# MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI KÖZÉPSZINT

## Koordináta-geometria

**A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!**

**1) Adott két pont: $A\left(-4;\frac{1}{2}\right)$ és $B\left(1;\frac{3}{2}\right)$ Írja fel az $AB$ szakasz felezőpontjának koordinátáit! (2 pont)**

***Megoldás:***

$AB$ felezőpontja legyen $F$. $F\left(\frac{-4+1}{2};\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2}\right)=F\left(-\frac{3}{2};1\right)$ (2 pont)

**2) Egy kör sugarának hossza 4, középpontja a $B(-3;5)$ pont. írja fel a kör egyenletét! (2 pont)**

***Megoldás:***

$(x+3)^2+(y-5)^2=16$, vagy $x^2+y^2+6x-10y+18=0$ (2 pont)

**3) Írja fel a $(-2;7)$ ponton átmenő, $\underline{n}(5;8)$ normálvektorú egyenes egyenletét! (2 pont)**

***Megoldás:***

$5x+8y=-10+56$ (1 pont)

$5x+8y=46$ (1 pont)

**Összesen: 2 pont**

**4) Adottak az $\underline{a}=(6;4)$ és az $\underline{a}-\underline{b}=(11;5)$ vektorok. Adja meg a $b$ vektort $a$ koordinátával! (3 pont)**

***Megoldás:***

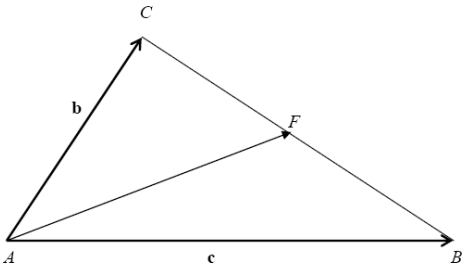
$6-b_1=11$ (1 pont)

$4-b_2=5$ (1 pont)

$\underline{b}(-5;-1)$ (1 pont)

**Összesen: 3 pont**

**5)** **Az *ABC* háromszög két oldalának vektora $\overrightarrow{AB} = \underline{c}$ és $\overrightarrow{AC} = \underline{b}$. Fejezze ki ezek segítségével az *A* csúcsból a szemközti oldal *F* felezőpontjába mutató *AF* vektort! (2 pont)**




***Megoldás:***

$\overrightarrow{AF} = \frac{\underline{b} + \underline{c}}{2}$ (2 pont)

**Összesen: 2 pont**

**6)** **Egy négyzet oldalegyenesei a koordinátatengelyek és az $x = 1$, valamint az $y = 1$ egyenletű egyenesek.**

**a)** **Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben a négyzetet, és adja meg csúcsainak koordinátáit! (2 pont)**

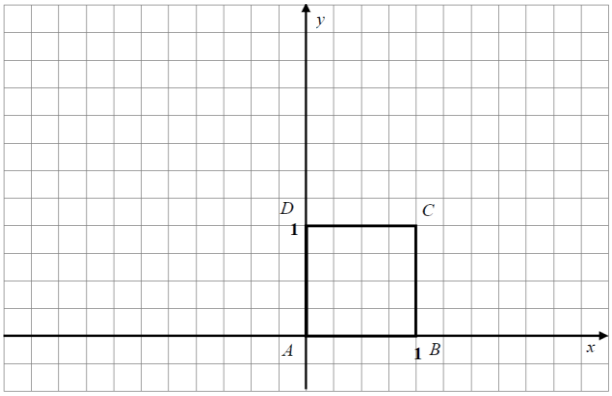
**b)** **Írja fel a négyzet köré írható kör egyenletét! (5 pont)**

**c)** **Állapítsa meg, hogy a négyzet kerülete hány százaléka a kör kerületének? (2 pont)**

**d)** **Az $y = -4x + 2$ egyenletű egyenes a négyzetet két részre bontja. Számítsa ki e részek területének arányát! (8 pont)**

***Megoldás:***

a)




(1 pont)

A csúcspontok koordinátái: $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$. (1 pont)

b) A kör középpontja: $K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ (1 pont)

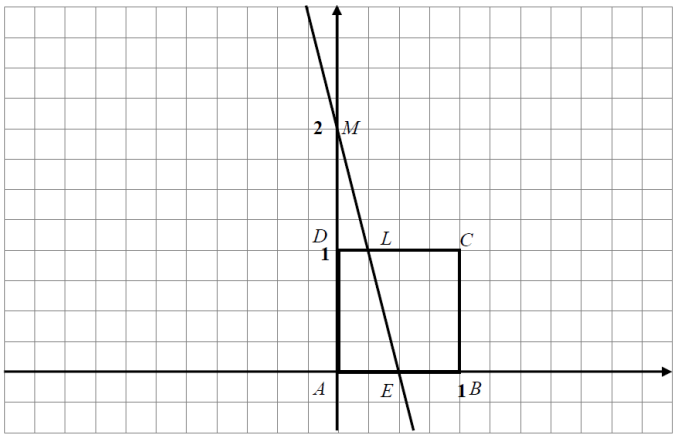
A kör sugara: $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (2 pont)

A kör egyenlete: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. (2 pont)

c) $K_{\text{négyzet}} = 4$; $K_{\text{négyzet}} = 2r\pi = \sqrt{2}\pi \approx 4,44$ (1 pont)

$\frac{4}{4,44} \approx 0,90$ vagyis **90%-a**. (1 pont)

d)




$L$ rajta van az $y=1$ és az $y=-4x+2$ egyenesek metszéspontján. (1 pont)

