MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI KÖZÉPSZINT

Abszolútértékes és gyökös kifejezések

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Mely valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$\frac{-3}{\sqrt{10-x}} < 0$$ **(2 pont)**

Megoldás:

A $10-x>0$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. (1 pont)

$\boldsymbol{x<10}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

2) Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\log_3\left(\sqrt{x+1}+1\right)=2$, ahol x valós szám és $x>-1$ **(6 pont)**

b) $2\cos^2 x = 4-5\sin x$, ahol x tetszőleges forgásszöget jelöl **(11 pont)**

Megoldás:

a) A logaritmus definíciója szerint $\sqrt{x+1}+1=3^2$ (2 pont)

$\sqrt{x+1}=8$ (1 pont)

$x+1=64$ (1 pont)

$\boldsymbol{x=63}$ (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

b) $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ helyettesítéssel, (1 pont)

$2-2\sin^2 x+5\sin x-4=0$ (1 pont)

$\sin x = y$ új változóval $2y^2-5y+2=0$. (1 pont)

$y_1=2;\ y_2=\frac{1}{2}$ (2 pont)

y_1 nem megoldás, mert $|\sin x|\le 1$ (1 pont)

$\boldsymbol{x=\frac{1}{6}\pi+k2\pi}$ **vagy** $\boldsymbol{x=\frac{5}{6}\pi+k2\pi}$ (fokban is megadható) (3 pont)

$k\in\mathbb{Z}$ (1 pont)

Ellenőrzés, vagy le kell írni, hogy a gyökök igazzá teszik az eredeti egyenletet, mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk. (1 pont)

Összesen: 17 pont

3) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\lg(x+15)^2 - \lg(3x+5) = \lg 20$ **(6 pont)**

b) $25^{\sqrt{x}} < 5 \cdot 5^{\sqrt[3]{x}}$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $x > -\frac{5}{3}$ (1 pont)

A logaritmus azonosságának helyes alkalmazása. (1 pont)
(A lg függvény kölcsönösen egyértelmű.)

$(x+15)^2 = 20(3x+5)$ (1 pont)

$x^2 - 30x + 125 = 0$ (1 pont)

$x_1 = 25$ és $x_2 = 5$ (1 pont)

Mindkét megoldás megfelel. (1 pont)

b) $x \geq 0$ (1 pont)

$5^{2\sqrt{x}} = 5^{1+3\sqrt{x}}$ (2 pont)

$\sqrt{x} = -1$ (1 pont)

A négyzetgyök értéke nemnegatív szám, ezért (1 pont)

nincs valós megoldás. (1 pont)

Összesen: 12 pont

4) Válassza ki az *A* halmaz elemei közül azokat a számokat, amelyek megoldásai a $\sqrt{x^2} = -x$ egyenletnek! $A = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$ **(2 pont)**

Megoldás:

Az egyenlet megoldásai az *A* halmaz elemei közül: **–1** és **0**. (2 pont)

5) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$|x-2| = 7$ **(2 pont)**

Megoldás:

Az egyenlet megoldása a **9** (1 pont)

és a **–5**. (1 pont)

Összesen: 2 pont

6) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $5-x=\sqrt{2x^2-71}$ **(6 pont)**

b) $\sin^2 x=1+2\cos x$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) A négyzetgyök értéke csak nemnegatív lehet: $x\le 5$. (1 pont)
és csak nemnegatív számnak van négyzetgyöke: $|x|\le\sqrt{35,5}$ (1 pont)
Négyzetre emelve: $x^2-10x+25=2x^2-71$. (1 pont)
Rendezve: $x^2+10x-96=0$ (1 pont)
amelynek valós gyökei a –16 és a 6. (1 pont)
Az utóbbi nem felel meg az első feltételnek, ezért nem megoldása az egyenletnek Az egyenlet egyetlen megoldása a **–16**, hiszen ez mindkét feltételnek megfelel, s az adott feltételek mellett csak ekvivalens átalakításokat végeztünk. (1 pont)

b) A bal oldalon a $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ helyettesítést elvégezve kapjuk:
$1-\cos^2 x=1+2\cos x$ (1 pont)
$\cos^2 x+2\cos x=0$ (1 pont)
$\cos x(\cos x+2)=0$ (1 pont)
Ha $\cos x=0$, akkor $\boldsymbol{x=\frac{\pi}{2}+k\pi}$, **ahol** $\boldsymbol{k\in\mathbb{Z}}$. (2 pont)
A $\cos x+2=0$ egyenletnek nincs megoldása (mert $\cos x=-2$ nem lehetséges). (1 pont)

Összesen: 12 pont

7) Adja meg azt az *x* valós számot, melyre a következő egyenlőség teljesül!

$\boldsymbol{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x}=2}$ **(2 pont)**

Megoldás:

$\boldsymbol{x=16}$ (2 pont)

8)

a) Melyik $(x;y)$ valós számpár megoldása az alábbi egyenletrendszernek?

$$\left.\begin{aligned} 2x-6y&=4\\ 3x+5y&=20\end{aligned}\right\}$$

(6 pont)

b) Oldja meg az alábbi egyenletet!

$\sqrt{x+2}=x$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) (1) $2x-6y=4$

(2) $3x+5y=20$

(1) $2x=4+6y$

$x=2+3y$ (1 pont)

(2) $3(2+3y)+5y=20$ (1 pont)

$6+9y+5y=20$ (1 pont)

$\boldsymbol{y=1}$ (1 pont)

$\boldsymbol{x=2+3y=5}$ (1 pont)

Ellenőrzés. Megoldás: $\boldsymbol{(5;1)}$. (1 pont)

b) $\sqrt{x+2}=x$

$x+2=x^2$

$x^2-x-2=0$ (1 pont)

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$ (1 pont)

$x_1=2$ (1 pont)

$x_2=-1$ (1 pont)

Ellenőrzés: $x_2=-1$ hamis gyök. (1 pont)

$\boldsymbol{x_1=2}$ megoldása az egyenletnek. (1 pont)

Összesen: 12 pont

9) Mely x valós számokra igaz, hogy $|x|=7$? **(2 pont)**

Megoldás:

$\boldsymbol{x_1=-7}$ (1 pont)

$\boldsymbol{x_2=7}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

10) Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=|x-4|$ függvény. Mely x értékek esetén lesz $f(x)=6$? **(2 pont)**

Megoldás:

$\boldsymbol{x_1=-2,\ x_2=10}$ (2 pont)

11)

a) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$x+4=\sqrt{4x+21}$$ **(6 pont)**

b) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol *x* és *y* valós számot jelöl!

$$\left.\begin{aligned}3x+y&=16\\5x-2y&=45\end{aligned}\right\}$$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $4x+21\geq 0$ és $x+4\geq 0 \Rightarrow x\geq -4$

Négyzetre emelve mindkét oldalt (a belső kikötés elvégzése miatt lehetséges):

$x^2+8x+16=4x+21$. (2 pont)

Rendezve: $x^2+4x-5=0$ (1 pont)

Az egyenlet gyökei: $x_1=-5$, $x_2=1$ (1 pont)

A -5 nem része az értelmezési tartománynak, így nem valódi gyök. (1 pont)

Az **1** ennek megfelelő gyök. (1 pont)

b) Az egyenlő együtthatók módszerét alkalmazva az első egyenletet beszorozva 2-vel:

$$\left.\begin{aligned}6x+2y&=32\\5x-2y&=45\end{aligned}\right\}$$ (2 pont)

Egyszerűsítés után adódik:

$11x=77$ (1 pont)

$\boldsymbol{x=7}$ (1 pont)

Visszahelyettesítve *x*-et:

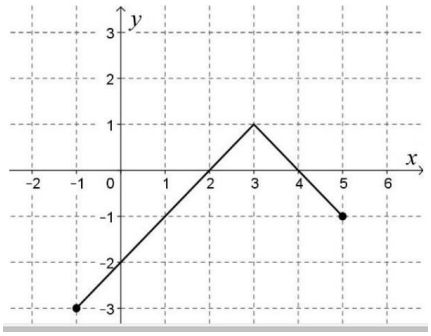
$\boldsymbol{y=-5}$ (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

A feladat megoldható a klasszikus behelyettesítős módszerrel is!

Összesen: 12 pont

12) Az ábrán a $[-1;5]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható.
Válassza ki a felsoroltakból a függvény hozzárendelési szabályát! (2 pont)



A: $\boldsymbol{x\mapsto |x-3|+1}$

B: $\boldsymbol{x\mapsto -|x+3|+1}$

C: $\boldsymbol{x\mapsto -|x-3|+1}$

D: $\boldsymbol{x\mapsto -|x+3|-1}$

Megoldás:

C (2 pont)

13) Adja meg az alábbi egyenlet megoldásait a valós számok halmazán!

$$|x^2 - 8| = 8$$ **(3 pont)**

Megoldás:

$x_1 = 0$ (1 pont)

$x_2 = 4$ (1 pont)

$x_3 = -4$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

14)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$|x - 3| = 3x - 1.$$ **(7 pont)**

Az $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = a \cdot x + b$ lineáris függvény zérushelye -4. Tudjuk továbbá, hogy az $x = 4$ helyen a függvényérték 6.

b) Adja meg a és b értékét! **(6 pont)**

Megoldás:

a) Az egyenlet alakja $x \geq 3$ esetén: $x - 3 = 3x - 1$, (1 pont)

amiből $x = -1$, (1 pont)

ami nem megoldása az eredeti egyenletnek. (1 pont)

Az egyenlet alakja $x < 3$ esetén: $-(x - 3) = 3x - 1$, (1 pont)

amiből $x = 1$. (2 pont)

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozva. (1 pont)

b) A megadott feltételek szerint $a \cdot (-4) + b = 0$, (2 pont)

továbbá $a \cdot 4 + b = 6$. (1 pont)

Az egyik egyenletből az egyik ismeretlent kifejezve és a másik egyenletbe helyettesítve vagy a két egyenletet összeadva kapjuk, hogy (1 pont)

$b = 3$, (1 pont)

$a = 0{,}75$. (1 pont)

15) Összesen: 13 pont Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! **(2 pont)**

A) $\sqrt{(-5)^2} = 5$

B) Minden $x \in \mathbb{R}$ **esetén** $\sqrt{x^2} = x$.

C) $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{32}$

Megoldás:

A) $\sqrt{(-5)^2} = |(-5)| = 5$, tehát az állítás **igaz**.

B) $\sqrt{x^2} = |x|$, amely állítás negatív x-re nem igaz, tehát az állítás **hamis**.

C) $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32}$, az állítás így **igaz**. (2 pont)

Összesen: 2 pont

16) Az x-nél 2-vel nagyobb számnak az abszolút értéke 6. Adja meg x lehetséges értékeit! (2 pont)

***Megoldás*:**

A feladat szövege alapján az alábbi egyenlet írható fel: $|x+2|=6$

Az egyenlet megoldásánál két esetet különböztetünk meg.

I. $x+2=6$

$\boldsymbol{x_1=4}$ (1 pont)

II. $x+2=-6$

$\boldsymbol{x_2=-8}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont