I. Síkgeometria

Bevezetés a síkgeometriába

Szakaszok; sokszögek átlói

1. A szakasz kétszereséből az eredeti szakaszt a szakaszfelező merőleges és a kétszeres szakasz metszéspontjának megjelölésével kaphatjuk. A felezéspont és a kétszeres szakasz bármelyik végpontja meghatározza a szerkesztendő szakaszt.

2. A $3m - 2n$ szakasz csak akkor szerkeszthető, ha $3m - 2n \geq 0 \Rightarrow m \geq \frac{2}{3}n$. Egyenlőség esetén a keresett szakasz 0 hosszúságú.

3. Legyen a két szakasz összege $a + b$, különbsége $a - b$ és $a + b > a - b$! Az összeg- és különbségszakasz összege a nagyobb szakasz kétszeresét adja $(a + b + a - b = 2a)$, így ennek felezésével a nagyobb szakaszhoz jutunk. Az összeg- és különbségszakasz különbsége a kisebb szakasz kétszeresét adja $(a + b - (a - b) = 2b)$, így ennek felezésével a kisebb szakaszhoz jutunk.

4. Legyen a két adott szakasz $2a + b$ és $2a - b$! $2a + b + 2a - b = 4a \Rightarrow$ A $4a$ szakasz felének felezésével az egyik szakaszhoz jutunk. $2a + b - (2a - b) = 2b \Rightarrow$ A $2b$ szakasz felezésével a másik szakaszhoz jutunk.

5. $CD = CB + BD \Rightarrow BD = CD - CB = 8\text{ cm}$; $AD = AB + BD = 10\text{ cm} + 8\text{ cm} = \underline{\underline{18\text{ cm}}}$.

6. *a)* $AC + BD < AB$ miatt a pontok A; C; D; B sorrendben helyezkednek el.
$CD = AB - AC - BD = \underline{\underline{14\text{ m}}}$;

b) $AC + BD > AB$ miatt a pontok A; D; C; B sorrendben helyezkednek el.
$DC = AC + BD - AB = \underline{\underline{4{,}7\text{ m}}}$.

7. $AB = 5\text{ cm} \Rightarrow F_1B = \frac{5}{2}\text{ cm}$; $BC = 17\text{ cm} \Rightarrow BF_2 = \frac{17}{2}\text{ cm}$; $F_1F_2 = F_1B + BF_2 = \underline{\underline{11\text{ cm}}}$.

8. Legyen az AB szakasz felezőpontja F_1, az AC szakasz felezőpontja pedig F_2.

a) **1. eset:** B elválasztja A-t és C-t. $AF_1 = 50\text{ m}$; $AF_2 = 80\text{ m}$;
$AF_2 = AF_1 + F_1F_2 \Rightarrow F_1F_2 = AF_2 - AF_1 = \underline{\underline{30\text{ m}}}$.

2. eset: A elválasztja B-t és C-t. $AF_1 = 50\text{ m}$; $F_2A = 80\text{ m}$;
$F_1F_2 = F_1A + AF_2 = \underline{\underline{130\text{ m}}}$.

b) **1. eset:** C elválasztja A-t és B-t. $AF_1 = \frac{a}{2}$; $AF_2 = \frac{b}{2}$;
$AF_2 + F_2F_1 = AF_1 \Rightarrow F_2F_1 = AF_1 - AF_2 = \underline{\underline{\frac{a-b}{2}}}$. C és F_1 sorrendje nem befolyásolja a megoldást.

2. eset: A elválasztja B-t és C-t. $AF_1 = \frac{a}{2}$; $F_2A = \frac{b}{2}$; $F_2A + AF_1 = F_2F_1 = \underline{\underline{\frac{a+b}{2}}}$.

I

9. $AC = AB + BC = a + b$; $\quad AF = \frac{1}{2} \cdot AC = \underline{\underline{\frac{a+b}{2}}}$.

10. $AP : PB = 2:3 \Rightarrow 2x + 3x = 90\,\text{m} \Rightarrow x = 18\,\text{m}$; $\quad \underline{\underline{AP = 36\,\text{m}}}$; $\quad \underline{\underline{PB = 54\,\text{m}}}$.

11. $AP : PB = b : c \Rightarrow b \cdot x + c \cdot x = a \Rightarrow x = \frac{a}{b+c}$; $\quad \underline{\underline{AP = b \cdot \frac{a}{b+c}}}$; $\quad \underline{\underline{PB = c \cdot \frac{a}{b+c}}}$.

12. Jelöljük a felezőpontot F-fel, a $2:3$ arányú osztópontot G-vel! $AF = FB = \frac{35}{2}\,\text{m}$;

$AG : GB = 2:3 \Rightarrow 2x + 3x = 35\,\text{m} \Rightarrow x = 7\,\text{m} \Rightarrow AG = 14\,\text{m}$;

$AG + GF = AF \Rightarrow GF = AF - AG = \underline{\underline{3\frac{1}{2}\,\text{m}}}$.

13. Jelöljük a felezőpontot F-fel, a $\frac{2}{3} : \frac{4}{15}$ arányú osztópontot G-vel!

$AF = FB = \frac{5{,}6}{2}\,\text{m} = 2{,}8\,\text{m}$; $\quad AG : GB = \frac{2}{3} : \frac{4}{15} \Rightarrow \frac{2}{3}x + \frac{4}{15}x = 5{,}6\,\text{m} \Rightarrow x = 6\,\text{m} \Rightarrow$

$\Rightarrow AG = 4\,\text{m}$; $\quad AG = AF + FG \Rightarrow FG = AG - AF = \underline{\underline{1{,}2\,\text{m}}}$.

14. $AC : CB = 2:5 \Rightarrow 2x + 5x = 42\,\text{cm} \Rightarrow x = 6\,\text{cm} \Rightarrow \underline{\underline{AC = 12\,\text{cm}}}$; $\quad AD : DB = 3:4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x + 4x = 42\,\text{cm} \Rightarrow x = 6\,\text{cm} \Rightarrow AD = 18\,\text{cm}$; $\quad AD = AC + CD \Rightarrow CD = AD - AC = \underline{\underline{6\,\text{cm}}}$.

15. $AC = AB + BC$; $\quad DB = DC + CB = -CD - BC$; $\quad AD = AB + BC + CD$;

$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC =$

$= AB \cdot CD + (AB + BC) \cdot \{-CD - BC\} + (AB + BC + CD) \cdot BC =$

$= AB \cdot CD - AB \cdot CD - BC \cdot CD - AB \cdot BC - BC^2 + AB \cdot BC + BC^2 + CD \cdot BC = 0.$

A feladat általánosítható. A pontok más sorrendben való elhelyezkedésekor is fennáll az előjeles szakaszok között felírt összes egyenlőség. Például A, D, C, B sorrend esetén:

$AC = AB - CB = AB + BC$; $\quad DB = DC + CB = -CD - BC$; $\quad AD = AB - CB - DC =$

$= AB + BC + CD$.

16. $AC = AB + BC$; $\quad BD = BC + CD$; $\quad AD = AB + BC + CD$.

(1) $AC^2 \cdot BD + CD^2 \cdot AB = (AB + BC)^2 \cdot (BC + CD) + CD^2 \cdot AB =$

$= \left(AB^2 + 2AB \cdot BC + BC^2\right) \cdot (BC + CD) + CD^2 \cdot AB =$

$= AB^2 \cdot BC + AB^2 \cdot CD + 2AB \cdot BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot CD + BC^3 + BC^2 \cdot CD + CD^2 \cdot AB.$

(2) $BC^2 \cdot AD + AB \cdot BD \cdot AD = BC^2 \cdot (AB + BC + CD) + AB \cdot (BC + CD) \cdot (AB + BC + CD) =$

$= AB \cdot BC^2 + BC^3 + BC^2 \cdot CD + (AB \cdot BC + AB \cdot CD) \cdot (AB + BC + CD) =$

$= AB \cdot BC^2 + BC^3 + BC^2 \cdot CD + AB^2 \cdot BC + AB^2 \cdot CD + AB \cdot BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot CD + AB \cdot CD^2 =$

$= AB^2 \cdot BC + AB^2 \cdot CD + 2AB \cdot BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot CD + BC^3 + BC^2 \cdot CD + CD^2 \cdot AB.$

(1) és **(2)** összefüggések jobb oldala egyenlő, tehát az állítás igaz.

17. *a)* 4 pont esetén $\frac{4 \cdot 3}{2} = \underline{\underline{6}}$ lehetséges egyenes van. *b)* 5 pont esetén $\frac{5 \cdot 4}{2} = \underline{\underline{10}}$ lehetséges egyenes van. *c)* 212 pont esetén $\frac{212 \cdot 211}{2} = \underline{\underline{22\,366}}$ lehetséges egyenes van. *d)* n pont esetén $\underline{\underline{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}}$ lehetséges egyenes van. Bármely két pont egyetlen egyenest határoz meg, mivel semelyik három nincs egy egyenesen. Annyi egyenes van, ahányféleképpen n pontból 2-t ki lehet választani.

18. A kiválasztott csúcsból önmagába és a két szomszédjába nem indul átló. Az egy csúcsból induló átlók száma: *a)* $5-3=\underline{\underline{2}}$; *b)* $16-3=\underline{\underline{13}}$; *c)* $\underline{\underline{n-3}}$.

19. *a)* Az egyik csúcsból kiinduló 2 átló $\underline{\underline{3\,\text{db}}}$ háromszöget hoz létre.

b) Az egy csúcsból kiinduló átlók száma $12-3=9$. Az 1. átló 1 db háromszöget és egy tizenegyszöget hoz létre a tizenkétszögből. A 2. átló újabb háromszöget és egy tízszöget, a 3. átló a 3. háromszöget és egy kilencszöget, ... a 9. átló a 9. háromszöget és még egy háromszöget, azaz összesen $\underline{\underline{10\,\text{db}}}$-ot hoz létre.

c) $\underline{\underline{(n-2)\,\text{db}}}$ háromszög keletkezik.

20. Az n oldalú konvex sokszög egy csúcsából $(n-3)$ db átló húzható. $n-3=12\Rightarrow\underline{\underline{n=15}}$.

21. Az n oldalú konvex sokszöget az egy csúcsból induló átlók $(n-2)$ db háromszögre bontják. $n-2=18\Rightarrow\underline{\underline{n=20}}$.

22. $n+(n-3)=17\Rightarrow\underline{\underline{n=10}}$.

23. Az n oldalú sokszög egy csúcsából $(n-3)$ db átló indul. n csúcsból $n\cdot(n-3)$ db átló indul, de így minden átlót kétszer számoltunk, tehát az összes átlók száma: $\dfrac{n\cdot(n-3)}{2}$. A feltétel szerint: $\dfrac{n\cdot(n-3)}{2}=27$. Ebből a pozitív megoldás $\underline{\underline{n=9}}$.

24. *a)* Egy kiszemelt gyerek minden társával helyet cserélhet, tehát $\underline{\underline{6}}$ cserepartnere lehet.

b) 1 játékos 6 helyre cserélhet. 7 játékos $7\cdot6=42$ helyre, de minden cserében ketten szerepelnek, így a valóságos cserék száma: $\dfrac{7\cdot6}{2}=\underline{\underline{21}}$.

25. Az n oldalú konvex sokszög átlóinak száma $\dfrac{n\cdot(n-3)}{2}$.

A feltétel szerint: $\dfrac{n\cdot(n-3)}{2}=6n$. Ebből a pozitív megoldás $\underline{\underline{n=15}}$.

26. Az n oldalú konvex sokszög átlóinak száma $\dfrac{n\cdot(n-3)}{2}$.

A feltétel szerint: $\dfrac{n\cdot(n-3)}{2}=n$. Ebből a pozitív megoldás $\underline{\underline{n=5}}$.

Szögek, szögpárok

27. $45°=90°:2$, tehát $\sphericalangle$-et kell felezni.
A szabályos háromszög mindhárom szöge 60°, tehát szabályos háromszöget kell szerkeszteni.
$30°=\dfrac{1}{2}\cdot60°$, tehát 60°-os szöget kell felezni. $22{,}5°=\dfrac{1}{2}\cdot45°$, tehát 45°-os szöget kell felezni.
$15°=\dfrac{1}{2}\cdot30°=\dfrac{1}{4}\cdot60°$, tehát a 60°-os szög felét kell felezni.

I

28. A 90°-os és a 60°-os szögekből szögfelezéssel és összeadással többféleképpen is szerkeszthetők a kérdéses szögek, például: $105° = 60° + \frac{1}{2} \cdot 90°$; $52,5° = \frac{1}{2} \cdot 60° + \frac{1}{4} \cdot 90°$; $75° = \frac{1}{2} \cdot (60° + 90°)$; $67,5° = \frac{3}{4} \cdot 90°$; $135° = \frac{3}{2} \cdot 90°$.

