MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK KÖZÉPSZINT

Exponenciális és Logaritmusos feladatok

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Oldja meg az alábbi egyenleteket!
   a) $\log_3\left(\sqrt{x+1}+1\right)=2$, ahol x valós szám és $x>-1$ (6 pont)
   b) $2\cos^2 x=4-5\sin x$, ahol x tetszőleges forgásszöget jelöl (11 pont)

2) Mekkora x értéke, ha $\lg x=\lg 3+\lg 25$? (2 pont)

3) Oldja meg a következő egyenleteket:
   a) $9^x-2\cdot 3^x-3=0$ (6 pont)
   b) $\sin^2 x=2\sin x+3$ (6 pont)

4) Adott a következő egyenletrendszer:
   (1) $2\lg(y+1)=\lg(x+11)$
   (2) $y=2x$
   a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben azokat a $P(x;y)$ pontokat, amelyeknek koordinátái kielégítik a (2) egyenletet! (2 pont)
   b) Milyen x, illetve y valós számokra értelmezhető mindkét egyenlet? (2 pont)
   c) Oldja meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán! (11 pont)
   d) Jelölje meg az egyenletrendszer megoldáshalmazát az a) kérdéshez használt derékszögű koordináta-rendszerben! (2 pont)

5) Oldja meg a pozitív valós számok halmazán a $\log_{16} x=-\frac{1}{2}$ egyenletet! Jelölje a megadott számegyenesen az egyenlet megoldását! (3 pont)

6) Melyik a nagyobb: $A=\frac{\sin 7\pi}{2}$ vagy $B=\log_2\frac{1}{4}$? (Írja a megfelelő relációs jelet a válaszmezőbe! Válaszát indokolja!) (2 pont)

7) Adja meg a $\lg x^2=2\lg x$ egyenlet megoldáshalmazát! (2 pont)

8)
   a) Mely pozitív egész számokra igaz a következő egyenlőtlenség?
   $5^{x-2}<5^{13-2x}$ (4 pont)
   b) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!
   $9^{\sqrt{x}}<3^{x-3}$ (8 pont)

9) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!
   a) $\lg(x+15)^2-\lg(3x+5)=\lg 20$ (6 pont)
   b) $25^{\sqrt{x}}<5\cdot 5^{\sqrt[3]{x}}$ (6 pont)

10) Határozza meg az alábbi egyenletek valós megoldásait!

a) $(\log_2 x - 3)\cdot(\log_2 x^2 + 6) = 0$ (7 pont)

b) $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$ (10 pont)

11) Adja meg a $\log_3 81$ kifejezés pontos értékét! (2 pont)

12) Mennyi az $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$ kifejezés értéke, ha $x = -1$? (2 pont)

13) Az a, b és c tetszőleges pozitív valós számokat jelölnek. Tudjuk, hogy

$\lg x = 3\lg a - \lg b + \frac{1}{2}\lg c$

Válassza ki, hogy melyik kifejezés adja meg helyesen x értékét! (3 pont)

A: $x = \frac{3a}{b} + \frac{1}{2}c$

B: $x = a^3 - b + \sqrt{c}$

C: $x = \frac{a^3}{b\cdot\sqrt{c}}$

D: $x = \frac{a^3\cdot c^{-1}}{b}$

E: $x = a^3 - b\sqrt{c}$

F: $x = \frac{a^3\cdot\sqrt{c}}{b}$

G: $x = \frac{a^3\cdot\frac{1}{c}}{b}$

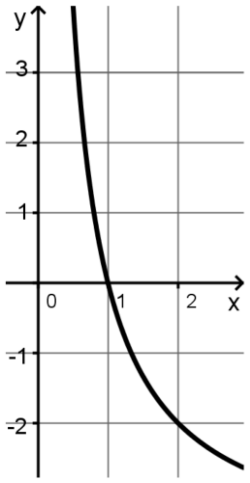
14) A b, c és d pozitív számokat jelölnek. Tudjuk, hogy $\lg b = \frac{\lg c - \lg d}{3}$.

Fejezze ki az egyenlőségből b-t úgy, hogy abban c és d logaritmusa ne szerepeljen! (2 pont)

15) Melyik szám nagyobb?

$A = \lg\frac{1}{10}$, vagy $B = \cos 8\pi$ (2 pont)

16) István az $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x (x>0)$ függvény grafikonját akarta felvázolni, de ez nem sikerült neki, több hibát is elkövetett (a hibás vázlat látható a mellékelt ábrán).
Döntse el, hogy melyik igaz az alábbi állítások közül!
a) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény szigorúan monoton csökkenő.
b) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény 2-höz –2-t rendel.
c) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény zérushelye 1. (2 pont)



17) Adja meg azokat az x valós számokat, melyekre teljesül: $\log_2 x^2 = 4$. Válaszát indokolja! (3 pont)

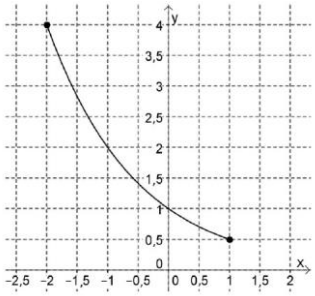
18) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!
a) $5^{x+1} + 5^{x+2} = 30$ (5 pont)
b) $\frac{3}{x} - \frac{2}{x+2}$, ahol $x \neq 0$ és $x \neq 2$ (7 pont)

19)
a) Oldja meg a valós számok halmazán az $\frac{x+2}{3-x} \geq 0$ egyenlőtlenséget! (7 pont)
b) Adja meg az x négy tizedesjegyre kerekített értékét, ha $4 \cdot 3^x + 3^x = 20$. (4 pont)
c) Oldja meg a $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ egyenletet a $[-\pi;\pi]$ alaphalmazon. (6 pont)

20) Melyik az az x természetes szám, amelyre $\log_3 81 = x$? (2 pont)

21) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!
a) $\frac{x-1}{2} + \frac{2x}{5} = 4$ (5 pont)
b) $\lg(x-1) + \lg 4 = 2$ (7 pont)

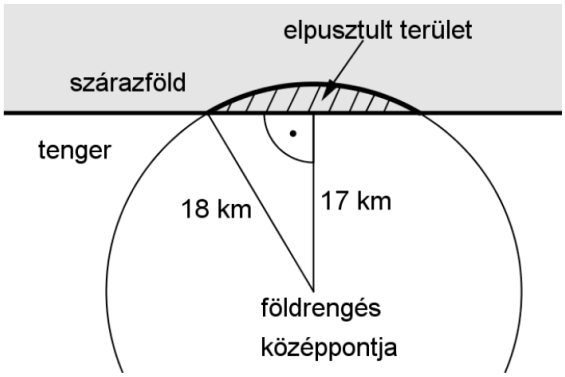
22) Az ábrán az $f:[-2;1]\Rightarrow\mathbb{R};\ f(x)=a^x$ függvény grafikonja látható. (3 pont)



a) Adja meg az *f* függvény értékkészletét!
b) Határozza meg az *a* szám értékét!

23) Adja meg az *x* értékét, ha $\log_2(x+1)=5$! (2 pont)

24) Újsághír: *„Szeizmológusok számításai alapján a 2004. december 26-án Szumátra szigetének közelében kipattant földrengés a Richter-skála szerint 9,3-es erősségű volt; a rengést követő cunami (szökőár) halálos áldozatainak száma megközelítette a 300 ezret.”*



A földrengés Richter-skála szerinti „erőssége” és a rengés középpontjában felszabaduló energia között fennálló összefüggés: $M=-4{,}42+\frac{2}{3}\lg E$.

Ebben a képletben *E* a földrengés középpontjában felszabaduló energia mérőszáma (joule-ban mérve), *M* pedig a földrengés erősségét megadó nem negatív szám a Richter-skálán.

a) A Nagasakira 1945-ben ledobott atombomba felrobbanásakor felszabaduló energia $1{,}344\cdot10^{14}$ joule volt. A Richter-skála szerint mekkora erősségű az a földrengés, amelynek középpontjában ekkora energia szabadul fel? (3 pont)
b) A 2004. december 26-i szumátrai földrengésben mekkora volt a felszabadult energia? (3 pont)
c) A 2007-es chilei nagy földrengés erőssége a Richter-skála szerint 2-vel nagyobb volt, mint annak a kanadai földrengésnek az erőssége, amely ugyanebben az évben következett be. Hányszor akkora energia szabadult fel a chilei földrengésben, mint a kanadaiban? (5 pont)
d) Az óceánban fekvő egyik szigeten a földrengést követően kialakuló szökőár egy körszelet alakú részt tarolt le. A körszeletet határoló körív középpontja a rengés középpontja, sugara pedig 18 km. A rengés középpontja a sziget partjától 17 km távolságban volt (lásd a felülnézeti ábrán). Mekkora a szárazföldön elpusztult rész területe egész négyzetkilométerre kerekítve? (6 pont)

25)

a) Mely valós számokra értelmezhető a $\log_2(3-x)$ kifejezés? (1 pont)
b) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!
$\log_2(3-x)=0$ (2 pont)

26) Egy idén megjelent iparági előrejelzés szerint egy bizonyos alkatrész iránti kereslet az elkövetkező években emelkedni fog, minden évben az előző évi kereslet 6%-ával. (A kereslet az adott termékből várhatóan eladható mennyiséget jelenti.)

a) Várhatóan hány százalékkal lesz magasabb a kereslet 5 év múlva, mint idén? (3 pont)

Az előrejelzés szerint ugyanezen alkatrész ára az elkövetkező években csökkenni fog, minden évben az előző évi ár 6%-ával.

b) Várhatóan hány év múlva lesz az alkatrész ára az idei ár 65%-a? (5 pont)

Egy cég az előrejelzésben szereplő alkatrész eladásából szerzi meg bevételeit. A cég vezetői az elkövetkező évek bevételeinek tervezésénél abból indulnak ki, hogy a fentiek szerint a kereslet évente 6%-kal növekszik, az ár pedig évente 6%-kal csökken.

c) Várhatóan hány százalékkal lesz alacsonyabb az éves bevétel 8 év múlva, mint idén? (5 pont)

A kérdéses alkatrész egy forgáskúp alakú tömör test. A test alapkörének sugara 3 cm, alkotója 6 cm hosszú.

d) Számítsa ki a test térfogatát! (4 pont)

27) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

A) $\sqrt{(-5)^2} = 5$

B) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sqrt{x^2} = x$.

C) $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{32}$

28) Egy 2014 végén készült előrejelzés szerint az Indiában élő tigrisek t száma az elkövetkezendő években (az egyes évek végén) megközelítőleg a következő összefüggés szerint alakul: $t(x) = 3600 \cdot 0{,}854^x$, ahol x a 2014 óta eltelt évek számát jelöli.

a) Számítsa ki, hogy az előrejelzés alapján 2016 végére hány százalékkal csökken a tigrisek száma a 2014-es év végi adathoz képest! (4 pont)

b) Melyik évben várható, hogy a tigrisek száma 900 alá csökken? (4 pont)

Egy állatkert a tigrisek fennmaradása érdekében tenyésztő programba kezd. Beszereznek 4 hím és 5 nőstény kölyöktigrist, melyeket egy kisebb és egy nagyobb kifutóban kívánnak elhelyezni a következő szabályok mindegyikének betartásával:

(I) háromnál kevesebb tigris egyik kifutóban sem lehet;
(II) a nagyobb kifutóba több tigris kerül, mint a kisebbikbe;
(III) mindkét kifutóban hím és nőstény tigrist is el kell helyezni;
(IV) egyik kifutóban sem lehet több hím, mint nőstény tigris.

c) Hányféleképpen helyezhetik el a 9 tigrist a két kifutóban? (8 pont)

(A tigriseket megkülönböztetjük egymástól, és két elhelyezést eltérőnek tekintünk, ha van olyan tigris, amelyik az egyik elhelyezésben más kifutóban van, mint a másik helyezésben.)

29) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

$2^x = 10$ (2 pont)