MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI
EMELT SZINT

Valószínűségszámítás

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) **Egy nagyvárosban a helyi járatokon olyan buszjegyet kellett érvényesíteni, amelyen egy 3x3-as négyzetben 1-9.ig szerepelnek a számok. (lásd 1. ábra) A jegy érvényesítésekor a jegykezelő automata a kilenc mezőből mindig pontosan hármat lyukaszt ki.**

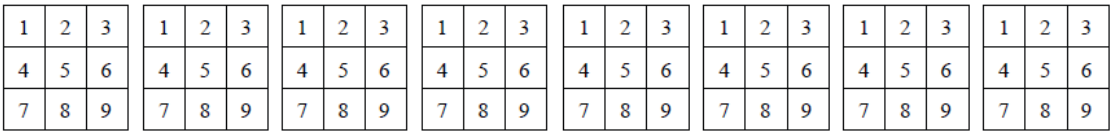
a) Rajzolja le az összes olyan lyukasztást, amelyben minden sorban és minden oszlopban pontosan egy kilyukasztott mező van! Indokolja, hogy miért ezek és csak ezek a lehetséges lyukasztások! (4 pont)

b) Rajzoljon a 2. ábrán megadott mezőbe egy olyan lyukasztást, amelyen a ki nem lyukasztott hat kis négyzetlap olyan tartományt fed le, amelynek pontosan egy szimmetriatengelye van! (A mezőkre nyomtatott számoktól most eltekintünk). Rajzolja be a szimmetriatengelyt! (3 pont)

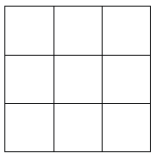
Két kisiskolás a buszra várakozva beszélget. Áron azt mondja, hogy szeretné, hogy a buszjegyen kilyukasztott három szám mindegyike prím lenne. Zita pedig azt reméli, hogy a számok összege 13 lesz.

c) Mekkora valószínűséggel teljesül Áron, illetve Zita kívánsága? (9 pont)

1.ábra

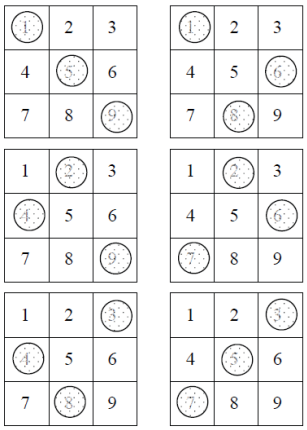


2.ábra

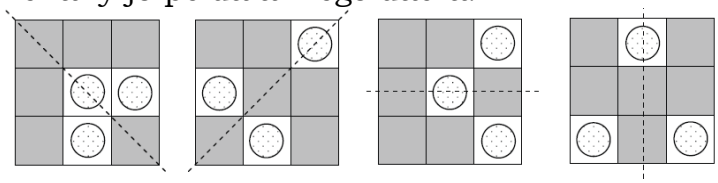


Megoldás:

a) Minden sorban kell lyukasztásnak lenni. Az első sorban 3 lehetőségünk van a lyuk kiválasztására, a második sorban 2, ezek pedig egyértelműen meghatározzák a harmadik sort. (1 pont)
A megfelelő lyukasztások száma: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (1 pont)
A megoldások: (2 pont)



b) Néhány jó példa a megoldásra:



Helyes ábra (2 pont)
Szimmetriatengely berajzolása (1 pont)

c) Az első kilenc pozitív egész között 4 prímszám van (1 pont)
Kedvező esetek száma 4 (1 pont)
Az összes lehetséges lyukasztások száma: $\binom{9}{3} = 84$ (2 pont)
Áron kívánsága $P = \frac{4}{84} \approx \mathbf{0,048}$ valószínűséggel teljesül (1 pont)
Zita kívánságának 7 számhármas felel meg:
$(1;3;9)$
$(1;4;8)$
$(1;5;7)$
$(2;3;8)$
$(2;4;7)$
$(2;5;6)$
$(3;4;6)$ (3 pont)
A keresett valószínűség $P = \frac{7}{84} \approx \mathbf{0,083}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

2) Hét szabályos pénzérmét egyszerre feldobunk, és feljegyezzük a fejek és írások számát.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy több fejet dobunk, mint írást? (7 pont)

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a fejek és írások számának különbsége nagyobb háromnál? (7 pont)

Megoldás:

a) Mivel hét pénzérmét dobunk fel, akkor lesz több fej, mint írás, ha 4,5,6 vagy 7 fejet dobunk (2 pont)

Ekkor éppen 3,2,1 vagy 0 írás lesz (1 pont)

Szimmetria okokból ennek ugyanannyi a valószínűsége, mint ha 3,2,1 vagy 0 fejet dobtunk volna (2 pont)

Tehát a keresett valószínűség **0,5** (2 pont)

b) Akkor nagyobb a különbség 3-nál, ha 6 fej és 1 írás vagy 7 fej és 0 írás van (3 pont)

A kedvező esetek száma $\binom{7}{1}+\binom{7}{0}$ (2 pont)

$7+1=8$ (1 pont)

A keresett valószínűség $\frac{8}{128}=\mathbf{0,0625}$ (1 pont)

Összesen: 14 pont

3) Két közvélemény-kutató cég mérte fel a felnőttek dohányzási szokásait. Az egyik cég véletlenszerűen választott 800 fős mintában 255 rendszeres dohányost talált, a másik egy hasonlóan véletlenszerűen választott 2000 fős mintában 680-at.

a) Adja meg mindkét mintában a dohányosok relatív gyakoriságát! (4 pont)

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy ha a fenti 2000 fős mintából véletlenszerűen kiválasztunk 3 főt, akkor éppen 1 dohányos van közöttük? (7 pont)

c) Tegyük fel, hogy a lakosság 34%-a dohányos. Számolja ki annak a valószínűségét, hogy az országban 10 találomra kiválasztott felnőtt közül egy sem dohányos! (5 pont)

Megoldás:

a) A dohányosok relatív gyakorisága az első cégnél $\frac{225}{800}\approx\mathbf{0,32}$ (2 pont)

A második cégnél $\frac{680}{2000}=\mathbf{0,34}$ (2 pont)

b) Bármelyik 3 személy kiválasztása a 2000-es mintából egyformán lehetséges, ezért az összes esetek száma: $\binom{2000}{3} = 1331334000$ (1 pont)

680 dohányosból kell kiválasztani egy személyt, ami 680-féleképpen tehető meg (1 pont)

1320 nem dohányzóból kell kettőt kiválasztani, ez összesen $\binom{1320}{2} = 870540$-féleképpen tehető meg (1 pont)

A kedvező esetek száma $680 \cdot \binom{1320}{2}$ (1 pont)

A keresett valószínűség $P = \dfrac{680 \cdot \binom{1320}{2}}{\binom{2000}{3}}$ (2 pont)

Ennek közelítő értéke **0,44** (1 pont)

c) 1 nem dohányos kiválasztásának valószínűsége $1 - 0,34 = 0,66$ (2 pont)

10 nem dohányos kiválasztásának valószínűsége $0,66^{10}$ (2 pont)

ami megközelítőleg 0,016 vagy **16%** (1 pont)

Összesen: 16 pont

4) Egyszerre feldobunk hat szabályos dobókockát, amelyek különböző színűek.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindegyik kockával más számot dobunk? (5 pont)

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy dobásnál a hat dobott szám összege legalább 34 lesz! (9 pont)

Megoldás:

a) A kockák különbözőek, tehát az összes lehetséges eset 6^6 (2 pont)

Ha mindegyiknél más számot dobunk, akkor a hat különböző szám 6!-féleképpen fordulhat elő. (2 pont)

Innen a klasszikus formula szerint a valószínűség $\dfrac{6!}{6^6} = \mathbf{0,0154}$. (1 pont)

b) A hat szám összege legalább 34, azt jelenti, hogy 34, 35 vagy 36 (1 pont)
Tehát a következő esetek lehetnek:

(1) $36 = 6+6+6+6+6+6$
(2) $35 = 6+6+6+6+6+5$
(3) $34 = 6+6+6+6+6+4$
(4) $34 = 6+6+6+6+5+5$ (2 pont)

Összeszámoljuk, hogy az egyes esetek hányféleképpen fordulhatnak elő:

(1) egyféleképpen (1 pont)
(2) 6-féleképpen
(3) 6-féleképpen (1 pont)
(4) $\binom{6}{2} = 15$-féleképpen (2 pont)

A kedvező esetek száma összesen: $1+6+6+15 = 28$. (1 pont)

A keresett valószínűség: $P = \frac{28}{6^6} \approx \mathbf{0,0006}$. (1 pont)

Összesen: 14 pont

5) Egy utazási iroda az országos hálózatának 55 értékesítő helyén kétféle utat szervez Párizsba. Az egyiket autóbusszal (*A*), a másikat repülővel (*R*). Egy adott turnusra nézve összesítették az egyes irodákban eladott utak számát. Az alábbi táblázatból az összesített adatok olvashatók ki. Pl. az (1;2) „koordinátájú” 5-ös szám azt jelzi, hogy 5 olyan fiókiroda volt, amelyik az adott turnusra 1 db autóbuszos és 2 db repülős utat adott el.

		***A* típusú eladott utak száma**				
		0	**1**	**2**	**3**	**4**
***R* típusú eladott utak száma**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**2**
	1	**1**	**2**	**2**	**3**	**1**
	2	**1**	**5**	**2**	**4**	**3**
	3	**0**	**3**	**1**	**9**	**2**
	4	**1**	**3**	**3**	**2**	**2**

a) Összesen hány autóbuszos és hány repülős utat adtak el a vizsgált turnusra az 55 fiókban? (7 pont)

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 55 fiókiroda közül véletlenszerűen választva egyet, ebben az irodában 5-nél több párizsi utat adtak el? (7 pont)

Megoldás:

a) Ha az 5x5-ös táblázatban összeadjuk a *k*. oszlopban lévő számokat, megkapjuk, hány irodában adtak el *k* darab autóbuszos utat (1 pont)
Ha a táblázat *n*. sorában lévő számokat adjuk össze, akkor megkapjuk, hogy hány irodában adtak el *n* darab repülős utat (1 pont)

		***A* típusú eladott utak száma**						
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**összeg**	**utak száma**
***R* típusú eladott utak száma**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**2**	**5**	**0**
	1	**1**	**2**	**2**	**3**	**1**	**9**	**9**
	2	**1**	**5**	**2**	**4**	**3**	**15**	**30**
	3	**0**	**3**	**1**	**9**	**2**	**15**	**45**
	4	**1**	**3**	**3**	**2**	**2**	**11**	**44**
	Összeg	**4**	**14**	**8**	**19**	**10**	**(55)**	**128**
	utak száma	**0**	**14**	**16**	**57**	**40**	**127**	

táblázat számított adatainak helyes megállapítása (3 pont)
Autóbuszos utak száma **127** (1 pont)
Repülős utak száma **128** (1 pont)

b) 5-nél több utat az az iroda adott el, amelyikben hat, hét vagy nyolc az eladott utak száma
Hat utat adott el az iroda, ha a táblázatban lévő koordinátáinak (*k*, *n*) összege 6. Ez három esetben lehetséges: $k+n=2+4=3+3=4+2$ (1 pont)
Ezekhez az adatokhoz tartozó irodák száma $3+9+3=15$ (1 pont)
Hét utat adott el az iroda, ha a táblázatban lévő koordinátáinak (*k*, *n*) összege 7. Ez két esetben lehetséges: $k+n=3+4=4+3$ (1 pont)
Ezekhez az adatokhoz tartozó irodák száma $2+2=4$ (1 pont)
Nyolc utat adott el az iroda, ha a táblázatban lévő koordinátáinak (*k*, *n*) összege 8. Ez egy esetben lehetséges: $k+n=4+4$ (1 pont)
Ezekhez az adatokhoz tartozó irodák száma 2 (1 pont)
Mivel 55 irodafiók volt, és közülük 5-nél több utat 21–ben adtak el, a keresett valószínűség $\frac{21}{55}\approx$ **0,3818** (1 pont)

Összesen: 14 pont

6) Annának az IWIW-en 40 ismerőse van (Az IWIW weboldalon lehetőség van az egymást ismerő emberek kapcsolatfelvételére. Ebben a feladatban minden ismertséget kölcsönösnek tekintünk.)
Anna ismerőseinek mindegyike Anna minden többi ismerőse közül pontosan egyet nem ismer.

a) A szóba került 41 ember között összesen hány ismertség áll fenn? (5 pont)

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Anna 40 ismerőse közül véletlenszerűen választva kettőt, ők ismerik egymást? (5 pont)

c) Válasszunk most a 41 személy közül véletlenszerűen kettőt! Mennyi a valószínűsége, hogy nem ismerik egymást? (6 pont)

Megoldás:

a) A 41 főből álló társaság ismertségi számát megkaphatjuk, ha összeadjuk Anna ismerőseinek és Anna 40 ismerőse egymás közti ismertséginek számát (1 pont)
Anna ismeri a 40 ismerősét (1 pont)
Anna 40 ismerősének mindegyik 38 embert ismer Annán kívül (1 pont)
Így Anna 40 ismerősének $\frac{40\cdot 38}{2}=760$ ismertsége van egymás közt (1 pont)
A 41 fő közt $40+760=$ **800** ismertsége van (1 pont)

b) Vannak 40-en, akikből választhatunk (1 pont)
Az elsőnek választott személy bárki lehet (1 pont)
Utána 39-ből kell választani egyet (1 pont)
Mivel az előzőnek választott személy közülük egyet nem ismer, így 38-at ismer (1 pont)
Annak a valószínűsége, hogy ismerik egymást $\frac{\mathbf{38}}{\mathbf{39}}$ (1 pont)

c) A kiválasztott két személy közül vagy Anna az egyik, vagy mindkettő Anna ismerősei közül való (1 pont)
1. eset: Ha Anna az egyik kiválasztott
Ekkor a másik választásától függetlenül a két ember ismeri egymást. A kedvező esetek száma ekkor nulla (1 pont)
2. eset: Ha Anna ismerősei közül való a két választott
Akkor a 40 személy kettesével párba állítható, úgy, hogy a párok két-két tagja nem ismerik egymást, ezért 20 kedvező eset van (1 pont)
Az összes lehetséges kiválasztások száma $\binom{41}{2}$ (1 pont)
azaz 820 (1 pont)
Így a kérdéses valószínűség $P=\frac{0+20}{820}=\frac{1}{41}\approx$ **0,0244** (1 pont)