29. Szerkesztési feladat, megoldását az olvasóra bízzuk.

30. Legyen $\alpha + \beta = \delta$ az egyik, $\alpha - \beta = \varepsilon$ a másik megadott szög! Az értelmezés miatt $\alpha > \beta$ és $\delta > \varepsilon$. A két egyenlet összegéből $\alpha = \frac{\delta + \varepsilon}{2} \Rightarrow$ a nagyobb szög megkapható a megadott szögek összegének felezésével. Az első és a második egyenlet különbségéből $\beta = \frac{\delta - \varepsilon}{2} \Rightarrow$ a kisebb szög megkapható a megadott szögek különbségének felezésével.

31. Legyen $2\alpha + \beta = \delta$ az egyik, $2\alpha - \beta = \varepsilon$ a másik megadott szög! Az értelmezés miatt $\alpha > \frac{\beta}{2}$ és $\delta > \varepsilon$. A két egyenlet összegéből $\alpha = \frac{\delta + \varepsilon}{4} \Rightarrow$ az egyik szög megkapható a megadott szögek összegének kétszeri felezésével. Az első és a második egyenlet különbségéből $\beta = \frac{\delta - \varepsilon}{2} \Rightarrow$ a másik szög megkapható a megadott szögek különbségének felezésével.

32. $\alpha : \beta = 7:3 \Rightarrow \alpha = 7\varepsilon$ és $\beta = 3\varepsilon$. A feltétel szerint: $7\varepsilon = 3\varepsilon + 72° \Rightarrow \varepsilon = 18° \Rightarrow \alpha + \beta = \underline{\underline{180°}}$.

33. $\alpha : \beta = 5:2 \Rightarrow \alpha = 5\varepsilon$ és $\beta = 2\varepsilon$. A feltétel szerint: $5\varepsilon = 2\varepsilon + 54° \Rightarrow \varepsilon = 18° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 90°}}$ és $\underline{\underline{\beta = 36°}}$.

34. $\alpha + \beta = 216°$ és $\alpha + \frac{\beta}{2} = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 72°}}$ és $\underline{\underline{\alpha = 144°}}$.

35. $\alpha + \alpha + 10° + \alpha + 20° + \alpha + 30° = 180° \Rightarrow \alpha = 30°$. A szögek nagysága: $\underline{\underline{30°}}$; $\underline{\underline{40°}}$; $\underline{\underline{50°}}$; $\underline{\underline{60°}}$.

36. Jelöljük az első és a második sugár szögét α-val! $\alpha + 2\alpha + 4\alpha + 8\alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 24°$. A keresett szögek: $\underline{\underline{24°}}$; $\underline{\underline{48°}}$; $\underline{\underline{96°}}$; $\underline{\underline{192°}}$.

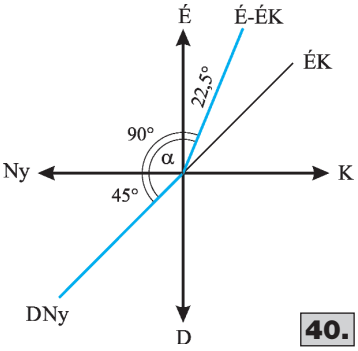
37. 0 órától 12 óráig rendre a mutatók által bezárt szög: 0°; 30°; 60°; 90°; 120°; 150°; 180°; 150° (210°); 120° (240°); 90° (270°); 60° (300°); 30° (330°) és 0° (360°).

38. 1 óra alatt a kismutató 30°-ot fordul el. *a)* negyed hét; $\frac{1}{4}$ óra alatt a 30° negyedét tette meg, így a 6-ostól számítva 7,5°-ot fordult a kismutató. A nagymutató pillanatnyi állásával $90° + 7,5° = \underline{\underline{97,5°}}$-os szöget zár be.

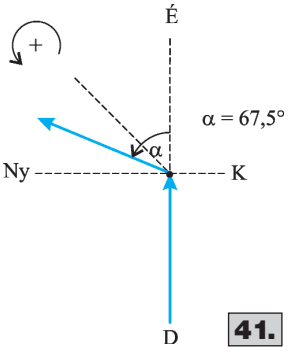
b) fél tíz; $\frac{1}{2}$ óra alatt a kismutató a 30° felét tette meg, így 15°-ot fordult. A nagymutató pillanatnyi állásával $90° + 15° = \underline{\underline{105°}}$-os szöget zár be.

c) háromnegyed öt; $\frac{3}{4}$ óra alatt a kismutató a 30° háromnegyedét tette meg, így 22,5°-ot fordult. A nagymutató pillanatnyi állásával $90° + 30° + (30° - 22,5°) = \underline{\underline{127,5°}}$-os szöget zár be.

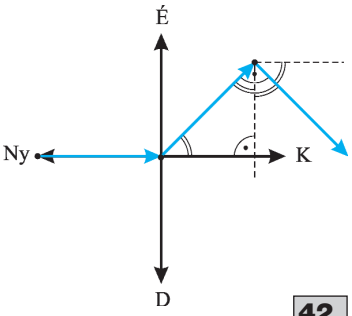
39. 1 óra alatt a kismutató 30°-ot fordul el. *a)* 2 óra 20 perc; a kismutató a 2-höz képest $\frac{1}{3} \cdot 30° = 10°$-ot, a nagymutató pedig 60°-ot haladt. A bezárt szög $60° - 10° = \underline{\underline{50°}}$.



40.



41.



42.

b) 3 óra 32 perc; a kismutató a 3-hoz képest $\frac{32}{60}\cdot 30° = 16°$-ot, a nagymutató pedig $90° + 12° = 102°$-ot haladt. A bezárt szög $102° - 16° = \underline{\underline{86°}}$.

40. Az ábra jelöléseit használva $\alpha = 45° + 90° + 22,5° = \underline{\underline{157,5°}}$.

41. $\alpha = 67,5° = 45° + 22,5° \Rightarrow$ a hajó *nyugat-északnyugati* irányban halad.

42. A repülőgép *délkelet* felé halad.

43. *a)* $21° 36' = \underline{\underline{21,6°}}$; *b)* $49° 9' = \underline{\underline{49,15°}}$; *c)* $51° 24' 18'' = \underline{\underline{51,405°}}$; *d)* $17° 27' 45'' = \underline{\underline{17,4625°}}$.

44. *a)* $108,5° = \underline{\underline{108° 30'}}$; *b)* $20,7° = \underline{\underline{20° 42'}}$; *c)* $18,3° = \underline{\underline{18° 18'}}$; *d)* $59,7° = \underline{\underline{59° 42'}}$;
e) $100,01° = \underline{\underline{100° 36''}}$.

45. $\delta = \alpha = 32° 42'$, mert csúcsszögek; $\varepsilon = \alpha = 32° 42'$, mert egyállású szögek;
$\sigma = \alpha = 32° 42'$, mert váltószögek; $\beta = \gamma = 180° - 32° 42' = 147° 18'$, mert α mellékszögei;
$\eta = \omega = 180° - 32° 42' = 147° 18'$, mert α társszögei.

46. $\alpha = 90° - \alpha + 16° 28' \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 53° 14'}}$.

47. $\alpha = \frac{1}{5}\cdot(180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 30°}}$.

48. $\alpha = 180° - \alpha \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 90°}}$.

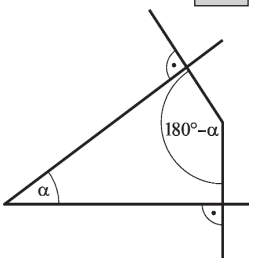
49. $\alpha = 180° - \alpha \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 90°}}$. Akkor egyenlő a szög a társszögével, ha 90°-os.

50. *a)* $\alpha = \frac{2}{3}\cdot(180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 72°}}$; *b)* $\alpha = \frac{3}{7}\cdot(180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 54°}}$;
c) $\alpha = \frac{3}{5}\cdot(180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 67,5°}}$.

51. *a)* $\alpha + (180° - \alpha) + (180° - \alpha) = 1\frac{3}{16}\cdot 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 146,25°}}$;
b) $\alpha + (180° - \alpha) + (180° - \alpha) = 1\frac{5}{9}\cdot 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 80°}}$.

52. A feltételeknek megfelelő merőleges szárú szögek nem egyenlők, hanem egymás kiegészítő szögei.
a) $\alpha = 3\cdot(180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 135°}}$; $\underline{\underline{180° - \alpha = 45°}}$;
b) $\alpha = 4\cdot(180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 144°}}$; $\underline{\underline{180° - \alpha = 36°}}$;
c) $\alpha = 3\cdot(180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 150°}}$; $\underline{\underline{180° - \alpha = 30°}}$.

52.



I

53. A feltételeknek megfelelő merőleges szárú szögek nem egyenlők, hanem egymás kiegészítő szögei. *a)* $\beta = 11\alpha \Rightarrow \alpha + 11\alpha = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 15°}}$; $\underline{\underline{\beta = 165°}}$; *b)* $\beta = \frac{1}{3}\alpha \Rightarrow \alpha + \frac{1}{3}\alpha = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 135°}}$; $\underline{\underline{\beta = 45°}}$; *c)* $\beta = \frac{7}{2}\alpha \Rightarrow \alpha + \frac{7}{2}\alpha = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 40°}}$; $\underline{\underline{\beta = 140°}}$.

54. $TCA\triangle$-ben $CTA\sphericalangle = 90° \Rightarrow TCA\sphericalangle = 90° - \alpha$. Az $ABC\triangle$-ben $\beta = 90° - \alpha$, így az előző állítással összevetve $TCA\sphericalangle = \beta$ adódik. A másik állítás hasonlóan belátható.

55. A párhuzamos szárú konvex szögek nagysága csak akkor különbözhet egymástól, ha társszögek. $\alpha + \beta = 180°$; $\alpha = \beta + 90°$; $\beta + 90° + \beta = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 45°}}$; $\underline{\underline{\alpha = 135°}}$.

56. A párhuzamos szárú konvex szögek nagysága csak akkor különböző, ha társszögek.
a) $\alpha + \beta = 180°$; $\beta = 90° + \alpha$; $\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 45°}}$; $\underline{\underline{\beta = 135°}}$.
b) $\alpha + \beta = 180°$; $\beta = 120° + \alpha$; $\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 30°}}$; $\underline{\underline{\beta = 150°}}$.
c) $\alpha + \beta = 180°$; $\beta = 75° + \alpha$; $\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 52{,}5°}}$; $\underline{\underline{\beta = 127{,}5°}}$.

57. $\delta = 1\frac{3}{5} \cdot 90° = 144°$; $ADB\sphericalangle = 180° - \delta = 36°$, mert δ-val társszögek.

$ADB\triangle$-ben $DAB\sphericalangle = 180° - 36° - \frac{144°}{2} = \underline{\underline{72°}}$.

58. $2 \cdot \frac{\beta}{2} + 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = 180° \Rightarrow \sphericalangle(f_1; f_2) = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = \underline{\underline{90°}}$.

59. $\sphericalangle(a; b) = 2\alpha$; felezője f_1 és $\sphericalangle(b; c) = 2\beta$; felezője f_2. $f_1 \perp f_2 \Rightarrow \alpha + \beta = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow \sphericalangle(a; c) = 2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow a$ és c egy egyenest alkot.

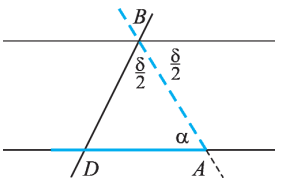
60. A keletkezett szögek vagy csúcsszögek vagy mellékszögek vagy egyállású szögek vagy társszögek. A csúcsszögeknek közös a szögfelezőjük, a mellékszögeknek az **58.** feladat állítása szerint merőleges, az egyállású szögeknek párhuzamos, a társszögeknek pedig merőleges. Az állítás is párhuzamosságot vagy merőlegességet fogalmazott meg.

61. $f_\alpha \perp f_\beta$ miatt az **59.** feladat állítását felhasználva: $\alpha + \beta = 180°$.
A feltétel szerint: $\beta = \alpha + 130° \Rightarrow \alpha + \alpha + 130° = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 25°}}$; $\underline{\underline{\beta = 155°}}$.

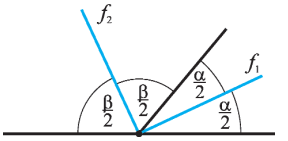
62. Az ábra jelöléseit használva: $\delta_1 = 127°\ 17'$;
B_1AC_1M négyszögben $360° = \alpha + 90° + 90° + 127°\ 17' \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 52°\ 43'}}$.

63. **1. eset:** A tompaszög az A csúcsnál van. A 63/I. ábra jelöléseivel: $\delta_2 = 47°\ 6'\ 42''$.
B_1AC_1M négyszögben $360° = \alpha + 90° + 90° + 47°\ 6'\ 42'' \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 132°\ 53'\ 18''}}$.

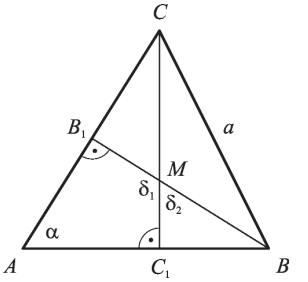
57.



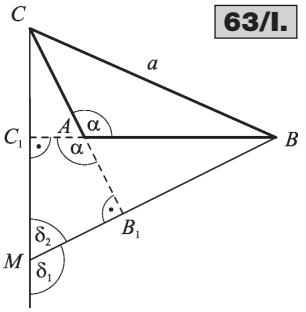
58.



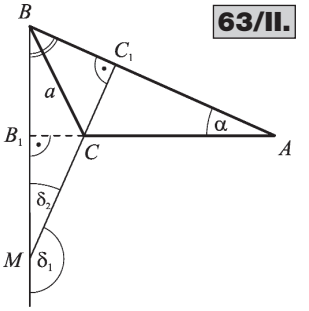
62.



2. eset: A tompaszög a C csúcsnál van. BC_1M derékszögű háromszögben $MBC_1\sphericalangle = 90° - \delta_2$; AB_1B derékszögű háromszögben $B_1BA\sphericalangle\ (= MBC_1\sphericalangle) = 90° - \alpha$. A két egyenlőséget összevetve: $\underline{\underline{\alpha = \delta_2 = 47°6'42''}}$.



63/I.



63/II.

Sokszögek szögösszege

64. n darab háromszög keletkezett, szögeik összege $n \cdot 180°$. E szögek közül azok, amelyeknek csúcsa az adott pont, nem tartoznak a sokszög belső szögeihez, és együtt 360°-ot alkotnak. Ezért az állítás igaz.

65. Az n oldalú konvex sokszög egy csúcsból induló átlói $(n - 2)$ db háromszögre bontják a sokszöget. A háromszögek szögei részben vagy egészen a sokszög szögeit alkotják, és a sokszög minden szöge ezen háromszögek szögeiből adódik. A sokszög belső szögeinek összege: $(n - 2) \cdot 180°$. *a)* négyszög esetében $(4 - 2) \cdot 180° = \underline{\underline{360°}}$; *b)* nyolcszög esetében $(8 - 2) \cdot 180° = \underline{\underline{1080°}}$; *c)* tizenháromszög esetében $(13 - 2) \cdot 180° = \underline{\underline{1980°}}$; *d)* kilencvenhatszög esetében $(96 - 2) \cdot 180° = \underline{\underline{16\,920°}}$;

66. A konkáv csúcsból induló átló a konkáv négyszöget 2 db háromszögre bontja. A négyszög belső szögeinek összege egyenlő a két háromszög belső szögeinek összegével, azaz 360°-kal.

67. $(n - 2) \cdot 180° = 1620° \Rightarrow \underline{\underline{n = 11}}$. Tizenegy oldalú a sokszög.

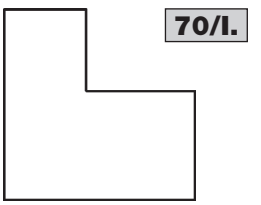
68. *a)* egyenlő szögű ötszög: $\alpha_5 = \dfrac{(5-2)\cdot 180°}{5} = \underline{\underline{108°}}$;

b) egyenlő szögű hatszög: $\alpha_6 = \dfrac{(6-2)\cdot 180°}{6} = \underline{\underline{120°}}$;

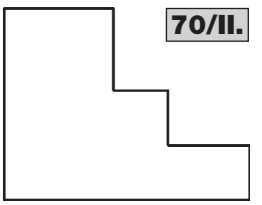
c) egyenlő szögű hétszög: $\alpha_7 = \dfrac{(7-2)\cdot 180°}{7} = \underline{\underline{128{,}57°}}$;

d) egyenlő szögű tízszög: $\alpha_{10} = \dfrac{(10-2)\cdot 180°}{10} = \underline{\underline{144°}}$;

e) egyenlő szögű n-szög: $\alpha_n = \dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.


70/I.

69. A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy a négyszög α, β, γ, δ szögei 90°-nál kisebbek! $\Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta < 90° + 90° + 90° + 90° = 360°$, ami ellentmond annak, hogy a négyszög belső szögeinek összege 360°.


70/II.

70. Például: *a)* 70/I. ábra; *b)* 70/II. ábra.

71. Ha bármely két szomszédos oldal merőleges egymásra, akkor a sokszögnek csak 90°-os és 270°-os szögei lehetnek. Tegyük fel, hogy az $(n + k)$ oldalú sokszögnek n db 90°-os és k db 270°-os szöge van! A belső

I

szögek összegére fennáll: $n \cdot 90° + k \cdot 270° = (n + k - 2) \cdot 180° \Rightarrow k = n - 4 \Rightarrow k$ és n azonos paritásúak, tehát az összegük (a sokszög oldalszáma) páros.

72. n oldalú sokszög belső szögeinek összege: $(n - 2) \cdot 180°$; $(n + 4)$ oldalú sokszög belső szögeinek összege: $(n + 2) \cdot 180°$. A változás $4 \cdot 180° = \underline{\underline{720°}}$ növekedés.

73. Az n oldalú sokszög belső szögeinek összege: $(n - 2) \cdot 180° = s$; $2n$ oldalú sokszög belső szögeinek összege: $(2n - 2) \cdot 180° = (2n - 4) \cdot 180° + 360° = 2 \cdot (n - 2) \cdot 180° + 360° = 2s + 360°$. A szögösszeg $(s + 360°)$-kal nőtt.

74. *a)* Tekintsük a háromszög belső és külső szögeinek összegét! $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 180° + 180° + 180°$; $\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = 540°$; $\alpha' + \beta' + \gamma' = 540° - (\alpha + \beta + \gamma) = 540° - 180° = \underline{\underline{360°}}$.

b) Az *a)* pontban látott gondolatmenetet követjük. Az ötszög belső és külső szögeinek összege: $5 \cdot 180° = 900°$. A belső szögek összege: $540°$. A külső szögek összege: $900° - 540° = \underline{\underline{360°}}$.

c) Az *a)* pontban látott gondolatmenetet követjük. Az n oldalú konvex sokszög belső és külső szögeinek összege: $n \cdot 180°$; a belső szögek összege: $(n - 2) \cdot 180°$. A külső szögek összege: $n \cdot 180° - (n - 2) \cdot 180° = 2 \cdot 180° = \underline{\underline{360°}}$.

75. $(n - 2) \cdot 180° + \alpha' = 1846°$; $0 < \alpha' < 180°$; $(n - 2) \cdot 180° - 1800° + \alpha' = 46°$; $(n - 12) \cdot 180° = 46° - \alpha'$. Az egyenlet bal oldala osztható 180-nal. A jobb oldal csak akkor lehet osztható, ha $\underline{\underline{\alpha' = 46°}} \Rightarrow \underline{\underline{n = 12}}$. A sokszög 12 oldalú, a külső szög 46°.

76. A feladat feltételei szerint az ötszög belső szögeinek összege: $x + 2x + 3x + 4x + 5x = 540° \Rightarrow \Rightarrow x = 36°$. A keresett szögek: 36°; 72°; 108°; 144°; 180°. Mivel belső szög nem lehet 180°, így ilyen ötszög nem létezik.

77. Tekintsük a négyszög egyik oldalegyenesén lévő belső és külső szögek összegét! $\alpha + \alpha' = 180°$; $\beta + \beta' = 180° \Rightarrow \alpha + \beta + \alpha' + \beta' = 360°$. A négyszög belső szögeinek összege 360°: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360° = \alpha + \beta + \alpha' + \beta' \Rightarrow \alpha' + \beta' = \gamma + \delta$.

78. A belső szögek összege $(n - 2) \cdot 180°$, a külső szögeké 360°. $(n - 2) \cdot 180° = 3 \cdot 360° \Rightarrow \Rightarrow \underline{\underline{n = 8}}$ oldalú a sokszög.

79. *a)* Legyen α és γ szögfelezőjének metszéspontja M!

$AMCB$ négyszögben $AMC\sphericalangle = 360° - \frac{\alpha}{2} - \beta - \frac{\gamma}{2} = 360° - 36° - 122° - 34° = 168°$.

A két szögfelező hajlásszöge: $180° - AMC\sphericalangle = \underline{\underline{12°}}$.

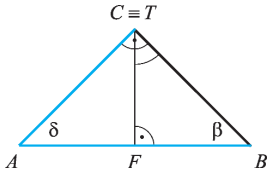
b) Legyen α és β szögfelezőjének metszéspontja P! $ABP\triangle$-ben $\delta = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180° - 36° - 61° = 83°$. A két szögfelező hajlásszöge: $\underline{\underline{\delta = 83°}}$.

80. Tekintsük át az egyes háromszögtípusok belső és külső szögeinek számát az alábbi táblázat segítségével!

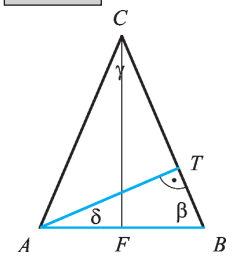
	Belső szögek			Külső szögek		
	hegyesszög	tompaszög	derékszög	hegyesszög	tompaszög	derékszög
Hegyesszögű háromszög	3 db				3 db	
Derékszögű háromszög	2 db		1 db		2 db	1 db
Tompaszögű háromszög	2 db	1 db		1 db	2 db	

A külső szögek között legfeljebb egy volt hegyesszög és legalább kettő a tompaszög.

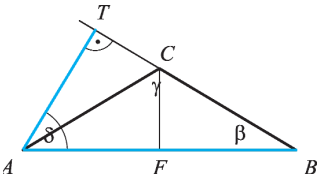
84/I.



84/II.



84/III.



81. Jelöljük a keresett sokszög oldalainak számát n-nel! Tegyük fel, hogy a sokszög minden külső szöge legalább 90°! A külső szögek összege 360°, így fennáll a $360° \geq n \cdot 90° \Rightarrow n \leq 4$ egyenlőtlenség. Tehát $n \geq 5$ esetén biztosan van a külső szögek között hegyesszög.

82. Jelöljük a háromszög alapját BC-vel, az A-nál lévő külső szögfelezőt pedig e-vel!

$$\sphericalangle(e;\ AC) = \frac{180° - \alpha}{2}; \quad BCA\sphericalangle = \frac{180° - \alpha}{2} \Rightarrow \sphericalangle(e;\ AC) = BCA\sphericalangle.$$

A két egyenlő szög egyik szára ugyanannak az egyenesnek két ellentétes irányú félegyenese, másik száruk a fenti egyenes által határolt más-más félsíkban van. $\Rightarrow$ A két szög váltószög $\Rightarrow e \parallel a$.

83. Jelöljük az A csúcsnál lévő külső szög felezőjét e-vel! $a \parallel e \Rightarrow \gamma = \frac{\alpha'}{2}$, mert váltószögek,

$$\beta = 180° - \alpha - \frac{\alpha'}{2} = 180° - \alpha - \frac{180° - \alpha}{2} = \frac{180° - \alpha}{2} = \frac{\alpha'}{2} = \gamma \Rightarrow \beta = \gamma \Rightarrow \underline{\underline{c = b}}.$$

84. $ATB\triangle$-ben: $\delta = 90° - \beta$; F az AB alap felezéspontja $\Rightarrow CF$ szimmetriatengely felezi a szárszöget és merőleges az alapra. $CFB\triangle$-ben: $\frac{\gamma}{2} = 90° - \beta$. Az állításokból $\delta = \frac{\gamma}{2}$adódik.

85. Legyen α és β szögfelezőjének metszéspontja P, az $ABP\triangle$ P-nél lévő külső szöge δ!

$\delta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2} < 90°$, tehát δ a szögfelezők hajlásszöge.

a) $\delta = 90° - 16{,}3° = \underline{\underline{73{,}7°}}$; *b)* $\delta = 90° - 45° = \underline{\underline{45°}}$; *c)* $\delta = 90° - 75°\,7' = \underline{\underline{14°\,53'}}$.

86. A külső szögre vonatkozó tételből: $\alpha' = \beta + \gamma$; a feladat feltétele szerint: $\alpha' = 2\beta$. A két állítást összevetve: $\beta = \gamma \Rightarrow$ a háromszög egyenlő szárú.

87. *a)* A szárszög 60° $\Rightarrow$ az alapon fekvő szögek $\frac{180° - 60°}{2} = 60°$-osak $\Rightarrow$ a háromszög szabályos. *b)* Az alapon fekvő szögek 60°-osak $\Rightarrow$ a szárszög $180° - 2 \cdot 60° = 60° \Rightarrow$ a háromszög szabályos.

Háromszögek belső és külső szögei

88. A feladat feltételei szerint: $\alpha = 5x$; $\beta = 7x$; $\gamma = 5x + \frac{1}{18} \cdot 180° = 5x + 10°$. A háromszög belső szögeinek összege: $5x + 7x + 5x + 10° = 180° \Rightarrow x = 10° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 50°}}$; $\underline{\underline{\beta = 70°}}$; $\underline{\underline{\gamma = 60°}}$.

