MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI
EMELT SZINT

Térgeometria

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Egy négyzet alapú egyenes hasáb alapéle 18 egység, testátlója $36\cdot\sqrt{2}$ egység.

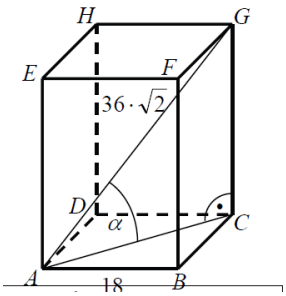
a) Mekkora szöget zár be a testátló az alaplap síkjával? (4 pont)

b) Hány területegység a hasáb felszíne? (A felszín mérőszámát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (3 pont)

c) Az alapél és a testátló hosszát – ebben a sorrendben - tekintsük egy mértani sorozat első és negyedik tagjának! Igazolja, hogy az alaplap átlójának hossza ennek a sorozatnak a második tagja! (4 pont)

Megoldás:

a)



Az ACG háromszögben a $GAC\sphericalangle\,(=\alpha)$ szöget keressük (1 pont)

Az ABC derékszögű háromszögben $AC=18\cdot\sqrt{2}$ (1 pont)

így $\cos\alpha=\frac{AC}{AG}=\frac{1}{2},(0°<\alpha<90°)$ (1 pont)

ahonnan $\boldsymbol{\alpha=60°}$ (1 pont)

b) A négyzetes hasáb alapéle $a=18$, magassága $m=CG=18\cdot\sqrt{6}$ (1 pont)

felszíne: $A=2a^2+4a\cdot m=2\cdot18^2+4\cdot18^2\cdot\sqrt{6}\approx3822,5$ (1 pont)

A hasáb felszíne **3822,5 területegység** (1 pont)

c) Ha a mértani sorozat első tagja a, hányadosa q, akkor $a=AB=18$ és $a\cdot q^3=AG=36\cdot\sqrt{2}$ (1 pont)

innen $q^3=2\sqrt{2}$ (1 pont)

azaz $q=\sqrt{2}$ (1 pont)

A mértani sorozat második tagja tehát $a\cdot q=\mathbf{18\cdot\sqrt{2}}$ és ez éppen az alaplap átlójának hossza. (1 pont)

Összesen: 11 pont

2) Egy szobor márvány talapzatát egy 12 dm élű kocka alakú kőből faragják. Minden csúcsnál a csúcshoz legközelebbi élnegyedelő pontokat tartalmazó sík mentén lecsiszolják a kockát.

a) A kész talapzatnak
- hány éle,
- hány csúcsa,
- hány lapja van? (3 pont)

b) A kész talapzatnak mekkora a felszíne? (6 pont)

c) Az ékszerész vállalta, hogy elkészít 20 db egyforma tömegű ajándéktárgyat: a szobortalapzat kicsinyített mását. Az egyes ajándéktárgyak az alábbi féldrágakövek valamelyikéből készültek: achát, hematit, zöld jade és gránát. A kész ajándéktárgyakat a megrendelő átvételkor egyben lemérte. A 20 tárgy együttes tömege megfelelt a megrendelésnek. Otthon egyenként is megmérte a tárgyakat, és kiderült, hogy a féldrágakövekből készített négyféle ajándéktárgy közül egyik sem a megrendelt tömegű. Az ugyanabból az anyagból készülteket egymással azonos tömegűnek mérte. A három achát tárgy mindegyike 1%-kal kisebb; a hat darab hematit tárgy mindegyike 0,5%-kal kisebb; a hét zöld jade tárgy mindegyik 1,5%-kal nagyobb a megrendelésben szerepelt értéknél. A gránát tárgyak tömege hány százalékkal tért el a megrendeléstől? (7 pont)

Megoldás:

a) A lecsiszolt testnek **24** csúcsa van, mert a 8 kockacsúcs helyett minden csúcsnál 3-3 új csúcs keletkezik a negyedelő pontoknál (1 pont)
A lecsiszolt testnek 36 éle van, mert a 12 kocka élén maradnak élek, és a lemetszett háromszögek oldalai is élek: $8\cdot 3=24$ és $12+24=\mathbf{36}$ (1 pont)
A lapok száma 14, mert kockalapokból marad egy-egy nyolcszög, és a lemetszett háromszögek száma 8, $6+8=\mathbf{14}$ (1 pont)

b) A talapzat felszínét kiszámíthatjuk, ha a 6 db nyolcszög területéhez hozzáadjuk a 8 db szabályos háromszög területét. (1 pont)
A nyolcszög területe: a 12 dm oldalú négyzet területéből kivonjuk a 4 db egyenlő szárú derékszögű háromszög területét, vagyis 2 db 3 dm oldalú négyzet területét: $T_{\text{nyolcszög}}=12^2-2\cdot 3^2=126$ dm² (2 pont)

A szabályos háromszög oldala $3\cdot\sqrt{2}$, ezért $T_{\text{háromszög}}=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{9\cdot\sqrt{3}}{2}$ dm² (2 pont)

$A=6\cdot T_{\text{nyolcszög}}+8\cdot T_{\text{háromszög}}=756+36\cdot\sqrt{3}\approx\mathbf{818,35\ dm^2}$ (1 pont)

c) Legyen m az ajándéktárgy megrendelt tömege. Az összes tömeg $20m$. Foglaljuk táblázatba a csiszolt ajándéktárgyakról tudott információkat. (2 pont)

anyag	achát	hematit	zöld jade	gránát
gyakoriság	3 db	6 db	7 db	4 db
tömeg	$0,99m$	$0,995m$	$1,015m$	

Jelöljük $(x \cdot m)$-mel a gránátból készített ajándéktárgy valódi tömegét.

Tudjuk, hogy a tényleges össztömeg $20m$, innen
$20 \cdot m = 3 \cdot 0,99m + 6 \cdot 0,995m + 7 \cdot 1,015m + 4 \cdot xm$ (2 pont)

Ebből következik, hogy $x = 0,98875$ (2 pont)

A gránát ajándéktárgyak tömege **1,125%-kal kisebb** a megrendeltnél. (1 pont)

Összesen: 16 pont

3) Az 1. ábra szerinti padlástér egy 6x6 méteres négyzetes alapú gúla, ahol a tető csúcsa a négyzet középpontja felett 5 méter magasan van

a) Milyen szöget zárnak be a tetősíkok a vízszintessel (padlássíkkal)? (4 pont)

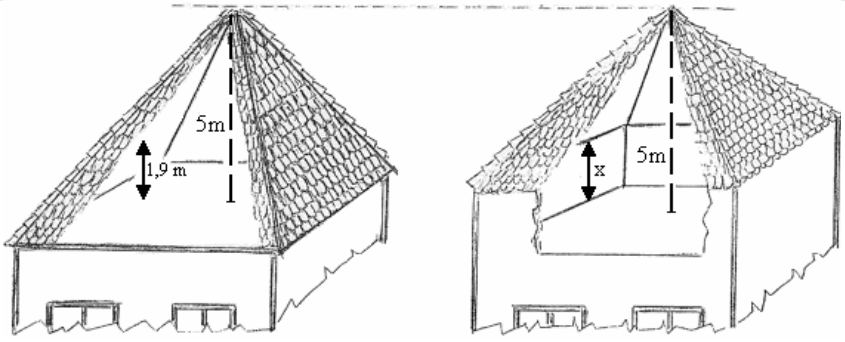
Hasznos alapterületnek számít a tetőtérben a terület, amely fölött a (bel)magasság legalább 1,9 liter.

b) Mennyi lenne a tetőtér beépítésekor a hasznos terület? (6 pont)

A tető cseréjekor a hasznos alapterület növelésének érdekében a ház oldalfalait egy ún. koszorúval kívánják magasítani. A ház teljes magassága- építészeti előírások miatt- nem növelhető, ezért a falak magasítása csak úgy lehetséges, ha a tető síkjának meredekségét csökkentik (2. ábra).

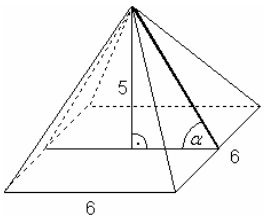
Jelölje *x* a koszorú magasságát és *T* a hasznos alapterületet.

c) Írja fel a *T*(*x*) függvény hozzárendelési szabályát! (6 pont)



Megoldás:

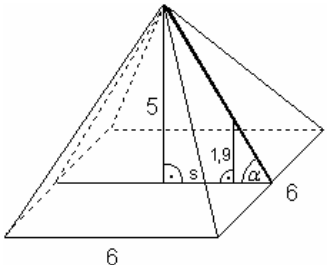
a) A padlássíkra és a tetősíkra egyaránt merőleges síkmetszetből lehet a keresett szöget meghatározni. (2 pont)



A keresztmetszeti ábrán a keresett szöget α-val jelölve, felírható, hogy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3}$ (1 pont)

ahonnan $\alpha \approx$ **59°** (1 pont)

b) Keressük az ábrán s-sel jelölt szakasz hosszát. (2 pont)

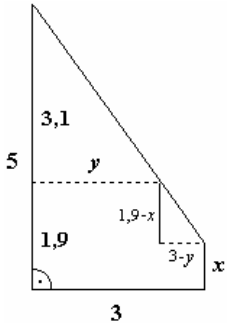


Hasonlóság alapján: $\frac{1,9}{3-s}=\frac{5}{3}$ (2 pont)

Ebből $s=1,86$ (1 pont)

A hasznos alapterület $4s^2 \approx \mathbf{13,84}$ m^2 (1 pont)

c) Az ábra jelöléseit használva használjuk, ahol $0 \le x \le 1,9$. Az ábra alapján $T=4y^2$-et (ami a hasznos alapterület) kell kifejeznünk x segítségével. (1 pont)



A két kisebb háromszög megfelelő szögei egyenlők, tehát hasonlóak.