Összesen: 16 pont

7) Egy urnában 5 azonos méretű golyó van, 2 piros és 3 fehér. Egyesével, és mindegyik golyót azonos eséllyel húzzuk ki az urnából a bent lévők közül.

a) Hány különböző sorrendben húzhatjuk ki az 5 golyót, ha a kihúzott golyót nem tesszük vissza, és az azonos golyókat nem különböztetjük meg egymástól? (4 pont)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az utolsó (ötödik) húzás előtt az urnában egy darab fehér golyó van? (4 pont)

Az eredeti golyókat tartalmazó urnából hatszor húzunk úgy, hogy a kihúzott golyót minden húzás után visszatesszük.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a hat húzásból legfeljebb kétszer húzunk piros golyót? (A valószínűséget három tizedesjegyre kerekített értékkel adja meg!) (8 pont)

Megoldás:

a) A lehetséges húzási sorrendek száma megegyezik 2 piros és 3 fehér golyó különböző sorba rendezéseinek számával (2 pont)

A 2 piros és 3 fehér golyónak $\binom{5}{2}$ különböző (1 pont)

azaz 10 sorba rendezése van. (1 pont)

b) A már kihúzott 2 piros és 2 fehér golyó húzása $\binom{4}{2}$ (2 pont)

azaz 6 különböző sorrendben történhetett (1 pont)

A lehetséges esetek száma 10, így a valószínűség $P=\frac{6}{10}=\mathbf{0,6}$ (1 pont)

c) A hat húzásból legfeljebb kétszer húzunk piros golyót: ha nem húzunk pirosat (A esemény), vagy 1 pirosat húzunk (B esemény), vagy 2 pirosat húzunk (C esemény) (1 pont)

Mivel az A, B és C események páronként kizáró események, a keresett valószínűség $P=P(A)+P(B)+P(C)$ (1 pont)

Piros golyó húzásának valószínűsége $\frac{2}{5}$, fehér golyó húzásának valószínűsége $\frac{3}{5}$ minden húzásnál, ezért (1 pont)

$P(A)=\binom{6}{0}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^6=0,0467$ (1 pont)

$P(B)=\binom{6}{1}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^5=0,1866$ (1 pont)

$P(C)=\binom{6}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^4=0,3110$ (1 pont)

A keresett valószínűség: $P=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{729+2916+4860}{5^6}=\frac{8505}{15625}$ (1 pont)

ami közelítőleg **0,544** (1 pont)

Összesen: 16 pont

8) A Kovács családban 4 embernek kezdődik a keresztneve *B* betűvel. Négyen teniszeznek, és négyen kerékpároznak rendszeresen.
A család tagjairól tudjuk:
- **csak Bea és Barbara jár teniszezni és kerékpározni is;**
- **egyedül Balázs nem űzi egyik sportágat sem**
- **Zoli próbálja testvérét, Borit a teniszezőktől hozzájuk, a kerékpározókhoz csábítani- sikertelenül.**

a) A fentiek alapján legalább hány tagja van a Kovács családnak? (5 pont)

Egyik nap Barbara, Bea, Bori és Balázs barátaikkal vonaton utaztak, és hogy jobban teljen az idő, játszottak. A játék kezdetekor a társaság minden tagjának egy-egy olyan háromjegyű pozitív számra kellett gondolnia, amelynek minden számjegye 4-nél nagyobb és 7-nél kisebb. Amikor sorra megmondták a gondolt számot, kiderült, hogy nincs a mondott számok között azonos.

b) legfeljebb hány tagú lehetett a társaság? (3 pont)

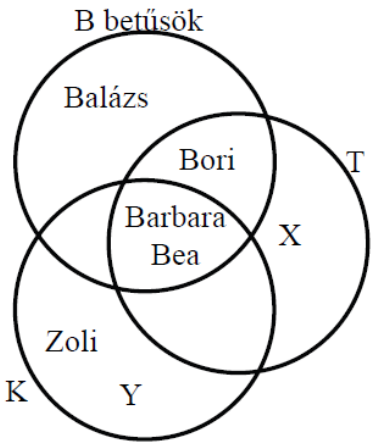
Egy másik alkalommal Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt.

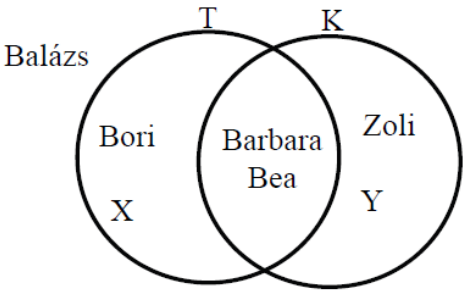
c) A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnevűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé? (5 pont)

d) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a c) pont szerinti ülésrend alakul ki, ha minden ülésrend egyenlően valószínű? (3 pont)

Megoldás:

a) Jelölje *T* a teniszezők, *K* a kerékpározók halmazát a Kovács családon belül.
Barbara, Balázs, Bea, Bori elhelyezése (1 pont)





Zoli elhelyezése (1 pont)
Új családtag elhelyezése *T* halmazon belül (1 pont)
Új családtag elhelyezése *K* halmazon belül (1 pont)
A Kovács családnak tehát legalább 7 tagja van (1 pont)

b) A háromjegyű szám minden számjegye 5 vagy 6 lehet csak (1 pont)
Minden számjegy kétféleképpen választható meg, tehát $2\cdot 2\cdot 2=8$ ilyen háromjegyű szám van (1 pont)
Mivel a társaság minden tagja különböző számot mondott, így legfeljebb 8 tagú lehet a társaság (1 pont)

c) A feladat szerint Barbara, Bea, Bori és Balázs vagy az 1,3,5 és 7-es számú székeken, vagy a 2,4,6 és 8-as számú székeken foglalnak helyet, és mindkét esetben a maradék 4 helyre a 4 barát ül. (1 pont)
Az első sorrendben az adott 4 helyre Barbara, Bea, Bori és Balázs $4!$-féleképpen helyezkedhet el (1 pont)
Barbara, Bea, Bori és Balázs bármelyik elhelyezkedése esetén a maradék 4 helyre a 4 barát szintén $4!$-féleképpen foglalhat helyet (1 pont)
Így az első esetben a 8 embernek $4!\cdot 4!=576$-féle ülésrendje alakulhat ki (1 pont)
A második esetben is ugyanennyi, ezért a 8 embernek összesen $2\cdot 4!\cdot 4!=\mathbf{1152}$ ülésrendje alakulhat ki (1 pont)

d) A 8 ember összes ülésrendjének száma $8!=40320$ (1 pont)
Mivel bármilyen ülésrend egyenlően valószínű, a kérdéses valószínűség
$$p=\frac{2\cdot 4!\cdot 4!}{8!}=\frac{1152}{40320}=\frac{1}{35}\approx \mathbf{0,0286}$$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

9) Egy matematikus három német és négy magyar matematikust hívott vendégségbe szombat délutánra. Csütörtökön a házigazda és a 7 meghívott közül néhányan telefonon egyeztettek. A házigazda mindenkivel beszélt. Az azonos nemzetiségű vendégek egymást nem hívták, de a többiekkel mind beszéltek telefonon. Senki sem beszélt egy másik emberrel egynél többször, és minden beszélgetés pontosan két ember között zajlott.

a) Hány telefonbeszélgetést bonyolított le egymás között a 8 matematikus csütörtökön? (5 pont)

A telefonbeszélgetéskor minden meghívott vendég megmondta, hogy mekkora valószínűséggel megy el a szombati vendégségbe. A házigazda tudta, hogy a meghívottak egymástól függetlenül döntenek arról, hogy eljönnek-e. Kiszámolta, hogy 0,028 annak a valószínűsége, hogy mindannyian eljönnek.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább egy meghívott elmegy a vendégségbe? (Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (11 pont)

Megoldás:

a) Ha a 8 fős társaság minden tagja mindenkivel beszélt volna, akkor $\frac{8\cdot 7}{2}=28$ beszélgetést folytattak volna le csütörtökön (2 pont)
Azonos nemzetiségűek nem beszéltek egymással, tehát a három német összesen 3-mal kevesebb, (1 pont)
míg a négy magyar meghívott összesen $\frac{4\cdot 3}{2}=6$-tal kevesebb beszélgetést folytatott (1 pont)
Ezek alapján a csütörtöki beszélgetések száma $28-(3+6)=\mathbf{19}$ (1 pont)

b) Legyen p az a valószínűség, amit mindannyian mondtak. Mivel egymástól függetlenül döntöttek, (1 pont)
annak valószínűsége, hogy mindenki elmegy $p^7=0,028$ (2 pont)
Innen $p=\sqrt[7]{0,028}\approx 0,600$ (2 pont)
Annak a valószínűsége, hogy valaki nem megy el $1-p$ (1 pont)
Annak a valószínűsége, hogy senki sem megy el: $(1-p)^7\approx 0,4^7\approx 0,0016$ (2 pont)
Tehát annak a valószínűsége, hogy legalább egy ember elmegy: $1-(1-p)^7$, (2 pont)
ami megközelítőleg **0,998** (1 pont)

Összesen: 16 pont

10)

a) Peti levelet írt négy barátjának, Andrásnak, Bélának, Csabának és Daninak és mindenkinek egy-egy fényképet is akart küldeni a nyaralásról. A négy fénykép különböző volt, és Peti mindegyikük hátlapjára ráírta, kinek szánja. A fényképeket végül figyelmetlenül rakta a borítékba, bár mindenki kapott a levelében egy fényképet is.

a1) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy csak Andris kapja azt a fényképet, amelyen a saját neve szerepel? (3 pont)

a2) Melyik esemény bekövetkezésének nagyobb a valószínűsége:
- senki sem kapja azt a fényképet, amelyet Peti neki szánt
vagy
- pontosan egyikük kap olyan fényképet, amelyen a saját neve szerepel? (8 pont)

b) Egy szabályos érme egyik oldalán 6-os, a másikon pedig 4-es számjegy látható. Az érmét négyszer egymás után feldobjuk, és a dobott számokat összeadjuk. Milyen értékeket kaphatunk összeg gyanánt? Az egyes összegek dobásának mekkora a valószínűsége? (5 pont)

Megoldás:

a) Jelöljük a fényképekre írt neveket *A,B,C,D*-vel, a neveknek megfelelő borítékon lévő címzéseket *a,b,c,d*-vel.

a1) Andris kapott csak megfelelő fényképet. Ez csakis úgy lehetséges, ha az *abcd* sorrendben elhelyezett borítékokba az *ACDB* vagy *ADBC* sorrendben kerültek a képek. (2 pont)
Tehát a kívánt elhelyezés **kétféleképpen** valósítható meg. (1 pont)

a2) Jelölte *S* azt az eseményt, hogy senki sem kapott nevével ellátott fényképet. Az *S* esemény pontosan akkor következik be, ha az *abcd* sorrendben elhelyezett borítékokba *BADC, BCDA, BDAC, CADB, CDAB, CDBA, DABC, DCAB, DCBA* sorrendben kerülhettek fényképek. Ez 9 kedvező eset (3 pont)
Jelölje *E* azt az eseményt, hogy pontosan egyikük kapott nevével ellátott fényképet. AZ *E* esemény pontosan akkor következik be, ha az *abcd* sorrendben elhelyezett borítékokba *ACDB, ADBC, BCAD, BDCA, CABD, CBDA, DACB, DBAC* sorrendben kerülhettek a fényképek. Ez 8 kedvező eset (3 pont)
A fényképeket Peti 24-féleképpen helyezhette volna el a borítékokba, ezen elhelyezéseknek azonos a valószínűsége. (1 pont)

$$\frac{9}{24} = P(S) > P(E) = \frac{8}{24}$$ (1 pont)

b) A négy dobáshoz tartozó összegek lehetnek:

$6+6+6+6=\mathbf{24}$ (B_0)

$6+6+6+4=\mathbf{22}$ (B_1)

$6+6+4+4=\mathbf{20}$ (B_2) (1 pont)

$6+4+4+4=\mathbf{18}$ (B_3)

$4+4+4+4=\mathbf{16}$ (B_4)

Bármelyik dobásnál a 6-os és 4-es is $\frac{1}{2}$ valószínűséggel következik be (1 pont)

A B_k események valószínűségét a $p=\frac{1}{2}; n=4$ paraméterű binomiális eloszlás írja le (1 pont)

Ezért:

$$\boldsymbol{P(B_0)=\binom{4}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}}$$

$$\boldsymbol{P(B_1)=\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{16}}$$

$$\boldsymbol{P(B_2)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6}{16}}$$ (2 pont)

$$\boldsymbol{P(B_3)=\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{16}}$$

$$\boldsymbol{P(B_4)=\binom{4}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}}$$

Összesen: 16 pont

11)

a) Két gyerek mindegyike 240 forintért vett kaparós sorsjegyet. Fémpénzzel fizettek (5; 10; 20; 50; 100 és 200 forintos érmékkel), és pontosan kiszámolták a fizetendő összeget. Hányféleképpen fizethetett Miki, ha ő 4 darab érmével fizetett, és hányféleképpen fizethetett Karcsi, ha ő 5 darab érmével fizetett. (A pénzérmék átadási sorrendjét nem vesszük figyelembe) (4 pont)

A „bergengóc" lottóban kétszer húznak egy játéknapon. Bandi egy szelvénnyel játszik, tehát az adott játéknapon mindkét húzásnál nyerhet ugyanazzal a szelvénnyel.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak legalább egy telitalálata lesz, ha *P* annak a valószínűsége ($0<P<1$), hogy egy szelvényen, egy húzás esetén telitalálata lesz? (4 pont)

Megváltoztatták a játékszabályokat: minden játéknapon csak egyszer húznak (más játékszabály nem változott). Bandi most két (nem feltétlenül különbözően kitöltött) szelvénnyel játszik.

