MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI KÖZÉPSZINT

Síkgeometria

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

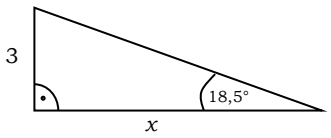
1) Döntse el, hogy a következő állítások közül melyik igaz és melyik hamis!
a) A háromszög köré írható kör középpontja mindig valamelyik súlyvonalra esik. (1 pont)
b) Egy négyszögnek lehet 180°-nál nagyobb belső szöge is. (1 pont)
c) Minden trapéz paralelogramma. (1 pont)

Megoldás:

a) **hamis** (1 pont)
b) **igaz** (1 pont)
c) **hamis** (1 pont)
Összesen: 3 pont

2) Egy derékszögű háromszög egyik befogójának hossza 3 cm, a vele szemközti szög 18,5°. Mekkora a másik befogó? Készítsen vázlatot, és válaszát számítással indokolja! (3 pont)

Megoldás:



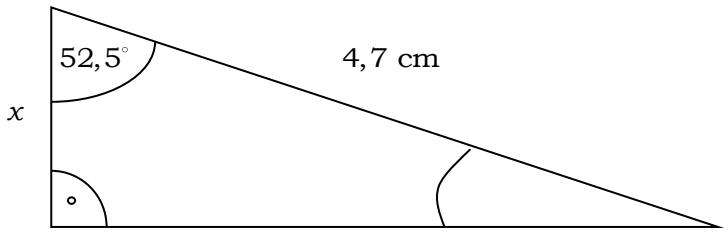
(1 pont)

$\operatorname{tg}18{,}5^\circ = \dfrac{3}{x}$ (1 pont)

A másik befogó $x \approx 8{,}966 \approx$ **9** (1 pont)
Összesen: 3 pont

3) Egy derékszögű háromszög átfogója 4,7 cm hosszú, az egyik hegyesszöge 52,5°. Hány cm hosszú a szög melletti befogó? Készítsen vázlatot az adatok feltüntetésével! Válaszát számítással indokolja, és egy tizedes jegyre kerekítve adja meg! (3 pont)

Megoldás:



(1 pont)

$x = 4{,}7\cos 52{,}5^\circ = 2{,}861$ (1 pont)

A befogó hossza kerekítve: 2,9 cm (1 pont)
Összesen: 3 pont

4) Döntse el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis!

a) A szabályos ötszög középpontosan szimmetrikus. (1 pont)

b) Van olyan háromszög, amelynek a súlypontja és a magasságpontja egybeesik. (1 pont)

c) Minden paralelogramma tengelyesen szimmetrikus. (1 pont)

Megoldás:

a) **hamis** (1 pont)

b) **igaz** (1 pont)

c) **hamis** (1 pont)

Összesen: 3 pont

5) Egy háromszög belső szögeinek aránya 2:5:11. Hány fokos a legkisebb szög? (2 pont)

Megoldás:

A legkisebb szög **20°**. (2 pont)

6) Egy függőleges tartórúdra a talajtól 4 m magasan mozgásérzékelőt szereltek, a hozzákapcsolt lámpa 140°-os nyílásszögű forgáskúpban világít függőlegesen lefelé.

a) Készítsen vázlatrajzot az adatok feltüntetésével! (2 pont)

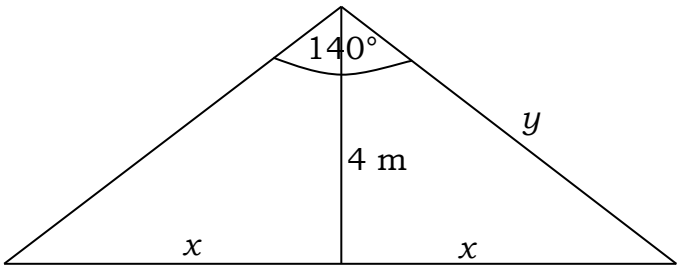
b) Milyen messze van a lámpától a legtávolabbi megvilágított pont? (4 pont)

c) Megvilágítja-e az érzékelő lámpája azt a tárgyat, amelyik a talajon a tartórúd aljától 15 m távolságra van? (4 pont)

d) A tartórúdon méterenként kampókat helyeztünk el, amelyekre fel tudjuk akasztani a mozgásérzékelő lámpáját. Alulról számítva hányadik kampót használjuk, ha azt akarjuk, hogy a vízszintes talajon ne világítson meg a lámpa 100 m2-nél nagyobb területet? (7 pont)

Megoldás:

a)



(2 pont)

b) $y = \dfrac{4}{\cos 70^\circ}$ (3 pont)

$\approx \mathbf{11{,}7\ (m)}$ (1 pont)

c) A legtávolabbi megvilágított pont a talajon a rúd aljától $x = 4 \cdot \mathrm{tg}70^\circ$ távolságra van, (2 pont)

$x \approx 11\ (\mathrm{m})$ (1 pont)

így a 15 méterre levő pont már nincs megvilágítva. (1 pont)

d) $r^2\pi \le 100$ (1 pont)

$r \le \sqrt{\frac{100}{\pi}} \approx 5,64 \text{ (m)}$ (2 pont)

$h \le \frac{5,65}{\text{tg}70^\circ} \approx 2,05 \text{ (m)}$ (2 pont)

tehát az első vagy a második kampóra kell akasztani az érzékelőt. (2 pont)

Összesen: 17 pont

7) Mekkora az egységsugarú kör 270°-os középponti szögéhez tartozó ívének hossza? (2 pont)

Megoldás:

A középponti szögekre és az ívhosszakra vonatkozó összefüggés alapján:

$$\frac{\frac{3\pi}{2}}{2\pi} = \frac{x}{2\pi}$$

Innen $\boldsymbol{x = \frac{3\pi}{2}}$ (2 pont)

8) Döntse el, hogy az alábbi *B* állítás igaz vagy hamis!
***B*: Ha egy négyszög két szemközti szöge derékszög, akkor az téglalap.**
Írja le az állítás megfordítását (*C*).
Igaz vagy hamis a *C* állítás? (3 pont)

Megoldás:

B logikai értéke: **HAMIS** (1 pont)

C állítás: **Ha egy négyszög téglalap, akkor két szemközti szöge derékszög.** (1 pont)

C logikai értéke: **IGAZ** (1 pont)

Összesen: 3 pont

9) Egy háromszög egyik oldalának hossza 6 cm. Az ezeken nyugvó két szög 50° és 60°. A háromszög beírt körének középpontját tükröztük a háromszög oldalaira. E három pont a háromszög csúcsaival együtt egy konvex hatszöget alkot.

a) Mekkorák a hatszög szögei? (6 pont)

b) Számítsa ki a hatszög azon két oldalának hosszát, amely a háromszög 60°-os szögének csúcsából indul! (5 pont)

c) Hány négyzetcentiméter a hatszög területe? (6 pont)

A b) és a c) kérdésekben a választ egy tizedes pontossággal adja meg!

Megoldás:

a) A háromszög harmadik szöge $BAC\sphericalangle = 70^\circ$ (1 pont)

A beírt kör O középpontja a belső szögfelezők metszéspontja. (1 pont)

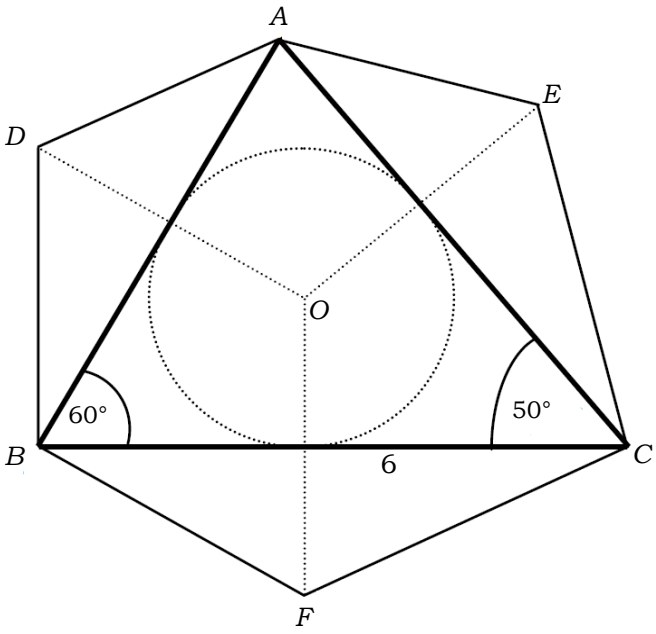
A tükrözésnél ezért az eredeti háromszög csúcsainál a belső szögek felének kétszerese adódik hozzá az eredeti szöghöz, (1 pont)

vagyis a keletkezett hatszög szögei:

$DAE\sphericalangle = 140^\circ$ $\quad ECF\sphericalangle = 100^\circ$

$FBD\sphericalangle = 120^\circ$ (1 pont)

Az ABC háromszög szögfelezői által (az O középpontnál) bezárt szögek a tükrözés miatt rendre megegyeznek a hatszög D, E és F csúcsú szögeivel: (1 pont)



$BDA\sphericalangle = 115^\circ$ $AEC\sphericalangle = 120^\circ$ $CFB\sphericalangle = 125^\circ$

$\boldsymbol{BDA\sphericalangle = 115^\circ}$, $\boldsymbol{AEC\sphericalangle = 120^\circ}$, $\boldsymbol{CFB\sphericalangle = 125^\circ}$, (1 pont)

b) A tükrözés miatt $BO = BD = BF$

Elegendő tehát az $x = BO$ belső szögfelező szakasz hosszát kiszámítani. (2 pont)

A BOC háromszögben a szinusztétel alapján:

A tükrözés miatt $\dfrac{x}{6} = \dfrac{\sin 25^\circ}{\sin 125^\circ}$ (2 pont)

amiből $\boldsymbol{x \approx 3{,}1\ (\mathrm{cm})}$

a hatszög keresett két oldalának hossza egyaránt **3,1 cm.** (1 pont)

c) A tükrözés miatt a hatszög területe a háromszög területének kétszerese. (1 pont)

A háromszög $AB = c$ oldalára:

$\dfrac{c}{6} = \dfrac{\sin 50^\circ}{\sin 70^\circ}$ (1 pont)

amiből $c = 4{,}9\ (\mathrm{cm})$ (1 pont)

A háromszög területe $\dfrac{6c\sin 60^\circ}{2} \approx 12{,}7\ (\mathrm{cm}^2)$ (2 pont)

A hatszög területe $\boldsymbol{2 \cdot 12{,}7 = 25{,}4\ (\mathrm{cm}^2)}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

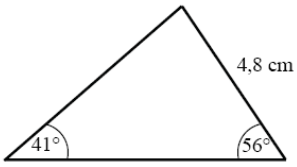
10) Egy háromszög oldalhosszúságai egész számok. Két oldala 3 cm és 7 cm. Döntse el a következő állításokról, hogy igaz vagy hamis! (2 pont)
1. állítás: A háromszög harmadik oldala lehet 9 cm.
2. állítás: A háromszög harmadik oldala lehet 10 cm.

Megoldás:

1. állítás: **Igaz** (1 pont)
2. állítás: **Hamis** (1 pont)

Összesen: 2 pont

11) Az ábrán látható háromszögben hány cm hosszú az 56°-os szöggel szemközti oldal? (Az eredményt egy tizedes jegy pontossággal adja meg!) Írja le a számítás menetét! (3 pont)



Megoldás:

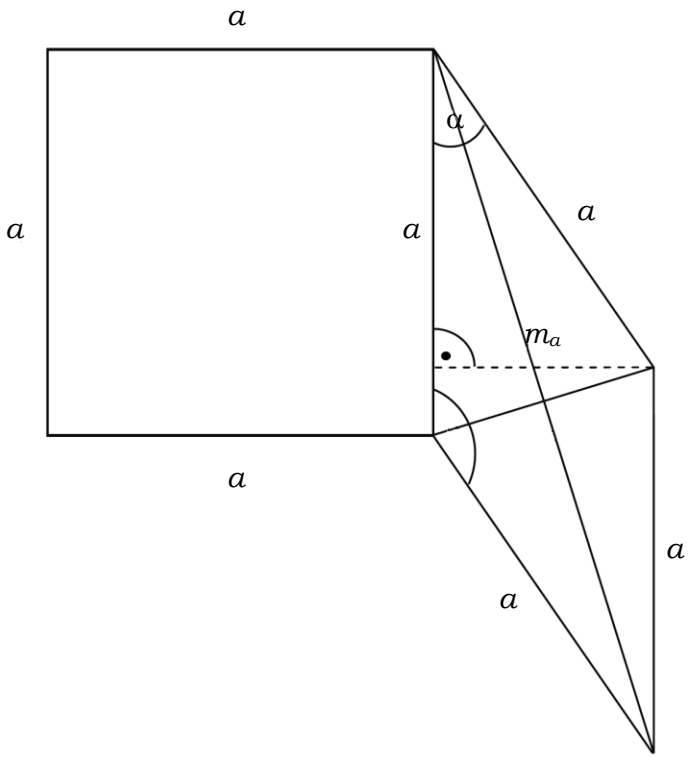
$\frac{x}{4,8} = \frac{\sin 56^\circ}{\sin 41^\circ}$ (1 pont)

$\boldsymbol{x \approx 6,1}$ (2 pont)

Összesen: 3 pont

12) Egy négyzet és egy rombusz egyik oldala közös, a közös oldal 13 cm hosszú. A négyzet és a rombusz területének az aránya 2:1.
a) Mekkora a rombusz magassága? (5 pont)
b) Mekkorák a rombusz szögei? (3 pont)
c) Milyen hosszú a rombusz hosszabbik átlója? A választ két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (4 pont)

Megoldás:



a) Helyes ábra (1 pont)

$\left(T_{\text{négyzet}} = a^2 \text{ és } T_{\text{rombusz}} = am_a\right)$

$\frac{a^2}{am_a} = \frac{2}{1}$ (3 pont)

A rombusz magassága $\boldsymbol{m_a = 6{,}5\ (\text{cm})}$ (1 pont)

b) $\sin\alpha = \frac{m_a}{a}$ (ahol α hegyesszög) (1 pont)

$\boldsymbol{\alpha = 30^\circ}$ (1 pont)

$\boldsymbol{\beta = 150^\circ}$ (1 pont)

c) Bármelyik lehetséges derékszögű háromszögből jó összefüggést felír a hosszabbik átló segítségével, például $\cos 15^\circ = \frac{\frac{e}{2}}{13}$ (2 pont)

$e = 2 \cdot 13 \cdot \cos 15^\circ$ (1 pont)

$\boldsymbol{e = 25{,}11\ (\text{cm})}$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

13) Adja meg az alábbi állítások igazságértékét (igaz vagy hamis), majd döntse el, hogy a b) és a c) jelű állítások közül melyik az a) jelű állítás megfordítása! (4 pont)

a) Ha az ABCD négyszög téglalap, akkor átlói felezik egymást.

b) Ha az ABCD négyszög átlói felezik egymást, akkor ez a négyszög téglalap.

c) Ha az ABCD négyszög nem téglalap, akkor átlói nem felezik egymást.

Megoldás:

a) **igaz** (1 pont)

b) **hamis** (1 pont)

c) **hamis** (1 pont)

Az a) megfordítása a b). (1 pont)

Összesen: 4 pont

14) Hányszorosára nő egy 2 cm sugarú kör területe, ha a sugarát háromszorosára növeljük? (2 pont)

Megoldás:

$\left(3^2 =\right)$ **9**-szeresére nő a terület. (2 pont)

15) Egy derékszögű háromszög egyik befogója 5 cm, az átfogója 13 cm hosszú. Mekkorák a háromszög hegyesszögei? (Válaszát egész fokra kerekítve adja meg!) (2 pont)

Megoldás:

A hegyesszögek: $\boldsymbol{23^\circ}$ és $\boldsymbol{67^\circ}$ (2 pont)

16) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét! A táblázatban karikázza be a helyes választ! (4 pont)

***A* állítás: Minden rombusznak pontosan két szimmetriatengelye van. (1 pont)**

***B* állítás: Minden rombusznak van két szimmetriatengelye. (1 pont)**

***C* állítás: Van olyan rombusz, amelynek pontosan két szimmetriatengelye van. (1 pont)**

***D* állítás: Nincs olyan rombusz, amelynek négy szimmetriatengelye van. (1 pont)**

Megoldás:

A állítás: **hamis** (1 pont)
B állítás: **igaz** (1 pont)
C állítás: **igaz** (1 pont)
D állítás: **hamis** (1 pont)

Összesen: 4 pont

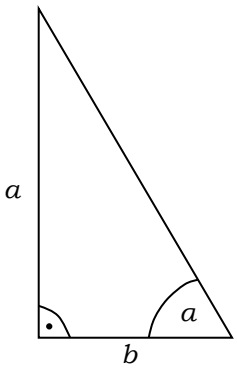
17) Valamely derékszögű háromszög területe 12 cm², az α hegyesszögéről pedig tudjuk, hogy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$.

a) Mekkorák a háromszög befogói? (8 pont)

b) Mekkorák a háromszög szögei, és mekkora a köré írt kör sugara? (A szögeket fokokban egy tizedesjegyre, a kör sugarát cm-ben szintén egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (4 pont)

Megoldás:

a) A befogók aránya $3:2$. (2 pont)
Az egyik befogó $3x$, a másik $2x$. (1 pont)
a háromszög területe: $\frac{a \cdot b}{2}$. (1 pont)
$12 = \frac{3x \cdot 2x}{2}$. (1 pont)
$x^2 = 4$. (1 pont)
A (pozitív) megoldás: $x = 2$. (1 pont)
A befogók hossza **6 cm** és **4 cm**. (1 pont)



b) Az α hegyesszög 56,3° (1 pont)
a másik hegyesszög 33,7°-os. (1 pont)
A derékszögű háromszög átfogója (Pitagorasz tétele szerint) $\sqrt{52} \approx 7{,}2\ (\text{cm})$, (1 pont)
a kör sugara (az átfogó fele): $\sqrt{13} \approx 3{,}6\ (\text{cm})$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

18) A következő kérdések ugyanarra a 20 oldalú szabályos sokszögre vonatkoznak.

a) Mekkorák a sokszög belső szögei? Mekkorák a külső szögek? (3 pont)

b) Hány átlója illetve hány szimmetriatengelye van a sokszögnek? Hány különböző hosszúságú átló húzható egy csúcsból? (6 pont)

c) Milyen hosszú a legrövidebb átló, ha a szabályos sokszög beírt körének sugara 15 cm? A választ két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (8 pont)

Megoldás:

a) A belső szögek **162°**-osak, (2 pont)
a külső szögek **18°**-osak. (1 pont)

b) Az összes átlók száma $\frac{20\cdot 17}{2}=170$ (2 pont)

Szemközti csúcsokat összekötő átlóból 10 van, (ezek egyenese 1–1 szimmetriatengely) szemközti oldalak felezőpontját összekötő szimmetriatengelyből szintén 10, (1 pont)
tehát összesen 20 szimmetriatengelye van a sokszögnek. (1 pont)
Egy csúcsból 17 átló húzható, ezek között 8–8 páronként egyenlő hosszú, (1 pont)
tehát **9** különböző hosszúságú átló húzható egy csúcsból. (1 pont)

c) A szabályos 20-szög egy oldalához tartozó (konvex) középponti szög 18°-os. (1 pont)

$\operatorname{tg}9^\circ=\frac{a}{2\cdot 15}$ (1 pont)

$a=30\cdot\operatorname{tg}9^\circ$ (1 pont)

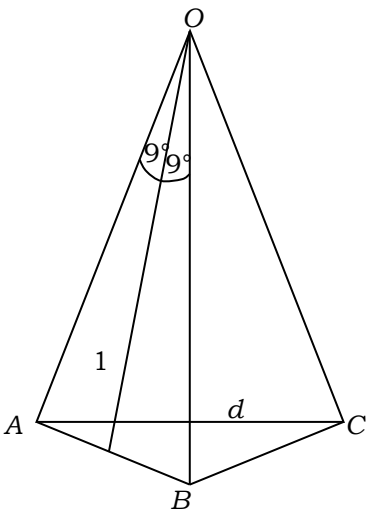
$a\approx 4{,}75\ (\text{cm})$ (1 pont)

A legrövidebb átló egy 162°szárszögű egyenlő szárú háromszögből számolható ki, amelynek szárai ≈ 4,75 cm hosszúak. (1 pont)

$\sin 81^\circ\approx\frac{d}{2\cdot 4{,}75}$ (1 pont)

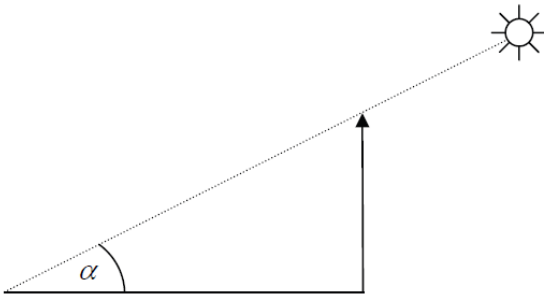
$d\approx 9{,}5\cdot\sin 81^\circ$ (1 pont)

$\boldsymbol{d\approx 2\cdot 4{,}75\cdot\sin 81^\circ\approx 9{,}38\ (\text{cm})}$ (1 pont)



