MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK
EMELT SZINT

Paraméter

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Tekintsük a valós számokon értelmezett $f(x)=(p-3{,}5)x^2+2(p-2)x+6$ függvényt, ahol p tetszőleges valós paraméter!
   a) Mutassa meg, hogy tetszőleges p érték mellet az $x=-2$ zérushelye a függvénynek! (2 pont)
   b) Milyen p érték esetén lesz a függvény másik zérushelye 1-nél nagyobb? (14 pont)

2)
   a) Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben az $f:[0;7]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left|x^2-6x+5\right|$ függvényt! (4 pont)
   b) Adja meg az f függvény értékkészletét! (2 pont)
   c) A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az $\left|x^2-6x+5\right|=p$ egyenletnek a $[0;7]$ intervallumon? (8 pont)

3) A „TOJÁS” farmon átlagosan 10000 tyúkot tartanak. Ezek egy év alatt mintegy 2,20 millió tojást tojnak. A tenyésztők azt tapasztalták, hogy – valószínűleg a zsúfoltság csökkenése miatt– ha a tyúkok számát 4%-kal csökkentik, akkor az egy tojóra jutó átlagos tojástermelés 8%-kal nő.
   a) A tyúkok számának 4%-os csökkentése után, mennyi lett a tojásfarmon az évi termelés? (5 pont)

   Az a tapasztalat, hogy a tyúkok számának p %-kal történő csökkenése $2p$ %-kal növeli az egy tyúkra vonatkozó tojásmennyiséget, csak $p<30$ esetén érvényes.
   b) Hány százalékkal csökkentették tavaly a tyúkok számát, ha ezzel évi 8%-os termelésnövekedést értek elegy év alatt? (11 pont)

4)
   a) Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x)=x^3+kx^2+9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl).

   Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x=1$ a függvénynek lokális szélsőértékhelye a függvénynek!
   Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x=1$ a függvények lokális maximumhelye vagy lokális minimumhelye!
   Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőértékhelye is! (11 pont)
   b) Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x)=x^3-9x^2$ képlettel értelmezett g függvény inflexiós pontját! (5 pont)

5) Legyen p valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $f(x) = -3x^3 + (p-3)x^2 + p^2x - 6$

a) Számítsa ki a $\int_0^2 f(x)dx$ határozott integrált, ha $p = 3$ (4 pont)

b) Határozza meg p értékét úgy, hogy az $x = 1$ zérushelye legyen az f függvénynek! (3 pont)

c) Határozza meg p értékét úgy, hogy az f függvény deriváltja az $x = 1$ helyen pozitív legyen! (7 pont)

6) Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor koordinátái a t valós paraméter függvényében:
$\underline{a}(\cos t; \sin t)$ és $\underline{b}(\sin^2 t; \cos^2 t)$

a) Adja meg $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok koordinátáinak pontos érékét, ha t az $\frac{5\pi}{6}$ számot jelöli! (2 pont)

b) Mekkora az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok hajlásszöge $t = \frac{5\pi}{6}$ esetén? (A keresett szöget fokban, egészre kerekítve adja meg!) (5 pont)

c) Határozza meg t olyan valós értékeit, amelyek esetén $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok merőlegesek egymásra! (7 pont)

7)

a) Egy derékszögű háromszög egyik oldalegyenese valamelyik koordinátatengely, egy másik oldalegyenesének egyenlete $2x + y = 10$, egyik csúcsa az origó. Hány ilyen tulajdonságú háromszög van? (6 pont)

b) Jelölje e azokat az egyeneseket, amelynek egyenlete $2x + y = b$, ahol b valós paraméter. Mekkora lehet b értéke, ha tudjuk, hogy van közös pontja az így megadott e egyenesnek és az origó középpontú 4 egység sugarú körnek? (8 pont)

8)

a) Ábrázolja a derékszögű koordinátarendszerben az $f : [0;5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ függvényt! (5 pont)

b) Tekintsük az $|(x-2)^2 - 1| = k$ paraméteres egyenletet, ahol k valós paraméter. Vizsgálja a megoldások számát a k paraméter függvényében! (7 pont)

c) Ábrázolja a megoldások számát megadó függvény a $k \in]-6;6[$ intervallumon! (2 pont)

d) Adja meg a c)-beli függvény értékkészletét! (2 pont)

9) A derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcsai: $A(2;1)$, $B(7;-4)$, $C(11;p)$. Határozza meg a p paraméter pontos értékét, ha a háromszög B csúcsánál levő belső szöge 60°-os. (16 pont)