Így $L\left(\frac{1}{4};1\right)$, (1 pont)

ezért $DL=\frac{1}{4}$ (1 pont)

Az AEDL trapéz területe $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2}\cdot 1=\frac{3}{8}\cdot 1=\frac{3}{8}$ (2 pont)

Az EBCL trapéz területe $\frac{5}{8}$ (2 pont)

**A két terület aránya 3 : 5** (1 pont)

**Összesen: 17 pont**

**7) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(3;5)$ ponton és párhuzamos a $4x+5y=0$ egyenletű egyenessel! (3 pont)**

***Megoldás:***

$4x+5y=$ **–13** (3 pont)

**Összesen: 3 pont**

**8) Egy rombusz átlóinak hossza 12 és 20. Számítsa ki az átlóvektorok skalárszorzatát! Válaszát indokolja! (3 pont)**

***Megoldás:***

Az átlóvektorok merőlegesek egymásra, ezért (1 pont)
a skalárszorzat értéke **0**. (2 pont)

**Összesen: 3 pont**

**9)**

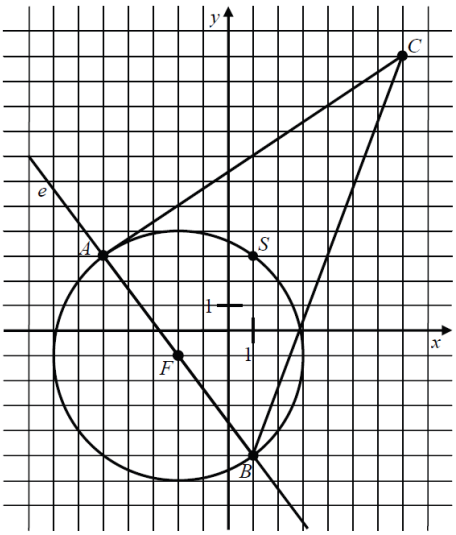
**a) Ábrázolja koordináta-rendszerben az *e* egyenest, melynek egyenlete $4x+3y=-11$.**
**Számítással döntse el, hogy a $P(100;-36)$ pont rajta van-e az egyenesen! Az egyenesen levő *Q* pont ordinátája (második koordinátája) 107.**
**Számítsa ki a *Q* pont abszcisszáját (első koordinátáját)! (4 pont)**

**b) Írja fel az *AB* átmérőjű kör egyenletét, ahol $A(-5;3)$ és $B(1;-5)$.**
**Számítással döntse el, hogy az $S(1;3)$ pont rajta van-e a körön!**
**(7 pont)**

**c) Adja meg az *ABC* háromszög *C* csúcsának koordinátáit, ha tudja, hogy az $S(1;3)$ pont a háromszög súlypontja! (6 pont)**

***Megoldás:***

a) Mivel $4\cdot100+3\cdot(-136)\neq-11$ ezért a ***P* pont nincs az egyenesen**. (1 pont)
Az *e* egyenes ábrázolása. (1 pont)
A *Q* pontra: $4x+3\cdot107=-11$, (1 pont)
ahonnan a *Q* pont abszcisszája: $\boldsymbol{x=-83}$. (1 pont)




b) Az *AB* szakasz felezőpontja *F*. $F(-2;-1)$ (2 pont)
A kör sugara:
$r=|\overrightarrow{AF}|=\sqrt{(-2+5)^2+(-1-3)^2}=5$ (2 pont)
A kör egyenlete: $(x+2)^2+(y+1)^2=25$ (2 pont)
Mivel $(1+2)^2+(3+1)^2=25$ **ezért az *S* pont rajta van a körön**. (1 pont)

c) A *C* pont koordinátái: $(x_c;y_c)$
*S* koordinátáira felírható:
$1=\frac{-5+1+x_c}{3}$; $3=\frac{3+(-5)+y_c}{3}$ (3 pont)
Ahonnan $x_c=7$, (1 pont)
$y_c=11$ (1 pont)
Tehát $\boldsymbol{C(7;11)}$ (1 pont)
A feladat megoldható vektorműveletekkel is azt az összefüggést felhasználva, hogy a háromszög súlypontja a súlyvonalon az oldalhoz közelebbi harmadolópont.

**Összesen: 17 pont**

**10) Fejezze ki az $\underline{i}$ és a $\underline{j}$ vektorok segítségével a $\underline{c}=2\underline{a}-\underline{b}$ vektort, ha $\underline{a}=3\underline{i}-2\underline{j}$ és $\underline{b}=-\underline{i}+5\underline{j}$! (3 pont)**

***Megoldás:***

$\overline{c}=2\overline{a}-\overline{b}$; $\underline{c}=2\left(3\underline{i}-2\underline{j}\right)-\left(-\underline{i}+5\underline{j}\right)$ (1 pont)

$\underline{c}=6\underline{i}-4\underline{j}+\underline{i}-5\underline{j}$ (1 pont)

$\underline{c}=7\underline{i}-9\underline{j}$ (1 pont)

**Összesen: 3 pont**

**11) Az *ABCD* négyzet középpontja *K*, az *AB* oldal felezőpontja *F*. Legyen $\underline{a}=\overrightarrow{KA}$ és $\underline{b}=\overrightarrow{KB}$. Fejezze ki az *a* és *b* vektorok segítségével a $\overrightarrow{KF}$ vektort! (2 pont)**

***Megoldás:***

$\overrightarrow{KF}=\dfrac{\underline{a}+\underline{b}}{2}$ (2 pont)