I

89. A feladat feltételei szerint: $\alpha = 70°$; $\beta = 5x$; $\gamma = 6x$. A háromszög belső szögeinek összege: $70° + 5x + 6x = 180° \Rightarrow x = 10° \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 50°}}$; $\underline{\underline{\gamma = 60°}}$.

90. *a)* A feladat feltételei szerint: $\alpha = x$; $\beta = 2x$; $\gamma = 3x$. A háromszög belső szögeinek összege: $x + 2x + 3x = 180° \Rightarrow x = 30° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 30°}}$; $\underline{\underline{\beta = 60°}}$; $\underline{\underline{\gamma = 90°}}$.

b) A megoldásmenet *a)*-hoz hasonló: $\underline{\underline{\alpha = 45°}}$; $\underline{\underline{\beta = 60°}}$; $\underline{\underline{\gamma = 75°}}$.

c) A megoldásmenet *a)*-hoz hasonló: $\underline{\underline{\alpha = 30°}}$; $\underline{\underline{\beta = 70°}}$; $\underline{\underline{\gamma = 80°}}$.

91. A feladat feltételei szerint: $\alpha = 42° 24'$; $\beta = \gamma + 27{,}1° = \gamma + 27° 6'$. A háromszög belső szögeinek összege: $42° 24' + \gamma + 27° 6' + \gamma = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 55° 15'}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 82° 21'}}$.

92. A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy a P pontból az e egyenesre két merőleges egyenes húzható! Legyen ezeknek e-vel való metszéspontja T_1 és T_2! $T_1 \neq T_2 \Rightarrow$ A két merőleges egymással bezárt szöge: $\gamma > 0$. A $T_1T_2P\triangle$ belső szögeinek összege $90° + 90° + \gamma > 180°$, ami lehetetlen. $\Rightarrow$ Nem létezhet a két merőleges.

93. Legyen $\alpha' = 87°! \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 93°}}$. Jelöljük a 27°-os szöget β-val!

A harmadik szög $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = \underline{\underline{60°}}$.

94. A feladat feltételei szerint $\alpha = 2\gamma'$; $\beta = 3\gamma'$; $\gamma = 180° - \gamma'$. A háromszög belső szögeinek összege: $2\gamma' + 3\gamma' + 180° - \gamma' = 180 \Rightarrow \gamma' = 0°$. Ilyen háromszög nem létezik.

95. A feladat feltételei szerint $\alpha' = 128° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 52°}}$; és $\beta' = 116° \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 64°}}$. A belső szögek összegéből: $\gamma = 180° - 52° - 64° = 64°$.

96. Az adott szög a szárszög külső szöge, mivel alapon fekvő szög csak hegyesszög lehet, és ahhoz tompaszög a külső szög. $\gamma' = 87° \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 93°}}$ a háromszög szárszöge. Az alapon fekvő szögek: $\alpha = \beta = \dfrac{\gamma'}{2} = \underline{\underline{43{,}5°}}$.

97. *a)* **1. eset:** Az adott szög a szárszög külső szöge: $\gamma' = 96° \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 84°}} \Rightarrow \alpha = \beta = \dfrac{\gamma'}{2} = \underline{\underline{48°}}$.

2. eset: Az adott szög az alapon fekvő egyik szög külső szöge: $\alpha' = 96° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 84°}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 84°}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma = 180° - 2 \cdot 84° = \underline{\underline{12°}}$.

b) 64°-os szög csak szárszög külső szöge lehet, mivel hozzá tompaszög tartozik belső szögként.

$\gamma' = 64° \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 116°}} \Rightarrow \alpha = \beta = \dfrac{\gamma'}{2} = \underline{\underline{32°}}$.

98. Legyen α és β szögfelezőjének metszéspontja P; az $ABP\triangle$ P-nél lévő külső szöge $\delta \Rightarrow \delta = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = \underline{\underline{90° - \dfrac{\gamma}{2}}}$.

99. Jelölje A_1 az A-ból induló, B_1 a B-ből induló magasság talppontját, M a két magasságvonal metszéspontját, $\delta \leq 90°$ a két magasságvonal hajlásszögét! δ az MBA_1 derékszögű háromszögben hegyesszög. γ és δ merőleges szárú szögek. *a)*, *b)* és *d)* esetben egyenlők, mert egyaránt hegyesszögek, *c)* esetben γ tompaszög, ezért γ és δ kiegészítő szögek.

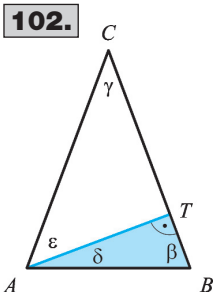
a) $\alpha = 22{,}5°$; $\beta = 75° \Rightarrow \gamma = 82{,}5° \Rightarrow \underline{\underline{\delta = 82{,}5°}}$ a hajlásszög.

b) $\alpha = 15°$; $\beta = 105° \Rightarrow \gamma = 60° \Rightarrow \underline{\underline{\delta = 60°}}$ a hajlásszög.

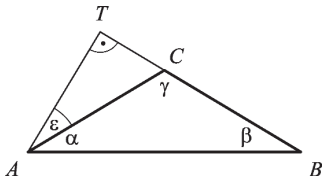
c) $\alpha = 30°$; $\beta = 45° \Rightarrow \gamma = 105° \Rightarrow \underline{\underline{\delta = 75°}}$ a hajlásszög.

d) $\alpha = 90°$; $\beta = 20° \Rightarrow \gamma = 70° \Rightarrow \underline{\underline{\delta = 70°}}$ a hajlásszög.

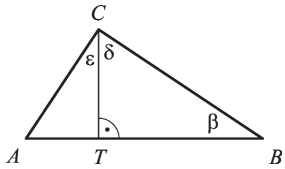
102.



103.



104.



100. *a)* Legyen a két szögfelező metszéspontja P és az $ABP\triangle$ P-nél lévő külső szöge δ!

$\delta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{47°\,42'}{2} + \frac{73°\,10'}{2} = \underline{\underline{60°\,26'}}$;

b) Legyen a magasságok talppontja A_1, illetve B_1, metszéspontjuk M! Az m_a és m_b magasságvonalak szöge a B_1MA_1C húrnégyszög M-nél levő külső szöge: $\delta = \gamma = 180° - 47°\,42' - 73°\,10' = 59°\,8'$.

101. Legyen az α szögfelezőjének a BC oldallal vett metszéspontja P. Az $APB\triangle$-ben δ a P-nél levő külső szög. $\delta = \frac{\alpha}{2} + \beta = 97°\,1'$. A hajlásszög $180° - \delta = 180° - 97°\,1' = \underline{\underline{82°\,59'}}$.

102. Az $ABC\triangle$-ben: $\alpha = \beta = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$. *a)* Az $ATB\triangle$ belső szögeinek összegéből: $\delta = 90° - \beta = \underline{\underline{15°}}$ a szárhoz tartozó magasságvonal és az alap által bezárt szög. *b)* $\varepsilon = \alpha - \delta = \underline{\underline{60°}}$ a szárhoz tartozó magasságvonal és a másik szár által bezárt szög.

103. **1. eset:** A szárszög hegyesszög. A 102. ábra jelöléseit használva:
A feladat feltételeiből $\alpha = \beta$; $\varepsilon = \alpha - 13°$; és $\varepsilon + \delta = \alpha \Rightarrow \delta = 13°$.
$ATB\triangle$-ből $\beta = 90° - 13° = \underline{\underline{77°}} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 77°}} \Rightarrow \gamma = 180° - 2 \cdot 77° = \underline{\underline{26°}}$.

2. eset: A szárszög tompaszög. A feladat feltételeiből $\alpha = \beta$ és $\varepsilon = \alpha - 13°$; $ATB\triangle$-ből $\alpha + \varepsilon + 90° + \beta = 180° \Rightarrow \alpha + \alpha - 13° + 90° + \alpha = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 34°\,20'}}$; $\underline{\underline{\beta = 34°\,20'}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \gamma = 180° - 2 \cdot 34°\,20' = \underline{\underline{111°\,20'}}$.

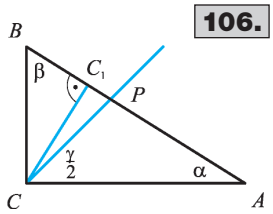
104. $BTC\triangle$-ből $\delta = 90° - \beta = \underline{\underline{63°}}$; $ACB\sphericalangle = 90° \Rightarrow \varepsilon = 90° - \delta = \underline{\underline{27°}}$.

105. Hegyesszögű, tompaszögű, valamint olyan derékszögű háromszög esetén, aminek a vagy b az átfogója, a vizsgált szögek merőleges szárú hegyesszögek, tehát egyenlők. Abban az esetben, ha a és b a derékszögű háromszög befogói: $\sphericalangle(a; m_b) = \sphericalangle(b; m_a) = 0°$.

106. **1. eset:** A háromszög befogói különbözők, így feltehető, hogy
$\beta > \alpha \Rightarrow C_1 \in BP$;
$BC_1C\triangle$-ből $BCC_1\sphericalangle = 90° - \beta$. A szögfelezés miatt $BCP\sphericalangle = 45°$.
$C_1CP\sphericalangle = 45° - (90° - \beta) = \underline{\underline{\beta - 45°}}$.

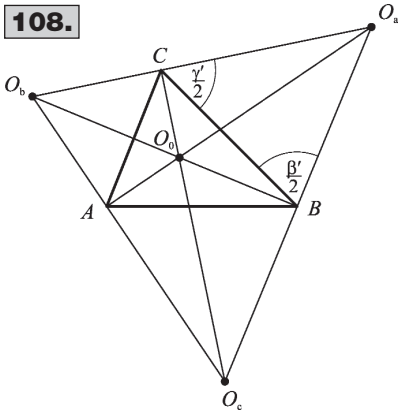
2. eset: A háromszög egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow \alpha = \beta = 45° \Rightarrow$
$\Rightarrow P \equiv C_1 \Rightarrow C_1CP\sphericalangle = 0°$, amire teljesül, hogy 45°-kal kisebb, mint a 45°-os hegyesszögek.

106.

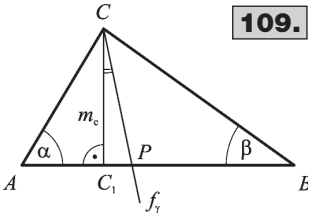


I

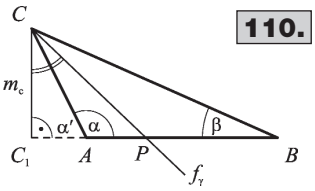
108.



109.



110.



107. Legyen α a külső szögfelezők metszéspontja, ε pedig az $AQB\triangle$ Q-nál lévő belső szöge. $AQB\triangle$-ben $\varepsilon = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\beta}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}}} < 90°$ a külső szögfelezők hajlásszöge.

108. $BCO_a\triangle$-ben $BCO_a\sphericalangle = \frac{\gamma'}{2}$ a 108. ábra jelölései szerint.

$\underline{\underline{CBO_a\sphericalangle}} = \frac{\beta'}{2} \Rightarrow CO_aB\sphericalangle = 180° - \frac{\gamma'}{2} - \frac{\beta'}{2} = 180° - \frac{360° - \alpha'}{2} = \frac{\alpha'}{2} = \underline{\underline{90° - \frac{\alpha}{2}}}$.

Hasonlóan belátható, hogy $\underline{\underline{CO_bA\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}}}$ és $\underline{\underline{AO_cB\sphericalangle = 90° - \frac{\gamma}{2}}}$.

109. Legyen a 109. ábra jelölései szerint $\alpha = 67°$; $\beta = 33° \Rightarrow \gamma = 80°$; $\alpha > \beta$ miatt $C_1 \in AP$.

$C_1CP\sphericalangle = \frac{\gamma}{2} - (90° - \alpha) = \underline{\underline{17°}}$.

110. 1. eset: $0° < \beta < \alpha < 90°$. A 109. ábra jelöléseit használva: $\beta < \alpha \Rightarrow C_1 \in AP \Rightarrow C_1CP\sphericalangle =$

$= \frac{\gamma}{2} - (90° - \alpha) = \frac{180° - \alpha - \beta}{2} - (90° - \alpha) = \underline{\underline{\frac{\alpha - \beta}{2}}}$.

2. eset: $\alpha = 90°$. $A \equiv C_1$; $C_1CP\sphericalangle = \frac{90° - \beta}{2} = \underline{\underline{\frac{\alpha - \beta}{2}}}$.

3. eset: $\alpha > 90°$ (110. ábra). $C_1CP\sphericalangle = \frac{\gamma}{2} + 90° - \alpha' = \frac{180° - \alpha - \beta}{2} + \alpha - 90° = \underline{\underline{\frac{\alpha - \beta}{2}}}$.

111. Legyen az α szögfelezőjének metszéspontja a BC oldallal P! $APB\sphericalangle$ külső szög az $APC\triangle$-ben $\Rightarrow APB\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \gamma$; $APC\sphericalangle$ külső szög az $APB\triangle$-ben $\Rightarrow APC\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \beta$;

$\left|APB\sphericalangle - APC\sphericalangle\right| = \left|\frac{\alpha}{2} + \gamma - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\right| = \underline{\underline{|\gamma - \beta|}}$.