Így $\frac{3,1}{y}=\frac{1,9-x}{3-y}$ (1 pont)

Innen $y=\frac{9,3}{5-x}$ (1 pont)

Tehát a keresett összefüggés: $4y^2=\left(\frac{18,6}{5-x}\right)^2$ (1 pont)

Ha $x \ge 1,9$, akkor 36 m^2 a hasznos alapterület. (1 pont)

Összefoglalva: $T(x)=\begin{cases}\left(\frac{\mathbf{18,6}}{\mathbf{5-x}}\right)^{\mathbf{2}}, & \text{ha } \mathbf{0 \le x \le 1,9} \\ \mathbf{36}, & \text{ha } \mathbf{1,9 \le x \le 5}\end{cases}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

4) A csonkakúp alakú tárgyak térfogatát régebben a gyakorlat számára elegendően pontos közelítő számítással határozták meg. Eszerint a csonkakúp térfogata közelítőleg egy olyan henger térfogatával egyezik meg, amelynek átmérője akkora, mint a csonkakúp alsó és felső átmérőjének számtani közepe, magassága pedig akkora, mint a csonkakúp magassága.

a) Egy csonkakúp alakú fatörzs hossza (vagyis a csonkakúp magassága) 2 m, alsó átmérője 12 cm, felső átmérője 8 cm. A közelítő számítással kapott térfogat hány százalékkal tér el a pontos térfogattól? (Ezt nevezzük a közelítő eljárás relatív hibájának.) **(3 pont)**

b) Igazolja, hogy a csonkakúp térfogatát – a fentiekben leírt útmutatás alapján kapott - közelítő érték sohasem nagyobb, mint a csonkakúp térfogatának pontos értéke! **(7 pont)**

Jelölje x a csonkakúp két alapköre sugarának az arányát, és legyen $x>1$. Bizonyítandó, hogy a fentiekben leírt, közelítő számítás relatív hibájának százalékban mérve a következő függvény adja meg:

$$f:\,]1;+\infty[\,\to\mathbb{R},\quad f(x)=25\cdot\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}.$$

c) Igazolja, hogy f-nek nincs szélsőértéke! **(6 pont)**

Megoldás:

a) A közelítő henger alapkörének sugara: $\frac{1}{2}\cdot\frac{12+8}{2}=5$ cm, térfogata $25\cdot\pi\cdot 200=5000\pi\approx 15708$ cm^3. (1 pont)

A csonkakúp elméletileg pontos térfogata:

$\frac{200\pi}{3}\left(6^2+6\cdot 4+4^2\right)=\frac{15200\pi}{3}\approx 15917$ cm^3. (1 pont)

A közelítő érték $\frac{200\pi}{3}\approx 209$ cm^3-rel kisebb, tehát a pontos értéktől $\frac{200}{152}\approx$ **1,3 %-kal** tér el. (1 pont)

b) Legyen a csonkakúp alapköreinek sugara R és r, magassága m.

A csonkakúp elméleti térfogata: $\frac{m\pi}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)$ (1 pont)

A csonkakúp gyakorlati térfogata: $\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 m\pi$ (1 pont)

A két térfogat különbségéről állítjuk: $\frac{m\pi}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)-\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 m\pi\ge 0$ (1 pont)

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát $\frac{12}{m\pi}$-vel, bontsuk fel a zárójeleket és az összevonások után: $R^2-2Rr+r^2\ge 0$ (2 pont)

Vagyis $(R+r)^2\ge 0$ adódik, ami minden R és r esetén igaz. (1 pont)

A következtetés minden lépése megfordítható, ezért az állítás igaz (1 pont)

c) Az f függvény deriválható, a deriváltfüggvény hozzárendelési szabálya:

$$f'(x)=25\cdot\frac{2(x-1)\left(x^2+x+1\right)-(x-1)^2(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$ (2 pont)

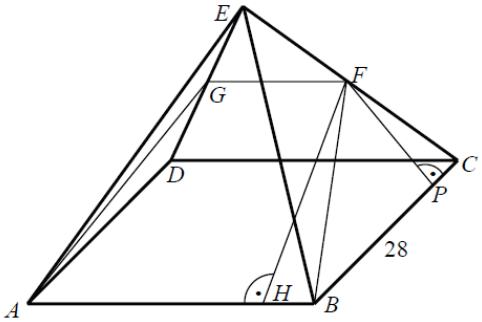
$$f'(x)=75\cdot\frac{x^2-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$ (2 pont)

Az $f'(x)=0$ egyenletnek nincs megoldása az $]1;+\infty[$ intervallumon, tehát f-nek nincs szélsőértéke (2 pont)

Összesen: 16 pont

5) Az *ABCDE* szabályos négyoldalú gúla alaplapja az *ABCD* négyzet. A gúla alapéle 28 egység hosszú. Legyen *F* a *CE* oldalélnek, *G* pedig a *DE* oldalélnek a felezőpontja. Az *ABFG* négyszög területe 504 területegység. Milyen hosszú a gúla oldaléle? (16 pont)

Megoldás:



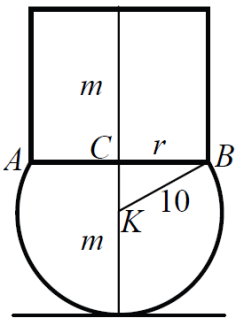
A GF középvonal a DCE háromszögben, így $GF=14$ egység (1 pont)
Az $ABFG$ négyszög szimmetrikus trapéz, (1 pont)
mivel $AB\|CD\|FG$ és $AG=BF$. (1 pont)
Legyen HF a trapéz alapokhoz tartozó magassága. A trapéz területképlete alapján $\frac{28+14}{2}\cdot HF=504$ (1 pont)
tehát $HF=24$ egység (1 pont)
A szimmetrikus trapéz tulajdonsága miatt $HB=\frac{28-14}{2}=7$ (1 pont)
a HBF derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel alapján $BF^2=24^2+7^2$ (1 pont)
ahonnan $BF=25$ (1 pont)
Az F pontból a BC oldalra bocsátott merőleges talppontja legyen P. Ez a pont a BC oldal C-hez legközelebbi negyedelő pontja (2 pont)
A negyedelő pont indoklása: például legyen Q a BC él felezőpontja. Az FP szakasz az EQC háromszög középvonala (1 pont)
$BP=\frac{3}{4}BC=21$ és $PC=\frac{1}{4}BC=7$ (1 pont)
A BPF derékszögű háromszögben Pitagorasz-tételt alkalmazva: $PF^2=25^2-21^2=184$ (1 pont)

Az FPC derékszögű háromszögben is Pitagorasz-tételt alkalmazva:
$FC^2 = 184 + 7^2$ (1 pont)
Így $FC = \sqrt{233} \approx 15,26$ (1 pont)
A gúla oldaléle $EC = 2 \cdot FC = 2 \cdot \sqrt{233} \approx$ **30,53 egység**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

6) Jancsi vázát készít. Egy 10 cm sugarú, belül üreges gömbből levágott *m* magasságú ($m > 10$) gömbszelet határoló köréhez egy szintén *m* magasságú hengerpalástot ragaszt. A henger sugara megegyezik a gömbszelet határoló kör sugarával.
Mekkorának válassza Jancsi a gömbszelet *m* magasságát, hogy a vázába a lehető legtöbb víz férjen? (A váza anyaga vékony, ezért a vastagságától eltekintünk, s hogy ne boruljon fel, egy megfelelő méretű üreges fatalpra fogják állítani.)
Tudjuk, hogy ha a gömbszelet magassága *m*, a határoló kör sugara pedig *r*, akkor a térfogata: $V = \frac{\pi}{6} m \cdot \left(3r^2 + m^2\right)$ **(16 pont)**

Megoldás:



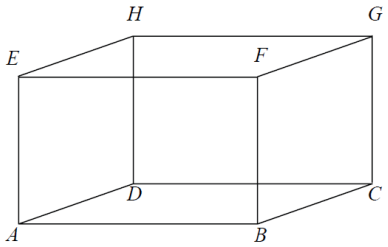
Helyes ábra (2 pont)
A KBC derékszögű háromszög befogóinak hossza $m-10$ és r, átfogója 10 cm (2 pont)
Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt a KBC háromszögre:
$(m-10)^2 + r^2 = 100$ (2 pont)
Ebből $r^2 = 20m - m^2$ (1 pont)
A váza térfogata:
$V(m) = \frac{\pi}{6} m \cdot \left[3\left(20m - m^2\right) + m^2\right] + \pi\left(20m - m^2\right)m$ (2 pont)
azaz $V(m) = \pi\left(-\frac{4}{3}m^3 + 30m^2\right) = \pi\frac{2\pi}{3}\left(45m^2 - 2m^3\right)$ (1 pont)
ahol $10 < m < 20$ (1 pont)
A V függvény differenciálható a $]10;20[$ nyílt intervallumon, deriváltja pedig:
$V'(m) = \pi\left(-4m^2 + 60m\right) = 4\pi(15 - m)m$
A $]10;20[$ nyílt intervallumon $V'(m) = 0$ pontosan akkor, ha $m = 15$ (1 pont)

	$10 < m < 15$	$m = 15$	$15 < m < 20$
$V'(m)$	pozitív	= 0	negatív
V	szigorúan növő	helyi maximum	szigorúan csökkenő

(3 pont)
Az $\boldsymbol{m = 15}$ a V függvény abszolút maximum helye is, így ekkor lesz a váza térfogata a lehető legnagyobb $(V_{max} = 2250\pi)$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

7) Az *ABCDEFGH* téglatest *A* csúcsból induló élei: $AB = 12$, $AD = 6$, $AE = 8$. Jelölje *HG* felezőpontját *P*.



a) Számítsa ki az *ABCDP* gúla felszínét! (10 pont)
b) Mekkora szöget zár be az *ABCDP* gúla *ABP* lapjának síkja az *ABCD* lap síkjával? (3 pont)

Megoldás:

a) Az alaplap területe: $T_{ABCD} = 12 \cdot 6 = 72$ cm² (1 pont)

