MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI
KÖZÉPSZINT

Valószínűségszámítás

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Egy rendezvényen 150 tombolajegyet adtak el. Ági 21-et vásárolt. Mekkora annak a valószínűsége, hogy Ági nyer, ha egy nyereményt sorsolnak ki? (A jegyek nyerési esélye egyenlő.) (2 pont)

Megoldás:

$\frac{21}{150} = 14\% = \mathbf{0{,}14}$ (2 pont)

2) Egy rejtvényújságban egymás mellett két, szinte azonos rajz található, amelyek között 23 apró eltérés van. Ezek megtalálása a feladat.
Először Ádám és Tamás nézték meg figyelmesen az ábrákat: Ádám 11, Tamás 15 eltérést talált, de csak 7 olyan volt, amelyet mindketten észrevettek.

a) Hány olyan eltérés volt, amelyet egyikük sem vett észre? (4 pont)

Közben Enikő is elkezdte számolni az eltéréseket, de ő sem találta meg az összeset. Mindössze 4 olyan volt, amelyet mind a hárman megtaláltak. Egyeztetve kiderült, hogy az Enikő által bejelöltekből hatot Ádám is, kilencet Tamás is észrevett, és örömmel látták, hogy hárman együtt az összes eltérést megtalálták.

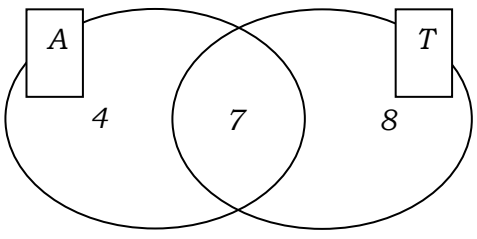
b) A feladat szövege alapján töltse ki az alábbi halmazábrát arról, hogy ki hányat talált meg! (7 pont)

c) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását! Enikő minden eltérést megtalált. (2 pont)

d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy eltérést véletlenszerűen kiválasztva, azt legalább ketten megtalálták? (4 pont)

Megoldás:

a)



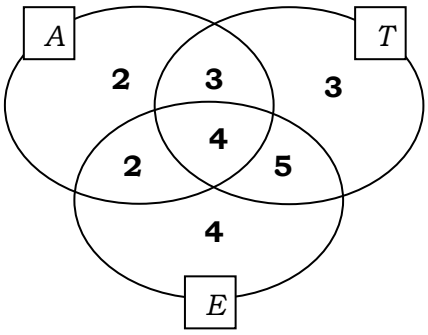
(2 pont)

Legalább az egyikük által észrevett eltérések száma: $4+7+8=19$ (1 pont)

Egyikük sem vett észre $23-19=\mathbf{4}$ eltérést. (1 pont)

(Halmazábra nélkül is felírható a megtalált eltérések száma.)

b)



(7 pont)

c) **Van olyan eltérés, amit Enikő nem talált meg.**
VAGY: **Enikő nem minden eltérést talált meg.**
VAGY: **Enikő nem találta meg az összes eltérést.** (2 pont)

d) A kedvező esetek száma: 14. (1 pont)
Az összes esetek száma: 23. (1 pont)
A keresett valószínűség: $\frac{14}{23} \approx$ **0,61** vagy 61 %. (2 pont)

Összesen: 17 pont

3) Egy középiskolába 700 tanuló jár. Közülük 10% sportol rendszeresen a két iskolai szakosztály közül legalább az egyikben. Az atlétika szakosztályban 36 tanuló sportol rendszeresen, és pontosan 22 olyan diák van, aki az atlétika és a kosárlabda szakosztály munkájában is részt vesz.

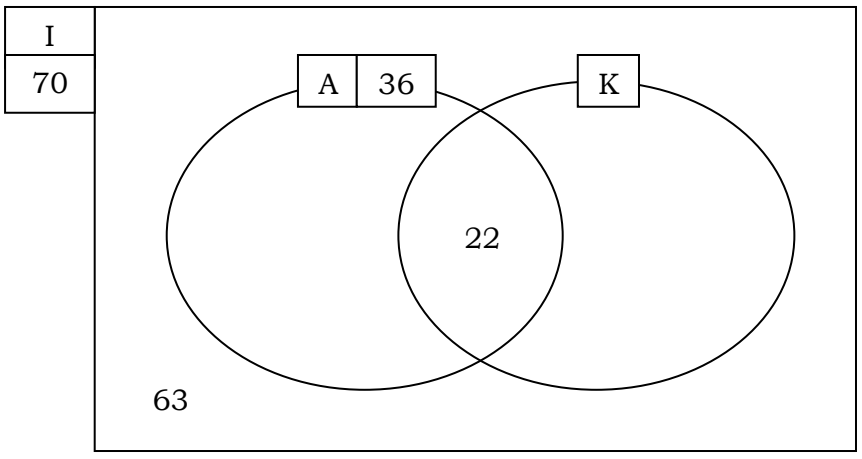
a) Készítsen halmazábrát az iskola tanulóiról a feladat adatainak feltüntetésével! (4 pont)

b) Hányan sportolnak a kosárlabda szakosztályban? (4 pont)

c) Egy másik iskola sportegyesületében 50 kosaras sportol, közülük 17 atletizál is. Ebben az iskolában véletlenszerűen kiválasztunk egy kosarast. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott tanuló atletizál is? (4 pont)

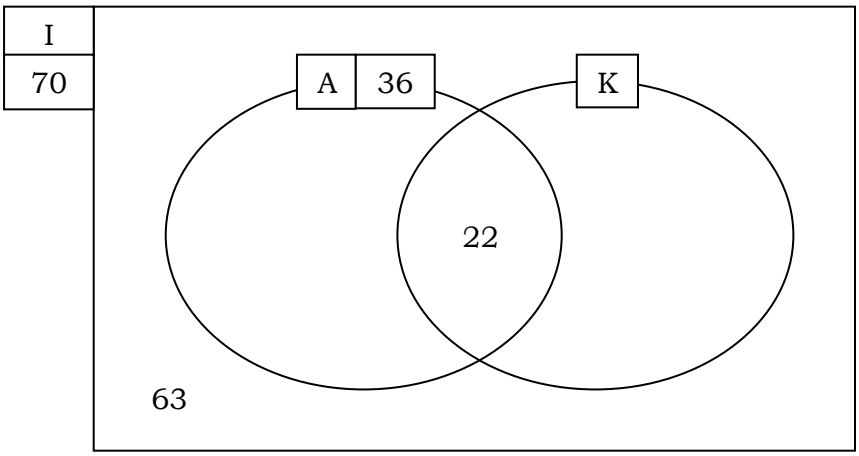
Megoldás:

a)



(4 pont)

b)



36 atlétából 22 kosarazik is, tehát 14-en csak atletizálnak. (1 pont)
70 tanuló sportol összesen, tehát 34 fő csak kosarazik. (2 pont)
$22+34=$ **56 tanuló kosarazik**. (1 pont)

c) A klasszikus modell alkalmazható, 50 kosaras közül választunk. (1 pont)
17 fő atletizál is. (Ezek a kedvező esetek.) (1 pont)
A keresett valószínűség: $\frac{17}{50}=$ **0,34** (2 pont)

Összesen: 12 pont

4) Egy öttagú társaság egymás után lép be egy ajtón. Mekkora a valószínűsége, hogy Anna, a társaság egyik tagja, elsőnek lép be az ajtón? (2 pont)

Megoldás:

5 ember léphet be az ajtón elsőnek (összes eset). Ha Anna lép be elsőnek, az 1 féle képpen lehetséges (kedvező eset).

Anna $\frac{1}{5}$ valószínűséggel lép be elsőnek. (2 pont)

5) Egy szellemi vetélkedő döntőjébe 20 versenyzőt hívnak be. A zsűri az első három helyezettet és két további különdíjast fog rangsorolni. A rangsorolt versenyzők oklevelet és jutalmat kapnak.

a) Az öt rangsorolt versenyző mindegyike ugyanarra a színházi előadásra kap egy-egy jutalomjegyet. Hányféle kimenetele lehet ekkor a versenyen a jutalmazásnak? (4 pont)

b) A dobogósok három különböző értékű könyvutalványt, a különdíjasok egyike egy színházjegyet, a másik egy hangversenyjegyet kap. Hányféle módon alakulhat ekkor a jutalmazás? (4 pont)

c) Ha már eldőlt, kik a rangsorolt versenyzők, hányféle módon oszthatnak ki nekik jutalmul öt különböző verseskötetet? (3 pont)

d) Kis Anna a döntő egyik résztvevője. Ha feltesszük, hogy a résztvevők egyenlő eséllyel versenyeznek, mekkora a valószínűsége, hogy Kis Anna eléri a három, dobogós hely egyikét, illetve hogy az öt rangsorolt személy egyike lesz? (6 pont)

Megoldás:

a) $\binom{20}{5}$-féle (3 pont)

15504 jutalmazási sorrend lehetséges. (1 pont)

b) $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16$, (3 pont)

azaz 1860480 jutalmazási sorrend lehetséges. (1 pont)

c) $\mathbf{5! = 120}$-féle kiosztás lehetséges. (3 pont)

d) Bármelyik helyezés elérésének a versenyen $\frac{1}{20}$ a valószínűsége, (1 pont)

a három, dobogós hely valamelyikének elérése $\frac{3}{20}$ valószínűségű, (2 pont)

mert ezek egymást kizáró események. (1 pont)

Az öt rangsorolt esemény egyikének elérése $\frac{5}{20}\left(=\mathbf{\frac{1}{4}}\right)$ valószínűségű. (2 pont)

Összesen: 17 pont

6) Egy televíziós játékban 5 kérdést tehet fel a játékvezető. A játék során a versenyző, ha az első kérdésre jól válaszol, 40 000 forintot nyer. Minden további kérdés esetén döntenie kell, hogy a játékban addig megszerzett pénzének 50, 75 vagy 100 százalékát teszi-e fel. Ha jól válaszol, feltett pénzének kétszeresét kapja vissza, ha hibázik, abba kell hagynia a játékot, és a fel nem tett pénzét viheti haza.

a) Mennyi pénzt visz haza az a játékos, aki mind az öt feltett kérdésre jól válaszol, s bátran kockáztatva mindig a legnagyobb tétet teszi meg? (4 pont)

b) Az a játékos, aki mindig helyesen válaszol, de óvatos, és a négy utolsó fordulóban pénzének csak 50%-át teszi fel, hány forintot visz haza? (4 pont)

c) A vetélkedő során az egyik versenyző az első négy kérdésre jól válaszolt. A második kérdésnél a pénzének 100 %-át, a 3., 4. és 5. kérdés esetén pénzének 75 %-át tette fel. Az 5. kérdésre sajnos rosszul válaszolt. Hány forintot vihetett haza ez a játékos? (5 pont)

d) Egy versenyző mind az 5 fordulóban jól válaszol, és közben minden fordulóban azonos eséllyel teszi meg a játékban megengedett lehetőségek valamelyikét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az elnyerhető maximális pénzt viheti haza? (4 pont)

Megoldás:

a) Az első nyereménye 40 000 forint, a további négy fordulóban a pénze mindig megduplázódik, így a végén $40000 \cdot 2^4 = \mathbf{640000}$ forint a nyeremény. (4 pont)

b) Az első nyereménye 40 000 forint, a további négy fordulóban a pénze mindig másfélszereződik, így a végén $40000 \cdot 1{,}5^4 = \mathbf{202500}$ forint a nyeremény. (4 pont)

c) Az első nyereménye 40 000 forint, a további négy forduló végére $40000 \cdot 2^1 \cdot 1{,}75^2 \cdot 0{,}25 = \mathbf{61250}$ forint a nyeremény. (5 pont)

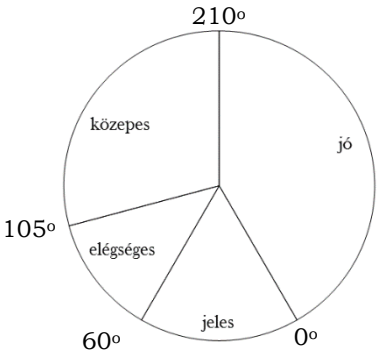
d) Az összes esetek száma a 4 utolsó fordulóban $3^4 = 81$. (2 pont)
A kedvező esetek száma 1. (1 pont)
A keresett valószínűség (a klasszikus modell szerint): $\frac{1}{81} \approx 0,012$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

7) A 12. évfolyam tanulói magyarból próbaérettségit írtak. Minden tanuló egy kódszámot kapott, amely az 1, 2, 3, 4 és 5 számjegyekből mindegyiket pontosan egyszer tartalmazta valamilyen sorrendben.

a) Hány tanuló írta meg a dolgozatot, ha az összes képezhető kódszámot mind kiosztották? (3 pont)

b) Az alábbi kördiagram a dolgozatok eredményét szemlélteti:
Adja meg, hogy hány tanuló érte el a szereplő érdemjegyeket! Válaszát foglalja táblázatba, majd a táblázat adatait szemléltesse oszlop-diagramon is! (6 pont)



c) Az összes megírt dolgozatból véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy jeles vagy jó dolgozatot veszünk a kezünkbe? (3 pont)

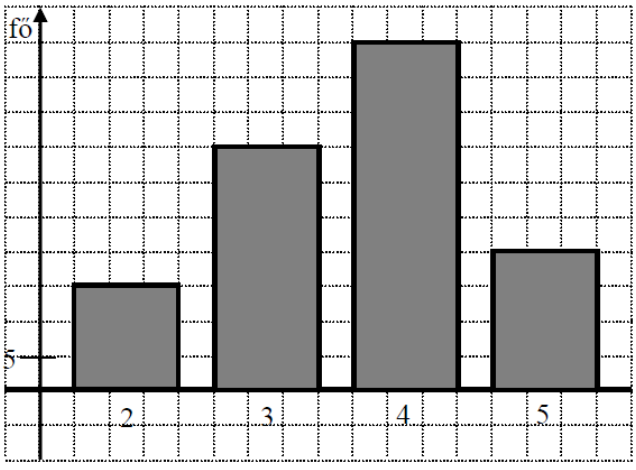
Megoldás:

a) Az összes képezhető kódok száma 5!. (2 pont)
120 tanuló írt dolgozatot. (1 pont)

b)

jegyek	2	3	4	5
fok	45°	105°	150°	60°
fő	**15**	**35**	**50**	**20**

(4 pont)



(2 pont)

c) A 4-es és az 5-ös dolgozatok száma összesen: 70. (1 pont)
A keresett valószínűség: $\frac{70}{120} = \frac{7}{12} \approx 0,583$ (2 pont)

