MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK EMELT SZINT

Síkgeometria

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

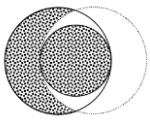
1) Egy húrnégyszög három szögéről tudjuk, hogy mértékük aránya $7:6:8$.
   a) Mekkorák a húrnégyszög szögei? (13 pont)
   Matematika órán, miután minden diák megoldotta a feladatot, három tanuló a következőket állította:
   Zsófi: A húrnégyszög minden szöge egész szám.
   Peti: A húrnégyszögnek van derékszöge.
   Kata: A húrnégyszög egyik szöge 110°-nál is nagyobb.
   b) A három tanuló állítása közül melyik igaz a feltételnek megfelelő húrnégyszögre? (3 pont)

2) Az ABC derékszögű háromszög BC befogójának hossza 18 cm, a CA befogójának hossza 6 cm.
   a) Mekkorák a háromszög hegyesszögei? (3 pont)
   A BC befogó egy P belső pontját összekötjük az A csúccsal. Tudjuk még, hogy $PB = PA$.
   b) Milyen hosszú a PB szakasz? (6 pont)
   Állítsunk merőleges egyenest az ABC háromszög síkjára C pontban! A merőeleges egyenes D pontjára teljesül, hogy CD 15 cm.
   c) Mekkora az $ABCD$ tetraéder térfogata? (4 pont)

3) Egy családnak olyan téglalap alakú telke van, melynek két szomszédos oldala 68 m, illetve 30 m hosszú. A telek egyik sarkánál úgy rögzítettek egy kerti locsoló berendezést, hogy a telek rövidebb oldalától 4 m-re, a vele szomszédos oldaltól 3 m-re legyen. A locsoló berendezés körbe forgó locsolófeje azt a részt öntözi, amely a rögzítés helyétől legalább 0,5 m-re, de legfeljebb 4 m-re van. A telek mekkora részét öntözi a locsoló berendezés, és ez hány százaléka a telek területének? (11 pont)

4) Az ABC háromszög körülírt körének sugara 26 cm, $BAC\sphericalangle = 60°$
   a) Számítsa ki a BC oldal hosszát! (4 pont)
   b) Hány fokos a háromszög másik két szöge, ha az AC oldal b cm, az AB oldal $3b$ cm hosszúságú? (12 pont)
   A keresett értékeket egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

5) Klári teasüteményt készít. A meggyúrt tésztát olyan „téglatest” alakúra nyújtotta ki, amelynek a felülről látható lapja 30 cm x 60 cm méretű téglalap. Majd egy henger alakú szaggatóval (határoló körének sugara 3 cm) „körlapokat” vágott ki a tésztából.
Ezután a körlapocskákból először „holdacskákat” vágott le úgy, hogy a szaggató határoló körének középpontja a már kivágott körlap középpontjától 2 cm távolságra helyezte el, és így vágott bele a körlapba. (Minden bevágásnál csakis egy körlapot vágott ketté.)



Miután minden körlapból levágott egy „holdacskát”, a körlapokból visszamaradt részek mindegyikéből –egy másik szaggatóval- kivágott egy-egy lehető legnagyobb körlap alakú süteményt.

a) Hány cm^2 területű egy „holdacska” felülről látható felülete? (Az eredményt egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (11 pont)

Klári a „holdacskák” és a kis körlapok elkészítése után visszamaradt tésztát ismét összegyúrta, majd ugyanolyan vastagságúra nyújtotta ki, mint az első esetben, de most négyzet alakú lett a kinyújtott tészta.

