MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI KÖZÉPSZINT

Számelmélet

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Egy számtani sorozat második tagja 17, harmadik tagja 21.

a) Mekkora az első 150 tag összege? (5 pont)

Kiszámoltuk ebben a sorozatban az első 111 tag összegét: 25 863.

b) Igaz-e, hogy 25 863 számjegyeit tetszőleges sorrendben felírva mindig hárommal osztható számot kapunk? (Válaszát indokolja!) (3 pont)

c) Gábor olyan sorrendben írja fel 25 863 számjegyeit, hogy a kapott szám néggyel osztható legyen. Milyen számjegy állhat a tízes helyiértéken? (Válaszát indokolja!) (4 pont)

Megoldás:

a) $a_2 = 17 = a_1 + d$ és $a_3 = 21 = a_1 + 2d$

$d = 4$ (1 pont)

$a_1 = 13$ (1 pont)

$a_{150} = a_1 + 149d = 609$ (1 pont)

$S_{150} = \frac{13 + 609}{2} \cdot 150$ (1 pont)

$S_{150} = \mathbf{46650}$ (1 pont)

b) Alkalmazzuk a hárommal való oszthatóság szabályát. (1 pont)

25863 számjegyeinek összege 24, így osztható 3-mal. (1 pont)

Tetszőleges sorrend esetén az összeg nem változik, tehát az állítás igaz. (1 pont)

c) Alkalmazzuk a néggyel való oszthatóság szabályát. (1 pont)

Ebben az esetben ez akkor teljesül, ha az utolsó két számjegy: 28; 32; 36; 52; 56; 68. (1 pont)

A tízes helyiértéken tehát 2; 3; 5; vagy 6 állhat. (1 pont)

Összesen: 12 pont

2) Peti felírt egy hárommal osztható hétjegyű telefonszámot egy cédulára, de az utolsó jegy elmosódott. A barátja úgy emlékszik, hogy az utolsó jegy nulla volt. A kiolvasható szám: 314726Δ. Igaza lehetett-e Peti barátjának? Válaszát indokolja! (2 pont)

Megoldás:

Megvizsgáljuk, hogy a szám osztható-e hárommal. (1 pont)

A számjegyek összege nem három többszöröse (a 0 az összegen nem változtat), **tehát nem volt igaza**. (1 pont)

Összesen: 2 pont

3) Tekintse a következő állításokat, és a táblázatban mindegyik betűjele mellé írja oda, hogy igaz, vagy hamis állításról van-e szó!

a) Két pozitív egész közül az a nagyobb, amelyiknek az abszolút-értéke nagyobb. (1 pont)

b) Két egész szám közül az a nagyobb, amelyiknek az abszolút-értéke nagyobb. (1 pont)

c) Negatív szám egész kitevőjű hatványai között pozitívak és negatívak is vannak. (1 pont)

Megoldás:

a) **igaz** (1 pont)

b) **hamis** (1 pont)

c) **igaz** (1 pont)

Összesen: 3 pont

4) Összeadtunk ötvenöt egymást követő pozitív páratlan számot, az összeg értéke 3905.

a) Melyik volt az összegben az első, illetve az ötvenötödik páratlan szám? (8 pont)

b) Melyik az összeadottak között a legkisebb olyan szám, amelynek a prímtényezős felbontásában két különböző prímszám szerepel, és a négyzete ötre végződik? (4 pont)

Megoldás:

a) Az összeadott páratlan számok egy $d=2$ differenciájú számtani sorozat szomszédos tagjai. (1 pont)

Legyen az összeg legkisebb tagja a_1, ekkor $a_{55}=a_1+54\cdot 2$ (1 pont)

A számtani sorozat első n elemének összegére vonatkozó képletet alkalmazva:

$S_{55}=55\cdot\frac{2a_1+54\cdot 2}{2} \Rightarrow 3905=55(a_1+54)$ (2 pont)

$\boldsymbol{a_1=17}$ (1 pont)

$\boldsymbol{a_{55}=125}$ (1 pont)

Tehát a keresett páratlan számok a 17 és a 125. (1 pont)

