MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI KÖZÉPSZINT

Exponenciális és Logaritmusos feladatok

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\log_3\left(\sqrt{x+1}+1\right)=2$, **ahol** x **valós szám és** $x>-1$ **(6 pont)**

b) $2\cos 2x=4-5\sin x$, **ahol** x **tetszőleges forgásszöget jelöl** **(11 pont)**

Megoldás:

a) A logaritmus definíciója szerint $\sqrt{x+1}+1=3^2$ (2 pont)

$\sqrt{x+1}=8$ (1 pont)

$x+1=64$ (1 pont)

$\boldsymbol{x=63}$ (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

b) $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ helyettesítéssel, (1 pont)

$2-2\sin^2 x+5\sin x-4=0$ (1 pont)

$\sin x=y$ új változóval $2y^2-5y+2=0$. (1 pont)

$y_1=2;\ y_2=\frac{1}{2}$ (2 pont)

y_1 nem megoldás, mert $|\sin x|\le 1$ (1 pont)

$\boldsymbol{x=\frac{1}{6}\pi+k2\pi}$ vagy $\boldsymbol{x=\frac{5}{6}\pi+k2\pi}$ (fokban is megadható) (3 pont)

$k\in\mathbb{Z}$ (1 pont)

Ellenőrzés, vagy le kell írni, hogy a gyökök igazzá teszik az eredeti egyenletet, mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk. (1 pont)

Összesen: 17 pont

2) Mekkora x értéke, ha $\lg x=\lg 3+\lg 25$? **(2 pont)**

Megoldás:

$\lg x=\lg(3\cdot 25)$ (1 pont)

Mivel a 10-es alapú logaritmusfüggvény szig. monoton nő,

$\boldsymbol{x=75}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

3) Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $9^x-2\cdot 3^x-3=0$ **(6 pont)**

b) $\sin^2 x=2\sin x+3$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) Legyen $3^x = a$

Az $a^2 - 2a - 3 = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldani. (1 pont)

Ennek az egyenletnek a gyökei: $a_1 = 3$ és $a_2 = -1$ (1 pont)

$a = 3^x = 3$ esetén $x = 1$ (1 pont)

$a = 3^x = -1$ egyenlet nem ad megoldást, (1 pont)

mert 3 minden valós kitevőjű hatványa pozitív szám. (1 pont)

Az $x = 1$ kielégíti az eredeti egyenletet. (1 pont)

b) Legyen $\sin x = a$

Az $a^2 - 2a - 3 = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldani.

Ennek az egyenletnek a gyökei: $a_1 = 3$ és $a_2 = -1$. (1 pont)

$a = \sin x = 3$ nem ad megoldást, (1 pont)

mert $\sin x \le 1$ (1 pont)

$a = \sin x = -1$ (1 pont)

A $\sin x = -1$ egyenlet gyökei: $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$,

ahol k tetszőleges egész szám. (1 pont)

Ezek az x értékek kielégítik az egyenletet. (1 pont)

Összesen: 12 pont

4) Adott a következő egyenletrendszer:

(1) $2\lg(y+1) = \lg(x+11)$

(2) $y = 2x$

a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben azokat a $P(x;y)$ pontokat, amelyeknek koordinátái kielégítik a (2) egyenletet! (2 pont)

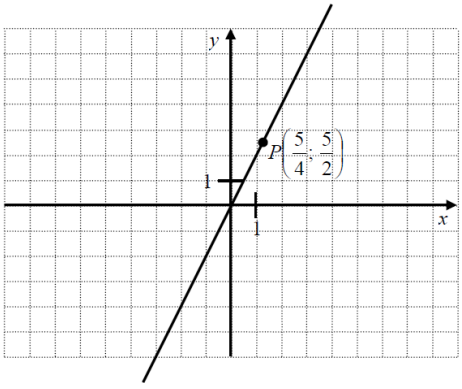
b) Milyen x, illetve y valós számokra értelmezhető mindkét egyenlet? (2 pont)

c) Oldja meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán! (11 pont)

d) Jelölje meg az egyenletrendszer megoldáshalmazát az a) kérdéshez használt derékszögű koordináta-rendszerben! (2 pont)

Megoldás:

a)



(2 pont)

b) Az (1) egyenlet miatt $\boldsymbol{y > -1}$ (1 pont)