112. Az ABC egyenlő szárú háromszög γ szárszögének felezője merőlegesen felezi az AB alapot F-ben. Ez azt jelenti, hogy a szárszög az $AFC\sphericalangle = 90°$-kal egyenlő. $\underline{\underline{\gamma = 90°}}$;

$\alpha = \beta = \frac{180° - 90°}{2} = \underline{\underline{45°}}$.

113. Legyen az α szögfelezőjének metszéspontja a BC szárral P! Az $ABC\triangle$ belső szögeinek összegéből: $\alpha = \frac{180° - 36°}{2} = 72° \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 36° \Rightarrow APB\sphericalangle = ABP\sphericalangle = 72° \Rightarrow ABP\triangle$ egyenlő szárú. $ACP\sphericalangle = \gamma = 36° = \frac{\alpha}{2} = CAP\sphericalangle \Rightarrow APC\triangle$ egyenlő szárú.

114. Legyen az α szögfelezőjének metszéspontja a BC szárral P! $AP = AB \Rightarrow APB\sphericalangle = ABP\sphericalangle = \alpha$. Az $APB\triangle$ belső szögeinek összege: $\alpha + \frac{\alpha}{2} + \alpha = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 72°}} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 36°}}$. A háromszög szögei: 72°; 72°; 36°.

115. A színessel húzott szakaszok és az α szögszárai által határolt egyenlő szárú háromszögekre többször alkalmazva a háromszög külső és belső szögeire vonatkozó összefüggéseket: $\underline{\underline{\beta = 75°}}$.

116. *a)* A töröttvonal egyes szakaszai az adott szög száraival rendre 15°-kal nagyobb szögeket zárnak be. 15°; 30°; 45°; 60°; 75° az egymást követő szögek nagysága. Ezeket követné a 90°, ami lezárja a sort, mert a következő háromszögnek már nem lehet 2 db 90°-os szöge.

b) n szakasz esetén $\beta = (n-1)\cdot\alpha$. 10 egyenlő szakasz fér el, ha $90° > 9\alpha \Rightarrow \underline{\underline{10° > \alpha}}$. 10°-nál kisebbnek kell választani α-t.

c) $(n+1)$ szakasz esetén $\beta = n\cdot\alpha$. $(n+1)$ egyenlő szakasz fér el, ha $90° > n\cdot\alpha \Rightarrow \underline{\underline{\frac{90°}{n} > \alpha}}$.

117. $ADC\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow ACD\sphericalangle = ADC\sphericalangle = 67{,}5°$. $CEB\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow CEB\sphericalangle = ECB\sphericalangle = 67{,}5°$. $ADC\sphericalangle = 67{,}5° = CEB\sphericalangle \Rightarrow EDC\triangle$ egyenlő szárú, alapon fekvő szögei 67,5°-osak. Szárszöge $ECD\sphericalangle = 180° - 2\cdot 67{,}5° = \underline{\underline{45°}}$.

118. $ABD\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow ABC\sphericalangle = ADB\sphericalangle = \underline{\underline{\frac{180° - \alpha}{2}}}$. $CEB\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow CBE\sphericalangle = CEB\sphericalangle = \underline{\underline{\frac{180° - \gamma}{2}}}$. $DEB\triangle$-ben a belső szögek összege: $DBE\sphericalangle + \frac{180° - \alpha}{2} + \frac{180° - \gamma}{2} = 180° \Rightarrow DBE\sphericalangle = \underline{\underline{\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}}}$.

119. *a)* **1. eset:** $AB = AC$. Egyenlő szárú háromszögben a szárszög belső szögfelezője merőleges az alapra, külső szögfelezője pedig párhuzamos vele. Így nem jöhet létre az E pont, és az $AD = AE$ állítás sem teljesülhet.

2. eset: $AB > AC$. $AB > AC \Rightarrow B, D, C, E$ a pontok sorrendje. $AD = AE$ és AD merőleges AE miatt az $ADE\triangle$ egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow ADE\sphericalangle = 45°$. $ADE\sphericalangle$ külső szöge az $ABD\triangle$-nek $\Rightarrow \underline{\underline{\frac{\alpha}{2} + \beta = 45°}} \Rightarrow \underline{\gamma} = 180° - \alpha - \beta = 180° - (90° - 2\beta) - \beta = \underline{\underline{90° + \beta}}$.

3. eset: $AB < AC$. $AB < AC \Rightarrow E, B, D, C$ a pontok sorrendje. $AD = AE$ és AD merőleges AE miatt az $ADE\triangle$ egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow ADE\sphericalangle = 45°$. $ADE\sphericalangle$ külső szöge az $ACD\triangle$-nek $\Rightarrow \underline{\underline{\frac{\alpha}{2} + \gamma = 45°}} \Rightarrow \underline{\beta} = 180° - \alpha - \gamma = 180° - (90° - 2\gamma) - \gamma = \underline{\underline{90° + \gamma}}$.

b) $\gamma = 34°$ esetén a $\gamma = 90° + \beta$ egyenlőség nem teljesülhet, így $AB < AC$ összefüggés áll fenn az oldalak között $\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 22°}}$; $\underline{\underline{\beta = 124°}}$.

I

120. $AB = AC \Rightarrow ABC\sphericalangle = ACB\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}$. $AD = AC$ és α a $DAC\triangle$ külső szöge $\Rightarrow$ $\Rightarrow ADC\sphericalangle = ACD\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$. $\underline{\underline{BCD\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 90°}}$.

121. $AB + AC > BC \Rightarrow B,\ F,\ E,\ C$ a pontok sorrendje. $AB = BE \Rightarrow BEA\sphericalangle = BAE\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}$. $AC = CF \Rightarrow FAC\sphericalangle = AFC\sphericalangle = 90° - \frac{\gamma}{2}$. $ECA\triangle$ E-nél fekvő külső szöge $FEA\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}$. A külső szög tétel miatt $FEA\sphericalangle = ECA\sphericalangle + EAC\sphericalangle \Rightarrow 90° - \frac{\beta}{2} = \gamma + EAC\sphericalangle \Rightarrow$ $\Rightarrow EAC\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2} - \gamma \Rightarrow FAE\sphericalangle = FAC\sphericalangle - EAC\sphericalangle = 90° - \frac{\gamma}{2} - \left(90° - \frac{\beta}{2} - \gamma\right) =$ $= \underline{\underline{\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}}$.

122. Legyen a szögfelező metszéspontja AB-vel P; az A-ból húzott párhuzamos metszéspontja a BC egyenessel pedig Q! $PC \parallel AQ \Rightarrow BCP\sphericalangle = BQA\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$, mert egyállású szögek. $PC \parallel AQ \Rightarrow$ $\Rightarrow PCA\sphericalangle = CAQ\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$, mert váltószögek. Az állításokból $\Rightarrow$ $CAQ\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow CA = CQ$.

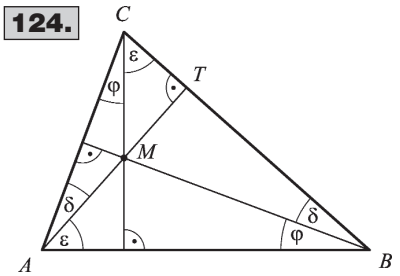
123. Legyen a szögfelező metszéspontja AB-vel Q. A $PAC\triangle$ egyenlő szárú, külső szöge $\gamma \Rightarrow$ $\Rightarrow PAC\sphericalangle = APC\sphericalangle = \delta = \frac{\gamma}{2}$. A szögfelezés miatt $BCQ\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$. Mivel Q és A a PB egyenes által határolt ugyanazon félsíkban találhatók, $APC\sphericalangle = QCB\sphericalangle$ egyállású szögek $\Rightarrow AP \parallel QC$.

124. Az $ABC\triangle$ belső szögeinek összege: $2\delta + 2\varphi + 2\varepsilon = 180° \Rightarrow \delta + \varphi + \varepsilon = 90°$. Az $ABT\triangle$ belső szögeinek összege: $\delta + \varphi + \varepsilon + ATB\sphericalangle = 180° \Rightarrow ATB\sphericalangle = 90° \Rightarrow AT \perp CB \Rightarrow AT$ magasságvonal az $ABC\triangle$-ben. Hasonlóan belátható az állítás a többi szakaszra is.

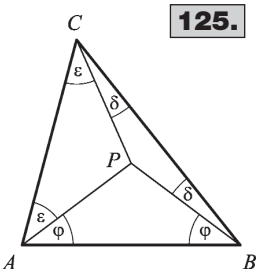
125. $AP = PB \Rightarrow APB\sphericalangle = 180° - 2\varphi$. $BP = PC \Rightarrow BPC\sphericalangle = 180° - 2\delta$. $CP = PA \Rightarrow CPA\sphericalangle = 180° - 2\varepsilon$. Az $ABC\triangle$ belső szögeinek összege: $2\varphi + 2\delta + 2\varepsilon = 180°$. Felhasználva az $\alpha = \varepsilon + \varphi$ egyenlőséget $2\delta = 180° - 2\alpha$ adódik. $BPC\sphericalangle = 180° - (180° - 2\alpha) = \underline{\underline{2\alpha}}$. Hasonlóan belátható, hogy $APB\sphericalangle = \underline{\underline{2\gamma}}$ és $CPA\sphericalangle = \underline{\underline{2\beta}}$.

126. Legyen F az AB oldal felezéspontja és $AB = 2CF$! $BCF\triangle$ és $ACF\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow$ $\Rightarrow CAF\sphericalangle = ACF\sphericalangle = \delta$ és $FCB\sphericalangle = CBF\sphericalangle = \varepsilon$. Az $ABC\triangle$ belső szögeinek összege: $2\delta + 2\varepsilon = 180° \Rightarrow \delta + \varepsilon = 90° \Rightarrow \underline{\underline{ACB\sphericalangle = 90°}}$.

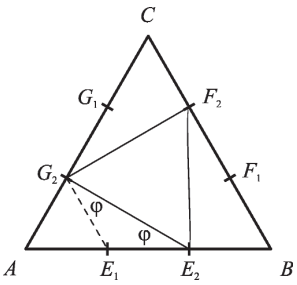
124.



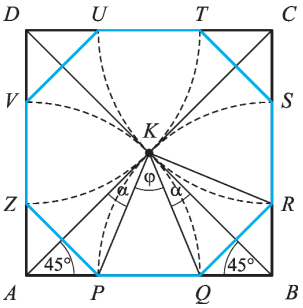
125.



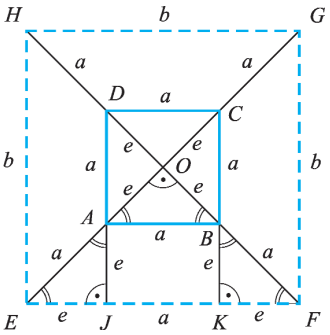
128.



129.



130.



127. Legyen az $ABC\triangle$ alapja AB, a meghosszabbítással nyert pont C^*! A háromszög egyenlő szárú $\Rightarrow CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle = \alpha$; $CB = CC^* \Rightarrow CC^*B\sphericalangle = CBC^*\sphericalangle = \varepsilon$. $ABC^*\triangle$-ben $\alpha + (\alpha + \varepsilon) + \varepsilon = 180° \Rightarrow \alpha + \varepsilon = 90° \Rightarrow ABC^*\sphericalangle = 90°$.

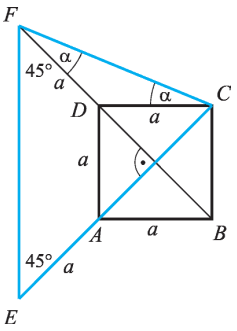
128. A harmadszakaszok egyenlősége miatt $G_2A = AE_1$; $ABC\triangle$ szabályos $\Rightarrow G_2AE_1\sphericalangle = 60°$. A két megállapításból következik, hogy az $AE_1G_2\triangle$ szabályos $\Rightarrow G_2E_1 = E_1A = E_1E_2 \Rightarrow GE_1E_2\triangle$ egyenlő szárú, szárszögének külső szöge $60° \Rightarrow \varphi = 30° \Rightarrow AG_2E_2\sphericalangle = 60° + 30° = 90°$. Az állítás a többi szögre is hasonlóan belátható.

129. KQ a 45°-os középponti szögű $AC : 2$ sugarú AQK körcikk húrja. KP a 45°-os középponti szögű $BD : 2 = AC : 2$ sugarú körcikk húrja. $\Rightarrow KP = KQ$ (1). Hasonlóan: $KP = KR = KS = \ldots = KZ$. $AKQ\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow \alpha + 45° = \alpha + \varphi \Rightarrow \varphi = 45°$ (2); $AKB\sphericalangle = 90° \Rightarrow \alpha = 45° : 2$ és $QKR\sphericalangle = 2 \cdot \alpha = 45°$ (3). Az (1), (2) és (3) állításokból következik, hogy a $PQR\ldots Z$ nyolcszög szabályos, mert K középpontú 45°-os forgásszimmetriája van.