Összesen: 12 pont

8) Egy kétforintos érmét kétszer egymás után feldobunk, és feljegyezzük az eredményt. Háromféle esemény következhet be:
***A* esemény: két fejet dobunk.**
***B* esemény: az egyik dobás fej, a másik írás.**
***C* esemény: két írást dobunk.**
Mekkora a *B* esemény bekövetkezésének valószínűsége? (2 pont)

Megoldás:

B esemény valószínűsége: $\frac{1}{2}$ (2 pont)

9) Egy tanulmányi verseny döntőjében 8 tanuló vett részt. Három feladatot kellett megoldaniuk. Az első feladat maximálisan elérhető pontszáma 40, a másodiké 50, a harmadiké 60. A nyolc versenyző feladatonkénti eredményeit tartalmazza az alábbi táblázat:

Versenyző sorszáma	I.	II.	III.	Összpontszám	Százalékos teljesítmény
1.	28	16	40		
2.	31	35	44		
3.	32	28	56		
4.	40	42	49		
5.	35	48	52		
6.	12	30	28		
7.	29	32	45		
8.	40	48	41		

a) Töltse ki a táblázat hiányzó adatait! A százalékos teljesítményt egészre kerekítve adja meg!
Melyik sorszámú versenyző nyerte meg a versenyt, ki lett a második, és ki a harmadik helyezett? (5 pont)

b) A nyolc versenyző dolgozata közül véletlenszerűen kiveszünk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 75 %-osnál jobb teljesítményű dolgozat került a kezünkbe? (2 pont)

c) Egy tanuló betegség miatt nem tudott megjelenni a döntőn. Másnap megkapta, és megoldotta a feladatokat. Eredményét később összehasonlította a nyolc döntős versenyző eredményével. Észrevette, hogy az első feladatot a versenyzők I. feladatra kapott pontszámainak a mediánjára teljesítette (egészre kerekítve), a második feladatot pedig a nyolc versenyző II. feladata pontszámainak a számtani közepére (szintén egészre kerekítve). A III. feladatot 90 %-ra teljesítette.
Mennyi lett ennek a tanulónak az összpontszáma? Ezzel hányadik helyen végzett volna? (5 pont)

Megoldás:

a)

Versenyző sorszáma	I.	II.	III.	Összpontszám	Százalékos teljesítmény
1.	28	16	40	**84**	**56**
2.	31	35	44	**110**	**73**
3.	32	28	56	**116**	**77**
4.	40	42	49	**131**	**87**
5.	35	48	52	**135**	**90**
6.	12	30	28	**70**	**47**
7.	29	32	45	**106**	**71**
8.	40	48	41	**129**	**86**

(2+2 pont)

1. helyezett: 5. sorszámú versenyző;
2. helyezett: 4. sorszámú versenyző;
3. helyezett: 8. sorszámú versenyző. (1 pont)

b) Mivel a 8 dolgozat között 4 darab dolgozat eredménye volt 75% felett, a keresett valószínűség: $\mathbf{\frac{4}{8} = 0,5\ (50\%)}$. (2 pont)

c) Az I. feladat pontszámainak mediánja: 31,5 (ami kerekítve 32), (1 pont)
a II. pontszámainak számtani közepe: $\frac{279}{8} = 34,875$ (ami kerekítve 35)(1 pont)
III. feladat a 60 pont 90%-a: 54 pont. (1 pont)
A megfelelő kerekítéseket elvégezve, összesítve $32+35+54=121$pont, (1 pont)
ami a **4. helyezést** jelenthette volna. (1 pont)

Összesen: 12 pont

10) A 100-nál kisebb és hattal osztható pozitív egész számok közül véletlenszerűen választunk egyet. Mekkora valószínűséggel lesz ez a szám 8-cal osztható? Írja le a megoldás menetét! (3 pont)

Megoldás:

Összesen 16 db hattal osztható szám van a megadott tartományban, közülük 4 db osztható 8-cal. (2 pont)

a valószínűség $\mathbf{\frac{4}{16} = \frac{1}{4}}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

11) Egy gimnáziumban 50 diák tanulja emelt szinten a biológiát. Közülük 30-an tizenegyedikesek és 20-an tizenkettedikesek. Egy felmérés alkalmával a tanulóktól azt kérdezték, hogy hetente átlagosan hány órát töltenek a biológia házi feladatok megoldásával. A táblázat a válaszok összesített eloszlását mutatja.

A biológia házi feladatok megoldásával hetente eltöltött órák száma*	**0-2**	**2-4**	**4-6**	**6-8**	**8-10**
Tanulók száma	**3**	**11**	**17**	**15**	**4**

*** A tartományokhoz az alsó határ hozzátartozik, a felső nem.**

a) Ábrázolja oszlopdiagramon a táblázat adatait! (3 pont)

b) Átlagosan hány órát tölt a biológia házi feladatok megoldásával hetente ez az 50 tanuló? Az egyes időintervallumok esetében a középértékekkel (1, 3, 5, 7 és 9 órával) számoljon! (3 pont)

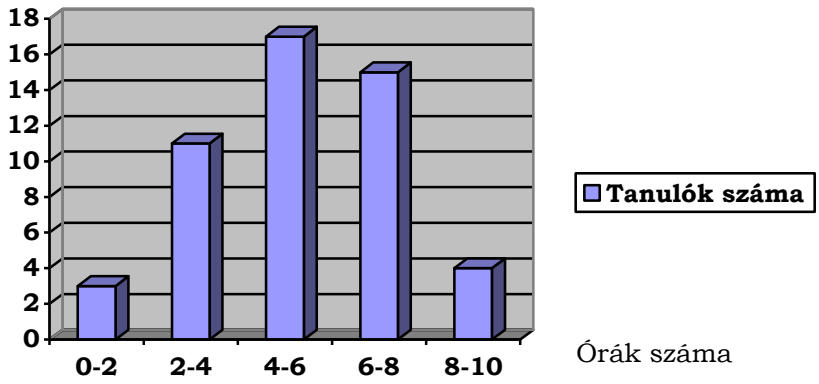
Egy újságíró két tanulóval szeretne interjút készíteni. Ezért a biológiát emelt szinten tanuló 50 diák névsorából véletlenszerűen kiválaszt két nevet.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az egyik kiválasztott tanuló tizenegyedikes, a másik pedig tizenkettedikes? (6 pont)

d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindkét kiválasztott tanuló legalább 4 órát foglalkozik a biológia házi feladatok elkészítésével hetente? (5 pont)

Megoldás:

a)



(3 pont)

b) A középértékekkel számított átlag: $\frac{3\cdot 1+11\cdot 3+17\cdot 5+15\cdot 7+4\cdot 9}{50}=\frac{262}{50}$ (2 pont)

$=5,24$ **A tanulók tehát átlagosan 5,24 órát $(\approx$ 5 óra 14 perc$)$ töltenek a biológia házi feladatok megoldásával hetente.** (1 pont)

c) 50 tanuló közül $\binom{50}{2}=\frac{50\cdot 49}{2}=1225$–féleképpen lehet két tanulót kiválasztani. (2 pont)

A két évfolyamból 30, illetve 20-féleképpen lehet egy-egy tanulót kiválasztani, így a kedvező esetek száma: $30\cdot 20=600$. (2 pont)

A kérdéses valószínűség: $\boldsymbol{p = \frac{600}{1225} = \frac{24}{49}}$ (2 pont)

d) Hetente legalább 4 órát 36 tanuló tölt a biológia házi feladatok megoldásával. (1 pont)

Közülük két tanulót $\binom{36}{2} = \frac{35 \cdot 36}{2} = 630$–féleképpen lehet kiválasztani. (2 pont)

Így a keresett valószínűség: $\boldsymbol{p = \frac{630}{1225} = \frac{18}{35}}$ (2 pont)

Összesen: 17 pont

12) Egy dobozban húsz golyó van, aminek 45 százaléka kék, a többi piros. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha találomra egy golyót kihúzunk, akkor az piros lesz? (3 pont)

Megoldás:

A kék golyók száma: 9. (1 pont)
A piros golyók száma: 11. (1 pont)

$P = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset}} = \boldsymbol{\frac{11}{20} = 0{,}55}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

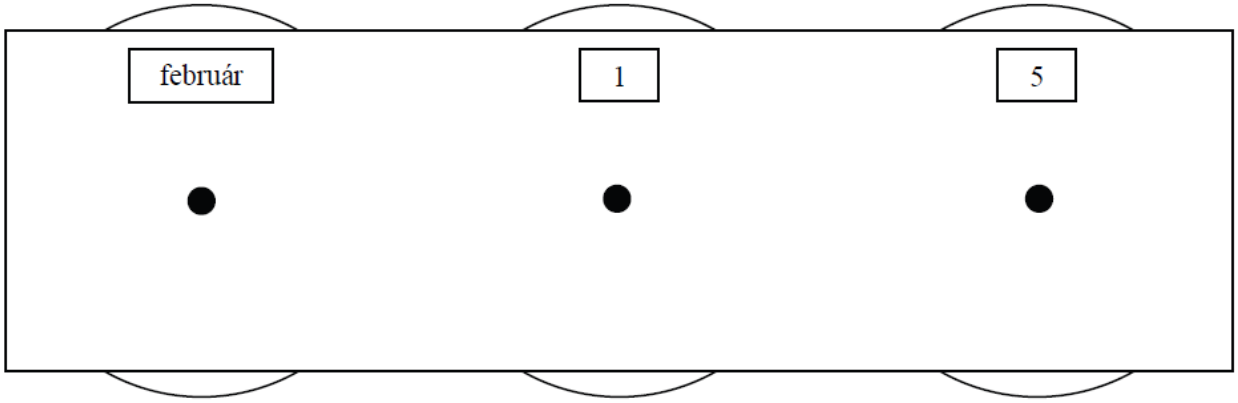
13) Az iskola rajztermében minden rajzasztalhoz két széket tettek, de így a legnagyobb létszámú osztályból nyolc tanulónak nem jutott ülőhely. Minden rajzasztalhoz betettek egy további széket, és így hét üres hely maradt, amikor ebből az osztályból mindenki leült.

a) Hány rajzasztal van a teremben? Hányan járnak az iskola legnagyobb létszámú osztályába? (6 pont)

A rajzterem falát (lásd az ábrán) egy naptár díszíti, melyen három forgatható korong található. A bal oldali korongon a hónapok nevei vannak, a másik két korongon pedig a napokat jelölő számjegyek forgathatók ki. A középső korongon a 0, 1, 2, 3; a jobb szélsőn pedig a 0, 1, 2, 3, ...8, 9 számjegyek szerepelnek. Az ábrán beállított dátum február 15. Ezzel a szerkezettel kiforgathatunk valóságos vagy csak a képzeletben létező „dátumokat”.

b) Összesen hány „dátum” forgatható ki? (3 pont)

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három korongot véletlenszerűen megforgatva olyan dátumot kapunk, amely biztosan létezik az évben, ha az nem szökőév. (3 pont)



Megoldás:

a) A teremben x rajzasztal van, és az osztály létszáma y. (1 pont)
$2x+8=y$ (1 pont)
$3x-7=y$ (1 pont)
$x=15$ és $y=38$ (1 pont)
Ellenőrzés (1 pont)
15 asztal van a teremben, és a kérdéses osztálylétszám 38 fő. (1 pont)

b) A lehetséges „dátumok” száma: $12\cdot 4\cdot 10$, (2 pont)
tehát **480 „dátum” forgatható ki.** (1 pont)

c) Valóságos dátumból nem szökőévben 365 van, (1 pont)
minden lehetséges „dátum” egyenlő valószínűséggel forgatható ki*, ezért valóságos dátumot $\frac{365}{480}(=0,7604)$ valószínűséggel kapunk. (2 pont)

Összesen: 12 pont

14) Szabó nagymamának öt unokája van, közülük egy lány és négy fiú. Nem szeret levelet írni, de minden héten ír egy-egy unokájának, így öt hét alatt mindegyik unoka kap levelet.

a) Hányféle sorrendben kaphatják meg az unokák a levelüket az öt hét alatt? (3 pont)

b) Ha a nagymama véletlenszerűen döntötte el, hogy melyik héten melyik unokájának írt levél következik, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy lányunokája levelét az ötödik héten írta meg? (3 pont)

Szabó nagymama sálat kötött egyetlen lányunokájának. Az első napon 8 cm készült el a sálból, és a nagymama elhatározta, hogy a további napokon minden nap 20 százalékkal többet köt meg, mint az előző napon. Ezt az elhatározását tartani tudta.

c) Hány nap alatt készült el a 2 méter hosszúra tervezett sál? (11 pont)

Megoldás:

a) A lehetséges sorrendek száma: 5! (2 pont)
Az unokák 120-féle sorrendben kaphatják meg a levelet. (1 pont)

b) Az 5. hétre az 5 unoka bármelyike egyenlő valószínűséggel kerül. (2 pont)
A keresett valószínűség tehát: $\mathbf{\frac{1}{5}}$ (1 pont)

c) Az egyes napokon kötött darabok hosszúságai mértani sorozatot alkotnak. (1 pont)

A mértani sorozatban $a_1 = 8,\ q = 1,2$ (2 pont)

A sál teljes hossza a mértani sorozat első n elemének összegeként adódik. (1 pont)

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$ (1 pont)

$$200 = 8 \cdot \frac{1,2^n - 1}{0,2}$$ (1 pont)

$$5 + 1 = 1,2^n$$ (1 pont)

$$n = \frac{\lg 6}{\lg 1,2}$$ (2 pont)

$$n \approx 9,83$$ (1 pont)

A sál a tizedik napon készül el. (1 pont)

Összesen: 17 pont

15) Egy televíziós vetélkedőn 20 játékos vesz részt. A műsorvezető kérdésére a lehetséges három válasz közül kell a játékosoknak az egyetlen helyes megoldást kiválasztani, melyet az A, a B vagy a C gomb megnyomásával jelezhetnek. A vetélkedő három fordulóból áll, minden fordulóban négy kérdésre kell válaszolni. Amelyik versenyző hibásan válaszol, 0 pontot kap. A helyes válaszért annyi pont jár, ahány helytelen válasz született (pl. ha Péter jól válaszol és 12-en hibáznak, akkor Péter 12 pontot szerez).

a) Töltse ki az első forduló táblázatának hiányzó adatait! (4 pont)

Első forduló eredményei	**1. kérdés**	**2. kérdés**	**3. kérdés**	**4. kérdés**
Anikó válasza	**helyes**	**hibás**	**helyes**	
Jó válaszok száma	**7**	**10**		**8**
Anikó elért pontszáma			**5**	**0**

b) Hány százalékkal növekedett volna Anikó összpontszáma az első fordulóban, ha a második kérdésre is jól válaszolt volna? (A többi játékos válaszát változatlannak képzeljük.) (3 pont)

c) Ha Anikó valamelyik másik fordulóban mind a négy kérdésre találomra válaszol, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy minden válasza helyes? (3 pont)

d) Hány játékosnak kell helyesen válaszolnia egy adott kérdésre ahhoz, hogy a 20 játékosnak erre a kérdésre kapott összpontszáma a lehető legtöbb legyen? (7 pont)