és $\boldsymbol{x > -11}$ (1 pont)

c) $\lg(y+1)^2 = \lg(x+11)$ (1 pont)

$\lg(2x+1)^2 = \lg(x+11)$ (1 pont)

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt (1 pont)

$(2x+1)^2 = (x+11)$ (1 pont)

$4x^2 + 3x - 10 = 0$ (2 pont)

$x_1 = \frac{5}{4}$ és $x_2 = -2$ (1 pont)

$y_1 = \frac{5}{2}$ és $y_2 = -4$ (1 pont)

A másodfokú egyenletrendszer megoldásai: $\left(\frac{5}{4};\frac{5}{2}\right)$ illetve $(-2;-4)$ (1 pont)

amiből a második számpár nem tartozik az eredeti egyenlet értelmezési tartományába, (1 pont)

az első számpár kielégíti az eredeti egyenletrendszert. (1 pont)

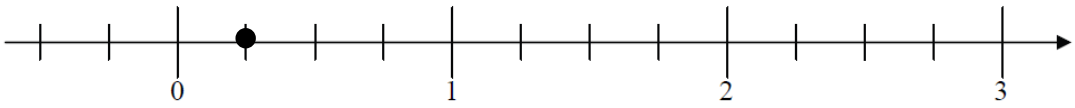
d) **A $\left(\frac{5}{4};\frac{5}{2}\right)$ pont bejelölése.** (2 pont)

Összesen: 17 pont

5) Oldja meg a pozitív valós számok halmazán a $\log_{16} x = -\frac{1}{2}$ egyenletet! Jelölje a megadott számegyenesen az egyenlet megoldását! (3 pont)

Megoldás:

$\boldsymbol{x = \frac{1}{4}}$ (2 pont)



(1 pont)

Összesen: 3 pont

6) Melyik a nagyobb: $A = \frac{\sin 7\pi}{2}$ vagy $B = \log_2 \frac{1}{4}$? (Írja a megfelelő relációs jelet a válaszmezőbe! Válaszát indokolja!) (2 pont)

Megoldás:

$A = -1,\ B = -2$ (1 pont)

$\boldsymbol{A > B}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

7) Adja meg a $\lg x^2 = 2\lg x$ egyenlet megoldáshalmazát! (2 pont)

Megoldás:

A pozitív valós számok halmaza. (2 pont)

8)

a) Mely pozitív egész számokra igaz a következő egyenlőtlenség?

$5^{x-2} < 5^{13-2x}$ **(4 pont)**

b) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget!

$9^{\sqrt{x}} < 3^{x-3}$ **(8 pont)**

Megoldás:

a) Az (5 alapú exponenciális) függvény szigorúan monoton növekedése miatt (1 pont)

$x-2<13-2x$ (1 pont)

$x<5$ (1 pont)

Az egyenlőtlenség megoldása: $\{1;2;3;4\}$ (1 pont)

b) $x \geq 0$ (1 pont)

$3^{2\sqrt{x}} = 3^{x-3}$ (1 pont)

A (3 alapú exponenciális) függvény szigorú monotonitása miatt $2\sqrt{x} = x-3$ (1 pont)

$4x = x^2 - 6x + 9$ (1 pont)

$x^2 - 10x + 9 = 0$ (1 pont)

$x_1 = 1 \quad x_2 = 9$ (1 pont)

Az $x=1$ nem megoldása az egyenletnek. **Az egyenlet megoldása a valós számok halmazán az $x=9$.** (2 pont)

Összesen: 12 pont

9) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\lg(x+15)^2 - \lg(3x+5) = \lg 20$ (6 pont)

b) $25^{\sqrt{x}} < 5 \cdot 5^{\sqrt[3]{x}}$ (6 pont)

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $x > -\frac{5}{3}$ (1 pont)

A logaritmus azonosságának helyes alkalmazása. (1 pont)
(A lg függvény kölcsönösen egyértelmű.)