Összesen: 17 pont

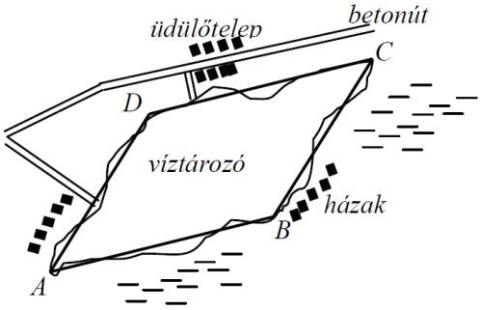
19) Egy torony árnyéka a vízszintes talajon kétszer olyan hosszú, mint a torony magassága. Hány fokos szöget zár be ekkor a Nap sugara a vízszintes talajjal? A keresett szöget fokban, egészre kerekítve adja meg! (2 pont)



Megoldás:

$\alpha = 27^\circ$ (2 pont)

20) Egy víztározó víztükrének alakját az ábrán látható módon az *ABCD* paralelogrammával közelítjük. A paralelogrammának az 1:30000 méretarányú térképen mért adatai: $AB = 4,70$ cm, $AD = 3,80$ cm és $BD = 3,30$ cm.



a) A helyi önkormányzat olyan kerékpárút építését tervezi, amelyen az egész víztározót körbe lehet kerekezni. Hány km hosszúságú lesz ez az út, ha hossza kb. 25%-kal több a paralelogramma kerületénél? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (4 pont)

b) Mekkora az a legnagyobb távolság, amelyet motorcsónakkal, irányváltoztatás nélkül megtehetünk a víztározó víztükrén? Válaszát km-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (7 pont)

c) Körülbelül hány m³-rel lesz több víz a víztározóban, ha a vízszintet 15 cm-rel megemelik? Válaszát ezer m³-re kerekítve adja meg! (6 pont)

Megoldás:

a) A térképen a paralelogramma kerülete 17,0 cm, a kerékpárút pedig $17,0 \cdot 1,25 = 21,25$ cm hosszú. (1 pont)

A valóságban a kerékpárút hossza $21,25 \cdot 3 \cdot 10^4$ cm, (1 pont)

azaz 6,375 km. (1 pont)

Egy tizedes jegyre kerekítve tehát a kerékpárút hossza **6,4 km**. (1 pont)

A számításokat kezdhetjük a térkép adatainak valós méretre váltásával is.

b) Az *AC* szakasz a leghosszabb. (1 pont)

Az *ABD* háromszögre felírjuk a koszinusztételt:

$3,3^2 = 4,7^2 + 3,8^2 - 2 \cdot 4,7 \cdot 3,8 \cdot \cos BAD\sphericalangle$ (1 pont)

Ebből: $\cos BAD\sphericalangle = \dfrac{4,7^2 + 3,8^2 - 3,3^2}{2 \cdot 4,7 \cdot 3,8} \approx$ (1 pont)

$\approx 0,7178$

(tehát $BAD\sphericalangle \approx 44,1^\circ$ és így $ABC\sphericalangle \approx 135,9^\circ$) (1 pont)

Az *ABC* háromszögből koszinusztétellel:

$AC^2 = 4,7^2 + 3,8^2 - 2 \cdot 4,7 \cdot 3,8 \cdot \cos ABC\sphericalangle$ (1 pont)

amiből $AC \approx 7,9$ (cm) (1 pont)

Ez a valóságban (egy tizedes jegyre kerekítve) **2,4 km**. (1 pont)

c) A vízfelszín területe a valóságban:
$9\cdot10^8\cdot4,7\cdot3,8\cdot\sin44,1^\circ\approx1,119\cdot10^{10}\ \left(\text{cm}^2\right)$
(Heron-képlet is használható.), (2 pont)
ami $1,119\cdot10^6$ m^2. (1 pont)
Tehát kb. $1,119\cdot10^6\cdot0,15\approx$ **$1,679\cdot10^5$ m^3-rel lesz több víz a tárolóban,** (2 pont)
ami ezer köbméterre kerekítve **168 ezer m^3** vízmennyiséget jelent. (1 pont)
Összesen: 17 pont

21) Egy egyenlő szárú háromszög alapja 5 cm, a szára 6 cm hosszú. Hány fokosak a háromszög alapon fekvő szögei? A szögek nagyságát egész fokra kerekítve adja meg! Válaszát indokolja! (3 pont)

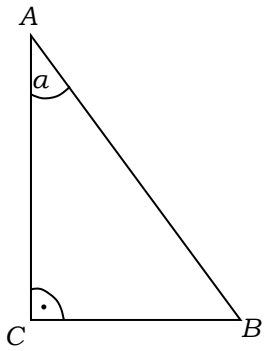
Megoldás:

Az alaphoz tartozó magasság felezi az alapot. (1 pont)
A keletkező derékszögű háromszögben a keresett α szögre (1 pont)
Az alapon fekvő szögek **$\approx65^\circ$**-osak. (1 pont)
Összesen: 3 pont

22) Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelyben az átfogó hossza 1, az α hegyesszög melletti befogó hossza pedig $\sin\alpha$. Mekkora az α szög? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

(A szögfüggvények definíciója miatt) $BC=\sin\alpha$, (1 pont)
AC = BC (1 pont)
tehát **$\alpha=45^\circ$** (1 pont)
Összesen: 3 pont



23) Egyenlő szárú háromszög alapja 40 cm, szárainak hossza 52 cm. A háromszöget megforgatjuk a szimmetriatengelye körül.
(A válaszait két tizedesjegyre kerekítve adja meg!)

a) Készítsen vázlatrajzot az adatok feltüntetésével, és számítsa ki, hogy mekkora a keletkező forgáskúp nyílásszöge? (4 pont)

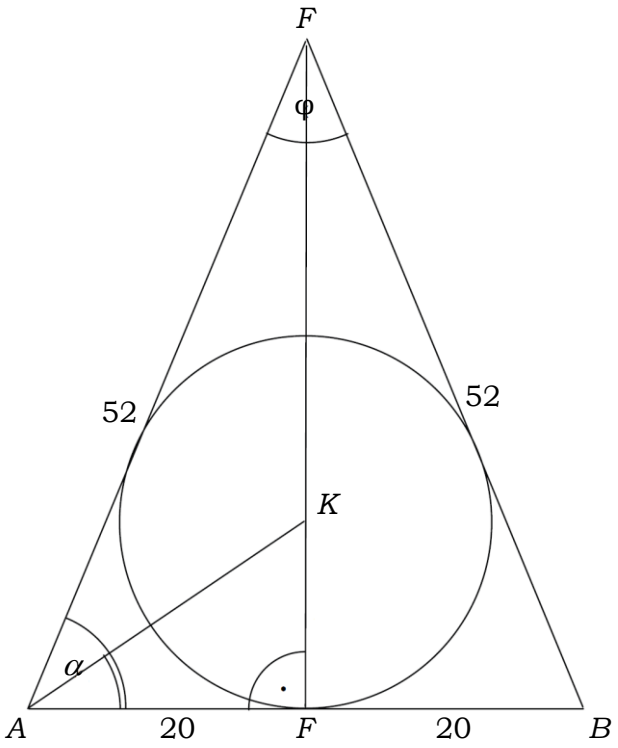
b) Számítsa ki a keletkező forgáskúp térfogatát! (3 pont)

c) Mekkora a felszíne annak a gömbnek, amelyik érinti a kúp alapkörét és a palástját? (6 pont)

d) Mekkora a kúp kiterített palástjának területe? (4 pont)

Megoldás:

a) Jó vázlatrajz az adatok feltüntetésével. (2 pont)



Ha a kúp nyílásszöge φ, akkor

$\sin\varphi = \frac{20}{52} = 0{,}3846$ (1 pont)

