Nincs megoldás, ha *P* pont abban a szögtartományban van, ami az adott szögtartomány *O* pontra vonatkozó tükörképe. Egyébként egy megoldás van.

380.

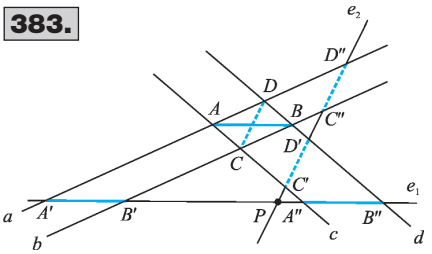


381.

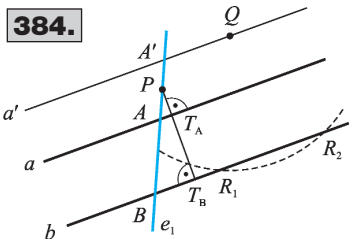


I

383.



384.



382. Adott az $ABCD$ négyszög és a K pont. A szerkesztés: ① AB egyenes tükrözése K pontra $\Rightarrow$ $\Rightarrow x$, AD egyenes tükrözése K pontra $\Rightarrow y$. ② $e(C; D) \cap x = P$, $e(B; C) \cap y = Q$. ③ P tükörképe K pontra $\Rightarrow R$, Q tükörképe K pontra $\Rightarrow S \Rightarrow PQRS$ paralelogramma. Ha az $ABCD$ négyszög trapéz, akkor vagy végtelen sok megoldás van (P a középpárhuzamos pontja), vagy nincs megoldás (P nincs a középpárhuzamoson). Egyébként egy megoldás van.

383. Tekintsük a 383. ábrát! $ABB'A'$ paralelogramma $\Rightarrow AB = A'B'$ és $ABB''A''$ paralelogramma $AB = A''B''$, ezért $A''B'' = A'B'$. Hasonlóan belátható, hogy $C'D' = C''D'' = CD$.
A szerkesztés: ① $a \cap c = A$, $b \cap c = C$, $a \cap d = D$, $b \cap d = B$. ② P ponton át AB-vel párhuzamos $\Rightarrow$ $\Rightarrow e_1$, P ponton át CD-vel párhuzamos $\Rightarrow e_2$. Ha a négy egyenes párhuzamos, akkor vagy minden P-re illeszkedő egyenes megoldás ($d(a; b) = d(c; d)$ esetén), vagy nincs megoldás ($d(a; b) \neq$ $\neq d(c; d)$ esetén). Egyébként két megoldás van.

384. Legyen az A pont P pontra vonatkozó tükörképe $A' \Rightarrow PA + PB = PB + PA' = BA'$. A szerkesztés: ① a egyenes P pontra vonatkozó tükörképe $\Rightarrow a'$. ② a' egyenes tetszőleges pontja Q; Q középpontú, d sugarú kör $\Rightarrow k$. ③ $k \cap b = \{R_1; R_2\}$. ④ P ponton át QR_1 egyenessel párhuzamos $\Rightarrow e_1$, P-n át QR_2 egyenessel párhuzamos $\Rightarrow e_2$. Ugyanezek a szelők adódnak, ha az 1. lépésben b egyenest tükrözzük. Nincs megoldás, ha $d < PT_A + PT_B$; egy megoldás van, ha $PT_A +$ $+ PT_B = d$; két megoldás van, ha $PT_A + PT_B > d$.

385. Legyen a k kör P ponthoz húzott érintője az e egyenes $\Rightarrow k'$ P-beli érintője e'. Mivel P pontra tükrözve $e' \equiv e$, ezért k' kör P-beli érintője az e egyenes $\Rightarrow k$ és k' a P pontban érinti egymást.

386. Legyen a két kör középpontja K és L, a közös húr MN. $KM = ML = LN = NK = r \Rightarrow$ $\Rightarrow KMLN$ négyszög rombusz $\Rightarrow$ átlói felezik egymást $\Rightarrow MN \cap KL = O \Rightarrow OL = OK \Rightarrow k$ kör O pontra vonatkozó tükörképe l kör.