$(x+15)^2 = 20(3x+5)$ (1 pont)

$x^2 - 30x + 125 = 0$ (1 pont)

$x_1 = 25$ és **$x_2 = 5$** (1 pont)

Mindkét megoldás megfelel. (1 pont)

b) $x \geq 0$ (1 pont)

$5^{2\sqrt{x}} = 5^{1+3\sqrt{x}}$ (2 pont)

$\sqrt{x} = -1$ (1 pont)

A négyzetgyök értéke nemnegatív szám, ezért (1 pont)

nincs valós megoldás. (1 pont)

Összesen: 12 pont

10) Határozza meg az alábbi egyenletek valós megoldásait!

a) $\left(\log_2 x - 3\right) \cdot \left(\log_2 x^2 + 6\right) = 0$ **(7 pont)**

b) $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$ **(10 pont)**

Megoldás:

a) Az egyenlet bal oldalán szereplő szorzat értéke pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. (1 pont)

Ha az első tényező 0, akkor $\log_2 x = 3$ (1 pont)

Innen $\boldsymbol{x_1 = 2^3 = 8}$ (1 pont)

Ha a második tényező 0, akkor $\log_2 x^2 = -6$ (1 pont)

Innen $x^2 = 2^{-6} = \frac{1}{64}$ (1 pont)

ahonnan a pozitív tartományba csak az $\boldsymbol{x_2 = \frac{1}{8}}$ (1 pont)

Mind a két gyök kielégíti az eredeti egyenletet. (1 pont)

b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ vagy $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ (2 pont)

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ vagy $x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ (2 pont)

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ vagy $x - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi$ (2 pont)

$\boldsymbol{x_1 = \frac{\pi}{3} + 2n\pi}$; $\boldsymbol{x_2 = 2n\pi}$; $\boldsymbol{x_3 = \pi\pi + 2n\pi}$; $\boldsymbol{x_4 = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi}$, $\boldsymbol{n \in \mathbb{Z}}$ (4 pont)

Összesen: 17 pont

11) Adja meg a $\log_3 81$ kifejezés pontos értékét! **(2 pont)**

Megoldás:

A kifejezés értéke **4**. (2 pont)

12) Mennyi az $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$ kifejezés értéke, ha $x = -1$? **(2 pont)**

Megoldás:

A kifejezés értéke: **25**. (2 pont)

13) Az a, b és c tetszőleges pozitív valós számokat jelölnek. Tudjuk, hogy

$$\lg x = 3\lg a - \lg b + \frac{1}{2}\lg c$$

Válassza ki, hogy melyik kifejezés adja meg helyesen x értékét! (3 pont)

A: $x = \frac{3a}{b} + \frac{1}{2}c$

B: $x = a^3 - b + \sqrt{c}$

C: $x = \frac{a^3}{b \cdot \sqrt{c}}$

D: $x = \frac{a^3 \cdot c^{-1}}{b}$

E: $x = a^3 - b\sqrt{c}$

F: $x = \frac{a^3 \cdot \sqrt{c}}{b}$

G: $x = \frac{a^3 \cdot \frac{1}{c}}{b}$

Megoldás:

A helyes kifejezés: **F**. (3 pont)

14) A b, c és d pozitív számokat jelölnek. Tudjuk, hogy $\lg b = \frac{\lg c - \lg d}{3}$.

Fejezze ki az egyenlőségből b-t úgy, hogy abban c és d logaritmusa ne szerepeljen! (2 pont)

Megoldás:

$b = \sqrt[3]{\frac{c}{d}}$ vagy $b = \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{3}}$ (2 pont)

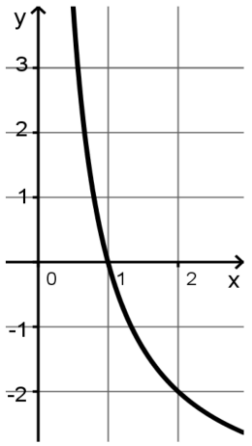
15) Melyik szám nagyobb?

$A = \lg\frac{1}{10}$ **vagy** $B = \cos 8\pi$ **(2 pont)**

Megoldás:

A nagyobb szám betűjele: B $(= \cos 8\pi)$ (2 pont)

16) István az $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x (x>0)$ függvény grafikonját akarta felvázolni, de ez nem sikerült neki, több hibát is elkövetett (a hibás vázlat látható a mellékelt ábrán). Döntse el, hogy melyik igaz az alábbi állítások közül!
a) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény szigorúan monoton csökkenő.
b) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény 2-höz –2-t rendel.
c) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény zérushelye 1. **(2 pont)**



Megoldás:

b). (2 pont)

17) Adja meg azokat az x valós számokat, melyekre teljesül: $\log_2 x^2 = 4$. Válaszát indokolja! **(3 pont)**