Ebből $\varphi = 45{,}24^\circ$ (1 pont)

b) $m = \sqrt{2704 - 400} = 48$ (1 pont)

$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{400 \cdot \pi \cdot 48}{3}$ (1 pont)

$\boldsymbol{V \approx 20106{,}19\ (\mathrm{cm}^3)}$ (1 pont)

c) A kúpba írt gömb sugara megegyezik az egyenlő szárú háromszögbe írt kör sugarával. (2 pont)

A háromszög alapon fekvő szöge

$\alpha = 67{,}38^\circ$ (1 pont)

$tg33{,}69^\circ = \frac{\rho}{20}$ (1 pont)

$\rho = 13{,}33\ (\mathrm{cm})$ (1 pont)

A gömb felszíne:

$\boldsymbol{A \approx 2234{,}01\ (\mathrm{cm}^2)}$ (1 pont)

d) A körcikk ívének hossza $i = 2r\pi$, $i = 2 \cdot 20\pi \approx 125{,}66\ (\mathrm{cm})$ (2 pont)

$T_{palást} = \frac{i \cdot R}{2} \approx 2 \cdot 20\pi \cdot 26$ (1 pont)

$\boldsymbol{T_{palást} \approx 3267{,}26\ (\mathrm{cm}^2)}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

24) Az *ABC* hegyesszögű háromszögben $BC = 14$ cm, $AC = 12$ cm, a *BCA* szög nagysága pedig 40°.

a) Számítsa ki a *BC* oldalhoz tartozó magasság hosszát! (2 pont)

b) Számítsa ki az *AB* oldal hosszát! (3 pont)

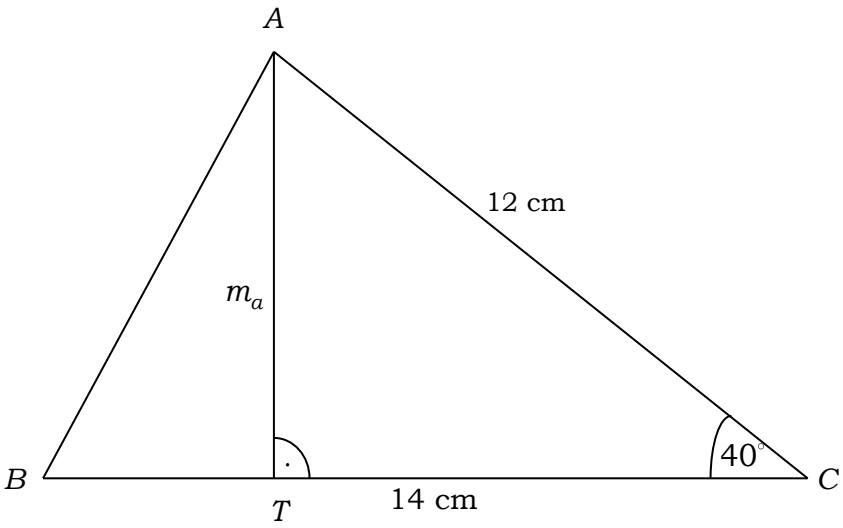
Válaszait cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

Az *AB* oldal felezőpontja legyen *E*, a *BC* oldal felezőpontja pedig legyen *D*. Határozza meg az *AEDC* négyszög területét!

c) Válaszát cm^2-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (7 pont)

Megoldás:

a) Az ATC derékszögű háromszögben $m_a = 12\sin 40^\circ \approx \mathbf{7,7\ cm}$ (2 pont)



A magasság kifejezhető a trigonometrikus területképletből is.

b) A háromszög kérdéses oldalára a koszinusztételt felírva: (1 pont)

$AB^2 = 14^2 + 12^2 - 2\cdot 14\cdot 12\cdot \cos 40^\circ$ (1 pont)

$\boldsymbol{AB \approx 9,1\ cm}$ (1 pont)

c) Az *AEDC* négyszög trapéz, mert az *ED* szakasz az *ABC* háromszögben középvonal, így párhuzamos az *AC* oldallal. (1 pont)

$ED = 6\,\text{cm}$ (1 pont)

A trapéz magassága az *ABC* háromszög *AC* oldalhoz tartozó magasságának a fele. (1 pont)

Az ABC háromszög területe: $T = \dfrac{12\cdot 14\cdot \sin 40^\circ}{2} \left(\approx 54\ \text{cm}^2\right)$ (1 pont)

Ebből az *AC* oldalhoz tartozó m_b magasság:

$m_b = \dfrac{T\cdot 2}{12} \approx 9\ (\text{cm})$ (1 pont)

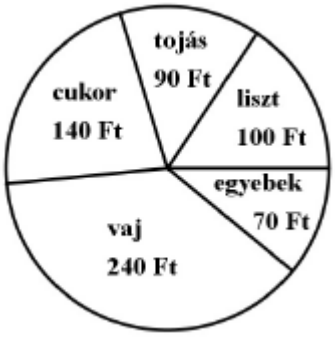
Az *AEDC* trapéz területe: $T = \dfrac{12+6}{2}\cdot\dfrac{m_b}{2}$ (1 pont)

$\boldsymbol{\approx 40,5\ cm^2}$ (1 pont)

A feladat megoldható hasonló háromszögek területarányának felhasználásával is.

Összesen: 12 pont

25) Az ábra egy sütemény alapanyagköltségeinek megoszlását mutatja. Számítsa ki a „vaj” feliratú körcikk középponti szögének nagyságát fokban! Válaszát indokolja! (3 pont)



Megoldás:

A sütemény összköltsége 640 Ft. (1 pont)

A vaj költsége ennek $\frac{3}{8}$ része. (1 pont)

A kérdéses körcikk középponti szöge **135°**. (1 pont)

26) A vízszintessel 6,5°-ot bezáró egyenes út végpontja 124 méterrel magasabban van, mint a kiindulópontja. Hány méter hosszú az út? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Az adatokat feltüntető helyes ábra, az út hossza x. (1 pont)

$x = \frac{124}{\sin 6{,}5^\circ} \approx 1095$ (1 pont)

1095 méter hosszú az út. (1 pont)

Összesen: 3 pont

27) Két gömb sugarának aránya $2:1$. A nagyobb gömb térfogata k-szorosa a kisebb gömb térfogatának. Adja meg k értékét! (2 pont)

Megoldás:

$\boldsymbol{k = 8}$ (2 pont)

28) Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok 120°-os szöget zárnak be egymással, mindkét vektor hossza 4 cm. Határozza meg az $\vec{a}+\vec{b}$ vektor hosszát! (2 pont)

Megoldás:

Az $\vec{a}+\vec{b}$ vektor hossza **4 cm**. (2 pont)

29) Számítsa ki a szabályos tizenkétszög egy belső szögének nagyságát! Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

A (szabályos) tizenkétszög belső szögeinek összege: $(12-2)\cdot 180^\circ = 1800^\circ$, (2 pont)

így egy belső szöge **150°**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

30) Döntse el, melyik állítás igaz, melyik hamis!

a) A valós számok halmazán értelmezett $f(x)=4$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény grafikonja az x tengellyel párhuzamos egyenes. (1 pont)

b) Nincs két olyan prímszám, amelyek különbsége prímszám. (1 pont)

c) Az 1 cm sugarú kör kerületének cm-ben mért számértéke kétszer akkora, mint területének cm²-ben mért számértéke. (1 pont)

d) Ha egy adathalmaz átlaga 0, akkor a szórása is 0. (1 pont)