Az *AB* él felezőpontja legyen *M*, a *CD* él felezőpontja pedig *N*. Az *APB* háromszög egyenlő szárú, a *PM* merőleges az *AB* szakaszra. Az *MNP* háromszög az *N* csúcsban derékszögű. (1 pont)

$PM = 10$ cm (a befogók 6 és 8) (1 pont)

Az *ABP* háromszög területe: $T_{ABP} = \frac{AB \cdot PM}{2} = \frac{12 \cdot 10}{2} = 60$ cm² (1 pont)

A *DCP* háromszög területe: $T_{DCP} = \frac{DC \cdot PN}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48$ cm² (1 pont)

$DP = PC = 10$ cm (1 pont)

A *PBC* és a *PAD* oldallapok egybevágó háromszögek (1 pont)

és a két háromszög egybevágó a *PBM* háromszöggel (1 pont)

$T_{PBC} = \frac{6 \cdot 10}{2} = 30$ cm² (1 pont)

A gúla felszíne: $(72 + 60 + 48 + 2 \cdot 30) =$ **240 cm²** (1 pont)

b) Az *MN* szakasz és a *PM* szakasz is merőleges az *AB* élre, ezért a kérdezett szög a $PMN\sphericalangle$ (1 pont)

A *PMN* háromszög *N*-nél derékszögű (1 pont)

ezért $\operatorname{tg} PMN\sphericalangle = \frac{PN}{MN} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, ahonnan $PMN\sphericalangle \approx$ **53,1°** (1 pont)

Összesen: 13 pont

8) Egy fából készült négyzetes oszlop minden élének hossza centiméterben mérve 2-nél nagyobb egész szám. A négyzetes oszlop minden lapját befestjük pirosra, majd a lapokkal párhuzamosan 1 cm élű kis kockára vágtuk. A kis kockák közül 28 lett olyan, amelynek pontosan két lapja piros.
Mekkora lehetett a négyzetes oszlop térfogata? (16 pont)

Megoldás:

Legyen a négyzetes oszlop alapéleinek hossza a (cm) és a magasság hossza b (cm). (a, b 2-nél nagyobb egészek). (1 pont)

Azoknak az egységkockáknak lesz pontosan két lapja piros, melyek az élek mentén, de nem a csúcsokban helyezkednek el (1 pont)

A két db négyzetlap 8 élén $8\cdot(a-2)$ (1 pont)

a 4 oldalélén $4\cdot(b-2)$ ilyen festett kocka van (1 pont)

$8\cdot(a-2)+4\cdot(b-2)=28$ (1 pont)

Innen $2a+b=13$ (1 pont)

Az élhosszak megfelelő értékei (6 pont)

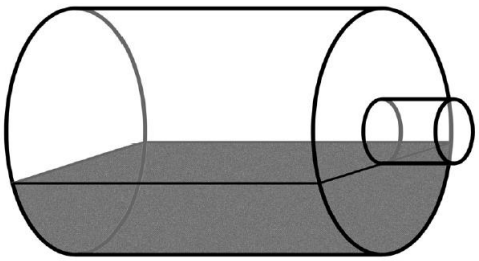
a	5	4	3
b	3	5	7

A három lehetséges négyzetes oszlop (1 pont)

térfogata rendre 75 cm³, 80 cm³ és 63 cm³ (3 pont)

Összesen: 16 pont

9) Egy pillepalack alakja olyan forgáshenger, amelynek alapköre 8 cm átmérőjű. A palack fedőkörén található a folyadék kiöntésére szolgáló szintén forgáshenger alakú nyílás. A két hengernek közös a tengelye. A kiöntő nyílás alapkörének átmérője 2 cm. A palack magassága a kiöntő nyílás nélkül 30 cm. A palack vízszintesen fekszik úgy, hogy annyi folyadék van benne, amennyi még éppen nem folyik ki a nyitott kiöntő nyíláson keresztül.



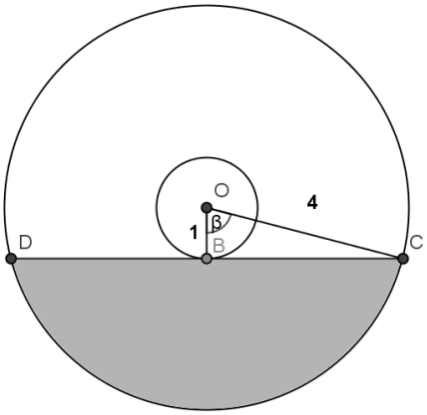
a) Hány deciliter folyadék van a palackban? (Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) **(9 pont)**

A palack tartalmát kiöntve, a palackot összenyomva, annak eredeti térfogata $2p$ százalékkal csökken. Egy hulladékot újrahasznosító cég (speciális gép segítségével) az ilyen módon tömörített palack térfogatát annak további p százalékával tudja csökkenteni. Az összenyomással, majd az azt követő gépi tömörítéssel azt érik el, hogy a palackot eredeti térfogatának 19,5 százalékára nyomják össze.

b) Határozza meg p értékét! **(7 pont)**

Megoldás:

a) A fedőkör tengelyre merőleges síkmetszete, jó ábra. (2 pont)



$\cos\beta = \frac{1}{4}$, amiből $\beta \approx 75{,}52°$ (1 pont)

(Így a kérdéses terület az O középpontú 2β középponti szögű körcikk és az ODC háromszög különbségeként adódik.

$T_{\text{körcikk}} = \frac{2\beta}{260°} \cdot 4^2\pi \approx 21{,}09\,(\text{cm}^2)$ (1 pont)

$T_{ODC\triangle} = \frac{4^2 \sin 2\beta}{2} \approx 3{,}87\,(\text{cm}^2)$ (1 pont)

$T_{\text{körszelet}} = T_{\text{körcikk}} - T_{ODC\triangle} \approx 17{,}22\ (\text{cm}^2)$ (1 pont)

Amiből a folyadék térfogata:

$V_{\text{folyadék}} = T_{\text{körszelet}} \cdot m_{\text{palack}} = 17{,}22 \cdot 30 = 516{,}6\,(\text{cm}^2)$ (1 pont)

Azaz 5,2 dl folyadék van a palackban. (2 pont)

b) A feltételek szerint $\left(1 - \frac{2p}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right) = 0{,}195$ (ahol $p < 50$) (2 pont)

Rendezve: $p^2 - 150p + 4025 = 0$ (2 pont)

melynek gyökei $p_1 = 35$, $p_2 = 115$ (1 pont)

Utóbbi nem megoldása a feladatnak ($p < 50$) (1 pont)

Tehát $\boldsymbol{p = 35}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

10) Egy forgáskúp nyílásszöge 90°, magassága 6 cm.

a) Számítsa ki a kúp térfogatát (cm³-ben) és a felszínét (cm²-ben)! **(4 pont)**

b) A kúp alaplapjával párhuzamos síkkal kettévágjuk a kúpot. Mekkora a keletkező csonkakúp térfogata (cm³-ben), ha a metsző sík átmegy a kúp beírt gömbének középpontján? **(9 pont)**

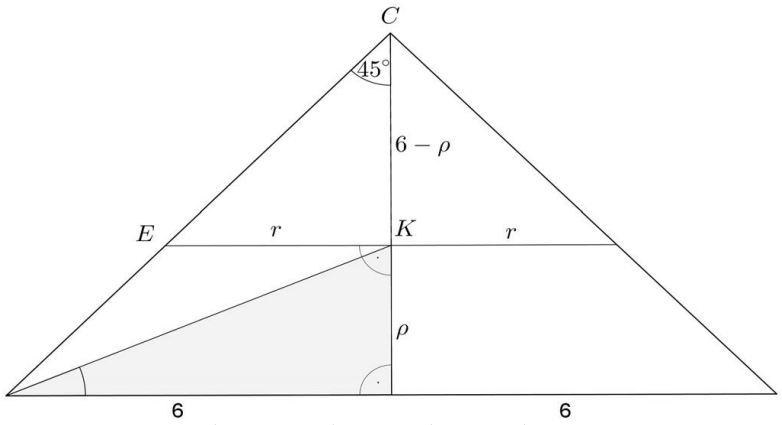
Válaszát egészre kerekítve adja meg!

Megoldás:

a) A kúp alapkörének sugara 6cm, (1 pont)

alkotójának hossza $6\sqrt{2} \approx 8,49$ cm (1 pont)

térfogata $V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{6^2 \cdot \pi \cdot 6}{3} = 72\pi \approx$ **226** (**cm³**) (1 pont)



felszíne $A = r\pi(r+a) = 6\pi\left(6+6\sqrt{2}\right) = 36\left(1+\sqrt{2}\right)\pi \approx$ **273 cm²** (1 pont)

b) Jó ábra, tartalmazza a gömb sugarát (p), a 45°-os szöget és a síkmetszet sugarát (r) (2 pont)

$p = 6 \cdot \text{tg}22,5°$ (1 pont)

amiből $p \approx 2,49\,\text{cm}$ (1 pont)

A KCE egyenlőszárú derékszögű háromszögből $r = 6 - p$ (1 pont)

azaz $r \approx 3,51\,\text{cm}$ (1 pont)

A csonkakúp magassága (egyenlő a gömb sugarával) $m \approx 2,49\,\text{cm}$ (1 pont)

A csonkakúp térfogata $V = \frac{m\pi}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right) \approx \approx \frac{2,49\pi}{3}\left(6^2 + 6 \cdot 3,51 + 3,51^2\right) \approx$ (1 pont)

$\approx$ **181 cm³** (1 pont)

Összesen 13 pont

11) Két egyenes hasábot építünk, H_1-et és H_2-t. AZ építéshez használt négyzetes oszlopok (négyzet alapú egyenes hasábok) egybevágok, magasságuk kétszer akkora, mint az alapélük. A H_1 hasáb építésekor a szomszédos négyzetes oszlopokat az oldallapjukkal illesztjük össze, a H_2 hasáb építésekor pedig a négyzet alaplapjukkal- az ábra szerint.