Megoldás:

A logaritmus definíciója alapján: $x^2 = 16$ (1 pont)
a lehetséges x értékek: **4**, (1 pont)
–4 (1 pont)
Összesen: 3 pont

18) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!
a) $5^{x+1} + 5^{x+2} = 30$ **(5 pont)**
b) $\frac{3}{x} - \frac{2}{x+2}$, ahol $x \neq 0$ és $x \neq 2$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) $5 \cdot 5^x + 5^2 \cdot 5^x = 30$ (1 pont)
$30 \cdot 5^x = 30$ (1 pont)
$5^x = 1$ (1 pont)
(Az 5 alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt:
$x = 0$ (1 pont)
Ellenőrzés (1 pont)

b) Az egyenlet bal oldalát közös nevezőre hozva: $\frac{3(x+2)-2x}{x(x+2)} = 1$ (1 pont)
Az egyenlet mindkét oldalát $x(x+2)$-vel szorozva
$3(x+2)-2x = x(x+2)$ (1 pont)
A zárójelek felbontása és összevonás után: $x+6 = x^2+2x$ (1 pont)
Nullára rendezve: $x^2 + x - 6 = 0$ (1 pont)
A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = -3$; $x_2 = 2$ (2 pont)
Ellenőrzés (1 pont)
Összesen: 12 pont

19)

a) **Oldja meg a valós számok halmazán az $\frac{x+2}{3-x} \geq 0$ egyenlőtlenséget!** **(7 pont)**

b) **Adja meg az x négy tizedesjegyre kerekített értékét, ha $4 \cdot 3^x + 3^x = 20$.** **(4 pont)**

c) **Oldja meg a $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ egyenletet a $[-\pi;\pi]$ alaphalmazon.** **(6 pont)**

Megoldás:

a) Ha $x < 3$, akkor ($3 - x > 0$, ezért) $x + 2 \geq 0$, vagyis $x \geq -2$. (2 pont)
A 3-nál kisebb számok halmazán tehát a $[-2;3[$ intervallum minden eleme megoldása az egyenlőtlenségnek. (1 pont)

Ha $x > 3$, akkor ($3 - x < 0$, ezért) $x + 2 \leq 0$, vagyis $x \leq -2$. (2 pont)

A 3-nál nagyobb számok halmazában nincs ilyen elem, tehát a 3-nál nagyobb számok között nincs megoldása az egyenlőtlenségnek. (1 pont)

A megoldáshalmaz: $[-2;3[$. (1 pont)

b) $5 \cdot 3^x = 20$ (1 pont)
$3^x = 4$ (1 pont)

$x = \log_3 4$ (1 pont)

$x \approx 1{,}2619$ (1 pont)

c) (A megadott egyenlet cos x-ben másodfokú,) így a megoldóképlet felhasználásával (1 pont)
$\cos x = 0{,}5$ vagy $\cos x = -2$. (2 pont)
Ez utóbbi nem lehetséges (mert a koszinuszfüggvény értékkészlete a $[-1;1]$ intervallum). (1 pont)
A megadott halmazban a megoldások: $-\frac{\pi}{3}$, illetve $\frac{\pi}{3}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

20) Melyik az az x természetes szám, amelyre $\log_3 81 = x$? **(2 pont)**

Megoldás:

$x = 4$ (2 pont)

21) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\frac{x-1}{2}+\frac{2x}{5}=4$ **(5 pont)**

b) $\lg(x-1)+\lg 4=2$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) $5\cdot(x-1)+2\cdot(2x)=2\cdot 5\cdot 4$ (2 pont)

Tehát $x=5$ (2 pont)

Visszahelyettesítéssel az eredeti egyenletbe megbizonyosodtunk róla, hogy az $x=5$ megoldás helyes (1 pont)

b) Értelmezési tartomány: $x>1$ (1 pont)

Logaritmus-azonosság alkalmazásával: $\lg 4(x-1)=2$ (2 pont)

A logaritmus definíció alapján: $4(x-1)=1$ (2 pont)

$x=26$ (1 pont)

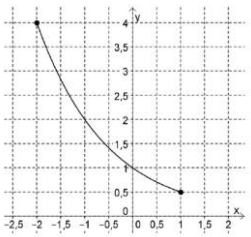
Ellenőrzés, visszahelyettesítés (1 pont)

Összesen: 12 pont

22) Az ábrán az $f:[-2;1]\Rightarrow\mathbb{R}$; $f(x)=a^x$ függvény grafikonja látható. (3 pont)

a) Adja meg az *f* függvény értékkészletét!

b) Határozza meg az *a* szám értékét!