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak telitalálata legyen valamelyik szelvényen? (4 pont)

d) A telitalálat szempontjából a b) és c)-ben leírtak közül melyik éri meg Bandi számára?

(4 pont)

Megoldás:

a) Miki **kétféleképpen** fizethetett:
$240 = 200+20+10+10 = 100+100+20+20$ (2 pont)
Karcsi **négyféleképpen** fizethetett:
$240 = 200+20+10+5+5 = 200+10+10+10+10$ (1 pont)
$240 = 100+100+20+10+10 = 100+50+50+20+20$ (1 pont)

b) Bandinak telitalálata háromféle esetben lehet:
(1)az első húzásnál telitalálata van, a másodiknál is telitalálta van, ennek a valószínűsége $p \cdot p = p^2$ (1 pont)
(2)az első húzásnál telitalálata van, nincs másodiknál nincs telitalálata, ennek valószínűsége $p \cdot (1-p) = p - p^2$ (1 pont)
(3)az első húzásnál nincs telitalálata, a másodiknál telitalálata van, ennek valószínűsége: $(1-p) \cdot p = p - p^2$ (1 pont)
Annak a valószínűsége tehát, hogy egy adott játéknapon Bandinak telitalálata legyen ez a három valószínűség összege: $\boldsymbol{2p - p^2}$ (ez nem negatív, hiszen $0 < p < 1$) (1 pont)

c) Két esetet kell vizsgálni annak alapján, hogy Bandi a két szelvényét azonosan vagy különbözően töltötte-e ki (1 pont)
(1)Ha Bandi két egyforma szelvényt töltött ki, akkor a telitalálat esélye $\boldsymbol{p}$ (1 pont)
(2)Ha Bandi a két szelvényt különbözően tölt ki, akkor a telitalálat esélye $\boldsymbol{2p}$ (2 pont)

d) Ha Bandi két egyforma szelvényt tölt ki, akkor a kérdés az, hogy $2p - p^2$ vagy p nagyobb (1 pont)
Mivel $0 < p < 1$, ezért $2p - p^2 - p = p(1-p) > 0$, tehát az **első játékszabály** kedvezőbb (1 pont)
Ha Bandi két különböző szelvényt tölt ki, akkor a kérdés az, hogy $2p - p^2$ vagy $2p$ nagyobb (1 pont)
Mivel $p^2 > 0$ ezért $2p - p^2 < 2p$ tehát **a második játékszabály** a kedvezőbb (1 pont)

Összesen: 16 pont

12) Egy gyártósoron 8 darab gép dolgozik. A gépek mindegyike, egymástól függetlenül 0,05 valószínűséggel túlmelegszik a reggeli bekapcsoláskor. Ha a munkanap kezdetén 3 vagy több gép túlmelegszik, akkor az egész gyártósor leáll! A 8 gép reggeli beindításakor bekövetkező túlmelegedések számát a binomiális eloszlással modellezzük.

a) Adja meg az eloszlás két paraméterét! Számítsa ki az eloszlás várható értékét! (3 pont)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a reggeli munkakezdéskor egyik gép sem melegszik túl? (4 pont)

c) Igazolja a modell alapján, hogy (négy tizedes jegyre kerekítve) 0,0058 annak a valószínűsége, hogy a gépek túlmelegedése miatt a gyártósoron leáll a termelés a munkanap kezdetekor! (7 pont)

Megoldás:

a) $n = 8$ (1 pont)

$p = 0,05$ (1 pont)

a várható érték: $n \cdot p = \mathbf{0,4}$ (1 pont)

b) Minden gép $1 - p = 0,95$ valószínűséggel indul be reggel (1 pont)

Annak valószínűsége, hogy mind a 8 gép beindul: $0,95^8$ (2 pont)

ami $\approx \mathbf{0,6634}$ $(66,34\%)$ (1 pont)

c) A kérdéses esemény (A) esemény komplementerének (B) valószínűségét számoljuk ki, azaz, hogy legfeljebb 2 gép romlik el. (1 pont)

$P(B) = 0,95^8 + \binom{8}{1} \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^6 =$ (2 pont)

$= 0,95^8 + 8 \cdot 0,05 \cdot 0,95^7 + 28 \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^6 \approx$ (1 pont)

$\approx 0,9942$ (2 pont)

$P(A) = 1 - P(B) = 1 - 0,9942 = 0,0058$, tehát valóban **0,0058** a termelés leállásának a valószínűsége. (1 pont)

Összesen: 14 pont

13) Egy 32 fős érettségiző osztály tanulói három különböző táncot mutatnak be a szalagavató bálon. AZ alábbi táblázat az egyes táncokban fellépő diákok számát mutatja nemenkénti bontásban.

	Keringő	Kán-kán	Hip-hop	Egyik sem
Lány	9	6	10	2
Fiú	9	0	4	2

Van 2 olyan lány, aki mindhárom táncban fellép, ugyanakkor nincs olyan fiú az osztályban, aki egynél több produkcióban részt venne.

a) A lányok közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, mennyi annak a valószínűsége, hogy mindketten táncolnak a kán-kánban? (5 pont)

b) Az osztály tanulói közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, mennyi a valószínűsége annak, hogy az illető pontosan két táncban szerepel? (9 pont)

Megoldás:

a) Mivel minden fiú legfeljebb egy táncban lépett fel, ezért a fiúk száma a táblázat alapján 15 (1 pont)
a lányok száma pedig 17 (1 pont)
A 17 lányból kettőt $\binom{17}{2}=136$-féleképp lehet kiválasztani (1 pont)
6 lány táncolt kán-kánt, közülük kettőt $\binom{6}{2}=15$-féleképp lehet kiválasztani (1 pont)
A keresett valószínűség $P=\frac{15}{136}\approx \mathbf{0,11}$ (1 pont)

b) A pontosan két táncban fellépő diák csak lány lehet (1 pont)
Mivel két lány egyik táncban sem lépett fel, ezért 15 lány között kell keresnünk a pontosan kétszer táncolókat (1 pont)
Ha a pontosan kétszer táncolók közül x a keringőző és kán-kánozó, y a kán-kánozó és hip-hopozó, z pedig a keringőző és hip-hopozó lányok száma, akkor a csak keringőző lányok száma $9-x-z-2$ (1 pont)
A csak kán-kánozó lányok száma $6-x-y-2$ (1 pont)
A csak hip-hopozó lányok száma $10-y-z-2$ (1 pont)
A logikai szita formula alapján:
$(9-x-z-2)+(6-x-y-2)+(10-y-z-2)+x+y+z+2=15$ (1 pont)
ahonnan $x+y+z=6$ (1 pont)
Az osztály tanulói közül egy diák kiválasztására 32 lehetőség van (1 pont)
így a keresett valószínűség $P=\frac{6}{32}=\mathbf{0,1875}$ (1 pont)

Összesen: 14 pont

14)

a) Két szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Számítsa ki a következő két esemény valószínűségét:
***A*: a dobott számok összege prím**
***B*: a dobott számok összege osztható 3-mal (6 pont)**

b) Az 1,2,3,4,5,6 számjegyekből véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával 4-gyel osztható háromjegyű számot tudunk képezni? (5 pont)

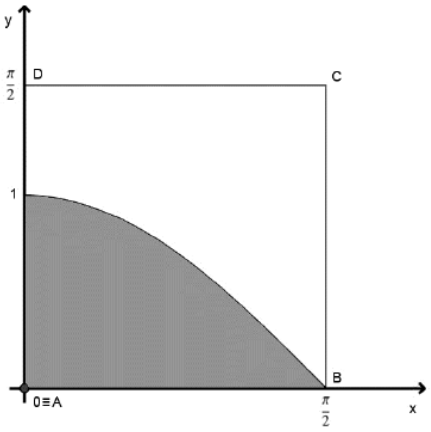
c) Az *ABCD* négyzet csúcsai: $A(0;0)$, $B\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, $C\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy belső pontját. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a koordinátatengelyek és az $f:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$ függvény grafikonja által határolt tartomány egyik pontja? (5 pont)

Megoldás:

a) A dobott számok összege a következő esetekben lesz prím: $1+1$, $1+2$, $1+4$, $2+3$, $1+6$, $2+5$, $3+4$, $5+6$. (1 pont)
Az $1+1$ eset kivételével mindegyik összeg kétféleképpen valósulhat meg, így az A eseményt 15 elemi esemény valósítja meg (1 pont)
Az összes elemi esemény $6\cdot 6=36$, ezért $\boldsymbol{P(A)=\frac{15}{36}}$ (1 pont)
A dobott számok összege a következő esetekben lesz 3-mal osztható: $1+2$, $1+5$, $2+4$, $3+3$, $3+6$, $4+5$, $6+6$. (1 pont)
A $3+3$ és a $6+6$ esetek egyféleképpen, a többi kétféleképpen valósulhat meg, (1 pont)
így $\boldsymbol{P(B)=\frac{12}{36}}$ (1 pont)

b) A hat számjegyből hármat $\binom{6}{3}=20$ különböző módon tudunk kiválasztani (1 pont)
A 4-gyel oszthatóság szabálya alapján kedvező esetet kapunk, ha a kiválasztott három számjegy között van kettő, amelyekből 4-gyel osztható kétjegyű szám képezhető (1 pont)
Ezek között négy olyan hármas van, amely nem tartalmaz két megfelelő számjegyet: (1, 3, 5); (1, 3, 4); (1, 4, 5); (3, 4, 5). (2 pont)
Így a keresett valószínűség $P=\frac{20-4}{20}=\frac{16}{20}=\boldsymbol{\frac{4}{5}}$ (1 pont)

c) A négyzet és az f függvény grafikonjának felvétele közelítő pontossággal



(1 pont)

A négyzet területe $\frac{\pi^2}{4}$ (1 pont)

A koordinátatengelyek és az f függvény grafikonja által határolt tartomány területe: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx =$ (1 pont)

$= \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$ (1 pont)

A valószínűség kiszámításának geometriai modelljét alkalmazva, a keresett valószínűség: $P = \frac{1}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{4}{\pi^2} \approx \mathbf{0,405}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

15) A főiskolások műveltségi vetélkedője a következő eredménnyel zárult. A versenyen induló négy csapatból a győztes csapat pontszáma $\frac{4}{3}$-szorosa a második helyen végzett csapat pontszámának. A negyedik, harmadik és második helyezett pontjainak száma egy mértani sorozat három egymást követő tagja, és a negyedik helyezettnek 25 pontja van. A négy csapat között kiosztott pontszámok összege 139.

a) Határozza meg az egyes csapatok által elért pontszámot! (8 pont)

Mind a négy csapatnak öt-öt tagja van. A vetélkedő után az induló csapatok tagjai között három egyforma értékű könyvutalványt sorsolnak ki(mindenki legfeljebb egy utalványt nyerhet).

