MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI
EMELT SZINT

Statisztika

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Egy gimnázium egyik érettségiző osztályába 30 tanuló jár, közülük 16 lány. A lányok testmagassága centiméterben mérve az osztályozó naplóbeli sorrend szerint:
166, 175, 156, 161, 159, 171, 167, 169, 160, 159, 168, 161, 165, 158, 170, 159

a) Számítsa ki a lányok testmagasságának átlagát! Mekkora az osztály tanulóinak centiméterben mért átlagmagassága egy tizedesjegyre kerekítve, ha a fiúk átlagmagassága 172,5 cm? (5 pont)

Ebben a 30 fős osztályban a tanulók három idegen nyelv közül választhattak, ezek az angol, német és francia.

b) Hányan tanulják mindhárom nyelvet, és hányan nem tanulnak franciát, ha tudjuk a következőket:
(1) minden diák tanul legalább két nyelvet.
(2) Az angol is és németet is tanuló diákok száma megegyezik a franciát tanuló diákok számával.
(3) Angolul 27-en tanulnak.
(4) A németet is és franciát is tanulók száma 15. (7 pont)

Megoldás:

a) A lányok testmagasságának átlaga: $\frac{2624}{16} = 164$ cm (1 pont)

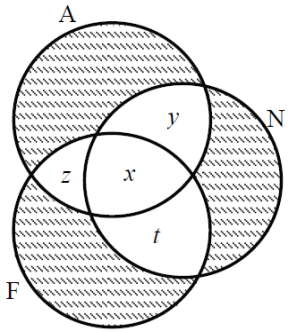
Az osztály tanulóinak átlagmagasságát (t) a 16 lány átlagmagassága (l) és a 14 fiú átlagmagassága (f) segítségével számolhatjuk ki: $t = \frac{16 \cdot l + 14 \cdot f}{30} =$ (1 pont)

$= \frac{16 \cdot 164 + 14 \cdot 172{,}5}{30} =$ (1 pont)

$= \frac{5039}{30}$ (1 pont)

Az osztály tanulóinak átlagmagassága **168,0 cm.** (1 pont)

b) Ha az osztály 30 tanulóját a három tanult nyelv szerint Venn-diagramon ábrázoljuk, csak négy tartományba jut tanuló, az ábra alapján jelöljük az egyes tartományokat x-szel, y-nal, z-vel és t-vel. (2 pont)



(1) alapján $x+y+z+t=30$

(2) alapján $z+t=y$

(3) alapján $x+y+z=27$

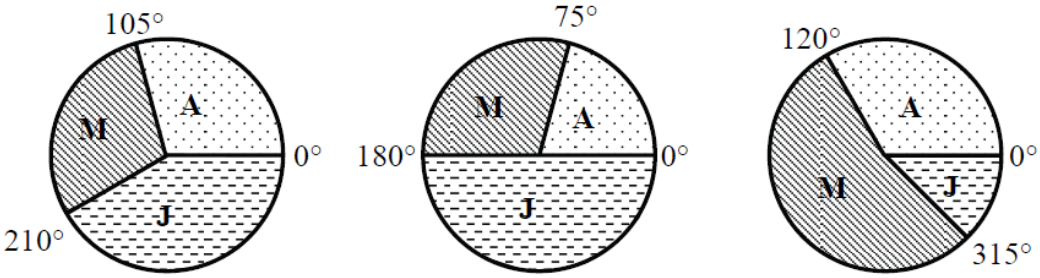
(4) alapján $x+t=15$ (2 pont)

Ezekből: $x=12, y=9, z=6, t=3$ (2 pont)

Három nyelven 12-en tanulnak, és 9-en nem tanulnak franciát. (1 pont)

Összesen: 12 pont

2) Egy könyvkiadó minden negyedévben összesíti, hogy három üzletében melyik szépirodalmi kiadványból fogyott a legtöbb. A legutóbbi összesítéskor mindhárom üzletben ugyanaz a három szerző volt a legnépszerűbb: Arany János, Márai Sándor és József Attila. Az alábbi kördiagramok szemléltetik, hogy az üzletekben milyen arányban adták el ezeknek a szerzőknek a műveit. A kördiagramok az első üzletből 408, a másodikból 432, a harmadikból 216 eladott könyv eloszlását szemléltetik.



a) A kördiagramok adatai alapján töltse ki az alábbi táblázatot! Melyik szerző műveiből adták el a vizsgált időszakban a legtöbb könyvet? (5 pont)

	1. üzlet	2. üzlet	3. üzlet	Összesített forgalom
Arany János				
Márai Sándor				
József Attila				
Összesen	**408**	**432**	**216**	

b) Készítsen olyan oszlopdiagramot a táblázat alapján, amely a vizsgált időszakban a szerzők szerinti összesített forgalmat szemlélteti!(3 pont)