Megoldás:

Az *f* értékkészlete $[0,5;4]$. (1 pont)

$a=0,5$. (2 pont)

Összesen: 3 pont

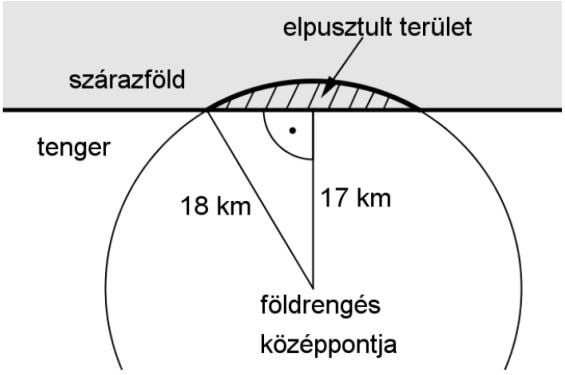
23) Adja meg az *x* értékét, ha $\log_2(x+1)=5$! (2 pont)

Megoldás:

$2^5=x+1$

$x=31$ (2 pont)

24) Újsághír: ***„Szeizmológusok számításai alapján a 2004. december 26-án Szumátra szigetének közelében kipattant földrengés a Richter-skála szerint 9,3-es erősségű volt; a rengést követő cunami (szökőár) halálos áldozatainak száma megközelítette a 300 ezret.”***



A földrengés Richter-skála szerinti „erőssége” és a rengés középpontjában felszabaduló energia között fennálló összefüggés:

$$M = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E\,.$$

Ebben a képletben E a földrengés középpontjában felszabaduló energia mérőszáma (joule-ban mérve), M pedig a földrengés erősségét megadó nem negatív szám a Richter-skálán.

a) A Nagasakira 1945-ben ledobott atombomba felrobbanásakor felszabaduló energia $1,344 \cdot 10^{14}$ joule volt. A Richter-skála szerint mekkora erősségű az a földrengés, amelynek középpontjában ekkora energia szabadul fel? (3 pont)

b) A 2004. december 26-i szumátrai földrengésben mekkora volt a felszabadult energia? (3 pont)

c) A 2007-es chilei nagy földrengés erőssége a Richter-skála szerint 2-vel nagyobb volt, mint annak a kanadai földrengésnek az erőssége, amely ugyanebben az évben következett be. Hányszor akkora energia szabadult fel a chilei földrengésben, mint a kanadaiban? (5 pont)

d) Az óceánban fekvő egyik szigeten a földrengést követően kialakuló szökőár egy körszelet alakú részt tarolt le. A körszeletet határoló körív középpontja a rengés középpontja, sugara pedig 18 km. A rengés középpontja a sziget partjától 17 km távolságban volt (lásd a felülnézeti ábrán). Mekkora a szárazföldön elpusztult rész területe egész négyzetkilométerre kerekítve? (6 pont)

Megoldás:

a) $M = -4,42 + \frac{2}{3}\lg\left(1,344 \cdot 10^{14}\right)$ (1 pont)

$\boldsymbol{M \approx 5}$ (2 pont)

b) $9,3 = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E$ (1 pont)

$\lg E = 20,58$ (1 pont)

Tehát a felszabadult energia körülbelül

$\boldsymbol{E \approx 3,8 \cdot 10^{20}\ \text{(J)}}$ (1 pont)

c) A chilei rengés erőssége 2-vel nagyobb volt, mint a kanadai:

$-4,42+\frac{2}{3}\lg E_c=-4,42+\frac{2}{3}\lg E_k+2$ (1 pont)

Rendezve: $\lg E_c-\lg E_k=3$ (1 pont)

(A logaritmus azonosságát alkalmazva) $\lg\frac{E_c}{E_k}=3$ (1 pont)

Ebből $\frac{E_c}{E_k}=1000$ (1 pont)

1000-szer akkora volt a felszabadult energia. (1 pont)

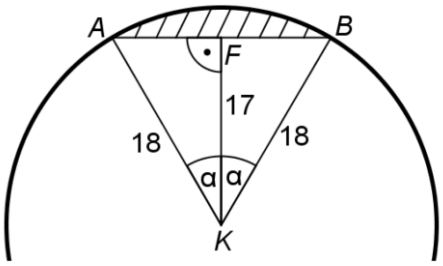
d) Az ábra jelöléseit használjuk.