Ellenőrzés: az összes valóban 3905. (1 pont)

b) A keresett számnak 5-re kell végződnie. (1 pont)

A 17 után a legkisebb ilyen szám a 25, de ez nem felel meg. (1 pont)

A következő szám 35, és ez jó, mert $35=5\cdot 7$. (1 pont)

Tehát a keresett szám a 35. (1 pont)

Összesen: 12 pont

5) A pozitív egészeket növekvő sorrendbe állítjuk. Melyik szám nagyobb: a hetedik 13-mal osztható pozitív egész, vagy a tizenharmadik 7-tel osztható pozitív egész? (2 pont)

Megoldás:

A két szám egyenlő. $(7\cdot 1=91)$ (2 pont)

6) Háromjegyű számokat írtunk fel a 0; 5 és 7 számjegyekkel. Írja fel ezek közül azokat, amelyek öttel oszthatók, és különböző számjegyekből állnak! (2 pont)

Megoldás:

A keresett számok: **570; 750; 705**. (2 pont)

7) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis!

a) Ha egy természetes szám osztható hattal és tízzel, akkor osztható hatvannal. (1 pont)
b) A 20-nál kisebb pozitív prímszámok összege páratlan. (1 pont)
c) A deltoid átlói felezik a belső szögeket. (1 pont)

Megoldás:

a) **hamis** (1 pont)
b) **igaz** (1 pont)
c) **hamis** (1 pont)

Összesen: 3 pont

8) Adja meg a $\left]-\frac{3}{8};-\frac{1}{8}\right[$ nyílt intervallum két különböző elemét! (2 pont)

Megoldás:

Például: $M=\left\{-\frac{3}{10};-\frac{1}{5}\right\}$ (2 pont)

9) Írja fel két egész szám hányadosaként a $2+\frac{2}{3}$ szám reciprokának értékét! (2 pont)

Megoldás:

A $2+\frac{2}{3}$ reciproka: $\frac{1}{2+\frac{2}{3}}$ (1 pont)

A reciprok értéke: $\frac{3}{8}\left(=\frac{375}{1000}\right)$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

10) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával ötjegyű számokat készítünk az összes lehetséges módon (egy számjegyet többször is felhasználhatunk). Ezek között hány olyan szám van,
a) amely öt azonos számjegyből áll; (3 pont)
b) amelyik páros; (4 pont)
c) amelyik 4-gyel osztható? (5 pont)

Megoldás:

a) **6** ilyen szám van. (3 pont)

b) Az utolsó számjegy páros szám (2, 4, vagy 6), (1 pont)

az első 4 számjegy $6^4 = (1296)$-féleképpen alakulhat. (2 pont)

$\mathbf{3 \cdot 6^3 (= 3888)}$-féle páros szám lehet. (1 pont)

c) (A 4-gyel való oszthatósági szabály értelmében) a két utolsó helyen 12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64 állhat, (2 pont)

az első 3 számjegy pedig $6^3 = (216)$-féleképpen alakulhat. (2 pont)

Tehát $\mathbf{9 \cdot 6^3 (= 1944)}$ féle 4-gyel osztható szám lehet. (1 pont)

Összesen: 12 pont

11) Adja meg a 24 egyjegyű pozitív osztóinak halmazát! (2 pont)

Megoldás:

A keresett halmaz: {**1; 2; 3; 4; 6; 8**}. (2 pont)

12) Írja fel 24 és 80 legkisebb közös többszörösét! Számítását részletezze! (3 pont)

Megoldás:

$24 = 2^3 \cdot 3$ (1 pont)

$80 = 2^4 \cdot 5$ (1 pont)

A legkisebb közös többszörös: $\mathbf{2^4 \cdot 3 \cdot 5 (= 240)}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

13) Sorolja fel a 2010-nek mindazokat a pozitív osztóit, amelyek prímszámok! (2 pont)

Megoldás:

2, **3**, **5** és **67**. (2 pont)

14) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis!