130. A meghosszabbítással egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszögek keletkeznek: $ABO\triangle \cong FBK\triangle \cong EAJ\triangle \Rightarrow$ $\Rightarrow EF = EJ + JK + KF = \underline{\underline{a + 2e}}$ a keletkezett négyzet oldala.

131. $FD = DC = a \Rightarrow FDC\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow DFC\sphericalangle = FCD\sphericalangle = \alpha$; $EFC\triangle$-ben $EFC\sphericalangle = 45° + \alpha$; $FCE\sphericalangle = 45° + \alpha \Rightarrow EFC\sphericalangle = FCE\sphericalangle \Rightarrow ECF\triangle$ egyenlő szárú.

131.



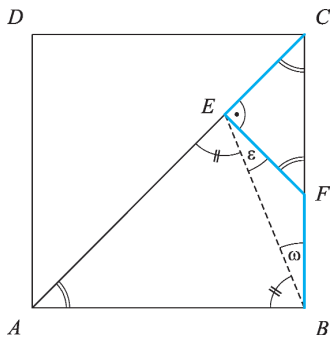
132. Az $ABC\triangle$ egyenlő szárú derékszögű:

$CAB\sphericalangle = ECF\sphericalangle = 45° \Rightarrow EFC\sphericalangle = 45° \Rightarrow \underline{\underline{CE = EF}}$;

$AB = AE \Rightarrow ABE\sphericalangle = AEB\sphericalangle = 67{,}5° \Rightarrow$

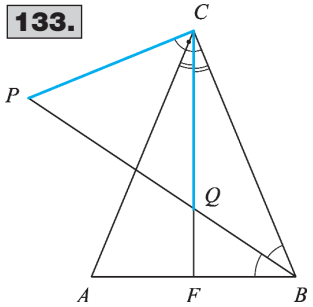
$\Rightarrow \varepsilon = \omega = 90° - 67{,}5° = 22{,}5° \Rightarrow \underline{\underline{EF = FB}}$.

132.

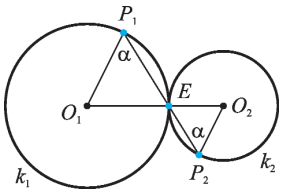


I

133.



134.



133. $PCB\triangle$ derékszögű és $PBC\sphericalangle = \frac{\beta}{2} \Rightarrow CPB\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}$. $ABC\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow CF$ merőlegesen felezi AB-t $\Rightarrow FBQ\triangle$ derékszögű $\Rightarrow FQB\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}$. $PQC\sphericalangle$ és $FQB\sphericalangle$ csúcsszögek $\Rightarrow PQC\sphericalangle = FQB\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}$. Az állításokból $CPQ\sphericalangle = PQC\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2} \Rightarrow CPQ\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow \underline{\underline{CP = CQ}}$.

134. $O_1P_1P_2\sphericalangle = O_2P_2P_1\sphericalangle = \alpha$, mert váltószögek. $O_1P_1E\sphericalangle = O_1EP_1\sphericalangle = \alpha$, mert $O_1P_1E\triangle$ egyenlő szárú. $O_2P_2E\sphericalangle = O_2EP_2\sphericalangle = \alpha$, mert $O_2P_2E\triangle$ egyenlő szárú. $O_1EP_1\sphericalangle = O_2EP_2\sphericalangle = \alpha$.
O_1, E, O_2 egy egyenesen van és P_1, P_2 az O_1O_2 egyenes által határolt más-más félsíkban van $\Rightarrow$ $\Rightarrow O_1EP_1\sphericalangle$ és $O_2EP_2\sphericalangle$ csúcsszögek $\Rightarrow$ másik száruk is egy egyenesen van $\Rightarrow P_1$, E, P_2 egy egyenesen vannak.

135. $XAC\triangle$ egyenlő szárú, külső szöge $CAB\sphericalangle = \alpha \Rightarrow CXA\sphericalangle = XCA\sphericalangle = \underline{\underline{\frac{\alpha}{2}}}$. $YBC\triangle$ egyenlő szárú, külső szöge $ABC\sphericalangle = \beta \Rightarrow BYC\sphericalangle = YCB\sphericalangle = \underline{\underline{\frac{\beta}{2}}}$. $XCY\sphericalangle = XCA\sphericalangle + ACB\sphericalangle + BCY\sphericalangle =$
$= \frac{\alpha}{2} + \gamma + \frac{\beta}{2} = \gamma + \frac{180° - \gamma}{2} = \underline{\underline{90° + \frac{\gamma}{2}}}$.

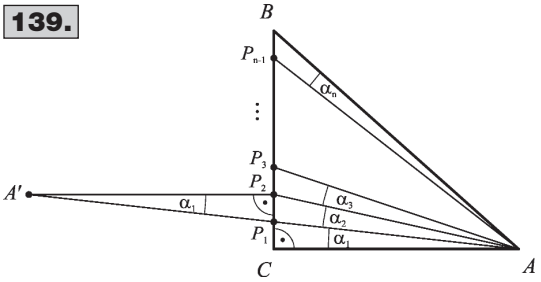
136. $DOA\sphericalangle = OAB\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$, mert váltószögek $\Rightarrow DOA\triangle$ egyenlő szárú, mert két szöge $\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{DA = DO}$. $EOB\sphericalangle = OBA\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$, mert váltószögek $\Rightarrow EBO\triangle$ egyenlő szárú, mert két szöge $\frac{\beta}{2} \Rightarrow \underline{EB = EO}$. Az aláhúzott állításokból $\Rightarrow DE = DO + OE = DA + EB$.

Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között

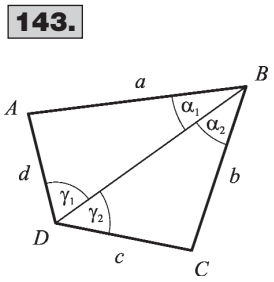
137. Legyen T a P külső pontból az e egyenesre állított merőleges talppontja! Legyen $Q \neq T$ az „e” egyenes tetszőleges pontja! A PQT derékszögű háromszögben PQ átfogó, PT befogó. Mivel a legnagyobb szöggel szemben van a legnagyobb oldal, így $PQ > PT$. Tehát a lehetséges összekötő szakaszok közül PT a legrövidebb.

138. Az $ABC\triangle$ C derékszögű csúcsának vetülete az átfogóra T. ATC derékszögű háromszögben AC átfogó nagyobb, mint AT befogó: $\underline{\underline{AC > AT}}$. BTC derékszögű háromszögben BC átfogó nagyobb, mint BT befogó: $\underline{\underline{BC > BT}}$.

139.



143.



139. Tükrözzük az $ACP_2\triangle$-et a CP_2 oldal P_1 felezéspontjára! A képe A', C képe P_2, P_2 képe C, $CAP_1\sphericalangle$ képe $P_1A'P_2\sphericalangle = \alpha_1$, $CA = b$ képe $P_2A' = b$. P_2A átfogó az $ACP_2\triangle$-ben, ezért $P_2A > b$. Az $A'AP_2\triangle$-ben $A'P_2 = b < P_2A$, ezért a vele szemben levő α_2 szög is kisebb, mint a P_2A-val szemközti α_1 szög $\Rightarrow \alpha_2 < \alpha_1$. Ezt a gondolatmenetet a további szögekre is folytathatjuk, hiszen a kérdéses háromszögben a derékszög helyett tompaszöget találunk a legnagyobb szög helyén.

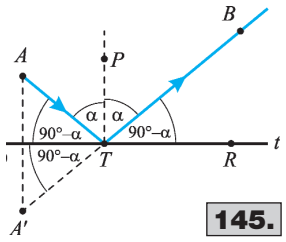
140. Legyen $AP \leq PB$, ahol P az AB alap tetszőleges pontja! $\Rightarrow APC\sphericalangle \geq \text{⦜} \Rightarrow APC\triangle$-ben az $APC\sphericalangle$ a legnagyobb, így a vele szemben levő AC oldal a háromszög leghosszabb oldala: $AC > CP$.

141. Legyen P az AB oldal tetszőleges pontja! **1. eset:** CP merőleges AB-re $\Rightarrow CP$ befogó az APC, illetve BPC derékszögű háromszögekben. AC és BC átfogók a fenti háromszögekben $\Rightarrow$ $\Rightarrow AC >$ CP és $BC > CP$. **2. eset:** CP nem merőleges AB-re $\Rightarrow CPA\sphericalangle$ és $CPB\sphericalangle$ közül az egyik tompaszög $\Rightarrow$ a megfelelő részháromszögben vele szemben CP-nél nagyobb oldal lesz.

142. Legyen $\gamma_1 > \gamma_2$! Vegyünk fel $A_2B_2C_2\triangle$-gel egybevágó háromszöget úgy, hogy $A_1C_1 \equiv A_2C_2$ legyen. $\Rightarrow A_1C_1B^*\triangle$; $\gamma_2 < \gamma_1$ miatt C_1B^* a γ_1 szög belső tartományában halad. $C_1B^*B_1\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow C_1B^*B_1\sphericalangle = C_1B_1B^*\sphericalangle = \delta$; $A_1B^*B_1\triangle$-ben $A_1B_1B^*\sphericalangle < \delta$, $A_1B^*B_1\sphericalangle > \delta \Rightarrow A_1B^*B_1\sphericalangle$-gel szemben nagyobb oldal van, mint $A_1B_1B^*\sphericalangle$-gel szemben $\Rightarrow c_1 > c_2$.

143. $ABD\triangle$-ben $a > d \Rightarrow \gamma_1 > \alpha_1$; $CBD\triangle$-ben $b > c \Rightarrow \gamma_2 > \alpha_2$. $\gamma_1 + \gamma_2 > \alpha_1 + \alpha_2 \Rightarrow ADC\sphericalangle > ABC\sphericalangle$.

144. Legyen $e(P;\ B) \cap AC = Q$! $APB\sphericalangle$ külső szög az $APQ\triangle$-ben $\Rightarrow APB\sphericalangle = PAQ\sphericalangle + PQA\sphericalangle \Rightarrow APB\sphericalangle > PQA\sphericalangle$. $PQA\sphericalangle$ külső szög a $BQC\triangle$-ben $\Rightarrow PQA\sphericalangle = QCB\sphericalangle + CBQ\sphericalangle \Rightarrow PQA\sphericalangle > QCB\sphericalangle$. Az állításokból $\Rightarrow APB\sphericalangle > PQA\sphericalangle > QCB\sphericalangle = ACB\sphericalangle$.

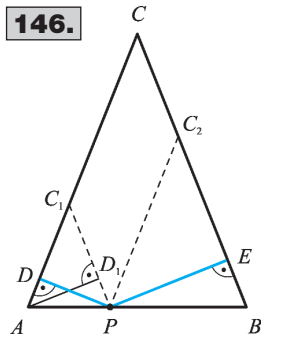


145.

145. A tükrözés törvénye szerint a beesési szög egyenlő a visszaverődési szöggel: $ATP\sphericalangle = BTP\sphericalangle = \alpha$. Tükrözzük az A pontot a t egyenesre! $A'B$ egyenese kijelöli a t egyenesnek azt a pontját, ami felé irányítani kell a fénysugarat. $ATQ\sphericalangle = A'TQ\sphericalangle = 90° - \alpha$ a tükrözés miatt. $A'TQ\sphericalangle = BTR\sphericalangle = 90° - \alpha$, mert csúcsszögek $\Rightarrow$ $\Rightarrow BT$ valóban a visszavert fénysugár.

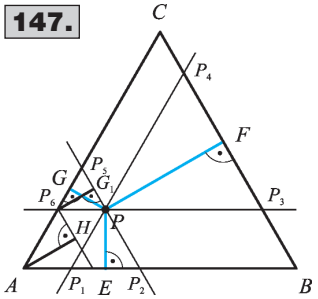
146. Húzzunk párhuzamost az alap P pontjából a háromszög száraival! $\Rightarrow C_1$, C_2. $APC_1\triangle$ és $BPC_2\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow PD$ az $APC_1\triangle$ egyik szárához tartozó magassága, ami egyenlő a másik szárhoz tartozó magassággal $\Rightarrow PD = AD_1$. PE a $PC_2B\triangle$ szárhoz tartozó magassága $\Rightarrow PD + PE = AD_1 + PE$, ami az $ABC\triangle$ BC-hez tartozó magasságával egyenlő, és ez P-től függetlenül állandó.

146.



I

147.



147. Húzzunk párhuzamost a P ponton át a háromszög oldalaival! $\Rightarrow P_1$, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 pontok; $d(P; CB) = PF$. $P_6PP_5\triangle$ szabályos $\Rightarrow d(P_6; P_2P_5) = P_6G_1 = PG$. $P_1P_2P\triangle$ egybevágó az AP_6 oldalú szabályos háromszöggel $\Rightarrow AH = PE$. $d(A; BC) = PE + PG + PF$, ami az egyenlő oldalú háromszög magassága.