**12) Adott a koordináta-rendszerben az $A(9;-8)$ középpontú, 10 egység sugarú kör.**

**a) Számítsa ki az $y=-16$ egyenletű egyenes és a kör közös pontjainak koordinátáit! (8 pont)**

**b) Írja fel a kör $P(1;-2)$ pontjában húzható érintőjének egyenletét! Adja meg ennek az érintőnek az iránytangensét (meredekségét)! (4 pont)**

***Megoldás:***

a) A kör egyenlete $(x-9)^2+(y+8)^2=100$ (2 pont)

Ebbe behelyettesítve az $y=-16$-ot:

$(x-9)^2=36$ (2 pont)

Az egyenlet megoldva: $x=15$ vagy $x=3$ (2 pont)

**A közös pontok: $(15;-16)$ és $(3;-16)$** (2 pont)

b) Az érintő normálvektora az $\overrightarrow{AP}$ vektor. (1 pont)

$\overrightarrow{AP}=(-8;6)$ (1 pont)

Az érintő egyenlete $\mathbf{4x-3y=10}$ (1 pont)

Az érintő iránytangense $\dfrac{4}{3}$ (1 pont)

**Összesen: 12 pont**

**13) Az $A(-7;12)$ pontot egy $\underline{r}$ vektorral eltolva a $B(5;8)$ pontot kapjuk. Adja meg az $\underline{r}$ vektor koordinátáit! (2 pont)**

***Megoldás:***

A keresett vektor: $\underline{r}=(12;-4)$. (2 pont)

**14) Jelölje X-szel a táblázatban, hogy az alábbi koordináta-párok közül melyikek adják meg a 300°-os irányszögű egységvektor koordinátáit és melyikek nem!**

| | **IGEN** | **NEM** |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{e\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ | | |
| $\boldsymbol{e\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)}$ | | |
| $\boldsymbol{e\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ | | |
| $\boldsymbol{e\left(\sin 30^\circ;-\cos 30^\circ\right)}$ | | |

**(4 pont)**

***Megoldás:***

| | IGEN | NEM |
|---|---|---|
| $e\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | | **X** |
| $e\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ | | **X** |
| $e\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | **X** | |
| $e\left(\sin 30^\circ;-\cos 30^\circ\right)$ | **X** | |

(4 pont)

**15) Számítsa ki a következő vektorok skaláris szorzatát! Határozza meg a két vektor által bezárt szöget!**

$\boldsymbol{\underline{a}(5;8)}$ $\boldsymbol{\underline{b}(-40;25)}$ **(3 pont)**

***Megoldás:***

A két vektor skaláris szorzata **0**. (2 pont)
A két vektor szöge **derékszög**. (1 pont)

**Összesen: 3 pont**

**16) Adott az $x^2+y^2-6x+8y-56=0$ egyenletű kör és az $x-8{,}4=0$ egyenletű egyenes.**

**a) Számítsa ki a kör és az egyenes közös pontjainak koordinátáit! (6 pont)**

**b) Mekkora távolságra van a kör középpontja az egyenestől? (5 pont)**

**Egy 9 cm sugarú kört egy egyenes két körívre bont. Az egyenes a kör középpontjától 5,4 cm távolságban halad.**

**c) Számítsa ki a hosszabb körív hosszát! (A választ egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (6 pont)**

***Megoldás:***

a) Megoldandó az $x^2+y^2-6x+8y-56=0 \ \wedge \ x=8,4$ egyenletrendszer. (1 pont)

Behelyettesítés után: $y^2+8y-35,84=0$ (1 pont)

amelyből $y=3,2$ vagy $y=-11,2$. (2 pont)

Két közös pont van: $\boldsymbol{P_1(8,4;3,2)}$, $\boldsymbol{P_1(8,4;-11,2)}$ (2 pont)

b) A kör egyenlete átalakítva: $(x-3)^2+(y+4)^2=81$ (1 pont)

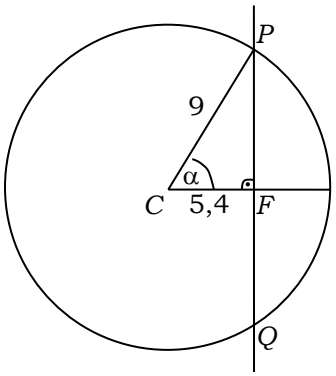
A kör középpontja $C(3;-4)$ (és sugara 9) (1 pont)

Az egyenes párhuzamos az ordinátatengellyel, (1 pont)

ezért a $C(3;-4)$ pontból az egyenesre bocsátott merőleges talppontja $T(8,4;-4)$ (1 pont)

Az egyenes $\boldsymbol{TC}=8,4-3=\boldsymbol{5,4}$ egység távolságra van a kör középpontjától. (1 pont)

c) Helyes ábra (1 pont)




A $CFP$ derékszögű háromszögből: $\cos\alpha=\frac{5,4}{9}=0,6$ (1 pont)

tehát $\alpha\approx 53,13^\circ$ (1 pont)

A $PQ$ hosszabb körívhez tartozó középponti szög $360^\circ-2\alpha\approx 253,74^\circ$ (1 pont)

A körív hossza: $\frac{2\cdot 9\cdot\pi\cdot 253,74}{360}\approx 39,9$ (1 pont)

A hosszabb $PQ$ körív hossza kb. **39,9 cm**. (1 pont)

A feladat megoldható a rövidebb PQ körívhez tartozó $2\alpha$ középponti szög kiszámításával, majd ebből a körív hosszának meghatározásával is.

**Összesen: 17 pont**

**17) Az *ABC* háromszög csúcspontjainak koordinátái: $\boldsymbol{A(0;0)}$, $\boldsymbol{B(-2;4)}$, $\boldsymbol{C(4;5)}$.**

**a) Írja fel az *AB* oldal egyenesének egyenletét! (2 pont)**

**b) Számítsa ki az *ABC* háromszög legnagyobb szögét! A választ tized fokra kerekítve adja meg! (7 pont)**

**c) Számítsa ki az *ABC* háromszög területét! (3 pont)**

***Megoldás:***

a) Az egyenes átmegy az origón $m=\frac{4}{-2}=-2$, (1 pont)

Egyenlete: $\boldsymbol{y=-2x}$ (1 pont)

b) A háromszög legnagyobb szöge a legnagyobb oldallal szemben van (vagy mindhárom szöget kiszámolja). (1 pont)

Az oldalhosszúságok: $AB=\sqrt{20}$, $AC=\sqrt{41}$, $BC=\sqrt{37}$. (2 pont)

Az $AC$-vel szemben levő szög legyen $\beta$.

Alkalmazva a koszinusz tételt: (1 pont)

$41 = 20 + 37 - 2\sqrt{20 \cdot 37}\cos\beta$ (1 pont)

$\cos\beta \approx 0{,}2941$, (1 pont)

$\beta \approx \mathbf{72{,}9}^\circ$ (1 pont)

c) A háromszög egy területképlete: $t = \dfrac{AB \cdot BC \cdot \sin\beta}{2}$ (1 pont)

$t = \dfrac{\sqrt{20 \cdot 37} \cdot \sin 72{,}9^\circ}{2}$. (1 pont)

A háromszög területe **13** (területegység). (1 pont)

**Összesen: 12 pont**

**18) Három egyenes egyenlete a következő (*a* és *b* valós számokat jelölnek):**

$e: \ y = -2x + 3$

$f: \ y = ax - 1$

$g: \ y = bx - 4$

**Milyen számot írjunk az *a* helyére, hogy az *e* és *f* egyenesek párhuzamosak legyenek?**
**Melyik számot jelöli *b*, ha a *g* egyenes merőleges az *e* egyenesre? (3 pont)**

***Megoldás:***

$a = -2$ (1 pont)

$b = \dfrac{1}{2}$ (2 pont)

**Összesen: 3 pont**

**19) Egy kör az $(1;0)$ és $(7;0)$ pontokban metszi az *x* tengelyt. Tudjuk, hogy a kör középpontja az $y = x$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Írja fel a kör középpontjának koordinátáit! Válaszát indokolja! (3 pont)**

***Megoldás:***

A középpont a húr felező merőlegesén van, (1 pont)
így az első koordinátája 4. (1 pont)
A középpont: $O(4;4)$. (1 pont)

**Összesen: 3 pont**

**20) Az *ABC* háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-3;2)$, $B(3;2)$ és $C(0;0)$.**

**a) Számítsa ki az *ABC* háromszög szögeit! (5 pont)**
**b) Írja fel az *ABC* háromszög körülírt körének egyenletét! (7 pont)**

***Megoldás:***

a) Az *ABC* háromszög egyenlő szárú. (1 pont)

Az *AB* alapon fekvő hegyesszögek tangense $\dfrac{2}{3}$ (2 pont)

tehát az alapon fekvő szögek nagysága **33,7°**, (1 pont)
a szárak szöge pedig **112,6°**. (1 pont)

b) A körülírt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek közös pontja, ez a szimmetria miatt az ordinátatengelyen van. (1 pont)
Az $AC$ oldal felezőmerőlegese átmegy a $(-1,5;1)$ felezőponton. (1 pont)
Az $AC$ oldal felezőmerőlegesének egy normálvektora a $CA$, (1 pont)
$CA(-3;2)$. (1 pont)
Az $AC$ oldal felezőmerőlegesének egyenlete:
$-3x+2y=6,5$. (1 pont)
Ez az $y$ tengelyt a $(0;3,25)$ pontban metszi (ez a körülírt kör középpontja).
A kör sugara 3,25. (1 pont)
A körülírt kör egyenlete: $\boldsymbol{x^2+(y-3,25)^2=3,25^2}$. (1 pont)

**Összesen: 12 pont**

**21) Adott két egyenes: $e: 5x-2y=-14,5$, $f: 2x+5y=14,5$.**

**a) Határozza meg a két egyenes $P$ metszéspontjának koordinátáit! (4 pont)**

**b) Igazolja, hogy az $e$ és az $f$ egyenesek egymásra merőlegesek! (4 pont)**

**c) Számítsa ki az $e$ egyenes $x$ tengellyel bezárt szögét! (4 pont)**

***Megoldás:***

a) (A két egyenes egyenletéből alkotott egyenletrendszer megoldása adja a $P$ koordinátáit.)
Az első egyenletből: $y=2,5x+7,25$. (1 pont)
Ezt behelyettesítve a második egyenletbe és rendezve $x=-1,5$. (1 pont)
$y=3,5$ (1 pont)
Tehát $\boldsymbol{P(-1,5;3,5)}$. (1 pont)

b) Az egyenesek meredeksége: $m_e=-\frac{5}{2}$ (1 pont)

$m_f=-\frac{2}{5}$ (1 pont)
A meredekségek szorzata –1, (1 pont)
tehát a két egyenes **merőleges**. (1 pont)
A feladat megoldható a normálvektorok skaláris szorzatát megvizsgálva is.

c) Az $e$ egyenes meredeksége 2,5, tehát az egyenes $x$ tengellyel bezárt $\alpha$ szögére igaz, hogy $\operatorname{tg}\alpha=2,5$. (3 pont)
Ebből $\boldsymbol{\alpha=68,2^\circ}$. (1 pont)

**Összesen: 12 pont**

**22) Írja fel annak az $e$ egyenesnek az egyenletét, amelyik párhuzamos a $2x-y=5$ egyenletű $f$ egyenessel és áthalad a $P(3;-2)$ ponton! Válaszát indokolja! (2 pont)**

***Megoldás:***

Az $f$ egyenes meredeksége 2, így az $e$ egyenes meredeksége is 2.
$m(x-x_0)=y-y_0$
$\boldsymbol{y=2x-8}$ (2 pont)

**23) Adja meg az $(x+2)^2+y^2=9$ egyenletű kör $K$ középpontjának koordinátáit és sugarának hosszát! (3 pont)**

***Megoldás:***

$K(-2;0)$ (2 pont)
$r=3$ (1 pont)
**Összesen: (3 pont)**

**24) Adja meg a $2x+y=4$ egyenletű egyenes és az $x$ tengely $M$ metszéspontjának a koordinátáit, valamint az egyenes meredekségét! (3 pont)**

***Megoldás:***

A metszéspont $M(2;0)$. (2 pont)
Az egyenes meredeksége $-2$. (1 pont)
**Összesen: 3 pont**

**25) A $PQR$ háromszög csúcsai: $P(-6;-1)$, $Q(6;-6)$ és $R(2;5)$.**

**a) Írja fel a háromszög $P$ csúcsához tartozó súlyvonal egyenesének egyenletét! (5 pont)**

**b) Számítsa ki a háromszög $P$ csúcsnál lévő belső szögének nagyságát! (7 pont)**

***Megoldás:***

a) A kérdéses súlyvonalra a $P$ csúcs és a vele szemközti oldal felezőpontja illeszkedik. (1 pont)
A $QR$ szakasz felezőpontja $F(4;-0,5)$. (1 pont)
A súlyvonal egy irányvektora: $\overrightarrow{PF}(10;0,5)$. (1 pont)
A súlyvonal egyenlete: $x-20y=14$. (2 pont)

b) (A kérdéses szöget a háromszög oldalvektorai skalárszorzatának segítségével lehet meghatározni.) Az oldalvektorok $PQ(12;-5)$ és $PR(8;6)$. (2 pont)
A két vektor skalárszorzata a koordinátákból: $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=12\cdot 8+(-5)\cdot 6=66$ (1 pont)
Az oldalvektorok hossza $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=13$ és $\left|\overrightarrow{PR}\right|=10$ (1 pont)
A két vektor skalárszorzata a definíció szerint: $\left(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}\right)=66=13\cdot 10\cdot\cos\alpha$, ahol $\alpha$ a két vektor által bezárt szöget jelöli. (1 pont)
Innen: $\cos\alpha\approx 0,5077$ (1 pont)
$\alpha=59,5°$ (mivel $0°<\alpha<180°$) (1 pont)
**Összesen: 12 pont**

**26) Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-2;-1)$, $B(9;-3)$, és $C(-3;6)$.**

**a) Írja fel a *BC* oldal egyenesének egyenletét! (3 pont)**
**b) Számítsa ki a *BC* oldallal párhuzamos középvonal hosszát! (3 pont)**
**c) Számítsa ki a háromszögben a *C* csúcsnál lévő belső szög nagyságát! (6 pont)**

***Megoldás:***

a) A $BC$ oldalegyenes egy irányvektora a $\overrightarrow{BC}(-12;9)$ vektor. (1 pont)
Ezzel az egyenes egyenlete: $9x+12y=9\cdot 9+12\cdot(-3)$, (1 pont)
azaz: $\mathbf{9x+12y=45}$ $\mathbf{(3x+4y=15)}$. (1 pont)

b) A $BC$ oldallal párhuzamos középvonal hossza fele a $BC$ oldal hosszának. (1 pont)
A $BC$ oldal hossza: $\sqrt{12^2+(-9)^2}=15$ (1 pont)
A középvonal hossza: $\mathbf{7,5}$ . (1 pont)

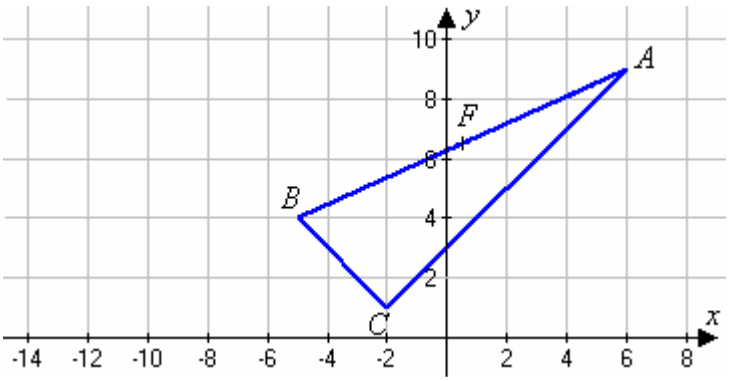
c) Az $ABC$ háromszög oldalainak hossza: $AB=\sqrt{125}$, $BC=15$, $AC=\sqrt{50}$. (2 pont)
A $C$ csúcsnál lévő belső szöget jelölje $\gamma$. Alkalmazva a koszinusztételt: (1 pont)
$125=225+50-2\cdot 15\cdot\sqrt{50}\cdot\cos\gamma$ (1 pont)
$\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}(\approx 0,7071)$ (1 pont)
(Mivel $0°<\gamma<180°$, így) $\boldsymbol{\gamma=45°}$ (1 pont)

**Összesen: 12 pont**

**27) Tekintsük a koordinátarendszerben adott $A(6;9)$, $B(-5;4)$ és $C(-2;1)$ pontokat!**

**a) Mekkora az *AC* szakasz hossza? (2 pont)**
**b) Írja fel az *AB* oldalegyenes egyenletét! (4 pont)**
**c) Igazolja (számítással), hogy az *ABC* háromszög *C* csúcsánál derékszög van! (6 pont)**
**d) Írja fel az *ABC* háromszög körülírt körének egyenletét! (5 pont)**

***Megoldás:***




a) $\overrightarrow{AC}(-8;-8)$

$AC = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2} = \sqrt{128} = \mathbf{8 \cdot \sqrt{2} \approx 11{,}31}$ (2 pont)

b) $\overrightarrow{AB} = \underline{v}(-11;-5)$

$\underline{n}(-5;11)$

$m = \frac{5}{11}$ (2 pont)

Az $AB$ egyenes egyenlete: $\mathbf{-5x + 11y = 69}$ vagy $\mathbf{y = \frac{5}{11}x + \frac{69}{11}}$ (2 pont)

c) A $\overrightarrow{CB}(-3;3)$ (1 pont)

$\overrightarrow{CA}(8;8)$ (1 pont)

A vektorok skaláris szorzata: $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -3 \cdot 8 + 8 \cdot 3 = 0$ (2 pont)

**Mivel a két vektor skaláris szorzata 0**, a két vektor merőleges egymásra, azaz **a C csúcsnál derékszög van**. (2 pont)

d) Mivel derékszögű a háromszög, Thalész tétele alapján a körülírt kör középpontja az átfogó felezőpontja, a kör sugara pedig az átfogó fele. (1 pont)

$F(0{,}5;6{,}5)$ (2 pont)

A kör sugara: $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{146}}{2} \approx 6{,}04$ (1 pont)

**A kör egyenlete:** $\mathbf{(x - 0{,}5)^2 + (y - 6{,}5)^2 = 36{,}5}$ (1 pont)

**Összesen: 17 pont**

**28) Adottak az $\underline{a}(4;3)$ és $\underline{b}(-2;1)$ vektorok.**

**a) Adja meg az $\underline{a}$ hosszát! (2 pont)**

**b) Számítsa ki az $\underline{a} + \underline{b}$ koordinátáit! (2 pont)**

***Megoldás:***

a) $\underline{a} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \mathbf{5}$ (2 pont)

b) $\underline{a} + \underline{b} = (4 + (-2); 3 + 1) = \mathbf{(2;4)}$ (2 pont)

**29) Adott a síkon az $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 47 = 0$ egyenletű kör.**

**a) Állapítsa meg, hogy az $A(7;7)$ pont illeszkedik-e a körre! (2 pont)**

**b) Határozza meg a kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát! (5 pont)**

**c) Legyenek $A(7;7)$ és $B(0;0)$ egy egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjai. A háromszög $C$ csúcsa rajta van az $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 47 = 0$ egyenletű körön. Számítsa ki a $C$ csúcs koordinátáit! (10 pont)**

***Megoldás:***

a) $49+49+14-14-47\neq 0$ **Tehát a pont nem illeszkedik a körre.** (2 pont)

b) $(x+1)^2+(y-1)^2=49$ (3 pont)

$\boldsymbol{K=(-1;1)}$ $\boldsymbol{r=7}$ (2 pont)

c) A háromszög harmadik csúcsa az alap felezőmerőlegesén van. (1 pont)

Az $AB$ oldal felezőpontja: $F(3,5;3,5)$ (1 pont)

Az $AB$ oldal felezőmerőlegesének normálvektora $\underline{n}(7;7)$ (1 pont)

A felezőmerőleges egyenlete $x+y=7$. (1 pont)

A háromszög harmadik csúcsát a kör és a felezőmerőleges metszéspontja adja: $\left.\begin{matrix}(x+1)^2+(y-1)^2=49\\ y=7-x\end{matrix}\right\}$ (1 pont)

$x^2-5x-6=0$ $x_1=6$ $x_2=-1$ (3 pont)

$y_1=1$ $y_2=8$ (1 pont)

$\boldsymbol{C_1=(6;1)}$ $\boldsymbol{C_2=(-1;8)}$ (1 pont)

**Összesen: 17 pont**

**30) Adott a koordináta-rendszerben két pont: $\boldsymbol{A(1;-3)}$ és $\boldsymbol{B(7;-1)}$.**

**a) Írja fel az *A* és *B* pontokra illeszkedő *e* egyenes egyenletét! (4 pont)**

**b) Számítással igazolja, hogy az *A* és a *B* pont is illeszkedik az $\boldsymbol{x^2+y^2-6x-2y=10}$ egyenletű *k* körre, és számítsa ki az *AB* húr hosszát! (4 pont)**

**Az *f* egyenesről tudjuk, hogy illeszkedik az *A* pontra és merőleges az *AB* szakaszra.**

**c) Számítsa ki a *k* kör és az *f* egyenes (*A*-tól különböző) metszéspontjának koordinátáit! (9 pont)**

***Megoldás:***

a) $\overrightarrow{AB}(6;2)$ (1 pont)

Az $e$ egyenes egy normálvektora: $\underline{n}(1;-3)$, (1 pont)

egyenlete: $x-3y=7-3\cdot(-1)\Rightarrow$ (1 pont)

$\Rightarrow \boldsymbol{x-3y=10}$ (1 pont)

b) $A$ pont koordinátáinak behelyettesítésével adódik:

$1^2+(-3)^2-6\cdot 1-2\cdot(-3)=10$, tehát az $A$ pont illeszkedik a $k$ körre. (1 pont)

$B$ pont koordinátáinak behelyettesítésével adódik:

$7^2+(-1)^2-6\cdot 7-2\cdot(-1)=10$, tehát a $B$ pont illeszkedik a $k$ körre. (1 pont)

Az $AB$ húr hossza $\sqrt{(7-1)^2+(-1+3)^2}=$ (1 pont)

$=\boldsymbol{\sqrt{40}\,(\approx 6{,}32)}$. (1 pont)

c) Az $f$ egyenes egy normálvektora: $\underline{n}(3;1)$ (1 pont)

Az $f$ egyenes egyenlete $3x+y=0$. (2 pont)

A metszéspont koordinátáit a $k$ kör és az $f$ egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásával kapjuk. (1 pont)

Az $f$ egyenes egyenletéből $y=-3x$. (1 pont)

Ezt a kör egyenletébe helyettesítve:

$x^2+9x^2-6x-2\cdot(-3x)=10$. (1 pont)

Egyszerűsítés után adódik: $x^2=1$. (1 pont)

Ennek (az 1-től különböző) megoldása $x=-1$. (1 pont)

Így a keresett pont: $\boldsymbol{C(-1;3)}$. (1 pont)

**Összesen: 17 pont**

**31) Adott az $A(5;2)$ és a $B(-3;-2)$ pont.**

**a) Számítással igazolja, hogy az $A$ és $B$ pontok illeszkednek az $x-2y=1$ egyenletű $e$ egyenesre! (2 pont)**

**b) Írja fel az $AB$ átmérőjű kör egyenletét! (5 pont)**

**c) Írja fel annak az $f$ egyenesnek az egyenletét, amely az $AB$ átmérőjű kört a $B$ pontban érinti! (5 pont)**

***Megoldás:***

a) $5-2\cdot 2=$ **1** (igaz) (1 pont)

$(-3)-2\cdot(-2)=$ **1** (igaz) (1 pont)

b) A kör középpontja az $AB$ szakasz $C$ felezőpontja, (1 pont)

ennek koordinátái $(1;0)$. (1 pont)

A kör sugara az $AC$ szakasz, (1 pont)

ennek hossza $\sqrt{20}$. (1 pont)

A kör egyenlete: $\boldsymbol{(x-1)^2+y^2=20}$. (1 pont)

c) Az $f$ merőleges az $AB$ szakaszra. (1 pont)
Az $f$ egy normálvektora a $\overrightarrow{BA}$ vektor, (1 pont)
ennek koordinátái $(8;4)$ (1 pont)
Az $f$ egyenlete: $8x+4y=8\cdot(-3)+4\cdot(-2)$ (1 pont)
azaz $\mathbf{8x+4y=-32}$ (1 pont)

**Összesen: 12 pont**

**32) Egy kör érinti az $y$ tengelyt. A kör középpontja a $K(-2;3)$ pont. Adja meg a kör sugarát, és írja fel az egyenletét! (3 pont)**

***Megoldás:***

A kör sugara: $\boldsymbol{r=2}$, (1 pont)
egyenlete: $(x+2)^2+(y-3)^2=$ (1 pont)
$=4$ (1 pont)

**Összesen: 3 pont**

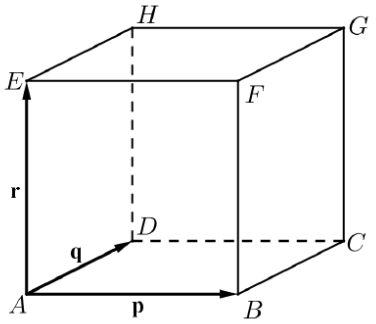
**33) Egy kör egyenlete $(x+3)^2+(y-4)^2=25$. Adja meg a kör középpontjának koordinátáit és a kör átmérőjének hosszát! (3 pont)**

***Megoldás:***

A kör középpontja $(-3;4)$. (1 pont)
A kör átmérője $10$. (2 pont)

**Összesen: 3 pont**

**34) Az ábrán látható kocka $A$ csúcsából kiinduló élvektorai $\overrightarrow{AB}=\underline{p}$; $\overrightarrow{AD}=\underline{q}$ és $\overrightarrow{AE}=\underline{r}$. Fejezze ki $\underline{p}$, $\underline{q}$, és $\underline{r}$ segítségével a $\overrightarrow{GC}$, az $\overrightarrow{AG}$ és az $\overrightarrow{FH}$ vektorokat! (3 pont)**




***Megoldás:***

$\overrightarrow{GC}=-\underline{r}$ (1 pont)
$\overrightarrow{AG}=\underline{p}+\underline{q}+\underline{r}$ (1 pont)
$\overrightarrow{FH}=\underline{q}-\underline{p}$ (1 pont)

**Összesen: 3 pont**

**35) Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok $120^\circ$-os szöget zárnak be egymással, és mindkét vektor hossza 5 egység.**

**a) Számítsa ki az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ vektor hosszát! (3 pont)**

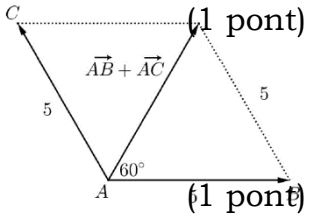
**b) Számítsa ki az $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ vektor hosszát! (4 pont)**

**A $PRST$ rombusz középpontja a $K(4;-3)$ pont, egyik csúcspontja a $T(7;1)$ pont. Tudjuk, hogy az $RT$ átló hossza fele a $PS$ átló hosszának.**

**c) Adja meg a $P$; az $R$ és az $S$ csúcsok koordinátáit! (10 pont)**

***Megoldás*:**

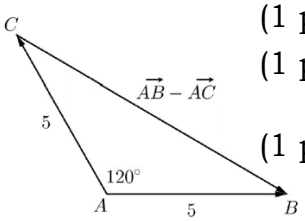
a) Ábra. (1 pont)




Az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ és az $\overrightarrow{AB}$ vektorok egy olyan egyenlő szárú háromszög két oldalát határozzák meg, amelynek egyik szöge $60^\circ$-os, így a háromszög szabályos. (1 pont)

Az összegvektor hossza ezért **5 egység**. (1 pont)

b) Ábrázoljuk a $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ vektort. (1 pont)




Az így kapott háromszögre alkalmazzuk a koszinusztételt. (1 pont)

$\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{5^2+5^2-2\cdot5\cdot5\cdot\cos120^\circ}\approx$ **8,66 egység.** (1 pont)

c) A rombusz átlói felezik egymást a K pontban, így a K pont a TR átló felezőpontja. Ezt kihasználva megkaphatjuk az $R(x_R;y_R)$ pont koordinátáit.

$\frac{7+x_R}{2}=4$, illetve $\frac{1+y_R}{2}=-3$. (1 pont)

Ebből $x_R=1$ és $y_R=-7$, tehát $\boldsymbol{R(1;-7)}$. (1 pont)

A $\overrightarrow{KT}(3;4)$ vektort $90^\circ$-kal elforgatva megkapjuk a $(-4;3)$ vektort. (3 pont)

Ennek kétszerese a $\overrightarrow{KP}(-8;6)$ vektor, amelynek ellentettje a $\overrightarrow{KS}(8;-6)$ vektor. (2 pont)

A K pont koordinátáihoz adva ezeknek a vektoroknak a megfelelő koordinátáit, megkapjuk a hiányzó csúcsok koordinátáit. (1 pont)

Ebből $\boldsymbol{P(-4;3)}$ és $\boldsymbol{S(12;-9)}$. (2 pont)

**Összesen: 17 pont**

**36)**

**a) Az *ABC* háromszög két csúcsa $A(-3;-1)$ és $B(3;7)$, súlypontja az origó. Határozza meg a C csúcs koordinátáit! (3 pont)**

**b) Írja fel a hozzárendelési utasítását annak a lineáris függvénynek, amely $-3$-hoz $-1$-et és $3$-hoz $7$-et rendel! (A hozzárendelési utasítást $x\mapsto ax+b$ alakban adja meg!) (5 pont)**

**c) Adott az $A(-3;-1)$ és a $B(3;7)$ pont. Számítsa ki, hogy az $x$ tengely melyik pontjából látható derékszögben az *AB* szakasz! (9 pont)**

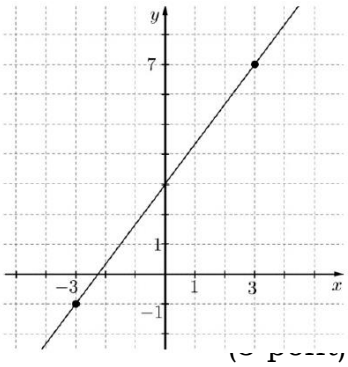
***Megoldás*:**

a) A háromszög súlypontjának koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepe, a $C(c_1;c_2)$ pont koordinátáira felírhatóak az alábbi egyenletek. (1 pont)

$0=\frac{-3+3+c_1}{3}$, amelyre $\boldsymbol{c_1=0}$ (1 pont)

$0 = \frac{-1+7+c_2}{3}$ , amelyre $\boldsymbol{c_2 = -6}$ (1 pont)

b) A függvény képe egy egyenes, meredeksége $m = \frac{7-(-1)}{3-(-3)} = \frac{4}{3}$.




A $(3;7)$ ponton átmenő $\frac{4}{3}$ meredekségű egyenes egyenlete pedig $y-7=\frac{4}{3}(x-3)$, így a hozzárendelés szabálya $\boldsymbol{x \mapsto \frac{4}{3}x+3}$.

c) Jelöljük a kérdéses pontot $P$-vel! Mivel a $P$ pont az $x$ tengelyen van, így a második koordinátája $0$. (1 pont)

Ha $P(x;0)$, akkor $\overrightarrow{PA} = (-3-x;-1)$ és $\overrightarrow{PB} = (3-x;7)$. (2 pont)

$\overrightarrow{PA}$ és $\overrightarrow{PB}$ vektorok pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $\overrightarrow{PA}$ és $\overrightarrow{PB}$ vektorok skaláris szorzata 0. (1 pont)

$(-3-x)\cdot(3-x)+(-1)\cdot 7 = 0 \Rightarrow x^2-9-7=0$ , amelynek gyökei $x_1 = 4$ és $x_2 = -4$. (4 pont)

Tehát a feladatnak két megoldása van, $\boldsymbol{P_1(4;0)}$ és $\boldsymbol{P_2(-4;0)}$. (1 pont)

**Összesen: 17 pont**