MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI
EMELT SZINT

Sorozatok

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Egy (a_n) számsorozatról a következőket tudjuk:

- **a harmadik tagtól kezdve minden tag kiszámítható a következő rekurzív képlet segítségével: $a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$;**
- **az a_1, a_2 és $a_3 - 9a_1$ ebben a sorrendben egy számtani sorozat 3 egymást követő tagja;**
- **az (a_n) sorozat első öt tagjának összege 682.**

Mekkora ennek a számsorozatnak a hatodik tagja? (16 pont)

Megoldás:

A megadott feltételeket a következő alakban használjuk:

(1) $a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$, ha $n \geq 3$

(2) $2a_2 = a_1 + (a_3 - 9a_1)$

(3) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 682$ (4 pont)

A sorozat harmadik tagja az (1) alapján:

$a_3 = a_2 + 12a_1$ (1 pont)

Behelyettesítve a (2) összefüggésbe ezt az a_3 helyére, rendezés után kapjuk, hogy $a_2 = 4a_1$ (1 pont)

Ebből $a_3 = a_2 + 12a_1 = 4a_1 = 12a_1 = 16a_1$ (1 pont)

A negyedik tagot felírva az (1) alapján:

$a_4 = a_3 + 12a_2$ (1 pont)

A jobb oldalon behelyettesítve az a_3 és az a_2 az a_1-gyel kifejezett értéket kapjuk, hogy $a_4 = 16a_1 + 12(4a_1) = 64a_1$ (2 pont)

Hasonlóan fejezhetjük ki a_5 értékét a_1 segítségével:

$a_5 = a_4 + 12a_3 = 64a_1 + 12(16a_1) = 256a_1$ (2 pont)

Összevonás után $341a_1 = 682$

Ebből $a_1 = 2$ (1 pont)

A hatodik tagot felírva (1) alapján: $a_6 = a_5 + 12a_4$.

Az a_5 és az a_4 értékét a_1-gyel kifejezve kapjuk, hogy

$a_6 = 256a_1 + 12 \cdot 64a_1 = 1024a_1 = 1024 \cdot 2 = 2048$ (2 pont)

A kapott 2;8;32;128;512;2048;... számsorozat elemei kielégítik az (a_n) sorozat elemiről megadott összes feltételt.

A sorozat hatodik tagja **2048** (1 pont)

Összesen: 16 pont

2)

a) Legyen (a_n) egy mértani sorozat, melynek első tagja 5, hányadosa 3. Mennyi a valószínűsége, hogy ha ennek a mértani sorozatnak az első 110 tagjából egyet véletlenszerűen kiválasztunk, akkor a kiválasztott tag 11-gyel osztva 1 maradékot ad? (6 pont)

b) Legyen (b_n) egy számtani sorozat, amelynek az első tagja 5, és differenciája 3. Mekkora a valószínűsége, hogy ha ennek a számtani sorozatnak az első 110 tagjából egyen kiválasztunk, akkor a kiválasztott tag 11-gyel osztva 1 maradékot ad? (7 pont)

Megoldás:

a) Az első sorozatban az első tagtól kezdve felírjuk a tagok 11-gyel való osztás maradékát: 5; 4; 1; 3; 9; 5; … (1 pont)
A maradékok ciklikusan ismétlődnek (mindig 3-mal szorzunk) (1 pont)
Minden ötödik tag 1-es maradékot ad (2 pont)
tehát a valószínűség $\mathbf{\frac{1}{5}}$ (2 pont)

b) A számtani sorozatban az első tagtól kezdve felírjuk a tagok 11-gyel való osztás maradékát: 5; 8; 0; 3; 6; 9; 1; 4; 7; 10; 2; … (1 pont)
Ettől kezdve ismétlődik: 5; 8; 0; … (1 pont)
tehát a ciklushossz 11 (1 pont)
Egy ciklusban egy kedvező eset van (1 pont)
Mivel 10 ciklus van a 110. tagig, és mindegyikben egy darab 1-es van (1 pont)
így a keresett valószínűség $\frac{10}{110} = \mathbf{\frac{1}{11}}$ (2 pont)

Összesen: 13 pont

3) Egy pozitív tagokból álló mértani sorozat első három tagjának összege 26. Ha az első taghoz egyet, a másodikhoz hatot, a harmadikhoz hármat adunk, akkor ebben a sorrendben egy számtani sorozat első három tagját kapjuk. Adja meg ennek a számtani sorozatnak az első három tagját! (14 pont)

Megoldás:

A számtani sorozat első három tagjának összege: $26+(1+6+3)=36$ (1 pont)
Számtani közép miatt a második tagja 12. (2 pont)
jelöljük a számtani sorozat különbségét d-vel, ekkor a sorozat első három tagja $12-d;\ 12;\ 12+d$ (1 pont)
A mértani sorozat tagjai: $11-d;\ 6;\ 12+d$ (2 pont)
Mértani közép miatt $6^2=(11-d)\cdot(9+d)$ (2 pont)
ahonnan $d^2-2d-63=0$ (1 pont)
$d=9$ vagy $d=-7$ (1 pont)
Tehát a keresett számtani sorozat első három tagja **3; 12; 21** (1 pont)
illetve **19; 12; 5** (1 pont)
Ezek megfelelnek a feladat feltételeinek, a mértani sorozat megfelelő tagjai: $2;6;18$ illetve $18;6;2$ (2 pont)

Összesen: 14 pont

4) Legyen n pozitív egész. Adottak az alábbi sorozatok:

(a_n), ahol $a_n = (-2)^n + 2^n$;

(b_n), ahol $b_n = |n-23| - |n-10|$;

(c_n), ahol $c_n = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)^2$.

Vizsgálja meg mindhárom sorozat korlátosság és monotonitás szempontjából! Válaszoljon mindhárom esetben, hogy a sorozat korlátos vagy nem, illetve monoton vagy nem! (Válaszát indokolja!) Korlátos esetben adjon meg egy alsó és egy felső korlátot! (16 pont)

Megoldás:

$\{a_n\}$, ahol $a_n = (-2)^n + 2^n$;

Ha n páros, akkor $a_n = 2^n + 2^n = 2\cdot 2^n$ (1 pont)

Ha n páratlan, akkor $a_n = -2^n + 2^n = 0$ (1 pont)

Az $\{a_n\}$ sorozat tehát **nem korlátos, nem monoton** (1 pont)

A $\{b_n\}$ sorozatot 3 intervallumon kell vizsgálni

$n<10$; $10\le n<23$; $23\le n$ (1 pont)

$\{b_n\}$, ahol $b_n = |n-23| - |n-10|$

Az abszolútérték értelmezése alapján,

Ha $n<10$, akkor $b_n = (23-n)-(10-n) = 13$ (1 pont)

Ha $10\le n<23$, akkor $b_n = (23-n)-(n-10) = -2n+33$ (1 pont)

Ezen a tartományon $-13 < b_n \le 13$ (1 pont)

Ha $23\le n$, akkor $b_n = (n-23)-(n-10) = -13$ (1 pont)

A $\{b_n\}$ sorozat tehát **korlátos és monoton csökkenő**, alsó korlátja: **–13**, felső korlátja: **13** (1 pont)

$\{c_n\}$, ahol $c_n = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)^2$

Használjuk az $\alpha = \frac{\pi}{2}\cdot n$ jelölést! Ekkor a négyzetre emelés, Pitagoraszi összefüggés és a kétszeres szögfüggvény képletének alkalmazásával:

$c_n = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + \sin 2\alpha$ (2 pont)

Visszaírva α eredeti jelentését kapjuk, hogy $c_n = 1 + \sin(\pi\cdot n) = 1$, mivel $\sin(\pi\cdot n)$ értéke minden n egész esetén 0 (1 pont)

A $\{c_n\}$ sorozat monoton, (1 pont)

és **korlátos** (1 pont)

Alsó korlátja **1** (1 pont)

felső korlátja is **1** (1 pont)

Összesen: 16 pont

5) Egy bank a „Gondoskodás” nevű megtakarítási formáját ajánlja újszülöttek családjának. A megtakarításra vállalkozó családok a gyermek születését követő év első banki napján számlát nyithatnak 100000 forint összeggel. Minden következő év első banki napján szintén 100000 forintot kell befizetniük a számlára. Az utolsó befizetés annak az évnek az első napján történhet, amely évben a gyermekük betölti 18. életévét. A bank év végén a számlán lévő összeg után évi 8%-os kamatot ad, amit a következő év első banki napján ír jóvá. A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján férhet hozzá a számlához.

a) Mekkora összeg van ekkor a számlán? A válaszát egész forintra kerekítse! (8 pont)

A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján felveheti a számláján lévő teljes összeget. Ha nem veszi, választhatja a következő lehetőséget is:

Hat éven keresztül minden év első banki napján azonos összeget vehet fel. Az első részletet a 18. születésnapját követő év első banki napján veheti fel. A hatodik pénzfelvétellel a számla kiürül. Ha ezt a lehetőséget választja, akkor a bank –az első pénzfelvételtől számítva– minden év végén a számlán lévő összeg után évi 5%-os kamatot garantál, amit a következő év első banki napján jóváír.

b) Ebben az esetben mekkora összeget vehet fel alkalmanként? A válaszát egész forintra kerekítse! (8 pont)

Megoldás:

a) A számlanyitás összege: $a_1 = 100000$. A következő év első banki napján a számlán lévő pénz $a_2 = a_1 \cdot 1{,}08 + a_1 = 208000$ (1 pont)

A következő év első banki napján a számlán lévő pénz: $a_3 = a_2 \cdot 1{,}08 + a_1 = a_1 \cdot \left(1{,}08^2 + 1{,}08 + 1\right) = 324640$ (1 pont)

Összesen 18 alkalommal fizettek be a számlára, így az utolsó befizetéskor a számlán lévő összeg: $a_{18} = a_1 \cdot \left(1{,}08^{17} + 1{,}08^{16} + \ldots + 1{,}08 + 1\right)$ (2 pont)

Ez az összeg még egy évig kamatozik, így a számlához való hozzáférés időpontjában a számlán lévő összeg $c = a_1\left(1{,}08^{18} + 1{,}08^{17} + \ldots + 1{,}08\right)$ (1 pont)

A zárójelben lévő összeg egy mértani sorozat első 18 tagjának összege. A sorozat első tagja 1,08 és a hányadosa is 1,08. (1 pont)

$$c = a_1 \cdot 1{,}08 \cdot \frac{1{,}08^{18} - 1}{1{,}08 - 1} \approx 4\,044\,626$$ (1 pont)

A számlán lévő összeg kerekítve **4 044 626 Ft**. (1 pont)

b) Az induló tőke $c = 4044626$ Ft

Jelölje y az évenként felvehető összeget. Az első kivét után a számlán lévő pénz $b_1 = c - y$ (1 pont)

A második kivét után a számlán lévő pénz:

$b_2 = b_1 \cdot 1{,}05 - y = c \cdot 1{,}05 - y(1{,}05 + 1)$ (1 pont)

A harmadik kivét után a számlán lévő pénz:

$b_3 = b_2 \cdot 1{,}05 - y = c \cdot 1{,}05^2 - y\left(1{,}05^2 + 1{,}05 + 1\right)$ (1 pont)

$b_6 = b_5 \cdot 1{,}05 - y = c \cdot 1{,}05^5 - y\left(1{,}05^5 + \ldots + 1{,}05 + 1\right)$ (1 pont)

Ugyanekkor a számla kiürül: $b_6 = 0$ (1 pont)

A zárójelben lévő összeg egy mértani sorozat első 6 tagjának összege. A sorozat első tagja 1 és a hányadosa 1,05 (1 pont)

Így $y = c \cdot \dfrac{1{,}05^5}{\dfrac{1{,}05^6 - 1}{1{,}05 - 1}}$ (1 pont)

Az alkalmanként felvehető összeg kerekítve **758916 Ft**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

6) Az (a_n) mértani és (b_n) számtani sorozatnak is 1 az első tagja, és mindkét orozat hatodik tagja (-1).

a) Sorolja fel mindkét sorozat első öt tagját! (4 pont)

b) Milyen pozitív egész *n*-ekre lesz a két sorozat első *n* tagjának összege ugyanakkora? (9 pont)

Megoldás:

a) Felírva a hatodik elemeket az első elem és a kvóciens (q), illetve a differencia (d) segítségével kapjuk, hogy $q = -1$. (1 pont)

$d = -\dfrac{2}{5}$ (1 pont)

A mértani sorozat első öt eleme: **1; −1; 1; −1; 1** (1 pont)

A számtani sorozat első öt eleme: $\mathbf{1; \frac{3}{5}; \frac{1}{5}; -\frac{1}{5}; -\frac{3}{5}}$ (1 pont)

b) A mértani sorozat első n tagjának összege:

$S_n = 1 \cdot \dfrac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \begin{cases} 0, \text{ ha } n \text{ páros} \\ 1, \text{ ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$ (2 pont)

A számtani sorozat n-edik tagja: $b_n = 1 - \dfrac{2}{5}(n-1)$ (1 pont)

A számtani sorozat első n tagjának összege: $s_n = \dfrac{2 - \frac{2}{5}(n-1)}{2} \cdot n$, azaz

$s_n = \dfrac{6}{5}n - \dfrac{1}{5}n^2$ (1 pont)

$s_n = 0$, azaz a $\frac{6}{5}n - \frac{1}{5}n^2 = 0$ egyenletnek pontosan egy pozitív egész megoldása van, az $n = 6$ (2 pont)

$s_n = 1$, tehát $\frac{6}{5}n - \frac{1}{5}n^2 = 1$, azaz $n^2 - 6n + 5 = 0$ egyenlet megoldásai $n = 1$ és $n = 5$. (2 pont)

Tehát a két sorozat első 1, vagy első 5, vagy első 6 tagjának összege ugyanakkora (1 pont)

Összesen: 13 pont

7) Egy mértani sorozat első három tagjának összege 91. A hatodik, hetedik és a nyolcadik tag összege 2912. Hány tizenhárom-jegyű tagja van a sorozatnak? (13 pont)

Megoldás:

Legyen a sorozat első tagja a, hányadosa q.

$a + aq + aq^2 = 91$ (1 pont)

$aq^5 + aq^6 + aq^7 = 2912$ (1 pont)

$q^5\left(a + aq + aq^2\right) = 2912$ (1 pont)

$q^5 = \frac{2912}{91}\left(= 32\right)$ (1 pont)

Ebből $q = 2$ (1 pont)

Visszahelyettesítve az első egyenletbe: $7a = 91$, ahonnan $a = 13$, ezek szerint a mértani sorozat: $a = 13, q = 2, a_n = 13 \cdot 2^{n-1}$ (1 pont)

A kérdés: hány n-re igaz, hogy $10^{12} \le 13 \cdot 2^{n-1} \le 10^{13}$ (2 pont)

Az $\lg x$ függvényszigorú monoton nő (1 pont)

$12 \le \lg 13 + (n-1)\lg 2 < 13$ (1 pont)

$37{,}16 < n < 40{,}48$ (1 pont)

Ennek egész megoldása a 38, a 39 és a 40. (1 pont)

A sorozat **3** tagja 13 jegyű (1 pont)

Összesen: 13 pont

8) A főiskolások műveltségi vetélkedője a következő eredménnyel zárult. A versenyen induló négy csapatból a győztes csapat pontszáma $\frac{4}{3}$-szorosa a második helyen végzett csapat pontszámának. A negyedik, harmadik és második helyezett pontjainak száma egy mértani sorozat három egymást követő tagja, és a negyedik helyezettnek 25 pontja van. A négy csapat között kiosztott pontszámok összege 139.

a) Határozza meg az egyes csapatok által elért pontszámot! (8 pont)

Mind a négy csapatnak öt-öt tagja van. A vetélkedő után az induló csapatok tagjai között három egyforma értékű könyvutalványt sorsolnak ki (mindenki legfeljebb egy utalványt nyerhet).

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy az utalványokat három olyan főiskolás nyeri, akik mindhárman más-más csapat tagjai? (5 pont)

Megoldás:

a) második helyezett x, az első $\frac{4}{3}x$ pontot ért el. (1 pont)

A második x, a negyedik 25 pontot ért el, így a mértani sorozat miatt a harmadik helyezett pontszáma $\sqrt{25x}$. (1 pont)

A szöveg szerint: $\frac{4}{3}x + x + \sqrt{25x} + 25 = 139$ (1 pont)

Rendezve $\sqrt{x}$-re másodfokú: $7\left(\sqrt{x}\right)^2 + 15\sqrt{x} - 342 = 0$ (1 pont)

Két gyöke $\sqrt{x} = 6$ és $\sqrt{x} = -\frac{57}{7}$, ebből a negatív gyök nem lehetséges (1 pont)

így $x = 36$ (1 pont)

Tehát a 2. helyezett pontszáma 36, a harmadiké 30, az első helyezetté pedig 48. (1 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

Alternatív megoldás:

a) (Legyen q a mértani sorozat hányadosa.) A negyedik helyezett 25, a harmadik $25q$, a második $25q^2$ pontot ért el. (1 pont)

Az első helyezett pontszáma $\frac{4}{3} \cdot 25q^2 + 75q = \frac{100q^2}{3}$ (1 pont)

Szöveg szerint $\frac{100q^2}{3} + 25q^2 + 25q + 25 = 139$ (1 pont)

Rendezés után: $175q^2 + 75q - 342 = 0$ (1 pont)

Két megoldása: $q = \frac{6}{5}$ és $q = -\frac{57}{35}$ (1 pont)

Ebből az utóbbi nem felel meg a szövegnek (1 pont)

tehát a harmadik helyezett pontszáma 30, másodiké 36, az első helyezetté pedig 48. (1 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

b) Lehetséges (egyenlő valószínű) kimenetelek száma $\binom{20}{3} = 1140$ (2 pont)

Kedvező kimenetelek száma: $\binom{4}{3} \cdot 5^3 = 500$ (2 pont)

A kérdezett valószínűség: $\frac{500}{1140} \approx \mathbf{0,439}$ (1 pont)

Összesen: 13 pont

9) Két egyenes hasábot építünk, H_1-et és H_2-t. Az építéshez használt négyzetes oszlopok (négyzet alapú egyenes hasábok) egybevágók, magasságuk kétszer akkora, mint az alapélük. A H_1 hasáb építésekor a szomszédos négyzetes oszlopokat az oldallapjukkal illesztjük össze, a H_2 hasáb építésekor pedig a négyzet alaplapjukkal- az ábra szerint.

a) A H_1 és H_2 egyenes hasábok felszínének hányadosa $\frac{A_{H_1}}{A_{H_2}} = 0,8$. Hány négyzetes oszlopot használtunk az egyes hasábok építéséhez, ha H_1-et és H_2-t ugyanannyi négyzetes oszlopból építettük fel? (8 pont)

b) Igazolja, hogy $\left\{\frac{3n+2}{4n+1}\right\}\left(n \in \mathbb{N}^+\right)$ sorozat szigorú monoton növekvő és korlátos! (8 pont)

Megoldás:

a) Ha a jelöli a négyzetes oszlop alapélének hosszát, és k darabból készítjük a hasábokat, akkor H_1 felszíne:

$A_{H_1} = 2 \cdot 2a + 2 \cdot k \cdot a^2 + 2 \cdot k \cdot 2a^2 \left(= 2a^2\left(3k+2\right)\right)$ (2 pont)

H_2 felszíne: $A_{H_2} = 2a^2 + 4 \cdot k \cdot 2a^2 \left(= 2a^2\left(4k+1\right)\right)$ (2 pont)

Az $\frac{A_{H_1}}{A_{H_2}} = 0,8$ feltételből $3k+2 = 0,8 \cdot \left(4k+1\right)$ (2 pont)

Az egyenlet megoldása $k = 6$ (1 pont)

tehát **6-6** négyzetes oszlopot használtunk fel az építéshez (1 pont)

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+5)(4n+1)}{(4n+5)(3n+2)} =$ (1 pont)

$\frac{12n^2+23n+5}{12n^2+23n+10}\left(=1-\frac{5}{12n^2+23n+10}\right)$ (1 pont)

A fenti hányados minden pozitív egész n esetén 1-nél kisebb (1 pont)

a sorozat minden tagja pozitív (1 pont)

ezért a sorozat szigorú monoton csökkenő (1 pont)

Ebből következik, hogy a sorozat felülről korlátos (1 pont)

Mivel a sorozat minden tagja pozitív, így alulról is korlátos (1 pont)

tehát a sorozat korlátos (1 pont)

Összesen 16 pont

10)

a) Egy derékszögű háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Számítsa ki a háromszög másik két oldalának hosszát! (5 pont)

b) Egy háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Tudjuk, hogy a háromszög nem szabályos. Igazolja, hogy a háromszögnek nincs 60°-os szöge! (11 pont)

Megoldás:

a) Ha d a számtani sorozat differenciája, akkor a háromszög oldalhosszai 4 $(4+d)$, $(4+2d)$ (és $0<d$) (1 pont)

A háromszög derékszögű, így $4^2+(4+d)^2=(4+2d)^2$ (1 pont)

Négyzetre emelve, rendezve: $3d^2+8d-16=0$ (1 pont)

A gyökök $d_1=-4$ és $d_2=\frac{4}{3}$ (1 pont)

A negatív gyök nem megoldás, a háromszög oldalai tehát **4, $\frac{16}{3}$, $\frac{20}{3}$** egység hosszúak (1 pont)

b) Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy van 60°-os szöge a háromszögnek. (1 pont)

Mivel az oldalak páronként különböző hosszúságúak, és a nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, (1 pont)

ezért ha van 60°-os szöge, akkor az a $4+d$ hosszúságú oldallal szemben van (2 pont)

Erre az oldalra felírva a koszinusztételt: $(4+d)^2=4^2+(4+2d)^2-2\cdot4\cdot(4+2d)\cdot\cos60°$ (2 pont)

Ebből $16+8d+d^2=16+8d+4d^2$ (1 pont)

Ebből $d^2=0$, tehát $d=0$ (1 pont)

Ez viszont ellentmond annak, hogy a háromszög nem szabályos (2 pont)

Az eredeti feltételezésünk tehát hamis, azaz a háromszögnek valóban nincs 60°-os szöge. (1 pont)

Összesen 16 pont

11) Egy növekvő számtani sorozat első három tagjának összege 60. Az első tagot 64-gyel növelve, a másik két tagot változatlanul hagyva, egy mértani sorozat első három tagjához jutunk. Mennyi a két sorozat első három tagja? (13 pont)

Megoldás:

Ha a számtani sorozat második tagja a_2 és differenciája d, akkor
$a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 60$ (2 pont)
ahonnan $a_2 = 20$ (1 pont)
A mértani sorozat első három tagja: $84 - d; 20; 20 + d$ (1 pont)
A mértani közép miatt $(84 - d)(20 + d) = 400$ (2 pont)
Rendezve az egyenletet $d^2 - 64d - 1280 = 0$ (2 pont)
Innen $d_1 = -16$ vagy $d_2 = 80$ (2 pont)
$d_1 = -16$ nem megoldás, mert a számtani sorozat növekvő. (1 pont)
$d_2 = 80$ esetén a számtani sorozat első három tagja **–60; 20; 100**, ami valóban megoldás (1 pont)
Ekkor a mértani sorozat **4; 20; 100** (1 pont)

Összesen: 13 pont

12) Péter nagypapája minden évben félretett némi pénzösszeget egy perselybe unokája számára. 5000 Ft-tal kezdte a takarékoskodást 1996. január 1-jén. Ezután minden év első napján hozzátett az addig összegyűlt összeghez, mégpedig az előző évben félretettnél 1000 Ft-tal többet. 2004. január 1-jén a nagypapa bele tette a perselybe a megfelelő összeget, majd úgy döntött, hogy a perselyt most unokájának most adja át.

a) Mekkora összeget kapott Péter? (5 pont)

b) Péter nagypapája ajándékából vett néhány apróságot, de elhatározta, hogy a kapott összeg nagyobb részét 2005. január 1-jén bankszámlára teszi. Be is tett 60000 Ft-ot évi 4%-os kamatos kamatra (a kamatok minden évben, év végén hozzáadódnak a tőkéhez). Legalább hány évig kell Péternek várnia, hogy a számláján legalább 100000 Ft legyen úgy, hogy közben nem fizet be erre a számlára? (9 pont)

Megoldás:

a) A nagypapa kilenc alkalommal tett pénzt a perselybe. A Péter által kapott összeg egy olyan számtani sorozat első kilenc elemének összege, amelynek első eleme 5000, differenciája 1000. (2 pont)

A kérdéses összeg: $\frac{9}{2}\cdot\left(2\cdot 5000+(9-1)\cdot 1000\right)=81000$

Péter **81000 Ft-ot kapott** (3 pont)

b) $t_0=60000,\ t_n=t_0\cdot 1{,}04^n=60000\cdot 1{,}04^n$, ahol $n\in\mathbb{Z}^+$ (2 pont)

A feltétel szerint $60000\cdot 1{,}04^n\geq 100000$ (2 pont)

Osszuk mindkét oldalt 60000-rel, majd vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát: $\lg 1{,}04^n\geq\lg\frac{5}{3}$ (3 pont)

Innen $n\geq\frac{\lg\frac{5}{3}}{\lg 1{,}04}\approx 13{,}024>13$, ami azt jelenti, hogy **14 évet** kell várnia Péternek (2 pont)

Összesen: 14 pont

13) A Robotvezérelt Elektromos Kisautók Nemzetközi Versenyén a versenyzők akkumulátorral hajtott modellekkel indulnak. A magyar versenyautó az első órában 45 kilométert tesz meg. Az akkumulátor teljesítményének csökkenése miatt az autó a második órában kevesebb utat tesz meg, mint az első órában, a harmadik órában kevesebbet, mint a másodikban, és így tovább: az indulás utáni *n*-edik órában megtett útja mindig 95,5%-a az $(n-1)$-edik órában megtett útjának ($n \in \mathbb{N}$ és $n > 1$).

a) Hány kilométert tesz meg a 10. órában a magyarok versenyautója? Válaszát egész kilométerre kerekítve adja meg! (4 pont)

A versenyen több kategóriában lehet indulni. Az egyik kategória versenyszabályai lehetővé teszik az akkumulátorcserét verseny közben is. A magyar csapat mérnökei kiszámították, hogy abban az órában még nem érdemes akkumulátort cserélni, amelyikben az autó legalább 20 km-t megtesz.

b) Az indulástól számítva legkorábban hányadik órában érdemes akkumulátort cserélni? (6 pont)

A „Végkimerülés" kategóriában a résztvevők azon versenyeznek, hogy akkumulátorcsere és feltöltés nélkül mekkora utat tudnak megtenni az autók. A világrekordot egy japán csapat járműve tartja 1100 km-rel.

c) Képes-e megdönteni a magyar versenyautó a világrekordot a „Végkimerülés"kategóriában? (6 pont)

Megoldás:

a) Egy óra alatt megtett úthosszak km-ben mérve egy olyan mértani soroz egymást követő tagjai, (1 pont)
amelynek első tagja 45, hányadosa pedig 0,955 (1 pont)
$a_{10} = a_1 - q^9 = 29{,}733$ (1 pont)
A magyar autó 10. órában megtett útja kb **30 km** (1 pont)

b) Addig nem érdemes akkumulátort cserélni, amíg $45 \cdot 0{,}955^{n-1} \geq 20$ teljesül $(n \in \mathbb{N}$ és $n > 1)$ (1 pont)
Mivel a tízes alapú logaritmus függvény szigorú monoton nő, ezért (1 pont)
$(n-1)\lg 0{,}955 \geq \lg \frac{20}{45}$ (1 pont)
$\lg 0{,}955 \geq 0$, ebből adódik, hogy (1 pont)
$n \leq \frac{\lg \frac{20}{45}}{\lg 0{,}955} + 1 \approx 18{,}61$ (1 pont)
Legkorábban a **19. órában** érdemes akkumulátort cserélni. (1 pont)

c) Ha a verseny kezdetétől eltelt egész órák száma n, akkor ennyi idő alatt a magyar autó által megtett út a mértani sorozat első n tagjának összege (1 pont)

$S_n = \frac{45 \cdot \left(0{,}955^n - 1\right)}{0{,}955 - 1} > 1100$ (1 pont)

Megoldandó a $\frac{45 \cdot \left(0{,}955^n - 1\right)}{0{,}955 - 1} > 1100$ egyenlőtlenség (1 pont)

Rendezve a $0{,}955^n < -0{,}1$ egyenlőtlenséget kapjuk (1 pont)

Ennek nincsen megoldása (1 pont)

Tehát a világrekordot nem döntheti meg a magyar autó (1 pont)

Összesen: 16 pont

14)

a) Egy bank olyan hitelkonstrukciót ajánl, amelyben napi kamatlábat számolnak úgy, hogy az adott hitelre megállapított éves kamatlábat 365-tel elosztják. Egy adott évben a hitelfelvételt követően minden napra kiszámolják a napi kamat értékét, majd ezeket december 31-én összeadják, és csak ekkor tőkésítik (azaz a felvett hitel értékéhez adják). Ez a bank egy adott évben évi 8%-os kamatlábat állapított meg. Éva abban az évben a március 1-jén felvett 40 000 Ft után október 1-jén újabb 40 000 Ft hitelt vett fel. A két kölcsön felvétele után mennyi kamatot tőkésít a bank december 31-én? (A hitelfelvétel napján és az év utolsó napján is számítanak napi kamatot.) (5 pont)

b) Ádám is vett fel hiteleket ettől a banktól évi 8%-os kamatos kamatra. Az egyik év január 1-jén éppen 1 000 000 Ft tartozása volt. Több hitelt nem vett fel, és attól kezdve 10 éven keresztül minden év végén befizette az azonos összegű törlesztőrészletet. (A törlesztőrészlet összegét a bank már az éves kamattal megnövelt tartozásból vonja le.) Mekkora volt ez a törlesztőrészlet, ha Ádám a 10 befizetés után teljesen visszafizette a felvett hitelt? Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg! (9 pont)

Megoldás:

a) A március 1-jén felvett hitel $365 - 31 - 28 = 306$ napig,
Az október 1-jén felvett hitel pedig $31 + 30 + 31 = 92$ napig kamatozik (1 pont)

A napi kamatláb $\frac{8}{365}\%$ (1 pont)

Az első hitel kamata $40000 \cdot \frac{8}{365 \cdot 100} \cdot 306 \approx 2683\,\text{Ft}$ (1 pont)

A második hitel kamata pedig $40000 \cdot \frac{8}{365 \cdot 100} \cdot 92 \approx 807\,\text{Ft}$ (1 pont)

Összesen 3490 Ft kamatot tőkésít a bank december 31-én (1 pont)

b) Ha x Ft volt az évi törlesztőrészlet, akkor
$(((1000000\cdot 1,08-x)\cdot 1,08-x)\ldots)\cdot 1,08-x=0$ (2 pont)

Rendezve $1000000\cdot 1,08^{10}-x\cdot\left(1,08^9+1,08^8+\ldots+1\right)=0$ (2 pont)

A zárójelben egy mértani sorozat első 10 tagjának összege van (1 pont)

$S_{10}=\frac{1,08^{10}-1}{1,08-1}\approx 14,487$ (1 pont)

Az egyenletből $x=\frac{1000000\cdot 1,08^{10}}{S_{10}}$ (1 pont)

$x\equiv 149025$ (1 pont)

Tehát ezresekre kerekítve **149000 az éves törlesztőrészlet** (1 pont)

Összesen: 14 pont

15) Egy 1 méter oldalú négyzetbe egy második négyzetet rajzoltunk úgy, hogy a belsőnégyzet minden csúcsa illeszkedjen a külső négyzet egy-egy oldalára. A belső és a külső négyzet oldalainak aránya 5:7.

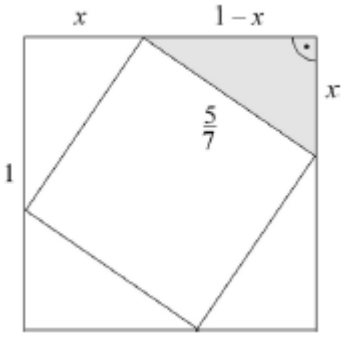
a) Milyen arányban osztja két részre a belső négyzet csúcsa a külső négyzet oldalát? Az arány pontos értékét adja meg! (10 pont)

A belső négyzetbe egy újabb, harmadik négyzetet rajzolunk úgy, hogy a harmadik és a második négyzet oldalainak aránya is 5:7. Ezt az eljárást aztán gondolatban végtelen sokszor megismételjük.

b) Mekkora lesz a kapott négyzetek kerületeinek az összege, ha a kiindulási négyzet kerülete is tagja a (végtelen sok tagú) összegnek? (6 pont)

Megoldás:

a) Jó ábra felrajzolása (1 pont)



A belső négyzet oldala 5/7 méter (1 pont)

A belső négyzet a külső négyzet oldalait x és $1-x$-re bontja (1 pont)

A felosztás mind a 4 oldalon ismétlődik (1 pont)

Pitagorasz-tétel szerint $x^2+(1-x)^2=\left(\frac{5}{7}\right)^2$ (1 pont)

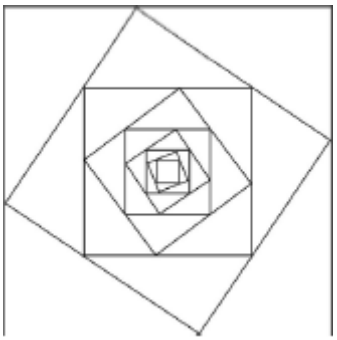
Ahonnan $2x^2-2x+\frac{24}{49}=0$ (1 pont)

Ennek megoldásai $x_1=\frac{4}{7}\quad x_2=\frac{3}{7}$ (2 pont)

Ahonnan $1-x_1=\frac{3}{7}\quad 1-x_2=\frac{4}{7}$ (1 pont)

A belső négyzet a külső négyzet oldalait **3:4 arányban** osztja (1 pont)

b) Jó ábra felrajzolása (1 pont)



$K_1 = 4, K_2 = 4 \cdot \frac{5}{7}$

minden további négyzet 5/7 szerese a megelőzőnek (1 pont)

A négyzetek kerületének összege egy végtelen mértani sor összege, melynek hányadosa $q = \frac{5}{7}$ (1 pont)

Mivel $|q| < 1$ ezért a sor konvergens (1 pont)

A végtelen mértani sor összege:

$S = K_1 + K_2 + \ldots = K_1 \cdot \frac{1}{1-q}$ (1 pont)

$= \frac{4}{1-\frac{5}{7}} = 14$ (1 pont)

Tehát a négyzetek kerületének összege **14 méter.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

16) Az *ABCDEF* szabályos hatszögben a rövidebb átló hossza $5\sqrt{2}$.

a) Számolja ki a hatszög területének pontos értékét! (6 pont)

b) Az *ABCDEF* hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét jelölje t_1, a t_1 területű hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét t_2, és így tovább, képezve ezzel a (t_n) sorozatot. Számítsa ki a $\lim_{n\to\infty}(t_1 + t_2 + \ldots + t_n)$ határértékét! (Pontos értékkel számoljon!) (10 pont)

Megoldás:

a) Ha a hatszög oldalának hossza a, a rövidebb átló az a oldalú szabályos háromszög magasságának kétszerese, (1 pont)

így $a\sqrt{3} = 5\sqrt{2}$, (1 pont)

ahonnan $a = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(= \frac{5\sqrt{6}}{3}\right)$. (1 pont)

A szabályos hatszög területe 6 darab a oldalú szabályos háromszög területének összege, (1 pont)

így $T = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \mathbf{25\sqrt{3}}$ (2 pont)

b) A t_1 területű szabályos hatszög oldala az ABC háromszög AC oldalához (mely az eredeti hatszög rövidebb átlója) tartozó középvonala, (1 pont)

hossza $a_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, (1 pont)

$t_1 = 6\frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{4}$ (1 pont)

A következő szabályos hatszög t_2 területét megkaphatjuk például úgy, hogy a t_1 területű hatszög szomszédos oldalfelező pontjait összekötő szakaszok által a hatszögből levágott háromszögek területének összegét levonjuk t_1-ből.

$$t_2 = t_1 - 6\frac{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 \cdot \sin 120°}{2} = \frac{3 \cdot 75\sqrt{3}}{16}\left(= \frac{225\sqrt{3}}{16}\right).$$ (2 pont)

A $\{t_n\}$ sorozat mértani sorozat, (1 pont)

amelynek hányadosa $q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{4}$. (1 pont)

A kérdéses határérték annak a mértani sornak az összege, amelynek első tagja $t_1 = \frac{75\sqrt{3}}{4}$, hányadosa pedig $q = \frac{3}{4}$. (1 pont)

Így $\lim\limits_{n\to\infty}\left(t_1 + t_2 + \ldots + t_n\right) = \frac{t_1}{1-q} =$ (1 pont)

$= \mathbf{75\sqrt{3}}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

17) Kinga 10. születésnapja óta kap havi zsebpénzt a szüleitől. Az első összeget a 10. születésnapján adták a szülők, és minden hónapban 50 Ft-tal többet adnak, mint az azt megelőző hónapban. Egy bizonyos hónapban, amikor éppen 1850 Ft volt a havi zsebpénze, összeadta az addig kapott összes zsebpénzét. Az összeg 35100 Ft lett. Mennyi volt Kinga induló zsebpénze, és hány hónap telt el a 10. születésnapja óta?

(12 pont)

Megoldás:

A havi zsebpénzek értékei egy számtani sorozat tagja (1 pont)

ahol $d = 50, a_n = 1850, S_n = 35100$ (1 pont)

$1850 = a_1 + (n-1)\cdot 50$ (1 pont)

azaz $a_1 = 1900 - 50n$ (1 pont)

$$S_n = 3500 = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1900 - 50n + 1850}{2} \cdot n$$ (2 pont)

$70200 = 3750n - 50n^2$

rendezve: $n^2 - 75n + 1404 = 0$ (2 pont)

Megoldva: $n = 36$ vagy 39 (1 pont)

$n = 39$ nem megoldás mert akkor a_1 negatív (1 pont)

Ha $n = 36$, akkor $a_1 = 1900 - 50 \cdot 36 = 100$ (1 pont)

Kinga induló zsebpénze 100 Ft volt, és a 10. születésnapja óta 35 hónap telt el. (1 pont)

Összesen: 12 pont

18) Egy dolgozó az év végi prémiumként kapott 1000000 Ft-ját akarja kamatoztatni a következő nyárig, hat hónapon át. Két kedvező ajánlatot kapott. Vagy kéthavi lekötést választ kéthavi 1,7%-os kamatra, kéthavonkénti tőkésítés mellett, vagy forintot átváltja euróra, és az összeget havi 0,25%-os kamattal köti le hat hónapra, havi tőkésítés mellett.

a) Mennyi pénze lenne hat hónap után a forintszámlán az első esetben? (Az eredményt Ft-ra kerekítve adja meg!) (3 pont)

b) Ha ekkor éppen 252 forintot ért egy euró, akkor hány eurót vehetne fel hat hónap múlva a második ajánlat választása esetén? (Az eredményt két tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (4 pont)

c) Legalább hány százalékkal kellene változnia a 252 forint/euró árfolyamnak a félév alatt, hogy a második választás legyen kedvezőbb? (Az eredményt két tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (5 pont)

Megoldás:

a) Kéthavonta 1,7 %-kal lesz több pénze, ami három ciklusban $1{,}017^3$-es szorzót jelent. (2 pont)

Hat hónap után tehát a pénze $1000000 \cdot 1{,}017^3 = \mathbf{1051872\ Ft}$ lenne. (1 pont)

b) A megadott árfolyamon 1000000 forintért $\frac{1000000}{252} = 3968{,}25$ eurót kap. (1 pont)

Ez az összeg hat hónap alatt, havi tőkésítés mellett hatszor kamatozik, tehát $1{,}0025^6$-szorosára növekszik. (2 pont)

Hat hónap múlva $3968{,}25 \cdot 1{,}0025^6 \approx \mathbf{4028{,}15\ eurója}$ lenne. (1 pont)

c) Legyen 1 euró a nyáron x Ft. Ha jobban jár, az azt jelenti, hogy $4028{,}15x > 1051872$ (2 pont)

amiből $x > 261{,}13$ (1 pont)

Ebből az árfolyamarány $\frac{261{,}13}{252} = 1{,}03623$, **tehát legalább kb. 3,63%-kal kellene nőnie a forint/euró árfolyamnak**. (2 pont)

Összesen: 12 pont

19) András edzőtáborban készül egy úszóversenyre, 20 napon át. Azt tervezte, naponta 10000 métert úszik. De az első napon a tervezettnél 10%-kal többet, a második napon pedig az előző napinál 10%-kal kevesebbet teljesített. A 3. napon ismét 10%-kal növelte előző napi adagját, a 4. napon 10%-kal kevesebbet edzett, mint az előző napon és így folytatta, páratlan sorszámú napon 10%-kal többet, páros napon 10%-kal kevesebbet teljesített, mint a megelőző napon.

a) Hány métert úszott le András a 6. napon? (4 pont)

b) Hány métert úszott le összesen a 20 nap alatt? (6 pont)

c) Az edzőtáborozás 20 napjából véletlenszerűen kiválasztunk két szomszédos napot. Mekkora a valószínűsége, hogy András e két napon együttesen legalább 20000 métert teljesített? (6 pont)

Megoldás:

a) Jelölje a_n az n-edik napon leúszott hosszat, méterben mérve.

$a_1 = 10000 \cdot 1{,}1 = 11000$

$a_2 = a_1 \cdot 0{,}9 = 10000 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}9 = 9900$ (1 pont)

$a_3 = a_2 \cdot 1{,}1 = 10000 \cdot 1{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 10890$

$a_4 = a_3 \cdot 0{,}9 = 10000 \cdot 1{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 9801$ (1 pont)

$a_5 = a_4 \cdot 1{,}1 = 10000 \cdot 1{,}1^3 \cdot 0{,}9^2 \approx 10781$

$a_4 = a_5 \cdot 0{,}9 = 10000 \cdot 1{,}1^3 \cdot 0{,}9^3 \approx 9703$ (1 pont)

A hatodik napon tehát kb. **9703 métert** úszott (1 pont)

b) A páratlan és páros sorszámú napokon leúszott hosszak is egy-egy mértani sorozat első 10 tagját alkotják. A páratlan sorszámúaknak az elő tagja 11000, hányadosa 0,99, a páros sorszámúak első tagja 9900, hányadosa 0,99.(1 pont)

A páratlan sorszámú napokon:

$S_{ptl} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{19} = 11000 + 11000 \cdot 0{,}99 + \ldots + 11000 \cdot 0{,}99^9 =$ (1 pont)

$= 11000 \cdot \frac{1 - 0{,}99^{10}}{1 - 0{,}99} \approx 105179{,}7$ (1 pont)

A páros sorszámú napokon:

$S_{ps} = a_2 + a_4 + \ldots + a_{20} = 9900 + 9900 \cdot 0{,}99 + \ldots + 9900 \cdot 0{,}99^9 =$ (1 pont)

$= 9900 \cdot \frac{1 - 0{,}99^{10}}{1 - 0{,}99} \approx 94661{,}7$ (1 pont)

Az első húsz napon kb. **199841** métert úszott összesen (1 pont)

c) Az edzések 20 napja közül két szomszédos nap 19-féleképpen választható ki (1 pont)

Ha két szomszédos nap során összességében nem teljesül a tervezett 20000 méter, később se fog, mert az összteljesítmény csökken (1 pont)

napok száma (n)	naponta leúszott táv méterben (a_n)	kétnapi össztáv $(b_n = a_n + a_{n+1})$
1.	11000	20900
2.	9900	20790
3.	10890	20691
4.	9801	20582
5.	10781	20484
6.	9703	20376
7.	10673	20279
8.	9606	20172
9.	10566	20076
10.	9510	19971
11.	10461	

a táblázat (2 pont)

kedvező esetek száma 9 (1 pont)

A keresett valószínűség $P = \frac{9}{19} \approx \mathbf{0,474}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

20) Egy növekvő számtani sorozat első három tagjából álló adathalmaz szórásnégyzete 6.

a) Igazolja, hogy a sorozat differenciája 3-mal egyenlő! (4 pont)

András, Barbara, Cili, Dezső és Edit rokonok. Cili 3 évvel idősebb Barbaránál, Dezső 6 évvel fiatalabb Barbaránál, Edit pedig 9 évvel idősebb Cilinél. Dezső, Barbara és Edit életkora (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat három egymást követő tagja, András, Barbara és Cili életkora (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat három szomszédos tagja.

b) Hány éves András? (6 pont)

András, Barbara, Cili, Dezső, Edit és Feri moziba mennek.

c) Hányféleképpen foglalhatnak helyet hat egymás melletti széken úgy, hogy a három lány ne három egymás melletti széken üljön? (6 pont)

Megoldás:

a) Ha a sorozat második tagját a_2-nek jelöljük, akkor az első három tag átlaga is a_2. (1 pont)

Ha a számtani sorozat differenciáját d-nek jelöljük, akkor a szórásnégyzet:

$$\frac{(a_2 - d - a_2)^2 + 0^2 + (a_2 + d - a_2)^2}{3} = 6\,.$$ (1 pont)

Innen adódik, hogy $d^2 = 9$, (1 pont)

azaz, mivel a sorozatunk növekedő $\boldsymbol{d = 3}$. **Ezzel az állítást beláttuk.** (1 pont)

b) Ha Barbara x éves, akkor Cili $x+3$ éves, és így Dezső, Barbara és Edit életkora rendre $x-6$, x, illetve $x+12$ év. (1 pont)

Mivel ez a három szám egy mértani sorozat három szomszédos tagja, ezért:
$(x-6)(x+12)=x^2$. (1 pont)

A zárójeleket felbontva:
$x^2+6x-72=x^2$, (1 pont)
ahonnan $x=12$. (1 pont)
Ellenőrzés: Dezső, Barbara és Edit életkora 6, 12, illetve 24 év, ez a három szám pedig valóban egy mértani sorozat három szomszédos tagja. (1 pont)
András tehát 9 éves. (1 pont)

c) Komplementer eseményt felhasználva: nem felelnek meg azok az esetek, amelyekben a három lány három egymás melletti széken ül. (1 pont)
A három egymás melletti széket négyféleképpen lehet kiválasztani a hat közül. (1 pont)
A három egymás melletti széken 3!, azaz hatféleképpen foglalhat helyet a három lány, a megmaradt három helyen szintén hatféleképpen foglalhat helyet a három fiú. (1 pont)
A nem megfelelő elhelyezkedések száma tehát: $4\cdot 6\cdot 6=144$. (1 pont)
Hatan a hat egymás melletti székre 6!, azaz 720-féleképpen ülhetnének le. (1 pont)

A megfelelő elhelyezkedések száma tehát:
$720-144=$ **576**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

21) Állítsuk a pozitív egész számokat növekvő sorrendbe, majd bontsuk rendre 1-gyel növekvő elemszámú csoportokra, az alábbi módon kezdve:

$$(1),(2;3),(4;5;6),(7;8;9;10),\ldots$$

a) A 100-adik csoportnak melyik szám az első eleme? (5 pont)
b) Az 1851 hányadik csoport hányadik eleme? (9 pont)

Megoldás:

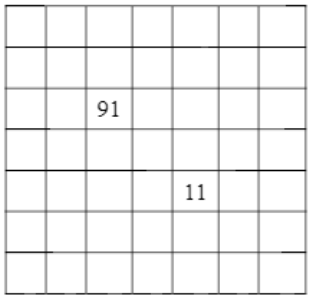
a) A csoportokban lévő számok számát megadó sorozat: $1;2;3;4;\ldots;n;\ldots$
A 99-edik csoportban lévő utolsó szám: $1+2+3+4+\ldots+99$ (2 pont)
amely $\frac{1+99}{2}\cdot 99=4950$ (2 pont)
Tehát a 100. csoport első eleme **4951** (1 pont)

b) Ha az 1851 az $n+1$-edik csoportban van, akkor
$\frac{1+n}{2}\cdot n<1851\le\frac{1+(n+1)}{2}(n+1)$, ahol n pozitív egész (3 pont)
Tehát azt a pozitív egész n-t keressük, amelyre $n^2+n-3702<0$ és $n^2+3n-3700\ge 0$ (1 pont)
Az első egyenlőtlenség pozitív egész megoldásai a 60-nál nem nagyobb pozitív egész számok (1 pont)
A második egyenlőtlenség pozitív megoldásai a 60-nál nem kisebb pozitív egész számok (1 pont)
Az egyenletrendszernek egyetlen egész megoldása van, a 60 (1 pont)
A 60-adik csoport utolsó eleme $\frac{1+60}{2}\cdot 60=1830$ (1 pont)

A 61. csoport első eleme 1831. Mivel ennek a csoportnak 61 eleme van, így ennek eleme az 1851 is, mégpedig a 21-edik eleme.
Tehát az 1851 a **61. csoport 21. eleme.** (1 pont)

Összesen: 14 pont

22) Éva egy 7×7-es táblázat bal felső mezőjétől kezdve, balról jobbra haladva, sorról sorra beírta egy számtani sorozat első 49 tagját úgy, hogy a tagok sorrendjét nem változtatta meg. (A sorozat 1. tagja a bal felső sarokba került, a 8. tag a második sor első mezőjébe, a 49. tag pedig a jobb alsó sarokban áll.)



a) Mennyi a táblázatba írt 49 szám összege, ha Éva a harmadik sor harmadik mezőjébe 91-et, az ötödik sor ötödik mezőjébe pedig a 11-et írta? (5 pont)

Péter a táblázat minden sorából kiválasztja a számtani sorozat egy-egy tagját úgy, hogy a hét kiválasztott szám közül semelyik kettő ne legyen egy oszlopban.

b) Igazolja, hogy akárhogyan is választja ki Péter így a számokat, a hét szám összege minden esetben ugyanannyi lesz! (6 pont)

c) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a 91 és a 11 is a Péter által kiválasztott számok között lesz! (5 pont)

Megoldás:

a) $a_{17}=91$ és $a_{33}=11$ (1 pont)

Ebből $d=-5$, (1 pont)

majd $a_1=171$. (1 pont)

$$S_{49}=\frac{\left[2\cdot 171+(49-1)\cdot(-5)\right]\cdot 49}{2}= \quad \text{(1 pont)}$$

$=2499$ (1 pont)

b) Adjuk össze a sorozat főátlóban álló tagjait! (Ezek összege 357.) (1 pont)

Ha a táblázat két kiválasztott sorában felcseréljük, hogy melyik sorban melyik oszlopból választottuk ki a sorozat tagját, (1 pont)

akkor (ha az érintett oszlop sorszáma között k a különbség) az egyik oszlopban $k\cdot d$-vel nő, a másik oszlopban $k\cdot d$-vel csökken a kiválasztott tag értéke. (2 pont)

Tehát a sorozat hét kiválasztott tagjának összege a két tag cseréje után ugyanannyi marad, mint amennyi a csere előtt volt. (1 pont)

Mivel a sorozat **főátlóban álló tagjaiból kiindulva, két-két tag cserélgetésével bármelyik kiválasztott számheteshez eljuthatunk, a tagok összege bármely hét tag (leírtak szerinti) kiválasztása esetén ugyanannyi (357).** (1 pont)

c) Péter összesen $7! = 5040$-féleképpen választhat ki a táblázatból számokat a megadott szabály szerint. (1 pont)

Ha a 91 és a 11 is a kiválasztott számok közt van, akkor az első sorból 5-féleképpen választhat, ezután a másodikból 4-féleképpen, a negyedikből 3-féleképpen, a hatodikból 2-féleképpen, a hetedikből pedig1-féleképpen. (1 pont)

Ez $5! = 120$ lehetőség. (1 pont)

A kérdéses valószínűség így $\frac{120}{5040} \approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{0,024}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

23) Egy pénzintézet a tőle felvett H forint összegű hitel visszafizetésekor havi $p\%$-os kamattal számol $(p > 0)$, ezért az adós havi törlesztőrészletét a $t_n = H \cdot \frac{q^n (q-1)}{q^n - 1}$ képlettel számítja ki (minden hónapban ekkora összeget kell visszafizetni). A képletben $q = 1 + \frac{p}{100}$, az n pedig azt jelenti, hogy összesen hány hónapig fizetjük a törlesztőrészletet (ez a hitel futamideje).

a) Fogyasztási cikkek vásárlására 1,6 millió forint hitelt vettünk fel a pénzintézettől; a havi kamat 2%. Összesen hány forintot fizetünk vissza, ha 72 hónap alatt törlesztjük a felvett hitelt?
Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg! (4 pont)

b) Legkevesebb hány hónapos futamidőre vehetünk fel egy 2 millió forintos hitelt, ha legfeljebb 60 ezer forintot tudunk havonta törleszteni, és a havi kamat 2%-os? (8 pont)

c) Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$ határértékét, ha $q = 1,02$ és $H = 2\,000\,000$

(4 pont)

Megoldás:

a) A havi törlesztés összege (Ft-ban):

$t_{72} = 1,6 \cdot 10^6 \cdot \frac{1,02^{72} \cdot 0,02}{1,02^{72} - 1} \approx 42123.$ (2 pont)

A 72 hónap alatt összesen $72 \cdot t_{72} \approx 3032856$ forintot fizetünk vissza, (1 pont)

ami ezer forintra kerekítve **3 033 000 Ft.** (1 pont)

b) Azt a legkisebb n pozitív egész számot keressük, amelyre

$2\cdot 10^6\cdot\frac{1{,}02^n\cdot 0{,}02}{1{,}02^n-1}\le 60\,000$. (2 pont)

Mivel $1{,}02^n-1>0$, ezért $0{,}02\cdot 1{,}02^n\le 0{,}03\cdot\left(1{,}02^n-1\right)$. (1 pont)

$3\le 1{,}02^n$ (1 pont)

Az 1,02 alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő. (1 pont)

ezért $n\ge \log_{1{,}02} 3$. (1 pont)

A logaritmus azonosságát használva: $n\ge\frac{\lg 3}{\lg 1{,}02}\approx 55{,}48$ (1 pont)

Tehát a törlesztőrészletek száma **legalább 56** azaz legalább 56 hónapos futamidőt kell választanunk. (1 pont)

c) A megadott számokkal $t_n=H\cdot(q-1)\cdot\frac{q^n}{q^n-1}=40\,000\cdot\frac{1{,}02^n}{1{,}02^n-1}$ (1 pont)

Egyszerűsítés után: $t_n=40\,000\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1{,}02^n}}$ (1 pont)

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1{,}02^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1{,}02}\right)^n=0$, (1 pont)

ezért $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=40\,000\cdot\frac{1}{1-0}=$**40 000.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

24) Egy olajkút meghibásodása miatt a tenger felületén összefüggő olajfolt keletkezett. A szakemberek műholdak segítségével 15 percenként megmérték a folyamatosan növekvő olajfolt területét, és úgy tapasztalták, hogy az minden alkalommal 2%-kal nagyobb, mint az előző érték volt.

a) Ha az első megfigyeléskor 400 m² volt az olajfolt kiterjedése, akkor mekkora lesz a területe egy nap múlva? (4 pont)

A sérült olajkutat végül sikerült elzárni, így az olajfolt területének növekedése megállt. Ekkor kezdték meg az olajszennyezés eltávolítását. A környezetvédelmi hatóság a 12 400 m² területű olajfolt megszüntetésére 31 napos határidőt szabott meg. Az első napon még csak 130 m²-ről sikerült eltávolítani az olajfoltot (így a területe 12 270 m² lett), de a teljesítményt növelni tudták: az egy nap alatt megtisztított terület mérete minden nap ugyanakkora értékkel nőtt.

b) Mekkora ez a napi növekedés, ha pontosan az előírt határidőre sikerült a 12 400 m²-es olajfolt teljes eltávolítása? (6 pont)

Megoldás:

a) Óránként 4, egy nap alatt tehát $(24 \cdot 4 =)$ 96 alkalommal történik meg a 2%-os növekedés. (1 pont)
Az olajfolt területe 15 perc alatt 1,02-szorosára nő, (1 pont)
tehát egy nap múlva $400 \cdot 1{,}02^{96} \approx$ (1 pont)
$\approx$ **2677 m² lett.** (1 pont)

b) A naponta eltávolított olajfoltterületek (m²-ben mérve) egy olyan számtani sorozat szomszédos tagjai, amelynek első tagja 130, az első 31 tagjának összege pedig 12 400 (2 pont)
A napi növekedés legyen d (m²). Ekkor szórása $\frac{(260+30d)\cdot 31}{2} = 12400$. (1 pont)
Ebből d = 18 (m²). (1 pont)
A napi növekedés tehát **18 m²** volt. (1 pont)
Ellenőrzés (1 pont)
Összesen 10 pont

25)

a) Egy számtani sorozat differenciája 1,6. A sorozat első, harmadik és hetedik tagját (az adott sorrendben) tekinthetjük egy mértani sorozat első három tagjának is. Határozza meg ezt a három számot! (6 pont)

Tekintsük a következő állítást: *Ha az $\{a_n\}$ számsorozat konvergens, akkor az $\{a_n\}$ sorozat értékkészlete véges számhalmaz.* (Véges halmaz: elemeinek száma megadható egy természetes számmal.)

b) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (4 pont)

Megoldás:

a) Ha a számtani sorozat első tagja a, akkor a 3. tagja a + 3,2. A 7. tag a + 9,6. (1 pont)
A mértani sorozat tulajdonsága miatt $(a+3{,}2)^2 = a(a+9{,}6)$. (1 pont)
$a^2 + 6{,}4a + 10{,}24 = a^2 + 9{,}6a$ (1 pont)
$3{,}2a = 10{,}24 \Rightarrow a = 3{,}2$ (1 pont)
A három szám: **3,2; 6,4; 12,8**. (1 pont)
Ellenőrzés (1 pont)

b) **Az állítás hamis.** (1 pont)
Például az $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ számsorozat (1pont)
konvergens, az értékkészlete azonban végtelen szám-halmaz. (1 pont)

c) Megfordítás: Ha az $\{a_n\}$ számsorozat értékkészlete véges számhalmaz, akkor az $\{a_n\}$ sorozat konvergens. (1 pont)

A megfordított állítás **hamis**. (1 pont)
Például a $\{(-1)^n\}$ sorozat (1 pont)
értékkészlete véges $\left(\{-1;1\}\right)$, de a sorozat nem konvergens. (1 pont)

Összesen 13 pont