MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK
EMELT SZINT

Koordinátageometria

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1)

a) Egy derékszögű háromszög egyik oldalegyenese valamelyik koordinátatengely, egy másik oldalegyenesének egyenlete $2x+y=10$, egyik csúcsa az origó. Hány ilyen tulajdonságú háromszög van? (6 pont)

b) Jelölje e azokat az egyeneseket, amelynek egyenlete $2x+y=b$, ahol b valós paraméter. Mekkora lehet b értéke, ha tudjuk, hogy van közös pontja az így megadott e egyenesnek és az origó középpontú 4 egység sugarú körnek? (8 pont)

2) A $PQRS$ négyszög csúcsai: $P(3;-1)$, $Q(1;3)$, $R(-6;2)$ és $S(-5;-5)$.

Döntse el, hogy az alábbi három állítás közül melyik igaz és melyik hamis! Tegyen * jelet a táblázat megfelelő mezőibe. Válaszát indokolja, támassza alá számításokkal!

a) A állítás: A $PQRS$ négyszögnek nincs derékszöge. (4 pont)

b) B állítás: A $PQRS$ négyszög húrnégyszög. (4 pont)

c) C állítás: A $PQRS$ négyszögnek nincs szimmetriacentruma. (5 pont)

	Igaz	Hamis
A		
B		
C		

3) Három ponthalmazt vizsgálunk a derékszögű koordináta-rendszer (S) síkjában. Az A halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátái: $4x-3y\geq 18$, azaz $A:=\{P(x;y)\in S \mid 4x-3y\geq 18\}$;

a B halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira: $x^2+y^2-6x+4y-12\leq 0$,

azaz $B:=\{P(x;y)\in S \mid x^2+y^2-6x+4y-12\leq 0\}$,

a C halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira: $y^2=4$, azaz $C:=\{P(x;y\in S) \mid y^2=4\}$.

a) Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a három halmazt! Fogalmazza meg, milyen geometriai alakzatok az A, a B és a C halmaz pontjai! (8 pont)

b) Ábrázolja újabb koordináta-rendszerben a $B\setminus A$ halmazt! Fogalmazza meg pontosan, hogy milyen geometriai alakzatot alkot ez a ponthalmaz? (4 pont)

c) Ábrázolja a $B\cap C$ halmazt! Ennek a ponthalmaznak melyik $P(x;y)$ pontja van a legközelebb illetve a legtávolabb a koordináta-rendszer origójától? (4 pont)

4)

a) Ábrázolja a $[0;6]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto x^2 - 8x + 11$ hozzárendeléssel megadott függvényt (3 pont)

b) Adja meg a $y = x^2 - 8x + 11$ egyenlettel megadott alakzat $P(5;-4)$ pontjában húzott érintőjének egyenletét. (11 pont)

5) Egy háromszög két oldalegyenese az x tengely és az $y = \frac{4}{3}x$ egyenletű egyenes. Ismerjük a háromszög beírt körének egyenletét is: $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$. Írjuk fel a háromszög harmadik oldalegyenesének egyenletét, ha a háromszög egyenlő szárú és

a) az alaplapja az x tengelyre illeszkedik (7 pont)

b) az adott oldalegyenesek a háromszög száregyenesei! (9 pont)

6) Adott a $K(t) = t^2 + 6t + 5$ polinom. Jelölje H a koordinátasík azon $P(x;y)$ pontjainak halmazát, amelyekre $K(x) + K(y) \le 0$.

a) A H halmaz pontjai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont az $C(-3;3)$ ponttól 2 egységnél nem nagyobb távolságra van? (9 pont)

Az f függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 6x + 5$$

b) Számítsa ki az f függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt síkidom területét! (7 pont)

7) Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor koordinátái a t valós paraméter függvényében:

$\underline{a}(\cos t; \sin t)$ és $\underline{b}(\sin^2 t; \cos^2 t)$

a) Adja meg $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok koordinátáinak pontos érékét, ha t az $\frac{5\pi}{6}$ számot jelöli! (2 pont)

b) Mekkora az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok hajlásszöge $t = \frac{5\pi}{6}$ esetén? (A keresett szöget fokban, egészre kerekítve adja meg!) (5 pont)

c) Határozza meg t olyan valós értékeit, amelyek esetén $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok merőlegesek egymásra! (7 pont)

8) Egy egyenlő szárú háromszög szárainak metszéspontja $C(0;7)$ pont, a szárak hossza $\sqrt{53}$ egység. A háromszög másik két csúcsa $(A;B)$ illeszkedik az $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ egyenletű parabolára.

a) Számítsa ki az A és a B pont koordinátáit! (6 pont)

b) Írja fel az ABC háromszög egyik száregyenesének egyenletét! Ennek az egyenesnek és a parabolának további közös pontja D. Határozza meg a D pont koordinátáit! (4 pont)

c) Mekkora területű részekre bontja az ABC háromszöget a parabola íve? (6 pont)

9) Az $ABCD$ konvex négyszög oldalegyeneseinek egyenlete rendre:

$DA: 3x-4y-20=0 \quad AB: 3x+5y-20=0$

$BC: 4x-3y+12=0 \quad CD: 5x+3y+15=0$

a) Igazolja, hogy a négyszög átlói az x és az y tengelyre illeszkednek, továbbá, hogy ennek a négyszögnek nincs derékszöge! (8 pont)

b) Bizonyítsa be, hogy a négyszög húrnégyszög! (8 pont)

10) Az $x^2=2y$ egyenletű parabola az $x^2+y^2\le 8$ egyenletű körlapot két részre vágja. Mekkora a konvex rész területe? Számolása során ne használja a π közelítő értékét! (16 pont)

11) Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $x^2+y^2+6x+4y-3=0$ egyenletű kör. Ebbe a körbe szabályos háromszöget írunk, amelynek egyik csúcsa $A(1;-2)$.

a) Számítsa ki a szabályos háromszög másik két csúcsának koordinátáit! Pontos értékekkel számoljon! (11 pont)

b) Véletlenszerűen kiválasztjuk az adott kör egy belső pontját. Mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont a tekintett szabályos háromszögnek is belső pontja? Válaszát két tizedes jegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

12) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik illeszkedik a $P(2;5)$ pontra, valamint az $x+y=4$ és $x+y=6$ egyeneseket olyan pontokban metszi, amelyek első koordinátájának különbsége 3. (16 pont)

13) Az $y=ax+b$ egyenletű egyenes illeszkedik a $(2;6)$ pontra. Tudjuk, hogy $a<0$. Jelölje az x tengely és az egyenes metszéspontját P, az y tengely és az egyenes metszéspontját pedig Q. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre az OPQ háromszög területe a legkisebb, és számítsa ki a területét (O a koordináta-rendszer origóját jelöli)! (16 pont)

14) Az ABC háromszög oldalegyeneseinek egyenlete:

$AB: \ y=0$

$BC: \ x+10y=20$

$CA: \ y=\frac{1}{2}x-4$

a) Számítsa ki a háromszög csúcspontjainak koordinátáit! (7 pont)

b) Számítsa ki a háromszög B csúcsnál lévő belső szögét! (4 pont)

15) Egy háromszög két csúcsa $A(8;2)$; $B(-1;5)$ a C csúcs pedig illeszkedik az y tengelyre. A háromszög köré írt kör egyenlete: $x^2+y^2-6x-4y-12=0$

a) Adja meg a háromszög oldalfelező merőlegesei metszéspontjának koordinátáit! (3 pont)

b) Adja meg a háromszög súlypontjának koordinátáit! (8 pont)

16) Az A pont helyvektora: $\overrightarrow{OA}(\lg a;\lg b)$; a B pont helyvektora: $\overrightarrow{OB}\left(\lg ab;\lg\frac{b}{a}\right)$, ahol a és b olyan valós számokat jelölnek, melyekre $0<a<1$, illetve $1<b$ teljesül.

a) Bizonyítsa be, hogy a B pont mindkét koordinátája nagyobb az A pont megfelelő koordinátáinál! (3 pont)

b) Bizonyítsa be, hogy az $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ vektor merőleges az $\overrightarrow{OA}$ vektorra! (3 pont)

c) Mekkora az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok hajlásszöge? (4 pont)

d) Legyen $a=\frac{1}{10}$, b pedig jelöljön tetszőleges 1-nél nagyobb valós számot. Adja meg (egyenletével, vagy a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva) az A, illetve B pontok halmazát! (6 pont)

17) A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segítségre vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északkeleti irányba halad, a hajótöröttek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket.

a) Igazolja, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérő jelzést! (7 pont)

Egy 1,5 km magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a tengerjáró hajót, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km-t tett meg.

b) Mekkora depresszió szög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! Számításai során a Föld görbületétől tekintsen el! (7 pont)

18) A derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcsai: $A(2;1)$, $B(7;-4)$, $C(11;p)$. Határozza meg a p paraméter pontos értékét, ha a háromszög B csúcsánál levő belső szöge 60°-os. (16 pont)

19) Az $ABCD$ húrtrapéz köré írt körének egyenlete $(x-3)^2+(y-2)^2=100$. A húrtrapéz szimmetriatengelyének egyenlete $2x-y=4$. A trapéz AB alapjának egy belső pontja $P(-5;1)$, BC szárának hossza pedig $10\sqrt{2}$ egység. Határozza meg a trapéz csúcsainak koordinátáit! (16 pont)

20) Egy $ABCD$ négyzet A csúcsa a koordinátarendszer y tengelyére, szomszédos B csúcsa pedig a koordinátarendszer x tengelyére illeszkedik.

a) Bizonyítsa be, hogy a négyzet K középpontjának koordinátái vagy egyenlők, vagy egymás ellentettjei! (8 pont)

b) Egy ilyen négyzet középpontja a $(7;7)$ pont. A négyzet oldala 10 egység hosszú. Számítsa ki a négyzet koordinátatengelyekre illeszkedő két csúcsának koordinátáit! (8 pont)

21) Adott a derékszögű koordináta-rendszerben három pont: $A(-16;10)$, $B(2;4)$, $C(10;2)$.

a) Számítsa ki az ABC háromszög B csúcsánál fekvő belső szögét! (6 pont)

K pont egyenlő távolságra van A-tól, B-től, és C-től.

b) Határozza meg K pont koordinátáit! (8 pont)