Megoldás:

a) **igaz** (1 pont)
b) **hamis** (1 pont)
c) **igaz** (1 pont)
d) **hamis** (1 pont)

Összesen: 4 pont

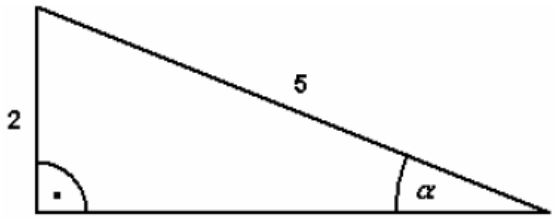
31) Egy háromszög egyik oldalának hossza 10 cm, a hozzá tartozó magasság hossza 6 cm. Számítsa ki a háromszög területét! (2 pont)

Megoldás:

A háromszög területe **30 cm²**. (2 pont)

Összesen: 2 pont

32) Számítsa ki az α szög nagyságát az alábbi derékszögű háromszögben!



(2 pont)

Megoldás:

$$\sin\alpha=\frac{2}{5}$$

$\alpha \approx$ **23,58°** (2 pont)

Összesen: 2 pont

33) Egy kör sugara 6 cm. Számítsa ki ebben a körben a 120°-os középponti szöghöz tartozó körcikk területét! (2 pont)

Megoldás:

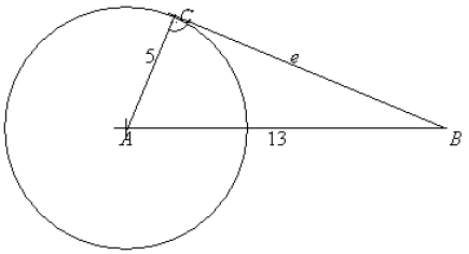
$$t=\frac{\alpha\cdot r^2\pi}{360^\circ}=12\pi\,\text{cm}^2\approx \mathbf{37,7\,cm^2}$$

(2 pont)

Összesen: 2 pont

34) Egy 5 cm sugarú kör középpontjától 13 cm-re lévő pontból érintőt húzunk a körhöz. Mekkora az érintőszakasz hossza? Írja le a számítás menetét! (3 pont)

Megoldás:



Ábra felrajzolása: (1 pont)
Az ABC háromszögben alkalmazzuk a Pitagorasz tételét: $e^2 = 13^2 - 5^2$ (1 pont)
$\boldsymbol{e = 12\,cm}$ (1 pont)
Összesen: 3 pont

35) Adja meg, hogy az alábbi geometriai transzformációk közül melyek viszik át önmagába az ábrán látható, háromszög alakú (sugárveszélyt jelző) táblát! (2 pont)

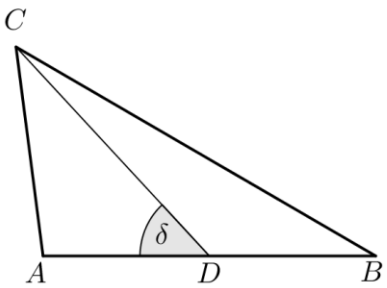


a) 60°-os elforgatás a tábla középpontja körül.
b) 120°-os elforgatás a tábla középpontja körül.
c) Középpontos tükrözés a tábla középpontjára.
d) Tengelyes tükrözés a tábla középpontján és a tábla egyik csúcsán átmenő tengelyre.

Megoldás:

b) és **d)** (2 pont)

36) Az ábrán látható *ABC* háromszögben a *D* pont felezi az *AB* oldalt. A háromszögben ismert: $AB = 48$ mm, $CD = 41$ mm, $\delta = 47°$.



a) Számítsa ki az *ABC* háromszög területét! (5 pont)
b) Számítással igazolja, hogy (egész milliméterre kerekítve) a háromszög *BC* oldalának hossza 60 mm! (4 pont)
c) Számítsa ki a háromszög *B* csúcsánál lévő belső szög nagyságát! (3 pont)

Megoldás:

a) Az *ADC* háromszög *C* csúcsához tartozó magasság hossza:
$41 \cdot \sin 47° \approx$ (1 pont)
$\approx 30\,(\text{mm})$. (1 pont)
Ez ugyanakkora, mint az *ABC* háromszög *C* csúcsához tartozó magassága, (1 pont)
így a kérdezett terület $T = \frac{48 \cdot 30}{2} =$ (1 pont)
$\boldsymbol{= 720\ mm^2}$. (1 pont)

b) A *CDB* szög $133°$. (1 pont)
$BC = \sqrt{24^2 + 41^2 - 2 \cdot 24 \cdot 41 \cdot \cos 133°}$ (2 pont)
Így a *BC* oldal hossza a kért kerekítéssel **valóban 60 mm**. (1 pont)

c) Az *ABC* szög legyen β, ekkor a szinusztételt felírva a *BCD* háromszögben:
$\frac{\sin\beta}{\sin 133^\circ} = \frac{41}{60}$. (1 pont)
$\sin\beta \approx 0,4998$ (1 pont)
Mivel a *BCD* háromszög *D* csúcsánál lévő belső szöge tompaszög:
$\beta \approx 30^\circ$. (1 pont)
A feladat koszinusz-tétel megoldásával is helyes!

Összesen: 12 pont

37) Egy téglalap szomszédos oldalainak hossza 4,2 cm és 5,6 cm. Mekkora a téglalap körülírt körének sugara? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

A téglalap körülírt körének átmérője a téglalap átlója. (1 pont)
A téglalap átlójának hossza: $\sqrt{4,2^2+5,6^2}\,(=7)\,(\text{cm})$ (1 pont)
A kör sugara $\mathbf{3,5\,(cm)}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

38)

a) Egy háromszög oldalainak hossza 5 cm, 7 cm és 8 cm. Mekkora a háromszög 7 cm-es oldalával szemközti szöge? (4 pont)

b) Oldja meg a $[0;2\pi]$ intervallumon a következő egyenletet!

$$\cos^2 x = \frac{1}{4}\ (x \in \mathbb{R}).$$ **(6 pont)**

c) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

I) Az $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=\sin x$ függvény páratlan függvény.

II) Az $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, g(x)=\cos 2x$ függvény értékkészlete a $[-2;2]$ zárt intervallum.

III) A $h:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $h(x)=\cos x$ függvény szigorúan monoton növekszik a $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon.

Megoldás:

a) (A kérdezett szöget α-val jelölve) alkalmazzuk a koszinusztételt: (1 pont)
$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot\cos\alpha$ (1 pont)
Ebből $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, (1 pont)
azaz (mivel egy háromszög egyik szögéről van szó) $\alpha = \mathbf{60^\circ}$ (1 pont)

b) Ha $\cos x = \frac{1}{2}$, (1 pont)

akkor a megadott intervallumon $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3}}$, (1 pont)

vagy $\boldsymbol{x = \frac{5\pi}{3}}$. (1 pont)

Ha $\cos x = -\frac{1}{2}$, (1 pont)

akkor a megadott intervallumon $\boldsymbol{x = \frac{2\pi}{3}}$, (1 pont)

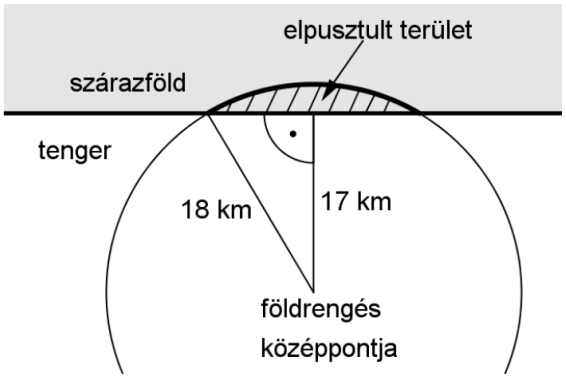
vagy $\boldsymbol{x = \frac{4\pi}{3}}$. (1 pont)

c)

I) **igaz**
II) **hamis**
III) **hamis** (2 pont)

Összesen: 12 pont

39) Újsághír: *„Szeizmológusok számításai alapján a 2004. december 26-án Szumátra szigetének közelében kipattant földrengés a Richter-skála szerint 9,3-es erősségű volt; a rengést követő cunami (szökőár) halálos áldozatainak száma megközelítette a 300 ezret.”*



A földrengés Richter-skála szerinti „erőssége” és a rengés középpontjában felszabaduló energia között fennálló összefüggés: $\boldsymbol{M = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E}$.

Ebben a képletben E a földrengés középpontjában felszabaduló energia mérőszáma (joule-ban mérve), M pedig a földrengés erősségét megadó nem negatív szám a Richter-skálán.

a) A Nagasakira 1945-ben ledobott atombomba felrobbanásakor felszabaduló energia $1,344 \cdot 10^{14}$ joule volt. A Richter-skála szerint mekkora erősségű az a földrengés, amelynek középpontjában ekkora energia szabadul fel? (3 pont)

b) A 2004. december 26-i szumátrai földrengésben mekkora volt a felszabadult energia? (3 pont)

c) A 2007-es chilei nagy földrengés erőssége a Richter-skála szerint 2-vel nagyobb volt, mint annak a kanadai földrengésnek az erőssége, amely ugyanebben az évben következett be. Hányszor akkora energia szabadult fel a chilei földrengésben, mint a kanadaiban? (5 pont)

d) Az óceánban fekvő egyik szigeten a földrengést követően kialakuló szökőár egy körszelet alakú részt tarolt le. A körszeletet határoló körív középpontja a rengés középpontja, sugara pedig 18 km. A rengés középpontja a sziget partjától 17 km távolságban volt (lásd a felülnézeti ábrán). Mekkora a szárazföldön elpusztult rész területe egész négyzetkilométerre kerekítve? (6 pont)

Megoldás:

a) $M = -4,42 + \frac{2}{3}\lg\left(1,344 \cdot 10^{14}\right)$ (1 pont)

$\boldsymbol{M \approx 5}$ (2 pont)

b) $9,3 = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E$ (1 pont)

$\lg E = 20,58$ (1 pont)

Tehát a felszabadult energia körülbelül

$\boldsymbol{E \approx 3,8 \cdot 10^{20}\ (\mathrm{J})}$ (1 pont)

c) A chilei rengés erőssége 2-vel nagyobb volt, mint a kanadai:

$-4,42 + \frac{2}{3}\lg E_c = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E_k + 2$ (1 pont)

Rendezve: $\lg E_c - \lg E_k = 3$ (1 pont)

(A logaritmus azonosságát alkalmazva) $\lg \frac{E_c}{E_k} = 3$ (1 pont)

Ebből $\frac{E_c}{E_k} = 1000$ (1 pont)

1000-szer akkora volt a felszabadult energia. (1 pont)

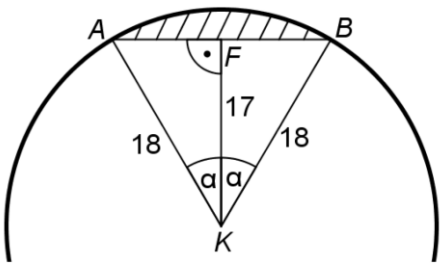
d) Az ábra jelöléseit használjuk.

Az *AKF* derékszögű háromszögből:

$\cos\alpha = \frac{17}{18}$ (1 pont)

$\alpha \approx 19,2^\circ.\left(2\alpha \approx 38,4^\circ\right)$ (1 pont)

$T_{AKB\Delta} \approx \frac{18^2 \cdot \sin 38,4^\circ}{2}\left(\approx 100,6\ \mathrm{km}^2\right)$ (1 pont)



$T_{körcikk} \approx 18^2\pi\frac{38,4^\circ}{360^\circ}\left(\approx 108,6\ \mathrm{km}^2\right)$ (1 pont)

$T_{körszelet} \approx 108,6 - 100,6 = 8\ \left(\mathrm{km}^2\right)$ (1 pont)

Az elpusztult rész területe körülbelül $\boldsymbol{8\ \mathrm{km}^2}$. (1 pont)

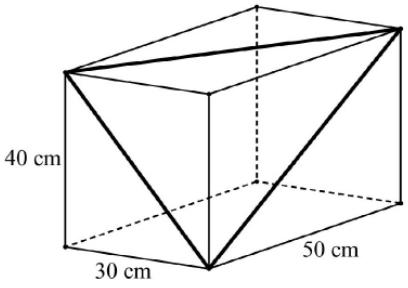
Összesen: 17 pont

40) Egy téglatest alakú akvárium egy csúcsból kiinduló élei 30 cm, 40 cm, illetve 50 cm hosszúak.

a) Hány literes ez az akvárium? (A számolás során tekintsen el az oldallapok vastagságától!) (3 pont)

Tekintsük azt a háromszöget, amelynek oldalait az ábrán látható téglatest három különböző hosszúságú lapátlója alkotja.

b) Mekkora ennek a háromszögnek a legkisebb szöge? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! (8 pont)



Megoldás:

a) $V = 30 \times 40 \times 50 = 60000 \ \left(\text{cm}^3\right)$ (1 pont)

$V = 60 \ \text{dm}^3$. (1 pont)

Az akvárium térfogata **60 liter**. (1 pont)

b) Az egyes lapátlók hossza:

$\sqrt{50^2 + 40^2} = \sqrt{4100} \left(\approx 64{,}03\right) \left(\text{cm}\right)$,

$\sqrt{50^2 + 30^2} = \sqrt{3400} \left(\approx 58{,}31\right) \left(\text{cm}\right)$, (2 pont)

$\sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \left(\text{cm}\right)$.

A legkisebb szög a legrövidebb oldallal van szemben. (1 pont)

A legrövidebb oldallal szemközti szöget α-val jelölve, koszinusztétellel:

$2500=4100+3400-2\times\sqrt{4100}\times\sqrt{3400}\cdot\cos\alpha$. (2 pont)

Ebből $\cos\alpha \approx 0{,}6696$. (2 pont)

A háromszög legkisebb szöge: $\alpha = \mathbf{48°}$. (1 pont)

Összesen: 11 pont

41) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

a) Minden paralelogramma tengelyesen szimmetrikus négyszög.

b) A kocka testátlója 45°-os szöget zár be az alaplappal.

c) A szabályos tizenhétszögben az egyik csúcsból kiinduló összes átló a tizenhétszöget 15 háromszögre bontja.