A könyvkiadó a három üzletében minden eladott könyvhöz ad egy sorsjegyet. Ezek a sorsjegyek egy közös sorsoláson vesznek részt negyedévenként. A vizsgált időszakban azok a sorsjegyek vesznek részt a sorsoláson, amelyeket a fenti három szerző műveinek vásárlói kaptak. Két darab 50 ezer forintos könyvutalványt sorsolnak ki köztük.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a vizsgált időszak sorsolásán mind a két nyertes sorsjegyet Márai Sándor egy-egy könyvéhez adták, és mind a két könyvet a 2. üzletben vásárolták? Válaszát három tizedesjegy pontossággal adja meg! (5 pont)

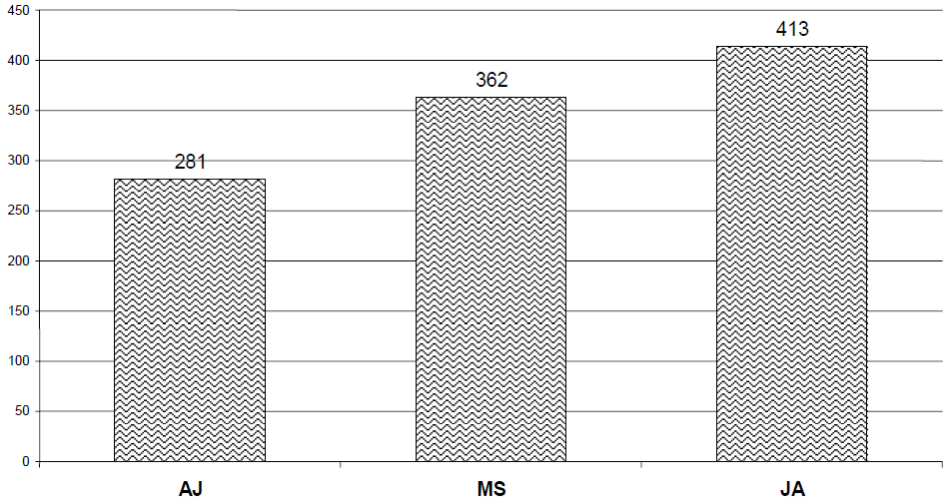
Megoldás:

a) A kördiagramok alapján:

	1. üzlet	2. üzlet	3. üzlet	Összesített forgalom
Arany János	**119**	**90**	**72**	**281**
Márai Sándor	**119**	**127**	**117**	**362**
József Attila	**170**	**216**	**27**	**413**
Összesen	408	432	216	

helyes oszloponként 1-1 pont (4 pont)
A legtöbb példányt József Attila műveiből adták el. (1 pont)

b) Eladott könyvek:



Jó adatokat tüntet fel (1 pont)
Arányos a diagram. Célszerűen választ egységet (1 pont)
Rendezett az ábra. (1 pont)

c) A vizsgált időszakban a sorsoláson résztvevő sorsjegyek száma: $408+432+216=1056$ (1 pont)

Ezek közül 2 nyerő sorsjegyet összesen $\binom{1056}{2}$-féleképpen lehet kisorsolni (1 pont)

A 2. üzletben 126 Márai-könyvhöz adtak sorsjegyet, ezek közül $\binom{126}{2}$-féleképpen lehet 2 nyerőt kisorolni (1 pont)

A keresett valószínűség: $\dfrac{\binom{126}{2}}{\binom{1056}{2}}$, (1 pont)

ennek értéke $p=\dfrac{7875}{557040}\approx \mathbf{0,014}$ (1 pont)

Összesen: 13 pont

3) Egy felmérés során megkérdeztek 640 családot a családban élő gyermekek számáról, illetve azok neméről. A felmérés eredményét az alábbi táblázat mutatja:

lányok száma \ fiúk száma	0	1	2	3	4	5
0	160	103	61	8	5	0
1	121	58	11	4	1	1
2	54	15	3	2	2	2
3	9	3	1	1	0	1
4	6	3	1	1	1	0
5	1	0	1	0	0	0

(Tehát pl. a gyermektelen családoknak a száma 160, és 15 olyan család volt a megkérdezettek közt, amelyben 1 fiú és 2 lány van.)

a) Hány fiúgyermek van összesen a megkérdezettek családokban? (3 pont)

b) A felmérésben szereplő legalább kétgyermekes családokban mennyi a leggyakoribb leányszám? (5 pont)

c) A családsegítő szolgálat a megkérdezett családok közül a legalább négy gyermeket nevelőket külön támogatja. Az alábbi táblázat kitöltésével készítsen gyakorisági táblázatot a külön támogatásban részesülő családokban lévő gyermekek számáról!

gyermekszám egy családban	4	5	6	7	8	9	10
gyakoriság							

Hány családot és összesen hány gyermeket támogat a családsegítő szolgálat? (6 pont)