Megoldás:

a)

Első forduló eredményei	1. kérdés	2. kérdés	3. kérdés	4. kérdés
Anikó válasza	helyes	hibás	helyes	**hibás**
Jó válaszok száma	7	10	**15**	8
Anikó elért pontszáma	**13**	**0**	5	0

(4 pont)

b) A 2. kérdés oszlopa így módosul: helyes, 11, 9; Anikó tehát 9 pontot kapott. (1 pont)
Anikó elért pontszáma ezzel 27 lesz. Ez a régi pontszám 150 százaléka, (1 pont)
tehát a **pontszám 50%-kal emelkedett volna.** (1 pont)

c) Anikó összesen $3^4 = 81$ módon válaszolhat a négy kérdésre. (2 pont)
Egyetlen esetben lesz minden válasza helyes, ezért a keresett valószínűség: $\frac{1}{81}$. (1 pont)

d) Ha x jó válasz születik a vizsgált kérdésre, akkor a jól válaszolók $20-x$ pontot kapnak személyenként. (1 pont)
Az elért összpontszám: $x(20-x)$. (2 pont)
Az $x \mapsto 20x - x^2$ függvény maximumát keressük a 20-nál kisebb pozitív egészek körében. A maximum hely (akár grafikusan, akár teljes négyzetté való kiegészítéssel, akár a számtani-mértani közép összefüggésre való hivatkozással, akár az esetek végigszámolásával) $x = 10$. (3 pont)
Tíz játékos helyes válasza esetén lesz a játékosok összpontszáma a lehető legtöbb. (1 pont)

Összesen: 17 pont

16) Péter egy 100-nál nem nagyobb pozitív egész számra gondolt. Ezen kívül azt is megmondta Pálnak, hogy a gondolt szám 20-szal osztható. Mekkora valószínűséggel találja ki Pál elsőre a gondolt számot, ha jól tudja a matematikát? (2 pont)

Megoldás:

$$P = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset}} = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{100}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$$ (2 pont)

17) Egy szerencsejáték a következőképpen zajlik:

A játékos befizet 7 forintot, ezután a játékvezető feldob egy szabályos dobókockát. A dobás eredményének ismeretében a játékos abbahagyhatja a játékot; ez esetben annyi Ft-ot kap, amennyi a dobott szám volt.
Dönthet azonban úgy is, hogy nem kéri a dobott számnak megfelelő pénzt, hanem újabb 7 forintért még egy dobást kér. A játékvezető ekkor újra feldobja a kockát. A két dobás eredményének ismeretében annyi forintot fizet ki a játékosnak, amennyi az első és a második dobás eredményének szorzata. Ezzel a játék véget ér.
Zsófi úgy dönt, hogy ha 3-nál kisebb az első dobás eredménye, akkor abbahagyja, különben pedig folytatja a játékot.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Zsófi tovább játszik? (4 pont)

b) Zsófi játékának megkezdése előtt számítsuk ki, mekkora valószínűséggel fizet majd neki a játékvezető pontosan 12 forintot? (6 pont)

Barnabás úgy dönt, hogy mindenképpen két dobást kér majd. Áttekinti a két dobás utáni lehetséges egyenlegeket: a neki kifizetett és az általa befizetett pénz különbségét.

c) Írja be a táblázat üres mezőibe a két dobás utáni egyenlegeket! (4 pont)

		második dobás eredménye					
		1	2	3	4	5	6
első dobás eredménye	1	-13					
	2						
	3						
	4						10
	5						
	6						

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Barnabás egy (két dobásból álló) játszmában nyer? (3 pont)

Megoldás:

a) A kedvező esetek száma 4. (Zsófi akkor folytatja a játékot, ha a dobott szám 3, 4, 5 vagy 6.) (2 pont)
Az összes eset száma 6. (1 pont)
A valószínűség: $\frac{4}{6}\left(=\frac{2}{3}\right)$ (1 pont)

b) Összesen 36 (egyenlően valószínű) lehetőség van. (1 pont)
Egy játékos 12 forintot kap, ha a következő dobáspárok lépnek fel: $(2;6)$, $(3;4)$, $(4;3)$, $(6;2)$. (2 pont)
Az első eset nem lehet, mert akkor Zsófi nem játszik tovább. (1 pont)
Tehát a kedvező esetek száma 3. (1 pont)
A 12 forint kifizetésének valószínűsége: $\mathbf{\frac{3}{36}\left(=\frac{1}{12}\right)}$ (1 pont)

c)

		második dobás eredménye					
		1	2	3	4	5	6
első dobás eredménye	1	-13	**-12**	**-11**	**-10**	**-9**	**-8**
	2	**-12**	**-10**	**-8**	**-6**	**-4**	**-2**
	3	**-11**	**-8**	**-5**	**-2**	**1**	**4**
	4	**-10**	**-6**	**-2**	**2**	**6**	10
	5	**-9**	**-4**	**1**	**6**	**11**	**16**
	6	**-8**	**-2**	**4**	**10**	**16**	**22**

(4 pont)

d) Barnabás akkor nyer, ha egyenlege pozitív. (1 pont)
13 esetben pozitív az eredmény. (1 pont)
Barnabás $\mathbf{\frac{13}{36}}$ valószínűséggel nyer. (1 pont)

Összesen: 17 pont

18) Az autókereskedés parkolójában 1–25-ig számozott hely van. Minden beérkező autó véletlenszerűen kap parkolóhelyszámot.

a) Az üres parkolóba elsőként beparkoló autó vezetőjének szerencseszáma a 7. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kapott parkolóhelyszámnak van hetes számjegye, vagy a szám hétnek többszöröse? (4 pont)

Május 10-én az üres parkolóba 25 kocsi érkezik: 12 ezüstszínű ötajtós, 4 piros négyajtós, 2 piros háromajtós és 7 zöld háromajtós.

b) Az üres parkolóba már beálltak a négy és ötajtós autók. Hányféleképpen állhatnak be az üresen maradt helyekre a háromajtósak? (Az azonos színű autókat nem különböztetjük meg egymástól.) (5 pont)

A május 10-re előjegyzett 25 vevő az autó színére is megfogalmazta előzetesen a kívánságait. Négyen zöld kocsit rendeltek, háromnak a piros szín kivételével mindegyik megfelel, öten akarnak piros vagy ezüst kocsit, tízen zöldet vagy pirosat. Három vevőnek mindegy, milyen színű kocsit vesz.

c) Színek szempontjából kielégíthető-e a május 10-re előjegyzett 25 vevő igénye az aznap reggel érkezett autókkal? (8 pont)

Megoldás:

a) A 25 parkolóhely közül 4 „szerencsés” van:
a 7-es; a 17-es; a 14-es és a 21-es. (2 pont)

A keresett valószínűség: $\frac{4}{25}(=0{,}16)$ (2 pont)

b) 9 betöltendő hely marad. (1 pont)

A 2 piros autó $\binom{9}{2}$-féleképpen állhat be, ezzel a zöld autók helye is eldőlt.
(3 pont)

A lehetséges elhelyezkedések értéke **36**. (1 pont)

c) Nézzük a zöld színt választókat! 4-en zöld kocsit rendeltek, és ezen kívül 10-en zöldet vagy pirosat. Mivel 6 db piros kocsi van, a zöldet vagy pirosat választó 10 vevő közül legalább 4-nek zöld kocsit kellene adni. (4 pont)
Zöld kocsiból viszont csak 7 db érkezik aznap, így a zöld kocsit választó vevők igényeit **nem lehet kielégíteni**, akárhogy is osztjuk a többi autót. (4 pont)

Összesen: 17 pont

19) Egy vetélkedőn részt vevő versenyzők érkezéskor sorszámot húznak egy urnából. Az urnában 50 egyforma gömb van. Minden egyes gömbben egy-egy szám van, ezek különböző egész számok 1-től 50-ig.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az elsőnek érkező versenyző héttel osztható sorszámot húz? (3 pont)

A vetélkedő győztesei között jutalomként könyvutalványt szerettek volna szétosztani a szervezők. A javaslat szerint Anna, Bea, Csaba és Dani kapott volna jutalmat, az egyes jutalmak aránya az előbbi sorrendnek megfelelően $1:2:3:4$. Közben kiderült, hogy akinek a teljes jutalom ötödét szánták, önként lemond az utalványról. A zsűri úgy döntött, hogy a neki szánt 16000 forintos utalványt is szétosztják a másik három versenyző között úgy, hogy az ő jutalmaik közötti arány ne változzon.

b) Összesen hány forint értékű könyvutalványt akartak a szervezők szétosztani a versenyzők között, és ki mondott le a könyvutalványról? (6 pont)

c) Hány forint értékben kapott könyvutalványt a jutalmat kapott három versenyző külön-külön? (3 pont)

Megoldás:

a) Mivel 1-50-ig 7 darab 7-tel osztható szám van, (1 pont)

az első versenyző $\frac{7}{50}$ valószínűséggel húz 7-tel osztható számot. (2 pont)

b) Ha a jutalom ötödrésze 16000 forint, akkor a teljes jutalmat **80000 forint**ra tervezték. (2 pont)
Az arányok szerint 1 egység a teljes jutalom 10-ed része, (1 pont)
egy egység 8000 forintot ér. (1 pont)
Bea kapott volna 16000 forintot, így ő mondott le a jutalomról. (2 pont)

c) Mivel 1 : 3 : 4 arányban osztották szét a könyvutalványokat, (1 pont)
Anna 10000, Csaba 30000, Dani pedig 40000 forint értékben kapott könyvutalványt. (2 pont)

Összesen: 12 pont

20) Egy zsákban nyolc fehér golyó van. Hány fekete golyót kell a zsákba tenni, -hogy véletlenszerűen kiválasztva egy golyót-, fehér golyó kiválasztásának 0,4 legyen a valószínűsége, ha bármelyik golyót ugyanakkora valószínűséggel választjuk? (2 pont)

Megoldás:

A fekete golyók száma: **12**. (2 pont)

21) Béla egy fekete és egy fehér színű szabályos dobókockával egyszerre dob. Feljegyzi azt a kétjegyű számot, amelyet úgy kap, hogy a tízes helyiértéken a fekete kockával dobott szám, az egyes helyiértéken pedig a fehér kockával dobott szám áll.
Mennyi annak a valószínűsége, hogy a feljegyzett kétjegyű szám
a) négyzetszám; (3 pont)
b) számjegyei megegyeznek; (3 pont)
c) számjegyeinek összege legfeljebb 9? (6 pont)

Megoldás:

a) A dobható négyzetszámok: 16, 25, 36, 64. (1 pont)
Összesen 36 különböző kétjegyű számot kaphat. (1 pont)
A keresett valószínűség $p = \frac{1}{9}(\approx 0{,}111)$ (1 pont)

b) Az egyes helyiértéken 6-féle, ettől függetlenül a tízes helyiértéken is 6-féle számot kaphat. (1 pont)
A számjegyek 6 esetben egyeznek meg, ez a kedvező esetek száma. (1 pont)
A valószínűség $\frac{1}{6}$ (1 pont)

c) A számjegyek összege legfeljebb 9:
11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 51, 52, 53, 54, 61, 62, 63 számok esetében. (4 pont)
A kedvező esetek száma: 30. (1 pont)
A valószínűség: $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ (1 pont)
A valószínűség kiszámítható a komplementer esemény valószínűségének meghatározásával is.

Összesen: 12 pont

22) Az alábbi kilenc szám közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám nem negatív?
–3,5; –5; 6; 8,4; 0; –2,5; 4; 12; –11. (2 pont)

Megoldás:

$p = \frac{5}{9}(\approx 0{,}56;\ 56\%)$ (2 pont)

23) A héten az ötös lottón a következő számokat húzták ki: 10, 21, 22, 53 és 87. Kata elújságolta Sárának, hogy a héten egy két találatos szelvénye volt. Sára nem ismeri Kata szelvényét, és arra tippel, hogy Kata a 10-est és az 53-ast találta el. Mekkora annak a valószínűsége, hogy Sára tippje helyes? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

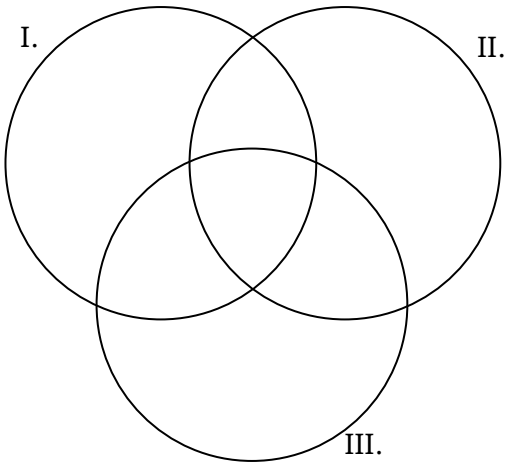
Sárának összesen $\binom{5}{2}$, azaz 10 féle tippje lehet (és ezek mindegyike ugyanakkora valószínűségű). (1 pont)

Ezek közül a $\{10;53\}$ pár a helyes. (1 pont)

A keresett valószínűség: $\frac{1}{10}\left(=0{,}1=10\%\right)$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

24) Egy középiskolába 620 tanuló jár. Az iskola diákbizottsága az iskolanapra három kiadványt jelentetett meg:
I. Diákok Hangja
II. Iskolaélet
III. Miénk a suli!
Később felmérték, hogy ezeknek a kiadványoknak milyen volt az olvasottsága az iskola tanulóinak körében.
A Diákok Hangját a tanulók 25%-a, az Iskolaéletet 40%-a, a Miénk a suli! c. kiadványt pedig 45%-a olvasta. Az első két kiadványt a tanulók 10%-a, az első és harmadik kiadványt 20%-a, a másodikat és harmadikat 25%-a, mindhármat pedig 5 %-a olvasta.



a) Hányan olvasták mindhárom kiadványt? (2 pont)
b) A halmazábra az egyes kiadványokat elolvasott tanulók létszámát szemlélteti. Írja be a halmazábra mindegyik tartományába az oda tartozó tanulók számát! (6 pont)
c) Az iskola tanulóinak hány százaléka olvasta legalább az egyik kiadványt? (2 pont)

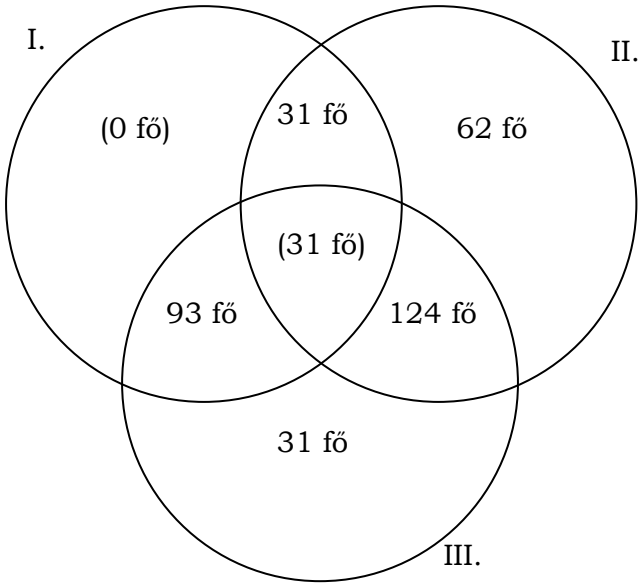
Az iskola 12. évfolyamára 126 tanuló jár, közöttük kétszer annyi látogatta az iskolanap rendezvényeit, mint aki nem látogatta. Az Iskolaélet című kiadványt a rendezvényeket látogatók harmada, a nem látogatóknak pedig a fele olvasta. Egy újságíró megkérdez két, találomra kiválasztott diákot az évfolyamról, hogy olvasták-e az Iskolaéletet.

