MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI
EMELT SZINT

Síkgeometria

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Egy húrnégyszög három szögéről tudjuk, hogy mértékük aránya 7 : 6 : 8.
a) Mekkorák a húrnégyszög szögei? (13 pont)
Matematika órán, miután minden diák megoldotta a feladatot, három tanuló a következőket állította:
Zsófi: A húrnégyszög minden szöge egész szám.
Peti: A húrnégyszögnek van derékszöge.
Kata: A húrnégyszög egyik szöge 110°-nál is nagyobb.
b) A három tanuló állítása közül melyik igaz a feltételnek megfelelő húrnégyszögre? (3 pont)

Megoldás:

a) A húrnégyszögben a szemközti szögeinek összege 180°. (1 pont)
A megadott arányszámok nem feltétlenül követik a szögek sorrendjét a négyszögben, ezért három esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a három arányszám közül melyik két szög van egymással szemben. (3 pont)
A feltételben szereplő három szög legyen α, β, γ, a negyedik δ.
$\alpha + \gamma = 180°$, így a három lehetőség:

	α	β	γ	egység	δ
1.négyszög	$7e$	$6e$	$8e$	$e = 12°$	
	84°	**72°**	**96°**		**108°**
2.négyszög	$6f$	$7f$	$8f$	$f = \frac{90°}{7}$	
	$\frac{540°}{7} = \mathbf{77,14°}$	**90°**	$\frac{720°}{7} = \mathbf{102,86°}$		**90°**
3.négyszög	$6g$	$8g$	$7g$	$g = \frac{180°}{13}$	
	$\frac{1080°}{13} = \mathbf{83,08°}$	$\frac{1440°}{13} = \mathbf{110,77°}$	$\frac{1260°}{13} = \mathbf{92,92°}$		$\frac{1900°}{13} = \mathbf{69,23°}$

Helyesen megadott húrnégyszögenként 3-3 pont (9 pont)

b) Az a) feladat táblázatában látható, hogy **vannak olyan húrnégyszögek, amelyekre rendre igaz a tanórán elhangzott három állítás közül egy-egy**:
Zsófi állítása az1., Peti állítása a 2., Kata állítása a 3. négyszögre igaz. (3 pont)

Összesen: 16 pont

2) Az *ABC* derékszögű háromszög *BC* befogójának hossza 18 cm, a *CA* befogójának hossza 6 cm.

a) Mekkorák a háromszög hegyesszögei? (3 pont)

A *BC* befogó egy *P* belső pontját összekötjük az *A* csúccsal. Tudjuk még, hogy *PB* = *PA*.

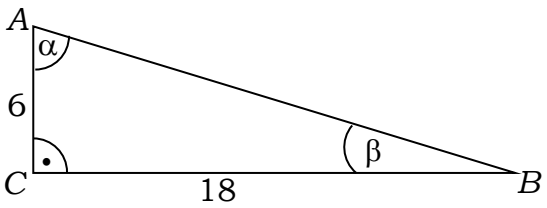
b) Milyen hosszú a *PB* szakasz? (6 pont)

Állítsunk merőleges egyenest az *ABC* háromszög síkjára *C* pontban! A merőeleges egyenes *D* pontjára teljesül, hogy *CD* 15 cm.

c) Mekkora az *ABCD* tetraéder térfogata? (4 pont)

Megoldás:

a)

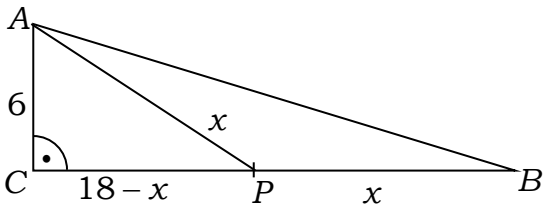


A szokásos jelölésekkel: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ (1 pont)

$\beta \approx \mathbf{18,43°}$ (1 pont)

Ekkor $\alpha = 90 - \beta \approx \mathbf{71,57°}$ (1 pont)

b) Jelöljük a derékszögű háromszögben a *PB* szakasz hosszát *x*-szel! (2 pont)



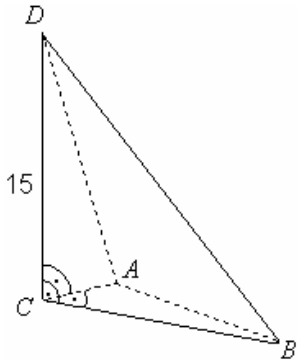
A *PCA* háromszögben $6^2 + (18-x)^2 = x^2$ (2 pont)

$36 + 324 - 36x + x^2 = x^2$

$x = 10$

Tehát ***PB* = 10** (2 pont)

c) Tekintsük a tetraéder alapjának az ABC háromszöget, ekkor a testmagasság CD lesz. $m = 15$ cm (2 pont)



Az ABC háromszög területe 54 cm^2

$$V = \frac{T \cdot m}{3}$$

$$V = \frac{54 \cdot 15}{3}$$

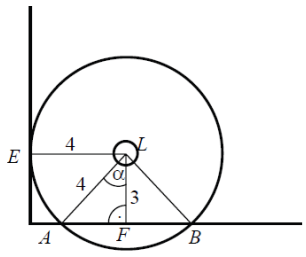
Így a keresett térfogat: **270 cm³** (2 pont)

Összesen: 13 pont

3) Egy családnak olyan téglalap alakú telke van, melynek két szomszédos oldala 68 m, illetve 30 m hosszú. A telek egyik sarkánál úgy rögzítettek egy kerti locsoló berendezést, hogy a telek rövidebb oldalától 4 m-re, a vele szomszédos oldaltól 3 m-re legyen. A locsoló berendezés körbe forgó locsolófeje azt a részt öntözi, amely a rögzítés helyétől legalább 0,5 m-re, de legfeljebb 4 m-re van. A telek mekkora részét öntözi a locsoló berendezés, és ez hány százaléka a telek területének? (11 pont)

Megoldás:

A telek öntözött területének nagyságát megkapjuk, ha az L középpontú körgyűrű területéből kivonjuk az AB húr által lemetszett körszelet területét (1 pont)



A körgyűrű területe: $\left(4^2 - 0{,}5^2\right)\pi \approx 49{,}5$ m^2 (1 pont)

Az AFL derékszögű háromszögből: $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, amiből $\alpha \approx 41{,}4°$ (2 pont)

A 2α középponti szögű ALB körcikk területe: $\frac{82{,}8 \cdot 4^2 \cdot \pi}{360} \approx 11{,}6$ m^2 (2 pont)

Az ALB egyenlőszárú háromszög területe: $\frac{4^2 \cdot \sin 82{,}8°}{2} \approx 7{,}9$ m^2 (2 pont)

A körszelet területe tehát kb. 3,7 m^2 és így a telek öntözött területe kb. $49{,}5 - 3{,}7 = \mathbf{45{,}8\ m^2}$ (1 pont)

Ez a telek területének kb. 2,2%-a. (2 pont)

Összesen: 11 pont

4) Az *ABC* háromszög körülírt körének sugara 26 cm, $BAC\sphericalangle = 60°$

a) Számítsa ki a *BC* oldal hosszát! (4 pont)

b) Hány fokos a háromszög másik két szöge, ha az *AC* oldal *b* cm, az *AB* oldal 3*b* cm hosszúságú? (12 pont)

A keresett értékeket egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

Megoldás:

a) $BC = 2 \cdot 26 \cdot \sin 60°$ (3 pont)

$BC \approx \mathbf{45,0\ cm}$. (1 pont)

b) Koszinusztételt felírva a BC oldalra: $(52\sin 60°)^2 = b^2 + 9b^2 - 6b^2 \cos 60°$ (2 pont)

Ebből $b^2 = 289,7$. (2 pont)

Mivel $b > 0$, ezért $b = 17$ (és így $3b = 51$). (1 pont)

Erre felírva a szinusztételt $\frac{\sin\beta}{\sin 60°} = \frac{AC}{BC} = \frac{17}{45}$, amiből (2 pont)

$\sin\beta \approx 0,3273$, így $\beta \approx \mathbf{19,1°}$, (2 pont)

mert az AC oldallal szemköztes β csak hegyesszög lehet. (2 pont)

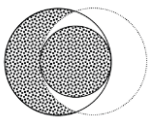
A háromszög harmadik szöge pedig **kb. 100,9°**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

5) Klári teasüteményt készít. A meggyúrt tésztát olyan „téglatest” alakúra nyújtotta ki, amelynek a felülről látható lapja 30 cm x 60 cm méretű téglalap.

Majd egy henger alakú szaggatóval (határoló körének sugara 3 cm) „körlapokat” vágott ki a tésztából.

Ezután a körlapocskákból először „holdacskákat” vágott le úgy, hogy a szaggató határoló körének középpontja a már kivágott körlap középpontjától 2 cm távolságra helyezte el, és így vágott bele a körlapba. (Minden bevágásnál csakis egy körlapot vágott ketté.)



Miután minden körlapból levágott egy „holdacskát”, a körlapokból visszamaradt részek mindegyikéből –egy másik szaggatóval- kivágott egy-egy lehető legnagyobb körlap alakú süteményt.

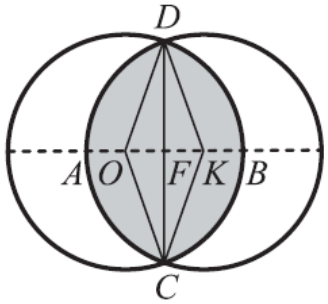
a) Hány cm² területű egy „holdacska” felülről látható felülete? (Az eredményt egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (11 pont)

Klári a „holdacskák” és a kis körlapok elkészítése után visszamaradt tésztát ismét összegyúrta, majd ugyanolyan vastagságúra nyújtotta ki, mint az első esetben, de most négyzet alakú lett a kinyújtott tészta.

b) Hány cm hosszú ennek a négyzetnek az oldala, ha Klári a 30 cm x 60 cm-es téglalapból eredetileg 50 darab 3 cm sugarú körlapot szaggatott ki? (Az eredmény egészre kerekítve adja meg!) (5 pont)

Megoldás:

a) Használjuk az ábra jelöléseit!