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy az utalványokat három olyan főiskolás nyeri, akik mindhárman más-más csapat tagjai? (5 pont)

Megoldás:

a) A második helyezett x, az első $\frac{4}{3}x$ pontot ért el. (1 pont)

A második x, a negyedik 25 pontot ért el, így a mértani sorozat miatt a harmadik helyezett pontszáma $\sqrt{25x}$. (1 pont)

A szöveg szerint: $\frac{4}{3}x + x + \sqrt{25x} + 25 = 139$ (1 pont)

Rendezve $\sqrt{x}$-re másodfokú: $7\left(\sqrt{x}\right)^2 + 15\sqrt{x} - 342 = 0$ (1 pont)

Két gyöke $\sqrt{x} = 6$ és $\sqrt{x} = -\frac{57}{7}$, ebből a negatív gyök nem lehetséges (1 pont)

így $x = 36$ (1 pont)

Tehát a 2. helyezett pontszáma 36, a harmadiké 30, az első helyezetté pedig 48. (1 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

Alternatív megoldás:

a) (Legyen q a mértani sorozat hányadosa.) A negyedik helyezett 25, a harmadik $25q$, a második $25q^2$ pontot ért el. (1 pont)

Az első helyezett pontszáma $\frac{4}{3} \cdot 25q^2 + 75q = \frac{100q^2}{3}$ (1 pont)

Szöveg szerint $\frac{100q^2}{3} + 25q^2 + 25q + 25 = 139$ (1 pont)

Rendezés után: $175q^2 + 75q - 342 = 0$ (1 pont)

Két megoldása: $q = \frac{6}{5}$ és $q = -\frac{57}{35}$ (1 pont)

Ebből az utóbbi nem felel meg a szövegnek (1 pont)

tehát a harmadik helyezett pontszáma 30, másodiké 36, az első helyezetté pedig 48. (1 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

b) Lehetséges (egyenlő valószínű) kimenetelek száma $\binom{20}{3} = 1140$ (2 pont)

Kedvező kimenetelek száma: $\binom{4}{3} \cdot 5^3 = 500$ (2 pont)

A kérdezett valószínűség: $\frac{500}{1140} \approx \mathbf{0,439}$ (1 pont)

Összesen: 13 pont

16) Egy rendezvényre készülődve 50 poharat tesznek ki az asztalra. A poharak között 5 olyan van, amelyik hibás, mert csorba a széle.

a) Az egyik felhasználó az asztalról elvesz 10 poharat, és ezekbe üdítőitalt tölt. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legfeljebb egy csorba szélű lesz a 10 pohár között! (5 pont)

b) A poharakat előállító gyárban két gépsoron készülnek a poharak, amelyek külsőre mind egyformák. Az első gépsoron gyártott poharak 10%-a selejtes. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első gépsoron gyártott poharak közül 15-öt véletlenszerűen, visszatevéssel kiválasztva közülük pontosan 2 lesz selejtes! (4 pont)

c) A második gépsoron készült poharak 4%-a selejtes. Az összes pohár 60%-át az első gépsoron, 40%-át a második gépsoron gyártják, az elkészült poharakat összekeverik. Az elkészült poharak közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet és azt tapasztaljuk, hogy selejtes. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ez a pohár az első gépsoron készült? (7 pont)

Megoldás:

a) Az egyenlően valószínű kimenetelek száma: $\binom{50}{10}$ (1 pont)

A kedvező kimenetelek száma: $\binom{45}{10}+\binom{45}{9}\binom{5}{1}$ (2 pont)

A kérdezett valószínűség $\dfrac{\binom{45}{10}+\binom{45}{9}\binom{5}{1}}{\binom{50}{10}}$ (1 pont)

$\approx \mathbf{0,742}$ (1 pont)

b) 0,9 annak a valószínűsége, hogy az első gépsoron készült (1 pont)

A kérdezett valószínűség $\binom{15}{2}\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^{13}$ (2 pont)

$\approx \mathbf{0,267}$ (1 pont)

c) Jelölje A azt az eseményt, hogy az első gépsoron készült a pohár, B pedig azt az eseményt, hogy selejtes a pohár (1 pont)

$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ (1 pont)

$P(AB)=0{,}6\cdot 0{,}1=0{,}06$ (1 pont)

Ha összesen n pohár van, akkor $0{,}6\cdot n\cdot 0{,}1+0{,}4\cdot n\cdot 0{,}04=0{,}076n$ darab selejtes van köztük (2 pont)

Egy selejtes választásának valószínűsége $P(B)=\dfrac{0{,}076n}{n}=0{,}076$ (1 pont)

Tehát $P(A|B)=\dfrac{0{,}06}{0{,}076}\approx \mathbf{0,789}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

17) Egy város 18 étterme közül 11-ben reggelit, 11-ben vegetáriánus menüt lehet kapni, és 10-ben van felszolgálás. Mind a 18 étterem legalább egy szolgáltatást nyújt az előző három közül. Öt étteremben adnak reggelit, de nincs vegetáriánus menü. Azok közül az éttermek közül, ahol reggelizhetünk, ötben van felszolgálás. Csak egy olyan étterem van, ahol mindhárom szolgáltatás megtalálható.

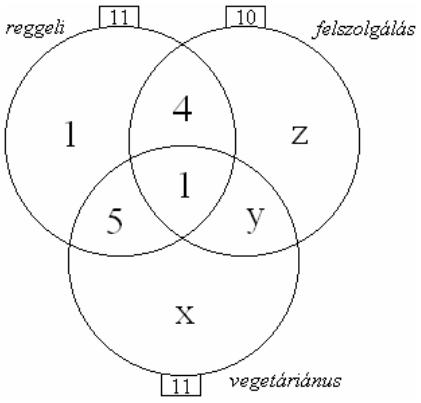
a) Hány étteremben ehet vegetáriánus menüt kapni, de reggelit nem?
(5 pont)

b) Hány olyan étterem van, ahol felszolgálnak vegetáriánus menüt?
(6 pont)

c) A Kiskakas étteremben minden vendég a fizetés után nyereménysorsoláson vehet részt. Két urnát tesznek elé, amelyekben golyócskák rejtik a város egy-egy éttermének nevét. Az *A* urnában a város összes vendéglőjének neve szerepel, mindegyik pontosan egyszer. A *B* urnában azoknak az éttermeknek a neve található – mindegyik pontosan egyszer- amelyikben nincs felszolgálás. A vendég tetszés szerint húzhat egy golyót. Ha a húzott étteremben van reggelizési lehetőség, akkor a vendég egy heti ingyen reggelit nyer, ha nincs, nem nyer. Melyik urnából húzva nagyobb a nyerés valószínűsége?
(5 pont)

Megoldás:

a)



Mivel egy olyan étterem van csak, ahol mindhárom szolgáltatás megtalálható, ezért a három halmaz metszetébe 1-et írhatunk (1 pont)
Mivel 5 étteremben van reggeli és felszolgálás is, ezért a reggeli és felszolgálás vegetáriánus menü nélkül $5-1=4$ helyen van (1 pont)
Mivel 5 étteremben adnak reggelit, de vegetáriánus menüt nem kapni, ezért csak reggelit 1 helyen lehet kapni (1 pont)
Mivel 11-ben lehet reggelit kapni, ezért reggeli és vegetáriánus menü felszolgálás nélkül $11-1-4-1=5$ helyen van (1 pont)
Mivel 11 helyen van vegetáriánus menü, és ezek közül 6 helyen van reggeli is, ezért **5 helyen van vegetáriánus menü, de nincs reggeli.** (1 pont)

b) A „vegetáriánus helyek” száma miatt: $y = 5 - x$, a felszolgálós helyek száma $z = x$ (2 pont)
Így az összes vendéglők száma $11 + 2x + 5 - x = 18$ (1 pont)
ahonnan $x = 2$ (1 pont)
ezért $y = 3; z = 2$ (1 pont)
Tehát $y + 1 = \mathbf{4}$ **étteremben szolgálnak fel vegetáriánus menüt.** (1 pont)

c) Összesen 18 étterem van, ebből 11-ben lehet reggelizni. Az összes címet tartalmazó *A* urnából húzva $\frac{11}{18} \approx 0{,}61$ a nyerés valószínűsége (2 pont)
A 8 önkiszolgáló étterem közül 6-ban lehet reggelizni, így a *B* urnából húzva $\frac{6}{8} = 0{,}75$ a nyerés valószínűsége (2 pont)
tehát **a *B* urnából érdemes húzni.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

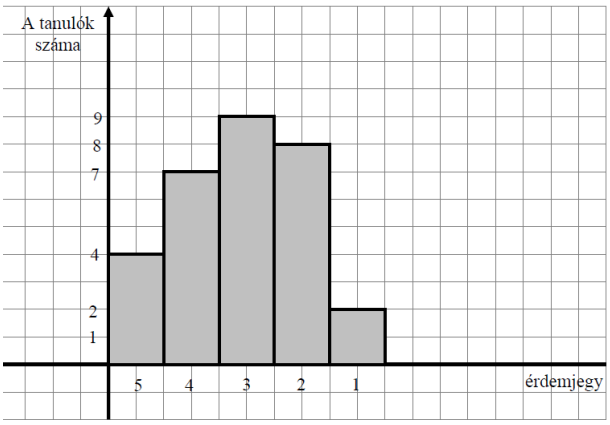
18) A következő táblázat egy 30 fős kilencedik osztály első félév végi matematikaosztályzatainak megoszlását mutatja.

Érdemjegy	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Tanulók száma	**4**	**7**	**9**	**8**	**2**

a) Ábrázolják az eredmények eloszlását oszlopdiagramon! (3 pont)
b) Mennyi a jegyek átlaga? (2 pont)
c) Véletlenszerűen kiválasztjuk az osztály egy tanulóját. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a tanuló legalább 3-ast kapott félév végén matematikából? (3 pont)
d) Két tanulót véletlenszerűen kiválasztva mennyi a valószínűsége annak, hogy érdemjegyeik összege osztható 3-mal? (8 pont)

Megoldás:

a)



(3 pont)

b) A jegyek átlaga: $\frac{4 \cdot 5 + 7 \cdot 4 + 9 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{30} = \mathbf{3{,}1}$ (2 pont)

c) Legalább 3-ast $4 + 7 + 9 = 20$ tanuló kapott, így a kérdéses valószínűség $P = \frac{20}{30} = \mathbf{\frac{2}{3}}$ (3 pont)

d) Az osztályból 2 tanuló kiválasztására $\binom{30}{2} = 435$ lehetőségünk van. (2 pont)

A kiválasztott tanulók osztályzatainak összege 3-mal osztható, ha az osztályzatok: $(1;2),(1;5),(2;4),(3;3),(4;5)$ (2 pont)

A kedvező esetek száma: $2\cdot 8 + 2\cdot 4 + 8\cdot 7 + \binom{9}{2} + 7\cdot 4 = 144$ (2 pont)

A keresett valószínűség $P = \frac{144}{435} = \frac{48}{145} \approx \mathbf{0,33}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

19) Egy automatából 100 Ft értékű ital kapható, s az automatába csak 100 Ft-os érme dobható be. Az italautomata gyakran hibásan működik. 160 kísérletet végezve azt tapasztaljuk, hogy

- **az esetek 18,75%-ában az automata elnyeli a pénzt és nem ad italt,**
- **90 esetben visszaadja a 100 forintost, anélkül, hogy italt adna**
- **30 esetben italt is ad és a 100 Ft-os érmét is visszaadja**
- **és csak a fennmaradó esetekben működik rendeltetésszerűen**

a) Mekkora annak az esélye az adatok alapján, hogy egy százast bedobva az automata rendeltetésszerűen fog működni? (4 pont)

b) Minek nagyobb az esélye: annak, hogy ingyen ihatunk, vagy annak, hogy ráfizetünk? (5 pont)

c) Várhatóan mennyi lesz a ráfizetése annak, aki 160-aszor próbál vásárolni ennél az automatánál? (4 pont)

Megoldás:

a)

Pénz visszaadja		Pénzt elnyeli	
Italt nem ad	Italt ad	Italt nem ad	Italt ad
30	90	$160\cdot 0{,}1875 = 30$	10

A 18,75% kiszámítása (1 pont)

10 esetben működik jól, a pénzt elnyeli és ad italt (1 pont)

Annak az esélye, hogy jól működik $\frac{10}{160} = \mathbf{0,0625}$ (2 pont)

b) 160 esetből 30-ban az ital mellé visszakapjuk a pénzt is, tehát $\frac{30}{160} = 0{,}1875$ valószínűséggel ingyen jutunk italhoz (2 pont)

Ráfizetünk, ha nem kapjuk vissza a pénzt és italt sem kapunk. Ennek valószínűsége: $\frac{30}{160} = 0{,}1875$ (2 pont)

Tehát **ugyanakkora a valószínűségük** (1 pont)

c) A 160 esetből 120 esetben visszaadja a pénzt (2 pont)

Mivel pontosan 40 esetben kapok italt, így a ráfizetés **0 Ft**, azaz nincs ráfizetés (2 pont)

Összesen: 13 pont

20) A dominókészleten a dominókövek mindegyikén az egy-egy „térfélen” elhelyezett pöttyök száma 0-tól egy megengedett maximális értékig bármilyen természetes szám lehet. A dominókövek két felén e számok minden lehetséges pírosítása szerepel. Nincs két egyforma kő a készletben.

a) Igazolja, hogy ha a pöttyök maximális száma 7, akkor a dominókészlet 36 kőből áll. (5 pont)

b) A 36 kőből álló dominókészletből véletlenszerűen kiválasztottunk egy követ. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott kő két „térfelén” lévő pöttyök számának összege 8? (3 pont)

c) A 36 kőből álló dominókészletből ezúttal két követ választottunk ki véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két dominókő a játék szabályai szerint egymáshoz illeszthető? (Két dominókő összeilleszthető, ha van olyan „térfelük”, amelyen a pöttyök száma ugyanannyi.) (8 pont)

Megoldás:

a) Nyolc olyan dominó van, amelynek mind a két térfelén ugyanannyi a pöttyök száma. (2 pont)

Az olyan dominók száma, amelyeknek a két térfelén különböző számú pötty áll, annyi van, ahányféleképpen kiválasztható két szám a 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 számok közül, a sorrendet nem véve figyelembe, tehát $\frac{8\cdot 7}{2}$, azaz 28-féleképpen (2 pont)

tehát összesen $8+28=36$ kőből álló a dominókészlet (1 pont)

b) Egy kő két „térfelén” levő pöttyök számának összege 8 a következőképpen lehet: $(1;7),(2;6),(3;5),(4;4)$ (1 pont)

tehát négyféleképpen (1 pont)

A keresett valószínűség $P=\frac{4}{36}=\mathbf{\frac{1}{9}}$ (1 pont)

c) 8 olyan dominó van, amelynek egyik térfelén nincs tipp. Ezek közül 2 db $\binom{8}{2}$-féleképpen választható ki (2 pont)

A 8 olyan dominó közül, amelyiknek egyik térfelén 1 db pötty van $\binom{8}{2}$-féleképpen választható ki 2 db. Ezt a gondolatmenetet folytatva $\binom{8}{2}$-féleképpen választható ki 2 db azon 8 dominó közül, amelyiknek az egyik térfelén 7 pötty van (2 pont)

A kedvező esetek száma $8\cdot\binom{8}{2}$ (1 pont)

Az összes esetek száma $\binom{36}{2}$ (1 pont)