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a két megkérdezett diák közül az egyik látogatta az iskolanap rendezvényeit, a másik nem, viszont mindketten olvasták az Iskolaéletet? (7 pont)

Megoldás:

a) **31 tanuló** olvasta mindhárom kiadványt. (2 pont)

b)



(6 pont)

c) (372 fő, tehát) a tanulók **60%**-a olvasta legalább az egyik kiadványt. (2 pont)

d) 84 fő látogatta, 42 fő nem látogatta a rendezvényeket. (1 pont)

Közülük 28 fő, illetve 21 fő olvasta az Iskolaéletet. (1 pont)

A két megkérdezett diák $\binom{126}{2}$–féleképpen választható ki (összes eset). (1 pont)

A rendezvényt látogatók közül $\binom{28}{1}$-féle olyan diák, a nem látogatók közül $\binom{21}{1}$-féle olyan diák választható, aki olvasta az Iskolaéletet. (1 pont)

A kedvező esetek száma tehát $28\cdot 21$. (1 pont)

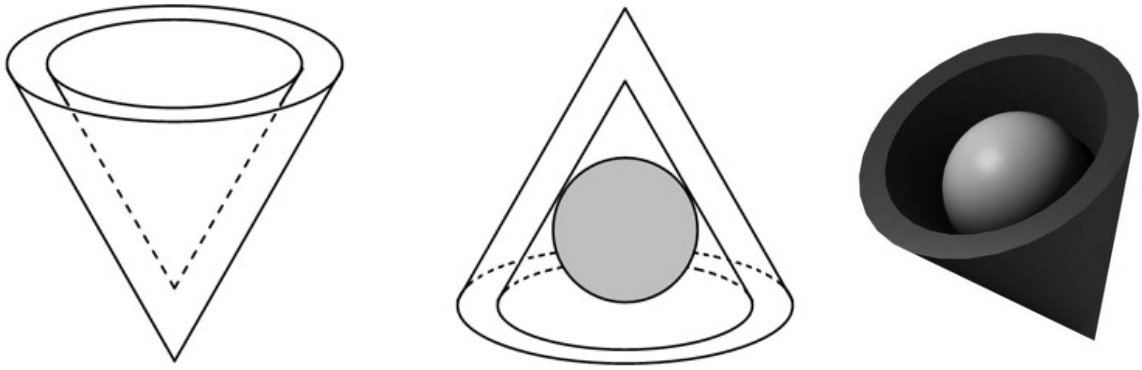
A keresett valószínűség: $\dfrac{28\cdot 21}{\binom{126}{2}}\approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{0,075}(=\mathbf{7,5}\%)$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

25) Az egyik csokoládégyárban egy újfajta, kúp alakú desszertet gyártanak. A desszert csokoládéból készült váza olyan, mint egy tölcsér. (Lásd ábra.)

A külső és belső kúp hasonló, a hasonlóság aránya $\frac{6}{5}$ A kisebb kúp adatai: alapkörének sugara 1 cm, magassága 2,5 cm hosszú.



a) Hány cm³ csokoládét tartalmaz egy ilyen csokoládéváz? A választ tizedre kerekítve adja meg! (5 pont)

Az elkészült csokoládéváz üreges belsejébe marcipángömböt helyeznek, ezután egy csokoládéból készült vékony körlemezzel lezárják a kúpot.

b) Hány cm a sugara a lehető legnagyobb méretű ilyen marcipángömbnek? A választ tizedre kerekítve adja meg! (7 pont)

A marcipángömböket gyártó gép működése nem volt hibátlan. A mintavétellel végzett minőség-ellenőrzés kiderítette, hogy a legyártott gömbök 10%-ában a marcipángömb mérete nem felel meg az előírtnak.

c) A már legyártott nagy mennyiségű gömb közül 10-et kiválasztva, mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között pontosan 4-nek a mérete nem felel meg az előírásnak?
(A kérdezett valószínűség kiszámításához használhatja a binomiális eloszlás képletét.) (5 pont)

Megoldás:

a) Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbével egyezik meg. (1 pont)

$V_{\text{külső}} = \left(\frac{6}{5}\right)^3 \cdot V_{\text{belső}}$ (1 pont)

$V_{\text{belső}} = \frac{1^2 \cdot \pi \cdot 2{,}5}{3} \left(\approx 2{,}62 \text{ cm}^3\right)$ (1 pont)

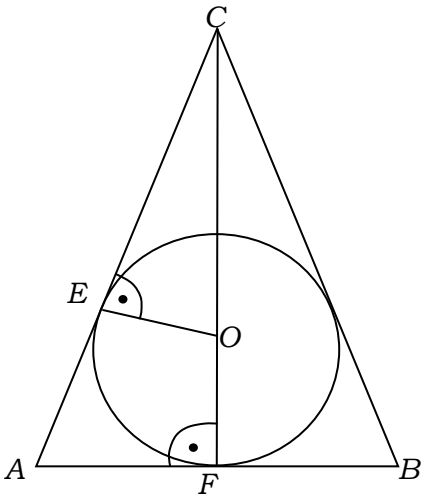
$V_{\text{külső}} = \left(\frac{6}{5}\right)^3 \cdot V_{\text{belső}} \left(\approx 4{,}52 \text{ cm}^3\right)$ (1 pont)

$V_{\text{külső}} - V_{\text{belső}} \approx 1{,}9 \text{ cm}^3$ (1 pont)

Egy csokoládéváz kb. **1,9 cm³** csokoládét tartalmaz.

b) A legnagyobb sugarú gömb a belső kúp beírt gömbje. (1 pont)

A kúp és a beírt gömbjének tengelymetszete egy egyenlő szárú háromszög (amelynek alapja 2 cm, magassága 2,5 cm hosszú), illetve annak a beírt köre. (1 pont)



Az ábra jelöléseit használva: AFC háromszög hasonló az OEC háromszöghöz, ezért

$\frac{AF}{AC} = \frac{OE}{OC}$ (1 pont)

(Alkalmazva Pitagorasz tételét az AFC háromszögre, adódik:) $AC = \sqrt{7,25}\,(\approx 2,7\text{ cm})$ (1 pont)

A beírt kör sugarát R-rel jelölve: $\frac{1}{\sqrt{7,25}} = \frac{R}{2,5-R}$ (1 pont)

$25 - R = \sqrt{7,25}\cdot R$ (1 pont)

$3,7R \approx 2,5$, ebből $R \approx 0,68$ cm

Tehát a lehető legnagyobb marcipángömb sugara kb. **0,7 cm**. (1 pont)

c) Annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott gömb nem az előírt méretű 0,1. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott az előírásnak megfelelő méretű 0,9. (1 pont)

A keresett valószínűséget az $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ képlettel számolhatjuk ki, (1 pont)

ahol $n = 10,\ k = 4,\ p = 0,1$. (1 pont)

A keresett valószínűség: $\binom{10}{4} 0,1^4 \cdot 0,9^6 = 210 \cdot 0,1^4 \cdot 0,9^6 \approx \mathbf{0,011}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

26) Egy kockajátékban egy menet abból áll, hogy szabályos dobókockával kétszer dobunk egymás után. Egy dobás 1 pontot ér, ha négyest vagy ötöst dobunk, egyébként a dobásért nem jár pont. A menetet úgy pontozzák, hogy a két dobásért járó pontszámot összeadják.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy menetben 1 pontot szerzünk, és azt az első dobásért kapjuk? (5 pont)

b) Minek nagyobb a valószínűsége,

- **annak, hogy egy menetben szerzünk pontot, vagy**
- **annak, hogy egy menetben nem szerzünk pontot? (7 pont)**

Megoldás:

a) (A kettős dobások minden kimenetele egyenlően valószínű, tehát alkalmazható a klasszikus modell.) Összesen $6^2 = 36$ féle kettős dobás történhet. (2 pont)
Az első dobás 2-féle, a második 4-féle lehet, (1 pont)
tehát $2 \cdot 4 = 8$ „jó” kettős dobás van, (1 pont)
így $\frac{8}{36}\left(= \frac{2}{9} = 0,22...\right)$ annak a valószínűsége, hogy egy menetben 1 pontot szerzünk, és azt az első dobásért kaptuk. (1 pont)
Mivel a két dobás független esemény, ezért a valószínűség kiszámítható az események valószínűségének szorzatával is.

b) Pontosan 1 pontot akkor szerezhetünk, ha az első dobás jó (pontot érő), a második nem pontot érő, vagy fordítva, (2 pont)
ez összesen $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ eset. (1 pont)
2 pontot szerezhetünk $2 \cdot 2 = 4$ esetben. (1 pont)
Így annak a valószínűsége, hogy egy menetben szerzünk pontot: $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$ (1 pont)
Annak, hogy nem szerzünk pontot, $1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$ a valószínűsége, (1 pont)
tehát **az első eseménynek nagyobb** a valószínűsége. (1 pont)

Összesen: 12 pont

27) András, Balázs, Cili, Dóra és Enikő elhatározták, hogy sorsolással döntenek arról, hogy közülük ki kinek készít ajándékot. Úgy tervezték, hogy a neveket ráírják egy-egy papír cetlire, majd a lefelé fordított öt cédulát összekeverik, végül egy sorban egymás mellé leteszik azokat az asztalra. Ezután, keresztnevük szerinti névsorban haladva egymás után vesznek el egy-egy cédulát úgy, hogy a soron következő mindig a bal szélső cédulát veszi el.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy az elsőnek húzó Andrásnak a saját neve jut? (5 pont)

b) Írja be az alábbi táblázatba az összes olyan sorsolás eredményét, amelyben csak Enikőnek jut a saját neve! A táblázat egyes soraiban az asztalon lévő cédulák megfelelő sorrendjét adja meg!
(A megadott táblázat sorainak a száma lehet több, kevesebb vagy ugyanannyi, mint a felsorolandó esetek száma. Ennek megfelelően hagyja üresen a felesleges mezőket, vagy egészítse ki újabb mezőkkel a táblázatot, ha szükséges!) (6 pont)

	A húzó neve				
A cédulák megfelelő sorrendjei	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
					E
					E
					E
					E
					E
					E

c) Az ajándékok átadása után mind az öten moziba mentek, és a nézőtéren egymás mellett foglaltak helyet. Hány különböző módon kerülhetett erre sor, ha tudjuk, hogy a két fiú nem ült egymás mellett? (6 pont)

Megoldás:

a) Az 5 név bármelyike ugyanakkora valószínűséggel kerülhet az első helyre, (3 pont)

tehát a keresett valószínűség $\frac{1}{5} = 0{,}2$. (2 pont)

A feladat megoldható a kedvező/összes formulával is.

b)

	A húzó neve				
A cédulák megfelelő sorrendjei	A	B	C	D	E
	B	**A**	**D**	**C**	E
	B	**C**	**D**	**A**	E
	B	**D**	**A**	**C**	E
	C	**A**	**D**	**B**	E
	C	**D**	**A**	**B**	E
	C	**D**	**B**	**A**	E
	D	**A**	**B**	**C**	E
	D	**C**	**A**	**B**	E

	D	C	B	A	E

(6 pont)

c) Azt a két helyet, ahol a fiúk ülhetnek (nem egymás mellett), 6-féleképpen választhatjuk ki, (1 pont)

mert $\binom{5}{2} - 4 = 6$. (1 pont)

A két kiválasztott helyen a fiúk 2-féleképpen helyezkedhetnek el. (1 pont)

A lányok minden egyes esetben $3! = 6$ különböző módon ülhetnek le egymáshoz képest. (1 pont)

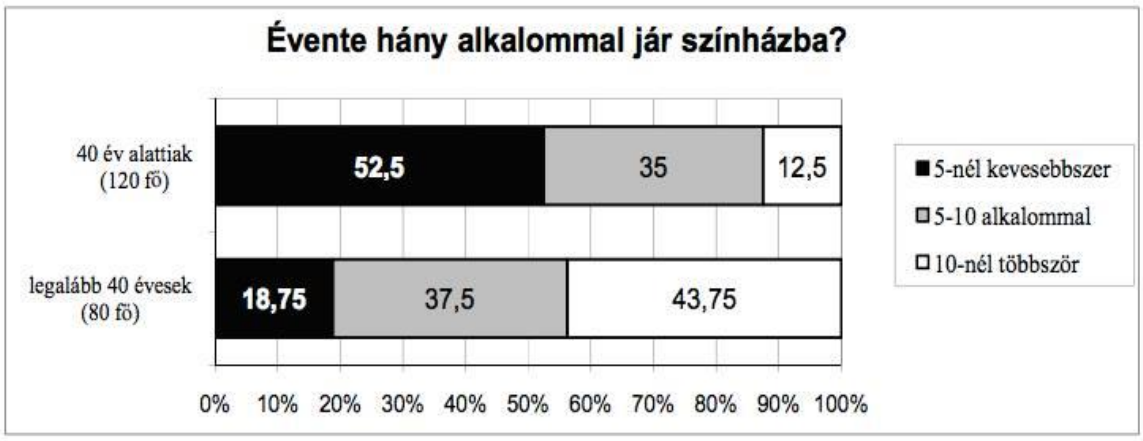
Összesen tehát $6 \cdot 2 \cdot 6 =$ (1 pont)

$= 72$ különböző módon ülhetnek le. (1 pont)

Komplementer halmazzal is számolhatunk.