I. Minden prímszám páratlan. (1 pont)
II. Létezik páratlan prímszám. (1 pont)
III. Minden egész szám racionális szám. (1 pont)
IV. Van olyan irracionális szám, amelyik felírható két egész szám hányadosaként (1 pont)

Megoldás:

I. **hamis** (1 pont)
II. **igaz** (1 pont)
III. **igaz** (1 pont)
IV. **hamis** (1 pont)

Összesen: 4 pont

15) Adottak a következő számok: $a = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^4$ és $b = 2 \cdot 5^2 \cdot 11^3 \cdot 13$.
Írja fel a és b legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!
A kért számokat elegendő prímtényezős alakban megadni. (2 pont)

Megoldás:

A legnagyobb közös osztó: $2 \cdot 5 \cdot 11^3 \left(= 13310\right)$ (1 pont)

A legkisebb közös többszörös: $2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^4 \cdot 13 \left(= 1865263400\right)$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

16) Döntse el az alábbi állítások mindegyikéről, hogy igaz-e vagy hamis!
A: Ha két szám négyzete egyenlő, akkor a számok is egyenlők. (1 pont)
B: A kettes számrendszerben felírt 10100 szám a tízes számrendszerben 20. (1 pont)
C: Egy hatoldalú konvex sokszögnek 6 átlója van. (1 pont)

Megoldás:

A: **hamis** (1 pont)
B: **igaz** (1 pont)
C: **hamis** (1 pont)

Összesen: 3 pont

17) Írja fel prímszámok szorzataként a 420-at! (2 pont)

Megoldás:

$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \left(= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\right)$ (2 pont)

18) Bontsa fel a 36000-et két részre úgy, hogy a részek aránya 5:4 legyen!
(2 pont)

Megoldás:

20 000 és **16 000**. (2 pont)

19) Adja meg a következő állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

A) A $\{0;1;2;3;4\}$ adathalmaz szórása 4.

B) Ha egy sokszög minden oldala egyenlő hosszú, akkor a sokszög szabályos.

C) A 4 és a 9 mértani közepe 6. **(2 pont)**

Megoldás:

A) **hamis**
B) **hamis**
C) **igaz** (2 pont)

Összesen: 2 pont

20) Döntse el, melyik állítás igaz, melyik hamis!

a) A valós számok halmazán értelmezett $f(x)=4$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény grafikonja az x tengellyel párhuzamos egyenes. **(1 pont)**

b) Nincs két olyan prímszám, amelyek különbsége prímszám. **(1 pont)**

c) Az 1 cm sugarú kör kerületének cm-ben mért számértéke kétszer akkora, mint területének cm^2-ben mért számértéke. **(1 pont)**

d) Ha egy adathalmaz átlaga 0, akkor a szórása is 0. **(1 pont)**

Megoldás:

a) igaz (1 pont)
b) hamis (1 pont)
c) igaz (1 pont)
d) hamis (1 pont)

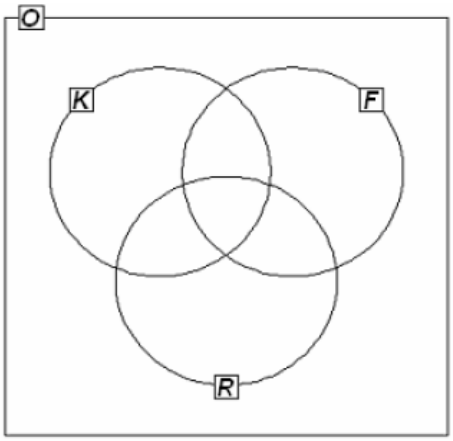
Összesen: 4 pont

21) Egy érettségiző osztály félévi matematika osztályzatai között elégtelen nem volt, de az összes többi jegy előfordult. Legkevesebb hány tanulót kell kiválasztani közülük, hogy a kiválasztottak között biztosan legyen legalább kettő, akinek azonos volt félévkor a matematika osztályzata? **(2 pont)**

Megoldás:

A kiválasztandó tanulók száma: **5**. (2 pont)

22) Egy osztályban a következő háromféle sportkört hirdették meg: kosárlabda, foci és röplabda. Az osztály 30 tanulója közül kosárlabdára 14, focira 19, röplabdára 14 tanuló jelentkezett. Ketten egyik sportra sem jelentkeztek. Három gyerek kosárlabdázik és focizik, de nem röplabdázik, hatan fociznak és röplabdáznak, de nem kosaraznak, ketten pedig kosárlabdáznak és röplabdáznak, de nem fociznak. Négyen mind a háromféle sportot űzik.