148. *a)* $10 + 12 > 13 \Rightarrow$ Teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek $\Rightarrow$ létezik ilyen háromszög. *b)* $1 + 2 = 3$ miatt nem teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek $\Rightarrow$ nem létezik ilyen háromszög. *c)* $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} > \frac{3}{4}$; Teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek $\Rightarrow$ létezik ilyen háromszög. *d)* $1911 + 1918 = 3829 > 3826$; Teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek $\Rightarrow$ létezik ilyen háromszög.

149. A háromszög-egyenlőtlenségek: $0{,}7 + 1{,}8 > c \Rightarrow 2{,}5 > c$; $0{,}7 + c > 1{,}8 \Rightarrow c > 1{,}1$;
A két feltételnek csak a 2 tesz eleget az egész számok közül $\Rightarrow \underline{\underline{c = 2\,\text{m}}}$.

150. **1. eset:** A háromszög alapja 3 cm, szárai 6 cm hosszúak. **2. eset:** A háromszög alapja 6 cm, szárai 3 cm hosszúak lennének, de ilyen háromszög nem létezik, mert $3 + 3 = 6$ miatt nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

151. **1. eset:** $a + \frac{b}{2} = 15\,\text{cm}$; $b + \frac{b}{2} = 6\,\text{cm} \Rightarrow b = 4\,\text{cm}$, $a = 13\,\text{cm}$.
Ilyen háromszög nem létezik, mert $4 + 4 < 13$ miatt nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.
2. eset: $a + \frac{b}{2} = 6\,\text{cm}$; $b + \frac{b}{2} = 15\,\text{cm} \Rightarrow b = 10\,\text{cm}$, $a = 1\,\text{cm}$;
$10 + 1 > 10$; $10 + 10 > 1$; $1 + 10 > 10$. Ilyen háromszög létezik, alapja $\underline{1\,\text{cm}}$, szárai $\underline{10\,\text{cm}}$ hosszúak.

152. A feltételek szerint $b \le a$ és $c \le a \Rightarrow b + c \le 2a \Rightarrow$ nem teljesülhet a háromszög-egyenlőtlenség a b, c, $2a$ oldalú háromszögre, tehát ilyen háromszög nem létezik.

153. A háromszög-egyenlőtlenségből kiindulva: $a + b > c \Rightarrow a + b + c > 2c \Rightarrow \frac{a+b+c}{2} > c \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\underline{s > c}}$. Hasonlóan belátható, hogy $\underline{\underline{s > a}}$ és $\underline{\underline{s > b}}$.

154. Legyen a belső pont P és $AC \cap e(P; B) = Q$! $QCB\triangle$-re alkalmazzuk a 141. feladat állítását $\Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{CP < CB}$. $ABP\triangle$-re a háromszög-egyenlőtlenség: $\underline{AP + PB > AB}$. Az aláhúzott állításokból:
$AP + PB > AB = CB > CP \Rightarrow AP + PB > CP$, és ezt akartuk belátni. Hasonlóan belátható, hogy $AP + PC > PB$ és $BP + PC > AP$.

155. Legyen $AB \cap e(C; P) = X$. Háromszög-egyenlőtlenség a $PXB\triangle$-re: $PB < PX + XB$. Háromszög-egyenlőtlenség az $AXC\triangle$-re: $CX = CP + PX < AX + AC$. Adjuk össze a két egyenlőtlenséget: $PB + CP + PX < PX + XB + AX + AC$; $PB + PC < AX + XB + AC$;
$\underline{\underline{PB + PC < AB + AC}}$.

156. Háromszög-egyenlőtlenségek az $ABC\triangle$ csúcsai és a P belső pont által alkotott rész-háromszögekre: $AP + PB > AB$; $PB + PC > BC$; $PC + AP > AC$. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket: $2 \cdot (AP + PB + PC) > AB + BC + AC \Rightarrow AP + PB + PC > \underline{\underline{\frac{AB + BC + AC}{2} = s}}$, tehát a belső pont csúcsoktól mért távolságösszege nagyobb a fél kerületnél. Alkalmazzuk a 155. feladat állítását az $ABC\triangle$ P belső pontjára: $PA + PB < CA + CB$; $PB + PC < AB + AC$; $PC + PA < BC + BA$. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket: $2 \cdot (PA + PB + PC) < 2 \cdot (AB + BC + AC) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{PA + PB + PC < AB + BC + AC}$, tehát a belső pont csúcsoktól mért távolságösszege kisebb a kerületnél.

157. **1. eset:** Derékszögű háromszög olyan magassággal, ahol a T magasságtalppont azonos az A derékszögű csúccsal. Az egyik befogóhoz tartozó magasság $m_c = b$. Ebben a háromszögben m_c befogó, a átfogó, ezért $m_c < a$. Adjuk össze az összefüggéseket! $2m_c < a + b \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\underline{m_c < \frac{a+b}{2}}}$.

2. eset: Hegyesszögű háromszög, tompaszögű háromszög és olyan derékszögű háromszög, amelynél a magasságtalppont nem azonos a derékszögű csúccsal. Legyen T a C csúcsból induló magasság talppontja! $BTC\triangle$-ben m_c befogó, a átfogó $\Rightarrow m_c < a$; $ATC\triangle$-ben m_c befogó, b átfogó $\Rightarrow m_c < b$. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket! $2m_c < a + b \Rightarrow \underline{\underline{m_c < \frac{a+b}{2}}}$.

158. A 157. feladat állítása szerint: $m_a < \frac{b+c}{2}$; $m_b < \frac{a+c}{2}$; $m_c < \frac{a+b}{2}$. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket: $\underline{m_a + m_b + m_c} < \frac{b+c+a+c+a+b}{2} = a + b + c = \underline{\underline{K}}$.

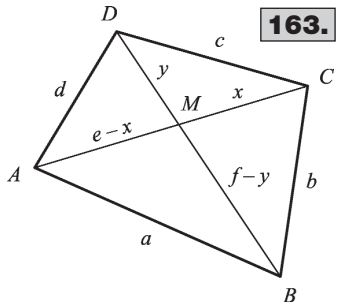
159. Háromszög-egyenlőtlenség az $ABD\triangle$-re: $AB < AD + DB$. Háromszög-egyenlőtlenség a $BDC\triangle$-re: $BC < DC + DB$. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket! $AB + BC < AD + DC + 2DB \Rightarrow$
$\Rightarrow AB + BC < AC + 2BD \Rightarrow \underline{\underline{AB + BC - AC < 2BD}}$.

160. Tükrözzük az $ABC\triangle$-et az AB oldal C_1 felezőpontjára! C képe C' lesz. Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget a $CC'B\triangle$-re: $a + b > 2s_c$. Hasonlóan megmutatható, hogy $b + c > 2s_a$ és $a + c > 2s_b$. Adjuk össze a három egyenlőtlenséget: $2a + 2b + 2c > 2s_c + 2s_a + 2s_b \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\underline{a + b + c > s_c + s_a + s_b}}$.

161. Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget a súlypont és a háromszög két-két csúcsa által meghatározott háromszögekre! $ASB\triangle$-re: $\frac{2}{3}s_a + \frac{2}{3}s_b > c$; $BSC\triangle$-re: $\frac{2}{3}s_b + \frac{2}{3}s_c > a$; $CSA\triangle$-re: $\frac{2}{3}s_c + \frac{2}{3}s_a > b$. Adjuk össze a három egyenlőtlenséget: $\frac{4}{3}s_a + \frac{4}{3}s_b + \frac{4}{3}s_c > a + b + c \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\underline{s_a + s_b + s_c > \frac{3}{4}(a + b + c)}}$.

162. Az állítás helyett elég belátni, hogy $CA_1 + A_1B > CA + AB$. Legyen B tükörképe az AA_1 külső szögfelezőre B^*! A tükrözés miatt $B^*A_1 = A_1B$ és $B^*A = AB$; $\underline{CA_1 + A_1B} = CA_1 + A_1B^* > CB^* = CA + AB^* = \underline{CA + AB}$. Az aláhúzott részekből következik az állítás.

163. Jelöljük az átlók metszéspontjától a csúcsokig terjedő szakaszokat a 163. ábra szerint! Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget az átlók által létrehozott háromszögekre! $ABM\triangle$-re: $e - x + f - y > a$; $CDM\triangle$-re: $x + y > c$. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket!
$e - x + f - y + x + y > a + c \Rightarrow e + f > a + c$. Az állítás a másik szemköztes oldalpárra hasonlóan látható be.



163.

I

164. A 163. ábra jelöléseivel: **1. eset:** Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget az átlók metszéspontja és a csúcsok által létrehozott háromszögekre! $ABM\triangle$-re: $e - x + f - y > a$; $BCM\triangle$-re: $f - y + x > b$; $CDM\triangle$-re: $x + y > c$; $DAM\triangle$-re: $y + e - x > d$. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket: $2e + 2f > a + b + c + d \Rightarrow \underline{\underline{e + f > \frac{1}{2}(a + b + c + d)}}$.

2. eset: Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenségeket az átlók által létrehozott háromszögekre! $ABC\triangle$-re: $a + b > e$; $BCD\triangle$-re: $b + c > f$; $CDA\triangle$-re: $c + d > e$; $DAB\triangle$-re: $d + a > f$. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket: $2a + 2b + 2c + 2d > 2e + 2f \Rightarrow \underline{a + b + c + d > e + f}$.

165. Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az $ABC\triangle$-re: $AC + CB > AB$. Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az $ACD\triangle$-re: $AD + DC > AC$. A kettőt együtt tekintve: $AB < AC + CB < AD + DC + CB$. Konvex négyszögeknél ez a gondolatmenet bármelyik oldalra megismételhető. Konkáv négyszög esetében (a konkáv szög δ) $CD < CA + AD$, a befoglaló háromszögre $CA < AB + BC$, a kettőt együtt tekintve: $\underline{\underline{CD < CA + AD < AB + BC + AD}}$.

166. Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az $ABC\triangle$-re: $\underline{\underline{AC < 6\text{ cm} + 3\text{ cm} = 9\text{ cm}}}$. Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az $ABD\triangle$-re: $\underline{\underline{BD < 6\text{ cm} + 2\text{ cm} = 8\text{ cm} < 9\text{ cm}}}$.

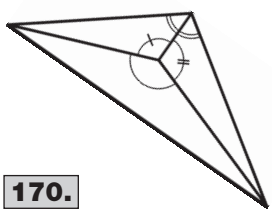
167. Legyen M az átlók metszéspontja és P egy tetszőleges pont az $ABCD$ négyszög síkjában! Háromszög-egyenlőtlenség a $DBP\triangle$-re (egyenlőség $P \in DB$ esetén): $PD + PB \geq DB = DM + MB$. Háromszög-egyenlőtlenség a $ACP\triangle$-re (egyenlőség $P \in AC$ esetén): $PC + PA \geq AC = AM + MC$. Vegyük az egyenlőtlenségek összegét: $PA + PB + PC + PD \geq MD + MB + MA + MC$. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $P \in DB$ és $P \in AC$, azaz $P \equiv AC \cap DB = M$. Tehát az átlók metszéspontjára a legkisebb a csúcsoktól mért távolságok összege.

168. Háromszög-egyenlőtlenség az $A_1A_2 \ldots A_n$ sokszög szomszédos csúcsai és a tetszőleges P pont által meghatározott i-edik háromszögre: $PA_i + PA_{i+1} > A_iA_{i+1}$, ahol $1 \leq i \leq n$ és $A_{n+1} = A_1$. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket! $\sum_{i=1}^{n}(PA_i + PA_{i+1}) > \sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1} \Rightarrow 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} PA_i > K \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} PA_i > s$.

169. **1. eset:** A négy pont konvex négyszöget határoz meg. Három pont kiválasztásakor az összekötő szakaszaik között egy átló és két oldal van. Ha bármely kiválasztáskor csak hegyesszögű háromszöget kapnánk, akkor a négyszögben minden szög hegyesszög lenne, így a belső szögek összege kisebb lenne 360°-nál, ami lehetetlen.
2. eset: A négy pont konkáv négyszöget határoz meg. Ha bármely kiválasztásnál csak hegyesszögű háromszöget kapnánk, akkor a konkáv szög csúcsánál levő két szög összege kisebb lenne 180°-nál, ami lehetetlen.

170. A 170. ábrán jelzett szögek mindegyike tompaszög.

171. AF súlyvonal az $APQ\triangle$-ben. Legyen az A pont F-re vonatkozó tükörképe A'! Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget az $AA'P\triangle$-re: $AP + AQ = AP + PA' > 2AF \Rightarrow \frac{AP + AQ}{2} > AF$. Hasonlóan megmutatható, hogy $\frac{BP + BQ}{2} > BF$. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket! $\underline{\underline{AF + BF < \frac{AP + AQ + BP + BQ}{2} = \frac{(AP + PB) + (AQ + QB)}{2} = \frac{k + k}{2} = k}}$.