Összesen: 17 pont

28) Egy felmérés során két korcsoportban összesen 200 embert kérdeztek meg arról, hogy évente hány alkalommal járnak színházba. Közülük 120-an 40 évesnél fiatalabbak, 80 válaszadó pedig 40 éves vagy annál idősebb volt. Az eredményeket (százalékos megoszlásban) az alábbi diagram szemlélteti.



a) Hány legalább 40 éves ember adta azt a választ, hogy 5-nél kevesebbszer volt színházban? (3 pont)

b) A megkérdezettek hány százaléka jár évente legalább 5, de legfeljebb 10 alkalommal színházba? (4 pont)

c) A 200 ember közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mekkora a valószínűsége annak, hogy közülük legfeljebb az egyik fiatalabb 40 évesnél?

Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

Megoldás:

a) A legalább 40 éveseknek a 18,75%-a adta az idézett választ. (1 pont)

80-nak a 18,75 %-a: $80 \cdot 0{,}1875$. (1 pont)

Tehát **15** legalább 40 éves ember adta az „5-nél kevesebbszer” választ. (1 pont)

b) A 40 év alattiak közül $120 \cdot 0{,}35 = 42$, (1 pont)

a legalább 40 évesek közül $80 \cdot 0{,}375 = 30$, (1 pont)

azaz összesen 72 olyan ember van, aki évente 5–10 alkalommal jár színházba. (1 pont)

Ez a szám a megkérdezettek **36 %**-a. (1 pont)

c) Az összes lehetséges kiválasztás: $\binom{200}{2}\left(=19900\right)$. (1 pont)

Ezek közül mindkét véletlenszerűen kiválasztott legalább 40 éves: $\binom{80}{2}\left(=3160\right)$ esetben, (1 pont)

különböző korosztályú: $80\cdot120\left(=9600\right)$ esetben. (1 pont)

A kérdezett esemény valószínűsége: $\dfrac{\binom{80}{2}+80\cdot120}{\binom{200}{2}}\left(=\dfrac{12760}{19900}\right)$. (1 pont)

Tehát **0,641** a valószínűsége annak, hogy legfeljebb egy 40 évnél fiatalabb van a kiválasztottak között. (1 pont)

A feladat megoldható a komplementer esemény valószínűségének kiszámításával is.

Összesen: 12 pont

29) Egy piros és egy sárga szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege pontosan 4 lesz? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Két kockával 3-féleképpen lehet a dobott számok összege 4: $(1;3),(2;2),(3;1)$ (1 pont)

Két kockával összesen $6^2=36$-félét dobhatunk. (1 pont)

Így a kérdéses valószínűség: $\dfrac{3}{36}\left(\approx 0{,}083\right)$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

30) Tekintsük a következő halmazokat:

$A=\{$**a 100-nál nem nagyobb pozitív egész számok**$\}$

$B=\{$**a 300-nál nem nagyobb, 3-al osztható pozitív egész számok**$\}$

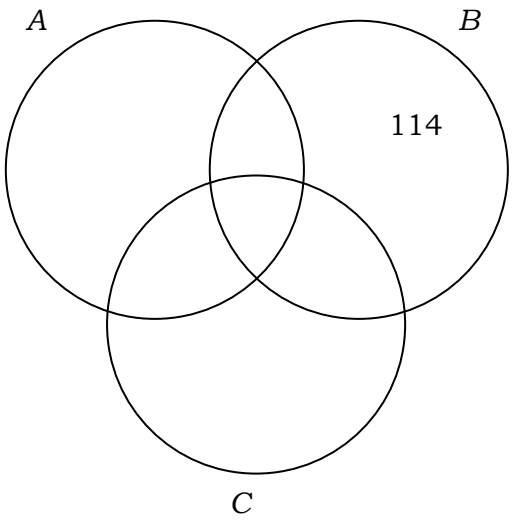
$C=\{$**a 400-nál nem nagyobb, 4-el osztható pozitív egész számok**$\}$

a) Töltse ki a táblázatot a minta alapján, majd a táblázat alapján írja be az 52, 78, 124, 216 számokat a halmazábra megfelelő tartományába! (8 pont)

	***A* halmaz**	***B* halmaz**	***C* halmaz**
114	*nem eleme*	*eleme*	*nem eleme*
52			
78			
124			

216			

b) Határozza meg az $A \cap B \cap C$ halmaz elemszámát! (3 pont)

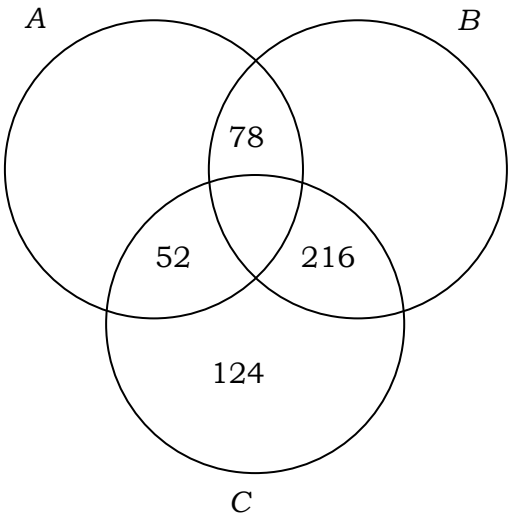


c) Számítsa ki annak valószínűségét, hogy az *A* halmazból egy elemet véletlenszerűen kiválasztva a kiválasztott szám nem eleme sem a *B*, sem a *C* halmaznak! (6 pont)

***Megoldás*:**

a) (8 pont)

	***A* halmaz**	***B* halmaz**	***C* halmaz**
52	eleme	nem eleme	eleme
78	eleme	eleme	nem eleme
124	nem eleme	nem eleme	eleme
216	nem eleme	eleme	eleme



b) A három halmaz közös részében azok a pozitív egész számok vannak, melyek 100-nál nem nagyobbak és 3-mal és 4-gyel is (tehát 12-vel) oszthatók. (1 pont)
Ezek a számok:
$A \cap B \cap C = \{12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96\}$ (1 pont)
Összesen **8 darab** ilyen szám van. (1 pont)

c) Az A halmaz elemeinek száma: $|A| = 100$ (1 pont)
Ezek közül hárommal osztható (vagyis B-nek is eleme) 33 darab. (1 pont)
Néggyel osztható (vagyis C-nek is eleme) 25 darab. (1 pont)
Tizenkettővel osztható (vagyis mindhárom halmaznak eleme) 8 darab. (1 pont)
Így az A halmaz azon elemeinek a száma, melyek nem elemei sem a B, sem a C halmaznak: $100 - 33 - 25 + 8 = 50$ (1 pont)
A kérdéses valószínűség: $\boldsymbol{P = \frac{50}{100} = 0,5}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

31) Adja meg annak valószínűségét, hogy a 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14 számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztva a kiválasztott szám prím! (2 pont)

Megoldás:

A kérdezett valószínűség $\frac{3}{8}\,(=0,375)$. (2 pont)

32) Egy iskola asztalitenisz bajnokságán hat tanuló vesz részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig Andi egy mérkőzést játszott, Barnabás és Csaba kettőt-kettőt, Dani hármat, Enikő és Feri négyet-négyet.

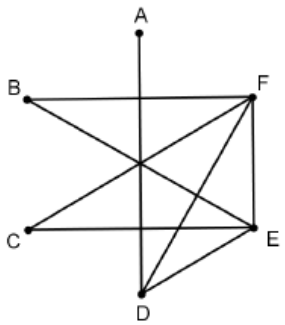
a) Rajzolja le az eddig lejátszott mérkőzések egy lehetséges gráfját! (4 pont)

b) Lehetséges-e, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta? (Igen válasz esetén rajzoljon egy megfelelő gráfot; nem válasz esetén válaszát részletesen indokolja!) (6 pont)

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a hat játékos közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, ők eddig még nem játszották le az egymás elleni mérkőzésüket! (7 pont)

Megoldás:

a) Az egyik lehetséges megoldás (a résztvevőket nevük kezdőbetűjével jelölve): (4 pont)

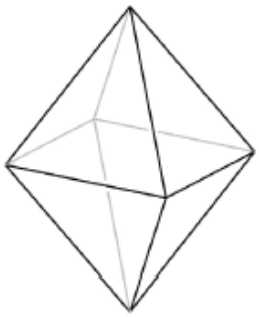


b) Ha Andi egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta volna, akkor például Feri eddigi mérkőzéseit Barnabással, Csabával, Danival és Enikővel játszotta volna. (3 pont)
Ekkor azonban Enikőnek már nem lehet meg a négy mérkőzése, hiszen legfeljebb Csabával, Danival és Ferivel játszhatott volna. (2 pont)
Tehát igazoltuk, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését nem játszhatta Barnabással. (1 pont)

c) A játékosok kiválasztása helyett a lejátszott – illetve nem lejátszott – mérkőzéseiket vizsgáljuk. (2 pont)
Összesen $\left(\frac{6\cdot 5}{2}\right)=15$ mérkőzés szükséges (összes eset száma). (2 pont)
Eddig 8 mérkőzés zajlott le, tehát 7 mérkőzést kell még lejátszani (kedvező esetek száma). (2 pont)
A keresett valószínűség $\mathbf{\frac{7}{15}(\approx 0{,}47)}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

33) Tekintsünk két egybevágó, szabályos négyoldalú (négyzet alapú) gúlát, melyek alapélei 2 cm hosszúak, oldalélei pedig 3 cm-esek. A két gúlát alaplapjuknál fogva összeragasztjuk (az alaplapok teljesen fedik egymást), így az ábrán látható testet kapjuk.



a) Számítsa ki ennek a testnek a felszínét (cm^2-ben) és a térfogatát (cm^3-ben)! Válaszait egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

A test lapjait 1-től 8-ig megszámozzuk, így egy „dobó-oktaédert" kapunk, amely minden oldallapjára egyforma valószínűséggel esik. Egy ilyen test esetében is van egy felső lap, az ezen lévő számot tekintjük a dobás kimenetelének. (Az ábrán látható „dobó-oktaéderrel" 8-ast dobtunk.) (9 pont)



b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy ezzel a „dobó-oktaéderrel" egymás után négyszer dobva, legalább három esetben 5-nél nagyobb számot dobunk! (8 pont)

Megoldás:

a) Az oldallap-háromszögekben a 2 cm-es oldalhoz tartozó magasság hossza (a Pitagorasz-tételt alkalmazva) $\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8}\,(\approx 2{,}83)\,(\text{cm})$. (1 pont)

Egy oldallap területe $\dfrac{2\cdot\sqrt{8}}{2}\,(\approx 2{,}83)\,(\text{cm}^2)$. (1 pont)

A test felszíne: $A\approx 22{,}6\ \text{cm}^2$. (1 pont)

A testet alkotó gúlák magassága megegyezik annak az egyenlő szárú háromszögnek a magasságával, amelynek szára a gúlák oldalélével, alapja a gúla alapjának átlójával egyezik meg. (1 pont)

A gúla m magasságára (a Pitagorasz-tételt alkalmazva): $m^2=3^2-\left(\dfrac{2\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2$ (1 pont)

$m=\sqrt{7}\,(\approx 2{,}65)\,(\text{cm})$. (1 pont)

A gúla térfogata: $V=\dfrac{1}{3}\cdot 2^2\cdot\sqrt{7}\,(\approx 3{,}53)\,(\text{cm}^3)$. (1 pont)

A test térfogata ennek kétszerese, azaz megközelítőleg $\mathbf{7{,}1\,cm^3}$. (2 pont)

b) $P(\text{egy adott dobás 5-nél nagyobb})=\dfrac{3}{8}$ (2 pont)

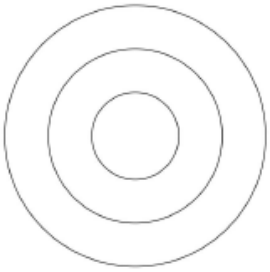
$P(\text{mind a négy dobás nagyobb 5-nél})=\left(\dfrac{3}{8}\right)^4\,(\approx 0{,}0198)$ (1 pont)

$P(\text{három dobás nagyobb 5-nél, egy nem})=\binom{4}{1}\cdot\left(\dfrac{3}{8}\right)^3\cdot\dfrac{5}{8}\,(\approx 0{,}1318)$ (2 pont)

A kérdéses valószínűség ezek összege, azaz $\approx \mathbf{0{,}152}$. (3 pont)

Összesen: 17 pont

34) Egy ajándéktárgyak készítésével foglalkozó kisiparos családi vállalkozása keretében zászlókat, kitűzőket is gyárt. Az ábrán az egyik általa készített kitűző stilizált képe látható. A kitűzőn lévő három mező kiszínezéséhez 5 szín (piros, kék, fehér, sárga, zöld) közül választhat. Egy mező kiszínezéséhez egy színt használ, és a különböző mezők lehetnek azonos színűek is.



a) Hányféle háromszínű kitűzőt készíthet a kisiparos? (3 pont)

b) Hányféle kétszínű kitűző készíthető? (5 pont)

A kisiparos elkészíti az összes lehetséges különböző (egy-, két- és háromszínű) kitűzőt egy-egy példányban, és véletlenszerűen kiválaszt közülük egyet.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy olyan kitűzőt választ, amelyen az egyik mező kék, egy másik sárga, a harmadik pedig zöld színű? (4 pont)

Megoldás:

a) Ha három színt akarunk felhasználni, akkor a kitűző mezői különböző színűek lesznek. (1 pont)
Az egyik (például a legbelső) mezőt 5-féle, a mellette levőt 4-féle, a harmadikat 3-féle színnel színezhetjük ki. (1 pont)
Így $\mathbf{5\cdot 4\cdot 3=60}$-féle háromszínű kitűzőt készíthetünk. (1 pont)

b) Az ötből két színt $\binom{5}{2}=10$-féleképpen választhatunk ki. (2 pont)
A három mező közül a két egyszínűt háromféleképpen lehet kiválasztani, és mindegyik esethez kétféle színezés tartozik, ez összesen 6 lehetőség. (2 pont)
A kétszínű kitűzők száma így $\mathbf{10\cdot 6=60}$. (1 pont)

c) A kitűző minden mezőjét ötféleképpen színezhetjük ki, így összesen $5\cdot 5\cdot 5=125$-féle színezés lehetséges. (1 pont)
A megadott három szín $3\cdot 2\cdot 1=6$ kitűzőn szerepel. (1 pont)
A kérdéses valószínűség tehát $p=\dfrac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}=\mathbf{\dfrac{6}{125}\left(=0{,}048\right)}$.
(2 pont)

Összesen: 12 pont

35) Az egyik világbajnokságon részt vevő magyar női vízilabdacsapat 13 tagjának életkor szerinti megoszlását mutatja az alábbi táblázat.