A keresett valószínűség $\dfrac{8\cdot\binom{8}{2}}{\binom{36}{2}}=\mathbf{\dfrac{16}{45}}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

21) Egy új típusú sorsjegyből 5 millió darab készült, egy sorsjegy ára 200 Ft. Minden egyes sorsjegyen vagy a „Nyert” vagy a „Nem nyert” felirat található, és a nyertes sorsjegyen feltüntetik a nyertes szelvény tulajdonosa által felvehető összeget is. A gyártás során a mellékelt táblázat szerinti eloszlásban készült el az 5 millió sorsjegy.

sorsjegy (db)	nyeremény (Ft)
4	10 000 000
40	50 000
800	10 000
150 000	1 000
400 000	500
1 000 000	200
3 449 156	0

a) Ha minden sorsjegyet eladnának és a nyertesek minden nyereményt felvennének, akkor mekkora lenne a sorsjegyek eladásából származó bevétel és a kifizetett nyeremény különbözete? (3 pont)

b) Aki a kibocsátás után az első sorsjegyet megveszi, mekkora valószínűséggel nyer a sorsjegy áránál többet? (4 pont)

c) Számítsa ki, hogy ebben a szerencsejátékban az első sorsjegyet megvásárló személy nyereségének mennyi a várható értéke! (A nyereség várható értékének kiszámításához nemcsak a megnyerhető összeget, hanem a sorsjegy árát is figyelembe kell venni.) (4 pont)

Megoldás:

a) A bevétel: $5 \cdot 10^6 \cdot 200 = 10^9$ Ft (1 pont)

A kifizetett nyeremény:

$4 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10 + 8 \cdot 10^6 + 1{,}5 \cdot 10^8 + 2 \cdot 10^8 = 6 \cdot 10^8$ Ft (1 pont)

Tehát a különbözet 400 millió Ft (1 pont)

b) Az 5 millió sorsjegy bármelyikét egyenlő valószínűséggel húzhatjuk

A kedvező esetek száma 550844 (2 pont)

Tehát a keresett valószínűség: $p = \dfrac{550844}{5 \cdot 10^6} \approx \mathbf{0{,}11}$ (2 pont)

c) A felvehető nyeremény várható értéke:

$$\frac{4 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10 + 8 \cdot 10^6 + 1{,}5 \cdot 10^8 + 2 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^6} = 120 \text{ Ft}$$ (3 pont)

A nyereség várható értéke tehát $120 - 200 = \mathbf{-80\ Ft}$ (1 pont)

Összesen: 11 pont

22) Adott két párhuzamos egyenes, *e* és *f*. Kijelölünk *e*-n 5, *f*-en pedig 4 különböző pontot.

a) Hány (*e*-től és *f*-től is különböző) egyenest határoz meg ez a 9 pont? Hány olyan háromszög van, amelynek mindhárom csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki? Hány olyan négyszög van, amelynek mindegyik csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki? (11 pont)

b) A 9 pont mindegyikét véletlenszerűen kékre vagy pirosra színezzük. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az *e* egyenes 5 pontja is azonos színű és az *f* egyenes 4 pontja is azonos színű lesz? (5 pont)

Megoldás:

a) Az *e* egyenesen kijelölt 5 pont bármelyikét az *f* egyenesen kijelölt 4 pont bármelyikével összekötve megfelelő egyenest kapunk (1 pont)

Így a megadott feltételnek megfelelően az egyenesek száma $5 \cdot 4 = 20$ (1 pont)

Az adott feltételnek megfelelő háromszög két csúcsa az egyik, harmadik csúcsa a másik egyenesen van. (1 pont)

Ha az *e* egyenesen a háromszögnek két csúcsa van, akkor az a két csúcs $\binom{5}{2}$ – féleképpen választható ki (2 pont)

Így az ilyen háromszögek száma 30 (1 pont)

A megfelelő háromszögek száma tehát 70 (1 pont)

Az adott feltételnek megfelelő négyszögek két csúcsa az *e*, két csúcsa az *f* egyenesen van. (1 pont)

Az *e* egyenesen két pontot $\binom{5}{2}$, az *f* egyenesen két pontot $\binom{4}{2}$ különböző módon lehet kiválasztani (1 pont)

Így a megfelelő négyszögek száma $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} = \mathbf{60}$ (2 pont)

b) Az egyenlően valószínű színezések száma: 2^9 (2 pont)
Az e egyenesen és az f egyenesen is kétféleképpen lehet egyforma színű az összes megjelölt pont (1 pont)
Tehát 4 kedvező eset van (1 pont)
A kérdezett valószínűség így: $\frac{4}{9^2} = \mathbf{0,0078}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

23) Egy üzemben 4000 cm3-es, négyzet alapú, egyenes hasáb alakú, felül nyitott sütőedények gyártását tervezik. Az edények külső felületét tűzálló zománcfestékkel vonják be. (A belső felülethez más anyagot használnak.)

a) Számítsa ki, mekkora felületre kellene tűzálló zománcfesték egy olyan edény esetén, amelynek oldallapjai 6,4 cm magasak! (3 pont)

b) Az üzemben végül úgy határozták meg az edények méretét, hogy a gyártásukhoz a lehető legkevesebb zománcfestékre legyen szükség. Számítsa ki a gyártott edények alapélének hosszát! (9 pont)

a) Minőségellenőrzési statisztikák alapján ismert: 0,02 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott edény selejtes. Egy áruházláncnak szállított 50 darabos tételben mekkora valószínűséggel lesz pontosan 2 darab selejtes? (4 pont)

Megoldás:

a) Az edény alapéle legyen x cm hosszú
$4000 = x^2 \cdot 6,4$ (1 pont)
$x = 25$ (1 pont)
A zománccal bevonható felület területe tehát
$625 + 4 \cdot 25 \cdot 6,4 = \mathbf{1265\,cm^2}$ (1 pont)

b) Ha az edény magassága m cm, akkor $4000 = x^2 \cdot m$ és a zománccal bevonandó felület területe cm^2-ben $T = x^2 + 4xm$ (1 pont)
Az m-et a térfogatra felírt összefüggésből kifejezve és behelyettesítve T-be
$T = x^2 + \frac{16000}{x}$ (1 pont)
Tekintsük a $T : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}; T(x) = x^2 + \frac{16000}{x}$ függvényt (1 pont)
T-nek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0 (1 pont)
$T'(x) = 2x - \frac{16000}{x^2}$ (1 pont)
$T'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8000 \Leftrightarrow x = 20$ (1 pont)
Mivel $T''(x) = 2 + \frac{32000}{x^3}$ pozitív az $x = 20$ helyen (1 pont)
ezért a T függvénynek az $x = 20$ helyen abszolút minimuma van (1 pont)
A gyártott edények alapéle 20 cm (1 pont)

c) Egy edényt véletlenszerűen kiválasztva az 0,02 valószínűséggel lesz selejtes, tehát 0,98 valószínűséggel jó. (1 pont)
A kérdéses valószínűség a binomiális eloszlás alapján számolható (1 pont)

$$P(2\,\text{selejtes}) = \binom{50}{2} \cdot 0{,}002^2 \cdot 0{,}98^{48}$$ (1 pont)

$P(2\,\text{selejtes}) \approx$ **0,186** (1 pont)

Összesen: 16 pont

24)

a) A következő két állításról döntse el, hogy igaz vagy hamis. Válaszait indokolja! (6 pont)

- **Van olyan ötpontú egyszerű gráf, amelynek 11 éle van.**
- **Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan van negyedfokú csúcsa is.**

b) Az *A*, *B*, *C*, *D* és *E* pontok egy ötpontú teljes gráf csúcsai. A gráf élei közül véletlenszerűen beszínezünk hatot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az *A*, *B*, *C*, *D*, *E* pontokból és a színezett élekből álló gráf nem lesz összefüggő? (10 pont)

Megoldás:

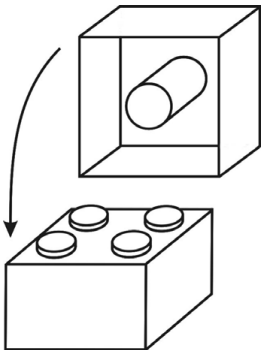
a) Az első állítás **hamis.** (1 pont)
Egy ötpontú egyszerű gráfban **legfeljebb 10 él húzható.** (2 pont)
A második állítás **igaz.** (1 pont)
Ha a gráf minden csúcsa harmadfokú volna, akkor a gráfban a fokszámok összege **páratlan lenne, ami lehetetlen** (2 pont)

b) Ha úgy színeztünk be 6 élt, hogy kaptunk egy négypontú teljes részgráfot és egy izolált pontot, akkor ez a gráf nem összefüggő, tehát jó. (2 pont)
Másképp nem kaphattunk nem összefüggő gráfot, hiszen ha egy két- és egy hárompontú komponense lenne, akkor legfeljebb 4 él lehetne. (2 pont)
Az első típushoz ötféleképpen választhatjuk ki az izolált pontot, és ez már meghatározza a 6 beszínezhető élt, tehát az ilyen gráfok száma 5. (2 pont)
Az ötpontú teljes gráfnak 10 éle van. (1 pont)
Ezek közül $\binom{10}{6}$ féleképpen választhatjuk ki a 6 kiszínezendő élt. (2 pont)

A keresett valószínűség tehát $p = \frac{5}{20} \approx$ **0,024**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

25) Egy építőkészletben a rajzon látható négyzetes hasáb alakú elem is megtalálható. Két ilyen építőelem illeszkedését az egyik elem tetején kiemelkedő négy egyforma kis henger és a másik elem alján lévő nagyobb henger szoros, érintkező kapcsolata biztosítja. (Ez azt jelenti, hogy a hengerek tengelyére merőleges síkmetszetben a nagyobb kört érinti a négy kisebb kör, amelyek középpontjai egy négyzetet határoznak meg.) Tudjuk, hogy a kis hengerek sugara 3 mm, az egymás melletti kis hengerek tengelyének távolsága pedig 12 mm.



a) Mekkora a nagyobb henger átmérője? Válaszát milliméterben, két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

A készletben az építőelemek kék vagy piros színűek. Péter 8 ilyen elemet egymásra rak úgy, hogy több piros színű van köztük, mint kék. Lehet, hogy csak az egyik színt használja, de lehet, hogy mindkettőt.

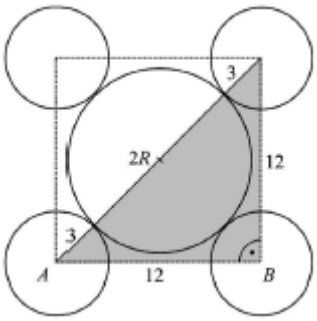
b) Hányféle különböző szín összeállítású 8 emeletes tornyot tud építeni? (4 pont)

A gyárban (ahol ezeket az építőelemeket készítik) nagyon ügyelnek a pontosságra.

Egymillió építőelemből átlagosan csupán 20 selejtes. András olyan készletet szeretne vásárolni, melyre igaz a következő állítás: *0,01-nál kisebb annak a valószínűsége, hogy a dobozban található építőelemek között van selejtes.*

c) Legfeljebb hány darabos készletet vásárolhat András? (7 pont)

Megoldás:



a) Jó ábra rajzolása (1 pont)
A kis kör kp-ja egy 12 mm oldalú négyzetet alkot (1 pont)
Ennek az átlója $12\sqrt{2}$ (1 pont)
Mivel ez éppen $2R+6$ (1 pont)
$d = 2R = \left(12\sqrt{2}-6\right) \approx \mathbf{10,97}$ (1 pont)

b) A piros elemek száma 5, 6, 7 vagy 8 lehet (1 pont)
Ha a piros elemek száma k, akkor az építhető tornyok száma $\binom{8}{k}$ (1 pont)
Így az ilyen tornyok száma összesen:
$\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8} = (56+28+8+1) = \mathbf{93}$ (2 pont)

c) Annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott kocka nem selejtes
$\frac{1000000-20}{1000000} = 0,99998$ (1 pont)
Annak a valószínűsége, hogy egy n kockát tartalmazó dobozban egyik kocka sem selejtes $0,99998^n$ (1 pont)

Ha annak a valószínűsége, hogy a dobozban van selejtes kisebb 0,01-nál, akkor annak a valószínűsége, hogy a dobozban nincs selejtes, legalább 0,99 (1 pont)

Megoldandó a $0{,}99998^n \geq 0{,}99 \quad (n \in \mathbb{N})$ (1 pont)

A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt
$n \cdot \lg 0{,}99998 \geq \lg 0{,}99$ (1 pont)

Ebből $n \leq \dfrac{\lg 0{,}99}{\lg 0{,}99998} \approx 502{,}5$ (1 pont)

Tehát András legfeljebb **502 darabos** készletet vehetett (1 pont)

Összesen: 16 pont

26) Egy dobozban 17 darab egyforma sugarú golyó van. A golyók közül 8 darab sárga és 9 darab zöld.

a) Visszatevés nélkül kihúzunk a dobozból 3 golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott 3 golyó egyszínű? (4 pont)

b) Ha úgy húzunk ki a dobozból 5 golyót, hogy a kivett golyót minden egyes húzás után visszatesszük, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy 3 alkalommal sárga golyót, 2 alkalommal pedig zöld golyót húzunk? (4 pont)

c) A golyók meg vannak számozva 1-től 17-ig. Mennyi annak a valószínűsége, hogy visszatevés nélkül 3 golyót kihúzva a golyókon található számok összege osztható 3-mal? (8 pont)

Válaszait három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

Megoldás:

a) Az összes kihúzási lehetőségek száma $\binom{17}{3}$ (1 pont)

Három sárga golyót $\binom{8}{3}$ féleképpen, három zöldet pedig $\binom{9}{3}$ féleképpen húzhatunk ki (1 pont)

A kedvező esetek száma így $\binom{8}{3}+\binom{9}{3}$ (1 pont)

A keresett valószínűség $\dfrac{\binom{8}{3}+\binom{9}{3}}{\binom{17}{3}} = \dfrac{7}{34} \approx \mathbf{0{,}206}$ (1 pont)

b) Sárga golyó húzásának valószínűsége $\dfrac{8}{17}$

Zöld golyó húzásának valószínűsége $\dfrac{9}{17}$ (1 pont)

A kérdéses valószínűség binomiális eloszlást követ (1 pont)

Ezért $p = \binom{5}{3} \cdot \left(\dfrac{8}{17}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{9}{17}\right)^2 \approx \mathbf{0{,}292}$ (2 pont)

c) A kihúzott három szám összege pontosan akkor osztható 3-mal, ha vagy mindhárom ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva, vagy 3-as maradékaik páronként különbözik (2 pont)
0 maradékot a 3, 6, 9, 12, 15 számok adnak, közülük három szám húzása a következő képen lehetséges: $\binom{5}{3}$ (1 pont)

1 maradékot adnak az 1, 4, 7, 10, 13, 16 számok, itt $\binom{6}{3}$ féleképpen lehetséges, mint a 2 maradékot adó 2, 5, 8, 11, 14, 17 esetében (2 pont)
A páronként különböző maradékot adó húzások száma $5\cdot 6^2$ (1 pont)
A kedvező esetek száma $\binom{5}{3}+2\cdot\binom{6}{3}+5\cdot 6^2$ (1 pont)
Mivel az összes esetek száma $\binom{17}{3}$, ezért a keresett valószínűség:

$p=\frac{230}{680}\approx \mathbf{0,338}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

27) Egy iskola alapítványi bálján a korábban szokásos tombolahúzás helyett egy egyszerű lottóhúzást szerveznek. A szelvényt vásárolóknak az első tíz pozitív egész szám közül kellett ötöt megjelölniük. Húzáskor öt számot sorsolnak ki (az egyszer már kihúzott számokat nem teszik vissza). Egy lottószelvény 200 Ft-ba kerül. Egy telitalálatos szelvénnyel 5000 Ft értékű, egy négytalálatos szelvénnyel 1000 Ft értékű, az alapítvány által vásárolt könyvutalványt lehet nyerni. Négynél kevesebb találatot elérő szelvénnyel nem lehet nyerni semmit.

a) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a legkisebb kihúzott szám 3. (3 pont)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a számokat növekvő sorrendben húzzák ki? (4 pont)

Az *a*) és *b*) kérdésekre adott válaszait három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

c) Számolással igazolja, hogy (három tizedesjegyre kerekítve) a telitalálat valószínűsége 0,004, a négyes találat valószínűsége 0,099. (4 pont)

d) Ha a húzás előtt 240 szelvényt adtak el, akkor mekkora az alapítvány lottóhúzásból származó hasznának várható értéke? (5 pont)

Megoldás:

a) Az összes eset száma $\binom{10}{5}(=252)$, (1 pont)

a kedvező esetek száma $\binom{7}{4}(=35)$, (1 pont)

így a kérdéses valószínűség: $p=\dfrac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{5}}\approx\mathbf{0,139}$ (A 13,9% is elfogadható válaszként) (1 pont)

b) Bármelyik öt szám húzása esetén bármelyik húzási sorrend egyenlően valószínű. (1 pont)

Adott öt szám esetén ezek száma $5!(=120)$. (1 pont)

Ezek közül egy húzási sorrend növekvő. (1 pont)

A keresett valószínűség $p=\dfrac{1}{5!}\approx\mathbf{0,008}$. (1 pont)

c) A telitalálat valószínűsége: $p_5=\dfrac{1}{\binom{10}{5}}=\dfrac{1}{252}\approx\mathbf{0,004}$ (1 pont)

Négy találat esetén a kedvező esetek száma: $\binom{5}{4}\cdot\binom{5}{1}=25$, (2 pont)

így a négy találat valószínűsége: $p_4=\dfrac{25}{\binom{10}{5}}=\dfrac{25}{252}\approx\mathbf{0,099}$ (1 pont)

d) A szelvények eladásából származó bevétel: $240\cdot200=48000$ (Ft) (1 pont)

Egy szelvényre vonatkozóan a kiadás várható értéke:

$p_5\cdot5000+p_4\cdot1000=0,004\cdot5000+0,099\cdot1000=119$ (Ft) (2 pont)

Az eladott összes szelvényre a kiadás várható értéke: $240\cdot119=28560$ (Ft) (1 pont)

Így az alapítvány hasznának várható értéke: $48000-28560=$ **19440 Ft** (1 pont)

Összesen: 16 pont

28) Egy körvonalon felvettünk öt pontot, és behúztuk az általuk meghatározott 10 húrt. Jelölje a pontokat pozitív körüljárási irányban rendre *A*, *B*, *C*, *D* és *E*.

a) Véletlenszerűen kiválasztunk 4 húrt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek a húrok egy konvex négyszöget alkotnak? (4 pont)

b) Hányféleképpen juthatunk el a húrok mentén *A*-ból *C*-be, ha a *B*, *D*, és *E* pontok mindegyikén legfeljebb egyszer haladhatunk át? (Az *A* pontot csak az út kezdetén, a *C* pontot csak az út végén érinthetjük.) (4 pont)

c) A 10 húr mindegyikét kiszínezzük egy-egy színnel, pirosra vagy sárgára, vagy zöldre. Hány olyan színezés van, amelyben mindhárom szín előfordul? (8 pont)

Megoldás:

a) Akkor kapunk négy megfelelő húrt, ha a végpontjaik között az ötből pontosan négy különböző szerepel. A körüljárási iránynak megfelelően minden kiválasztott pontnégyeshez pontosan egy konvex négyszög tartozik. (1 pont)
Öt pontból négyet ötféleképpen lehet kiválasztani, ezért a kedvező esetek száma 5. (1 pont)
Az összes eset száma: $\binom{10}{4}$. (1 pont)
A keresett valószínűség: $\boldsymbol{p = \frac{5}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{42} (\approx 0{,}024)}$. (1 pont)

b) Ha mindhárom pontot érintjük, akkor $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ lehetőség van. (1 pont)
Ha csak két ponton megyünk át, akkor a lehetőségek száma $3 \cdot 2 = 6$. (1 pont)
Ha csak egy ponton megyünk át, akkor 3 lehetőség van, de közvetlenül is átmehetünk *A*-ból *C*-be, ez még 1 eset. (1 pont)
Az összes lehetséges útvonalak száma tehát: $6 + 6 + 3 + 1 = \mathbf{16}$. (1 pont)

c) Az összes lehetséges esetből kivonjuk azokat, amikor csak 2 vagy 1 szín szerepel. (1 pont)
Mindegyik húrt háromféle színre festhetjük, ezért az összes lehetőség száma $3^{10} (= 59049)$. (1 pont)
Ha két színt használunk a háromból, akkor az adott két szín segítségével mindegyik húrt kétféleképpen színezhetjük ki, a tíz húrt pedig 2^{10}-féleképpen. (1 pont)
De ebbe beleszámoltuk azt az esetet is, amikor csak egyetlen színt használunk, ezért a fenti értéket 2-vel csökkenteni kell: $2^{10} - 2$. (1 pont)
A megadott 3 színből kettőt 3-féleképpen választhatunk ki, így a pontosan két színt használó színezések száma $3 \cdot (2^{10} - 2) (= 3066)$. (1 pont)
Pontosan egy színnel 3-féleképpen színezhetjük ki a húrokat. (1 pont)
Tehát a lehetséges színezések száma: $3^{10} - [3 \cdot (2^{10} - 2)] - 3 = \mathbf{55980}$ (2 pont)
(Szintén jó megoldás, hogyha összeszámoljuk az eseteket aszerint, hogy az egyes színekkel hány húrt színezünk ki.)

Összesen: 16 pont

29) Egy üzemben olyan digitális műszert gyártanak, amely kétféle adat mérésére alkalmas: távolságot és szöget lehet vele meghatározni. A gyártósor meghibásodott, de ezt hosszabb ideig nem vették észre. Ezalatt sok mérőeszközt gyártottak, ám ezeknek csak a 93%-a adja meg hibátlanul a szöget, a 95%-a méri hibátlanul a távolságot, sőt a gyártott mérőeszközök 2%-a mindkét adatot hibásan határozza meg.

a) Az egyik minőségellenőr 20 darab műszert vizsgál meg visszatevéses mintavétellel a meghibásodási időszak alatt készült termékek közül. Mekkora annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 darab hibásat talál közöttük? (Egy műszert hibásnak tekintünk, ha akár a szöget, akár a távolságot hibásan méri.) (7 pont)

Vízszintes, sík terepen futó patak túlpartján álló fa magasságát kell meghatároznunk. A síkra merőlegesen álló fát megközelíteni nem tudjuk, de van egy kisméretű, digitális műszerünk, amellyel szöget és távolságot is pontosan tudunk mérni. A patakparton kitűzzük az *A* és *B* pontokat, amelyek 10 méterre vannak egymástól. Az *A* pontból 55°-os, a *B*-ből 60°-os emelkedési szög alatt látszik a fa teteje. Szögméréssel még megállapítjuk, hogy $ATB\sphericalangle = 90^\circ$, ahol *T* a fa „talppontja”.

b) Milyen magas a fa? (9 pont)

Megoldás:

a) A műszerek 7%-a hibásan méri a szöget, 5%-a pedig hibásan méri a távolságot. (1 pont)

Mivel a műszerek 2%-a mindkét adatot hibásan méri, ezért a hibás műszerek aránya:

$5+7-2=10\,\%$ (1 pont)

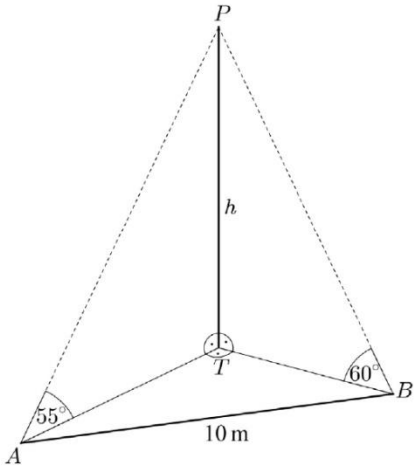
Egy hibátlan műszer választásának valószínűsége tehát 0,9. (1 pont)

Akkor lesz köztük legfeljebb 2 hibás, ha a hibás műszerek száma 0, 1 vagy 2. (1 pont)

Annak a valószínűsége tehát, hogy a 20 kiválasztott műszer között legfeljebb 2 hibás lesz: $0{,}9^{20}+\binom{20}{1}\cdot 0{,}9^{19}\cdot 0{,}1+\binom{20}{2}\cdot 0{,}9^{18}\cdot 0{,}1^2$. (2 pont)

A kérdezett valószínűség megközelítőleg **0,677**. (1 pont)

b) Jó ábra felrajzolása (2 pont)



Az *ATP* háromszögből: $AT=\dfrac{h}{\operatorname{tg}55^\circ}\approx 0{,}700h$ (1 pont)

A *BTP* háromszögből: $BT=\dfrac{h}{\operatorname{tg}60^\circ}\approx 0{,}577h$ (1 pont)

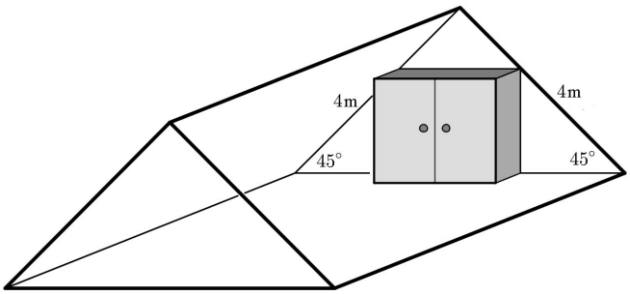
Az *ATB* derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel adódik: (1 pont)

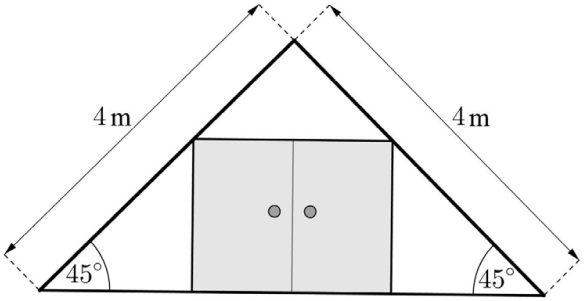
$\dfrac{h^2}{\operatorname{tg}^2 55^\circ}+\dfrac{h^2}{\operatorname{tg}^2 60^\circ}=100$, (1 pont)

Innen $\boldsymbol{h\approx 11}$. (2 pont)

A fa magassága tehát körülbelül 11 méter. (1 pont)

30) Kovács úr a tetőterébe egy téglatest alakú beépített szekrényt készíttet. Két vázlatot rajzolt a terveiről az asztalosnak, és ezeken feltüntette a tetőtér megfelelő adatait is. Az első vázlat „térhatású”, a második pedig elölnézetben ábrázolja a szekrényt.





A tetőtér adottságai miatt a szekrény mélységének pontosan 60 cm-nek kell lennie.