(2 pont)

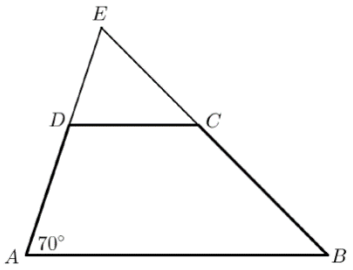
Megoldás:

a) **Hamis**

b) **Hamis**

c) **Igaz** (2 pont)

42) Az *ABCD* trapéz oldalainak hossza: *AB* = 10 cm; *CD* = 6 cm; *AD* = 7 cm. Az *A* csúcsnál fekvő belső szög nagysága 70°.



a) Mekkora távolságra van a *D* pont az *AB* oldaltól? (3 pont)

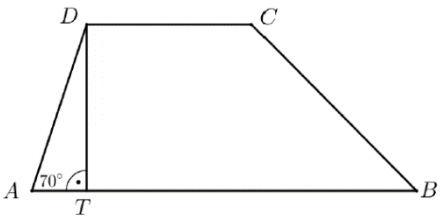
b) Számítsa ki a négyszög *AC* átlójának hosszát! (4 pont)

Az *E* pont az *AD* és *BC* szárak egyenesének metszéspontja.

c) Számítsa ki az *ED* szakasz hosszát! (4 pont)

Megoldás:

a) A D pont merőleges vetületét az AB oldalon jelölje T.



Meghatározandó a DT szakasz. (1 pont)

Az ATD derékszögű háromszögben:

$\sin 70° = \frac{DT}{7}$. (1 pont)

$DT = 7 \cdot \sin 70° \approx \mathbf{6,58\,cm}$. (1 pont)

b) A trapéz D csúcsnál lévő belső szöge 110°. (1 pont)

Írjuk fel az ACD háromszögben a koszinusztételt: (1 pont)

$AC^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos 110°$. (1 pont)

Kb. **10,66 cm** az AC átló hossza. (1 pont)

c) Az AB szakasz párhuzamos a CD szakasszal, így az EDC és EAB háromszögek hasonlósága miatt: (1 pont)

$\frac{x}{6} = \frac{x+7}{10}$ (1 pont)

Ebből $10x = 6x + 42$, (1 pont)

azaz $\boldsymbol{x = 10,5}$ **cm.** (1 pont)

Összesen: 11 pont

43) Egy *ABC* háromszög *A* csúcsánál lévő külső szöge 104°-os, *B* csúcsnál lévő belső szöge 74°-os. Hány fokos a háromszög *C* csúcsnál lévő külső szöge? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Az A csúcshoz tartozó α belső szög 76°-os. (1 pont)

Felhasználva azt az összefüggést, hogy a háromszög bármely külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő belső szögek összegével, adódik, hogy: (1 pont)

$\gamma' = 76° + 74° = \mathbf{150°}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

44) Az *ABC* derékszögű háromszög *AC* befogója 6 cm, *BC* befogója 8 cm hosszú.

a) Számítsa ki az *ABC* háromszög hegyesszögeinek nagyságát!

(3 pont)

A *DEF* derékszögű háromszög *DE* befogója 7 cm-rel rövidebb, mint a *DF* befogó. Az átfogó 2 cm-rel hosszabb, mint a *DF* befogó.

b) Számítsa ki a *DEF* háromszög oldalainak hosszát! (8 pont)

***Megoldás*:**

a) Az ABC derékszögű háromszög A csúcsnál lévő szögére felírjuk a tangens szögfüggvényt: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{6}$ (1 pont)

$\alpha \approx 53{,}13^\circ$ és $\beta = 36{,}87^\circ$. (2 pont)

b) Vezessünk be ismeretlent DE oldalra!

Ekkor $DE = x$, $DF = x+7$ és $EF = x+7+2 = x+9$. (1 pont)

Ezután Pitagorasz-tételt írunk fel a derékszögű háromszögre.

$x^2 + (x+7)^2 = (x+9)^2$ (1 pont)

Az egyenlet rendezésével egy másodfokú egyenletet kapunk, ez az $x^2 - 4x - 32 = 0$, melynek gyökei $x_1 = 8$ és $x_2 = -4$ lesznek. (2 pont)

Mivel x oldalhosszúságot jelöl, az x csak 8 cm lehet. (1 pont)

Visszahelyettesítve a háromszög oldalai tehát $DE = 8\,\text{cm}$, $DF = 15\,\text{cm}$ és $EF = 17\,\text{cm}$. (2 pont)

Összesen: 11 pont

45) Az *ABCD* húrtrapéz oldalainak hossza:
$AB = 5\,\text{cm}$; $BC = 2{,}5\,\text{cm}$, $CD = 2\,\text{cm}$ és $DA = 2{,}5\,\text{cm}$.

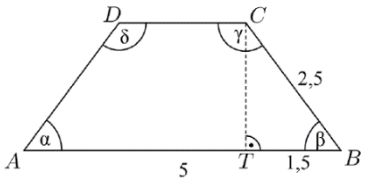
a) Számítsa ki a trapéz szögeit! (5 pont)

b) Határozza meg az *ABC* és *ACD* háromszögek területének arányát! (5 pont)

c) A trapéz belső szögeit egy-egy 5 mm sugarú körívvel jelöltük. Számítsa ki a négy körív hosszának összegét! (3 pont)

***Megoldás*:**

a) Berajzoljuk a húrtrapéz C csúcsból kiinduló magasságát, majd az így keletkezett BCT derékszögű háromszögre felírunk egy koszinusz-szögfüggvényt.



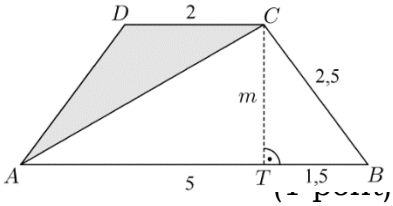
$\cos\beta = \frac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6$, amelyből $\beta \approx 53{,}13^\circ$ (2 pont)

A húrtrapéz alapon fekvő szögei egyenlők, ezért $\alpha = \beta = 53{,}13^\circ$. (1 pont)

Továbbá a húrtrapéz egy száron fekvő szögeinek összege 180°, így $\gamma = \delta =$
$= 180^\circ - 53{,}13^\circ = 126{,}87^\circ$. (2 pont)

b) A BCT háromszögre Pitagorasz-tételt írunk fel:

$m = \sqrt{2{,}5^2 - 1{,}5^2} = 2\,\text{cm}$



Így az ABC háromszög területe $T_{ABC} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5\,\text{cm}^2$.

Az ACD háromszög területét az $ABCD$ trapéz és az ABC háromszög területének különbségeként számítjuk ki.

$T_{ABCD} = \frac{(5+2)}{2} \cdot 2 = 7\,\text{cm}^2$ (1 pont)

$T_{ACD} = T_{ABCD} - T_{ABC} = 2\,\text{cm}^2$ (1 pont)

Így a háromszögek területének aránya $\frac{T_{ABC}}{T_{ACD}} = \mathbf{\frac{5}{2}}$. (1 pont)

c) Mivel a trapéz belső szögeinek összege 360°, így a négy szöghöz tartozó körívek hossza összesen egy $5\,\text{mm}$ sugarú kör kerületével egyenlő. (1 pont)

A kérdezett ívhossz ezért $K = 2 \cdot 5 \cdot \pi = 10\pi \approx \mathbf{31,42\,mm}$. (2 pont)

Összesen: 13 pont