Az *AKF* derékszögű háromszögből:

$\cos\alpha=\frac{17}{18}$ (1 pont)

$\alpha\approx 19,2^\circ.\left(2\alpha\approx 38,4^\circ\right)$ (1 pont)

$T_{AKB\Delta}\approx\frac{18^2\cdot\sin 38,4^\circ}{2}\left(\approx 100,6\text{ km}^2\right)$ (1 pont)



$T_{körcikk}\approx 18^2\pi\frac{38,4^\circ}{360^\circ}\left(\approx 108,6\text{ km}^2\right)$ (1 pont)

$T_{körszelet}\approx 108,6-100,6=8\ \left(\text{km}^2\right)$ (1 pont)

Az elpusztult rész területe körülbelül **8 km²**. (1 pont)

Összesen: 17 pont

25)

a) Mely valós számokra értelmezhető a $\log_2(3-x)$ kifejezés? (1 pont)

b) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$\log_2(3-x)=0$ (2 pont)

Megoldás:

a) $x<3$ (1 pont)

b) $x=2$ (2 pont)

Összesen: 3 pont

26) Egy idén megjelent iparági előrejelzés szerint egy bizonyos alkatrész iránti kereslet az elkövetkező években emelkedni fog, minden évben az előző évi kereslet 6%-ával. (A kereslet az adott termékből várhatóan eladható mennyiséget jelenti.)

a) Várhatóan hány százalékkal lesz magasabb a kereslet 5 év múlva, mint idén? (3 pont)

Az előrejelzés szerint ugyanezen alkatrész ára az elkövetkező években csökkenni fog, minden évben az előző évi ár 6%-ával.

b) Várhatóan hány év múlva lesz az alkatrész ára az idei ár 65%-a? (5 pont)

Egy cég az előrejelzésben szereplő alkatrész eladásából szerzi meg bevételeit. A cég vezetői az elkövetkező évek bevételeinek tervezésénél abból indulnak ki, hogy a fentiek szerint a kereslet évente 6%-kal növekszik, az ár pedig évente 6%-kal csökken.

c) Várhatóan hány százalékkal lesz alacsonyabb az éves bevétel 8 év múlva, mint idén? (5 pont)

A kérdéses alkatrész egy forgáskúp alakú tömör test. A test alapkörének sugara 3 cm, alkotója 6 cm hosszú.

d) Számítsa ki a test térfogatát! (4 pont)

Megoldás:

a) A kereslet minden évben várhatóan az előző évi kereslet $1,6$-szorosára változik, (1 pont)

így 5 év múlva az idei $1,06^5 \approx 1,34$-szorosára nő. (1 pont)

Ez kb. **34%-kal** magasabb, mint az idei kereslet. (1 pont)

b) Az ár minden évben várhatóan az előző év ár $0,9$-szorosára változik, (1 pont)

így megoldandó a $0,94^n = 0,65$ egyenlet, (ahol n az eltelt évek számát jelenti.) (1 pont)

Ebből $n = \dfrac{\lg 0,65}{\lg 0,94} (\approx 6,96)$. (2 pont)

Azaz várhatóan **7 év múlva** lesz az ár a jelenlegi ár 65%-a. (1 pont)

c) A bevételt a kereslet és az ár szorzatából kapjuk, (1 pont)

így 8 év múlva a jelenlegi bevétel $(1,06 \cdot 0,94)^8 \approx$ (1 pont)

$\approx 0,972$-szerese várható. (2 pont)

Azaz **8 év múlva** a bevétel az ideinél kb. $2,8\%$-kal lesz alacsonyabb. (1 pont)

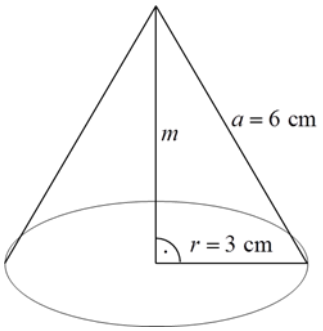
d) Ábra az adatok feltüntetésével. (1 pont)

A kúp magasságát m-mel jelölve a Pitagorasz-tétel alapján: $m = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} (\approx 5,2\,\text{cm})$. (1 pont)

A kúp térfogata $V \approx \dfrac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 5,2 \approx$ (1 pont)

$\approx$ **49 cm³**. (1 pont)

Összesen: 17 pont



27) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

A) $\sqrt{(-5)^2} = 5$

B) Minden $x \in \mathbb{R}$ **esetén** $\sqrt{x^2} = x$.