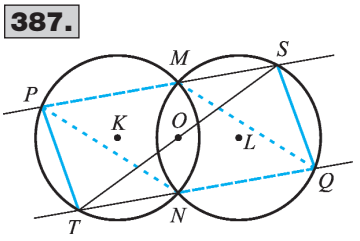
387. $MN \cap KL = O$ és $PS \parallel QT \Rightarrow O$ pontra tükrözve $M' = N$, $P' = Q$, $T' = S \Rightarrow MPNQ$ és $SPTQ$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow MQ \parallel PN$ és $SQ \parallel PT$, $MQ = PN$ és $SQ = PT$.

388. Jelölje k és l körök egyik közös pontját M.
Legyen a k kör M pontra vonatkozó tükörképe k' és $k' \cap l = \{M, P\} \Rightarrow PM = P'M$.

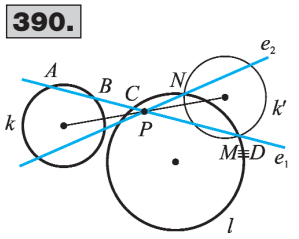
389. Legyen k és l a két kör. A szerkesztés: ① $k \cap l = \{M, N\}$. ② k kör M pontra vonatkozó tükörképe $\Rightarrow k'$. ③ $k' \cap l = \{M, P\}$. ④ MP egyenes a keresett szelő.

390. A szerkesztés: ① k kör P pontra vonatkozó tükörképe $\Rightarrow k'$. ② $k' \cap l = \{M, N\}$. ③ MP egyenes $\Rightarrow e_1$, NP egyenes $\Rightarrow e_2$ a keresett szelők. Nincs megoldás, ha $k' \cap l = \emptyset$; egy megoldás van, ha k' érinti l kört; két megoldás van, ha metszi. Végtelen sok megoldás van, ha $k' \equiv l$.

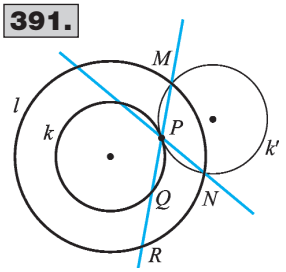
387.



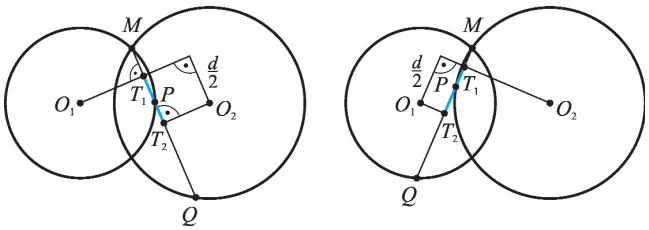
390.



391.



392/I.



391. A koncentrikus körök közös tengelyes szimmetriája miatt $MP = QR$. A szerkesztés: ① a k kört tükrözzük egy tetszőleges P pontjára $\Rightarrow k'$. ② $k' \cap l = \{M, N\}$. ③ MP egyenes és NP egyenes a megoldás. Egy adott P pont esetén két megoldás van, ha k' metszi az l kört; egy megoldás van, ha érinti; nincs megoldás, ha a k' körnek nincs közös pontja az l körrel.

392. Tekintsük át a megoldásokat! $|MP - MQ| = d$, $MT_1 = \frac{1}{2} MP$, $MT_2 = \frac{1}{2} MQ \Rightarrow$

$\Rightarrow |MT_1 - MT_2| = \frac{1}{2} d$.

Ha M pont nem választja el P és Q pontot $\Rightarrow$ a keresett szelő átmegy az M ponton, és merőleges az O_2-től $\frac{d}{2}$ távolságra haladó, O_1-n átmenő egyenesre.

Ha M pont elválasztja P és Q pontot, és O_1 pont M-re vonatkozó tükörképe $O_1' \Rightarrow$ a keresett szelő átmegy az M ponton, és merőleges az O_2-től $\frac{d}{2}$ távolságra haladó, O_1'-n átmenő egyenesre.