Megoldás:

a) A fiúk számát az oszlopokban lévő adatok alapján számoljuk ki (1 pont)
$(103+58+15+3+3+0)+2\cdot(61+11+3+3\cdot 1)+3\cdot 16+4\cdot 9+5\cdot 4=$ (1 pont)
$=$ **442** fiú van összesen a megkérdezett családokban (1 pont)

b) A lányok számát a táblázatból soronként számolhatjuk ki, de a gyermektelen és egygyermekes családok adatait (160, illetve 103 és 121) nem vesszük figyelembe. Nincs lány $61+8+5=74$ családban (1 pont)
1 lány van $58+11+4+1+1=75$ családban (1 pont)
2 lány van $54+15+3+2+2+2=78$ családban (1 pont)
3 lány van $9+3+1+1+1=14$ családban
4 lány van $6+3+1+1+1=12$ családban (1 pont)
5 lány van $1+1=2$ családban
A legalább kétgyermekes családokban a leggyakoribb leányszám a **2** (1 pont)

c)

gyermekszám egy családban	4	5	6	7	8	9	10
gyakoriság	21	8	5	4	2	0	0

A gyakoriság helyes értelmezése (1 pont)
A táblázatban van legalább 4 helyes gyakoriság (1 pont)
Minden gyakoriság helyes (1 pont)
A támogatott családok száma 40 (1 pont)
A támogatott gyermekek száma: $21\cdot 4+8\cdot 5+5\cdot 6+4\cdot 7+2\cdot 8=$ (1 pont)
$=$ **198** (1 pont)

Összesen: 14 pont

4) Az ENSZ 1996-ban megjelent táblázatának egy részlete a nyolc legnagyobb népességszámú ország népességi adatait tartalmazza 1988-ban és egy népességdinamikai előrejelzés szerint 2050-ben.

	1988		2050 (előrejelzés)	
Sorrend	**Ország**	**Népességszám (millió fő)**	**Ország**	**Népességszám (millió fő)**
1	Kína	1255	India	1533
2	India	976	Kína	1517
3	Egyesült Államok	274	Pakisztán	357
4	Indonézia	207	Egyesült Államok	348
5	Brazília	165	Nigéria	339
6	Oroszország	148	Indonézia	318
7	Pakisztán	147	Brazília	243
8	Japán	126	Banglades	218

(World Population Prospects: The 1996 Revision)

Feltételezzük, hogy Pakisztán lakossága 1988 és 2050 között minden évben ugyanannyi százalékkal nő, mint amennyivel az előző évben növekedett.

a) Ezzel a feltételezéssel élve –millió főre kerekítve- hány lakosa lesz Pakisztánnak 2020-ban? (Az évi százalékos növekedés két tizedesjegyre kerekített értékével számoljon!) (7 pont)

b) A tábláztat mindkét oszlopában szereplő országok népességi adataira vonatkozóan mennyivel változik az átlagos lakosságszám és a medián 1988 és 2050 között? (Válaszát millió főben, két tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (5 pont)

Megoldás:

a) Pakisztán lakosságszáma az előrejelzés alapján 147 millióról 357 millióra nő 62 év alatt (1 pont)

Így ha az évi növekedés p százalékos, akkor $357 = 147 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{62}$ (1 pont)

ahonnan $p = 100 \cdot \left(\sqrt[62]{\frac{357}{147}} - 1\right)$ (1 pont)

Kiszámolva a kért kerekítéssel $p \approx 1{,}44\%$ (1 pont)

A vizsgált növekedési időszak 32 év (1 pont)

így a feltételezés és előrejelzés alapján 2020-ban Pakisztán lakossága $147 \cdot 1{,}0144^{32} \approx$ (1 pont)

$\approx$ **232 (millió fő)** (1 pont)

b) Hat ország szerepel minden oszlopban: Kína, India, Egyesült Államok, Indonézia, Pakisztán, Brazília (1 pont)
Erre a hat országra nézve a népesség átlaga (millió főben) 1988-ban: $\frac{1255+976+274+207+165+147}{6}=504$
és 2050-ben : $\frac{1533+1517+357+348+318+243}{6}\approx 719,33$ (1 pont)
Az átlagos népességszám közelítőleg 215,33 (millió fő)-vel nő (1 pont)
Mivel a minta 6 elemű, ezért a medián a rendezett adatsokaság két középső elemének számtani átlaga. Így a medián 1988-ban $\frac{274+207}{2}=240,5$, 2050-ben pedig $\frac{357+348}{2}=352,5$ (1 pont)
A medián is nő, 112 (millió fő)-vel (1 pont)
Összesen: 12 pont

5) Az alábbi táblázat egy ország munkaképes lakosságának foglalkoztatottság szerinti megoszlását mutatja. Az adatok ezer főre kerekítettek.