A 3 cm sugarú k körlapba bevágni ugyanazzal a kör alakú formával azt jelenti, hogy az O középpontú 3 cm sugarú kört eltoljuk 2 cm-rel az $\overrightarrow{OK}$ vektorral. A k körlapból kivágunk egy T tartományt. (rajzon szürkével szerepel) T-nek szimmetriatengelye a DC és az OK egyenes. A T-t határoló két körív sugara egyaránt 3 cm, középpontjuk O és K pont. A T tartomány két egybevágó körszeletből áll (2 pont)

Egy ilyen körszelet (pl. a DCB) területét számoljuk ki:

$t_{\text{körszelet}} = t_{\text{körcikk}} - t_{\text{háromszög}}$ (1 pont)

Az $OBCD$ körcikk középponti szöge és az ODC háromszög szárszöge is a DOC szög. Legyen $DOC\sphericalangle = 2\alpha$

Az α nagyságát a FOC derékszögű háromszögből számoljuk ki.

$OC = 3, OF = 1$, innen $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ (1 pont)

$\alpha = 1{,}23 \quad (\alpha = 70{,}543°)$ (1 pont)

$\text{ív}_{DBC} = r \cdot 2\alpha(rad) = 7{,}39$ (1 pont)

ahonnan $t_{\text{körcikk}} = \frac{\text{ív} \cdot r}{2} = 11{,}07 \text{ cm}^2$ (1 pont)

$t_{\text{háromszög}} = \frac{r^2 \cdot \sin(2\alpha)}{2} = 2{,}83 \text{ cm}^2$ (1 pont)

$t_{\text{körszelet}} = 8{,}25 \text{ cm}^2$ (1 pont)

$t_{\text{holdacska}} = t_{\text{kör}} - 2 \cdot t_{\text{körszelet}} = 11{,}78 \text{ cm}^2$ (1 pont)

Egy holdacska felülről látható felületének területe 11,8 cm² (1 pont)

b) Minden körlapból lett egy holdacska és egy 2 cm sugarú körlap formájú sütemény$(AB = 4 \text{ cm})$ (1 pont)

Klári az eredeti 30x60-as téglalapból kivágott 50 darab holdacskát és 50 db 2 cm sugarú kört. A kivágott sugarak alapterülete: $50 \cdot 11{,}78 + 50 \cdot 2^2\pi = 1217$ cm² (1 pont)

A maradék alapterület ekkor: $30 \cdot 60 - 1217 = 583 \text{ cm}^2$ (1 pont)

Ebből négyzet alapú formát kellett készíteni azonos vastagsággal. A négyzet alakúra kinyújtott tészta alapterülete a maradék alapterület, vagyis 583 cm² (1 pont)

Ennek a négyzetnek az oldala $\sqrt{583}$, azaz kerekítve **24 cm** (1 pont)

Összesen: 16 pont

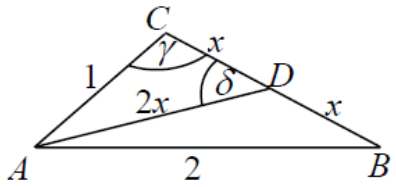
6) Az *ABC* háromszögben $AB = 2$, $AC = 1$, a *BC* oldal hossza pedig megegyezik az *A* csúcsból induló súlyvonal hosszával.

a) Mekkora a *BC* oldal hossza? A hossz pontos értékét adja meg! (9 pont)

b) Mekkora a háromszög területe? A terület pontos értékét adja meg! (5 pont)

Megoldás:

a)



A feladat helyes értelmezése (1 pont)

Az ábra jelöléseit használva az *ADC* háromszög *AD* oldalára felírva a koszinusztételt: (1 pont)

$4x^2 = x^2 + 1 - 2x\cos\gamma$, ahol $0 < x,\ 0 < \gamma < \pi$ (1 pont)

Az *ABC* háromszög *AB* oldalára is felírjuk a koszinusztételt: (1 pont)

$4 = 4x^2 + 1 - 4x\cos\gamma$. (1 pont)

Az első egyenletet beszorozva 2-vel, majd kivonva belőle a második egyenletet a következőt kapjuk:

$8x^2 - 4 = 1 - 2x^2$ (2 pont)

Az egyenlet pozitív gyöke $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (1 pont)

Így a keresett oldal hossza: $BC = 2x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \mathbf{\sqrt{2}}$ (1 pont)

b) $T = \frac{AC \cdot BC \sin\lambda}{2} = \frac{\sqrt{2}\sin\gamma}{2} = \frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}}$ (1 pont)

a $4x^2 = x^2 + 1 - 2x\cos\gamma$ egyenletből $\cos\gamma = \frac{1-3x^2}{2x} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ (2 pont)

Így $\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{1-\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{7}{8}}$ (1 pont)

Behelyettesítve: $T = \frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{\sqrt{7}}}{\mathbf{4}}$ (1 pont)

Összesen: 14 pont

7) István örömmel mesélte Péter barátjának, hogy egy négyszög alakú telket vett, amire majd házat akar építeni. Elmondása szerint a négyszög egyik szöge derékszög, és az ezt közrefogó mindkét oldal 20,0 m hosszú. A telek másik két oldala is egymással egyenlő hosszú, ezek 120°-os szöget zárnak be.

a) Hány méter hosszú drót szükséges az üres telek körbekerítéséhez? (4 pont)

„Mekkora házat szeretnél rá építeni?"- kérdezte Péter.
„Négyzet alapú sarokházat, és körülbelül 100m² alapterületűt. Úgy gondoltuk a párommal, hogy a házat a derékszögű sarokba építjük."- válaszolt István.
„Ha jól képzelem el a telek alakját, akkor az nagyon furcsa alakú lehet. Oda még egy kis faház sem fér el."- szólt nevetve Péter.

b) Rajzolja le, milyen alakú az István által megvett telek, és milyennek képzelte el Péter! (2 pont)

c) Legfeljebb mekkora alapterületű, négyzet alapú sarokház férne el a telek derékszögű sarkába az egyik és mekkora a másik esetben? (Válaszát m²-re kerekítve adja meg! (7 pont)

Megoldás:

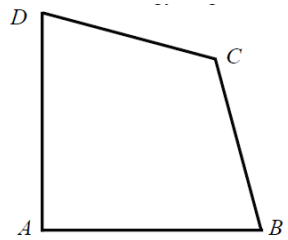
a) $BD = 20\sqrt{2}$ (1 pont)

A BDC egyenlő szárú háromszögben $BDC\sphericalangle = 30°$. A háromszög C csúcsából húzott magasság felezi a DB alapot. (Jelölje F a DB oldalfelező pontját.) A DFC derékszögű háromszögben $\cos 30° = \frac{DF}{DC}$ (1 pont)

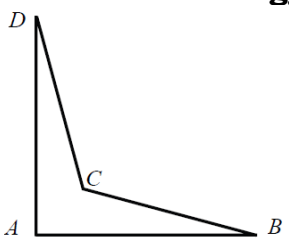
Így $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{2}}{b}$, azaz $b = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (1 pont)

Tehát a kerítés hossza: $40 + \frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx \mathbf{72,7\,(m)}$ (1 pont)

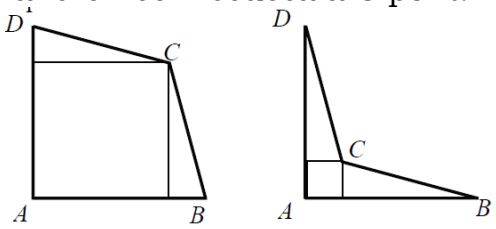
b) István ilyen négyszög alakú telket látott: (1 pont)



Péter konkáv négyszögre gondolt (1 pont)



c) A négyzet alapú ház alapterülete akkor a lehető legnagyobb, ha a négyzet *A*-val szembeni csúcsa a *C* pont.



Az *ABCD* négyszögbe berajzolva a négyzetet, az a négyszögben két egybevágó derékszögű háromszöget hoz létre. (2 pont)

Jelölje *T* a *C* csúcsból húzott, *AD* oldalnak a metszéspontját. Ekkor a *TC* a keresett négyzet oldala. István konvex négyszögében $TCD\sphericalangle = 15°$ (1 pont)

A *TCD* derékszögű háromszögben: $\cos 15° = \frac{CT}{b}$ (1 pont)

Mivel $b = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, így $CT = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \cos 15° \approx 15{,}77\,(\text{m})$.