a) A H_1 és H_2 egyenes hasábok felszínének hányadosa $\frac{A_{H_1}}{A_{H_2}} = 0,8$. Hány négyzetes oszlopot használtunk az egyes hasábok építéséhez, ha H_1-et és H_2-t ugyanannyi négyzetes oszlopból építettük fel? (8 pont)

b) Igazolja, hogy $\left\{\frac{3n+2}{4n+1}\right\}\left(n \in \mathbb{N}^+\right)$ sorozat szigorú monoton növekvő és korlátos! (8 pont)

Megoldás:

a) Ha a jelöli a négyzetes oszlop alapélének hosszát, és k darabból készítjük a hasábokat, akkor H_1 felszíne:

$A_{H_1} = 2 \cdot 2a + 2 \cdot k \cdot a^2 + 2 \cdot k \cdot 2a^2 \left(= 2a^2\left(3k+2\right)\right)$ (2 pont)

H_2 felszíne: $A_{H_2} = 2a^2 + 4 \cdot k \cdot 2a^2 \left(= 2a^2\left(4k+1\right)\right)$ (2 pont)

Az $\frac{A_{H_1}}{A_{H_2}} = 0,8$ feltételből $3k+2 = 0,8 \cdot \left(4k+1\right)$ (2 pont)

Az egyenlet megoldása $k = 6$ (1 pont)

tehát **6-6** négyzetes oszlopot használtunk fel az építéshez (1 pont)

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+5)(4n+1)}{(4n+5)(3n+2)} =$ (1 pont)

$\frac{12n^2+23n+5}{12n^2+23n+10}\left(= 1 - \frac{5}{12n^2+23n+10}\right)$ (1 pont)

A fenti hányados minden pozitív egész n esetén 1-nél kisebb (1 pont)

a sorozat minden tagja pozitív (1 pont)

ezért a sorozat szigorú monoton csökkenő (1 pont)

Ebből következik, hogy a sorozat felülről korlátos (1 pont)

Mivel a sorozat minden tagja pozitív, így alulról is korlátos (1 pont)

tehát a sorozat korlátos (1 pont)

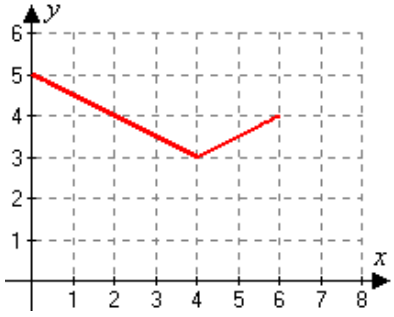
Összesen 16 pont

12)

a) Ábrázolja a $[0;6]$ intervallumon értelmezett, $x \mapsto \frac{1}{2}|x-4|+3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt! (4 pont)
b) Állapítsa meg a függvény értékkészletét! (2 pont)
c) Forgassuk meg a $[0;4]$ intervallumra leszűkített függvény grafikonját az x tengely körül! Számítsa ki az így keletkezett forgástest felszínét! (8 pont)

Megoldás:

a)



(4 pont)

b) Az értékkészlet $[3;5]$ (2 pont)

c) A keletkezett forgástest egy csonkakúp (2 pont)
Az alapkörök sugara $R=5; r=3$ (2 pont)
Az alkotó hossza Pitagorasz-tétellel: $a=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ (2 pont)
Így a felszín: $A=R^2\pi+r^2\pi+(R+r)a\pi=25\pi+9\pi+16\sqrt{5}\pi\approx 69,78\pi\approx$ **219,2**
(2 pont)
Összesen: 14 pont

13) Egy centiméterben mérve egész szám élhosszúságú kockát feldarabolunk 99 kisebb kockára úgy, hogy közülük 98 egybevágó, 1 cm élű kocka. Számítsa ki az eredeti kocka térfogatát! (16 pont)

Megoldás:

Jelölje a az eredeti kocka élhosszát, b pedig a 99., nem egységkocka élhosszát centiméterben mérve. A feltételek alapján a és b pozitív egészek, és $98=a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (3 pont)

Mivel $98=2\cdot 7^2$ és $a-b<a^2+ab+b^2$, ezért 3 eset lehetséges (2 pont)
I. eset: $a-b=1$ és $a^2+ab+b^2=98$
Ekkor $a=b+1$ helyettesítés után a második egyenletből kapjuk, hogy $3b^2+3b=97$, ami nem lehet, hiszen 3 nem osztója 97-nek (3 pont)
II. eset: $a-b=2$ és $a^2+ab+b^2=49$
Ekkor $b^2+2b=15$, ahonnan a feltételeknek megfelelő megoldás: $b=3$ és $a=5$ (3 pont)
III. eset: $a-b=7$ és $a^2+ab+b^2=14$
Ekkor $3b^2+21b=-35$, ami nem lehetséges, ugyanis b pozitív egész (3 pont)
Azt kaptuk, hogy az eredeti kocka éle 5 cm, így térfogata **125 cm³** (2 pont)

Összesen: 16 pont

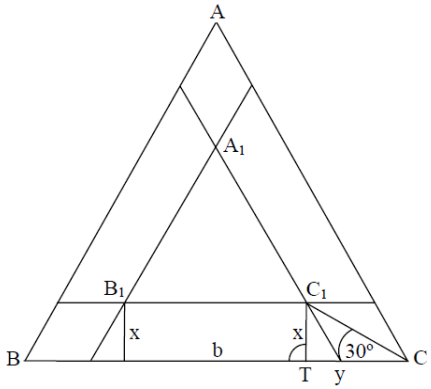
14) Kartonpapírból kivágunk egy 1,5 dm magasságú *ABC* szabályos háromszöglapot. A háromszöglapon párhuzamost húzunk a háromszög mindegyik oldalával, mindegyikből ugyanakkora 0,5 deciméternél kisebb *x* távolságra. Ezek az egyenesek az $A_1B_1C_1$ szabályos háromszög oldalegyenesei.

a) Írja fel az $A_1B_1C_1$ háromszög területét *x* függvényében! (6 pont)

b) Szeretnénk egy $A_1B_1C_1$ alapú *x* magasságú, felül nyitott egyenes hasáb alakú íróasztali tolltartót létrehozni a lapból, ezért levágjuk a fölösleget, majd az $A_1B_1C_1$ háromszög élei mentén felhajtottuk a hasáb oldallapjait. Mekkora *x* estén lesz a keletkezett hasáb térfogata maximális? (10 pont)

Megoldás:

a) Az *ABC* szabályos háromszög oldalhossza $a=\sqrt{3}$. Az *ABC* súlypontja 0,5 dm távolságra van a háromszög oldalegyeneseitől, s mivel $x<0{,}5$, így ez a súlypont az $A_1B_1C_1$ háromszög az *ABC* háromszög belsejében van. (2 pont)



Az $A_1;B_1;C_1$ pontok rendre az *ABC* háromszög *A*-ból, *B*-ből, *C*-ből induló belső szögfelezőjének egy-egy pontja. Jelöljük *b*-vel az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalának hosszát.

Az ábra szerinti CC_1T derékszögű háromszögben legyen $x=C_1T$ és $y=TC$

Ekkor $\operatorname{ctg}30°=\frac{y}{x}$, így $y=x\sqrt{3}$ (2 pont)

A tengelyes szimmetria figyelembevételével: $b=\sqrt{3}-2x\sqrt{3}$ (1 pont)

$$T_{A_1B_1C_1}=\frac{b^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{\mathbf{3\sqrt{3}(1-2x)^2}}{\mathbf{4}}\ \mathbf{dm^2}$$ (1 pont)

b) A hasáb alaplapja $A_1B_1C_1$ háromszög, magassága x.

$V(x) = T \cdot x = \frac{3\sqrt{3}(1-2x)^2}{4} \cdot x = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(4x^3 - 4x^2 + x\right)$ (1 pont)

ahol $0 < x < \frac{1}{2}$ (1 pont)

A V függvény differenciálható az értelmezési tartományán és

$V'(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(12x^2 - 8x + 1\right)$ (2 pont)

$\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(12x^2 - 8x + 1\right) = 0$ (1 pont)

Megoldásai: $\frac{1}{2}$ illetve $\frac{1}{6}$ (1 pont)

	$0 < x < \frac{1}{6}$	$x = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$
$V'(x)$	pozitív	$= 0$	negatív
$V(x)$	növő	maximum	csökkenő

(3 pont)

A hasáb térfogata maximális, ha az x távolságot $\mathbf{\frac{1}{6}}$ **dm** hosszúnak választjuk.

(1 pont)

Összesen: 16 pont

15) Egy üzemben 4000 cm³-es, négyzet alapú, egyenes hasáb alakú, felül nyitott sütőedények gyártását tervezik. Az edények külső felületét tűzálló zománcfestékkel vonják be. (A belső felülethez más anyagot használnak.)

a. Számítsa ki, mekkora felületre kellene tűzálló zománcfesték egy olyan edény esetén, amelynek oldallapjai 6,4 cm magasak! (3 pont)

b. Az üzemben végül úgy határozták meg az edények méretét, hogy a gyártásukhoz a lehető legkevesebb zománcfestékre legyen szükség. Számítsa ki a gyártott edények alapélének hosszát! (9 pont)

c. Minőségellenőrzési statisztikák alapján ismert: 0,02 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott edény selejtes. Egy áruházláncnak szállított 50 darabos tételben mekkora valószínűséggel lesz pontosan 2 darab selejtes? (4 pont)

Megoldás:

a) Az edény alapéle legyen x cm hosszú

$4000 = x^2 \cdot 6,4$ (1 pont)

$x = 25$ (1 pont)

A zománccal bevonható felület területe tehát

$625 + 4 \cdot 25 \cdot 6,4 = \mathbf{1265\,cm^2}$ (1 pont)

b) Ha az edény magassága m cm, akkor $4000 = x^2 \cdot m$ és a zománccal bevonandó felület területe cm²-ben $T = x^2 + 4xm$ (1 pont)

Az m-et a térfogatra felírt összefüggésből kifejezve és behelyettesítve T-be

$T = x^2 + \frac{16000}{x}$ (1 pont)

Tekintsük a $T : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}; T(x) = x^2 + \frac{16000}{x}$ függvényt (1 pont)

T-nek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0 (1 pont)

$T'(x) = 2x - \frac{16000}{x^2}$ (1 pont)

$T'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8000 \Leftrightarrow x = 20$ (1 pont)

Mivel $T''(x) = 2 + \frac{32000}{x^3}$ pozitív az $x = 20$ helyen (1 pont)

ezért a T függvénynek az $x = 20$ helyen abszolút minimuma van (1 pont)

A gyártott edények alapéle 20 cm (1 pont)

c) Egy edényt véletlenszerűen kiválasztva az 0,02 valószínűséggel lesz selejtes, tehát 0,98 valószínűséggel jó. (1 pont)

A kérdéses valószínűség a binomiális eloszlás alapján számolható (1 pont)

$P(2\,\text{selejtes}) = \binom{50}{2} \cdot 0,002^2 \cdot 0,98^{48}$ (1 pont)

$P(2\,\text{selejtes}) \approx \mathbf{0,186}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

16) Egy üzemben olyan forgáshenger alakú konzervdoboz gyártását szeretnék elkezdeni, amelynek térfogata 1000 cm³. A doboz aljának és tetejének anyagköltsége 0,2 cm² Ft, míg oldalának anyagköltsége 0,1 cm² Ft.

a) Mekkorák legyenek a konzervdoboz méretei (az alapkör sugara és a doboz magassága), ha a doboz anyagköltségét minimalizálni akarják? Válaszát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! Számítsa ki a minimális anyagköltséget is egész forintra kerekítve! (13 pont)

A megtöltött konzervdobozokat tizenkettesével csomagolták kartondobozokba. Egy ellenőrzés alkalmával 10 ilyen kartondoboz tartalmát megvizsgálták. Minden kartondoboz esetén feljegyezték, hogy a benne található 12 konzerv között hány olyat találtak, amelyben a töltősúly nem érte el az előírt minimális értéket. Az ellenőrök a 10 kartondobozban rendre 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 3, 0 ilyen konzervet találtak, s ezeket a konzerveket selejtesnek minősítették.

b) Határozza meg a kartondobozonkénti selejtes konzervek számának átlagát, és az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését! (3 pont)

Megoldás:

a) Ha r a doboz alapkörének sugara m pedig a doboz magassága cm-ben mérve, akkor $V = r^2\pi m$ ahonnan $m = \frac{V}{r^2\pi} = \frac{1000}{r^2\pi}$ (1 pont)

Az alap- és a fedőlap együttes anyagköltsége r függvényében $0{,}2 \cdot 2r^2\pi$ (1 pont)

A palást anyagköltsége $0{,}1 \cdot 2r\pi \cdot \frac{V}{r^2\pi} = \frac{200}{r}$ (2 pont)

A teljes anyagköltség $r > 0$ esetében

$f(r) = 0{,}4r^2\pi + \frac{200}{r}$ (1 pont)

Az f függvénynek a pozitív számok halmazán ott lehet minimuma, ahol deriváltja 0. (1 pont)

$f'(r) = 0{,}8r\pi - \frac{200}{r^2}$ (2 pont)

$f'(r) = 0$ ha $r\left(= \sqrt[3]{\frac{200}{0{,}8\pi}}\right) \approx 4{,}3$ (1 pont)

$f''(r) = 0{,}8\pi + \frac{400}{r^3} > 0$, ezért itt valóban minimális f értéke (1 pont)

Minimális anyagköltséghez tartozó magasság

$m = \frac{1000}{r^2\pi} \approx 17{,}2$ cm (1 pont)

Tehát a minimális anyagköltség forintra kerekítve **70 Ft** (2 pont)

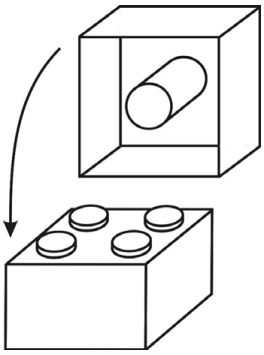
b) Az adatok átlaga 0,7 (1 pont)

A minta átlagtól mért átlagos abszolút eltérése

$\frac{6 \cdot 0{,}7 + 2 \cdot 0{,}3 + 1{,}3 + 2{,}3}{10} = \mathbf{0{,}84}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

17) Egy építőkészletben a rajzon látható négyzetes hasáb alakú elem is megtalálható. Két ilyen építőelem illeszkedését az egyik elem tetején kiemelkedő négy egyforma kis henger és a másik elem alján lévő nagyobb henger szoros, érintkező kapcsolata biztosítja. (Ez azt jelenti, hogy a hengerek tengelyére merőleges síkmetszetben a nagyobb kört érinti a négy kisebb kör, amelyek középpontjai egy négyzetet határoznak meg.) Tudjuk, hogy a kis hengerek sugara 3 mm, az egymás melletti kis hengerek tengelyének távolsága pedig 12 mm.



a) Mekkora a nagyobb henger átmérője? Válaszát milliméterben, két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

A készletben az építőelemek kék vagy piros színűek. Péter 8 ilyen elemet egymásra rak úgy, hogy több piros színű van köztük, mint kék. Lehet, hogy csak az egyik színt használja, de lehet, hogy mindkettőt.

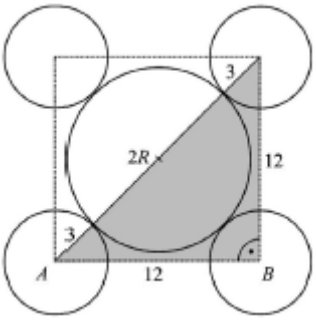
b) Hányféle különböző szín összeállítású 8 emeletes tornyot tud építeni? (4 pont)

A gyárban (ahol ezeket az építőelemeket készítik) nagyon ügyelnek a pontosságra.

Egymillió építőelemből átlagosan csupán 20 selejtes. András olyan készletet szeretne vásárolni, melyre igaz a következő állítás: *0,01-nál kisebb annak a valószínűsége, hogy a dobozban található építőelemek között van selejtes.*

c) Legfeljebb hány darabos készletet vásárolhat András? (7 pont)

Megoldás:



a) Jó ábra rajzolása (1 pont)
A kis kör kp-ja egy 12 mm oldalú négyzetet alkot (1 pont)
Ennek az átlója $12\sqrt{2}$ (1 pont)
Mivel ez éppen $2R+6$ (1 pont)
$d = 2R = \left(12\sqrt{2}-6\right) \approx \mathbf{10,97}$ (1 pont)

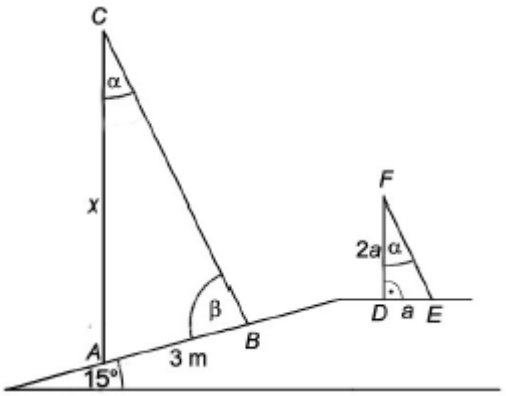
b) A piros elemek száma 5, 6, 7 vagy 8 lehet (1 pont)
Ha a piros elemek száma k, akkor az építhető tornyok száma $\binom{8}{k}$ (1 pont)
Így az ilyen tornyok száma összesen:
$\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8} = (56+28+8+1) = \mathbf{93}$ (2 pont)

c) Annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott kocka nem selejtes
$\frac{1000000-20}{1000000}=0,99998$ (1 pont)
Annak a valószínűsége, hogy egy n kockát tartalmazó dobozban egyik kocka sem selejtes $0,99998^n$ (1 pont)
Ha annak a valószínűsége, hogy a dobozban van selejtes kisebb 0,01-nál, akkor annak a valószínűsége, hogy a dobozban nincs selejtes, legalább 0,99 (1 pont)
Megoldandó a $0,99998^n \geq 0,99 \quad (n \in \mathbb{N})$ (1 pont)
A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt
$n \cdot \lg 0,99998 \geq \lg 0,99$ (1 pont)
Ebből $n \leq \frac{\lg 0,99}{\lg 0,99998} \approx 502,5$ (1 pont)
Tehát András legfeljebb **502 darabos** készletet vehetett (1 pont)
Összesen: 16 pont

18) Egy 15°-os emelkedési szögű hegyoldalon álló függőleges fa egy adott időpontban a hegyoldal emelkedésének irányában 3 méter hosszú árnyékot vet. Ugyanebben az időpontban a közeli vízszintes fennsíkon álló turista árnyékának hossza éppen fele a turista magasságának. Hány méter magas a fa?
Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! **(12 pont)**

Megoldás:

A szövegnek megfelelő, az adatokat helyesen feltüntető ábra. (2 pont)



Az *ACB* és *DFE* szögek egyenlők, mivel mindkettő a napsugarak és a függőleges által bezárt szög. (1 pont)
A *DEF* derékszögű háromszögben:
$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$ (2 pont)
$\alpha \approx 26,57°$ (1 pont)
BAC szög $(90°-15°=)75°$ (1 pont)
Így $\beta \approx 78,43°$. (1 pont)
(Szinusztétel az *ABC* háromszögben:) $\frac{\sin 78,43°}{\sin 26,57°}=\frac{x}{3}$ (2 pont)
$x \approx 6,57$ (1 pont)
A fa tehát körülbelül **6,6 méter** magas. (1 pont)
Összesen: 12 pont

19) Aranyékszerek készítésekor az aranyat mindig ötvözik valamilyen másik fémmel. A karát az aranyötvözet finomságát jelöli. Egy aranyötvözet 1 karátos, ha az ötvözet teljes tömegének $\frac{1}{24}$ része arany, a k karátos aranyötvözet tömegének $\frac{k}{24}$ része arany.

Kata örökölt a nagymamájától egy 17 grammos, 18 karátos aranyláncot. Ebből két darab 14 karátos karikagyűrűt szeretne csináltatni.

a) Legfeljebb hány gramm lehet a két gyűrű együttes tömege, ha aranytartalmuk összesen sem több mint az aranylánc aranytartalma? (4 pont)

b) Kata végül két olyan gyűrűt készíttetett, amelyek együttes tömege 16 gramm. (A megmaradó 14 karátos aranyötvözetet törtaranyként visszakapta.) Az elkészült két karikagyűrű tekinthető két lyukas hengernek, amelyek szélessége (a lyukas hengerek magassága) megegyezik. Az egyik gyűrű belső átmérője 17 mm, és mindenhol 1,5 mm vastag, a másik gyűrű belső átmérője 19,8 mm, vastagsága pedig mindenhol 1,6 mm.
Hány mm a gyűrűk szélessége, ha a készítésükhöz használt 14 karátos aranyötvözet sűrűsége 15 $\frac{g}{cm^3}$? **(10 pont)**

Válaszait egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

Megoldás:

a) A 17 gramm 18 karátos ékszer aranytartalma $17 \cdot \frac{18}{24} = 12,75$ (gramm). (2 pont)

x gramm 14 karátos ékszer aranytartalma: $x \cdot \frac{14}{24} = 12,75$ (gramm). (1 pont)

Ebből $x \approx 21,86$, így a két gyűrű együttes tömege legfeljebb **21,9 gramm**. (1 pont)

b) A két gyűrű térfogatának összege $V = \frac{m}{\rho} = \frac{16}{15} \approx 1,0667 \text{ cm}^3 = 1066,7 \text{ mm}^3$. (2 pont)

Egy gyűrű térfogata két henger térfogatának különbsége. (1 pont)

Az egyik gyűrű belső sugara 8,5 mm, külső sugara 10 mm, és ha x a keresett szélesség, akkor $V_1 = 10^2 \cdot \pi \cdot x - 8,5^2 \cdot \pi \cdot x \approx 87,2x$ (mm³). (2 pont)

A másik gyűrű belső sugara 9,9 mm, külső sugara 11,5 mm, így $V_2 = 11,5^2 \cdot \pi \cdot x - 9,9^2 \cdot \pi \cdot x \approx 107,6x$ (mm³) (2 pont)

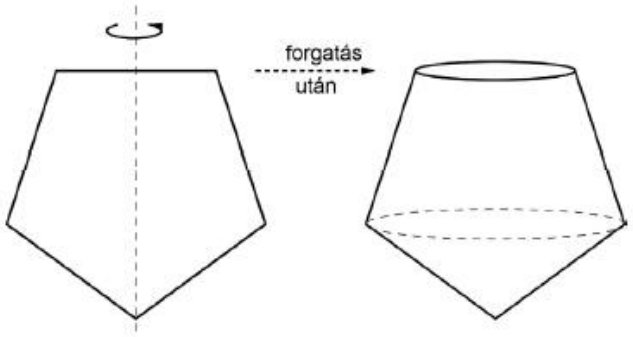
$V = V_1 + V_2$, azaz $1066,7 = 87,2x + 107,6x$. (1 pont)

Ebből $x \approx 5,48$ mm. (1 pont)

A gyűrűk szélessége **5,5 mm**. (1 pont)

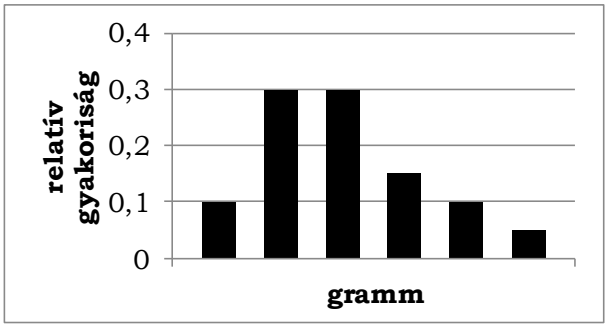
Összesen: 14 pont

20) Egy cég a függőleges irány kijelölésére alkalmas, az építkezéseknél is gyakran használt „függőónt” gyárt, amelynek nehezéke egy acélból készült test. Ez a test egy 2 cm oldalhosszúságú szabályos ötszög egyik szimmetria-tengelye körüli forgatásával származtatható (lásd az ábrán).



a. Hány cm³ a nehezék térfogata? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (9 pont)

A minőség-ellenőrzés 120 darab terméket vizsgált meg. Feljegyezték az egyes darabok egész grammokra kerekített tömegét is. Hatféle tömeg fordult elő, ezek relatív gyakoriságát mutatja az oszlopdiagram.



b. Készítsen gyakorisági táblázatot a 120 adatról, és számítsa ki ezek átlagát és szórását! (5 pont)

Megoldás:

a) A nehezék térfogata egy forgáskúp és egy csonkakúp térfogatának összege. (1 pont)

A forgáskúp magassága az *AFB* derékszögű háromszögből:

$m = 2 \cdot \cos 54^\circ$ (2 pont)

A kúp alapkörének sugara:

$r = 2 \cdot \sin 54^\circ$ (1 pont)

A csonkakúp h magassága a CGD derékszögű háromszögből:

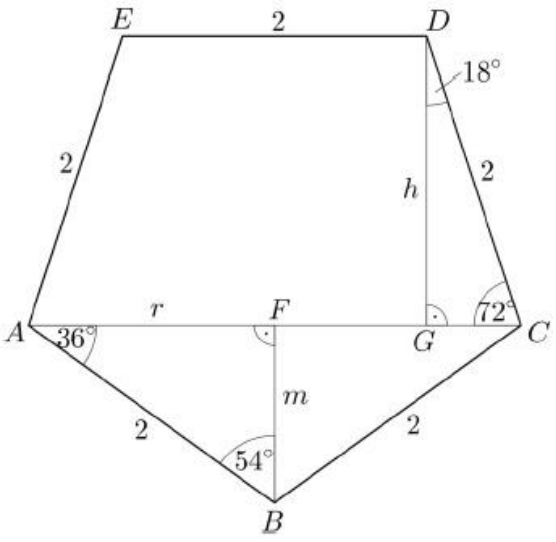
$h = 2 \cdot \sin 72^\circ$ (2 pont)

A forgáskúp térfogata:

$$V_{\text{kúp}} \approx \frac{1{,}62^2 \cdot 1{,}18 \cdot \pi}{3}$$ (1 pont)

A csonkakúp térfogata:

$$V_{\text{csonkakúp}} \approx \frac{1{,}90 \cdot \pi}{3} \cdot \left(1{,}62^2 + 1{,}62 \cdot 1 + 1^2\right)$$ (1 pont)



A nehezék térfogata a kettő összege:

$V_{\text{kúp}} + V_{\text{csonkakúp}} \approx 3{,}24 + 10{,}39 \approx$ **13,6 (cm³)**. (1 pont)

b) A gyakorisági táblázat:

tömeg (gramm)	105	106	107	108	109	110
gyakoriság	12	36	36	18	12	6

(1 pont)

A 120 adat átlaga:

$\frac{12\cdot 105+\ldots 6\cdot 110}{120}=$ **107 (gramm)**. (2 pont)

A 120 adat szórása:

$\sqrt{\frac{12\cdot(105-107)^2+\ldots 6\cdot(110-107)^2}{120}}=\sqrt{1,7}\approx$ **1,3 (gramm)**. (2 pont)

Összesen: 14 pont

21) Egy üzemben olyan digitális műszert gyártanak, amely kétféle adat mérésére alkalmas: távolságot és szöget lehet vele meghatározni. A gyártósor meghibásodott, de ezt hosszabb ideig nem vették észre. Ezalatt sok mérőeszközt gyártottak, ám ezeknek csak a 93%-a adja meg hibátlanul a szöget, a 95%-a méri hibátlanul a távolságot, sőt a gyártott mérőeszközök 2%-a mindkét adatot hibásan határozza meg.

a) Az egyik minőségellenőr 20 darab műszert vizsgál meg visszatevéses mintavétellel a meghibásodási időszak alatt készült termékek közül. Mekkora annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 darab hibásat talál közöttük? (Egy műszert hibásnak tekintünk, ha akár a szöget, akár a távolságot hibásan méri.) (7 pont)

Vízszintes, sík terepen futó patak túlpartján álló fa magasságát kell meghatároznunk. A síkra merőlegesen álló fát megközelíteni nem tudjuk, de van egy kisméretű, digitális műszerünk, amellyel szöget és távolságot is pontosan tudunk mérni. A patakparton kitűzzük az *A* és *B* pontokat, amelyek 10 méterre vannak egymástól. Az *A* pontból 55°-os, a *B*-ből 60°-os emelkedési szög alatt látszik a fa teteje. Szögméréssel még megállapítjuk, hogy $ATB\sphericalangle=90^\circ$, ahol *T* a fa „talppontja".

b) Milyen magas a fa? (9 pont)

Megoldás:

a) A műszerek 7%-a hibásan méri a szöget, 5%-a pedig hibásan méri a távolságot. (1 pont)

Mivel a műszerek 2%-a mindkét adatot hibásan méri, ezért a hibás műszerek aránya:

$5+7-2=10\,\%$. (1 pont)

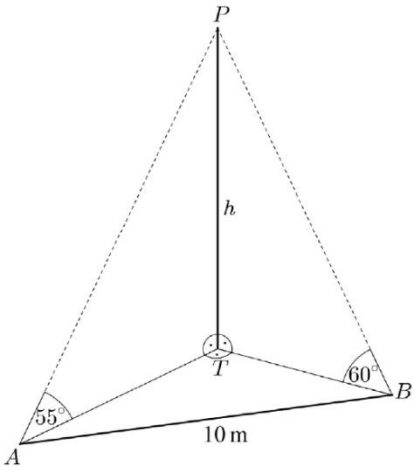
Egy hibátlan műszer választásának valószínűsége tehát 0,9. (1 pont)

Akkor lesz köztük legfeljebb 2 hibás, ha a hibás műszerek száma 0, 1 vagy 2. (1 pont)

Annak a valószínűsége tehát, hogy a 20 kiválasztott műszer között legfeljebb 2 hibás lesz: $0,9^{20}+\binom{20}{1}\cdot 0,9^{19}\cdot 0,1+\binom{20}{2}\cdot 0,9^{18}\cdot 0,1^2$. (2 pont)

A kérdezett valószínűség megközelítőleg **0,677**. (1 pont)

b) Jó ábra felrajzolása (2 pont)



Az ATP háromszögből: $AT = \dfrac{h}{\text{tg}55^\circ} \approx 0{,}700h$ (1 pont)

A BTP háromszögből: $BT = \dfrac{h}{\text{tg}60^\circ} \approx 0{,}577h$ (1 pont)

Az ATB derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel adódik: (1 pont)

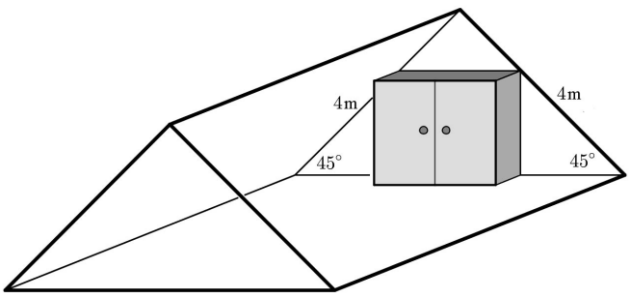
$\dfrac{h^2}{\text{tg}^2 55^\circ} + \dfrac{h^2}{\text{tg}^2 60^\circ} = 100$, (1 pont)

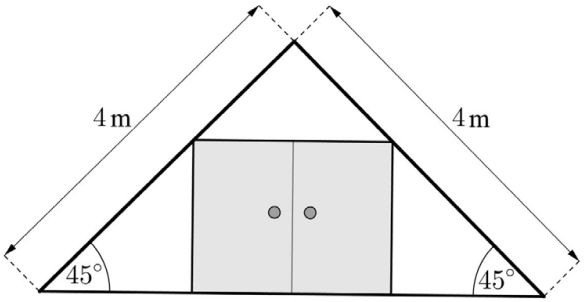
Innen $\boldsymbol{h \approx 11}$. (2 pont)

A fa magassága tehát körülbelül 11 méter. (1 pont)

Összesen: 16 pont

22) Kovács úr a tetőterébe egy téglatest alakú beépített szekrényt készíttet. Két vázlatot rajzolt a terveiről az asztalosnak, és ezeken feltüntette a tetőtér megfelelő adatait is. Az első vázlat „térhatású”, a második pedig elölnézetben ábrázolja a szekrényt.





A tetőtér adottságai miatt a szekrény mélységének pontosan 60 cm-nek kell lennie.

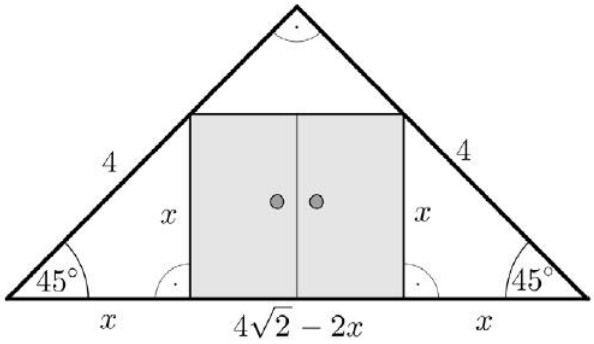
a) Mekkora legyen a szekrény vízszintes és függőleges mérete (azaz a szélessége és a magassága), ha a lehető legnagyobb térfogatú szekrényt szeretné elkészíttetni? (A magasság, a szélesség és a mélység a szekrény külső méretei, Kovács úr ezekkel számítja ki a térfogatot.) (8 pont)

A szekrény elkészült. Az akasztós részébe Kovács úr vasárnap este 7 inget tesz be, a hét minden napjára egyet-egyet. Az ingek között van 2 fehér, 2 világoskék és 3 sárga. Reggelente nagyon siet, ezért Kovács úr csak benyúl a szekrénybe, és anélkül, hogy odanézne, véletlenszerűen kivesz egy inget.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a hét első három napján vagy három különböző színű vagy három egyforma színű inget választ? (Ha valamelyik nap viselt egy inget, azt utána már nem teszi vissza a szekrénybe.) (8 pont)

Megoldás:

a) Ha a szekrény magassága x méter, akkor szélessége az ábrán látható egyenlő szárú háromszögek miatt $4\sqrt{2}-2x$. (2 pont)



A térfogata pedig: $V=0,6x\left(4\sqrt{2}-2x\right)$, amennyiben $0<x<2\sqrt{2}$. (1 pont)

Az $x\mapsto 0,6x\left(4\sqrt{2}-2x\right)$ másodfokú függvénynek két zérushelye van, a 0 és a $2\sqrt{2}$. (1 pont)

Így a negatív főegyüttható miatt ennek a függvénynek a maximuma a két zérushelye számtani közepénél, az $x=\sqrt{2}$ helyen lesz. (2 pont)

Mivel a $\sqrt{2}$ eleme a feladat értelmezési tartományának, ezért a legnagyobb térfogatú szekrény magassága körülbelül **1,41 méter**, szélessége pedig körülbelül **2,83 méter** lesz. (2 pont)

b) Az azonos színű ingeket megkülönböztetve az első három napon $7\cdot 6\cdot 5=210$ különböző lehetőség van a három ing kiválasztására. (1 pont)

Kedvező esemény az, ha valamilyen sorrendben mindegyik színből pontosan egyet vagy három sárga inget választott Kovács úr. (1 pont)

Egy adott színsorrendben $2\cdot 2\cdot 3=12$ különböző módon lehet három inget kiválasztani. (1 pont)

Három adott szín sorrendje 3!-féle lehet, tehát három különböző színű inget $2\cdot 2\cdot 3\cdot 3!=72$ különböző módon választhat ki Kovács úr. (2 pont)

A három sárga inget 3! különböző sorrendben választhatja ki. (1 pont)

A kedvező esetek száma:

$2\cdot 2\cdot 3\cdot 3!+3!=78$. (1 pont)

A kérdezett valószínűség tehát:

$\frac{78}{210}=\frac{13}{35}\approx \mathbf{0,371}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

23) Egy 2 cm sugarú, 20 cm széles festőhengerrel dolgozva egy fordulattal körülbelül 3 ml festéket viszünk fel a falra. (A festőhenger csúszás nélkül gördül a falon.)

a) Elegendő-e 4 liter falfestéket vásárolnunk, ha a szobánkban 40 m²-nyi falfelületet egy rétegben, egyszer akarunk lefesteni? (6 pont)

b) Milyen magasan állna 4 liter falfesték a 16 cm átmérőjű, forgáshenger alakú festékes vödörben?
Válaszát cm-ben, egészre kerekítve adja meg! (5 pont)

Megoldás:

a) Az egy fordulattal lefestett falfelület nagysága a (festő)henger palástjának területével egyenlő. (1 pont)

$T_{\text{palást}} = 2 \cdot 2 \cdot 20 \cdot \pi = 80\pi \left(\approx 251{,}3 \text{ cm}^3\right)$ (1 pont)

$40 \text{ m}^2 = 400\,000 \text{ cm}^2$, (1 pont)

tehát a teljes falfelület befestéséhez

kb. $\frac{400\,000}{251{,}3} \approx 1592$ fordulatra van szükség a festőhengerrel. (1 pont)

Ennyi fordulattal kb. $1592 \cdot 3 = 4776$ ml festéket viszünk fel a falra. (1 pont)

4 liter festék megvásárlása tehát nem elegendő. (1 pont)

b) $4 \text{ liter} = \left(4 \text{ dm}^3 =\right) 4000 \text{ cm}^3$ (1 pont)

$r = 8$ cm (1 pont)

$4000 \text{ cm}^3 = 8^2 \cdot \pi \cdot m$ (1 pont)

Ebből $m = \frac{4000}{64\pi} \approx 19{,}9 (\text{cm})$. (1 pont)

A festék tehát kb. 20 cm magasan állna a vödörben. (1 pont)

Összesen: 11 pont

24)

a) Egy kocka és egy gömb felszíne egyenlő. Bizonyítsa be, hogy a gömb térfogata nagyobb, mint a kockáé! (6 pont)

Két fémkocka összeolvasztásával egy nagyobb kockát készítünk. Az egyik beolvasztott kocka egy élének hossza *p*, a másiké pedig *q* $(p > 0, q > 0)$. (Feltesszük, hogy az összeolvasztással kapott kocka térfogata egyenlő a két összeolvasztott kocka térfogatának összegével.)

b) Igazolja, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne $6 \cdot \sqrt[3]{\left(p^3 + g^3\right)^2}$. (2 pont)

c) Bizonyítsa be, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne kisebb, mint a két összeolvasztott kocka felszínének összege! (8 pont)

Megoldás:

a) Ha a két test felszíne egyaránt A, akkor $V^2_{\text{kocka}} = \frac{A^3}{6^3}$, (2 pont)

$V^2_{\text{gömb}} = \frac{A^3}{36\pi}$ (2 pont)

Mivel $36\pi < 6^3$, (1 pont)

ezért **a gömb térfogata valóban nagyobb a kocka térfogatánál.** (1 pont)

b) Az összeolvasztással kapott kocka térfogata p^3+q^3, ezért élének hossza $\sqrt[3]{p^3+q^3}$, (1 pont)

felszíne tehát $6\cdot\left(\sqrt[3]{p^3+q^3}\right)^2$, ami valóban $6\cdot\sqrt[3]{\left(p^3+q^3\right)^2}$ -nel **egyenlő.** (1 pont)

c) A bizonyítandó állítás: $6\cdot\sqrt[3]{\left(p^3+q^3\right)^2}<6\cdot\left(p^2+q^2\right)$ (1 pont)

Mindkét oldalt 6-tal osztva és köbre emelve (az x^3 függvény szigorú monotonitása miatt): $\left(p^3+q^3\right)^2<\left(p^2+q^2\right)^3$. (1 pont)

Elvégezve a hatványozásokat: $p^6+2p^3q^3+q^6<p^6+3p^4q^2+3p^2q^4+q^6$. (2 pont)

Rendezve és a pozitív p^2q^2 szorzattal osztva: $0<3p^2+3q^2-2pq$. (1 pont)

$0<2p^2+2q^2+\left(p-q\right)^2$, (1 pont)

ez pedig mindig igaz (hiszen a jobb oldalon két pozitív és egy nemnegatív szám összege áll). (1 pont)

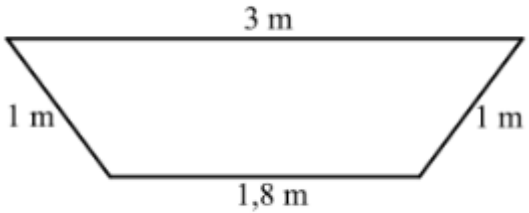
Mivel minden átalakítás ekvivalens volt, ezért a bizonyítandó állítás is **igaz.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

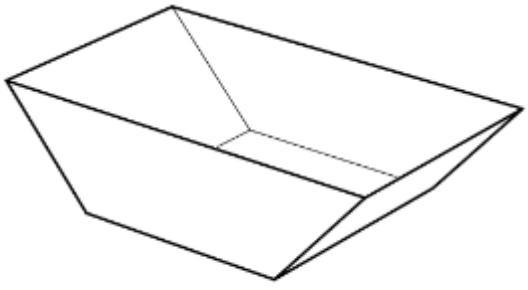
25) Egy kisüzemi meggymagozó-adagoló gép 0,01 valószínűséggel nem távolítja el a magot a meggyből, mielőtt a meggyszemet az üvegbe teszi. A magozógépen áthaladt szemek közül 120-120 darab kerül egy-egy üvegbe.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy kiválasztott üvegben legalább 2 darab magozatlan szem van! (5 pont)

A termelés során keletkezett hulladékot nagy méretű konténerbe gyűjtik, melyet minden nap végén kiürítenek és kitisztítanak. A konténer egyenes hasáb alakú. A hasáb magassága 2 m, alaplapja húrtrapéz, melynek méretei az 1. ábrán láthatók. A konténert vízszintes felületen, az 1,8 m×2 m-es (tégla-lap alakú) lapjára állítva helyezik el (lásd a 2. ábrát).



1. ábra



2. ábra

b) Számítsa ki a hasáb térfogatát! Határozza meg, hogy milyen magasan áll a konténerben a tisztításához beletöltött 2,7 m³ térfogatú folyadék! (11 pont)

Megoldás:

a) 0,99 annak a valószínűsége, hogy egy adott szem meggyből az automata eltávolítja a magot. (1 pont)



A komplementer esemény (0 vagy 1 mag kerül az üvegbe) valószínűsége

$0,99^{120}+\binom{120}{1}\cdot 0,01\cdot 0,99^{119}$

. (2 pont)

Ezért a kérdezett valószínűség: $1-0,99^{120}-\binom{120}{1}\cdot 0,01\cdot 0,99^{119}$, (1 pont)

ami körülbelül **0,34**. (1 pont)

b) (A hasáb alaplapja az *ABCD* húrtrapéz.)

Az ábra jelöléseit használva, az APD derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel: $m=\sqrt{1^2-0,6^2}=0,8$ (m). (1pont)

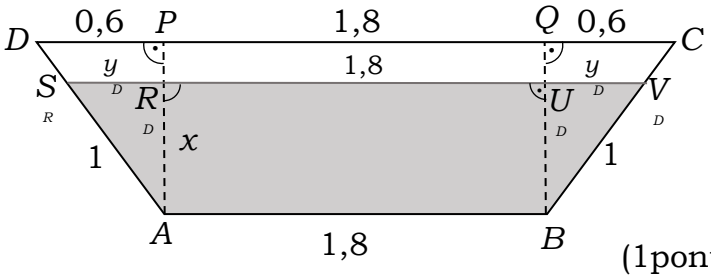
A hasáb alaplapjának (az *ABCD* trapéznak) a területe: $\left(\frac{1,8+3}{2}\cdot 0,8=\right)1,92$ (m^2), (1 pont)

tehát a hasáb (a konténer) térfogata: (=·292,1) 3,84 m^3. (1pont)

A tisztító folyadék x méter magasságban áll a konténerben. A folyadék egy olyan szimmetrikus trapéz alapú egyenes hasábot tölt meg, (1 pont)

amelynek a magassága 2 méter, az alaplapjának a területe pedig $\left(\frac{2,7}{2}=\right)1,35$ (m^2). (1 pont)

Az (ábra szerinti) *APD* és *ARS* derékszögű háromszögek hasonlósága miatt $\frac{SR}{AR}=\frac{DP}{AP}$,



(1 pont)

azaz $\frac{y}{x}=\frac{0,6}{0,8}=\frac{3}{4}$. (1pont)

$SV = 1{,}8 + 2y = 1{,}8 + 1{,}5x$, ezért (mivel az $ABVS$ trapéz területe 1,35 m^2)
$\frac{1{,}8 + 1{,}8 + 1{,}5x}{2} \cdot x = 1{,}35$ (1pont)

Ebből $1{,}5x^2 + 3{,}6x - 2{,}7 = 0$, (1 pont)

amelynek a gyökei 0,6 és –3. (1 pont)

(A –3 nem felel meg, tehát) **a tisztító folyadék 0,6 méter magasságban áll a konténerben.** (1pont)

Összesen16 pont

26) Egy automatának 100 gramm tömegű hasábokat kell két egyenlő tömegű részre szétvágnia. A két darab közül az egy az *A* futószalagra kerül, a másik a *B* futószalagra. Az utolsó négy darabolásnál az automata hibája miatt az *A* futószalagra került darabok tömege 51 g, 52 g, 47 g, 46 g.

a) Igazolja, hogy a két futószalagra került 4-4 darab tömegének átlaga különbözik, a szórása pedig megegyezik! (16 pont)

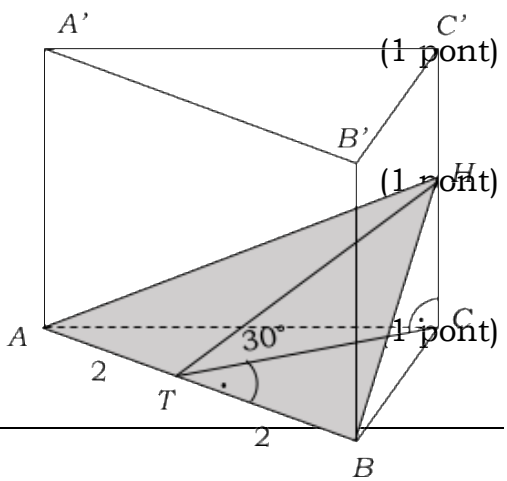
Egy háromoldalú egyenes hasáb alapéleinek hossza: $AB = 4$, $AC = BC = \sqrt{13}$, a hasáb magassága $2\sqrt{3}$ hosszúságú. Az AB alapél egyenesére illeszkedő S sík $30°$-os szöget zár be a hasáb alaplapjával, és két részre vágja a hasábot.

b) Számítsa ki a két rész térfogatának arányát! (11 pont)

Megoldás:

a) A *B* futószalagra került darabok tömege 49 g, 48 g, 53 g és 54 g. (1 pont)
(Az *A* futószalagra került darabok tömege csökkenő sorrendben 52 g, 51 g, 47 g és 46 g, a *B* futószalagra került darabok tömege pedig 54 g, 53 g, 49 g, 48 g, tehát) a *B* futószalagra került darabok tömege rendre 2 grammal nagyobb, mint a megfelelő, *A* futószalagra került darabé. (1 pont)
Ha egy adatsokaság minden adatához *c*-t hozzáadunk, akkor a sokaság átlaga *c*-vel változik, a szórása pedig változatlan marad. (2 pont)
Tehát a két futószalagra került **darabok tömegének átlaga különböző** (a különbség $c = 2$ gramm), szórása pedig egyenlő. (1 pont)

b) A 30°-os szög helyes értelmezése (például a szög jelölése az ábrán). (1 pont)
Az *ABC* egyenlőszárú háromszög *AB* oldalához tartozó magassága (Pitagorasz-tétellel): $TC = 3$. (1 pont)
Az *S* sík a *CC'* élt a *H* pontban metszi. A *TCH* derékszögű háromszögből: $\tan 30° = \frac{CH}{TC}$, (1 pont)



ahonnan $CH = (TC \cdot \tan 30° =) 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$. (1 pont)

Az ABC lapot tartalmazó rész egy tetraéder, melynek ABC lapjához tartozó magassága CH. (1 pont)

$(T_{ABC} = 6,\ ezért) V_{ABCH} = \frac{T_{ABC} \cdot CH}{3} = 2\sqrt{3} (\approx 3,46)$ (1 pont)

A másik rész térfogatát megkapjuk, ha az első rész térfogatát levonjuk az eredeti hasáb térfogatából. (1 pont)

$V_{ABCA'B'C'} = T_{ABC} \cdot CC' = 12\sqrt{3} (\approx 20,78)$ (1 pont)

$V_{ABHA'B'C'} = 12\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3} (\approx 17,32)$ (1 pont)

$\boldsymbol{\frac{V_{ABCH}}{V_{ABHA'B'C'}} = \frac{2\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{5}}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont