MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK
EMELT SZINT

Trigonometria

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Igazolja, hogy ha egy háromszög szögeire érvényes az alábbi összefüggés:
$$\sin\alpha : \sin\beta = \cos(\alpha+\gamma) : \cos(\beta+\gamma),$$
akkor a háromszög egyenlő szárú és derékszögű! (14 pont)

2) Jelölje H a $[0;2\pi[$ intervallumot. Legyen A a H azon x elemeinek halmaza, amelyekre teljesül, hogy $2^{\sin x} > 1$ egyenlőtlenség, és B a H azon részhalmaza, amelynek x elemeire teljesül a $2^{\cos x} < 1$ egyenlőtlenség.
Adja meg az A halmazt, B halmazt és az $A \setminus B$ halmazt! (13 pont)

3) Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor koordinátái a t valós paraméter függvényében:
$\underline{a}(\cos t;\sin t)$ és $\underline{b}(\sin^2 t;\cos^2 t)$

a) Adja meg $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok koordinátáinak pontos érékét, ha t az $\frac{5\pi}{6}$ számot jelöli! (2 pont)

b) Mekkora az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok hajlásszöge $t=\frac{5\pi}{6}$ esetén? (A keresett szöget fokban, egészre kerekítve adja meg!) (5 pont)

c) Határozza meg t olyan valós értékeit, amelyek esetén $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok merőlegesek egymásra! (7 pont)

4) Hány $(x;y)$ rendezett valós számpár megoldása van az alábbi egyenletrendszernek, ha x és y is a $[0;2\pi]$ zárt intervallum elemi?
$$\left.\begin{aligned}\sin x\cdot\cos y &= 0\\ \sin x+\sin^2 y &= \frac{1}{4}\end{aligned}\right\}$$
(16 pont)

5) Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x és y valós számok, továbbá $x>0, x\neq 1$ és $y>0, y\neq 1$.
$$\left.\begin{aligned}\log_x y+\log_y x &= 2\\ \sin(2x+3y)+\sin(4x+y) &= 1\end{aligned}\right\}$$

6) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!
$$\sqrt{\sin^2 x-4\sin x+4}+\sqrt{\sin^2 x+4\sin x+4}=\sqrt{\sin^2 x+7\sin x+12{,}25}$$
(16 pont)

7) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!
$$\left.\begin{aligned}\log_x\left(x^2y^3\right)+\log_y\left(x^3y\right) &= 9\\ \cos(x+y)+\cos(x-y) &= 0\end{aligned}\right\}$$
(16 pont)

8) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!
$$\cos 2x+4\sin^2 x-5\sin x-4=0$$
(12 pont)

9)

a) Igazolja, hogy a $\left(-\frac{1}{2}\right)$, a 0 és a 3 is gyöke a $2x^3-5x^2-3x=0$ egyenletnek, és az egyenletnek ezeken kívül más valós gyöke nincs! (5 pont)

b) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$2\cos^3 x-5\cos^2 x-3\cos x=0$ (6 pont)

c) Mutassa meg, hogy a $2\cdot 8^x+7\cdot 4^x+3\cdot 2^x=0$ egyenletnek nincs valós gyöke! (5 pont)

10) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $2\sin x-2\sin^2 x=\cos^2 x$ (5 pont)

b) $25^{\lg x}=5+4\cdot 5^{\lg x}$ (7 pont)

11) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sin x-\cos^2 x=-1$ (6 pont)

b) $\big|x-|x|\big|=2x+1$ (7 pont)