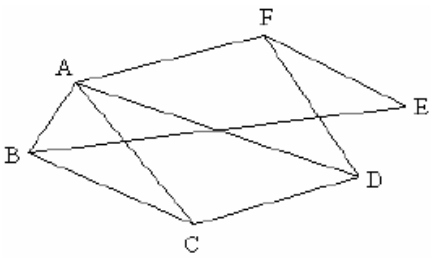
1. ábra

a) Írja be a megadott halmazábrába (1. ábra) a szövegnek megfelelő számokat! (4 pont)

b) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását!
A focira jelentkezett tanulók közül mindenkinek van testvére.
(2 pont)

c) A focira jelentkezett 19 tanulóból öten vehetnek részt egy edzőtáborban. Igazolja, hogy több, mint 10 000-féleképpen lehet kiválasztani az öt tanulót! (3 pont)

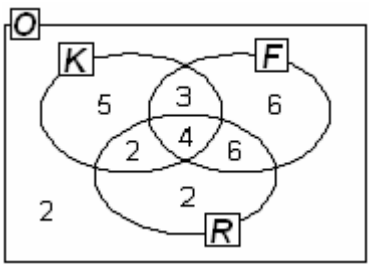
d) Az iskolák közötti labdarúgóbajnokságra jelentkezett 6 csapat között lejátszott mérkőzéseket szemlélteti a 2. ábra. Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik a bajnokságban? (Válaszát indokolja!) (3 pont)



2. ábra

Megoldás:

a)



(4 pont)

b) **A focira jelentkezettek között van olyan, akinek nincs testvére**. *VAGY:* **A focira jelentkezettek közül nem mindenkinek van testvére**. (2 pont)

c) Az öt tanulót $\binom{19}{5} = \frac{19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15}{5!} =$ **11628-féleképpen** lehet kiválasztani.

(3 pont)

d) A mérkőzések száma összesen: $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$ (1 pont)

Eddig lejátszottak 9 mérkőzést. (1 pont)

6 mérkőzés van még hátra. (1 pont)

Összesen: 12 pont

23)

a) Iktasson be a 6 és az 1623 közé két számot úgy, hogy azok a megadottakkal együtt egy számtani sorozat szomszédos tagjai legyenek! (5 pont)

b) Számítsa ki a 6 és az 1623 közötti néggyel osztható számok összegét! (7 pont)

Megoldás:

a) A sorozat tagjai: 6; 6 + d; 6 + 2d; 1623 (1 pont)

6 + 3d = 1623 (1 pont)

d = 539 (1 pont)

Az első beiktatott szám: **545** (1 pont)

A második beiktatott szám: **1084** (1 pont)

b) A feltételeknek megfelelő számok: 8; 12; 16; …; 1620 (2 pont)

Ezek a számok egy számtani sorozat egymást követő tagjai (1 pont)

$1620 = 8 + 4\cdot(n-1)$ (1 pont)

$n = 404$ (1 pont)

$S_n = \frac{8+1620}{2}\cdot 404$ (1 pont)

$\boldsymbol{S_n = 328856}$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

24) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

a) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója mindig kisebb mindkét számnál.

b) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója mindig osztója a két szám összegének.

c) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója nem lehet 1.

Megoldás:

a) **Hamis**

b) **Igaz**

c) **Hamis** (1 pont-két helyes válasz, 2 pont-3 helyes válasz)

25) Adja meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy egy szabályos dobókockával egyszer dobva a dobott szám osztója a 60-nak! Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

A szabályos dobókockán szereplő számok mindegyike osztója a 60-nak,(2 pont) így a kérdezett esemény (a biztos esemény, melynek) valószínűsége 1. (1 pont)

Összesen: 3 pont

26) Legyen *A* halmaz a 8-nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza, *B* pedig a 3-mal osztható egyjegyű pozitív egész számok halmaza. Elemeinek felsorolásával adja meg az *A*, a *B*, az $A \cap B$ és az $A \setminus B$ halmazt! (4 pont)