170.

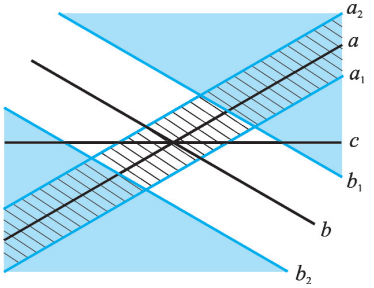
Adott tulajdonságú pontok halmazának meghatározása a síkon

I

Ponthalmazok

172. A keresett ponthalmazt az e egyenestől 3 cm távolságra húzódó párhuzamos egyenespár pontjai alkotják.
173. Az e egyenestől 3 cm-re levő párhuzamos egyenespár egy „sávot” jelöl ki a síkból. E „sáv” pontjai tartoznak a keresett ponthalmazba, a határpontok kivételével.
174. Az e egyenestől 3 cm-re húzódó párhuzamos egyenespár f és g. Az f és g egyenesek által létrehozott, e-t nem tartalmazó félsíkok pontjai tartoznak a ponthalmazba.
175. Az O középpontú, 3 cm sugarú kör és az egyenes közös pontja a megoldás. Nincs megoldás, ha $d(O; e) > 3$ cm; Egy megoldás van, ha $d(O; e) = 3$ cm; Két megoldás van, ha $d(O; e) < 3$ cm.
176. A P pont mint középpont köré rajzolt 3 cm sugarú k kör és az e egyenestől 2 cm-re húzódó f és g párhuzamos egyenespár közös része adja a keresett ponthalmazt. 4; 3; 2; 1 vagy 0 megoldása lehet a feladatnak.
177. A keresett ponthalmazt a P középpontú, 3 cm sugarú k kör és az e egyenestől 2 cm-re húzódó f és g párhuzamosok által meghatározott sáv közös része alkotja. A megoldások száma függ a P pont és az e egyenes helyzetétől.
178. A keresett ponthalmazt a P középpontú, 3 cm sugarú k kör külső pontjainak és az e egyenestől 2 cm-re húzódó f és g párhuzamosok által meghatározott sáv belső pontjainak közös része alkotja. A megoldások száma függ a P pont és az e egyenes helyzetétől.
179. A keresett ponthalmazt az A középpontú, 4 cm sugarú k_A kör és a B középpontú, 2,5 cm sugarú k_B kör közös része alkotja. $4 \text{ cm} + 2{,}5 \text{ cm} < 8 \text{ cm} \Rightarrow k_A \cap k_B = \emptyset \Rightarrow$ nincs olyan pont, ami mindkét feltételnek megfelel.
180. A keresett pontok az A középpontú, 6 cm sugarú kör és a B középpontú, 6 cm sugarú kör közös pontjai. 2; 1 vagy 0 megoldás lehet A és B távolságától függően.
181. A P középpontú, 2 cm sugarú kör és a Q középpontú, 3 cm sugarú kör közös része adja a keresett ponthalmazt. 2; 1 vagy 0 megoldás lehet a P és Q távolságától függően.
182. A P középpontú, 2 cm sugarú körlap és a Q középpontú, 3 cm sugarú körlap közös belső pontjai adják a keresett ponthalmazt.
183. A P középpontú, 2 cm sugarú körlap és a Q középpontú, 3 cm sugarú kör külső pontjai által alkotott ponthalmaz közös része a keresett ponthalmaz.
184. Az e egyenestől 1 cm távolságra húzódó e_1 és e_2 párhuzamos egyenespárnak az f egyenestől 1 cm-re húzódó f_1 és f_2 párhuzamos egyenespárral vett közös része adja a keresett ponthalmazt. Ha e nem párhuzamos f-fel, akkor 4 pont a megoldás. Ha e párhuzamos f-fel és $d(e; f) = 2$ cm, akkor egy egyenes a megoldás. Ha e párhuzamos f-fel és $d(e; f) \neq 2$ cm, akkor nincs megoldás.

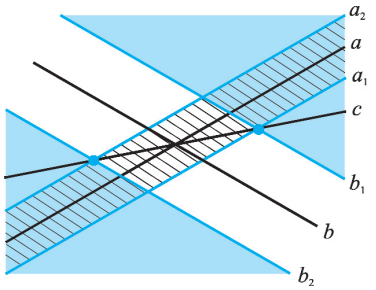
186/I.



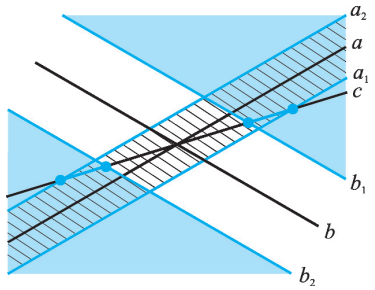
185. A P középpontú, 3 cm belső sugarú, 4 cm külső sugarú körgyűrű belső pontjai és külső határvonala adják a keresett ponthalmazt.
186. A keresett ponthalmazt az ábrák mutatják az egyenesek elhelyezkedésétől függően. Első esetben üres halmazt, második esetben két pontot, harmadik esetben két szakaszt kapunk.
187. Az e egyenestől x távolságra levő e_1 és e_2 párhuzamos egyenespárnak az f egyenestől y távolságra levő f_1 és f_2 párhuzamos egyenespárral vett közös része a keresett ponthalmaz. Ha $e \nparallel f$, akkor 4 pont a megoldás.

I

186/II.



186/III.



Ha $e \parallel f$ és $d(e; f) = x - y$ vagy $d(e; f) = x + y$, akkor egy egyenes a keresett ponthalmaz. Ha $e \parallel f$ és $d(e; f) \neq x - y$, $d(e; f) \neq x + y$, akkor a keresett ponthalmaz üres.

188. A ponthalmaz egy olyan 6 cm oldalú négyzet belső pontjaiból áll, melynek középpontja a merőlegesek metszéspontja, oldalai pedig párhuhamosak a merőleges egyenesekkel.

189. Egyetlen ilyen pont van, a háromszög oldalfelező merőlegeseinek közös pontja.

190. *a)* Egyetlen ilyen pont van, a négyzet középpontja. *b)* A keresett ponthalmazt a 190. ábra mutatja.

191. A keresett ponthalmaz az e és f egyenesekkel párhuzamos k egyenes, amelyre $d(f; k) = d(e; k)$. A k egyenest az e és f egyenesek középpárhuzamosának nevezzük.

192. Az a és c oldalegyenesektől egyenlő távolságra levő pontok halmaza a k_1 középpárhuzamos, a b és d oldalegyenesektől pedig a k_2 középpárhuzamos. $k_1 \cap k_2 = O$, a négyzet középpontja.

193. $g_1, g_2, g_3, g_4 \parallel e \parallel f$, $2 \cdot d(g_1; e) = d(g_1; f) \wedge 2 \cdot d(g_2; f) = d(g_2; e) \wedge 2 \cdot d(g_3; e) = d(g_3; f) \wedge$
$\wedge 2 \cdot d(g_4; f) = d(g_4; e)$

194. A keresett ponthalmaz az e és f egyenesek által meghatározott szögek szögfelezőinek pontjaiból áll.

195. Négy ilyen pont van, a három belső szögfelező, illetve egy belső és két külső szögfelező metszéspontja.

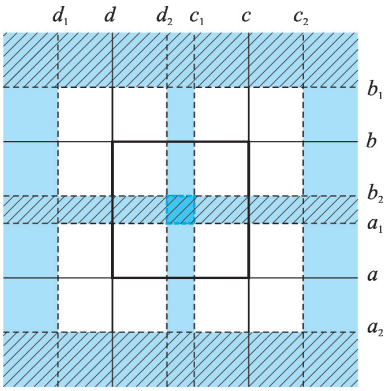
196. **1. eset:** A három egyenesnek három különböző metszéspontja van: A, B és C. Négy ilyen pont van, a megfelelő szögfelezők metszéspontjaként kapjuk meg őket: ① A beírható kör középpontja, O_0; ② A c oldalhoz hozzáírt kör középpontja, O_c; ③ A b oldalhoz hozzáírt kör középpontja, O_b; ④ Az a oldalhoz hozzáírt kör középpontja, O_a.

2. eset: A három egyenesnek egy közös pontja van: M. M az egyetlen pont, ami megfelel a feltételeknek.

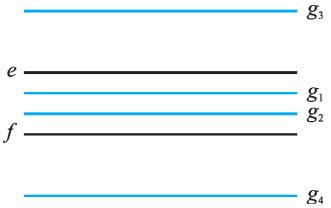
3. eset: Két egyenes párhuzamos, a harmadik metszi őket. Két ilyen pont van: ① Az A-nál keletkezett α szög szögfelezőjének az e és f egyenesek g középpárhuzamosával való metszéspontja, Q; ② Az A-nál keletkező α' szög szögfelezőjének a g egyenessel való metszéspontja, P. Megjegyzés: a B-nél keletkező szögek felezésével is ugyanezekhez a pontokhoz jutottunk volna, mivel a $BQAP$ négyszög téglalap.

4. eset: Mindhárom egyenes párhuzamos. Nincs a feltételnek eleget tevő pont.

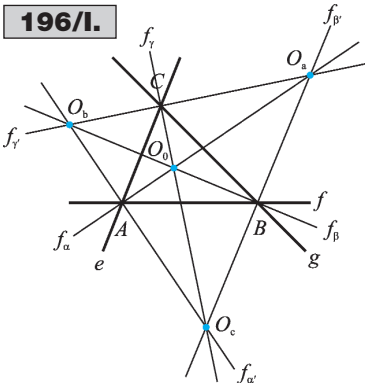
190.



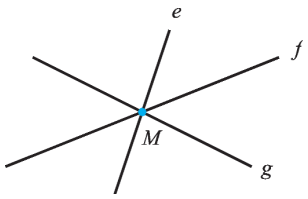
193.



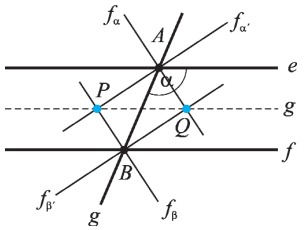
196/I.



196/II.



196/III.



197. A C pontok az AB egyenessel párhuzamosan, tőlük m távolságra levő c_1 és c_2 egyeneseken vannak, és ezen egyenesek minden pontja megfelel a feltételnek.

198. A feltételnek eleget tevő C pontok két olyan r sugarú kört alkotnak, amelyeknek a középpontja A-tól és B-től r távolságra van. A és B pont nem tartozik a keresett ponthalmazhoz, mert ebben az esetben nem jön létre háromszög.

199. f_α és $f_{\alpha'}$ szögfelezők pontjai egyenlő távol vannak AB és AC egyenesétől. f_{AB} szakaszfelező merőleges pontjai egyenlő távol vannak az A és B pontoktól. $f_\alpha \cap f_{AB} = M_1$, $f_{\alpha'} \cap f_{AB} = M_2$. M_1 és M_2 a keresett pontok.

200. A keresett egyenesek a P középpontú, 4 cm sugarú kör e-vel párhuzamos érintői.

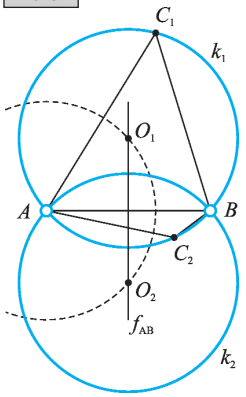
201. Vegyünk fel e tetszőleges pontján át olyan f egyenest, ami e-vel $(+\alpha)$ és olyan g egyenest, ami e-vel $(-\alpha)$ szöget zár be! Szerkesszünk P-n át párhuzamost f-fel és g-vel! $\Rightarrow$ f' és g' a keresett egyenesek.

202. A keresett egyenesek a P középpontú, 4 cm sugarú kör olyan érintői, amelyek az e egyenessel 30°-os szöget zárnak be. Négy ilyen egyenes van.

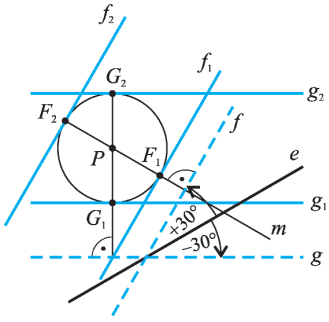
203. A keresett pontok az adott félegyenessel közös kezdőpontú félegyenesen vannak. A két félegyenes 45°-os szöget zár be egymással. Ennek a félegyenesnek minden pontja megfelelő.

204. $OPQ\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow PQO\sphericalangle = PQO\sphericalangle$; $r \parallel q \Rightarrow ROQ\sphericalangle = OQP\sphericalangle$, mert váltószögek. $POQ\sphericalangle = PQO\sphericalangle = ROQ\sphericalangle \Rightarrow OQ$ szögfelező. A szögfelező félegyenes minden pontja rendelkezik a tulajdonsággal.

198.



202.



204.