C) $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{32}$

***Megoldás*:**

A) $\sqrt{(-5)^2} = |(-5)| = 5$, tehát az állítás **igaz**.

B) $\sqrt{x^2} = |x|$, amely állítás negatív x-re nem igaz, tehát az állítás **hamis**.

C) $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32}$, az állítás így **igaz**. (2 pont)

Összesen: 2 pont

28) Egy 2014 végén készült előrejelzés szerint az Indiában élő tigrisek t száma az elkövetkezendő években (az egyes évek végén) megközelítőleg a következő összefüggés szerint alakul: $t(x) = 3600 \cdot 0{,}854^x$, ahol x a 2014 óta eltelt évek számát jelöli.

a) Számítsa ki, hogy az előrejelzés alapján 2016 végére hány százalékkal csökken a tigrisek száma a 2014-es év végi adathoz képest! (4 pont)

b) Melyik évben várható, hogy a tigrisek száma 900 alá csökken? (4 pont)

Egy állatkert a tigrisek fennmaradása érdekében tenyésztő programba kezd. Beszereznek 4 hím és 5 nőstény kölyöktigrist, melyeket egy kisebb és egy nagyobb kifutóban kívánnak elhelyezni a következő szabályok mindegyikének betartásával:

(I) háromnál kevesebb tigris egyik kifutóban sem lehet;
(II) a nagyobb kifutóba több tigris kerül, mint a kisebbikbe;
(III) mindkét kifutóban hím és nőstény tigrist is el kell helyezni;
(IV) egyik kifutóban sem lehet több hím, mint nőstény tigris.

c) Hányféleképpen helyezhetik el a 9 tigrist a két kifutóban? (8 pont)

(A tigriseket megkülönböztetjük egymástól, és két elhelyezést eltérőnek tekintünk, ha van olyan tigris, amelyik az egyik elhelyezésben más kifutóban van, mint a másik helyezésben.)

***Megoldás*:**

a) A tigrisek száma minden évben az előző évinek $0{,}854$-szeresére csökken. (1 pont)

Így 2014 és 2016 között a tigrisek száma $0{,}854^2 \approx 0{,}73$-szorosára változik. (2 pont)

Ez azt jelenti, hogy a számuk **27%**-kal csökken. (1 pont)

b) A feladat szövege alapján az alábbi egyenletet írhatjuk fel:

$3600 \cdot 0{,}854^x = 900$. (1 pont)

Az egyenlet megoldása $x \approx 8{,}78$. (3 pont)

Így 9 év múlva, azaz **2023**-ban várható, hogy a tigrisek száma 900 alá csökkenni. (1 pont)

c) A (I) és (II) miatt a kisebb kifutóba 3 vagy 4 tigris kerülhet. (1 pont)

Ha 3 tigris kerül a kisebb kifutóba, a (III) miatt (IV) miatt ez csak két nőstény és egy hím lehet. (1 pont)

Két nőstényt és egy hímet $\binom{5}{2}\cdot 4 = 40$-féleképpen lehet összesen kiválasztani. (2 pont)

Ha 4 tigris kerül a kisebb kifutóba, akkor (III) és (IV) miatt ez csak két nőstény és két hím lehet, őket $\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{2} = 60$-féleképpen lehet kiválasztani. (2 pont)

Így összesen $40+60=$ **100** eset lehetséges. (1 pont)

Összesen: 17 pont

29) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (2 pont)

$$\mathbf{2^x = 10}$$

***Megoldás*:**

A kifejezést logaritmus alá visszük és alkalmazzuk a logaritmus azonosságát.

$$\lg 2^x = \lg 10$$

$$x\cdot\lg 2 = \lg 10$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 10} \approx \mathbf{3,322}$$ (2 pont)

Összesen: 2 pont