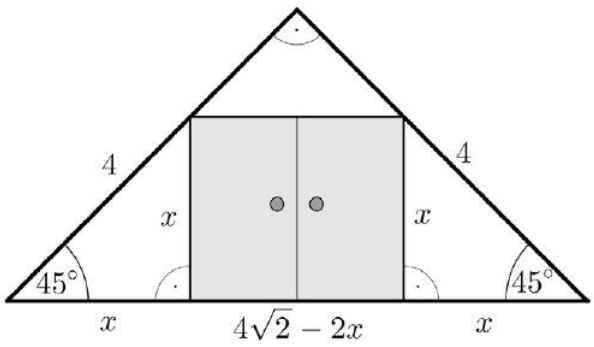
a) Mekkora legyen a szekrény vízszintes és függőleges mérete (azaz a szélessége és a magassága), ha a lehető legnagyobb térfogatú szekrényt szeretné elkészíttetni? (A magasság, a szélesség és a mélység a szekrény külső méretei, Kovács úr ezekkel számítja ki a térfogatot.) (8 pont)

A szekrény elkészült. Az akasztós részébe Kovács úr vasárnap este 7 inget tesz be, a hét minden napjára egyet-egyet. Az ingek között van 2 fehér, 2 világoskék és 3 sárga. Reggelente nagyon siet, ezért Kovács úr csak benyúl a szekrénybe, és anélkül, hogy odanézne, véletlenszerűen kivesz egy inget.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a hét első három napján vagy három különböző színű vagy három egyforma színű inget választ? (Ha valamelyik nap viselt egy inget, azt utána már nem teszi vissza a szekrénybe.) (8 pont)

Megoldás:

a) Ha a szekrény magassága x méter, akkor szélessége az ábrán látható egyenlő szárú háromszögek miatt $4\sqrt{2}-2x$. (2 pont)



A térfogata pedig: $V=0,6x\left(4\sqrt{2}-2x\right)$, amennyiben $0<x<2\sqrt{2}$. (1 pont)

Az $x\mapsto 0,6x\left(4\sqrt{2}-2x\right)$ másodfokú függvénynek két zérushelye van, a 0 és a $2\sqrt{2}$. (1 pont)

Így a negatív főegyüttható miatt ennek a függvénynek a maximuma a két zérushelye számtani közepénél, az $x=\sqrt{2}$ helyen lesz. (2 pont)

Mivel a $\sqrt{2}$ eleme a feladat értelmezési tartományának, ezért a legnagyobb térfogatú szekrény magassága körülbelül **1,41 méter**, szélessége pedig körülbelül **2,83 méter** lesz. (2 pont)

b) Az azonos színű ingeket megkülönböztetve az első három napon $7\cdot 6\cdot 5=210$ különböző lehetőség van a három ing kiválasztására. (1 pont)
Kedvező esemény az, ha valamilyen sorrendben mindegyik színből pontosan egyet vagy három sárga inget választott Kovács úr. (1 pont)
Egy adott színsorrendben $2\cdot 2\cdot 3=12$ különböző módon lehet három inget kiválasztani. (1 pont)
Három adott szín sorrendje 3!-féle lehet, tehát három különböző színű inget $2\cdot 2\cdot 3\cdot 3!=72$ különböző módon választhat ki Kovács úr. (2 pont)
A három sárga inget 3! különböző sorrendben választhatja ki. (1 pont)
A kedvező esetek száma:
$2\cdot 2\cdot 3\cdot 3!+3!=78$. (1 pont)
A kérdezett valószínűség tehát:
$\frac{78}{210}=\frac{13}{35}\approx \mathbf{0,371}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

31) Egy kereskedőcég bevételei két forrásból származnak: bolti árusításból és internetes eladásból. Ebben az évben az internetes árbevétel 70%-a volt a bolti árbevételnek. A cég vezetői arra számítanak, hogy a következő években az internetes eladásokból származó árbevétel évente az előző évi internetes árbevétel 4%-ával nő, a bolti eladásokból származó árbevétel viszont évente az előző évi bolti árbevétel 2%-ával csökken.

a) Számítsa ki, hány év múlva lesz a két forrásból származó árbevétel egyenlő! (8 pont)

A cég ügyfélszolgálatának hosszú időszakra vonatkozó adataiból az derült ki, hogy átlagosan minden nyolcvanadik vásárló tér vissza később valamilyen minőségi kifogással.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy 100 vásárló közül legfeljebb kettőnek lesz később minőségi kifogása! (6 pont)

Megoldás:

a) Ha a bolti eladásokból származó idei árbevétel b (Ft), akkor az internetes eladásokból származó árbevétel jelenleg $0,7b$ (Ft). $(b>0)$ (1 pont)
Ha a bevételek egyenlősége x év múlva következik de, akkor $1,04^x\cdot 0,7=0,98^x\cdot b$, (1 pont)
amiből (a pozitív b-vel való osztás után) $1,04^x\cdot 0,7=0,98^x$. (1 pont)
Mindkét oldal tízes alapú logaritmusát véve és a logaritmus azonosságait felhasználva:
$x\lg 1,04+\lg 0,7=x\lg 0,98$ (2 pont)
Ebből $x=\frac{\lg 0,7}{\lg 0,98-\lg 1,04}(\approx 6)$ (1 pont)
A két forrásból származó árbevétel **6 év múlva** lesz (körülbelül) egyenlő. (1 pont)
Ellenőrzés (1 pont)

b) Annak a valószínűsége, hogy egy vevő reklamál: $\frac{1}{80}$,

annak a valószínűsége, hogy nem reklamál: $\frac{1}{79}$ (1 pont)

$P(\text{legfeljebb 2 reklamál}) = P(\text{senki nem reklamál}) +$ (1 pont)

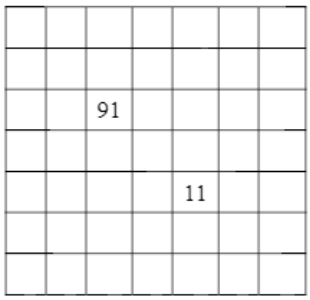
$P(1 \text{ reklamál}) + P(2 \text{ reklamál}) =$

$\left(\frac{79}{80}\right)^{100} + \binom{100}{1}\left(\frac{1}{80}\right)\left(\frac{79}{80}\right)^{99} + \binom{100}{2}\left(\frac{1}{80}\right)^2\left(\frac{79}{80}\right)^{98} \approx$ (3 pont)

$\mathbf{(\approx 0,2843 + 0,3598 + 0,2255) \approx 0,87}$ (1 pont)

Összesen: 14 pont

32) Éva egy 7×7-es táblázat bal felső mezőjétől kezdve, balról jobbra haladva, sorról sorra beírta egy számtani sorozat első 49 tagját úgy, hogy a tagok sorrendjét nem változtatta meg. (A sorozat 1. tagja a bal felső sarokba került, a 8. tag a második sor első mezőjébe, a 49. tag pedig a jobb alsó sarokban áll.)



a) Mennyi a táblázatba írt 49 szám összege, ha Éva a harmadik sor harmadik mezőjébe 91-et, az ötödik sor ötödik mezőjébe pedig a 11-et írta? (5 pont)

Péter a táblázat minden sorából kiválasztja a számtani sorozat egy-egy tagját úgy, hogy a hét kiválasztott szám közül semelyik kettő ne legyen egy oszlopban.

b) Igazolja, hogy akárhogyan is választja ki Péter így a számokat, a hét szám összege minden esetben ugyanannyi lesz! (6 pont)

c) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a 91 és a 11 is a Péter által kiválasztott számok között lesz! (5 pont)

Megoldás:

a) $a_{17} = 91$ és $a_{33} = 11$ (1 pont)

Ebből $d = -5$, (1 pont)

majd $a_1 = 171$. (1 pont)

$S_{49} = \frac{\left[2 \cdot 171 + (49-1) \cdot (-5)\right] \cdot 49}{2} =$ (1 pont)

= 2499 (1 pont)

b) Adjuk össze a sorozat főátlóban álló tagjait! (Ezek összege 357.) (1 pont)
Ha a táblázat két kiválasztott sorában felcseréljük, hogy melyik sorban melyik oszlopból választottuk ki a sorozat tagját, (1 pont)
akkor (ha az érintett oszlop sorszáma között k a különbség) az egyik oszlopban $k \cdot d$-vel nő, a másik oszlopban $k \cdot d$-vel csökken a kiválasztott tag értéke. (2 pont)
Tehát a sorozat hét kiválasztott tagjának összege a két tag cseréje után ugyanannyi marad, mint amennyi a csere előtt volt. (1 pont)
Mivel a sorozat **főátlóban álló tagjaiból kiindulva, két-két tag cserélgetésével bármelyik kiválasztott számheteshez eljuthatunk, a tagok összege bármely hét tag (leírtak szerinti) kiválasztása esetén ugyanannyi (357).** (1 pont)

c) Péter összesen $7! = 5040$-féleképpen választhat ki a táblázatból számokat a megadott szabály szerint. (1 pont)
Ha a 91 és a 11 is a kiválasztott számok közt van, akkor az első sorból 5-féleképpen választhat, ezután a másodikból 4-féleképpen, a negyedikből 3-féleképpen, a hatodikból 2-féleképpen, a hetedikből pedig1-féleképpen. (1 pont)
Ez $5! = 120$ lehetőség. (1 pont)
A kérdéses valószínűség így $\frac{120}{5040} \approx$ (1 pont)
$\approx 0,024$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

33) Szétgurult 20 darab tojás az asztalon. Közülük 16 tojás ép maradt, de 4 tojásnak alig észrevehetően megrepedt a héja. Bori ezt nem vette észre, így visszarakosgatja a tojásokat a két tojástartóba. Először a sárga tartóba tesz tízet, majd a fehérbe a többit.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a 4 hibás tojás ugyanabba a tartóba kerül? (5 pont)

Csenge sokszor vásárol tojásokat a sarki üzletben. Megfigyelése szerint a tojások közül átlagosan minden ötvenedik törött. (Ezt úgy tekintjük, hogy a tojások mindegyike 0,02 valószínűséggel törött.)

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy 10 tojást tartalmazó dobozban egynél több törött tojást talál Csenge? (5 pont)

Egy csomagolóüzembe két termelő szállít tojásokat: az összes tojás 60%-a származik az *A*, 40%-a a *B* termelőtől. Az *A* termelő árujának 60%-a első osztályú, 40%-a másodosztályú, a *B* termelő árujának 30%-a első osztályú és 70%-a másodosztályú. Az összes beszállított tojás közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, és azt első osztályúnak találjuk.

c) Mekkora a valószínűsége, hogy az *A* termelő árujából való a kiválasztott tojás? (6 pont)

Megoldás:

a) A 4 hibás és 6 ép tojás a sárga tojástartóba $\binom{4}{4}\cdot\binom{16}{6}=8008$ -féleképpen kerülhet. (1 pont)

Az összes eset száma: $\binom{20}{10}=184756$ (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy mind a 4 tojás a sárga dobozba kerül: $p=\dfrac{\binom{4}{4}\cdot\binom{16}{6}}{\binom{20}{10}}\approx 0{,}0433$. (1 pont)

Mivel a 4 hibás tojás a fehér tojástartóba is kerülhet, ezért a kérdéses valószínűség ennek kétszerese, (1 pont)

azaz közelítőleg **0,087.** (1 pont)

b) Annak a valószínűsége, hogy egy tojás ép: 0,98. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy Csenge nem talál törött tojást a dobozban: $0{,}98^{10}\,(\approx 0{,}817)$. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy Csenge egy darab törött tojást talál a dobozban: $\binom{10}{1}\cdot 0{,}98^{9}\cdot 0{,}02\,(\approx 0{,}167)$. (1 pont)

Így a kérdéses valószínűség: $p=1-0{,}98^{10}-10\cdot 0{,}98^{9}\cdot 0{,}02\approx$ (1 pont)

$\approx$ **0,016.** (1 pont)

c) Az *A* beszállítótól származó első osztályú tojások száma az összesnek 36%-a. (1 pont)

A *B* beszállítótól származó első osztályú tojások száma az összesnek 12%-a. (1 pont)

Az összes beszállított tojásnak a 48%-a első osztályú. (1 pont)

Az első osztályú tojások $\dfrac{0{,}36}{0{,}48}\cdot 100\%=75\%$ -a származik az *A* beszállítótól. (2 pont)

A kérdezett valószínűség tehát **0,75.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

34) Dani sportlövészedzés jár, ahol koronglövészetet tanul. AZ első félév végén kiderült, hogy még elég bizonytalanul céloz: húsz lövésből átlagosan ötször találja el a repülő agyagkorongot. (Tekintsük ezt úgy, hogy minden lövésnél $\dfrac{5}{20}$ az esélye annak, hogy Dani találatot ér el.)

a) Mekkora annak az esélye az első félév végén, hogy nyolc egymás után leadott lövésből legalább háromszor célba talál? Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

b) Az első félév végén legalább hány egymás után leadott lövés kell ahhoz, hogy Dani legalább 95%-os eséllyel legalább egyszer eltalálja a repülő korongot? (6 pont)

A rendszeres edzéseknek köszönhetően Dani eredményessége javult. A második félév végén már 0,72 volt annak a valószínűsége, hogy három egymás után leadott lövésből pontosan egy vag pontosan két találatot ér el.

c) Számítsa ki, hogy a második félév végén mekkora valószínűséggel ér el találatot egy lövésből Dani! (5 pont)

Megoldás:

a) P(legalább 3 találat) = 1 – [P(0 találat) + P(1 találat) + P(2 találat)] (1 pont)

P(0 találat) $= 0,75^8 \,(\approx 0,1001)$ (1 pont)

P(1 találat) $\binom{8}{1} \cdot 0,25 \cdot 0,75^7 \,(\approx 0,2670)$ (1pont)