Életkor	17	18	19	21	22	23	24	25	26	31
Gyakoriság	2	1	1	1	2	1	2	1	1	1

a) Számítsa ki a csapat átlagéletkorát! (2 pont)

Jelölje *A* azt az eseményt, hogy a csapatból 7 játékost véletlenszerűen kiválasztva, a kiválasztottak között legfeljebb egy olyan van, aki 20 évnél fiatalabb.

b) Számítsa ki az *A* esemény valószínűségét! (8 pont)

A világbajnokság egyik mérkőzésén a magyar kezdőcsapat 6 mezőnyjátékosáról a következőket tudjuk:

- **a legidősebb és a legfiatalabb játékos életkorának különbsége 12 év,**
- **a játékosok életkorának egyetlen módusza 22 év,**
- **a hat játékos életkorának mediánja 23 év,**
- **a hat játékos életkorának átlaga 24 év.**

c) Adja meg a kezdőcsapat hat mezőnyjátékosának életkorát! (7 pont)

Megoldás:

a) Az életkorok átlaga: $\dfrac{17\cdot 2+18+19+\ldots+25+26+31}{13}=\mathbf{\dfrac{289}{13}\left(\approx 22{,}23\text{év}\right)}$ (2 pont)

b) (A 13 játékosból 9 olyan van, aki 20 évnél idősebb, így) azoknak az eseteknek a száma, amikor nincs a kiválasztott 7 játékos között 20 évnél fiatalabb: $\binom{9}{7}$. (1 pont)

Azoknak az eseteknek a száma, amikor egy játékos 20 évnél fiatalabb (és 6 játékos 20 évnél idősebb): $\binom{4}{1}\cdot\binom{9}{6}$. (2 pont)

Az *A* esemény bekövetkezése szempontjából kedvező esetek számát a fenti két szám összege adja: $\binom{9}{7}+4\cdot\binom{9}{6}=36+336=372$. (2 pont)

Az összes esetszám: $\binom{13}{7}$. (1 pont)

A kérdéses valószínűség: $P(A)=\dfrac{\binom{9}{7}+4\cdot\binom{9}{6}}{\binom{13}{7}}=\mathbf{\dfrac{372}{1716}(\approx 0{,}2168)}$ (2 pont)

c) (A legidősebb és legfiatalabb játékos életkorának különbsége csak egyféleképpen lehet 12 év, ha) a legidősebb játékos $\mathbf{(a_6=)31}$, (1 pont)

a legfiatalabb pedig $\mathbf{(a_1=)19}$ éves. (1 pont)

A móduszból következik, hogy a játékosok közül ketten $\mathbf{(a_2}$ és $\mathbf{a_3)22}$ évesek. (1 pont)

Mivel hat játékos van, ezért a medián a_3 és a_4 számtani közepe, azaz az egyik játékos $\mathbf{(a_4=)24}$ éves (és ilyen korú játékos valóban van a csapatban). (2 pont)

Az átlagból következik, hogy $\dfrac{118+a_5}{6}=24$ (1 pont)

vagyis ez a játékos $\mathbf{(a_5=)26}$ éves (és ilyen korú játékos valóban van a csapatban). (1 pont)

Összesen: 17 pont

36) Egy dobozban 50 darab golyó van, közülük 10 darab piros színű. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy golyót véletlenszerűen kihúzva pirosat húzunk? (Az egyes golyók húzásának ugyanakkora a valószínűsége.)
(2 pont)

Megoldás:

$\mathbf{\frac{10}{50}}$ vagy $\mathbf{\frac{1}{5}}$ vagy $\mathbf{0{,}2}$ vagy $\mathbf{20\%}$ (2 pont)

37) Anna, Béla, Cili és Dénes színházba megy. Jegyük a baloldal 10. sor 1., 2., 3., 4. helyére szól.

a) Hányféle sorrendben tudnak leülni a négy helyre? (2 pont)

b) Hányféleképpen tudnak leülni a négy helyre úgy, hogy Anna és Béla egymás mellé kerüljenek? (3 pont)

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Anna és Béla jegye egymás mellé szól, ha a fenti négy jegyet véletlenszerűen osztjuk ki közöttük? (4 pont)

A színház 1200 személyes. A szombati előadásra az összes jegy elkelt. Az eladott jegyek 40%-a 800 Ft-os, 25%-a 1000 Ft-os, 20%-a 1200 Ft-os, 15%-a 1500 Ft-os jegy volt.

d) Ábrázolja kördiagramon az eladott jegyek jegyárak szerinti százalékos megoszlását! (3 pont)

e) Számítsa ki, hogy átlagosan mennyibe kerül egy színházjegy! (5 pont)

Megoldás:

a) $\mathbf{4! = 24}$. (2 pont)

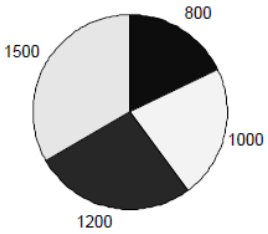
b) Anna és Béla egymás mellett ülnek, ezért egy „elemnek” tekinthetjük őket, azaz 3 elemet kell permutálnunk: 3!. (2 pont)

Anna és Béla bármelyik fenti sorrendben helyet cserélhetnek egymással, ezért azon esetek száma, amikor Anna és Béla egymás mellett ülnek: $\mathbf{3! \cdot 2 = 12}$ (1 pont)

c) $\dfrac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \dfrac{2 \cdot 3!}{4!}$ (3 pont)

A kérdezett valószínűség: $\mathbf{\dfrac{2}{4}}$ vagy $\mathbf{0,5}$ vagy $\mathbf{50\%}$. (1 pont)

d) A megadott százalékértékeknek megfelelő szögek:
800Ft, 40%: 144°,
1000 Ft, 25%: 90°,
1200 Ft, 20%: 72°,
1500 Ft, 15%: 54°. (1 pont)
Helyes diagram (2 pont)



e) Kiszámolható, hogy a különböző árú jegyekből hány darab fogyott:
480 db – 800 Ft-os jegy;
300 db – 1000 Ft-os jegy;
240 db – 1200 Ft-os jegy;
180 db – 1500 Ft-os jegy. (2 pont)

$\dfrac{480 \cdot 800 + 300 \cdot 1000 + 240 \cdot 1200 + 180 \cdot 1500}{1200} = \mathbf{1035}$ (2 pont)

Az átlagár tehát 1035 Ft. (1 pont)

Összesen: 17 pont

38) Egy teherautóval több zöldségboltba almát szállítottak. Az egyik üzletbe 60 kg jonatánt, 135 kg starkingot, 150 kg idaredet és 195 kg golden almát vittek. A jonatán és az idared alma kilóját egyaránt 120 Ft-ért, a starking és a golden kilóját 85 Ft-ért árulta a zöldséges.

a) Hány százalékkal volt drágább a jonatán alma kilója a goldenéhez

képest? (2 pont)

b) Mennyi bevételhez jutott a zöldséges, ha a teljes mennyiséget eladta? (2 pont)

c) A zöldségeshez kiszállított árukészlet alapján számítsa ki, hogy átlagosan mennyibe került nála 1 kg alma! (3 pont)

d) Ábrázolja kördiagramon a zöldségeshez érkezett alma mennyiségének fajták szerinti megoszlását! (6 pont)

A jonatán alma mérete kisebb, mint az idaredé, így abból átlagosan 25%-kal több darab fér egy ládába, mint az idaredből. Rakodásnál mindkét fajtából kiborult egy-egy tele láda alma, és tartalmuk összekeveredett.

e) A kiborult almákból véletlenszerűen kiválasztva egyet, mekkora a valószínűsége annak, hogy az jonatán lesz? (4 pont)

Megoldás:

a) $\frac{120}{85} \approx 1,41$ (1 pont)

Kb. **41%-kal drágább** a jonatán alma (1 pont)

b) $60 \cdot 120 + 150 \cdot 120 + 195 \cdot 85 + 135 \cdot 85 = 53250$ (1 pont)

Tehát **53250 Forint bevétel**hez jutott a zöldséges. (1 pont)

c) Az összes alma mennyisége 540 kg. (1 pont)

Átlagos almaár: $\frac{53250}{540} \approx 98,6$ (1 pont)

Tehát átlagosan **98,6 Forintba került** egy alma. (1 pont)

d) Az egyes almafajták mennyiségéhez tartozó középponti szögek:

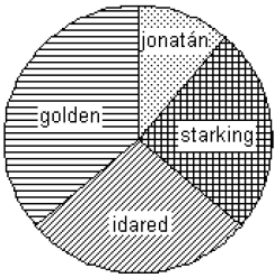
60kg: $\frac{60 \cdot 360°}{540} = \mathbf{40°}$

135 kg: **90°**

150 kg: **100°**

195 kg: **130°** (2 pont)

Kördiagram: (4 pont)



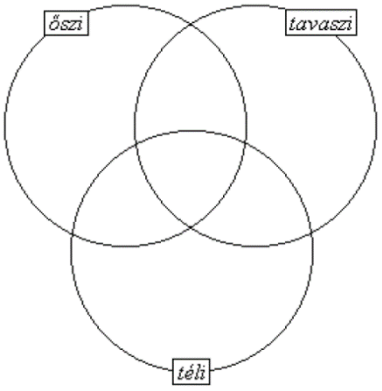
e) A kiborult jonatán és idared almák darabszámának aránya: 1,24:1 (2 pont)

A keresett valószínűség: $\frac{1,25}{2,25} = \frac{5}{9} \approx \mathbf{0,56}$ (2 pont)

Összesen: 17 pont

39) Egy zeneiskola minden tanulója szerepelt a tanév során szervezett három hangverseny, az őszi, a téli, a tavaszi koncert valamelyikén. 20-an voltak, akik az őszi és a téli koncerten is, 23-an, akik a télin és a tavaszin is, és 18-an, akik az őszi és a tavaszi hangversenyen is szerepeltek. 10 olyan növendék volt, aki mindhárom hangversenyen fellépett.

a) Írja be a halmazábrába a szövegben szereplő adatokat a megfelelő helyre!



(4 pont)

A zeneiskolába 188 tanuló jár. Azok közül, akik csak egy hangversenyen léptek fel, kétszer annyian szerepeltek tavasszal, mint télen, de csak negyedannyian ősszel, mint tavasszal.

b) Számítsa ki, hogy hány olyan tanuló volt, aki csak télen szerepelt!

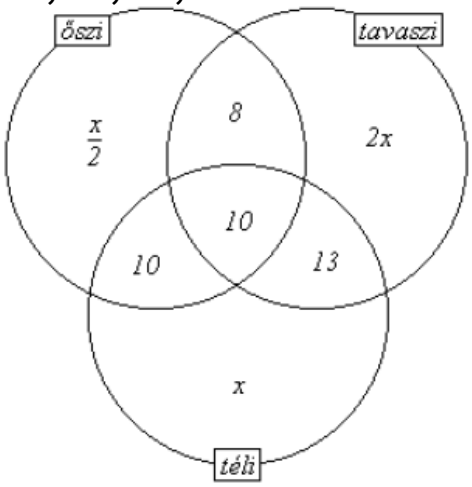
(8 pont)

c) 32 tanuló jár az A osztályba, 28 pedig a B-be. Egy ünnepélyen a két osztályból véletlenszerűen kiválasztott 10 tanulóból álló csoport képviseli az iskolát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a két osztályból pontosan 5-5 tanuló kerül a kiválasztott csoportba?

(5 pont)

Megoldás:

a) A **8; 10; 10; 13** számokat kell beírni a metszetekbe. (4 pont)



b) Csak télen szerepelt: x tanuló (1 pont)
Csak tavasszal szerepelt: $2x$ tanuló (1 pont)
Csak ősszel szerepelt: $\frac{x}{2}$ tanuló (2 pont)
Az egyenlet: $x+\frac{x}{2}+2x+10+10+13+8=188$ (2 pont)
Ebből $x=42$ (1 pont)
Tehát **42** olyan tanuló van, aki csak télen szerepelt (1 pont)

c) Az A osztályból 5 tanulót $\binom{32}{5}$-féleképpen választhatnak ki. (1 pont)
A B osztályból 5 tanulót $\binom{28}{5}$-féleképpen választhatnak ki. (1 pont)
A kedvező esetek száma: $\binom{32}{5}\cdot\binom{28}{5}$ (1 pont)
Az összes esetek száma: $\binom{60}{10}$ (1 pont)
A keresett valószínűség tehát: $\frac{\binom{32}{5}\cdot\binom{28}{5}}{\binom{60}{10}}\approx$**0,26** (1 pont)

Összesen: 17 pont

40) Adja meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy egy szabályos dobókockával egyszer dobva a dobott szám osztója a 60-nak! Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

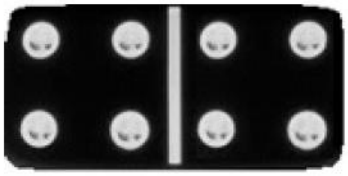
A szabályos dobókockán szereplő számok mindegyike osztója a 60-nak, (2 pont)
így a kérdezett esemény (a biztos esemény, melynek) valószínűsége 1. (1 pont)

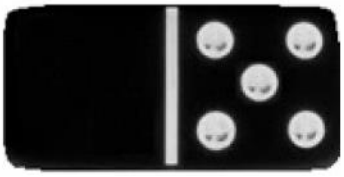
Összesen: 3 pont

41)

a) Egy memóriajáték 30 olyan egyforma méretű lapból áll, melyek egyik oldalán egy-egy egész szám áll az 1, 2, 3, ... 14, 15 számok közül. Mindegyik szám pontosan két lapon szerepel. A lapok másik oldala (a hátoldala) teljesen azonos mintázatú. A 30 lapot összekeverjük. A játék kezdetén a lapokat az asztalra helyezzük egymás mellé, hátoldalukkal felfelé fordítva, így a számok nem látszanak. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a játék kezdetén két lapot véletlenszerűen kiválasztva a lapokon álló számok megegyeznek!
(5 pont)

b) Egy dominókészlet azonos méretű kövekből áll. Minden dominókő egyik oldala egy vonallal két részre van osztva. Az egyes részeken elhelyezett pöttyök száma 0-tól 6-ig bármi lehet. Minden lehetséges párosításnak léteznie kell, de két egyforma kő nem lehet egy készletben. Az ábrán két kő látható: a 4-4-es és a 0-5-ös (vagy 5-0-ás). Hány kőből áll egy dominókészlet? **(6 pont)**





c) A „Ki nevet a végén?" nevű társasjátékban egy játékos akkor indulhat el a pályán, amikor egy szabályos dobókockával 6-ost dob. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy valaki pontosan a harmadik dobására indulhat el a pályán! **(6 pont)**

Megoldás:

a) Két lapot kiválasztunk a 30-ból, ezt $\binom{30}{2}=\frac{30\cdot 29}{2}=435$-féleképpen lehet megtenni, mely az összes lehetséges esetet jelenti. (2 pont)
A kedvező esetek száma (amikor a két lapon szereplő számok megegyeznek) 15. (2 pont)
A keresett valószínűség tehát: $\frac{15}{435}=\frac{1}{29}\approx \mathbf{0,0345}$. (1 pont)

b) Összesen 7 olyan kő van, amelyen a két részben azonos a pöttyök száma. (2 pont)
A kő két részén (a két részt megkülönböztetve) különböző számú pöttyöt $7\cdot 6=42$-féleképpen lehetne elhelyezni, (2 pont)
de így minden ilyen követ kétszer számolnánk, ezért ezek száma 21. (1 pont)
Összesen **28 kő** van a teljes készletben. (1 pont)

c) Aki pontosan a harmadik dobására kezdi el a játékot, az az első két dobásánál öt-ötfélét dobhatott, (1 pont)
a harmadikra viszont csak egyfélét (hatost). (1 pont)
Így a kedvező esetek száma $5 \cdot 5 \cdot 1$ (1 pont)
Az összes eset száma: 6^3. (1 pont)
A kérdéses valószínűség tehát: $\frac{25}{216} \approx \mathbf{0,1157}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

42) Egy kalapban 3 piros, 4 kék és 5 zöld golyó van. Találomra kihúzunk a kalapból egy golyót. Adja meg annak valószínűségét, hogy a kihúzott golyó nem piros! (2 pont)

Megoldás:

$\frac{9}{12} = \mathbf{0,75}$ (2 pont)

43) András és Péter „számkártyázik" egymással. A játék kezdetén mindkét fiúnál hat-hat lap van: az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számkártya. Egy mérkőzés hat csata megvívását jelenti, egy csata pedig abból áll, hogy András és Péter egyszerre helyez el az asztalon egy-egy számkártyát. A csatát az nyeri, aki a nagyobb értékű kártyát tette le. A nyertes elviszi mindkét kijátszott lapot. (Például ha András a 4-est, Péter a 2-est teszi le, akkor András viszi el ezt a két lapot.) Ha ugyanaz a szám szerepel a két kijátszott számkártyán, akkor a csata döntetlenre végződik. Ekkor mindketten egy-egy kártyát visznek el. Az elvitt kártyákat a játékosok maguk előtt helyezik el, ezeket a továbbiakban már nem játsszák ki.



a) Hány kártya van Péter előtt az első mérkőzés után, ha András az 1, 2, 3, 4, 5, 6, Péter pedig a 2, 4, 5, 3, 1, 6 sorrendben játszotta ki a lapjait? (2 pont)

A második mérkőzés során Péter az 1, 2, 3, 4, 5, 6 sorrendben játszotta ki a lapjait, és így összesen két lapot vitt el.

b) Adjon meg egy lehetséges sorrendet, amelyben András kijátszhatta lapjait! (3 pont)

A harmadik mérkőzés hat csatája előtt András elhatározta, hogy az első csatában a 2-es, a másodikban a 3-as számkártyát teszi majd le, Péter pedig úgy döntött, hogy ő véletlenszerűen játssza ki a lapjait (alaposan megkeveri a hat kártyát, és mindig a felül lévőt küldi csatába).

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első két csatát Péter nyeri meg! (6 pont)

A negyedik mérkőzés előtt mindketten úgy döntöttek, hogy az egész mérkőzés során véletlenszerűen játsszák majd ki a lapjaikat. Az első három csata után Andrásnál a 3, 4, 6 számkártyák maradtak, Péternél pedig az 1, 5, 6 számkártyák.

d) Adja meg annak a valószínűségét, hogy András az utolsó három csatából pontosan kettőt nyer meg! (6 pont)

Megoldás:

a) Péter megnyert három csatát (kettőt elvesztett), egy csata pedig döntetlenre végződött, (1 pont)
így Péter előtt összesen **hét kártya van** az első mérkőzés után. (1 pont)

b) Péter úgy vihetett el két lapot, ha egy csatát nyert és ötöt elveszített, vagy két csatában döntetlent ért el, és négyet elveszített. (1 pont)
András lapjainak (egyetlen lehetséges) sorrendje:
2, 3, 4, 5, 6, 1. (2 pont)

c) Péter az első két lapot $6 \cdot 5 = 30$-féleképpen tudja letenni, ez az összes esetek száma (1 pont)
Ezek közül a következő esetekben viszi el András első két lapját: (3; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 5), (4; 6), (5; 4), (5; 6), (6; 4), (6; 5). (3 pont)
Kedvező esetek száma 9. (1 pont)
A keresett valószínűség: $\frac{9}{30} = 0{,}3$. (1 pont)

d) Az összes lehetséges csata száma ezekkel a lapokkal $3! \cdot 3! =$ (1 pont)
$= 36$ (1 pont)
András akkor nyer pontosan kettőt, ha valamilyen sorrendben a 3-1, 6-5, 4-6 csaták, (1 pont)
vagy a 4-1, 6-5, 3-6 csaták zajlanak le. (1 pont)
Ezek $2 \cdot 3! = 12$-féleképpen valósulhatnak meg, ez a kedvező esetek száma. (1 pont)
A kérdéses valószínűség $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

44) Az első 100 pozitív egész szám közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Adja meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott szám osztható 5-tel! (2 pont)

Megoldás:

A kérdéses valószínűség: $\frac{20}{100} = 0{,}2$. (2 pont)

45) Egy focicsapat 11 játékosa megérkezik az edzésre, néhányan kezet fognak egymással. (Két játékos között legfeljebb egy kézfogás történik.) Az edző felírta, hogy ki hányszor fogott kezet, és a következő számokat kapta: 0; 1; 2; 2; 2; 5; 0; 0; 4; 4; 2.

a) Ábrázolja a kézfogásoknak egy lehetséges gráfját, ahol a pontok a játékosokat jelölik, és két pont között akkor van él, ha az illetők kezet fogtak az edzés előtt! (3 pont)

b) Hány kézfogás történt összesen? (2 pont)

Egy másik alkalommal az edző által feljegyzett 11 nemnegatív egész számról a következőket állapították meg: a számok egyetlen módusza 2, mediánja 3, átlaga 4, terjedelme pedig 5 volt.

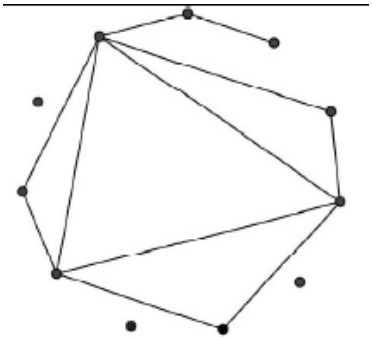
c) Adjon meg a fenti feltételeknek megfelelő 11 nemnegatív egész számot! (5 pont)

Az edzésen a játékosok a tizenegyesrúgást gyakorolják. Az egyik játékos 0,9 valószínűséggel lövi be a tizenegyest.

d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy három rúgásból legalább egyszer betalál? A valószínűség pontos értékét adja meg! (7 pont)

Megoldás:

a) Több lehetőség is van, például: (3 pont)



b) Annyi kézfogás történt, ahány éle van a gráfnak, (1 pont)
összesen **11**. (1 pont)

c) A vizsgázó által megadott számok egyetlen módusza 2, (1 pont)
mediánja 3, (1 pont)
átlaga 4, (1 pont)
terjedelme 5. (1 pont)
Egy lehetséges megoldás például 2; 2; 2; 2; 2; 3; 6; 6; 6; 6; 7. (1 pont)

d) Annak a valószínűsége, hogy a játékos nem lő be egy tizenegyest $(1-0,9)=0,1$. (1 pont)
Összesen három lehetőséget kell figyelembe venni. (1 pont)
Pontosan egyszer talál be, és kétszer nem. Ennek valószínűsége: $\binom{3}{1}\cdot 0,9\cdot 0,1^2\,(=0,027)$. (1 pont)
Pontosan kétszer talál be, és egyszer nem. Ennek valószínűsége: $\binom{3}{2}\cdot 0,9^2\cdot 0,1\,(=0,243)$. (1 pont)
Annak a valószínűsége, hogy mindháromszor betalál: $0,9^3\,(=0,729)$. (1 pont)
A keresett valószínűség ezek összege, (1 pont)
azaz **0,999**. (1 pont)

Összesen: 17 pont

46) Két különböző színű szabályos dobókockával egyszerre dobunk. Adja meg annak a valószínűségét, hogy a dobott számok szorzata prímszám lesz! Megoldását részletezze! (4 pont)

Megoldás:

Az összes eset száma 36. (1 pont)
Akkor lesz prímszám a sorozat, ha az egyik kockával 1-et és a másikkal 2-t, 3-t vagy 5-öt dobunk. (1 pont)
Ezt összesen $2\cdot 3=6$-féleképpen tehetjük meg (ez a kedvező esetek száma). (1 pont)
A keresett valószínűség: $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$. (1 pont)

Összesen: 4 pont

47) Egy webáruházba való belépés előzetes regisztrációhoz kötött, melynek során a regisztráló életkorát is meg kell adnia. Az adatok alapján a 25560 regisztráló közül 28 évesnél fiatalabb 7810 fő, 55 évesnél idősebb 4615 fő, a többiek 28 és 55 év közöttiek.

a) Készítsen a létszámadatok alapján kördiagramot, kiszámítva a három körcikkhez tartozó középponti szögeket is! (5 pont)

A webáruház üzemeltetői a vásárlói szokásokat szeretnék elemezni, ezért a regisztráltak közül véletlenszerűen kiválasztanak két személyt.

b) Adja meg annak a valószínűségét, hogy az egyik kiválasztott személy 28 évesnél fiatalabb, a másik 55 évesnél idősebb! (4 pont)

A regisztráltak egy része vásárol is a webáruházban. A vásárlók között a 28 év alattiak éppen kétszer annyian vannak, mint az 55 évesnél idősebbek. A 28 év alattiak az elmúlt időszakban összesen 19 325 700 Ft, az 55 év felettiek 17 543 550 Ft értékben vásároltak. Az 55 év felettiek átlagosan 2410 Ft-al költöttek többet, mint a 28 év alattiak.

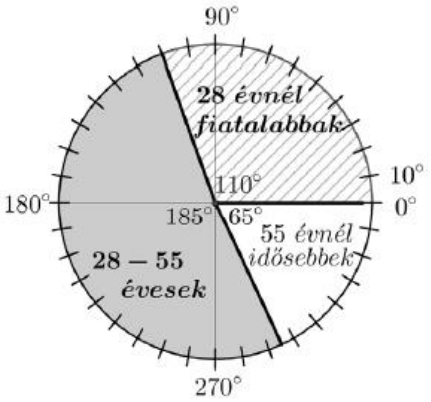
c) Számítsa ki, hány 55 év feletti vásárlója volt a webáruháznak, és adja meg, hogy ezek a vásárlók átlagosan mennyit költöttek! (8 pont)

Megoldás:

a) A 28 évesnél fiatalabbakat ábrázoló körcikk középponti szöge
$\frac{7810}{25560}\cdot 360° = 110°$. (1 pont)

Az 55 évesnél idősebbeket ábrázoló körcikk középponti szöge $\frac{4615}{25560}\cdot 360° = 65°$. (1 pont)

A 28 és 55 év közöttieket ábrázoló körcikk középponti szöge $360° - (110° + 65°) = 185°$. (1 pont)



Az egyes körcikkek megjelenítése a megfelelő méretben, (1 pont)
egyértelmű jelmagyarázattal: (1 pont)

b) A 28 év alattiak közül egyet 7810-féleképpen, az 55 évesnél idősebbek közül egyet 4615-féleképpen tudunk kiválasztani, így a kedvező esetek száma $7810\cdot 4615 (= 36043150)$. (1 pont)

Az összes esetek száma: $\binom{25560}{5} (= 326644020)$. (1 pont)

A kérdéses valószínűség $\frac{7810\cdot 4615}{\binom{25560}{2}} \approx$ (1 pont)

$\approx 0{,}11$. (1 pont)

c) Az 55 év feletti vásárlók számát jelölje x, ekkor a 28 év alattiak száma $2x$. Az 55 év felettiek átlagosan $\frac{17543550}{x}$, (1 pont)

a 28 év alattiak átlagosan $\frac{19325700}{2x}$ Ft-ot költöttek. (1 pont)

A feladat szövege alapján felírható: $\frac{17543550}{x} - 2410 = \frac{19325700}{2x}$. (1 pont)

Ebből $2410x = 7880700$, (1 pont)

azaz $x = 3270$. (1 pont)

$\frac{17543550}{3270} = 5365$ (1 pont)

A webáruháznak **3270** olyan vásárlója volt, aki 55 évnél idősebb, és ők átlagosan **5365** Ft-ot költöttek. (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

Összesen: 17 pont

48) A biológiaérettségi egyik tesztkérdésénél a megadott öt válaszlehetőség közül a két jót kell megjelölni.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az öt lehetőség közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva a két jó választ találjuk el! (3 pont)

Nóri, Judit és Gergő egy 58 kérdésből álló biológiateszttel mérik fel tudásukat az érettségi előtt. A kitöltés után, a helyes válaszokat megnézve az derült ki, hogy Nóri 32, Judit 38 kérdést válaszolt meg helyesen, és 21 olyan kérdés volt, amelyre mindketten jó választ adtak. Megállapították azt is, hogy 11 kérdésre mindhárman helyesen válaszoltak, és Gergő helyesen megoldott feladati közül 17-et Nóri is, 19-et Judit is jól oldott meg. Volt viszont 4 olyan kérdés, amelyet egyikük sem tudott jól megválaszolni.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy kérdést véletlenszerűen kiválasztva, arra Gergő helyes választ adott! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (8 pont)

Nóri a biológia és kémia szóbeli érettségire készül. Biológiából 28, kémiából 30 tételt kell megtanulnia. Az első napra mindkét tárgyból 3-3 tételt szeretne kiválasztani, majd a kiválasztott tételeket sorba állítani úgy, hogy a két tantárgy tételei felváltva kövessék egymást.

c) Számítsa ki, hányféleképpen állíthatja össze Nóri az első napra szóló tanulási programját! (6 pont)

Megoldás:

a) Az öt lehetőség közül kettőt kiválasztani $\binom{5}{2}=10$-féleképpen lehet (összes esetek száma). (2 pont)

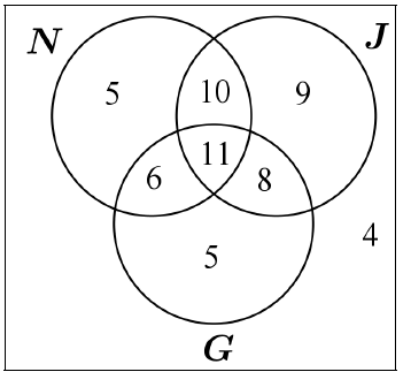
Ezek közül egy esetben kapunk jó megoldást, így a kérdéses valószínűség **0,1**. (1 pont)

b) A pontosan két diák által jól megoldott feladatok száma:

Nóri-Judit: $21-11=10$,

Nóri-Gergő: $17-11=6$ (1 pont)