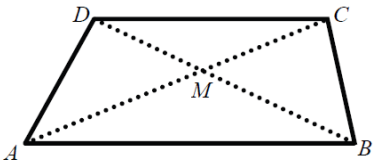
b) Hány cm hosszú ennek a négyzetnek az oldala, ha Klári a 30 cm x 60 cm-es téglalapból eredetileg 50 darab 3 cm sugarú körlapot szaggatott ki? (Az eredmény egészre kerekítve adja meg!) (5 pont)

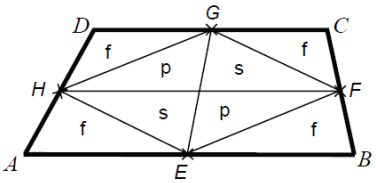
6) Az ABC háromszögben $AB = 2$, $AC = 1$, a BC oldal hossza pedig megegyezik az A csúcsból induló súlyvonal hosszával.
a) Mekkora a BC oldal hossza? A hossz pontos értékét adja meg! (9 pont)
b) Mekkora a háromszög területe? A terület pontos értékét adja meg! (5 pont)

7) István örömmel mesélte Péter barátjának, hogy egy négyszög alakú telket vett, amire majd házat akar építeni. Elmondása szerint a négyszög egyik szöge derékszög, és az ezt közrefogó mindkét oldal 20,0 m hosszú. A telek másik két oldala is egymással egyenlő hosszú, ezek 120°-os szöget zárnak be.
a) Hány méter hosszú drót szükséges az üres telek körbekerítéséhez?(4 pont)
„Mekkora házat szeretnél rá építeni?”- kérdezte Péter.
„Négyzet alapú sarokházat, és körülbelül $100m^2$ alapterületűt. Úgy gondoltuk a párommal, hogy a házat a derékszögű sarokba építjük.”- válaszolt István.
„Ha jól képzelem el a telek alakját, akkor az nagyon furcsa alakú lehet. Oda még egy kis faház sem fér el.”- szólt nevetve Péter.
b) Rajzolja le, milyen alakú az István által megvett telek, és milyennek képzelte el Péter! (2 pont)
c) Legfeljebb mekkora alapterületű, négyzet alapú sarokház férne el a telek derékszögű sarkába az egyik és mekkora a másik esetben? (Válaszát m^2-re kerekítve adja meg! (7 pont)

8) Egy 90 m² területű trapéz alakú virágágyás párhuzamos oldalainak aránya $AB : DC = 3 : 2$. Az ágyást tavasszal és ősszel is évszaknak megfelelő virágokkal ültetik be. Mindkét alkalommal mindegyik fajta virágból átlagosan 50 virágtövet ültetnek négyzetméterenként.
Tavasszal az átlókkal kijelölt négy háromszögre bontották a virágágyást. Az *ABM* háromszögbe sárga virágokat, a *DMC* háromszögbe fehéret, a maradék két részbe piros virágokat ültettek.

a) A tavaszi párosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek? (9 pont)





Ősszel a másik ábra szerint tervezték meg a virágok elhelyezését. (Az *E,F,G,* és *H* pontok a trapéz oldalainak felezőpontjai.) Ekkor is fehér (*f*), piros (*p*) és sárga (*s*) virágokat ültettek a tervrajz alapján.

b) Az őszi parkosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek? (7 pont)

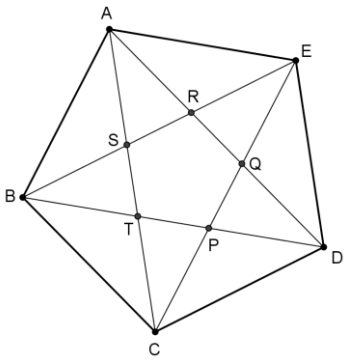
Válaszait az alábbi táblázatban tüntesse fel!

	fehér	piros	sárga
tavasszal			
ősszel			

9) Megrajzoltuk az *ABCDE* szabályos sokszöget, és berajzoltuk minden átlóját. Az átlók metszéspontjait az ábra szerint betűztük meg: *P,Q,R,S,T*.

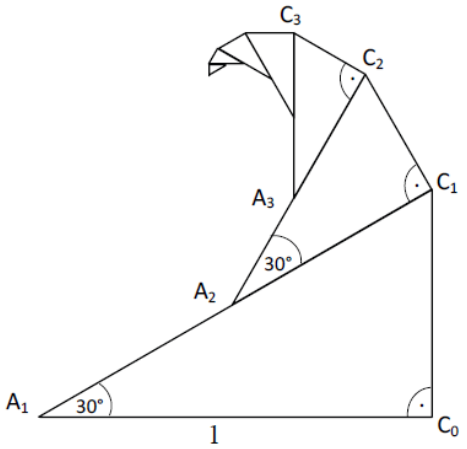
a) Hány olyan háromszög látható az ábrán, amelyek mindhárom csúcsa a megjelölt 10 pont közül való, és mindhárom oldalegyenese az *ABCDE* ötszög oldalegyenesei és átlóegyenesei közül kerül ki? (8 pont)

b) Tudjuk, hogy az *ABCQ* négyszög területe 120 cm². Mekkora az *ABCDE* ötszög területe? Válaszát egész értékekre kerekítve adja meg! (4 pont)



c) Tekintsük azt a tíz csúcsú gráfot, amelyet a megadott ábra szemléltet. Erről a gráfról fogalmaztunk meg két állítást. Állapítsa meg mindkét állításról, hogy igaz vagy hamis! Adjon rövid magyarázatot a válaszra!
1. állítás: Ennek a gráfnak 20 éle van.
2. állítás: Ebben a gráfban van olyan részgráf, amely nyolc élű kör. (4 pont)

10) Az $A_1C_0C_1$ derékszögű háromszögben az A_1 csúcsnál 30°-os szög van, az A_1C_0 befogó hossza 1, az A_1C_1 átfogó felezőpontja A_2.
Az A_2C_1 szakasz „fölé” az $A_1C_0C_1$ háromszöghöz hasonló $A_2C_1C_2$ derékszögű háromszöget rajzoljunk az ábra szerint. Az A_2C_2 átfogó felezőpontja A_3.
Az A_3C_2 szakasz „fölé” az $A_2C_1C_2$ háromszöghöz hasonló $A_3C_2C_3$ derékszögű háromszöget rajzolunk.
Ez az eljárás tovább folytatható.



a) Számítsa ki az így nyerhető végtelen sok derékszögű háromszög területének összegét (az összeg első tagja az $A_1C_0C_1$ háromszög területe.)! (7 pont)

b) Igazolja, hogy a $C_0C_1C_2\ldots C_n$ töröttvonal hossza minden pozitív n-re kisebb, mint 1,4. (9 pont)

11) Az ABC háromszög oldalai $AB = 42$, $BC = 40$, $CA = 26$. Írjunk téglalapot a háromszögbe úgy, hogy a téglalap egyik oldala illeszkedjen a háromszög AB oldalára, másik két csúcsa pedig a háromszög CA, illetve BC oldalára essen. Tekintsük az így beírható téglalapok közül a legnagyobb területűt! Mekkorák ennek a téglalapnak az oldalai? (16 pont)

12)

a) A $KLMN$ derékszögű trapéz alapjai $KL = 2\sqrt{12}$ és $MN = 3\sqrt{75}$ egység hosszúak, a derékszögű szár hossza $10\sqrt{2}$ egység. A trapézt megforgatjuk az alapokra merőleges LM szár egyenese körül.
Számítsa ki a keletkezett forgástest térfogatát! (π két tizedesjegyre kerekített értékével számoljon, és az eredményt is így adja meg!) (4 pont)

b) Az $ABCD$ derékszögű érintőtrapéz AB és CD alapjai $(AB > CD)$ hosszának összege 20. A beírt körnek az alapokra nem merőleges AD szárral vett érintési pontja negyedeli az AD szárat.
Számítsa ki a trapéz oldalainak hosszát! (12 pont)

13) Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai AB és CD és $AB > CD$. A trapéz átlóinak metszéspontja K. Az ABK háromszög AB oldalához tartozó magassága kétszerese a CDK háromszög CD oldalához tartozó magasságának. Jelölje T az ADK háromszög területét?
Hányszorosa az $ABCD$ trapéz területe T-nek? (16 pont)

14) Kartonpapírból kivágunk egy 1,5 dm magasságú ABC szabályos háromszöglapot. A háromszöglapon párhuzamost húzunk a háromszög mindegyik oldalával, mindegyikből ugyanakkora 0,5 deciméternél kisebb x távolságra. Ezek az egyenesek az $A_1B_1C_1$ szabályos háromszög oldalegyenesei.

a) Írja fel az $A_1B_1C_1$ háromszög területét x függvényében! (6 pont)

b) Szeretnénk egy $A_1B_1C_1$ alapú x magasságú, felül nyitott egyenes hasáb alakú íróasztali tolltartót létrehozni a lapból, ezért levágjuk a fölösleget, majd az $A_1B_1C_1$ háromszög élei mentén felhajtottuk a hasáb oldallapjait. Mekkora x estén lesz a keletkezett hasáb térfogata maximális? (10 pont)

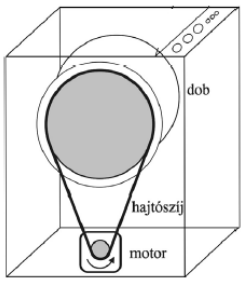
15) A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segítségre vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északkeleti irányba halad, a hajótöröttek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket.

a) Igazolja, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérő jelzést!(7 pont)

Egy 1,5 km magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a tengerjáró hajót, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km-t tett meg.

b) Mekkora depresszió szög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! Számításai során a Föld görbületétől tekintsen el! (7 pont)

16) Az ábrán egy mosógép vázlatos rajza látható. A kisebb, 1 cm sugarú kerék a motor tengelyéhez kapcsolódik, és egy hajtószíj segítségével forgatja meg a mosógép dobjához rögzített, 20 cm sugarú kereket, amitől a dob és benne a ruhák forognak mosás közben. A két kerék tengelye párhuzamos, a tengelyek távolsága 46 cm. (A hajtószíj a tengelyekre merőleges síkban van.) Milyen hosszú a feszes hajtószíj? (13 pont)



17) Egy 1 méter oldalú négyzetbe egy második négyzetet rajzoltunk úgy, hogy a belsőnégyzet minden csúcsa illeszkedjen a külső négyzet egy-egy oldalára. A belső és a külső négyzet oldalainak aránya $5:7$.

a) Milyen arányban osztja két részre a belső négyzet csúcsa a külső négyzet oldalát? Az arány pontos értékét adja meg! (10 pont)

A belső négyzetbe egy újabb, harmadik négyzetet rajzolunk úgy, hogy a harmadik és a második négyzet oldalainak aránya is $5:7$. Ezt az eljárást aztán gondolatban végtelen sokszor megismételjük.

b) Mekkora lesz a kapott négyzetek kerületeinek az összege, ha a kiindulási négyzet kerülete is tagja a (végtelen sok tagú) összegnek? (6 pont)

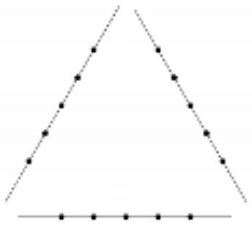
18) Egy 15°-os emelkedési szögű hegyoldalon álló függőleges fa egy adott időpontban a hegyoldal emelkedésének irányában 3 méter hosszú árnyékot vet. Ugyanebben az időpontban a közeli vízszintes fennsíkon álló turista árnyékának hossza éppen fele a turista magasságának. Hány méter magas a fa?
Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (12 pont)