P(2 találat) $\binom{8}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,76^6 \,(\approx 0,3115)$ (1 pont)

P(legalább 3 találat) **≈ 0,321** (1 pont)

b) P(legalább 1 találat) = 1 – P(0 találat) (1 pont)

$1–,75^n \geq 0,95$ (1 pont)

rendezve $0,75^n \leq 0,05$ (1 pont)

$n \cdot \lg 0,75 \leq \lg 0,05$ (1 pont)

(Mivel $\lg 0,75 < 0$, így) $n \geq \dfrac{\lg 0,05}{\lg 0,75} \approx 10,41$ (1 pont)

Daninak legalább **11 lövésre** van szüksége. (1 pont)

c) (Ha a második félév végén Dani egy lövésből p való- színűséggel ért el találatot, akkor három lövésből a pontosan egy vagy pontosan két találat valószínűsége) P(1 találat) + P(2 találat) $= 3p^2(1-p) + 3p(1-p)^2 =$ (1 pont)

$= 3p(1-p) = 0,72$ (1 pont)

$0 = 3p^2 - 3p + 0,72$ (1 pont)

Ebből p = 0,4, vagy p = 0,6 (1 pont)

A második félév végén tehát egy lövésből Dani **0,4 vagy 0,6 valószínűséggel** (azaz $\dfrac{8}{20}$ vagy $\dfrac{12}{20}$ eséllyel) ért el találatot. (1 pont)

35) A *H* halmaz egy nyolcpontú egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a *H* elemeire vonatkozik: Ha egy (nyolcpontú egyszerű) gráf minden pontjának fokszáma legalább 3, akkor a gráf összefüggő.

a) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását a *H* elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

Az *ABCDE* konvex ötszög csúcsait piros, kék vagy zöld színűre színezzük úgy, hogy bármely két szomszédos csúcsa különböző színű legyen.

c) Hány különböző színezés lehetséges? (Az ötszög csúcsait megkülönböztetjük egymástól.) (5 pont)

Egy négypontú teljes gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztott négy élt kiszínezünk zöldre (teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.)

d) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a zöldre színezett élek a gráf egy négypontú körének élei! (5 pont)

Megoldás:

a) Az állítás hamis. (1 pont)
Ellenpélda: a nyolcpontú egyszerű gráf két négypontú teljes gráf egyesítése. (2 pont)

b) A megfordítás: Ha egy (nyolcpontú egyszerű) gráf összefüggő, akkor a gráf minden pontjának fokszáma legalább 3. (1 pont)
A Zöld Iskola 8 tanulójának egymás közötti mérkőzései mindig a 8 tanuló valamelyikének győzelmével végződtek. (1 pont)
ez $\binom{8}{2}(=28)$ győzelmet jelent. (1 pont)

c) Rögzítsük *A* és *B* színét, például pirosra és kékre. (1 pont)
Ekkor *C*, *D* és *E* (ebben a sorrendben) a következőképpen színezhető: pkz, pzk, zpz, zpk, zkz. (2 pont)
Mivel *A* és *B* színe $(3\cdot 2=)6$-féleképpen választható meg, (1 pont)
ezért összesen $(5\cdot 6=)$**30** különböző színezés lehetséges. (1 pont)

d) Egy négypontú teljes gráfnak $\binom{4}{2}=6$ éle van. (1 pont)
Ezek közül 4 élt $\binom{6}{4}=15$-féleképpen lehet kiválasztani. (Ez az összes esetek száma.) (1 pont)

Ha a zöld élek kört alkotnak, akkor a 2 nem zöld él a gráf két-két különböző pontját köti össze. (1 pont)

A két nem zöld él kiválasztása 3-féleképpen történhet; ez a kedvező esetek száma. (Ha a gráf csúcsai *A*, *B*, *C*, *D*, akkor a megfelelő kiválasztások: *AB-CD*, *AC-BD*, *AD-BC*.) (1 pont)

A keresett valószínűség: $\boldsymbol{p = \frac{3}{15} = 0,2}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

36) Egy dobozban 6 fehér és 4 piros golyó van. A 10 golyó közül véletlenszerűen kiválasztanak 5 golyót. Egy tanuló ezt állítja: *„Annak a valószínűsége, hogy az 5 kihúzott golyó között 2 fehér lesz, megegyezik annak a valószínűségével, hogy 4 fehér lesz közöttük.”*

a) Mutassa meg, hogy ha a golyókat visszatevés nélkül húzzák ki, akkor a tanuló ki-jelentése igaz! (5 pont)

b) A valószínűségek kiszámításával mutassa meg, hogy ha az 5 golyót visszatevéssel húzzák ki, akkor a tanuló kijelentése nem igaz!(5 pont)

Megoldás:

a) Az összes eset száma $\binom{10}{5}(=252)$. (1 pont)

Az (egyszerre) kihúzott 5 golyó között 2 fehér golyó $\binom{6}{2}\binom{4}{3}$ különböző módon fordulhat elő. (1 pont)

Az (egyszerre) kihúzott 5 golyó között 4 fehér golyó $\binom{6}{4}\binom{4}{1}$ különböző módon fordulhat elő. (1pont)

A két valószínűség: $\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{3}}{\binom{10}{5}}$, illetve $\frac{\binom{6}{4}\binom{4}{1}}{\binom{10}{5}}$. (1 pont)

Ez a két valószínűség egyenlő $\left(\frac{5}{12} \approx 0,238\right)$, tehát **a tanuló kijelentése igaz**.

b) A fehér golyó húzásának (állandó) valószínűsége 0,6, a piros golyóé 0,4.(1 pont)

2 fehér golyó húzásának a valószínűsége $\binom{5}{2} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^3$ (1 pont)

4 fehér golyó húzásának a valószínűsége $\binom{5}{4} \cdot 0,6^4 \cdot 0,4$ (1 pont)

A két valószínűség (három tizedesjegyre kerekítve) 0,230, illetve 0,259.(1 pont)
A két valószínűség különbözik, **a tanuló kijelentése ebben az esetben nem igaz.** (1 pont)

Összesen 10 pont

37)

a) Legyen *G* egy nyolcpontú egyszerű gráf, amelynek összesen 9 éle van. Igazolja, hogy *G* csúcsai között biztosan van olyan, amelynek a fokszáma legalább 3. (4 pont)

b) Az *A, B, C, D, E, F, G, H* pontok egy szabályos nyolcszög csúcsai. Megrajzoljuk a nyolcszög oldalait és átlóit. A megrajzolt szakaszok közül véletlenszerűen kiválasztunk négyet. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy mind a négy kiválasztott szakasz az *A* csúcsból indul ki! (6 pont)

c) Nyolc sakkozó részére egyéni bajnokságot szerveznek. Hányféleképpen készíthető el az első forduló párosítása, ha ebben a fordulóban mindenki egy mérkőzést játszik? (Két párosítást különbözőnek tekintünk, ha az egyik tartalmaz olyan mérkőzést, amelyet a másik nem.) (6 pont)

Megoldás:

a) Ha minden csúcs fokszáma legfeljebb 2 lenne, akkor *G*-nek összesen legfeljebb 8 éle lehetne. (2 pont)
Mivel *G*-nek 9 éle van, ezért ellentmondásra jutottunk. (1 pont)
A csúcsok között tehát van olyan, amelyiknek a fok-száma legalább 3. (Az állítást bizonyítottuk.) (1 pont)

b) Egy szabályos nyolcszög oldalai és átlói számának összege 28. (1 pont)
Egy csúcsból összesen 7 szakasz indul. (1 pont)
Annak a valószínűsége, hogy az első, második, harmadik, majd negyedik kiválasztott szakasz is az *A* csúcsból indul, rendre $\frac{7}{28}, \frac{6}{27}, \frac{5}{26}$, majd $\frac{4}{25}$. (2 pont)
A kérdéses valószínűség ezek szorzata, tehát $\frac{7}{28}\cdot\frac{6}{27}\cdot\frac{5}{26}\cdot\frac{4}{25}=$ (1 pont)
$\mathbf{\frac{1}{585}\left(\approx 0{,}0017\right)}$. (1 pont)

c) Válasszunk ki tetszőlegesen egy sakkozót. (1 pont)
Az ő ellenfelét (a többi sakkozó közül) 7-féleképpen választhatjuk ki. (1 pont)
Folytatva ezt az eljárást a maradék hat sakkozó közül válasszunk ki tetszőlegesen egyet, az ő ellenfelét 5-féleképpen választhatjuk ki, majd a maradék négy sakkozó közül kiválasztva egyet, az ő ellenfelét 3-féleképpen választhatjuk ki. A negyedik párost az ezek után megmaradt két sakkozó alkotja (ez 1 lehetőség). (2 pont)
(Ez az eljárás minden lehetőséget megad, és mind-egyiket pontosan egyszer, ezért) a lehetséges párosítások száma a fentiek szorzata, azaz (1 pont)

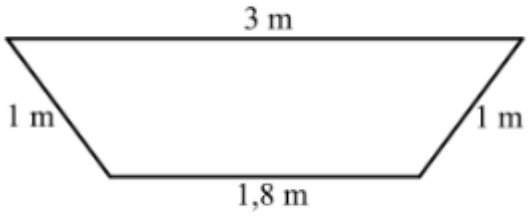
$7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = \mathbf{105}$ (1 pont)

Összesen16 pont

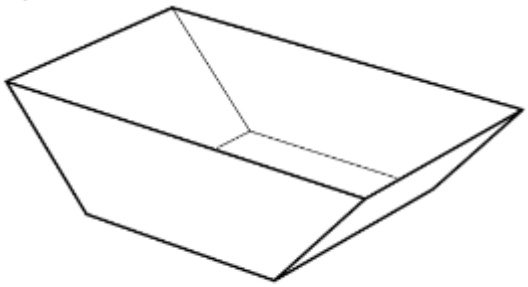
38) Egy kisüzemi meggymagozó-adagoló gép 0,01 valószínűséggel nem távolítja el a magot a meggyből, mielőtt a meggyszemet az üvegbe teszi. A magozógépen áthaladt szemek közül 120-120 darab kerül egy-egy üvegbe.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy kiválasztott üvegben legalább 2 darab magozatlan szem van! (5 pont)

A termelés során keletkezett hulladékot nagy méretű konténerbe gyűjtik, melyet minden nap végén kiürítenek és kitisztítanak. A konténer egyenes hasáb alakú. A hasáb magassága 2 m, alaplapja húrtrapéz, melynek méretei az 1. ábrán láthatók. A konténert vízszintes felületen, az 1,8 m×2 m-es (tégla-lap alakú) lapjára állítva helyezik el (lásd a 2. ábrát).



1. ábra



2. ábra

b) Számítsa ki a hasáb térfogatát! Határozza meg, hogy milyen magasan áll a konténerben a tisztításához beletöltött 2,7 m³ térfogatú folyadék! (11 pont)

Megoldás:

a) 0,99 annak a valószínűsége, hogy egy adott szem meggyből az automata eltávolítja a magot. (1 pont)

A komplementer esemény (0 vagy 1 mag kerül az üvegbe) valószínűsége $0{,}99^{120} + \binom{120}{1} \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99^{119}$. (2 pont)

Ezért a kérdezett valószínűség: $1 - 0{,}99^{120} - \binom{120}{1} \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99^{119}$, (1 pont)

ami körülbelül **0,34**. (1pont)

b) (A hasáb alaplapja az *ABCD* húrtrapéz.)

Az ábra jelöléseit használva, az APD derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel: $m=\sqrt{1^2-0{,}6^2}=0{,}8$ (m). (1pont)



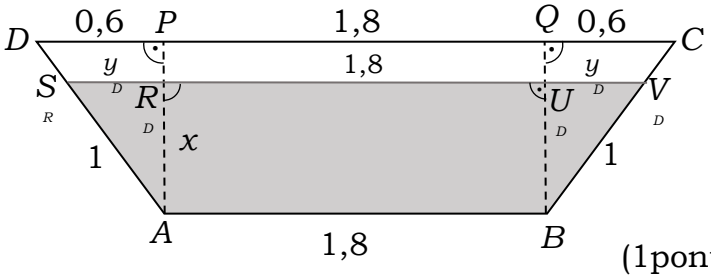
A hasáb alaplapjának (az *ABCD* trapéznak) a területe:
$\left(\frac{1{,}8+3}{2}\cdot 0{,}8=\right)1{,}92$ (m²), (1 pont)

tehát a hasáb (a konténer) térfogata: (=·292,1) 3,84 m³. (1pont)

A tisztító folyadék x méter magasságban áll a konténerben. A folyadék egy olyan szimmetrikus trapéz alapú egyenes hasábot tölt meg, (1 pont)

amelynek a magassága 2 méter, az alaplapjának a területe pedig $\left(\frac{2{,}7}{2}=\right)1{,}35$ (m²). (1 pont)

Az (ábra szerinti) *APD* és *ARS* derékszögű háromszögek hasonlósága miatt $\frac{SR}{AR}=\frac{DP}{AP}$,



(1 pont)

azaz $\frac{y}{x}=\frac{0{,}6}{0{,}8}=\frac{3}{4}$. (1pont)

$SV=1{,}8+2y=1{,}8+1{,}5x$, ezért (mivel az *ABVS* trapéz területe 1,35 m²) $\frac{1{,}8+1{,}8+1{,}5x}{2}\cdot x=1{,}35$ (1pont)

Ebből $1{,}5x^2+3{,}6x-2{,}7=0$, (1 pont)

amelynek a gyökei 0,6 és –3. (1 pont)

(A –3 nem felel meg, tehát) **a tisztító folyadék 0,6 méter magasságban áll a konténerben.** (1pont)

Összesen16 pont