Ekkor a ház alapterülete: kb. 249 m² lenne. (1 pont)

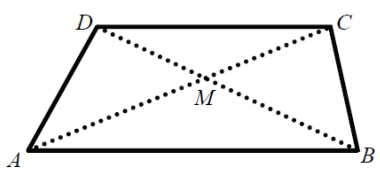
Péter konkáv négyszöge esetében $TCD\sphericalangle = 75°$. Mivel ekkor $\cos 75° = \frac{CT}{b}$, (1 pont)

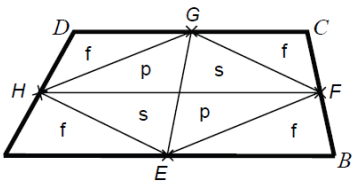
így $CT = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \cos 75° \approx 4{,}23\,(\text{m})$. **Ekkor a ház alapterülete: kb. 18 m² lenne** (1 pont)

Összesen: 13 pont

8) Egy 90 m² területű trapéz alakú virágágyás párhuzamos oldalainak aránya *AB* : *DC* = 3 : 2. Az ágyást tavasszal és ősszel is évszaknak megfelelő virágokkal ültetik be. Mindkét alkalommal mindegyik fajta virágból átlagosan 50 virágtövet ültetnek négyzetméterenként.
Tavasszal az átlókkal kijelölt négy háromszögre bontották a virágágyást. Az *ABM* háromszögbe sárga virágokat, a *DMC* háromszögbe fehéret, a maradék két részbe piros virágokat ültettek.

a) A tavaszi párosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek? (9 pont)





Ősszel a másik ábra szerint tervezték meg a virágok elhelyezését. (Az *E*,*F*,*G*, és *H* pontok a trapéz oldalainak felezőpontjai.) Ekkor is fehér (*f*), piros (*p*) és sárga (*s*) virágokat ültettek a tervrajz alapján.

b) Az őszi parkosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek? (7 pont)

Válaszait az alábbi táblázatban tüntesse fel!

	fehér	**piros**	**sárga**
tavasszal			
ősszel			

Megoldás:

a) A telje beültetéshez $50 \cdot 90 = 4500$ db virágra van szükség. A különböző színű virágok darabszám a megfelelő területek arányából számolható. Kiszámoljuk a megfelelő területeket. Jelölje az *MCD* háromszög területét *t*, az *MBA* háromszög területét *T*, az *MBC* háromszögét t_1 és az *MAD* háromszögét t_2.

(1 pont)

Az *MBA* és az *MCD* háromszögek hasonlóak, hiszen szögeik páronként egyenlők. A hasonlóság aránya alapján: $\frac{3}{2} = \frac{AM}{MC} = \frac{BM}{MD}$ (1 pont)

Az *MBA* háromszög területe $T = \left(\frac{3}{2}\right)^2 t$ (1 pont)

Az *ADC* háromszög területét a *DM* szakasz $MA : MC = 3 : 2$ arányban osztja, ezért $t_1 = \frac{3}{2}t$ (1 pont)

Ugyanígy $t_2 = \frac{3}{2}t$ (1 pont)

A trapéz területe: $90 = t + 2t_1 + T = t + 3t + 2{,}25t = 6{,}25t$ (1 pont)

$t = 14{,}4\left(m^2\right)$ (1 pont)

A fehér virágok száma $14{,}4 \cdot 50 = 720$ (1 pont)

a pirosaké $3 \cdot 720 = 2160$ a sárgáké pedig 1620 (1 pont)

b) Az *EFGH* négyszög paralelogramma, mert két szemközti oldala pl. *EF* és *HG* párhuzamosak az *AC* átlóval, és egyenlők az *AC* felével (1 pont)

Az *EFGH* paralelogramma területe fele az *ABCD* trapéz területének, $T_{EFGH} = 45\,m^2$ (2 pont)

$T_{ABCD} = \frac{AB + DC}{2} \cdot m = HF \cdot m = 2\left(HF \cdot \frac{m}{2}\right)$ (1 pont)

Egy paralelogrammát két átlója négy egyenlő területű háromszögre bontja, ezért (1 pont)

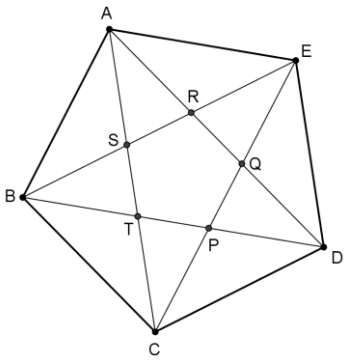
a piros és sárga virágokból egyaránt $\frac{2250}{2} = 1125$ tövet ültettek (1 pont)

A fehér virágokkal beültetett terület a trapéz területének a fele, tehát fehér virágból $45 \cdot 50 = 2250$ tövet ültettek (1 pont)

	fehér	piros	sárga
tavasszal	**720**	**2160**	**1620**
ősszel	**2250**	**1125**	**1125**

Összesen: 16 pont

9) Megrajzoltuk az *ABCDE* szabályos sokszöget, és berajzoltuk minden átlóját. Az átlók metszéspontjait az ábra szerint betűztük meg: *P,Q,R,S,T*.



a) Hány olyan háromszög látható az ábrán, amelyek mindhárom csúcsa a megjelölt 10 pont közül való, és mindhárom oldalegyenese az *ABCDE* ötszög oldalegyenesei és átlóegyenesei közül kerül ki? (8 pont)

b) Tudjuk, hogy az *ABCQ* négyszög területe 120 cm². Mekkora az *ABCDE* ötszög területe? Válaszát egész értékekre kerekítve adja meg! (4 pont)

c) Tekintsük azt a tíz csúcsú gráfot, amelyet a megadott ábra szemléltet. Erről a gráfról fogalmaztunk meg két állítást. Állapítsa meg mindkét állításról, hogy igaz vagy hamis! Adjon rövid magyarázatot a válaszra!
1.állítás: Ennek a gráfnak 20 éle van.
2.állítás: Ebben a gráfban van olyan részgráf, amely nyolc élű kör. (4 pont)

Megoldás:

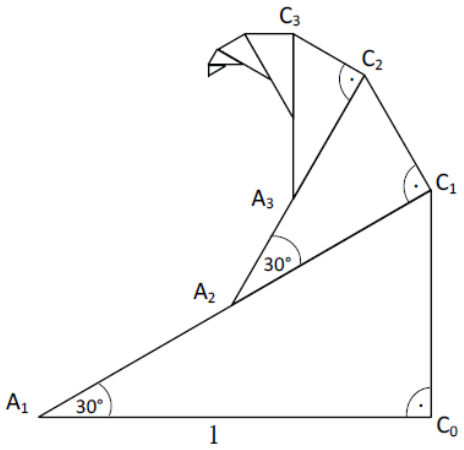
a) A számba veendő háromszögek szögei: 36°, 36° és 108°, vagy 72°, 72° és 36°. (1 pont)
Ezért kétféle lényegesen különböző háromszög van az ábrán. (1 pont)
Az olyan háromszögekből, amelynek szögei 36°, 36°és 108°, két méret van: a leghosszabb oldal vagy az *ABCDE* ötszög oldala vagy oldala. (1 pont)
Az ilyen háromszögek száma $10+5=15$ (1 pont)
Az olyan háromszögekből, amelynek a szögei 36°, 36°és 108°, három méret van: a legrövidebb oldal az *ABCDE* vagy a *PQRST* ötszög egy-egy oldala, illetve a csillagötszög egy-egy oldala (2 pont)
Az ilyen háromszögek száma $5+5+10=20$ (1 pont)
Összesen **35** háromszög van az ábrán (1 pont)

b) Az *ABCQ* négyszög rombusz, mert szemközti szögei egyenlők: 72°és 108°. Ha az ötszög (a rombusz) oldalát *a*-val jelöljük:
$a^2 \cdot \sin 108° = 120 \quad (a \approx 11{,}232\ cm)$ (1 pont)
A szabályos ötszög területét 5 egybevágó középponti háromszög *(ABO)* területéből számíthatjuk: $T_{ABCDE} = 5 \cdot \frac{a \cdot m}{2} = \frac{5}{4} a^2 \cdot \mathrm{tg}54°$, ahol $m = \frac{a}{c} \cdot \mathrm{tg}54°$ (1 pont)
$T_{ABCDE} = \frac{5}{4} \cdot \frac{120}{\sin 108°} \cdot \mathrm{tg}54°$ (1 pont)
$\boldsymbol{T_{ABCDE} \approx 217\ cm^2}$ (1 pont)

c) 1. állítás **IGAZ**, (1 pont)
mert a 10 pont mindegyikének 4 a fokszáma, a fokszámok összege 40, ami az élek számának kétszerese (1 pont)
2. állítás **IGAZ** (1 pont)
például *ABCDEQPTA* egy nyolcpontú kör (1 pont)

Összesen: 16 pont

10) Az $A_1C_0C_1$ derékszögű háromszögben az A_1 csúcsnál 30°-os szög van, az A_1C_0 befogó hossza 1, az A_1C_1 átfogó felezőpontja A_2.
Az A_2C_1 szakasz „fölé” az $A_1C_0C_1$ háromszöghöz hasonló $A_2C_1C_2$ derékszögű háromszöget rajzoljunk az ábra szerint. Az A_2C_2 átfogó felezőpontja A_3.
Az A_3C_2 szakasz „fölé” az $A_2C_1C_2$ háromszöghöz hasonló $A_3C_2C_3$ derékszögű háromszöget rajzolunk.
Ez az eljárás tovább folytatható.



a) Számítsa ki az így nyerhető végtelen sok derékszögű háromszög területének összegét (az összeg első tagja az $A_1C_0C_1$ háromszög területe.)! (7 pont)

b) Igazolja, hogy a $C_0C_1C_2\ldots C_n$ töröttvonal hossza minden pozitív n-re kisebb, mint 1,4. (9 pont)

Megoldás:

a) Az $A_1C_0C_1$ háromszög területe $t_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ (1 pont)

Az $A_nC_{n-1}C_n$ háromszöget $\frac{1}{\sqrt{3}}$ arányú hasonlósággal lehet átvinni $A_{n+1}C_nC_{n+1}$ háromszögbe $\left(n \in \mathbb{N}^+\right)$ (1 pont)

A hasonló síkidomok területének arányára vonatkozó tétel alapján (1 pont)

az $A_nC_{n-1}C_n$ háromszög területe: $t_n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 t_{n-1} = \frac{1}{3}t_{n-1}$ (ha $n>1$) (1 pont)

A területek összegéből képzett $\left(t_1 + t_2 + \ldots + t_n + \ldots\right)$ mértani sor (1 pont)

amelynek hányadosa $\frac{1}{3}$ (1 pont)

A végtelen sok háromszög területének összege: $T = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx \mathbf{0,433}$

(1 pont)

b) Jelölje d_n a $C_{n-1}C_n$ szakasz hosszát $\left(n \in \mathbb{N}^+\right)$, $d_1 = C_0C_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (1 pont)

A hasonlóság miatt minden $n>0$ esetén $d_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot d_{n-1}$ (1 pont)

A $\{d_n\}$ sorozat tehát olyan mértani sorozat, (1 pont)

amelynek első tagja és hányadosa is $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (1 pont)

Vizsgáljuk az $S = d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ összegeket. A $d_1 + d_2 + \ldots + d_n \ldots$ olyan mértani sorozat, menynek hányadosa $\frac{1}{\sqrt{3}}$, tehát van határértéke (1 pont)

Az $\{S_n\}$ sorozat határértéke (a mértani sor összege): $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$ (1 pont)

$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ és mivel $\sqrt{3}$ kisebb, mint 1,8 ezért $\{S_n\}$ határértéke kisebb, mint 1,4. (1 pont)

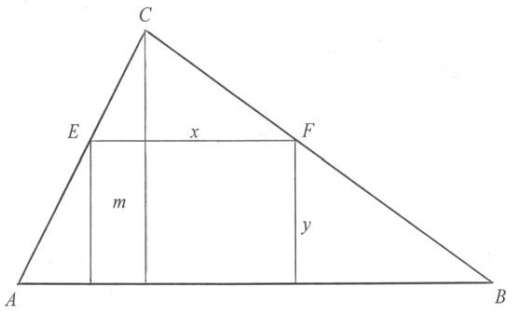
az $\{S_n\}$ sorozat szigorúan növekvő (1 pont)

ezért az $\{S_n\}$ sorozat egyetlen tagja sem lehet nagyobb a határértékénél (1 pont)

Összesen: 16 pont

11) Az *ABC* háromszög oldalai *AB* = 42, *BC* = 40, *CA* = 26. Írjunk téglalapot a háromszögbe úgy, hogy a téglalap egyik oldala illeszkedjen a háromszög *AB* oldalára, másik két csúcsa pedig a háromszög *CA*, illetve *BC* oldalára essen. Tekintsük az így beírható téglalapok közül a legnagyobb területűt! Mekkorák ennek a téglalapnak az oldalai? (16 pont)

Megoldás:



Az *AB* oldalhoz tartozó magasság kiszámításához írjuk fel a háromszög területét kétféleképpen!

$T = \sqrt{54 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 28} = 504$ (2 pont)

$T = \frac{42 \cdot m}{2}$ (1 pont)

A kétféle felírás egyenlőségéből $m = 24$ (1 pont)

Legyen a téglalap *AB*-re illeszkedő oldala *x*, a másik oldala *y*.

Az *ABC* háromszög hasonló az *EFC* háromszöghöz, mert párhuzamos helyzetűek (2 pont)

A hasonlóság miatt $\frac{x}{24-y} = \frac{42}{24}$ (2 pont)

Ahonnan $y = \frac{168-4x}{7}$ (1 pont)

A téglalap területe *x* függvényében, $x \in]0;42[: t(x) = xy = \frac{168x-4x^2}{7}$ (2 pont)

Elegendő a $\frac{7}{4} \cdot t(x) = 42x - x^2$ függvény szélsőérték helyét keresni (1 pont)

Teljes négyzetté alakítva a függvényt: $x \mapsto -(x-21)^2 + 441$ (1 pont)

A függvényérték maximális, ha a négyzetes tag nulla, azaz $\boldsymbol{x = 21}$ (1 pont)

$21 \in]0;42[$, tehát itt van a minimum (1 pont)

A téglalap másik oldala $\boldsymbol{y = 12}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

12)

a) **A *KLMN* derékszögű trapéz alapjai $KL = 2\sqrt{12}$ és $MN = 3\sqrt{75}$ egység hosszúak, a derékszögű szár hossza $10\sqrt{2}$ egység. A trapézt megforgatjuk az alapokra merőleges *LM* szár egyenese körül. Számítsa ki a keletkezett forgástest térfogatát! (π két tizedesjegyre kerekített értékével számoljon, és az eredményt is így adja meg!)** **(4 pont)**

b) **Az *ABCD* derékszögű érintőtrapéz *AB* és *CD* alapjai $(AB > CD)$ hosszának összege 20. A beírt körnek az alapokra nem merőleges *AD* szárral vett érintési pontja negyedeli az *AD* szárat. Számítsa ki a trapéz oldalainak hosszát!** **(12 pont)**

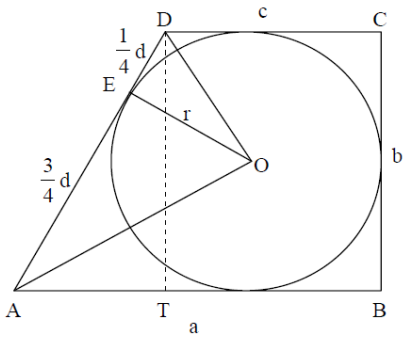
Megoldás:

a) A kapott alakzat egy csonkakúp, magassága *LM*, az alapkörök sugara *KL* és *MN* (1 pont)

A csonkakúp térfogata: $V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + Rr + r^2\right) \approx \mathbf{13326,47}$ térfogategység

(3 pont)

b) Legyen $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$. A beírt kör sugara r, középpontja O, az AD oldallal vett érintési pontja E. A D-ből induló magasság talppontja az AB oldalon T.



A feltételek alapján $a + c = b + d = 20$ és $b = 2r$ (2 pont)

Mivel a trapéz szárain fekvő szögek összege 180°, és O a belső szögfelezők metszéspontja, ezért az AOD háromszög derékszögű O pontban (2 pont)

Ennek a derékszögű háromszögnek az átfogóhoz tartozó magassága éppen az OE sugár, ezért a magasságtétel és a feltétel alapján: $r^2 = \frac{3d^2}{16}$, ahonnan

$r = \frac{d\sqrt{3}}{4}$ (2 pont)

Így viszont $b = 2r = \frac{d\sqrt{3}}{2}$, amiből adódik, hogy a TDA háromszög egy szabályos háromszög fele. Ebből következik, hogy $a = c + \frac{d}{2}$ (2 pont)

$d + \frac{d\sqrt{3}}{2} = 20$, ahonnan (1 pont)

$$d=\frac{40}{2+\sqrt{3}}=40\left(2-\sqrt{3}\right)\approx \mathbf{10,72}$$

$$b=\frac{d\sqrt{3}}{2}=20\left(2\sqrt{3}-3\right)\approx \mathbf{9,28}$$ (1 pont)

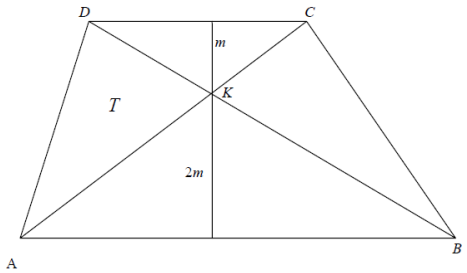
$a+c=2c+\frac{d}{2}=20$, ebből $c=10\left(\sqrt{3}-1\right)\approx \mathbf{7,32}$ (1 pont)

$$a=20-c=10\left(3-\sqrt{3}\right)\approx \mathbf{12,68}$$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

13) Az *ABCD* trapéz párhuzamos oldalai *AB* és *CD* és *AB* > *CD*. A trapéz átlóinak metszéspontja *K*. Az *ABK* háromszög *AB* oldalához tartozó magassága kétszerese a *CDK* háromszög *CD* oldalához tartozó magasságának. Jelölje *T* az *ADK* háromszög területét? Hányszorosa az *ABCD* trapéz területe *T*-nek? (16 pont)

Megoldás:



Jelöljük a *CDK* háromszög *CD* oldalához tartozó magasságát *m*-mel.
Ekkor az *ABK* háromszög *AB* oldalához tartozó magassága $2m$.
$T_{ABD}=T_{ABC}$, mert a két háromszög közös *AB* oldalához tartozó magasságuk egyenlő hosszú. (1 pont)
Az *ABC* és az *ABD* háromszöglapoknak közös része az *ABK* háromszöglap. (1 pont)
így $T_{ADK}=T_{BKC}$, azaz mindkettő *T* területű. (1 pont)
A *CDK* háromszög hasonló az *ABK* háromszöghöz (1 pont)
és a hasonlóság aránya $\frac{m}{2m}=\frac{1}{2}$ (1 pont)
Mivel a hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyezik meg, ezért $t_{CDK}:t_{ABK}=1:4$ (2 pont)
A *CDK* háromszög területét *t*-vel jelölve: $t_{ACD}=t+T$ (1 pont)
és $t_{ABC}=4t+T$ (1 pont)
Mivel az *ABC* és az *ACD* háromszög *AB* illetve *CD* oldalához tartozó magassága megegyezik, és $AB=2\cdot CD$, ezért $t_{ABC}=2\cdot t_{ACD}$ (2 pont)
Így $4t+T=2(t+T)$ (1 pont)
Ebből $t=\frac{T}{2}$ adódik (1 pont)
Ezért $t_{ACD}=t+T=\frac{3}{2}T$ és $t_{ABC}=3T$ (2 pont)

Mivel $t_{ABCD} = t_{ABC} + t_{ACD}$, ezért az $ABCD$ trapéz területe **4,5-szerese** T-nek (1 pont)

Összesen: 16 pont

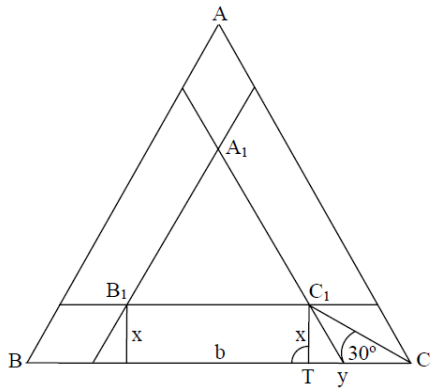
14) Kartonpapírból kivágunk egy 1,5 dm magasságú *ABC* szabályos háromszöglapot. A háromszöglapon párhuzamost húzunk a háromszög mindegyik oldalával, mindegyikből ugyanakkora 0,5 deciméternél kisebb *x* távolságra. Ezek az egyenesek az $A_1B_1C_1$ szabályos háromszög oldalegyenesei.

a) Írja fel az $A_1B_1C_1$ háromszög területét *x* függvényében! (6 pont)

b) Szeretnénk egy $A_1B_1C_1$ alapú *x* magasságú, felül nyitott egyenes hasáb alakú íróasztali tolltartót létrehozni a lapból, ezért levágjuk a fölösleget, majd az $A_1B_1C_1$ háromszög élei mentén felhajtottuk a hasáb oldallapjait. Mekkora *x* estén lesz a keletkezett hasáb térfogata maximális? (10 pont)

Megoldás:

a) Az ABC szabályos háromszög oldalhossza $a = \sqrt{3}$. Az ABC súlypontja 0,5 dm távolságra van a háromszög oldalegyeneseitől, s mivel $x < 0{,}5$, így ez a súlypont az $A_1B_1C_1$ háromszög az ABC háromszög belsejében van. (2 pont)



Az $A_1; B_1; C_1$ pontok rendre az ABC háromszög A-ból, B-ből, C-ből induló belső szögfelezőjének egy-egy pontja. Jelöljük b-vel az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalának hosszát.

Az ábra szerinti CC_1T derékszögű háromszögben legyen $x = C_1T$ és $y = TC$

Ekkor $\text{ctg}30° = \frac{y}{x}$, így $y = x\sqrt{3}$ (2 pont)

A tengelyes szimmetria figyelembevételével: $b = \sqrt{3} - 2x\sqrt{3}$ (1 pont)

$$T_{A_1B_1C_1} = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\mathbf{3\sqrt{3}(1-2x)^2}}{\mathbf{4}}\ \mathbf{dm^2}$$ (1 pont)

b) A hasáb alaplapja $A_1B_1C_1$ háromszög, magassága x.

$V(x) = T \cdot x = \frac{3\sqrt{3}(1-2x)^2}{4} \cdot x = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(4x^3 - 4x^2 + x\right)$ (1 pont)

ahol $0 < x < \frac{1}{2}$ (1 pont)

A V függvény differenciálható az értelmezési tartományán és

$V'(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(12x^2 - 8x + 1\right)$ (2 pont)

$\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(12x^2 - 8x + 1\right) = 0$ (1 pont)

Megoldásai: $\frac{1}{2}$ illetve $\frac{1}{6}$ (1 pont)

	$0 < x < \frac{1}{6}$	$x = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$
$V'(x)$	pozitív	$= 0$	negatív
$V(x)$	növő	maximum	csökkenő

(3 pont)

A hasáb térfogata maximális, ha az x távolságot $\frac{1}{6}$ **dm** hosszúnak választjuk.

(1 pont)

Összesen: 16 pont

15) A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segítségre vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északkeleti irányba halad, a hajótöröttek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket.

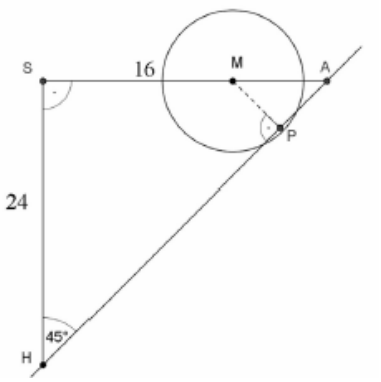
a) Igazolja, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérő jelzést! (7 pont)

Egy 1,5 km magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a tengerjáró hajót, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km-t tett meg.

b) Mekkora depresszió szög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! Számításai során a Föld görbületétől tekintsen el! (7 pont)

Megoldás:

a) A feladat feltételeit feltüntető jó ábra.



A sziget az S, a mentőcsónakot az M, a tengerjáró hajót a H pont jelöli. A hajó útjának és az SM egyenesnek a metszéspontját jelölje A. (2 pont)

A HSA háromszög derékszögű, egyenlő szárú, ezért $AS = 24$ km (1 pont)

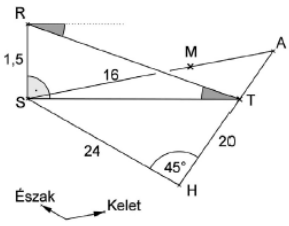
$MA = 8$ km (1 pont)

Valamint az APM háromszög derékszögű és van 45°-os szöge (1 pont)

Ezért $MP = 4\sqrt{2}\,(\approx 5,7)$ (1 pont)

Mivel MP < 6 km, ezért a hajó legénysége észlelheti a jelzéseket. (1 pont)

b) A feladat feltételeit feltüntető jó ábra



A repülőgép (R), a sziget (S) és a tengerjáró hajó (T) egy S-nél derékszögű háromszög három csúcsában helyezkedik el. (1 pont)

Az ST távolságot koszinusztétellel számolhatjuk ki

$ST^2 = 24^2 + 20^2 - 2 \cdot 24 \cdot 20 \cdot \cos 45°$ (2 pont)

$ST \approx 17,2$ km (1 pont)

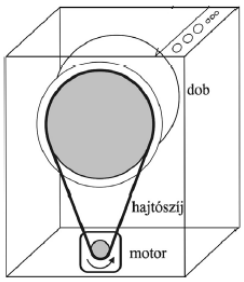
A depresszió szög nagysága megegyezik a TRS derékszögű háromszög RTS szögének nagyságával (váltószögek). (1 pont)

$$\operatorname{tg} RTS\sphericalangle = \frac{RS}{TS} \approx \frac{1,5}{17,2}$$ (1 pont)

A depresszió szög kb 5° nagyságú (1 pont)

Összesen: 14 pont

16) Az ábrán egy mosógép vázlatos rajza látható. A kisebb, 1 cm sugarú kerék a motor tengelyéhez kapcsolódik, és egy hajtószíj segítségével forgatja meg a mosógép dobjához rögzített, 20 cm sugarú kereket, amitől a dob és benne a ruhák forognak mosás közben. A két kerék tengelye párhuzamos, a tengelyek távolsága 46 cm. (A hajtószíj a tengelyekre merőleges síkban van.) Milyen hosszú a feszes hajtószíj? (13 pont)



Megoldás:

Jó ábra felrajzolása (2 pont)

A keresett hajtószíjhossza az egymással egyenlő hosszú E_1E_2 és E_3E_4 érintőszakaszokból, valamint a rövidebb $E_1\ E_3$ körívből és a hosszabb $E_2\ E_4$ körívekből áll (1 pont)

Az O_1-en keresztül az E_1E_2 érintőszakasszal húzott párhuzamos metszéspontja O_2E_2-vel legyen M

Az O_1MO_2 derékszögű háromszögből

$E_1E_{\ 2} = O_1M = \sqrt{46^2 - 19^2} = \sqrt{1755} \approx 41{,}9\,\text{cm}$ (2 pont)

$\cos\alpha = \dfrac{19}{46}$ (1 pont)

ahonnan $\alpha \approx 65{,}6°$ (1 pont)

A hosszabb $E_2\ E_4$ körívhez tartozó középponti szög

$360° - 2\alpha \approx 228{,}8°$ (1 pont)

A hosszabb $E_2\ E_4$ körív hossza így $\dfrac{228{,}8°}{360°} \cdot 2 \cdot 20\pi =$ (1 pont)

$= 79$ cm (1 pont)

A rövidebb $E_1\ E_3$ körívhez tartozó középponti szög

$2\alpha \approx 131{,}2°$ (1 pont)

A rövidebb $E_1\ E_3$ körív hossza így $\dfrac{131{,}2°}{360°} \cdot 2\pi$

2,3 cm (1 pont)

Innen a feszes hajtószíj hossza megközelítőleg

$2 \cdot 41{,}9 + 79{,}9 + 2{,}3 = \mathbf{166\,cm}$ (1 pont)

Összesen: 13 pont

17) Egy 1 méter oldalú négyzetbe egy második négyzetet rajzoltunk úgy, hogy a belsőnégyzet minden csúcsa illeszkedjen a külső négyzet egy-egy oldalára. A belső és a külső négyzet oldalainak aránya 5 : 7.

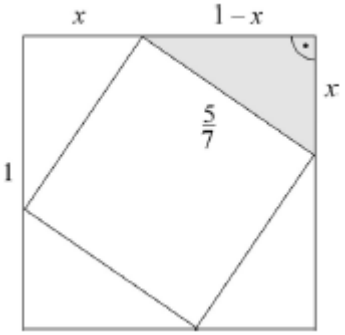
a) Milyen arányban osztja két részre a belső négyzet csúcsa a külső négyzet oldalát? Az arány pontos értékét adja meg! (10 pont)

A belső négyzetbe egy újabb, harmadik négyzetet rajzolunk úgy, hogy a harmadik és a második négyzet oldalainak aránya is 5 : 7. Ezt az eljárást aztán gondolatban végtelen sokszor megismételjük.

b) Mekkora lesz a kapott négyzetek kerületeinek az összege, ha a kiindulási négyzet kerülete is tagja a (végtelen sok tagú) összegnek? (6 pont)

Megoldás:

a) Jó ábra felrajzolása (1 pont)



A belső négyzet oldala $\frac{5}{7}$ méter (1 pont)

A belső négyzet a külső négyzet oldalait x és $1-x$-re bontja (1 pont)

A felosztás mind a 4 oldalon ismétlődik (1 pont)

Pitagorasz-tétel szerint $x^2+(1-x)^2=\left(\frac{5}{7}\right)^2$ (1 pont)

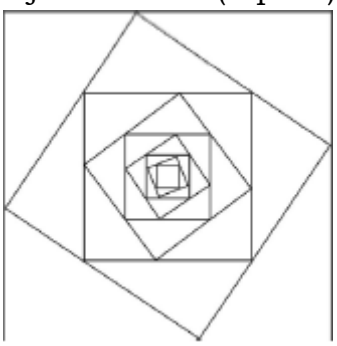
Ahonnan $2x^2-2x+\frac{24}{49}=0$ (1 pont)

Ennek megoldásai $x_1=\frac{4}{7}\quad x_2=\frac{3}{7}$ (2 pont)

Ahonnan $1-x_1=\frac{3}{7}\quad 1-x_2=\frac{4}{7}$ (1 pont)

A belső négyzet a külső négyzet oldalait **3:4 arányban** osztja (1 pont)

b) Jó ábra felrajzolása (1 pont)



$K_1=4,\ K_2=4\cdot\frac{5}{7}$

minden további négyzet 5/7 szerese a megelőzőnek (1 pont)

A négyzetek kerületének összege egy végtelen mértani sor összege, melynek hányadosa $q=\frac{5}{7}$ (1 pont)

Mivel $|q|<1$ ezért a sor konvergens (1 pont)

A végtelen mértani sor összege:

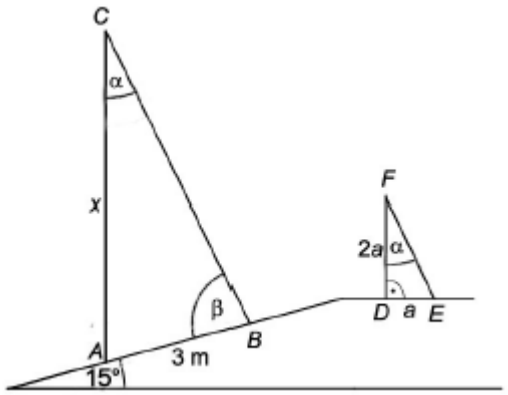
$$S=K_1+K_2+\ldots=K_1\cdot\frac{1}{1-q}=\frac{4}{1-\frac{5}{7}}=14$$ (1 pont)

Tehát a négyzetek kerületének összege **14 méter** (1 pont)

Összesen: 16 pont

18) Egy 15°-os emelkedési szögű hegyoldalon álló függőleges fa egy adott időpontban a hegyoldal emelkedésének irányában 3 méter hosszú árnyékot vet. Ugyanebben az időpontban a közeli vízszintes fennsíkon álló turista árnyékának hossza éppen fele a turista magasságának. Hány méter magas a fa?
Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! **(12 pont)**

Megoldás:



A szövegnek megfelelő, az adatokat helyesen feltüntető ábra. (2 pont)
Az *ACB* és *DFE* szögek egyenlők, mivel mindkettő a napsugarak és a függőleges által bezárt szög. (1 pont)
A *DEF* derékszögű háromszögben:
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$ (2 pont)
$\alpha \approx 26{,}57°$ (1 pont)
BAC szög $(90° - 15° =)\,75°$ (1 pont)
Így $\beta \approx 78{,}43°$. (1 pont)
(Szinusztétel az *ABC* háromszögben:) $\frac{\sin 78{,}43°}{\sin 26{,}57°} = \frac{x}{3}$ (2 pont)
$x \approx 6{,}57$ (1 pont)
A fa tehát körülbelül **6,6 méter** magas. (1 pont)
Összesen: 12 pont

19) Az *ABCDEF* szabályos hatszögben a rövidebb átló hossza $5\sqrt{2}$.
a) Számolja ki a hatszög területének pontos értékét! **(6 pont)**
b) Az *ABCDEF* hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét jelölje t_1, a t_1 területű hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét t_2, és így tovább, képezve ezzel a $\{t_n\}$ sorozatot. Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to\infty}(t_1 + t_2 + \ldots + t_n)$ határértékét! (Pontos értékkel számoljon!) **(10 pont)**

Megoldás:

a) Ha a hatszög oldalának hossza a, a rövidebb átló az a oldalú szabályos háromszög magasságának kétszerese, (1 pont)
így $a\sqrt{3} = 5\sqrt{2}$, (1 pont)
ahonnan $a = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(= \frac{5\sqrt{6}}{3}\right)$. (1 pont)
A szabályos hatszög területe 6 darab a oldalú szabályos háromszög területének összege, (1 pont)
így $T = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \mathbf{25\sqrt{3}}$ (2 pont)

b) A t_1 területű szabályos hatszög oldala az ABC háromszög AC oldalához (mely az eredeti hatszög rövidebb átlója) tartozó középvonala, (1 pont)

hossza $a_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, (1 pont)

$t_1 = 6\frac{{a_1}^2\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{4}$ (1 pont)

A következő szabályos hatszög t_2 területét megkaphatjuk például úgy, hogy a t_1 területű hatszög szomszédos oldalfelező pontjait összekötő szakaszok által a hatszögből levágott háromszögek területének összegét levonjuk t_1-ből.

$t_2 = t_1 - 6\frac{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 \cdot \sin 120°}{2} = \frac{3 \cdot 75\sqrt{3}}{16}\left(= \frac{225\sqrt{3}}{16}\right)$. (2 pont)

A $\{t_n\}$ sorozat mértani sorozat, (1 pont)

amelynek hányadosa $q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{4}$. (1 pont)

A kérdéses határérték annak a mértani sornak az összege, amelynek első tagja $t_1 = \frac{75\sqrt{3}}{4}$, hányadosa pedig $q = \frac{3}{4}$. (1 pont)

Így $\lim_{n\to\infty}(t_1 + t_2 + \ldots + t_n) = \frac{t_1}{1-q} =$ (1 pont)

$= \mathbf{75\sqrt{3}}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

20) Egy körvonalon felvettünk öt pontot, és behúztuk az általuk meghatározott 10 húrt. Jelölje a pontokat pozitív körüljárási irányban rendre *A*, *B*, *C*, *D* és *E*.

a) Véletlenszerűen kiválasztunk 4 húrt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek a húrok egy konvex négyszöget alkotnak? (4 pont)

b) Hányféleképpen juthatunk el a húrok mentén *A*-ból *C*-be, ha a *B*, *D*, és *E* pontok mindegyikén legfeljebb egyszer haladhatunk át? (Az *A* pontot csak az út kezdetén, a *C* pontot csak az út végén érinthetjük.) (4 pont)

c) A 10 húr mindegyikét kiszínezzük egy-egy színnel, pirosra vagy sárgára, vagy zöldre. Hány olyan színezés van, amelyben mindhárom szín előfordul? (8 pont)

Megoldás:

a) Akkor kapunk négy megfelelő húrt, ha a végpontjaik között az ötből pontosan négy különböző szerepel. A körüljárási iránynak megfelelően minden kiválasztott pontnégyeshez pontosan egy konvex négyszög tartozik. (1 pont)
Öt pontból négyet ötféleképpen lehet kiválasztani, ezért a kedvező esetek száma 5. (1 pont)

Az összes eset száma: $\binom{10}{4}$. (1 pont)

A keresett valószínűség: $\boldsymbol{p = \frac{5}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{42}\left(\approx 0{,}024\right)}$. (1 pont)

b) Ha mindhárom pontot érintjük, akkor $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ lehetőség van. (1 pont)
Ha csak két ponton megyünk át, akkor a lehetőségek száma $3 \cdot 2 = 6$. (1 pont)
Ha csak egy ponton megyünk át, akkor 3 lehetőség van, de közvetlenül is átmehetünk *A*-ból *C*-be, ez még 1 eset. (1 pont)
Az összes lehetséges útvonalak száma tehát: $6+6+3+1 = \mathbf{16}$. (1 pont)

c) Az összes lehetséges esetből kivonjuk azokat, amikor csak 2 vagy 1 szín szerepel. (1 pont)
Mindegyik húrt háromféle színre festhetjük, ezért az összes lehetőség száma $3^{10}\left(=59049\right)$. (1 pont)

Ha két színt használunk a háromból, akkor az adott két szín segítségével mindegyik húrt kétféleképpen színezhetjük ki, a tíz húrt pedig 2^{10}-féleképpen. (1 pont)

De ebbe beleszámoltuk azt az esetet is, amikor csak egyetlen színt használunk, ezért a fenti értéket 2-vel csökkenteni kell: $2^{10}-2$. (1 pont)
A megadott 3 színből kettőt 3-féleképpen választhatunk ki, így a pontosan két színt használó színezések száma $3 \cdot \left(2^{10}-2\right)\left(=3066\right)$. (1 pont)

Pontosan egy színnel 3-féleképpen színezhetjük ki a húrokat. (1 pont)

Tehát a lehetséges színezések száma: $3^{10} - \left[3 \cdot \left(2^{10}-2\right)\right] - 3 = \mathbf{55980}$ (2 pont)

(Szintén jó megoldás, hogyha összeszámoljuk az eseteket aszerint, hogy az egyes színekkel hány húrt színezünk ki.)

Összesen: 16 pont

21)

a) Egy téglalapot 720 darab egybevágó kis téglalapra daraboltunk szét. A kis téglalapok oldalai közül az egyik 1 cm-rel hosszabb, mint a másik. Hány cm hosszúak egy-egy kis téglalap oldalai, ha a nagy téglalap területe 2025 cm²? (7 pont)

b) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből összesen 720 olyan hatjegyű szám képezhető, melynek számjegyei között nincsenek egyenlők. Ezek között hány 12-vel osztható van. (5 pont)

Megoldás:

a) Egy kis téglalap oldalainak hossza x cm, illetve $x+1$ cm, területe $x \cdot (x+1)$ cm^2. (1 pont)

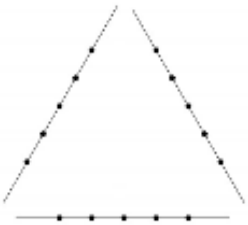
A feladat szövegéből kiindulva: $720 \cdot x \cdot (x+1) = 2025$. (1 pont)

A zárójelet felbontva, majd 45-tel leegyszerűsítve:
$16x^2 + 16x - 45 = 0$ (1 pont)
A két gyöke x-nek: $x_1 = 1{,}25;\ x_2 = -2{,}25$. (1 pont)
A negatív gyök nem lehet megoldása a feladatnak! (1 pont)
A téglalap rövidebb oldala tehát **1,25 cm**, hosszabb oldala pedig **2,25 cm** hosszú. (1 pont)
Ellenőrzés: $720 \cdot 1{,}25 \cdot 2{,}25 = 2025$ igaz, tehát a válasz helyes. (1 pont)

b) 12-vel azok a természetes számok oszthatók, amelyek 3-mal és 4-gyel is oszthatók. (1 pont)
Mivel $1+2+3+4+5+6=21$, ezért mind a 720 különböző hatjegyű szám osztható 3-mal. (1 pont)
Azok a hatjegyű számok oszthatók 4-gyel, amelyeknél az utolsó két számjegy 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56 vagy 64. (1 pont)
Mindegyik végződés 4!, azaz 24 darab hatjegyű szám esetében fordul elő. (1 pont)
Emiatt a vizsgált számok között $8\cdot 24=$ **192** darab 12-vel osztható van. (1 pont)

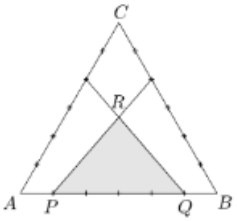
Összesen: 12 pont

22) Megadtunk három egyenest, és mindegyiken megadtunk öt-öt pontot az ábra szerint.



a) Hány olyan szakasz van, amelynek mindkét végpontja az ábrán megadott 15 pont valamelyike, de a szakasz nem tartalmaz további pontot a megadott 15 pont körül? (6 pont)

Az egyenlő oldalú *ABC* háromszög 18 egység hosszúságú oldalait hat-hat egyenlő részre osztottuk, és az ábra szerinti osztópontok összekötésével megrajzoltuk a *PQR* háromszöget.



b) Számítsa ki a *PQR* háromszög területének pontos értékét! (10 pont)

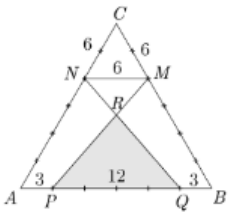
Megoldás:

a) A megadott 15 pont összesen $\binom{15}{2}$ szakaszt határoz meg. (2 pont)

Egy-egy megadott egyenesen a nem megfelelő szakaszok száma 6, (2 pont)
tehát összesen 18 nem megfelelő szakasz van. (1 pont)

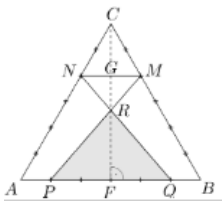
A megfelelő szakaszok száma $\binom{15}{2}-18=87$ (1 pont)

b) Az ábra jelöléseit használjuk. A CNM háromszög egy 6 egység oldalú szabályos háromszög. (2 pont)



A CNM szabályos háromszög magassága az ABC szabályos háromszög magasságának a harmada $\left(CG = \frac{1}{3} \cdot CF\right)$: (1 pont)

$CG = \left(\frac{1}{3} \cdot 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \right) 3\sqrt{3}$, (1 pont)



a $PQMN$ trapéz magassága pedig ennek a kétszerese: $FG = 6\sqrt{3}$ (1 pont)

A PQR háromszög hasonló az MNR háromszöghöz, mert szögeik páronként egyenlők (csúcsszögek, illetve váltószögek). (1 pont)

A két háromszög hasonlóságának aránya $2:1$, (1 pont)

így a megfelelő oldalaikhoz tartozó magasságainak aránya is ennyi. (1 pont)

Ezért $FR = 4\sqrt{3}$, (1 pont)

és a PQR **háromszög területe** $\left(\frac{\mathbf{12 \cdot 4\sqrt{3}}}{\mathbf{2}} = \right) \mathbf{24\sqrt{3}}$ **(területegység).** (1 pont)

Összesen: 16 pont

23) Egy televíziókészülék termékleírásában szereplő „16:9-es típus” azt adja meg, hogy mennyi a téglalap alakú tv-képernyő két szomszédos oldalhosszának aránya, a „40 colos” jellemző pedig a képernyő átlójának a hosszát adja meg col-ban $(1\text{ col} \approx 2{,}54\text{ cm})$.

a) Számítsa ki a 40 colos, 16:9-es képernyő oldalainak hosszát! Válaszát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (6 pont)

b) Két 16:9-es képernyő közül az elsőnek 69%-kal nagyobb a területe, mint a másodiknak. Hány százalékkal nagyobb az első képernyő átlója mint a másodiké? (5 pont)

Megoldás:

a) A képernyő oldalainak hosszát (cm-ben) jelölje $16x$ és $9x$. (1 pont)

40 col = 101,6 cm (1 pont)

A Pitagorasz-tétel szerint: $(16x)^2 + (9x)^2 = 101{,}6^2$ (1 pont)

$337x^2 = 10322{,}56$ (1 pont)

Ebből mivel $x > 0$ $x \approx 5{,}535$ (cm). (1 pont)

A képernyő oldalainak hossza tehát $(16x \approx)$ **88,6 cm és** $(9x \approx)$ **49,8 cm.** (1 pont)

b) Az első képernyő területe a második területének 1,69-szerese. (1 pont)
A két (téglalap alakú) képernyő hasonló, ezért (1 pont)
a területük aránya a hasonlóságuk arányának négyzetével egyenlő. (1 pont)
A képernyők hasonlóságának (és így átlóik hosszának) aránya $\sqrt{1,69}=1,3$. (1 pont)
Az első képernyő átlója **30%-kal nagyobb**, mint a másodiké (1 pont)

Összesen: 11 pont

24)

a) Igazolja a következő állítást: ha egy négyszög szögei valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor a négyszög húrnégyszög vagy trapéz! (6 pont)

b) Fogalmazza meg az előző állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

Egy geometriai építőkészletben csak olyan pálcikák vannak, amelyek hossza centiméterben mérve egész szám, és mindenféle lehetséges hosszúság előfordul 1 cm-től 12 cm-ig. (Mindegyik fajta pálcikából elegendően sok van a készletben.)

c) Hány különböző módon választhatunk ki 4 pálcikát a készletből úgy, hogy belőlük egy 24 cm kerületű érintőnégyszöget lehessen építeni? (Két kiválasztást különbözőnek tekintünk, ha az egyik kiválasztás 4 pálcikája nem állítható párba a másik kiválasztás 4 pálcikájával úgy, hogy mind a 4 párban egyenlő hosszú legyen a két pálcika. Tudjuk továbbá, hogy ha *a, b, c, d* pozitív számok, és $a+c=b+d$, akkor az *a, b, c, d* hosszúságú szakaszokból szerkeszthető négyszög.) (7 pont)

Megoldás:

a) Legyen a négyszög legkisebb szöge α fok, a sorozat differenciája pedig d fok $(d\geq 0)$. Ekkor a négyszög szögei (valamilyen sorrendben) α, $\alpha+d$, $\alpha+2d$ és $\alpha+3d$ fok nagyságúak. (1 pont)
A négyszög belső szögeinek összege 360°, ezért $4\alpha+6d=360$, (1 pont)
vagyis $2\alpha+3d=180$. (1 pont)
$2\alpha+3d=(\alpha+d)+(\alpha+2d)$, ami azt jelenti, hogy a négyszög két-két szögének összege 180°. (1 pont)
Ha a két szög szomszédos, akkor a négyszög trapéz, (1 pont)
ha pedig szemközti, akkor húrnégyszög.
Tehát az **állítást igazoltuk.** (1 pont)

b) A megfordítás: **Ha egy négyszög trapéz vagy húrnégyszög, akkor a szögei (valamilyen sorrendben) egy számtani sorozat szomszédos tagjai.** (1 pont)
A megfordítás **hamis.** (1 pont)
Egy ellenpélda. Például: egy trapéz, amelynek szögei 50°, 70°, 110° és 130° nagyságúak. (1 pont)

c) A négy kiválasztott pálcikából pontosan akkor készíthető érintőnégyszög, ha a két-két szemközti pálcika hosszának összege egyenlő. (1 pont)
A készlet négy pálcikájából tehát pontosan akkor építhető 24 cm kerületű érintőnégyszög, ha a négyszögben egymással szemben elhelyezkedő két-két oldal (centiméterben mért) hossza az $(1;11)$, $(2;10)$, $(3;9)$, $(4;8)$, $(5;7)$, $(6;6)$ számpárok valamelyike. (2 pont)
Annyiféleképpen választható ki négy megfelelő pálcika a készletből, ahányféleképpen a hat számpárból kettő (sorrendre való tekintet nélkül) kiválasztható úgy, hogy egy számpárt kétszer is választhatunk. (1 pont)
Ez a szám 6 különböző objektum másodosztályú ismétléses kombinációinak számával egyezik meg. (1 pont)
Az összes különböző lehetőségek száma tehát $\binom{6+2-1}{2}=\binom{7}{2}=$ (1 pont)
=21. (1 pont)
Összesen: 16 pont

25) A fénymásoló gépekhez is használt téglalap alakú papírlapok mindegyikének olyan a méretezése, hogy a hosszabb és a rövidebb oldal aránya (megközelítőleg) $\sqrt{2}$. Ezt a számot röviden a téglalap alakú papírlap *méretarányának* is nevezik.

a) Mutassa meg, hogy ha egy $\sqrt{2}$ méretarányú papírlapot félbevágunk úgy, hogy a vágási él merőleges a papírlap hosszabb oldalára, akkor az így keletkező két egybevágó papírlap ugyancsak $\sqrt{2}$ méretarányú lesz! (4 pont)

A szabványos papírlapok méretét egy nagybetűvel és a betű után írt természetes számmal jelölik (például A0, A1, B5). Az A0-s papírlap méretaránya $\sqrt{2}$, a területe pedig éppen 1 m².

b) Számítsa ki az A0-s papírlap oldalainak hosszát egész milliméterre kerekítve! (4 pont)

Ha az A0-s papírlapot hosszabb élére merőlegesen félbevágjuk, akkor két A1-es papírlapot kapunk. Az eljárást tovább folytatva kapjuk az A3-as, A4-es, A5-ös papírlapokat. A leggyakrabban használt irodai másolópapír A4-es méretű és „80 g-os". A „80 g-os" jelzés azt jelenti, hogy 1 m² területű másolópapír tömege 80 gramm.

c) Egy csomagban 500 darab A4-es „80 g-os" papírlap van. Hány kg egy ilyen csomag tömege, ha a csomagolóanyag tömege 20 g? (5 pont)

Megoldás:

a) Az eredeti papírlap rövidebb oldala legyen x hosszúságú, ekkor a hosszabb oldala $\sqrt{2}\,x$ hosszúságú. (1 pont)

A félbevágással kapott papírlap egyik oldalának hossza x, a másik oldalának hossza pedig $\frac{\sqrt{2}}{2}x$ lesz. (1 pont)

(Mivel $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$, ezért) $\frac{\sqrt{2}}{2}x$ a rövidebb oldal hosszúsága. (1 pont)

A félbevágással kapott papír méretaránya $\boldsymbol{x:\frac{\sqrt{2}}{2}x=\sqrt{2}}$, ez valóban megegyezik az eredetivel. (1 pont)

b) (Ha a rövidebb oldal hossza x méter, akkor) a papír területe: $x\cdot\sqrt{2}x=1$ (m^2). (1pont)

A papír rövidebb oldala $x=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}\approx 0{,}841$ (cm), (1pont)

azaz 841 (mm), (1pont)

hosszabb oldala $\sqrt{2}\,x\approx$ **1189 (mm).** (1pont)

c) Egy A4-es lap az 1 m2 -es A0-s lap négyszeri félbevágásával kapható (A0→A1→A2→A3→A4), (1 pont)

tehát 16 darab A4-es lap együttes területe 1 m^2. (1 pont)

Az 500 darab A4-es lap területe összesen 31,25 m^2. (1 pont)

Ezért 1 csomag tömege $31{,}25\cdot 80+20=2520$ gramm, (1 pont)

azaz **2,52 kg**. (1 pont)

Összesen: 13 pont

26) Egy kör középpontja egy derékszögű háromszög b hosszúságú befogójára illeszkedik. A kör érinti a c hosszúságú átfogót és az a hosszúságú befogó egyenesét is. Andrea és Petra egymástól függetlenül kifejezték a kör sugarának hosszát a háromszög oldalainak hosszával. Andrea szerint a kör sugara $R_A=\frac{ab}{a+c}$, Petra szerint pedig $R_P=\frac{ac-a^2}{b}$.

a) Igazolja, hogy $R_A=R_P$! **(5 pont)**

b) Bizonyítsa be, hogy Andrea képlete helyes! **(4 pont)**

Egy derékszögű háromszög oldalai $a=8$ cm, $b=6$ cm és $c=10$ cm. Megrajzoltuk azt a két kört, melyek középpontja a háromszög egyik, illetve másik befogójára illeszkedik, és amelyek érintik a háromszög másik két oldalegyenesét.

c) Számítsuk ki, hogy a két körnek a háromszög belsejébe eső M metszéspontja milyen messze van a derékszögű C csúcstól! **(5 pont)**

Megoldás:

a) Azt állítjuk, hogy $\frac{ab}{a+c}=\frac{ac-a^2}{b}$ igaz $(a,b,c>0)$ (1 pont)

Mindkét oldalt a-val osztva, majd $b(c+a)$-val szorozva: $b^2=(c-a)(c+a)$ (1 pont)

Átalakítva: $a^2+b^2=c^2$, ami a Pitagorasz-tétel miatt minden derékszögű háromszögre igaz. (1 pont)

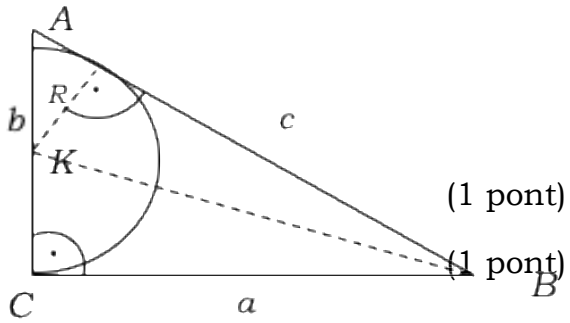
Az alkalmazott átalakítások ekvivalensek voltak, (1 pont)

ezért az eredeti $\frac{ab}{a+c}=\frac{ac-a^2}{b}$ **állítás is igaz** (tehát $R_A = R_P$). (1 pont)

b) A derékszögű háromszög területét kétféleképpen is felírhatjuk:

$T=\frac{ab}{2}$, illetve

$T=T_{KCB\Delta}+T_{KAB\Delta}=\frac{aR}{2}+\frac{cR}{2}$ (1 pont)



Tehát $ab=aR+cR$ (1 pont)

vagyis $\boldsymbol{R=\frac{ab}{a+c}}$. (Ezt kellett bizonyítani.) (1 pont)

c) Helyezzük el a derékszögű háromszöget és a két kört derékszögű koordináta-rendszerben. (Az egység legyen 1 cm hosszú.) A koordinátái $A(0;6)$ B pont koordinátái $B(8;0)$; $C(0;0)$ (1 pont)

A két kör sugara: $R_a=\frac{ab}{b+c}=\frac{48}{16}=3$, $R_b=\frac{ab}{a+c}=\frac{48}{18}=\frac{8}{3}$. (2 pont)

A körök egyenlete: $x^2+y^2-6x=0$, illetve $x^2+y^2-\frac{16}{3}y=0$ (1 pont)

A két kör egyenletéből alkotott egyenletrendszer megoldása megadja az M pontot: $M\left(\frac{384}{145};\frac{432}{145}\right)$ (2 pont)

A CM távolság: $\left(\sqrt{\frac{384^2+432^2}{145^2}}=\frac{48}{\sqrt{145}}\right)\approx$ **3,99 (cm)** (1 pont)

27)

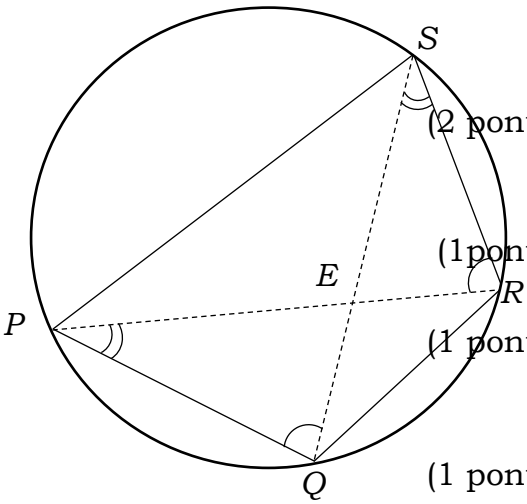
a) A *PQRS* húrnégyszöget a *PR* és a *QS* átlók megrajzolásával négy háromszögre bontottuk. Igazolja, hogy ezek közül a két-két szemközti háromszög hasonló egymáshoz! (4 pont)

Az *ABCD* húrnégyszög *AB* oldala a négyszög körülírt körének egyik átmérője. A négyszög *BC* oldala 3 cm, a *CD* oldala 5 cm hosszú, továbbá $\sphericalangle BCD=120°$.

b) Számítsa ki a négyszög *BD* átlójának, *AB* oldalának és *AD* oldalának hosszát, valamint a négyszög többi szögét! (10 pont)

Megoldás:

a) Az átlók metszéspontját jelölje E. A kerületi szögek tétele miatt $PQS\sphericalangle = PRS\sphericalangle$ és $QPR\sphericalangle = QSR\sphericalangle$ (azonos ívhez tartozó kerületi szögek). (2 pont)



A PEQ és az SER háromszögekben két-két szög megegyezik (így a harmadik is), ezért ez a két háromszög hasonló. (1pont)

Ugyanígy bizonyíthatjuk a QER és a PES háromszögek hasonlóságát is. (1 pont)

b) BCD háromszögben felírjuk a koszinusztételt:
$BD^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120°$. (1 pont)

$BD = 7$ (cm) (1 pont)

(A húrnégyszögek tétele miatt) az $ABCD$ négyszög DAB szöge $(180° - 120° =)\ 60°$-os, (1 pont)

a Thalész-tétel miatt pedig $ADB\angle = 90°$, (1 pont)

ezért az ADB háromszög egy szabályos háromszög fele. (1 pont)

$$AD = \frac{BD}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} \approx 4,04\ (\text{cm})$$
$$AB = 2AD \approx 8,08\,(\text{cm})$$ (2 pont)

Szinusztétellel a BCD háromszögből:
$$\frac{\sin CBD\sphericalangle}{5} = \frac{\sin 120°}{7},\ \left(\sin CBD\sphericalangle = \frac{5 \cdot \sin 120°}{7} \approx 0,6186\right)$$ (1 pont)

$CBD\sphericalangle \approx 38,2°$
$ABD\sphericalangle \approx 68,2°$
$ADC\sphericalangle \approx 111,8°$ (2 pont)

Összesen 14 pont