	Ágazatok	2003. év	2004. év
Foglalkoztatottak	**Mezőgazdaságban dolgozó**	**1020**	
	Iparban dolgozó	**1870**	**1936**
	Szolgáltatásban dolgozó	**5015**	
Munkanélküli		**595**	
Munkaképes lakosság összesen		**8500**	

2004-ben
- **az ország munkaképes lakosságának száma 3 ezrelékkel nőtt 2003-hoz képest**
- **a munkanélküliek aránya a munkaképes lakosságban változatlan maradt**
- **a szolgáltatásban dolgozók száma a 2003-ban ott dolgozók számának 2%-ával megnőtt.**

a) Számítsa ki a táblázat hiányzó adatait (ezer főre kerekítve)! (7 pont)
b) Ábrázolja kördiagramon a foglalkoztatottak ágazatok szerinti megoszlását 2003-ban! (5 pont)
c) Hány százalékkal változott a mezőgazdaságban dolgozók száma 2004-re a 2003-as állapothoz képest? Nőtt vagy csökkent? (4 pont)

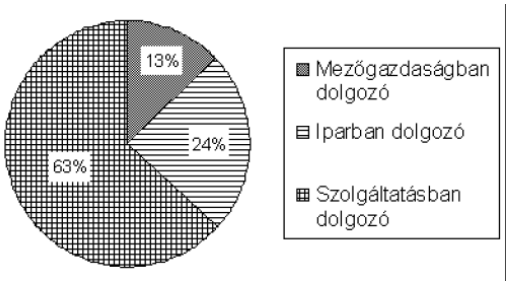
Megoldás:

a) A munkaképes lakosság száma $8500\cdot 1,003\approx 8526$ ezer fő (2 pont)
A munkanélküliek aránya változatlan, ezért a számuk $8526\cdot\frac{595}{8500}\approx$ **597** ezer fő (2 pont)
A szolgáltatásban dolgozók száma $5015\cdot 1,02=$ **5115** ezer fő (2 pont)
A mezőgazdaságban dolgozók száma $8526-597-1926-5115=$ **888** ezer fő (1 pont)

b) 2003-ban a foglalkoztatottak száma 7905 ezer fő volt (1 pont)
A kördiagramon a mezőgazdaságban dolgozókat szemléltető körcikk középponti szöge az aránynak megfelelően: $\frac{1020}{7905}\cdot 360° \approx 46°$ (1 pont)

Az iparban dolgozókat szemléltető körcikk középponti szöge $\frac{1870}{7905}\cdot 360° \approx 85°$ (1 pont)

(A szolgáltatásban dolgozók körcikke $\frac{5015}{7905}\cdot 360° \approx 228°$)



(2 pont)

c) $\frac{888}{1020} \approx 0,87$ (2 pont)

A csökkenés körülbelül 13 százalékos. (2 pont)

Összesen: 16 pont

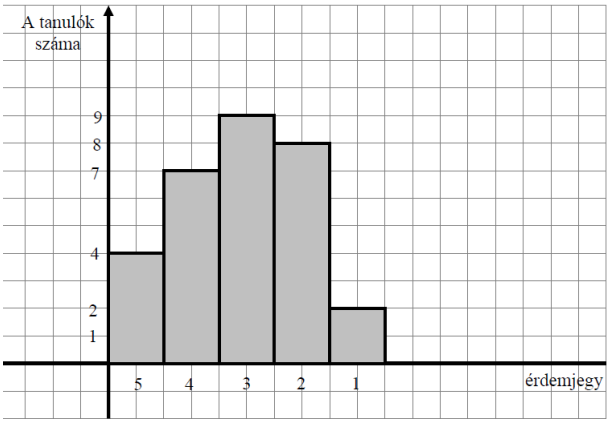
6) A következő táblázat egy 30 fős kilencedik osztály első félév végi matematikaosztályzatainak megoszlását mutatja.

Érdemjegy	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Tanulók száma	**4**	**7**	**9**	**8**	**2**

a) Ábrázolják az eredmények eloszlását oszlopdiagramon! (3 pont)
b) Mennyi a jegyek átlaga? (2 pont)
c) Véletlenszerűen kiválasztjuk az osztály egy tanulóját. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a tanuló legalább 3-ast kapott félév végén matematikából? (3 pont)
d) Két tanulót véletlenszerűen kiválasztva mennyi a valószínűsége annak, hogy érdemjegyeik összege osztható 3-mal? (8 pont)

Megoldás:

a)



(3 pont)

b) A jegyek átlaga: $\frac{4\cdot 5+7\cdot 4+9\cdot 3+8\cdot 2+2\cdot 1}{30} = \mathbf{3,1}$ (2 pont)

c) Legalább 3-ast $4+7+9=20$ tanuló kapott, így a kérdéses valószínűség $P=\frac{20}{30}=\mathbf{\frac{2}{3}}$ (3 pont)

d) Az osztályból 2 tanuló kiválasztására $\binom{30}{2}=435$ lehetőségünk van. (2 pont)

A kiválasztott tanulók osztályzatainak összege 3-mal osztható, ha az osztályzatok: $(1;2),(1;5),(2;4),(3;3),(4;5)$ (2 pont)

A kedvező esetek száma: $2\cdot 8+2\cdot 4+8\cdot 7+\binom{9}{2}+7\cdot 4=144$ (2 pont)

A keresett valószínűség $P=\frac{144}{435}=\frac{48}{145}\approx \mathbf{0,33}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

7)

a) Egy osztály tanulói a tanév során három kiránduláson vehettek részt. Az elsőn az osztály tanulóinak 60 százaléka vett részt, a másodikon 70 százalék, a harmadikon 80 százalék. Így három tanuló háromszor, a többi kétszer kirándult.
Hány tanulója van az osztálynak? (6 pont)

b) A három közül az első kiránduláson tíz tanuló körmérkőzésen asztalitenisz-bajnokságot játszott. (Ez azt jelenti, hogy a tíz tanuló közül mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést vívott.)
Mutassa meg, hogy 11 mérkőzés után volt olyan tanuló, aki legalább háromszor játszott! (4 pont)

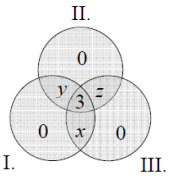
c) A második kirándulásra csak az osztály kosárlabdázó tanulói nem tudtak elmenni, mivel éppen mérkőzésük volt. A kosarasok átlagmagassága 182 cm, az osztály átlagmagassága 174,3 cm.
Számítsa ki a kiránduláson részt vevő tanulók átlagmagasságát! (6 pont)

Megoldás:

a) Ha az első kiránduláson az osztály 60%-a vett részt, akkor csak a második és harmadik kiránduláson az osztály 40%-a. Hasonlóan adódik, hogy csak az első és harmadik kiránduláson az osztály 30%-a, csak az első és második kiránduláson az osztály 20%-a vett részt. (3 pont)
Mivel nem volt olyan tanuló, aki csak egy kiránduláson vett volna részt, ezért az osztály 10%-a vett részt minden kiránduláson. (2 pont)
Az előző megállapítás és a feltétel alapján az osztály létszáma **30** (1 pont)

Alternatív megoldás:

(algebrai megoldás)



$x+y+3=0{,}6(3+x+y+z)$

$y+z+3=0{,}7(3+x+y+z)$

$z+x+3=0{,}8(3+x+y+z)$

$4x+4y-6z=-12$

$-7x+3y+3z=-9$ (3 pont)

$2x-8y+2z=-6$

$x-y=3$

$2x-3y=0$ (1 pont)

$x=9,\ y=6,\ z=12$ (1 pont)

Az osztálylétszám: $6+9+12+3=$ **30** fő. (1 pont)

b) Ha minden tanuló legfeljebb két mérkőzést játszott volna, akkor eddig 10 mérkőzés zajlott volna le (2 pont)

Mivel 11 mérkőzés volt, ezért a skatulya-elv alapján lennie kell olyan tanulónak, aki 3 mérkőzést játszott (2 pont)

c) A második kiránduláson 21 tanuló volt (1 pont)

Jelölje a kiránduláson résztvevők átlagmagasságát h. Ezzel a feltételek alapján: $174{,}3=\dfrac{21\cdot h+9\cdot 182}{30}$ (3 pont)

ahonnan $h=$ **171 cm** (2 pont)

Összesen: 16 pont

8) Egy 50 adatból álló adatsokaság minden adata eleme a $\{0;\ 1;\ 2\}$ halmaznak.

a) Legfeljebb hány 2-es lehet az adatsokaságban, ha az adatok átlaga 0,32? (4 pont)

b) Lehet-e az 50 adat mediánja 0, ha az átlaguk 1,04? (7 pont)

c) Lehet-e az 50 adat egyetlen módusza az 1, ha az átlaguk 0,62? (3 pont)

Megoldás:

a) Ha az 50 adat átlaga 0,32, akkor összegük $(50\cdot 0{,}32=)16$. (2 pont)

Mivel az adatsokaság minden adata nemnegatív, **legfeljebb 8 darab** 2-es lehet az 50 adat között. (8 darab 2-es és 42 darab 0 esetén valóban 0,32 az átlag) (2 pont)

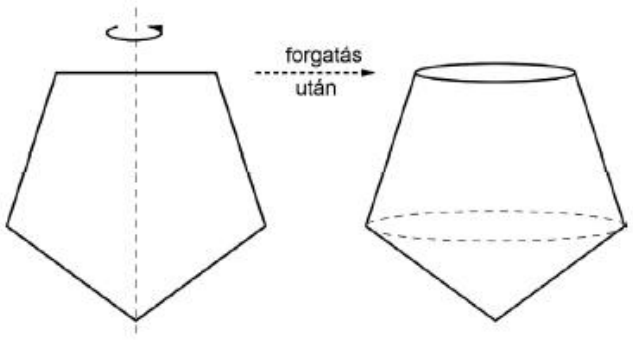
b) Indirekt módon tegyük fel, hogy a medián lehet 0, (1 pont)
azaz a nemcsökkenő sorozatba rendezett sokaságban a 25. és 26. szám (és így az első 24 szám is) 0. (1 pont)
Ekkor összesen legfeljebb 24 szám lehet 1 vagy 2. (1 pont)
Az 50 szám összege tehát legfeljebb 48 lehet, (1 pont)
az elérhető legnagyobb átlag pedig 0,96. (1 pont)
Mivel ez kisebb, mint 1,04 - ellentmondásra jutottunk, (1 pont)
azaz **nem lehet** a medián 0. (1 pont)

c) Például 31 darab 1 és 19 darab 0 esetén 0,62 az átlag, valamint 1 a módusz, (2 pont)

tehát **lehet** az 50 adat módusza 1. (1 pont)