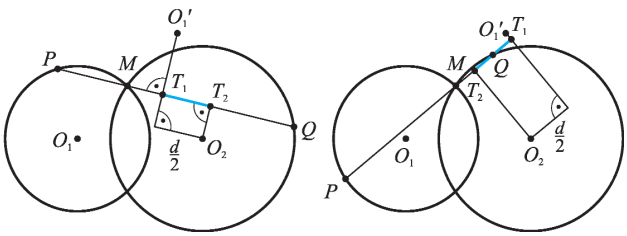
A szerkesztés: ① O_2 középpontú, $\frac{d}{2}$ sugarú kör $\Rightarrow l$, O_1 M-re vonatkozó tükörképe $\Rightarrow O_1'$. ② O_1-ből érintő l-hez $\Rightarrow e_1, e_2$, O_1'-ből érintő l-hez $\Rightarrow e_3, e_4$. ③ M ponton át e_i-re merőleges egyenesek $\Rightarrow$ $\Rightarrow f_1, f_2, f_3, f_4$. A megoldások száma r_1-, r_2-, d-től függően az egyik metszésponton átmenő szelők esetén nulla és négy között lehet.

393. A szerkesztés: ① c egyenes tükörképe P pontra $\Rightarrow c'$; k_1 kör tükörképe P pontra $\Rightarrow k_1'$. ② $c' \cap a = A$, és $k_1' \cap k_2 = \{B_1; B_2\}$. ③ A tükörképe P-re $\Rightarrow C$; B_i tükörképe P-re $\Rightarrow D_i$. ④ AB_iCD_i paralelogramma a megoldás. A megoldások száma 2, 1, 0 vagy végtelen sok lehet.

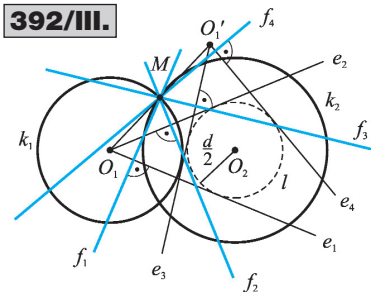
394. A szerkesztés: ① e egyenes P pontra vonatkozó tükörképe $\Rightarrow e'$. ② $e' \cap k = \{A'; B'\}$. ③ $A'P$ és $B'P$ egyenes a megoldás. A megoldások száma 2, 1, 0 lehet.

395. Az $ABCD$ paralelogramma középpontosan szimmetrikus az O pontra $\Rightarrow ABO\triangle \cong$ $\cong CDO\triangle \Rightarrow ABO\triangle$ és $CDO\triangle$ köré írt köre egyenlő sugarú, sőt egymás tükörképei O-ra nézve $\Rightarrow$ az O pont a két kör közös érintési pontja $\Rightarrow$ a két kör érinti egymást.

392/II.

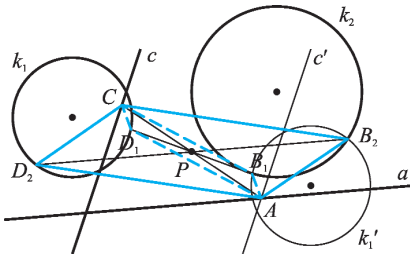


392/III.

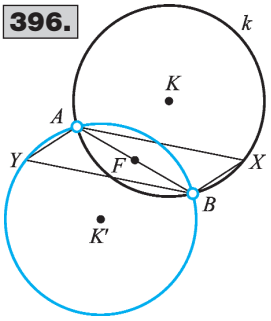


I

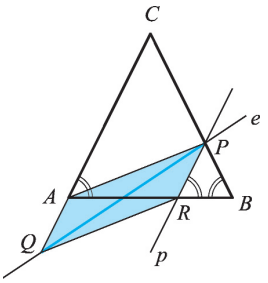
393.



396.



397.



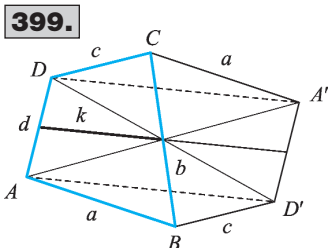
396. Mivel $AXBY$ paralelogrammában az A és a B szemközti csúcsok, ezért X ponttól függetlenül az AB szakasz F felezőpontja a paralelogramma középpontja. X és Y is szemközti csúcsok, ezért X-nek F pontra vonatkozó tükörképe lesz Y. Mivel X a k kör A- és B-től különböző pontja ($X = A$ vagy $X = B$ esetén nem lenne paralelogramma), az Y pontok a k kör F pontra vonatkozó tükörképének A-tól és B-től különböző pontjai.

397. Legyen $AC = BC$ és $BP = AQ$. Húzzunk a P ponton át párhuzamos egyenest az AC szárral $\Rightarrow p$; $p \cap AB = R \Rightarrow PR \parallel CA \Rightarrow PRB\sphericalangle = CAB\sphericalangle = PBA\sphericalangle \Rightarrow PRB$ háromszögben $PR = PB$. A feltételek miatt $PR = AQ$, a szerkesztés szerint $PR \parallel AQ \Rightarrow AQRP$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow QP$ és AR átlók felezik egymást $\Rightarrow$ az AR szakaszt tartalmazó alap felezi a PQ szakaszt.

398. *a)* Tükrözzük a háromszöget az AB felezőpontjára $\Rightarrow AC'BC$ paralelogramma.
A szerkesztés: ① $a, b, 2s_c \Rightarrow BCC'\triangle$. ② CC' felezőpontja $\Rightarrow F$. ③ B pont tükörképe az F pontra $\Rightarrow A$. Egy megoldás van, ha $a, b, 2s_c$-re teljesül a háromszög egyenlőtlenség, egyébként nincs megoldás.
b) Tükrözzük a háromszöget az AB felezőpontjára $\Rightarrow BC'AC$ paralelogramma.
A szerkesztés: ① $2s_c, a, 180° - \gamma \Rightarrow CC'A\triangle$. ② CC' felezőpontja $\Rightarrow F$. ③ A pont tükörképe F pontra $\Rightarrow B$. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 lehet.
c) A pont tükörképe BC felezőpontjára $A' \Rightarrow ABA'C$ paralelogramma.
A szerkesztés: ① $2s_a, c, m_c \Rightarrow ABA'\triangle$. ② AA' felezőpontja $\Rightarrow F$. ③ B pont tükörképe F pontra $\Rightarrow C$. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 lehet.
d) A pont tükörképe BC felezőpontjára $A' \Rightarrow ABA'C$ paralelogramma.
A szerkesztés: ① tetszőleges A pontból b félegyenes. ② b-vel párhuzamos egyenes m_b távolságban $\Rightarrow b'$, A középpontú, $2s_a$ sugarú kör $\Rightarrow k$. ③ $k \cap b' = \{A'; A''\}$. ④ AA_i felezőpontja $\Rightarrow F_i$, A középpontú, c sugarú kör $\Rightarrow l$. ⑤ $l \cap b' = \{B_1; B_2\}$. ⑥ B_i pont F_i pontra vonatkozó tükörképe $\Rightarrow C_i$. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 lehet.
e) Tükrözzük az $ABC\triangle$-et a BC szakasz F felezéspontjára $\Rightarrow A'$. Az $ABA'C$ paralelogramma, melynek ABA' részháromszöge $AB = c$; $ABA'\sphericalangle = 180° - \alpha$ és $AA' = 2s_a$ adatokból szerkeszthető. Egyértelmű a megoldás, ha $2s_a > c$. 0; 1 vagy 2 megoldást kaphatunk, ha $2s_a < c$. Nincs megoldás, ha $2s_a = c$.

399. Tükrözzük a négyszöget a BC oldal felezőpontjára! Ha a négyszög trapéz, akkor a BC szár felezőpontjára tükrözve $AD'A'D$ paralelogramma középvonala a trapéz középvonalának kétszerese, és párhuzamos az alapokkal. $\Rightarrow 2k = a + c$, $k = \dfrac{a+c}{2}$.

399.



Ha $k = \dfrac{a+c}{2}$, akkor D, C, A' egy egyenesre esik és A, B, D' is egy egyenesre illeszkedik $\Rightarrow DC$ párhuzamos a középvonallal, AB párhuzamos a középvonallal $\Rightarrow DC \parallel AB \Rightarrow$ az $ABCD$ négyszög trapéz.