Judit-Gergő: $19-11=8$



A feladatok között $32-11-10-6=5$ olyan volt, amelyet csak Nóri, és $38-11-10-8=9$ olyan, amelyet csak Judit oldott meg helyesen. (1 pont)

Azon kérdések száma, amelyre a három tanuló közül legalább egyikük helyes választ adott: $58-4=54$. (1 pont)

$32+38-21=49$ olyan kérdés volt, amelyre Nóri vagy Judit helyes választ adott, (1 pont)

így $54-49=5$ olyan feladat volt, amelyet csak Gergő oldott meg helyesen. (1 pont)

A Gergő által helyesen megoldott feladatok száma: $5+6+8+11=30$. (1 pont)

Így a kérdéses valószínűség $\frac{30}{58}\approx$ (1 pont)

$\approx$ **0,517**. (1 pont)

c) A három megtanulandó biológiai tételt $\binom{28}{3}$, (1 pont)

a kémia tételeket $\binom{30}{3}$-féleképpen lehet kiválasztani. (1 pont)

A kiválasztott tételeket tárgyanként $3!(=6)$-féleképpen lehet sorba rendezni. (1 pont)

Az első tétel kétféle tárgyból választható, de a tárgyak sorrendje az első tétel kiválasztása után már adott. (1 pont)

A különböző sorrendek száma: $2\cdot\binom{28}{3}\cdot 3!\cdot\binom{30}{3}\cdot 3!$. (1 pont)

Vagyis Nóri összesen **957640320**-féleképpen állíthatja össze a tételek sorrendjét. (1 pont)

Összesen: 17 pont

49) Az 50-nél nem nagyobb pozitív páros számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy néggyel osztható számot választunk? Válaszát indokolja! (3 pont)

***Megoldás*:**

Az 50-nél nem nagyobb pozitív páros számokból 25 db van, ez az összes eset száma. (1 pont)

Ezek közül 12 db osztható néggyel, ez a kedvező esetek száma. (1 pont)

Így a kérdéses valószínűség $P = \frac{12}{25} = \mathbf{0,48}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

50) Egy műanyag terméket gyártó üzemben szabályos hatoldalú csonkagúla alakú, felül nyitott virágtartó dobozokat készítenek egy kertészet számára (lásd az ábrát). A csonkagúla alaplapja 13 cm oldalú szabályos hatszög, fedőlapja 7 cm oldalú szabályos hatszög, az oldalélei 8 cm hosszúak.



a) Egy műanyagöntő gép 1 kg alapanyagból (a virágtartó doboz falának megfelelő anyagvastagság mellett) $0,93\,\text{m}^2$ felületet képes készíteni. Számítsa ki, hány virágtartó doboz készíthető 1 kg alapanyagból! (11 pont)

A kertészetben a sok virághagymának csak egy része hajt ki: 0,91 annak a valószínűsége, hogy egy elültetett virághagyma kihajt.

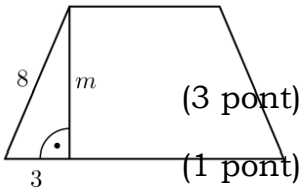
b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy 10 darab elültetett virághagyma közül legalább 8 kihajt! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (6 pont)

***Megoldás*:**

a) A virágtartó doboz talpának felszíne megegyezik a csonkagúla 7 cm-es oldalhosszúságú fedőlapjának területével. Ez egy szabályos hatszög, melynek területe egyenlő 6 db 7 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög területével. (1 pont)

$t_1 = 6 \cdot \frac{7^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} \approx 127,3\,\text{cm}^2$ (2 pont)

A virágtartó oldalának felületét a csonkagúla oldallapjait alkotó húrtrapézok területével számítjuk ki.



A magasság az $3^2 + m^2 = 8^2$ összefüggésből adódóan $m \approx 7,42\,\text{cm}$. (3 pont)

A trapéz területe ekkor: $t_2 = \frac{7+13}{2} \cdot 7,42 = 74,2\,\text{cm}^2$. (1 pont)

Így a teljes felület $A = 127,3 + 6 \cdot 74,2 = 572,5\,\text{cm}^2$. (1 pont)

Mivel a gép 1 kg anyagból $9300\,\text{cm}^2$ felületet képes elkészíteni, ezért 1 kg anyagból $\frac{9300}{572,5} \approx 16,24$. (2 pont)

Vagyis **16** virágtartó doboz készíthető. (1 pont)

b) Ha legalább 8 virághagyma kihajt, akkor 8, 9 vagy 10 hajt ki. (1 pont)
I. Annak a valószínűsége, hogy pontosan 8 kihajt és 2 nem a binomiális tétellel számítható ki: $p_1 = \binom{10}{8} \cdot 0{,}91^8 \cdot 0{,}09^2 \approx 0{,}1714$ (1 pont)

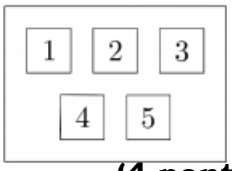
II. Annak a valószínűsége, hogy pontosan 9 kihajt és 1 nem: $p_2 = \binom{10}{9} \cdot 0{,}91^9 \cdot 0{,}09 \approx 0{,}3851$ (1 pont)

III. Végül annak a valószínűsége, hogy mind a 10 kihajt: $p_3 = 0{,}91^{10} \approx 0{,}3894$ (1 pont)

A keresett valószínűség a három eset valószínűségének összege, vagyis $P = p_1 + p_2 + p_3 = \mathbf{0{,}946}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

51) Az osztály lottót szervez, melyben az 1;2;3;4;5 számok közül húznak ki hármat. Tamás a 2;3;5 számokat jelöli be a szelvényen. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy Tamásnak telitalálata lesz! Számítását részletezze!



(4 pont)

***Megoldás*:**

Az összes lehetséges húzás száma $\binom{5}{3} = 10$, amely az összes esetek száma.

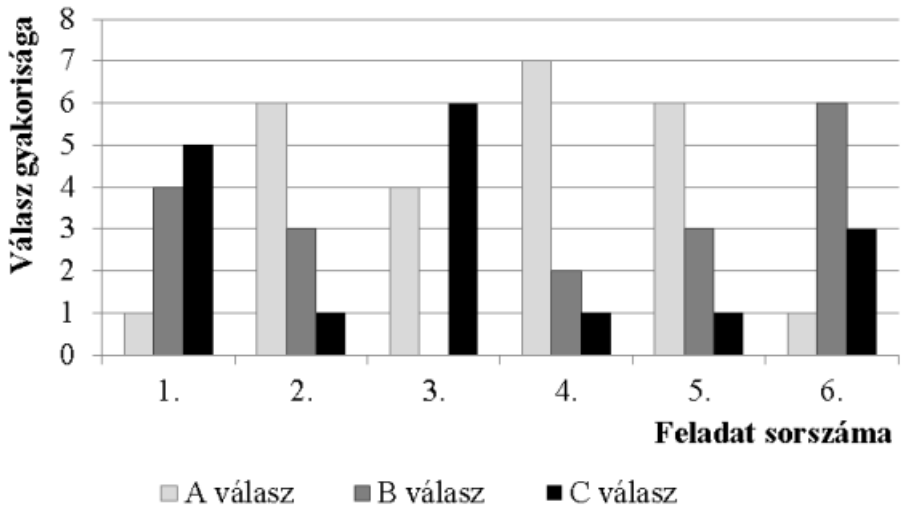
(2 pont)

A kedvező esetek száma pedig 1, hiszen egyféleképpen tudjuk kiválasztani a nyertes szelvényt. (1 pont)

Így a keresett valószínűség $P = \frac{1}{10} = \mathbf{0{,}1}$. (1 pont)

Összesen: 4 pont

52) Egy hat kérdéses tesztben minden kérdésnél a megadott három lehetőség (A, B és C) közül kellett választani a helyes választ. A tesztet tíz diák írta meg. Az alábbi diagram az egyes feladatokra adott választok eloszlását mutatja.



A teszt értékelésekor minden helyes válaszra 1 pont, helytelen válaszra pedig 0 pont jár. Tudjuk, hogy a tíz diák összesen 35 pontot szerzett.

a) Határozza meg az összes jó és az összes rossz válasz számát, és készítsen ezekről kördiagramot! (4 pont)

b) Igaz-e, hogy minden kérdésre az a jó válasz, amit a legtöbben jelöltek be? Válaszát indokolja! (3 pont)

Éva, János és Nóra is megírták ezt a tesztet. Egyetlen olyan kérdés volt, amelyre mindhárman jól válaszoltak. Három olyan kérdés volt, amit Éva és János is jól válaszolt meg, kettő olyan, amire János és Nóra is, és egy olyan, amire Nóra és Éva is jó választ adott. Két olyan kérdés volt, amelyet csak egyvalaki oldott meg helyesen hármuk közül.

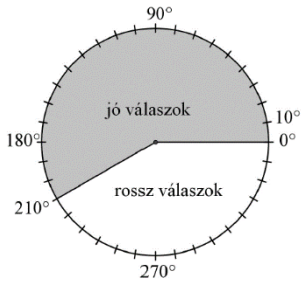
c) Hány pontot szereztek ők hárman összesen ezen a teszten? (5 pont)

Az egyik diák nem készült fel a tesztre, válaszait tippelve, véletlenszerűen adja meg.

d) Mekkora valószínűséggel lesz legalább egy jó válasza a tesztben? (5 pont)

***Megoldás*:**

a) A jó válaszok száma 35, a rossz válaszok száma 25.
A 10 diák összesen 60 választ adott, ezért 1 válasz 6°-nak felel meg a kördiagramon.

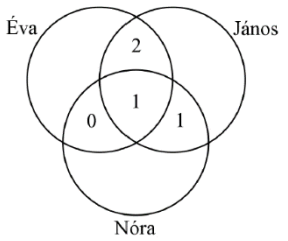


Így a jó válaszok számát egy 210°-os körcikk, a rossz válaszok számát pedig egy 150°-os körcikk szemlélteti. (2 pont)

b) Az ábráról leolvasva, ha az állítás igaz lenne, akkor tanulók összesen $5+6+6+7+6+6=36$ pontot szereztek volna, viszont azt tudjuk, hogy 35 jó válasz volt, ezért az állítás **hamis**.

(3 pont)

c) A megválaszolt kérdések számát egy Venn-diagramon ábrázoljuk.



Azért a két feladatért, amit csak egyedül oldottak meg 2 pont jár, így összesen $3\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 1+2=\mathbf{11}$ pontot szereztek.

d) Az összes eset száma $3^6=729$, ennyiféleképpen lehet kitölteni a tesztet. (1 pont)

A kedvező esetek számát megkaphatjuk úgy, hogy az összes eset számából levonjuk a kedvezőtlen esetek számát. (1 pont)

Hogy egy válasz se legyen helyes $2^6=64$-féleképpen lehetséges, így a kedvező esetek száma $729-64=665$. (2 pont)

A keresett valószínűség pedig $P=\dfrac{665}{729}=\mathbf{0,91}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

53) Zsófi gyertyákat szeretne önteni, hogy megajándékozhassa a barátait. Öntőformának egy négyzet alapú szabályos gúlát választ, melynek alapéle 6 cm, oldaléle 5 cm hosszúságú. Egy szaküzletben 11 cm oldalú, kocka alakú tömbökben árulják a gyertyának való viaszt. Ezt megolvasztva és az olvadt viaszt a formába öntve készülnek a gyertyák. (A számítások során tekintsen el az olvasztás és öntés során bekövetkező térfogatváltozástól.)

a) Legfeljebb hány gyertyát önthet Zsófi egy 11 cm oldalú, kocka alakú tömbből? (6 pont)

Zsófi az elkészült gúla alakú gyertyák lapjait szeretné kiszínezni. Mindegyik lapot (az alaplapot és az oldallapokat is) egy-egy színnek, kékkel vagy zölddel fogja színezni.

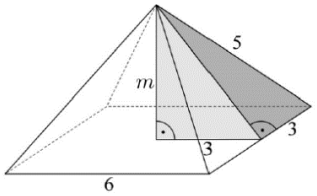
b) Hányféle különböző gyertyát tud Zsófi ilyen módon elkészíteni? (Két gyertyát különbözőnek tekintünk, ha forgással nem vihetők egymásba.) (6 pont)

Zsófi a gyertyák öntéséhez három különböző fajta „varázskanócot” használ. Mindegyik fajta „varázskanóc” fehér színű, de a meggyújtáskor (a benne lévő anyagtól függően) az egyik fajta piros, a másik lila, a harmadik narancssárga lánggal ég, Zsófi hétfőn egy dobozba tesz 6 darab gyertyát, mindhárom fajtából kettőt-kettőt. Keddtől kezdve minden nap véletlenszerűen kivesz egy gyertyát a dobozból, és meggyújtja.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy Zsófi az első három nap három különböző színű lánggal égő gyertyát gyújt meg! (5 pont)

***Megoldás*:**

a) A gúla oldallap magasságának kiszámításához Pitagorasz-tételt írunk fel: $\sqrt{5^2-3^2}=4$, majd a gúla magasságához újra alkalmazzuk: $m=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}\approx 2{,}65\,\text{cm}$.



pont)

Ezután kiszámoljuk a gúla térfogatát.

$V_{gúla}=\frac{6^2\cdot\sqrt{7}}{3}=12\sqrt{7}\approx 31{,}75\,\text{cm}^3$ (1 pont)

Egy kocka alakú tömb térfogata $V_{kocka}=11^3=1331\,\text{cm}^3$, így egy kockából $\frac{1331}{31{,}75}\approx 41{,}9$, azaz **41** gyertya önthető ki. (3 pont)

b) Az alaplapot kétféleképpen lehet kiszínezni. (1 pont)
Az oldallapok lehetnek ugyanolyan színűek, mindegyik kék, vagy mindegyik zöld, ez összesen két eset. (1 pont)
Lehet három oldallap zöld és egy kék, vagy három oldallap kék és egy zöld, ez is összesen két eset. (1 pont)
Olyan festésből, amikor két oldallap zöld és két oldallap kék, szintén kétféle lehet, attól függően, hogy az ugyanolyan színű lapok szomszédosak vagy szemköztiek. (1 pont)
Az oldallapokat tehát hatféleképpen lehet kiszínezni, így összesen $2\cdot 6=$ **12** különböző színezés készíthető. (2 pont)

c) Az első gyertya bármilyen színű lánggal éghet. (1 pont)
Annak, hogy a második gyertya más színű lánggal ég, $\frac{4}{5}$ a valószínűsége. (1 pont)
Annak, hogy a harmadik gyertya más színű lánggal ég, mint az első kettő, $\frac{2}{4}$ a valószínűsége. (1 pont)
Ekkor a kérdéses valószínűség $P=1\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{5}=\mathbf{0,4}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont