MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI
EMELT SZINT

Számelmélet

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Az 52941 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben.

a) Az 52941 számmal együtt hány ötjegyű számot kapunk? (2 pont)

b) Ezen számok közül hány osztható 12-vel? (6 pont)

c) Bizonyítsa be, hogy e számok egyik sem négyzetszám! (4 pont)

Megoldás:

a) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{120}$ darab ilyen ötjegyű számot képezhetünk (2 pont)

b) Egy egész szám pontosan akkor osztható 12-vel, ha osztható 3-mal és 4-gyel is (1 pont)

Az ötjegyű számok mindegyike osztható 3-mal, mert a számjegyek összege mindegyiknél 21, ami osztható 3-mal (1 pont)

4-gyel ezen ötjegyű számok közül azok oszthatók, amelyek utolsó két számjegye a következő: 12; 52; 92; 24 (1 pont)

Az ötjegyű számban az első három számjegyből álló szám hatféle lehet, ha az utolsó kettőt rögzítettük (2 pont)

így az ötjegyű számok között $4 \cdot 6 = \mathbf{24}$ db 12-vel osztható szám van (1 pont)

c) Az ötjegyű számok mindegyikében a számjegyek összege 21 (1 pont)

Tehát a számok oszthatók 3-mal (1 pont)

Mivel 3-mal oszthatóak, ezért csak abban az esetben lehetne köztük négyzetszám, ha az 3 valamely páros kitevőjű hatványa lenne. Ehhez feltétlenül szükséges az is, hogy 9-cel osztható legyen, 9-cel viszont nem osztható egyik sem, **így egyik szám sem lehet négyzetszám.** (2 pont)

Összesen: 12 pont

2)

a) Hány olyan tízjegyű pozitív szám van, amelynek minden számjegye a $\{0;8\}$ halmaz eleme? (3 pont)

b) Írja fel 45-nek azt a legkisebb pozitív többszörösét, amely csak a 0 és 8-as számjegyeket tartalmazza! (7 pont)

Megoldás:

a) A legnagyobb helyi értékű szám csak a 8-as lehet (1 pont)

A többi 9 helyi érték mindegyikénél két lehetőségünk van (1 pont)

Így $2^9 = \mathbf{512}$ ilyen tízjegyű szám képezhető (1 pont)

b) Egy szám akkor és csak akkor osztható 45-tel, ha 5-tel és 9-cel is osztható (2 pont)
Mivel a keresett szám 5-tel osztható, ezért csak 0-ra végződhet (1 pont)
Egy (pozitív egész) szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha a számjegyek összege osztható 9-cel (1 pont)
Csak 0 és 8 számjegyeket tartalmazó egész szám esetén ehhez legalább 9 darab 8-as számjegy kell (1 pont)
A legkisebb (pozitív) többszöröshöz pontosan 9 darab 8-as számjegyre van szükség (1 pont)
tehát a keresett szám **8 888 888 880** (1 pont)

Összesen: 10 pont

3) Két valós szám összege 29. Ha az egyikből elveszünk 15-öt, a másikhoz pedig hozzáadunk 15-öt, az így kapott két szám szorzata éppen ötszöröse lesz az eredeti két szám szorzatának. Melyik lehet ez a két szám? (13 pont)

Megoldás:

Jelölje x azt a számot, amelyet 15-tel csökkentünk, y pedig a másikat

$$\left.\begin{aligned} x+y&=29\\ (x-15)\cdot(y+15)&=5xy\end{aligned}\right\}$$ (2 pont)

Az első egyenletből például y-t kifejezve és a második egyenletbe behelyettesítve: $(x-15)\cdot(29-x+15)=5x(29-x)$ (1 pont)

A műveleteket elvégezve:
$-x^2+59x-660=145x-5x^2$ (3 pont)
Rendezve: $4x^2-86x-660=0$ (1 pont)
Az egyenlet megoldásai a -6 és a $27{,}5$ (2 pont)
Ha a 15-tel csökkentendő szám a **–6**, akkor a másik szám a **35** (1 pont)
Ha a 15-tel csökkentendő szám a **27,5**, akkor a másik szám a **1,5** (1 pont)
Ellenőrzés a szöveg alapján:
Ha a két szám a -6 és a 35, akkor az összegük 29, a szorzatuk -210
A megváltoztatott számok a -21 és az 50, ezek szorzata -1050, ami valóban az 5-szöröse a -210-nek (1 pont)
Ha a két szám a 27,5 és az 1,5, akkor az összegük 29, a szorzatuk 41,25.
A megváltoztatott számok a 12,5 és a 16,5, ezek szorzata 206,25, ami valóban 5-szöröse a 41,25-nek. (1 pont)

Összesen: 13 pont

4) Melyek azok a tízes számrendszerben kétjegyű természetes számok, amelyekben a számjegyek számtani és harmonikus közepének a különbsége 1? (16 pont)

Megoldás:

(Ha a keresett szám $10a+b$, akkor – mivel két szám számtani közepe nem kisebb a számok harmonikus közepénél – a feladat szövege szerint) $\frac{a+b}{2}-\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=1$ (ahol a és b nullától különböző számjegyek) (2 pont)

Ezt átalakítva: $(a-b)^2=2(a+b)$ (2 pont)

Mivel a és b számjegyek, ezért $(a-b)^2=2(a+b)\le 36$ (1 pont)

Mivel $2(a+b)$ páros, ezért $(a-b)^2$ is, tehát vagy mindkét számjegy páros vagy mindkettő páratlan. (1 pont)

Pozitív páros négyzetszám 36-ig három van: 4, 16 és 36, azaz vagy 2 vagy 4 vagy 6 a két számjegy különbsége. (1 pont)

I) $|a-b|=2$

Ekkor $4=2(a+b)\Rightarrow 2=a+b$ (1 pont)

(Mivel mindkettő 0-nál nagyobb egész, ezért) csak $a=1$, $b=1$ lehetne, ekkor viszont a számtani és harmonikus közép egyenlő, tehát ezen az ágon nincs megfelelő szám. (1 pont)

II) Ha $|a-b|=4$, akkor $a+b=8$ (1 pont)

Az egyenletrendszert megoldva kapjuk:
$a=6$ és $b=2$ (1 pont)
vagy $a=2$ és $b=6$. (1 pont)

III) $|a-b|=6$

Ekkor $36=2(a+b)\Rightarrow 18=a+b$ (1 pont)

(Mivel mindkettő 10-nél kisebb egész, ezért) csak $a=9$, $b=9$ lehetne, ekkor viszont a számtani és harmonikus közép egyenlő, tehát ezen az ágon sincs megfelelő szám. (1 pont)

Mivel csak a II) esetben kaptunk megoldást, ezért a megfelelő számok a **26** és a **62**. (1 pont)

Ellenőrzés: a 2 és a 6 számtani közepe 4, harmonikus közepe 3, tehát megfelelnek a feladat feltételeinek. (1 pont)

Összesen: 16 pont

5)

a) Egy téglalapot 720 darab egybevágó kis téglalapra daraboltunk szét. A kis téglalapok oldalai közül az egyik 1 cm-rel hosszabb, mint a másik. Hány cm hosszúak egy-egy kis téglalap oldalai, ha a nagy téglalap területe 2025 cm²? (7 pont)

b) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből összesen 720 olyan hatjegyű szám képezhető, melynek számjegyei között nincsenek egyenlők. Ezek között hány 12-vel osztható van. (5 pont)

Megoldás:

a) Egy kis téglalap oldalainak hossza x cm, illetve $x+1$ cm, területe $x\cdot(x+1)$ cm^2. (1 pont)

A feladat szövegéből kiindulva: $720\cdot x\cdot(x+1)=2025$. (1 pont)

A zárójelet felbontva, majd 45-tel leegyszerűsítve:

$16x^2+16x-45=0$ (1 pont)

A két gyöke x-nek: $x_1=1{,}25;\ x_2=-2{,}25$. (1 pont)

A negatív gyök nem lehet megoldása a feladatnak! (1 pont)

A téglalap rövidebb oldala tehát **1,25 cm**, hosszabb oldala pedig **2,25 cm** hosszú. (1 pont)

Ellenőrzés: $720\cdot1{,}25\cdot2{,}25=2025$ igaz, tehát a válasz helyes. (1 pont)

b) 12-vel azok a természetes számok oszthatók, amelyek 3-mal és 4-gyel is oszthatók. (1 pont)

Mivel $1+2+3+4+5+6=21$, ezért mind a 720 különböző hatjegyű szám osztható 3-mal. (1 pont)

Azok a hatjegyű számok oszthatók 4-gyel, amelyeknél az utolsó két számjegy 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56 vagy 64. (1 pont)

Mindegyik végződés 4!, azaz 24 darab hatjegyű szám esetében fordul elő. (1 pont)

Emiatt a vizsgált számok között $8\cdot24=$ **192** darab 12-vel osztható van. (1 pont)

Összesen: 12 pont

6) Adott síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $y=3x^2-x^3$ egyenletű görbe.

a) Igazolja, hogy ha $x\in]0;3[$, akkor $y>0$. (4 pont)

b) Írja fel a görbe 3 abszcisszájú pontjában húzható érintőjének egyenletét! (abszcissza: első koordináta) (5 pont)

c) Számítsa ki annak a síkidomnak a területét, amelyet a görbe első síknegyedbe eső íve és az x tengely fog közre! (5 pont)

Megoldás:

a) $3x^2-x^3=x^2\cdot(3-x)$ (1 pont)

Az x^2 tényező pozitív, mert $x\neq0$. (1 pont)

A $3-x$ tényező is pozitív, mert $x<3$, (1 pont)

Így a két tényező szorzata is pozitív, ha $x\in]0;3[$. (1 pont)

b) (A megadott görbe az $f(x)=3x^2-x^3$, $x\in\mathbb{R}$ függvény grafikonja.)

Ekkor $f'(x)=6x-3x^2$, (1 pont)

$f'(3)=-9$, (1 pont)

$f(3)=0$. (1 pont)

Az érintő meredeksége tehát -9 (és átmegy a $(3;0)$ ponton). (1 pont)

Az érintő egyenlete: $\boldsymbol{y=-9x+27}$. (1 pont)

c) Az $y=3x^2-x^3$ egyenletű görbének az $x=0$ helyen van közös pontja az x tengellyel. (1 pont)

(Tudjuk, hogy ha $x\in[0;3]$, akkor $y\geq 0$, ezért) a kérdezett terület

$T=\int_0^3 f(x)\,dx$. (1 pont)

$\int_0^3\left(3x^2-x^3\right)dx=\left[x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^3=$ (2 pont)

$=\left(27-\frac{81}{4}\right)-(0-0)=\mathbf{6,75}$. (1 pont)

Összesen: 14 pont