Megoldás:

$A = \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$ (1 pont)

$B = \{3;6;9\}$ (1 pont)

$A \cap B = \{3;6\}$ (1 pont)

$A \setminus B = \{1;2;4;5;7;8\}$ (1 pont)

Összesen: 4 pont

27) Melyik számjegy állhat a $\overline{2582X}$ ötjegyű számban az *X* helyén, ha a szám osztható 3-mal? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Egy szám akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal. (1 pont)

$2+5+8+2=17$ (1 pont)

Így *X* lehetséges értékei: **1; 4; 7**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

28) Jelölje $\mathbb{N}$ a természetes számok halmazát, $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát és $\varnothing$ az üres halmazt! Adja meg az alábbi halmazműveletek eredményét!

a) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$

b) $\mathbb{Z} \cup \varnothing$

c) $\varnothing \setminus \mathbb{N}$ **(3 pont)**

Megoldás:

a) $\mathbb{N}$ (1 pont)

b) $\mathbb{Z}$ (1 pont)

c) $\varnothing$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

29) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

A: Minden valós szám abszolút értéke pozitív.

B: $16^{\frac{1}{4}} = 2$

C: Ha egy szám osztható 6-tal és 9-cel, akkor biztosan osztható 54-gyel is. (2 pont)

Megoldás:

A: **Hamis**
B: **Igaz**
C: **Hamis** (2 pont)

30) Milyen számjegy állhat az X helyén, ha a négyjegyű $\overline{361X}$ szám 6-tal osztható? (2 pont)

Megoldás:

$X = 2$ vagy (1 pont)
$X = 8$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

31) Két különböző színű szabályos dobókockával egyszerre dobunk. Adja meg annak a valószínűségét, hogy a dobott számok szorzata prímszám lesz! Megoldását részletezze! (4 pont)

Megoldás:

Az összes eset száma 36. (1 pont)
Akkor lesz prímszám a sorozat, ha az egyik kockával 1-et és a másikkal 2-t, 3-t vagy 5-öt dobunk. (1 pont)
Ezt összesen $2 \cdot 3 = 6$-féleképpen tehetjük meg (ez a kedvező esetek száma). (1 pont)
A keresett valószínűség: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. (1 pont)

Összesen: 4 pont

32) Az A halmaz elemei a 28 pozitív osztói, a B halmaz elemei a 49 pozitív osztói. Adja meg az $A \cap B$ és a $B \setminus A$ halmazokat elemeik felsorolásával! Megoldását részletezze! (3 pont)

Megoldás:

A halmaz elemei: $A = \{1;2;4;7;14;28\}$

B halmaz elemei: $B = \{1;7;49\}$ (1 pont)

$A \cap B = \{1;7\}$ (1 pont)

$B \setminus A = \{49\}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

33) Az 50-nél nem nagyobb pozitív páros számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy néggyel osztható számot választunk? Válaszát indokolja! (3 pont)

***Megoldás*:**

Az 50-nél nem nagyobb pozitív páros számokból 25 db van, ez az összes eset száma. (1 pont)

Ezek közül 12 db osztható néggyel, ez a kedvező esetek száma. (1 pont)

Így a kérdéses valószínűség $P = \frac{12}{25} = \mathbf{0,48}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

34) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!
A: Ha egy szám osztható 6-tal és 8-cal, akkor osztható 48-cal is.
B: Ha egy pozitív egész szám minden számjegye osztható 3-mal, akkor a szám is osztható 3-mal.
C: A 48 és a 120 legnagyobb közös osztója a 12. (2 pont)

***Megoldás*:**

A) **Hamis**, hiszen fordítva lenne igaz.

B) A 3-mal való oszthatóság feltétele, hogy a számjegyeinek összege osztható 3-mal, és ha az összeadásban minden tag osztható 3-mal, akkor az összeg is osztható. Tehát az állítás **igaz**.

C) 48 és 120 legnagyobb közös osztója 24, így az állítás **hamis**. (2 pont)

Összesen: 2 pont