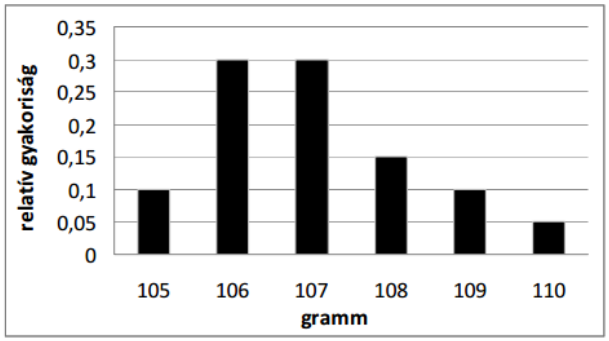
Összesen: 14 pont

9) Egy cég a függőleges irány kijelölésére alkalmas, az építkezéseknél is gyakran használt „függőónt” gyárt, amelynek nehezéke egy acélból készült test. Ez a test egy 2 cm oldalhosszúságú szabályos ötszög egyik szimmetria-tengelye körüli forgatásával származtatható (lásd az ábrán).



a) Hány cm³ a nehezék térfogata? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (9 pont)

A minőség-ellenőrzés 120 darab terméket vizsgált meg. Feljegyezték az egyes darabok egész grammokra kerekített tömegét is. Hatféle tömeg fordult elő, ezek relatív gyakoriságát mutatja az oszlopdiagram.



b) Készítsen gyakorisági táblázatot a 120 adatról, és számítsa ki ezek átlagát és szórását! (5 pont)

Megoldás:

a) A nehezék térfogata egy forgáskúp és egy csonkakúp térfogatának összege. (1 pont)

A forgáskúp magassága az *AFB* derékszögű háromszögből:

$m = 2 \cdot \cos 54^\circ$ (2 pont)

A kúp alapkörének sugara:

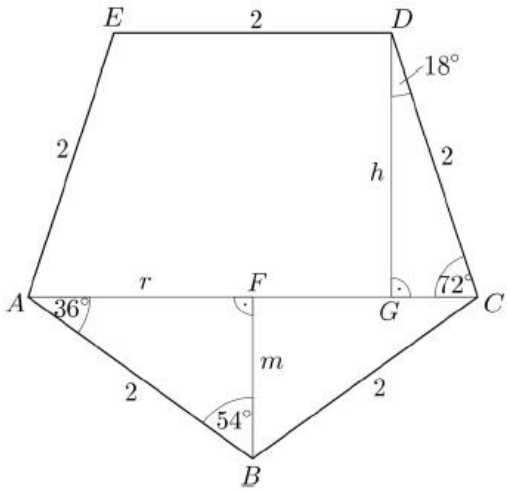
$r = 2 \cdot \sin 54^\circ$ (1 pont)

A csonkakúp h magassága a CGD derékszögű háromszögből:

$h = 2 \cdot \sin 72^\circ$ (2 pont)

A forgáskúp térfogata:

$V_{\text{kúp}} \approx \dfrac{1{,}62^2 \cdot 1{,}18 \cdot \pi}{3}$ (1 pont)



A csonkakúp térfogata:

$V_{\text{csonkakúp}} \approx \dfrac{1{,}90 \cdot \pi}{3} \cdot \left(1{,}62^2 + 1{,}62 \cdot 1 + 1^2\right)$ (1 pont)

A nehezék térfogata a kettő összege:

$V_{\text{kúp}} + V_{\text{csonkakúp}} \approx 3,24 + 10,39 \approx$ **13,6 (cm³)**. (1 pont)

b) A gyakorisági táblázat:

tömeg (gramm)	105	106	107	108	109	110
gyakoriság	12	36	36	18	12	6

(1 pont)

A 120 adat átlaga:

$\frac{12 \cdot 105 + \ldots + 6 \cdot 110}{120} =$ **107 (gramm)**. (2 pont)

A 120 adat szórása:

$\sqrt{\frac{12 \cdot (105-107)^2 + \ldots + 6 \cdot (110-107)^2}{120}} = \sqrt{1,7} \approx$ **1,3 (gramm)**. (2 pont)

Összesen: 14 pont

10) Egy kisvárosban hét nagyobb üzlet található. A tavalyi évben elért, millió forintra kerekített árbevételeikről tudjuk, hogy az átlaguk 120 millió Ft, és ez megegyezik a mediánjukkal. A hét adat egyetlen módusza 100 millió Ft. Két üzletben éppen átlagos, azaz 120 millió forintos a kerekített bevétel, a legnagyobb bevétel pedig 160 millió forint volt.

a) Számítsa ki a kerekített bevételek szórását! (6 pont)

A városban az egyik ruhakereskedéssel foglalkozó kisvállalkozás 80%-os haszonkulccsal dolgozik. Ez azt jelenti, hogy például egy 10 000 Ft-os beszerzési értékű terméket 18 000 Ft-ért árulnak az üzletükben. Amikor akciós időszak van, akkor a „rendes" eladási árból 50%-os árengedményt adnak minden eladott termékre.

b) Mekkora volt az eladásból származó árbevételnek és az eladott áru beszerzési értékének a különbsége (vagyis az „árnyereség") a tavalyi évben, ha összesen 54 millió Ft volt az éves árbevétel, és ebből 9 millió Ft-ot az akciós időszakban értek el? (4 pont)

A kisvállalkozás üzletében az egyik fajta férfizakóból négyféle méretet árusítanak (S, M, L, XL). Nyitáskor egy rögzített állvány egyenes rúdjára mindegyik méretből 4-4 darabot helyeztek el (minden zakót külön vállfára akasztva, egymás mellett). A nap folyamán ezek közül megvettek 4 darab S-es, 3 darab M-es, és 2 darab L-es méretűt, a megmaradt zakók pedig összekeveredtek.

c) Az üzlet zárásakor hányféle sorrendben lehetnek (balról jobbra nézve) a rúdra akasztva a megmaradt zakók, ha az azonos méretű zakókat nem különböztetjük meg egymástól? (3 pont)

Megoldás:

a) A kerekített bevételek összege $7 \cdot 120 = 840$ (millió Ft). (1 pont)
A medián 120 millió forint, és két 120 millió forintos árbevétel volt, ezért legfeljebb három 120 millió forintnál kisebb bevétel lehet. (1 pont)
Mivel a módusz 100 millió forint, ezért három 100 millió forintos árbevétel volt. (1 pont)
A 160 millió Ft-os árbevétel figyelembevételével a hetedik árbevétel $(840 - 3 \cdot 100 - 2 \cdot 120 - 160 =) 140$ millió forintnak adódik. (1 pont)
A (kerekített) bevételek szórása:
$\sqrt{\frac{3 \cdot (100-120)^2 + 2 \cdot (120-120)^2 + (140-120)^2 + (160-120)^2}{7}} \approx$ (1 pont)
≈ 21,4 millió (Ft). (1 pont)

b) A rendes eladási ár árengedmény nélkül $(54 + 9 =) 63$ millió Ft lett volna. (1 pont)
Tehát az eladott áru beszerzési értéke $\frac{63}{1,8} = 35$ millió Ft, (2 pont)
az árnyereség pedig $(54 - 35 =)$ **19 millió Ft volt.** (1 pont)

c) Megmaradt 1 darab M-es, 2 darab L-es és 4 darab XL-es zakó. (1 pont)
Ezek lehetséges sorrendjeinek száma $\frac{7!}{2! \cdot 4!} =$ (1 pont)
=105. (1 pont)
Összesen: 13 pont

11) Egy automatának 100 gramm tömegű hasábokat kell két egyenlő tömegű részre szétvágnia. A két darab közül az egy az *A* futószalagra kerül, a másik a *B* futószalagra. Az utolsó négy darabolásnál az automata hibája miatt az *A* futószalagra került darabok tömege 51 g, 52 g, 47 g, 46 g.

a) Igazolja, hogy a két futószalagra került 4-4 darab tömegének átlaga különbözik, a szórása pedig megegyezik! (16 pont)

Egy háromoldalú egyenes hasáb alapéleinek hossza: $AB = 4$, $AC = BC = \sqrt{13}$, a hasáb magassága $2\sqrt{3}$ hosszúságú. Az AB alapél egyenesére illeszkedő S sík $30°$-os szöget zár be a hasáb alaplapjával, és két részre vágja a hasábot.

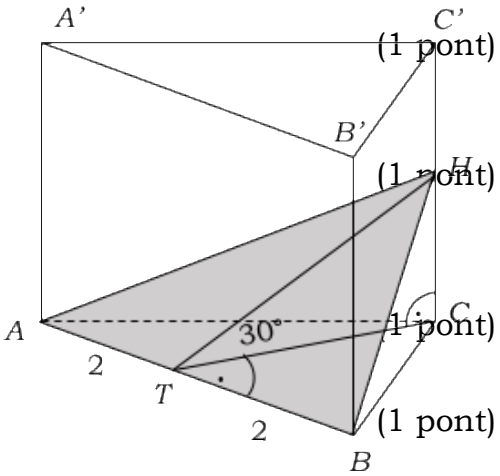
b) Számítsa ki a két rész térfogatának arányát! (11 pont)

Megoldás:

a) A *B* futószalagra került darabok tömege 49 g, 48 g, 53 g és 54 g. (1 pont)
(Az *A* futószalagra került darabok tömege csökkenő sorrendben 52 g, 51 g, 47 g és 46 g, a *B* futószalagra került darabok tömege pedig 54 g, 53 g, 49 g, 48 g,

tehát) a *B* futószalagra került darabok tömege rendre 2 grammal nagyobb, mint a megfelelő, *A* futószalagra került darabé. (1 pont)
Ha egy adatsokaság minden adatához *c*-t hozzáadunk, akkor a sokaság átlaga *c*-vel változik, a szórása pedig változatlan marad. (2 pont)
Tehát a két futószalagra került **darabok tömegének átlaga különböző** (a különbség $c = 2$ gramm), szórása pedig egyenlő. (1 pont)

b) A 30°-os szög helyes értelmezése (például a szög jelölése az ábrán). (1 pont)



Az *ABC* egyenlőszárú háromszög *AB* oldalához tartozó magassága (Pitagorasz-tétellel): $TC = 3$. (1 pont)
Az *S* sík a *CC'* élt a *H* pontban metszi. A *TCH* derékszögű háromszögből: $\tan 30° = \frac{CH}{TC}$, (1 pont)

ahonnan $CH = (TC \cdot \tan 30° =) 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$. (1 pont)

Az *ABC* lapot tartalmazó rész egy tetraéder, melynek *ABC* lapjához tartozó magassága *CH*. (1 pont)

$(T_{ABC} = 6,\ ezért)\ V_{ABCH} = \frac{T_{ABC} \cdot CH}{3} = 2\sqrt{3}\ (\approx 3{,}46)$ (1 pont)

A másik rész térfogatát megkapjuk, ha az első rész térfogatát levonjuk az eredeti hasáb térfogatából. (1 pont)

$V_{ABCA'B'C'} = T_{ABC} \cdot CC' = 12\sqrt{3}\ (\approx 20{,}78)$ (1 pont)

$V_{ABHA'B'C'} = 12\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}\ (\approx 17{,}32)$ (1 pont)

$$\frac{V_{ABCH}}{V_{ABHA'B'C'}} = \frac{2\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{5}$$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

12) Egy városi piacon a piros almát 5 kg-os csomagolásban árulják. A csomagokon olvasható felirat szerint egy-egy csomag tömege „5 kg ±10 dkg". (Az almák nagy mérete miatt az 5 kg pontosan nem mérhető ki.) A minőség-ellenőrzés során véletlenszerűen kiválasztanak nyolc csomagot, és ezek tömegét méréssel ellenőrzik. Csak akkor engedélyezik az almák árusítását, ha egyik csomag tömege sem kevesebb 4 kg 90 dkg-nál, és a nyolc mérési adat 5 kg-tól mért átlagos abszolút eltérése nem haladja meg a 10 dkg-ot. A mérések eredménye a következő:

mérés sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
mért tömeg (dkg)	506	491	493	512	508	517	493	512

a) A mérési eredmények alapján engedélyezik-e az almák árusítását? (4 pont)

b) Határozza meg a nyolc mérési eredmény átlagát és szórását! (3 pont)

A piac egyik eladójához friss eper érkezett. Az eladó eredetileg azt tervezte, hogy az I. osztályú epret 800 Ft/kg, a II. osztályút 650 Ft/kg, a III. osztályút pedig 450 Ft/kg egységáron értékesíti. A piacon azonban túlkínálat volt eperből, ezért úgy döntött, hogy az összes epret egy kupacba önti össze, és akciós egységáron árulja. Az akciós eladási egységár kialakításakor úgy számolt, hogy ha az összes epret ezen az egységáron adja el, akkor a bevétele (körülbelül) 15%-kal lesz csak kevesebb, mint azt eredetileg tervezte.

c) Mennyi legyen az akciós egységár, ha az összeöntött eper 35%-a I. osztályú, $\frac{3}{8}$ része II. osztályú, a többi 33 kg pedig III. osztályú volt eredetileg? Válaszát egész értékre kerekítve adja meg! (7 pont)

Megoldás:

a) A mért tömegek között nincs 490 dkg-nál kisebb, tehát az első feltétel teljesül. (1pont)

Az 5 kg-tól való eltérések (dkg-ban) rendre 6, 9, 7, 12, 8, 17, 7, 12. (1pont)

Az eltérések átlaga $\left(\frac{78}{8}=\right)$ 9,75 (dkg). (1pont)

Az árusítást engedélyezik. (1pont)

b) A mért adatok átlaga $\left(\frac{4032}{8}=\right)$ 504 (dkg), (1pont)

szórása $\sqrt{\frac{2\cdot 13^2+2\cdot 11^2+2\cdot 8^2+4^2+2^2}{8}}=\sqrt{\mathbf{91}}\approx\mathbf{9,54}$ (2pont)

c) Az eper $\left(1-\frac{7}{20}-\frac{3}{8}=\right)\frac{11}{40}$ része III. osztályú. (1 pont)

Az eredetileg tervezett árakkal számolva az átlagos egységár kilogrammonként $0,35\cdot 800+\frac{3}{8}\cdot 650+\frac{11}{40}\cdot 450\left(=647,5\right)$ Ft lett volna. (3pont)

A kereskedő bevétele akkor lesz az eredetileg tervezett bevétel 85%-a, ha az epret az eredeti átlagos egységár 85%-áért értékesíti. Az eredeti átlagos egységár 85%-a 550,375 Ft/kg. (2 pont)

Az akciós egységár **550 Ft/kg** legyen. (1 pont)

Összesen: 11 pont