19) Az *ABCDEF* szabályos hatszögben a rövidebb átló hossza $5\sqrt{2}$.
a) Számolja ki a hatszög területének pontos értékét! (6 pont)
b) Az *ABCDEF* hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét jelölje t_1, a t_1 területű hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét t_2, és így tovább, képezve ezzel a $\{t_n\}$ sorozatot. Számítsa ki a $\lim_{n\to\infty}(t_1+t_2+\ldots+t_n)$ határértékét! (Pontos értékkel számoljon!) (10 pont)

20) Egy körvonalon felvettünk öt pontot, és behúztuk az általuk meghatározott 10 húrt. Jelölje a pontokat pozitív körüljárási irányban rendre *A*, *B*, *C*, *D* és *E*.
a) Véletlenszerűen kiválasztunk 4 húrt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek a húrok egy konvex négyszöget alkotnak? (4 pont)
b) Hányféleképpen juthatunk el a húrok mentén *A*-ból *C*-be, ha a *B*, *D*, és *E* pontok mindegyikén legfeljebb egyszer haladhatunk át? (Az *A* pontot csak az út kezdetén, a *C* pontot csak az út végén érinthetjük.) (4 pont)
c) A 10 húr mindegyikét kiszínezzük egy-egy színnel, pirosra vagy sárgára, vagy zöldre. Hány olyan színezés van, amelyben mindhárom szín előfordul? (8 pont)

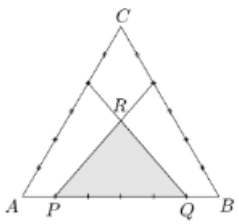
21)
a) Egy téglalapot 720 darab egybevágó kis téglalapra daraboltunk szét. A kis téglalapok oldalai közül az egyik 1 cm-rel hosszabb, mint a másik. Hány cm hosszúak egy-egy kis téglalap oldalai, ha a nagy téglalap területe 2025 cm^2? (7 pont)
b) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből összesen 720 olyan hatjegyű szám képezhető, melynek számjegyei között nincsenek egyenlők. Ezek között hány 12-vel osztható van. (5 pont)

22) Megadtunk három egyenest, és mindegyiken megadtunk öt-öt pontot az ábra szerint.



a) Hány olyan szakasz van, amelynek mindkét végpontja az ábrán megadott 15 pont valamelyike, de a szakasz nem tartalmaz további pontot a megadott 15 pont közül? (6 pont)

Az egyenlő oldalú *ABC* háromszög 18 egység hosszúságú oldalait hat-hat egyenlő részre osztottuk, és az ábra szerinti osztópontok összekötésével megrajzoltuk a *PQR* háromszöget.



b) Számítsa ki a *PQR* háromszög területének pontos értékét! (10 pont)

23) Egy televíziókészülék termékleírásában szereplő „16:9-es típus” azt adja meg, hogy mennyi a téglalap alakú tv-képernyő két szomszédos oldalhosszának aránya, a „40 colos” jellemző pedig a képernyő átlójának a hosszát adja meg col-ban $(1\text{ col} \approx 2{,}54\text{ cm})$.

a) Számítsa ki a 40 colos, 16:9-es képernyő oldalainak hosszát! Válaszát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (6 pont)

b) Két 16:9-es képernyő közül az elsőnek 69%-kal nagyobb a területe, mint a másodiknak. Hány százalékkal nagyobb az első képernyő átlója mint a másodiké? (5 pont)

24)

a) Igazolja a következő állítást: ha egy négyszög szögei valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor a négyszög húrnégyszög vagy trapéz! (6 pont)

b) Fogalmazza meg az előző állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

Egy geometriai építőkészletben csak olyan pálcikák vannak, amelyek hossza centiméterben mérve egész szám, és mindenféle lehetséges hosszúság előfordul 1 cm-től 12 cm-ig. (Mindegyik fajta pálcikából elegendően sok van a készletben.)

c) Hány különböző módon választhatunk ki 4 pálcikát a készletből úgy, hogy belőlük egy 24 cm kerületű érintőnégyszöget lehessen építeni? (Két kiválasztást különbözőnek tekintünk, ha az egyik kiválasztás 4 pálcikája nem állítható párba a másik kiválasztás 4 pálcikájával úgy, hogy mind a 4 párban egyenlő hosszú legyen a két pálcika. Tudjuk továbbá, hogy ha a, b, c, d pozitív számok, és $a+c=b+d$, akkor az a, b, c, d hosszúságú szakaszokból szerkeszthető négyszög.) (7 pont)

25) A fénymásoló gépekhez is használt téglalap alakú papírlapok mindegyikének olyan a méretezése, hogy a hosszabb és a rövidebb oldal aránya (megközelítőleg) $\sqrt{2}$. Ezt a számot röviden a téglalap alakú papírlap *méretarányának* is nevezik.

a) Mutassa meg, hogy ha egy $\sqrt{2}$ méretarányú papírlapot félbevágunk úgy, hogy a vágási él merőleges a papírlap hosszabb oldalára, akkor az így keletkező két egybevágó papírlap ugyancsak $\sqrt{2}$ méretarányú lesz! (4 pont)

A szabványos papírlapok méretét egy nagybetűvel és a betű után írt természetes számmal jelölik (például A0, A1, B5). Az A0-s papírlap méretaránya $\sqrt{2}$, a területe pedig éppen 1 m^2.

b) Számítsa ki az A0-s papírlap oldalainak hosszát egész milliméterre kerekítve! (4 pont)

Ha az A0-s papírlapot hosszabb élére merőlegesen félbevágjuk, akkor két A1-es papírlapot kapunk. Az eljárást tovább folytatva kapjuk az A3-as, A4-es, A5-

ös papírlapokat. A leggyakrabban használt irodai másolópapír A4-es méretű és „80 g-os”. A „80 g-os” jelzés azt jelenti, hogy 1 m^2 területű másolópapír tömege 80 gramm.

c) Egy csomagban 500 darab A4-es „80 g-os” papírlap van. Hány kg egy ilyen csomag tömege, ha a csomagolóanyag tömege 20 g? (5 pont)

26) Egy kör középpontja egy derékszögű háromszög b hosszúságú befogójára illeszkedik. A kör érinti a c hosszúságú átfogót és z a hosszúságú befogó egyenesét is. Andrea és Petra egymástól függetlenül kifejezték a kör sugarának hosszát a háromszög oldalainak hosszával. Andrea szerint a kör sugara $R_A = \frac{ab}{a+c}$, Petra szerint pedig $R_P = \frac{ac-a^2}{b}$.

a) Igazolja, hogy $R_A = R_P$! (5 pont)

b) Bizonyítsa be, hogy Andrea képlete helyes! (4 pont)

Egy derékszögű háromszög oldalai $a = 8$ cm, $b = 6$ cm és $c = 10\,\text{cm}$.
Megrajzoltuk azt a két kört, melyek középpontja a háromszög egyik, illetve másik befogójára illeszkedik, és amelyek érintik a háromszög másik két oldalegyenesét.

c) Számítsuk ki, hogy a két körnek a háromszög belsejébe eső M metszéspontja milyen messze van a derékszögű C csúcstól! (5 pont)

27)

a) A $PQRS$ húrnégyszöget a PR és a QS átlók megrajzolásával négy háromszögre bontottuk. Igazolja, hogy ezek közül a két-két szemközti háromszög hasonló egymáshoz! (4 pont)

Az $ABCD$ húrnégyszög AB oldala a négyszög körülírt körének egyik átmérője. A négyszög BC oldala 3 cm, a CD oldala 5 cm hosszú, továbbá $BCD\sphericalangle = 120°$.

b) Számítsa ki a négyszög BD átlójának, AB oldalának és AD oldalának hosszát, valamint a négyszög többi szögét! (10 pont)