MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI
EMELT SZINT

Kombinatorika

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Egy nagyvárosban a helyi járatokon olyan buszjegyet kellett érvényesíteni, amelyen egy 3x3-as négyzetben 1-9.ig szerepelnek a számok. (lásd 1. ábra) A jegy érvényesítésekor a jegykezelő automata a kilenc mezőből mindig pontosan hármat lyukaszt ki.

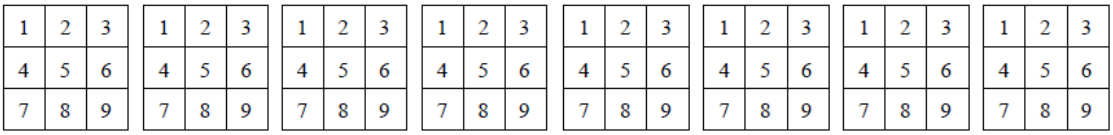
a) Rajzolja le az összes olyan lyukasztást, amelyben minden sorban és minden oszlopban pontosan egy kilyukasztott mező van! Indokolja, hogy miért ezek és csak ezek a lehetséges lyukasztások! (4 pont)

b) Rajzoljon a 2. ábrán megadott mezőbe egy olyan lyukasztást, amelyen a ki nem lyukasztott hat kis négyzetlap olyan tartományt fed le, amelynek pontosan egy szimmetriatengelye van! (A mezőkre nyomtatott számoktól most eltekintünk). Rajzolja be a szimmetriatengelyt! (3 pont)

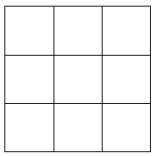
Két kisiskolás a buszra várakozva beszélget. Áron azt mondja, hogy szeretné, hogy a buszjegyen kilyukasztott három szám mindegyike prím lenne. Zita pedig azt reméli, hogy a számok összege 13 lesz.

c) Mekkora valószínűséggel teljesül Áron, illetve Zita kívánsága? (9 pont)

1.ábra

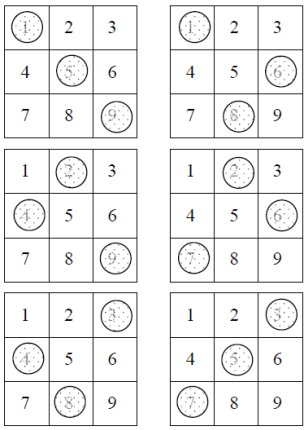


2.ábra

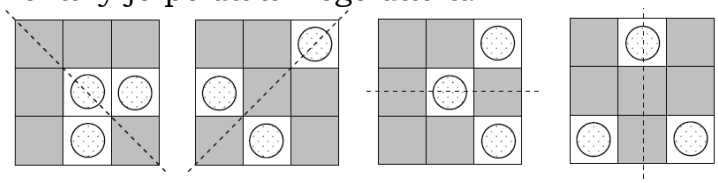


Megoldás:

a) Minden sorban kell lyukasztásnak lenni. Az első sorban 3 lehetőségünk van a lyuk kiválasztására, a második sorban 2, ezek pedig egyértelműen meghatározzák a harmadik sort. (1 pont)
A megfelelő lyukasztások száma: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (1 pont)
A megoldások: (2 pont)



b) Néhány jó példa a megoldásra:



Helyes ábra (2 pont)
Szimmetriatengely berajzolása (1 pont)

c) Az első kilenc pozitív egész között 4 prímszám van (1 pont)
Kedvező esetek száma 4 (1 pont)

Az összes lehetséges lyukasztások száma: $\binom{9}{3} = 84$ (2 pont)

Áron kívánsága $P = \frac{4}{84} \approx \mathbf{0,048}$ valószínűséggel teljesül (1 pont)

Zita kívánságának 7 számhármas felel meg:
$(1;3;9)$
$(1;4;8)$
$(1;5;7)$
$(2;3;8)$
$(2;4;7)$
$(2;5;6)$
$(3;4;6)$ (3 pont)

A keresett valószínűség $P = \frac{7}{84} \approx \mathbf{0,083}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

2) Egy szabályos játékkocka két oldalára 0-át, két oldalára 2-est, két oldalára 4-est írunk. A dobókockát ötször egymás után feldobjuk, és a dobások eredményét rendre feljegyezzük.

a) Hányféle számötöst jegyezhetünk fel? (2 pont)

b) Hányféle számötös esetében lehet a dobott számok összege 10? (10 pont)

Megoldás:

a) Mivel a dobások során bármilyen helyen háromféle számot (0; 2; 4) dobhatunk, a rendezett számötösök száma $3^5 = \mathbf{243}$ (2 pont)

b) Ha a dobott pontok összegét tekintjük csak, és a dobások sorrendjét nem, akkor 10-et összegként háromféleképpen kaphatunk (1 pont)

1. eset: $4+4+2+0+0=10$ (1 pont)

2. eset: $4+2+2+2+0=10$ (1 pont)

3. eset: $2+2+2+2+2=10$ (1 pont)

Az 1. esetben ezt az 5 számot $\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$-féle sorrendben dobhattuk (2 pont)

A 2. esetben ezt az öt számot $\frac{5!}{3!}=20$-féle sorrendben dobhattuk (2 pont)

A 3. esetben ezt az öt számot csak egyféle sorrendben dobhattuk. A 10-es összeg tehát összesen **51**-féleképpen állhatott elő. (2 pont)

Összesen: 12 pont

3) Adott az $A=\{0;1;2;3;4;5\}$ halmaz.

a) Adja meg az *A* halmaz háromelemű részhalmazainak számát! (3 pont)

b) Az *A* halmaz elemeiből hány olyan öttel osztható hatjegyű szám írható fel, amelyben a számjegyek nem ismétlődnek? (6 pont)

c) Az *A* halmaz elemeiből hány olyan hatjegyű szám írható fel, amely legalább egy egyest tartalmaz? (7 pont)

Megoldás:

a) A 6-elemű halmaz 3-elemű részhalmazainak száma $\binom{6}{3}$ (2 pont)

azaz **20** ilyen szám van (1 pont)

b) Egy szám 5-tel osztható, ha nullára vagy ötre végződik (1 pont)

Nullára végződő hatjegyű számból $5!$ van (1 pont)

Ötre végződő hatjegyű számból $4\cdot 4!$ van (2 pont)

Összesen $5!+4\cdot 4!=$ (1 pont)

216 ilyen szám van (1 pont)

c) Komplementer halmaz segítségével számolható ki. (1 pont)

Az összes hatjegyű szám $5\cdot 6^5$ (2 pont)

Azok a hatjegyű számok, amelyekben nincs egyes: $4\cdot 5^5$ (2 pont)

Tehát $5\cdot 6^5-4\cdot 5^5=$ (1 pont)

$=$**26380** ilyen hatjegyű szám van (1 pont)

Összesen: 16 pont

4) Egyszerre feldobunk hat szabályos dobókockát, amelyek különböző színűek.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindegyik kockával más számot dobunk? (5 pont)

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy dobásnál a hat dobott szám összege legalább 34 lesz! (9 pont)

Megoldás:

a) A kockák különbözőek, tehát az összes lehetséges eset 6^6 (2 pont)
Ha mindegyiknél más számot dobunk, akkor a hat különböző szám 6!-féleképpen fordulhat elő. (2 pont)
Innen a klasszikus formula szerint a valószínűség $\frac{6!}{6^6} = \mathbf{0,0154}$. (1 pont)

b) A hat szám összege legalább 34, azt jelenti, hogy 34, 35 vagy 36 (1 pont)
Tehát a következő esetek lehetnek:
(1) $36 = 6+6+6+6+6+6$
(2) $35 = 6+6+6+6+6+5$
(3) $34 = 6+6+6+6+6+4$
(4) $34 = 6+6+6+6+5+5$ (2 pont)
Összeszámoljuk, hogy az egyes esetek hányféleképpen fordulhatnak elő:
(1) egyféleképpen (1 pont)
(2) 6-féleképpen
(3) 6-féleképpen (1 pont)
(4) $\binom{6}{2} = 15$-féleképpen (2 pont)
A kedvező esetek száma összesen: $1+6+6+15 = 28$. (1 pont)
A keresett valószínűség: $P = \frac{28}{6^6} \approx \mathbf{0,0006}$. (1 pont)

Összesen: 14 pont

5) Hat úszó: *A*, *B*, *C*, *D*, *E* és *F* indul a 100 méteres pillangóúszás döntőjében. Egy fogadóirodában ennek a versenynek az első, a második és a harmadik helyezettjére lehet tippelni egy szelvényen. Az a fogadó szelvény érvényes, amelyen megnevezték az első, a második és a harmadik helyezettet. Ha a fogadó valamelyik helyezésre nem ír tippet, vagy a hat induló nevén kívül más nevet is beír, vagy egy nevet többször ír be, akkor a szelvénye érvénytelen. Holtverseny nincs, és nem is lehet rá fogadni.

a) Hány szelvényt kell kitöltenie annak, aki minden lehetséges esetre egy-egy érvényes fogadást akar kötni? (3 pont)

A döntő végeredménye a következő lett: első az *A*, második a *B*, harmadik a *C* versenyző.

b) Ha egy fogadó az összes lehetséges esetre egy-egy érvényes szelvénnyel fogadott, akkor hány darab legalább egytalálatos szelvénye lett? (Egy szelvényen annyi találat van, ahány versenyző helyezése megegyezik a szelvényre írt tippel.) (13 pont)

Megoldás:

a) Mivel bárki végezhet bármelyik dobogós helyen, ezért az első 6, a második 5, a harmadik helyezett 4-féle lehet, így $6\cdot 5\cdot 4 = \mathbf{120}$**-féle** dobogós sorrend lehetséges, tehát ennyi szelvényt kell kitöltenie (3 pont)

b) A telitalálatos szelvény tippje: *ABC*. Egyetlen szelvényen lett három találat (1 pont)

A pontosan 2 találatot elért szelvények tippje *ABX*, *AXC* vagy *XBC* alakú, ahol $X \in \{D;E;F\}$. Tehát 9 szelvényen lett pontosan 2 találat (3 pont)

Az egytalálatos szelvények számát keressük. Az első három helyezett bármelyikét eltalálhatta a fogadó, így először tegyük fel, hogy éppen az 1. helyezettet (*A*) találta el, de nem találta el sem a 2., sem a 3. helyezettet. Ez két lényegesen különböző módon valósulhatott meg.

1. eset: A második versenyzőre leadott tipp a *C* versenyző. A szelvényen szereplő tipp *ACX* alakú, ahol $X \in \{B;D;E;F\}$. Ez négy lehetőség, tehát 4 ilyen egytalálatos szelvény van (3 pont)

2. eset: A második helyezettre adott tipp nem a *C* versenyző (de nem is a *B* versenyző). A szelvényen szereplő tipp *AXY* alakú, ahol $X \in \{D;E;F\}$. Az *X* helyére beírandó név megválasztása után az *Y* helyére három név bármelyike választható, mert csak három név nem írható oda: az *A*, a *C* és az *X* helyére választott név. Ezért $3\cdot 3 = 9$ ilyen egytalálatos szelvény van (2 pont)

Tehát összesen $4+9=13$ darab olyan egytalálatos szelvény van, ahol csak az első helyezettet (*A*) találta el a fogadó (1 pont)

Hasonlóan okoskodva: 13 olyan szelvény lett, ahol csak a második helyezettet (*B*), és 13 olyan szelvény, ahol csak a harmadik helyezettet (*C*). Tehát összesen $3\cdot 13 = 39$ egytalálatos szelvénye lett a fogadónak (2 pont)

A legalább egytalálatos szelvények száma: $1+9+39 = \mathbf{49}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

6) Egy urnában csak piros, zöld és kék golyók vannak. A piros golyók száma 18. Egy golyó kihúzása esetén annak a valószínűsége, hogy nem piros golyót (azaz zöldet vagy kéket) húzunk, $\frac{1}{15}$-del kisebb, mint azé, hogy zöld vagy piros golyót húzunk. Annak a valószínűsége, hogy kék vagy piros golyót húzunk $\frac{11}{10}$-szer nagyobb, mint annak a valószínűsége, hogy zöld vagy piros golyót húzunk. Hány zöld és hány kék golyó van az urnában? (14 pont)

Megoldás:

Jelöljük z-vel a zöld golyók, k-val pedig a kék golyók számát (1 pont)
Ekkor az urnában lévő golyók száma: $18+z+k$ (1 pont)
Használjuk a valószínűség kombinatorikus kiszámítását megadó $\frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$ képletét (1 pont)
A feltételek szerint (1) $\frac{z+k}{18+z+k}+\frac{1}{15}=\frac{18+z}{18+z+k}$ (1 pont)
(2) $\frac{k+18}{18+z+k}=\frac{1{,}1(z+18)}{18+z+k}$ (1 pont)
az (1)-es egyenletet átírva: $15(z+k)+18+z+k=15(18+z)$ (1 pont)
majd rendezve: (3) $16k+z=252$ (1 pont)
a (2)-es egyenletet átírva: $k+18=1{,}1(z+18)$ (1 pont)
rendezve: (4) $k=1{,}1z+18$ (1 pont)
(4)-ből k-t (3)-ba helyettesítve: $16(1{,}1z+18)+z=252$ (1 pont)
Innen $z=12$ (1 pont)
(4)-be visszahelyettesítve $k=15$ (1 pont)
A kapott értékek megfelelnek a feladat feltételeinek (1 pont)
Az urnában 12 darab zöld és 15 darab kék golyó van. (1 pont)

Összesen: 14 pont

7) Annának az IWIW-en 40 ismerőse van (Az IWIW weboldalon lehetőség van az egymást ismerő emberek kapcsolatfelvételére. Ebben a feladatban minden ismertséget kölcsönösnek tekintünk.)
Anna ismerőseinek mindegyike Anna minden többi ismerőse közül pontosan egyet nem ismer.

a) A szóba került 41 ember között összesen hány ismertség áll fenn? (5 pont)

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Anna 40 ismerőse közül véletlenszerűen választva kettőt, ők ismerik egymást? (5 pont)

c) Válasszunk most a 41 személy közül véletlenszerűen kettőt! Mennyi a valószínűsége, hogy nem ismerik egymást? (6 pont)

Megoldás:

a) A 41 főből álló társaság ismertségi számát megkaphatjuk, ha összeadjuk Anna ismerőseinek és Anna 40 ismerőse egymás közti ismertséginek számát (1 pont)
Anna ismeri a 40 ismerősét (1 pont)
Anna 40 ismerősének mindegyik 38 embert ismer Annán kívül (1 pont)
Így Anna 40 ismerősének $\frac{40\cdot 38}{2}=760$ ismertsége van egymás közt (1 pont)
A 41 fő közt $40+760=$ **800** ismertsége van (1 pont)

b) Vannak 40-en, akikből választhatunk (1 pont)
Az elsőnek választott személy bárki lehet (1 pont)
Utána 39-ből kell választani egyet (1 pont)
Mivel az előzőnek választott személy közülük egyet nem ismer, így 38-at ismer (1 pont)
Annak a valószínűsége, hogy ismerik egymást $\frac{\mathbf{38}}{\mathbf{39}}$ (1 pont)

c) A kiválasztott két személy közül vagy Anna az egyik, vagy mindkettő Anna ismerősei közül való (1 pont)
1. eset: Ha Anna az egyik kiválasztott
Ekkor a másik választásától függetlenül a két ember ismeri egymást. A kedvező esetek száma ekkor nulla (1 pont)
2. eset: Ha Anna ismerősei közül való a két választott
Akkor a 40 személy kettesével párba állítható, úgy, hogy a párok két-két tagja nem ismerik egymást, ezért 20 kedvező eset van (1 pont)
Az összes lehetséges kiválasztások száma $\binom{41}{2}$ (1 pont)
azaz 820 (1 pont)
Így a kérdéses valószínűség $P=\frac{0+20}{820}=\frac{1}{41}\approx \mathbf{0,0244}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

8) Egy urnában 5 azonos méretű golyó van, 2 piros és 3 fehér. Egyesével, és mindegyik golyót azonos eséllyel húzzuk ki az urnából a bent lévők közül.

a) Hány különböző sorrendben húzhatjuk ki az 5 golyót, ha a kihúzott golyót nem tesszük vissza, és az azonos golyókat nem különböztetjük meg egymástól? (4 pont)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az utolsó (ötödik) húzás előtt az urnában egy darab fehér golyó van? (4 pont)

Az eredeti golyókat tartalmazó urnából hatszor húzunk úgy, hogy a kihúzott golyót minden húzás után visszatesszük.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a hat húzásból legfeljebb kétszer húzunk piros golyót? (A valószínűséget három tizedesjegyre kerekített értékkel adja meg!) (8 pont)

Megoldás:

a) A lehetséges húzási sorrendek száma megegyezik 2 piros és 3 fehér golyó különböző sorba rendezéseinek számával (2 pont)

A 2 piros és 3 fehér golyónak $\binom{5}{2}$ különböző (1 pont)

azaz 10 sorba rendezése van. (1 pont)

b) A már kihúzott 2 piros és 2 fehér golyó húzása $\binom{4}{2}$ (2 pont)

azaz 6 különböző sorrendben történhetett (1 pont)

A lehetséges esetek száma 10, így a valószínűség $P=\frac{6}{10}=\mathbf{0,6}$ (1 pont)

c) A hat húzásból legfeljebb kétszer húzunk piros golyót: ha nem húzunk pirosat (A esemény), vagy 1 pirosat húzunk (B esemény), vagy 2 pirosat húzunk (C esemény) (1 pont)

Mivel az A, B és C események páronként kizáró események, a keresett valószínűség $P=P(A)+P(B)+P(C)$ (1 pont)

Piros golyó húzásának valószínűsége $\frac{2}{5}$, fehér golyó húzásának valószínűsége $\frac{3}{5}$ minden húzásnál, ezért (1 pont)

$$P(A)=\binom{6}{0}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^6=0,0467$$ (1 pont)

$$P(B)=\binom{6}{1}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^5=0,1866$$ (1 pont)

$$P(C)=\binom{6}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^4=0,3110$$ (1 pont)

A keresett valószínűség: $P=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{729+2916+4860}{5^6}=\frac{8505}{15625}$ (1 pont)

ami közelítőleg **0,544** (1 pont)

Összesen: 16 pont

9) Egy középiskola 12. osztályának egy csoportjában minden tanuló olyan matematika dolgozatot írt, amelyben 100 pont volt az elérhető maximális pontszám. A csoport eredményéről a következőket tudjuk: 5 tanuló maximális pontszámot kapott a dolgozatára, minden tanuló elért legalább 60 pontot, és a dolgozatok pontátlaga 76 volt. Minden tanuló egész pontszámmal értékelt dolgozatot írt.

a) Legalább hányan lehettek a csoportban? (5 pont)

b) Legfeljebb hány diák dolgozata lehetett 60 pontos, ha a csoport létszáma 14? (4 pont)

A 14 fős csoportból Annának, Balázsnak, Csabának, Dorkának és Editnek lett 100 pontos a dolgozata. Pontosan hatan írtak 60 pontos dolgozatot, és csak egy olyan tanuló volt, akinek a pontszáma megegyezett az átlagpontszámmal.

c) Hányféleképpen valósulhatott ez meg? (A csoport két eredményét akkor tekintjük különbözőnek, ha a csoport legalább egy tanulójának különböző a dolgozatra kapott pontszáma a két esetben) (7 pont)

Megoldás:

a) Jelölje n a csoportba járó diákok számát. A feltételek alapján a dolgozatok összpontszáma $76n$. (1 pont)

5 dolgozat 100 pontos (n-5) tanuló legalább 60 pontot kapott a dolgozatára, ezért legalább $500+(n-5)\cdot 60$ pontot értek el (1 pont)

$76n \geq 500+(n-5)\cdot 60 \quad (n\in\mathbb{N})$ (1 pont)

Ebből $n \geq 12{,}5$ (1 pont)

Tehát a csoportnak legalább 13 tagja volt. (1 pont)

b) A diákok által elért összpontszám $14\cdot 76=1064$ (1 pont)

Ebből a maximális pontszámot elérők 500 pontot, a maradék 9 tanuló összesen 564 pontot ért el (1 pont)

Mivel $564-9\cdot 60=24>0$, kilencen nem lehettek 60 pontosak (1 pont)

Nyolc tanuló dolgozata lett 60 pontos, mert $564-8\cdot 60=84>60$, (kilencedik tanuló pontszáma ekkor 84), **ezért legfeljebb 8 tanulónak lehetett 60 pontos dolgozata**. (1 pont)

c) A 14 tanulónak összesen 1064 pontja volt. Ebből ismert az $5+6+1=12$ tanuló $5\cdot 100+6\cdot 60+76=936$ pontja. A fennmaradó 128 ponton két tanuló osztozott úgy, hogy ebből a 128 pontból mindketten kaptak legalább 61 pontot. (1 pont)

A lehetőségek: $61+67$, ez 2 lehetőség; $62+66$, ez 2 lehetőség (1 pont)

$63+65$, ez 2 lehetőség; $64+64$, ez 1 lehetőség (1 pont)

A két tanuló dolgozatának pontszáma $2+2+2+1=7$-féleképpen alakulhatott (1 pont)

Mivel a nem maximális pontszámot elérő 9 tanulóból a 60 pontot elérő 6 tanuló kiválasztására $\binom{9}{6}=84$ lehetőség van (1 pont)

és a maradék 3 tanulóból 3-féleképpen választható ki a 76 pontos (1 pont)

ezért az összes lehetőségek száma: $84\cdot 3\cdot 7=$ **1764** (1 pont)

Összesen: 16 pont

10) A Kovács családban 4 embernek kezdődik a keresztneve *B* betűvel. Négyen teniszeznek, és négyen kerékpároznak rendszeresen.
A család tagjairól tudjuk:
- **csak Bea és Barbara jár teniszezni és kerékpározni is;**
- **egyedül Balázs nem űzi egyik sportágat sem**
- **Zoli próbálja testvérét, Borit a teniszezőktől hozzájuk, a kerékpározókhoz csábítani- sikertelenül.**

a) A fentiek alapján legalább hány tagja van a Kovács családnak? (5 pont)

Egyik nap Barbara, Bea, Bori és Balázs barátaikkal vonaton utaztak, és hogy jobban teljen az idő, játszottak. A játék kezdetekor a társaság minden tagjának egy-egy olyan háromjegyű pozitív számra kellett gondolnia, amelynek minden számjegye 4-nél nagyobb és 7-nél kisebb. Amikor sorra megmondták a gondolt számot, kiderült, hogy nincs a mondott számok között azonos.

b) legfeljebb hány tagú lehetett a társaság? (3 pont)

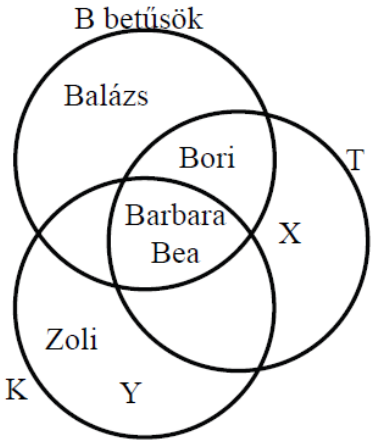
Egy másik alkalommal Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt.

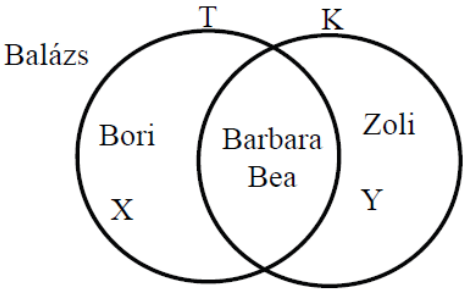
c) A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnevűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé? (5 pont)

d) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a c) pont szerinti ülésrend alakul ki, ha minden ülésrend egyenlően valószínű? (3 pont)

Megoldás:

a) Jelölje T a teniszezők, K a kerékpározók halmazát a Kovács családon belül.
Barbara, Balázs, Bea, Bori elhelyezése (1 pont)





Zoli elhelyezése (1 pont)
Új családtag elhelyezése T halmazon belül (1 pont)
Új családtag elhelyezése K halmazon belül (1 pont)
A Kovács családnak tehát legalább 7 tagja van (1 pont)

b) A háromjegyű szám minden számjegye 5 vagy 6 lehet csak (1 pont)
Minden számjegy kétféleképpen választható meg, tehát $2\cdot 2\cdot 2=8$ ilyen háromjegyű szám van (1 pont)
Mivel a társaság minden tagja különböző számot mondott, így legfeljebb 8 tagú lehet a társaság (1 pont)

c) A feladat szerint Barbara, Bea, Bori és Balázs vagy az 1,3,5 és 7-es számú székeken, vagy a 2,4,6 és 8-as számú székeken foglalnak helyet, és mindkét esetben a maradék 4 helyre a 4 barát ül. (1 pont)
Az első sorrendben az adott 4 helyre Barbara, Bea, Bori és Balázs $4!$-féleképpen helyezkedhet el (1 pont)
Barbara, Bea, Bori és Balázs bármelyik elhelyezkedése esetén a maradék 4 helyre a 4 barát szintén $4!$-féleképpen foglalhat helyet (1 pont)
Így az első esetben a 8 embernek $4!\cdot 4!=576$-féle ülésrendje alakulhat ki (1 pont)
A második esetben is ugyanennyi, ezért a 8 embernek összesen $2\cdot 4!\cdot 4!=\mathbf{1152}$ ülésrendje alakulhat ki (1 pont)

d) A 8 ember összes ülésrendjének száma $8!=40320$ (1 pont)
Mivel bármilyen ülésrend egyenlően valószínű, a kérdéses valószínűség
$P=\dfrac{2\cdot 4!\cdot 4!}{8!}=\dfrac{1152}{40320}=\dfrac{1}{35}\approx \mathbf{0,0286}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

11) Egy matematikus három német és négy magyar matematikust hívott vendégségbe szombat délutánra. Csütörtökön a házigazda és a 7 meghívott közül néhányan telefonon egyeztettek. A házigazda mindenkivel beszélt. Az azonos nemzetiségű vendégek egymást nem hívták, de a többiekkel mind beszéltek telefonon. Senki sem beszélt egy másik emberrel egynél többször, és minden beszélgetés pontosan két ember között zajlott.

a) Hány telefonbeszélgetést bonyolított le egymás között a 8 matematikus csütörtökön? (5 pont)

A telefonbeszélgetéskor minden meghívott vendég megmondta, hogy mekkora valószínűséggel megy el a szombati vendégségbe. A házigazda tudta, hogy a meghívottak egymástól függetlenül döntenek arról, hogy eljönnek-e. Kiszámolta, hogy 0,028 annak a valószínűsége, hogy mindannyian eljönnek.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább egy meghívott elmegy a vendégségbe? (Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (11 pont)

Megoldás:

a) Ha a 8 fős társaság minden tagja mindenkivel beszélt volna, akkor $\frac{8\cdot 7}{2}=28$ beszélgetést folytattak volna le csütörtökön (2 pont)

Azonos nemzetiségűek nem beszéltek egymással, tehát a három német összesen 3-mal kevesebb, (1 pont)

míg a négy magyar meghívott összesen $\frac{4\cdot 3}{2}=6$-tal kevesebb beszélgetést folytatott (1 pont)

Ezek alapján a csütörtöki beszélgetések száma $28-(3+6)=$ **19** (1 pont)

b) Legyen p az a valószínűség, amit mindannyian mondtak. Mivel egymástól függetlenül döntöttek, (1 pont)

annak valószínűsége, hogy mindenki elmegy $P^7=0,028$ (2 pont)

Innen $P=\sqrt[7]{0,028}\approx 0,600$ (2 pont)

Annak a valószínűsége, hogy valaki nem megy el $1-P$ (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy senki sem megy el: $(1-P)^7\approx 0,4^7\approx 0,0016$ (2 pont)

Tehát annak a valószínűsége, hogy legalább egy ember elmegy: $1-(1-P)^7$, (2 pont)

ami megközelítőleg **0,998** (1 pont)

Összesen: 16 pont

12) Kilenc számkártya fekszik az asztalon.

1	2	3	4	5	6	7	8	9

a) Rakja négy csoportba a kilenc számkártyát úgy, hogy egyikben se legyen együtt egy szám és egy nála kisebb osztója! Adjon meg egy lehetséges csoportosítást! (4 pont)

b) Berci körbe rakta a kilenc számkártyát egy nagy papírra, és ha két szám között legalább kettő volt a különbség, akkor a két kártyát összekötötte egy vonallal. Összesen hány vonalat rajzolt meg ily módon Berci? (4 pont)

Csaba az első hat kártya felhasználásával (1;2;3;4;5;6) két háromjegyű számot készített. Hívjunk egy ilyen számpárt duónak. (Például egy lehetséges duó: „415; 362.”)

A hat számból több ilyen duót lehet képezni Két duót egyenlőnek tekintünk, ha ugyanaz a két különböző háromjegyű szám alkotja. Például a „415 ; 362” és a „362 ; 414” duó egyenlők, de a „362 ; 145” már egy másik duó.

c) Hány különböző duót lehet a hat számkártyából elkészíteni? (5 pont)

Megoldás:

a) Az 1, a 2, a 4 és a 8 külön csoportba kell, hogy kerüljön (1 pont)
Az 1-es mellett nem lehet más szám (1 pont)
Egy lehetséges beosztás: **(1), (2;3), (4;5;6;7), (8;9)** (1 pont)
egy másik: **(1), (2;3;5), (4;6;7), (8;9)** (1 pont)

b) Berci minden számot összekötött minden számmal (1 pont)
kivéve a szomszédos számokat: 1-2, 2-3, 3-4,…8-9 (Egy 9 csúcsú teljes gráf éleiből hagyunk egy 8-at) (1 pont)

$\binom{9}{2} - 8 =$ (1 pont)

Ez éppen megegyezik egy 9 csúcsú teljes gráf éleire vonatkozó képletével $\left(\frac{n\cdot(n-1)}{2}\right)$. $\frac{9\cdot 8}{2} - 8 = \mathbf{28}$ vonalat húzott Berci (1 pont)

Szintén jó megközelítés, ha a feladatot egy kilencszögnek tekintjük, mely sokszög összes átlójára, plusz egy élére vagyunk kíváncsiak!

c) Az egyik hármast kiválaszthatjuk $\binom{6}{3}$-féle módon, ezzel a második hármas meghatározott (1 pont)
minden hármasból 3!-féle számot képezhetünk (1 pont)
Összesen $\binom{6}{3}\cdot 3!\cdot 3!\,(=720)$ duót képezhetünk (1 pont)
Így minden esetet kétszer számoltunk (1 pont)
tehát 360-féle duó van (1 pont)

Egy másik megközelítéssel tekinthetjük a két duót egy darab hatjegyű számnak is, melyet 6!-féleképpen tudunk sorba rendezni. Mivel ekkor minden duó kétszer szerepel, pusztán el kell osztanunk kettővel!

Összesen: 13 pont

13)

a) Peti levelet írt négy barátjának, Andrásnak, Bélának, Csabának és Daninak és mindenkinek egy-egy fényképet is akart küldeni a nyaralásról. A négy fénykép különböző volt, és Peti mindegyikük hátlapjára ráírta, kinek szánja. A fényképeket végül figyelmetlenül rakta a borítékba, bár mindenki kapott a levelében egy fényképet is.

a1) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy csak Andris kapja azt a fényképet, amelyen a saját neve szerepel? (3 pont)

a2) Melyik esemény bekövetkezésének nagyobb a valószínűsége:

- senki sem kapja azt a fényképet, amelyet Peti neki szánt

vagy

- pontosan egyikük kap olyan fényképet, amelyen a saját neve szerepel? (8 pont)

b) Egy szabályos érme egyik oldalán 6-os, a másikon pedig 4-es számjegy látható. Az érmét négyszer egymás után feldobjuk, és a dobott számokat összeadjuk. Milyen értékeket kaphatunk összeg gyanánt? Az egyes összegek dobásának mekkora a valószínűsége? (5 pont)

Megoldás:

a) Jelöljük a fényképekre írt neveket *A,B,C,D*-vel, a neveknek megfelelő borítékon lévő címzéseket *a,b,c,d*-vel.

a1) Andris kapott csak megfelelő fényképet. Ez csakis úgy lehetséges, ha az *abcd* sorrendben elhelyezett borítékokba az *ACDB* vagy *ADBC* sorrendben kerültek a képek. (2 pont)

Tehát a kívánt elhelyezés **kétféleképpen** valósítható meg. (1 pont)

a2) Jelölte *S* azt az eseményt, hogy senki sem kapott nevével ellátott fényképet. Az *S* esemény pontosan akkor következik be, ha az *abcd* sorrendben elhelyezett borítékokba *BADC, BCDA, BDAC, CADB, CDAB, CDBA, DABC, DCAB, DCBA* sorrendben kerülhettek fényképek. Ez 9 kedvező eset (3 pont)

Jelölje *E* azt az eseményt, hogy pontosan egyikük kapott nevével ellátott fényképet. AZ *E* esemény pontosan akkor következik be, ha az *abcd* sorrendben elhelyezett borítékokba *ACDB, ADBC, BCAD, BDCA, CABD, CBDA, DACB, DBAC* sorrendben kerülhettek a fényképek. Ez 8 kedvező eset (3 pont)

A fényképeket Peti 24-féleképpen helyezhette volna el a borítékokba, ezen elhelyezéseknek azonos a valószínűsége. (1 pont)

$$\frac{9}{24} = P(S) > P(E) = \frac{8}{24}$$ (1 pont)

b) A négy dobáshoz tartozó összegek lehetnek:

$6+6+6+6=\mathbf{24}$ (B_0)

$6+6+6+4=\mathbf{22}$ (B_1)

$6+6+4+4=\mathbf{20}$ (B_2) (1 pont)

$6+4+4+4=\mathbf{18}$ (B_3)

$4+4+4+4=\mathbf{16}$ (B_4)

Bármelyik dobásnál a 6-os és 4-es is $\frac{1}{2}$ valószínűséggel következik be (1 pont)

A B_k események valószínűségét a $P=\frac{1}{2}; n=4$ paraméterű binomiális eloszlás írja le (1 pont)

Ezért:

$$\boldsymbol{P(B_0)=\binom{4}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}}$$

$$\boldsymbol{P(B_1)=\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{16}}$$

$$\boldsymbol{P(B_2)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6}{16}}$$ (2 pont)

$$\boldsymbol{P(B_3)=\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{16}}$$

$$\boldsymbol{P(B_4)=\binom{4}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}}$$

Összesen: 16 pont

14)

a) Hány olyan tízjegyű pozitív szám van, amelynek minden számjegye a $\{0;8\}$ halmaz eleme? (3 pont)

b) Írja fel 45-nek azt a legkisebb pozitív többszörösét, amely csak a 0 és 8-as számjegyeket tartalmazza! (7 pont)

Megoldás:

a) A legnagyobb helyi értékű szám csak a 8-as lehet (1 pont)

A többi 9 helyi érték mindegyikénél két lehetőségünk van (1 pont)

Így $2^9=\mathbf{512}$ ilyen tízjegyű szám képezhető (1 pont)

b) Egy szám akkor és csak akkor osztható 45-tel, ha 5-tel és 9-cel is osztható (2 pont)
Mivel a keresett szám 5-tel osztható, ezért csak 0-ra végződhet (1 pont)
Egy (pozitív egész) szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha a számjegyek összege osztható 9-cel (1 pont)
Csak 0 és 8 számjegyeket tartalmazó egész szám esetén ehhez legalább 9 darab 8-as számjegy kell (1 pont)
A legkisebb (pozitív) többszöröshöz pontosan 9 darab 8-as számjegyre van szükség (1 pont)
tehát a keresett szám **888888880** (1 pont)

Összesen: 10 pont

15)

a) Két gyerek mindegyike 240 forintért vett kaparós sorsjegyet. Fémpénzzel fizettek (5; 10; 20; 50; 100 és 200 forintos érmékkel), és pontosan kiszámolták a fizetendő összeget. Hányféleképpen fizethetett Miki, ha ő 4 darab érmével fizetett, és hányféleképpen fizethetett Karcsi, ha ő 5 darab érmével fizetett. (A pénzérmék átadási sorrendjét nem vesszük figyelembe) (4 pont)

A „bergengóc" lottóban kétszer húznak egy játéknapon. Bandi egy szelvénnyel játszik, tehát az adott játéknapon mindkét húzásnál nyerhet ugyanazzal a szelvénnyel.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak legalább egy telitalálata lesz, ha P annak a valószínűsége ($0 < P < 1$), hogy egy szelvényen, egy húzás esetén telitalálata lesz? (4 pont)

Megváltoztatták a játékszabályokat: minden játéknapon csak egyszer húznak (más játékszabály nem változott). Bandi most két (nem feltétlenül különbözően kitöltött) szelvénnyel játszik.

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak telitalálata legyen valamelyik szelvényen? (4 pont)

d) A telitalálat szempontjából a b) és c)-ben leírtak közül melyik éri meg Bandi számára? (4 pont)

Megoldás:

a) Miki **kétféleképpen** fizethetett:
$240 = 200 + 20 + 10 + 10 = 100 + 100 + 20 + 20$ (2 pont)
Karcsi **négyféleképpen** fizethetett:
$240 = 200 + 20 + 10 + 5 + 5 = 200 + 10 + 10 + 10 + 10$ (1 pont)
$240 = 100 + 100 + 20 + 10 + 10 = 100 + 50 + 50 + 20 + 20$ (1 pont)

b) Bandinak telitalálata háromféle esetben lehet:
(1)az első húzásnál telitalálata van, a másodiknál is telitalálta van, ennek a valószínűsége $P \cdot P = P^2$ (1 pont)
(2)az első húzásnál telitalálata van, nincs másodiknál nincs telitalálata, ennek valószínűsége $P \cdot (1-P) = P - P^2$ (1 pont)
(3)az első húzásnál nincs telitalálata, a másodiknál telitalálata van, ennek valószínűsége: $(1-P) \cdot P = P - P^2$ (1 pont)
Annak a valószínűsége tehát, hogy egy adott játéknapon Bandinak telitalálata legyen ez a három valószínűség összege: $\boldsymbol{2P - P^2}$ (ez nem negatív, hiszen $0 < P < 1$) (1 pont)

c) Két esetet kell vizsgálni annak alapján, hogy Bandi a két szelvényét azonosan vagy különbözően töltötte-e ki (1 pont)
(1)Ha Bandi két egyforma szelvényt töltött ki, akkor a telitalálat esélye $\boldsymbol{P}$ (1 pont)
(2)Ha Bandi a két szelvényt különbözően tölt ki, akkor a telitalálat esélye $\boldsymbol{2P}$ (2 pont)

d) Ha Bandi két egyforma szelvényt tölt ki, akkor a kérdés az, hogy $2P - P^2$ vagy P nagyobb (1 pont)
Mivel $0 < P < 1$, ezért $2P - P^2 - P = P(1-P) > 0$, tehát az **első játékszabály** kedvezőbb (1 pont)
Ha Bandi két különböző szelvényt tölt ki, akkor a kérdés az, hogy $2P - P^2$ vagy $2P$ nagyobb (1 pont)
Mivel $P^2 > 0$ ezért $2P - P^2 < 2P$ tehát **a második játékszabály** a kedvezőbb (1 pont)

Összesen: 16 pont

16) Hatjegyű pozitív egész számokat képezünk úgy, hogy a képzett számban szereplő számjegy annyiszor fordul elő, amekkora a számjegy. Hány ilyen hatjegyű számjegy képezhető? (11 pont)

Megoldás:

Egy a feltételeknek megfelelő példa (1 pont)
A feltételeknek a következő esetek felelnek meg:
1. eset: 6 darab 6-os jegy: 1 darab hatjegyű szám (1 pont)
2. eset 5 darab 5-ös, 1 darab 1-es (1 pont)
6 ilyen szám van (1 pont)
3. eset 4 darab 4-es, 2 darab 2-es jegy (1 pont)
Ezekből a számjegyekből $\binom{6}{4}$ (1 pont)
azaz 15 szám képezhető (1 pont)
4. eset 3 darab 3-as, 2 darab 2-es, 1 darab 1-es jegy (1 pont)
Ebben az esetben $\frac{6!}{3!\cdot 2!} =$ (1 pont)
$= 60$ megfelelő szám van (1 pont)
(Más eset nincs,) tehát összesen **82**, a feltételeknek megfelelő hatjegyű szám képezhető (1 pont)
Összesen: 11 pont

17) Öt egymástól távol eső tanya között kábeleket feszítenek ki, bármely két tanya között legfeljebb egyet.

a) Elvileg összesen hány különböző hálózatot lehetséges létrehozni a tanyák között? (A hálózatban a kifeszített kábelek száma 0-tól 10-ig bármennyi lehet. Két hálózatot akkor tekintünk különbözőnek, ha van olyan összeköttetés, amely az egyikben létezik, a másikban nem.) (4 pont)

b) Takarékossági okokból csak 4 kábelt feszítenek ki úgy, hogy a hálózat azért összefüggőben legyen. (Összefüggőnek tekintünk egy hálózatot, ha a kábelek mentén bármely tanyáról bármely másikba el lehet jutni, esetleg más tanyák közbeiktatásával.) Hány különböző módon tehetik ezt meg, ha az egyes tanyákat megkülönböztetjük egymástól? (12 pont)

Megoldás:

a) Az öt tanyát tekintsük egy gráf csúcsainak. Két csúcsot éllel kötünk össze, ha van az általuk reprezentált tanyák között kábel-összeköttetés (1 pont)
Egy ötpontú egyszerű gráfban legfeljebb 10 él húzható, ezek mindegyike vagy szerepel a gráfban, vagy nem (1 pont)
Így minden élhez két értéket rendelhetünk (1 pont)
A különböző hálózatok száma ezért $2^{10} = \mathbf{1024}$ (1 pont)

b) A csúcsokat nem megkülönböztetve három eset lehetséges (1 pont)
I. Egy csúcsot összekötünk négy másikkal (1 pont)
II. A csúcsokat egymás után sorba kötjük (1 pont)
III. Egy csúcsot három másikkal, ez utóbbiak közül pedig egyet az ötödikkel kötünk össze (1 pont)
Ha a csúcsokat megkülönböztetjük egymástól, akkor az I. esetben azt 5-féleképpen tehetjük meg. (1 pont)
A II. esetben $5! = 120$-féleképpen rakhatjuk az 5 tanyát sorba (1 pont)

de így minden lehetőséget kétszer számolunk, azaz csak 60 különböző összeköttetés lehetséges (1 pont)
A III. esetben a 3 fokszámú csúcsot az 5, a 2 fokszámú csúcsot 4-féleképpen, az ehhez kapcsolódó 1 fokszámú csúcsot 3-féleképpen választhatjuk. (2 pont)
így a lehetőségek száma $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ (2 pont)
Ez összesen $5 + 60 + 60 = \mathbf{125}$ különböző hálózatot jelent (1 pont)

Összesen: 16 pont

18) Egy középiskolai évfolyam kézilabda házibajnokságán az *A*, *B*, *C*, *D*, *E* és *F* osztály egy-egy csapattal vett részt.

a) Hányféle sorrendben végezhettek az osztályok a bajnokságon, ha tudjuk, hogy holtverseny nem volt, és valamilyen sorrendben az *A* és a *B* osztály végzett az első két helyen, a *D* osztály pedig nem lett utolsó? (4 pont)

b) Hányféle sorrendben végezhettek az osztályok a bajnokságon, ha tudjuk, hogy holtverseny nem volt, és az *E* osztály megelőzte az *F* osztályt? A bajnokságon mindenki mindenkivel egyszer játszott, a győzelemért 2, a döntetlenért 1, a vereségért 0 pont járt. Végül az osztályok sorrendje *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* lett, az elért pontszámaik pedig rendre 8, 7, 6, 5, 4 és 0. Tudjuk, hogy a mérkőzéseknek éppen a harmada végződött döntetlenre, és a második helyezett *B* osztály legyőzte a bajnok *A* osztályt. (4 pont)

c) Mutassa meg, hogy a *B* és a *D* osztály közötti mérkőzés döntetlenre végződött! (8 pont)

Megoldás:

a) Az *A* ,*B* sorrendje az első két helyen kétféleképp alakulhatott (1 pont)
A *D* osztály a 3.,4. és 5. helyeken végezhetett, ez 3 lehetőség (1 pont)
A *C,E,F* osztályok a fennmaradó három helyen 3!-féle sorrendben végezhettek (1 pont)
A különböző lehetőségek száma tehát $2 \cdot 3 \cdot 3! = \mathbf{36}$ (1 pont)

b) Az összes eset felében az *E* osztály megelőzi *F*-et, a másik felében pedig *F* előzi meg *E*-t. (2 pont)
A megfelelő esetek száma tehát $\frac{6!}{2} = \mathbf{360}$ (2 pont)

c) Az *A* csapat a *B* ellen veszített, a többi mértkőzését megnyerte (nincs döntetlenje) (1 pont)
Az *F*-nek nincs egyetlen pontja, így ők nem érhettek el döntetlent (1 pont)
A,B,C,D,E csapatok egymás ellen összesen 6 mérkőzést játszottak (1 pont)
ebből 5 mérkőzés végződött döntetlenre (1 pont)
A *B* csapat a *C,D,E* elleni 3 mérkőzésből 3 pontot szerzett, tehát vagy 1 győzelme 1 döntetlenje és 1 veresége, vagy 2 döntetlenje van (2 pont)
Ha 1 győzelme és 1 veresége lenne *B*-nek, akkor a *B,C,D,E* csapatok egymás elleni 6 mérkőzéséből legfeljebb 4 végződhetett volna döntetlennel (1 pont)
Ez nem lehetséges, tehát ***B* minden mérkőzése**, így a *D* elleni is **döntetlennel zárult** (1 pont)

Összesen: 16 pont

19) Aladár, Béla, Csaba, Dani és Ernő szombat délutánonként együtt teniszeznek. Mikor megérkeznek a teniszpályára, mindegyik fiú kezet fog a többiekkel.

a) Hány kézfogás történik egy-egy ilyen közös teniszezés előtt? (3 pont)

Legutóbb Dani és Ernő együtt érkeztek a pályára, a többiek különböző időpontokban érkeztek.

b) Hány különböző sorrendben érkezhettek ezen alkalommal? (3 pont)

c) A fiúk mindig páros mérkőzést játszanak, kettő-kettő ellen. (Egy páron belül a játékosok sorrendjét nem vesszük figyelembe, és a pálya két térfelét nem különböztetjük meg.)
Hány különböző mérkőzés lehetséges? (6 pont)

Megoldás:

a) A kézfogások száma $\frac{5\cdot 4}{2} = \mathbf{10}$ (3 pont)

b) Mivel Dani és Ernő együtt érkezett, ezért négy különböző időpontban érkezhettek. A lehetséges érkezési sorrendek száma $4! = \mathbf{24}$ (3 pont)

c) Minden mérkőzés során egy fiú pihen, ezért a pályán lévő négy játékosra 5 lehetőség van. (1 pont)

A pályán lévő négy fiúból kettő kiválasztására $\binom{4}{2} = 6$ lehetőség van (2 pont)

Viszont ekkor minden mérkőzést kétszer számoltunk, így a rögzített pihenő fiú esetén három különböző teniszparti lehetséges (2 pont)

Így a különböző lehetséges páros mérkőzések száma $5\cdot 3 = \mathbf{15}$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

20) A következő táblázat egy 30 fős kilencedik osztály első félév végi matematikaosztályzatainak megoszlását mutatja.

Érdemjegy	5	4	3	2	1
Tanulók száma	4	7	9	8	2

a) Ábrázolják az eredmények eloszlását oszlopdiagramon! (3 pont)

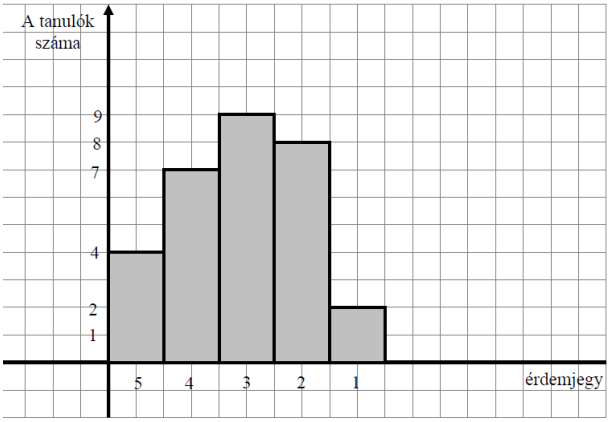
b) Mennyi a jegyek átlaga? (2 pont)

c) Véletlenszerűen kiválasztjuk az osztály egy tanulóját. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a tanuló legalább 3-ast kapott félév végén matematikából? (3 pont)

d) Két tanulót véletlenszerűen kiválasztva mennyi a valószínűsége annak, hogy érdemjegyeik összege osztható 3-mal? (8 pont)

Megoldás:

a)



(3 pont)

b) A jegyek átlaga: $\frac{4\cdot 5+7\cdot 4+9\cdot 3+8\cdot 2+2\cdot 1}{30}=\mathbf{3,1}$ (2 pont)

c) Legalább 3-ast $4+7+9=20$ tanuló kapott, így a kérdéses valószínűség $P=\frac{20}{30}=\mathbf{\frac{2}{3}}$ (3 pont)

d) Az osztályból 2 tanuló kiválasztására $\binom{30}{2}=435$ lehetőségünk van. (2 pont)

A kiválasztott tanulók osztályzatainak összege 3-mal osztható, ha az osztályzatok: $(1;2),(1;5),(2;4),(3;3),(4;5)$ (2 pont)

A kedvező esetek száma: $2\cdot 8+2\cdot 4+8\cdot 7+\binom{9}{2}+7\cdot 4=144$ (2 pont)

A keresett valószínűség $P=\frac{144}{435}=\frac{48}{145}\approx\mathbf{0,33}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

21) Az 52941 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben.

a) Az 52941 számmal együtt hány ötjegyű számot kapunk? (2 pont)

b) Ezen számok közül hány osztható 12-vel? (6 pont)

c) Bizonyítsa be, hogy e számok egyik sem négyzetszám! (4 pont)

Megoldás:

a) $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=\mathbf{120}$ darab ilyen ötjegyű számot képezhetünk (2 pont)

b) Egy egész szám pontosan akkor osztható 12-vel, ha osztható 3-mal és 4-gyel is (1 pont)

Az ötjegyű számok mindegyike osztható 3-mal, mert a számjegyek összege mindegyiknél 21, ami osztható 3-mal (1 pont)

4-gyel ezen ötjegyű számok közül azok oszthatók, amelyek utolsó két számjegye a következő: 12; 52; 92; 24 (2 pont)

Az ötjegyű számban az első három számjegyből álló szám hatféle lehet, ha az utolsó kettőt rögzítettük (1 pont)

így az ötjegyű számok között $4\cdot 6=\mathbf{24}$ db 12-vel osztható szám van (1 pont)

c) Az ötjegyű számok mindegyében a számjegyek összege 21 (1 pont)
Tehát a számok oszthatók 3-mal (1 pont)
Mivel 3-mal oszthatóak, ezért csak abban az esetben lehetne köztük négyzetszám, ha az 3 valamely páros kitevőjű hatványa lenne. Ehhez feltétlenül szükséges az is, hogy 9-cel osztható legyen, 9-cel viszont nem osztható egyik sem, **így egyik szám sem lehet négyzetszám.** (2 pont)

Összesen: 12 pont

22) A dominókészleten a dominókövek mindegyikén az egy-egy „térfélen" elhelyezett pöttyök száma 0-tól egy megengedett maximális értékig bármilyen természetes szám lehet. A dominókövek két felén e számok minden lehetséges pírosítása szerepel. Nincs két egyforma kő a készletben.

a) Igazolja, hogy ha a pöttyök maximális száma 7, akkor a dominókészlet 36 kőből áll. (5 pont)

b) A 36 kőből álló dominókészletből véletlenszerűen kiválasztottunk egy követ. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott kő két „térfelén" lévő pöttyök számának összege 8? (3 pont)

c) A 36 kőből álló dominókészletből ezúttal két követ választottunk ki véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két dominókő a játék szabályai szerint egymáshoz illeszthető? (Két dominókő összeilleszthető, ha van olyan „térfelük", amelyen a pöttyök száma ugyanannyi.) (8 pont)

Megoldás:

a) Nyolc olyan dominó van, amelynek mind a két térfelén ugyanannyi a pöttyök száma. (2 pont)
Az olyan dominók száma, amelyeknek a két térfelén különböző számú pötty áll, annyi van, ahányféleképpen kiválasztható két szám a 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 számok közül, a sorrendet nem véve figyelembe, tehát $\frac{8\cdot 7}{2}$, azaz 28-féleképpen (2 pont)
tehát összesen $8+28=36$ kőből álló a dominókészlet (1 pont)

b) Egy kő két „térfelén" levő pöttyök számának összege 8 a következőképpen lehet: $(1;7),(2;6),(3;5),(4;4)$ (1 pont)
tehát négyféleképpen (1 pont)
A keresett valószínűség $P=\frac{4}{36}=\mathbf{\frac{1}{9}}$ (1 pont)

c) 8 olyan dominó van, amelynek egyik térfelén nincs tipp. Ezek közül 2 db $\binom{8}{2}$-féleképpen választható ki (2 pont)

A 8 olyan dominó közül, amelyiknek egyik térfelén 1 db pötty van $\binom{8}{2}$-féleképpen választható ki 2 db. Ezt a gondolatmenetet folytatva $\binom{8}{2}$-féleképpen választható ki 2 db azon 8 dominó közül, amelyiknek az egyik térfelén 7 pötty van (2 pont)

A kedvező esetek száma $8\cdot\binom{8}{2}$ (1 pont)

Az összes esetek száma $\binom{36}{2}$ (1 pont)

A keresett valószínűség $\dfrac{8\cdot\binom{8}{2}}{\binom{36}{2}}=\mathbf{\dfrac{16}{45}}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

23) Adott két párhuzamos egyenes, *e* és *f*. Kijelölünk *e*-n 5, *f*-en pedig 4 különböző pontot.

a) Hány (*e*-től és *f*-től is különböző) egyenest határoz meg ez a 9 pont? Hány olyan háromszög van, amelynek mindhárom csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki? Hány olyan négyszög van, amelynek mindegyik csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki? (11 pont)

b) A 9 pont mindegyikét véletlenszerűen kékre vagy pirosra színezzük. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az *e* egyenes 5 pontja is azonos színű és az *f* egyenes 4 pontja is azonos színű lesz? (5 pont)

Megoldás:

a) Az e egyenesen kijelölt 5 pont bármelyikét az f egyenesen kijelölt 4 pont bármelyikével összekötve megfelelő egyenest kapunk (1 pont)
Így a megadott feltételnek megfelelően az egyenesek száma $5 \cdot 4 = 20$ (1 pont)
Az adott feltételnek megfelelő háromszög két csúcsa az egyik, harmadik csúcsa a másik egyenesen van. (1 pont)
Ha az e egyenesen a háromszögnek két csúcsa van, akkor az a két csúcs $\binom{5}{2}$ – féleképpen választható ki (1 pont)
Így az ilyen háromszögek száma 30 (1 pont)
A megfelelő háromszögek száma tehát 70 (1 pont)
Az adott feltételnek megfelelő négyszögek két csúcsa az e, két csúcsa az f egyenesen van. (1 pont)
Az e egyenesen két pontot $\binom{5}{2}$, az f egyenesen két pontot $\binom{4}{2}$ különböző módon lehet kiválasztani (2 pont)
Így a megfelelő négyszögek száma $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} = \mathbf{60}$ (2 pont)

b) Az egyenlően valószínű színezések száma: 2^9 (2 pont)
Az e egyenesen és az f egyenesen is kétféleképpen lehet egyforma színű az összes megjelölt pont (1 pont)
Tehát 4 kedvező eset van (1 pont)
A kérdezett valószínűség így: $\frac{4}{2^9} = \mathbf{0,0078}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

24)

a) A következő két állításról döntse el, hogy igaz vagy hamis. Válaszait indokolja! (6 pont)
- **Van olyan ötpontú egyszerű gráf, amelynek 11 éle van.**
- **Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan van negyedfokú csúcsa is.**

b) Az *A*, *B*, *C*, *D* és *E* pontok egy ötpontú teljes gráf csúcsai. A gráf élei közül véletlenszerűen beszínezünk hatot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az *A*, *B*, *C*, *D*, *E* pontokból és a színezett élekből álló gráf nem lesz összefüggő? (10 pont)

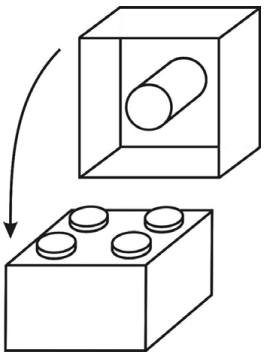
Megoldás:

a) Az első állítás **hamis** (1 pont)
Egy ötpontú egyszerű gráfban **legfeljebb 10 él húzható** (2 pont)
A második állítás **igaz** (1 pont)
Ha a gráf minden csúcsa harmadfokú volna, akkor a gráfban a fokszámok összege **páratlan lenne, ami lehetetlen** (2 pont)

b) Ha úgy színeztünk be 6 élt, hogy kaptunk egy négypontú teljes részgráfot és egy izolált pontot, akkor ez a gráf nem összefüggő, tehát jó. (2 pont)
Másképp nem kaphattunk nem összefüggő gráfot, hiszen ha egy két- és egy hárompontú komponense lenne, akkor legfeljebb 4 él lehetne. (2 pont)
Az első típushoz ötféleképpen választhatjuk ki az izolált pontot, és ez már meghatározza a 6 beszínezhető élt, tehát az ilyen gráfok száma 5. (2 pont)
Az ötpontú teljes gráfnak 10 éle van (1 pont)
Ezek közül $\binom{10}{6}$ féleképpen választhatjuk ki a 6 kiszínezendő élt. (2 pont)
A keresett valószínűség tehát $P = \frac{5}{210} \approx \mathbf{0,024}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

25) Egy építőkészletben a rajzon látható négyzetes hasáb alakú elem is megtalálható. Két ilyen építőelem illeszkedését az egyik elem tetején kiemelkedő négy egyforma kis henger és a másik elem alján lévő nagyobb henger szoros, érintkező kapcsolata biztosítja. (Ez azt jelenti, hogy a hengerek tengelyére merőleges síkmetszetben a nagyobb kört érinti a négy kisebb kör, amelyek középpontjai egy négyzetet határoznak meg.) Tudjuk, hogy a kis hengerek sugara 3 mm, az egymás melletti kis hengerek tengelyének távolsága pedig 12 mm.



a) Mekkora a nagyobb henger átmérője? Válaszát milliméterben, két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

A készletben az építőelemek kék vagy piros színűek. Péter 8 ilyen elemet egymásra rak úgy, hogy több piros színű van köztük, mint kék. Lehet, hogy csak az egyik színt használja, de lehet, hogy mindkettőt.

b) Hányféle különböző szín összeállítású 8 emeletes tornyot tud építeni? (4 pont)

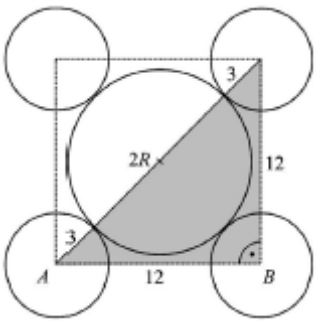
A gyárban (ahol ezeket az építőelemeket készítik) nagyon ügyelnek a pontosságra.

Egymillió építőelemből átlagosan csupán 20 selejtes. András olyan készletet szeretne vásárolni, melyre igaz a következő állítás: *„0,01-nál kisebb annak a valószínűsége, hogy a dobozban található építőelemek között van selejtes.”*

c) Legfeljebb hány darabos készletet vásárolhat András? (7 pont)

Megoldás:

a) Jó ábra rajzolása (1 pont)
A kis kör kp-ja egy 12 mm oldalú négyzetet alkot (1 pont)
Ennek az átlója $12\sqrt{2}$ (1 pont)
Mivel ez éppen $2R+6$ (1 pont)
$d = 2R = \left(12\sqrt{2} - 6\right) \approx \mathbf{10,97}$ (1 pont)



b) A piros elemek száma 5, 6, 7 vagy 8 lehet (1 pont)

Ha a piros elemek száma k, akkor az építhető tornyok száma $\binom{8}{k}$ (1 pont)

Így az ilyen tornyok száma összesen:

$\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}=(56+28+8+1)=$ **93** (2 pont)

c) Annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott kocka nem selejtes

$\frac{1000000-20}{1000000}=0,99998$ (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy egy n kockát tartalmazó dobozban egyik kocka sem selejtes $0,99998^n$ (1 pont)

Ha annak a valószínűsége, hogy a dobozban van selejtes kisebb 0,01-nál, akkor annak a valószínűsége, hogy a dobozban nincs selejtes, legalább 0,99 (1 pont)

Megoldandó a $0,99998^n \geq 0,99 \quad (n \in \mathbb{N})$ (1 pont)

A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt

$n \cdot \lg 0,99998 \geq \lg 0,99$ (1 pont)

Ebből $n \leq \frac{\lg 0,99}{\lg 0,99998} \approx 502,5$ (1 pont)

Tehát András legfeljebb **502 darabos** készletet vehetett (1 pont)

Összesen: 16 pont

26) Egy dobozban 17 darab egyforma sugarú golyó van. A golyók közül 8 darab sárga és 9 darab zöld.

a) Visszatevés nélkül kihúzunk a dobozból 3 golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott 3 golyó egyszínű? (4 pont)

b) Ha úgy húzunk ki a dobozból 5 golyót, hogy a kivett golyót minden egyes húzás után visszatesszük, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy 3 alkalommal sárga golyót, 2 alkalommal pedig zöld golyót húzunk? (4 pont)

c) A golyók meg vannak számozva 1-től 17-ig. Mennyi annak a valószínűsége, hogy visszatevés nélkül 3 golyót kihúzva a golyókon található számok összege osztható 3-mal? (8 pont)

Válaszait három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

Megoldás:

a) Az összes kihúzási lehetőségek száma $\binom{17}{3}$ (1 pont)

Három sárga golyót $\binom{8}{3}$ féleképpen, három zöldet pedig $\binom{9}{3}$ féleképpen húzhatunk ki (1 pont)

A kedvező esetek száma így $\binom{8}{3}+\binom{9}{3}$ (1 pont)

A keresett valószínűség $\dfrac{\binom{8}{3}+\binom{9}{3}}{\binom{17}{3}}=\dfrac{7}{34}\approx \mathbf{0,206}$ (1 pont)

b) Sárga golyó húzásának valószínűsége $\dfrac{8}{17}$

Zöld golyó húzásának valószínűsége $\dfrac{9}{17}$ (1 pont)

A kérdéses valószínűség binomiális eloszlást követ (1 pont)

Ezért $P=\binom{5}{3}\cdot\left(\dfrac{8}{17}\right)^3\cdot\left(\dfrac{9}{17}\right)^2\approx \mathbf{0,292}$ (2 pont)

c) A kihúzott három szám összege pontosan akkor osztható 3-mal, ha vagy mindhárom ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva, vagy 3-as maradékaik páronként különbözik (2 pont)

0 maradékot a 3; 6; 9; 12; 15 számok adnak, közülük három szám húzása a következő képen lehetséges: $\binom{5}{3}$ (1 pont)

1 maradékot adnak az 1; 4; 7; 10; 13; 16 számok, itt $\binom{6}{3}$ féleképpen lehetséges, mint a 2 maradékot adó 2; 5; 8; 11; 14; 17 esetében (2 pont)

A páronként különböző maradékot adó húzások száma $5\cdot 6^2$ (1 pont)

A kedvező esetek száma $\binom{5}{3}+2\cdot\binom{6}{3}+5\cdot 6^2$ (1 pont)

Mivel az összes esetek száma $\binom{17}{3}$, ezért a keresett valószínűség:

$P=\dfrac{230}{680}\approx \mathbf{0,338}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

27) Egy körvonalon felvettünk öt pontot, és behúztuk az általuk meghatározott 10 húrt. Jelölje a pontokat pozitív körüljárási irányban rendre *A*, *B*, *C*, *D* és *E*.

a) Véletlenszerűen kiválasztunk 4 húrt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek a húrok egy konvex négyszöget alkotnak? (4 pont)

b) Hányféleképpen juthatunk el a húrok mentén *A*-ból *C*-be, ha a *B*, *D*, és *E* pontok mindegyikén legfeljebb egyszer haladhatunk át? (Az *A* pontot csak az út kezdetén, a *C* pontot csak az út végén érinthetjük.) (4 pont)

c) A 10 húr mindegyikét kiszínezzük egy-egy színnel, pirosra vagy sárgára, vagy zöldre. Hány olyan színezés van, amelyben mindhárom szín előfordul? (8 pont)

Megoldás:

a) Akkor kapunk négy megfelelő húrt, ha a végpontjaik között az ötből pontosan négy különböző szerepel. A körüljárási iránynak megfelelően minden kiválasztott pontnégyeshez pontosan egy konvex négyszög tartozik. (1 pont)
Öt pontból négyet ötféleképpen lehet kiválasztani, ezért a kedvező esetek száma 5. (1 pont)
Az összes eset száma: $\binom{10}{4}$. (1 pont)
A keresett valószínűség: $\boldsymbol{P = \dfrac{5}{\binom{10}{4}} = \dfrac{1}{42}(\approx 0{,}024)}$. (1 pont)

b) Ha mindhárom pontot érintjük, akkor $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ lehetőség van. (1 pont)
Ha csak két ponton megyünk át, akkor a lehetőségek száma $3 \cdot 2 = 6$. (1 pont)
Ha csak egy ponton megyünk át, akkor 3 lehetőség van, de közvetlenül is átmehetünk *A*-ból *C*-be, ez még 1 eset. (1 pont)
Az összes lehetséges útvonalak száma tehát: $6+6+3+1 = \mathbf{16}$. (1 pont)

c) Az összes lehetséges esetből kivonjuk azokat, amikor csak 2 vagy 1 szín szerepel. (1 pont)
Mindegyik húrt háromféle színre festhetjük, ezért az összes lehetőség száma $3^{10}\,(=59049)$. (1 pont)
Ha két színt használunk a háromból, akkor az adott két szín segítségével mindegyik húrt kétféleképpen színezhetjük ki, a tíz húrt pedig 2^{10}-féleképpen. (1 pont)
De ebbe beleszámoltuk azt az esetet is, amikor csak egyetlen színt használunk, ezért a fenti értéket 2-vel csökkenteni kell: $2^{10}-2$. (1 pont)
A megadott 3 színből kettőt 3-féleképpen választhatunk ki, így a pontosan két színt használó színezések száma $3 \cdot \left(2^{10}-2\right)\,(=3066)$. (1 pont)
Pontosan egy színnel 3-féleképpen színezhetjük ki a húrokat. (1 pont)
Tehát a lehetséges színezések száma: $3^{10} - \left[3 \cdot \left(2^{10}-2\right)\right] - 3 = \mathbf{55980}$ (2 pont)
(Szintén jó megoldás, hogyha összeszámoljuk az eseteket aszerint, hogy az egyes színekkel hány húrt színezünk ki.)

Összesen: 16 pont

28)

a) Egy téglalapot 720 darab egybevágó kis téglalapra daraboltunk szét. A kis téglalapok oldalai közül az egyik 1 cm-rel hosszabb, mint a másik. Hány cm hosszúak egy-egy kis téglalap oldalai, ha a nagy téglalap területe 2025 cm²? (7 pont)

b) Az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számjegyekből összesen 720 olyan hatjegyű szám képezhető, melynek számjegyei között nincsenek egyenlők. Ezek között hány 12-vel osztható van? (5 pont)

Megoldás:

a) Egy kis téglalap oldalainak hossza x cm, illetve $x+1$ cm, területe $x\cdot(x+1)$ cm^2. (1 pont)

A feladat szövegéből kiindulva: $720\cdot x\cdot(x+1)=2025$. (1 pont)

A zárójelet felbontva, majd 45-tel leegyszerűsítve:

$16x^2+16x-45=0$ (1 pont)

A két gyöke x-nek: $x_1=1{,}25;\ x_2=-2{,}25$. (1 pont)

A negatív gyök nem lehet megoldása a feladatnak! (1 pont)

A téglalap rövidebb oldala tehát **1,25 cm**, hosszabb oldala pedig **2,25 cm** hosszú. (1 pont)

Ellenőrzés: $720\cdot1{,}25\cdot2{,}25=2025$ igaz, tehát a válasz helyes. (1 pont)

b) 12-vel azok a természetes számok oszthatók, amelyek 3-mal és 4-gyel is oszthatók. (1 pont)

Mivel $1+2+3+4+5+6=21$, ezért mind a 720 különböző hatjegyű szám osztható 3-mal. (1 pont)

Azok a hatjegyű számok oszthatók 4-gyel, amelyeknél az utolsó két számjegy 12; 16; 24; 32; 36; 52; 56 vagy 64. (1 pont)

Mindegyik végződés 4!, azaz 24 darab hatjegyű szám esetében fordul elő. (1 pont)

Emiatt a vizsgált számok között $8\cdot24=$ **192** darab 12-vel osztható van. (1 pont)

Összesen: 12 pont

29) Egy növekvő számtani sorozat első három tagjából álló adathalmaz szórásnégyzete 6.

a) Igazolja, hogy a sorozat differenciája 3-mal egyenlő! (4 pont)

András, Barbara, Cili, Dezső és Edit rokonok. Cili 3 évvel idősebb Barbaránál, Dezső 6 évvel fiatalabb Barbaránál, Edit pedig 9 évvel idősebb Cilinél. Dezső, Barbara és Edit életkora (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat három egymást követő tagja, András, Barbara és Cili életkora (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat három szomszédos tagja.

b) Hány éves András? (6 pont)

András, Barbara, Cili, Dezső, Edit és Feri moziba mennek.

c) Hányféleképpen foglalhatnak helyet hat egymás melletti széken úgy, hogy a három lány ne három egymás melletti széken üljön? (6 pont)

Megoldás:

a) Ha a sorozat második tagját a_2-nek jelöljük, akkor az első három tag átlaga is a_2. (1 pont)

Ha a számtani sorozat differenciáját d-nek jelöljük, akkor a szórásnégyzet:

$$\frac{(a_2-d-a_2)^2+0^2+(a_2+d-a_2)^2}{3}=6.$$ (1 pont)

Innen adódik, hogy $d^2=9$, (1 pont)

azaz, mivel a sorozatunk növekedő $\boldsymbol{d=3}$. **Ezzel az állítást beláttuk.** (1 pont)

b) Ha Barbara x éves, akkor Cili $x+3$ éves, és így Dezső, Barbara és Edit életkora rendre $x-6$, x, illetve $x+12$ év. (1 pont)

Mivel ez a három szám egy mértani sorozat három szomszédos tagja, ezért:

$(x-6)(x+12)=x^2$. (1 pont)

A zárójeleket felbontva:

$x^2+6x-72=x^2$, (1 pont)

ahonnan $x=12$. (1 pont)

Ellenőrzés: Dezső, Barbara és Edit életkora 6, 12, illetve 24 év, ez a három szám pedig valóban egy mértani sorozat három szomszédos tagja. (1 pont)

András tehát 9 éves. (1 pont)

c) Komplementer eseményt felhasználva: nem felelnek meg azok az esetek, amelyekben a három lány három egymás melletti széken ül. (1 pont)

A három egymás melletti széket négyféleképpen lehet kiválasztani a hat közül. (1 pont)

A három egymás melletti széken 3!, azaz hatféleképpen foglalhat helyet a három lány, a megmaradt három helyen szintén hatféleképpen foglalhat helyet a három fiú. (1 pont)

A nem megfelelő elhelyezkedések száma tehát: $4\cdot 6\cdot 6=144$. (1 pont)

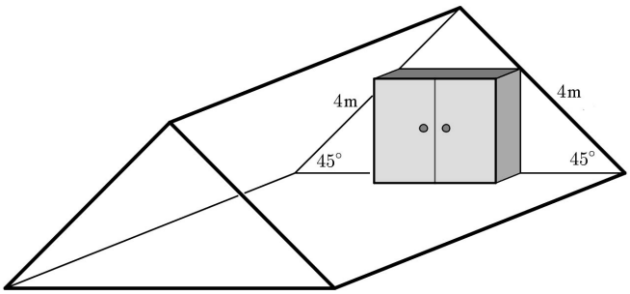
Hatan a hat egymás melletti székre 6!, azaz 720-féleképpen ülhetnének le. (1 pont)

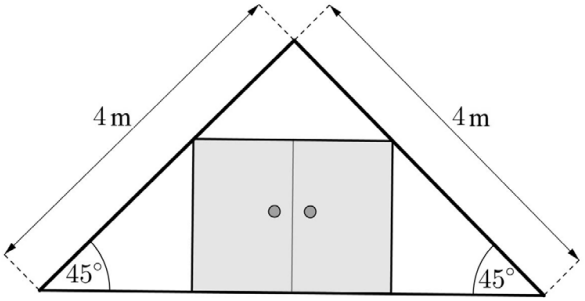
A megfelelő elhelyezkedések száma tehát:

$720-144=\mathbf{576}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

30) Kovács úr a tetőterébe egy téglatest alakú beépített szekrényt készíttet. Két vázlatot rajzolt a terveiről az asztalosnak, és ezeken feltüntette a tetőtér megfelelő adatait is. Az első vázlat „térhatású”, a második pedig elölnézetben ábrázolja a szekrényt.





A tetőtér adottságai miatt a szekrény mélységének pontosan 60 cm-nek kell lennie.

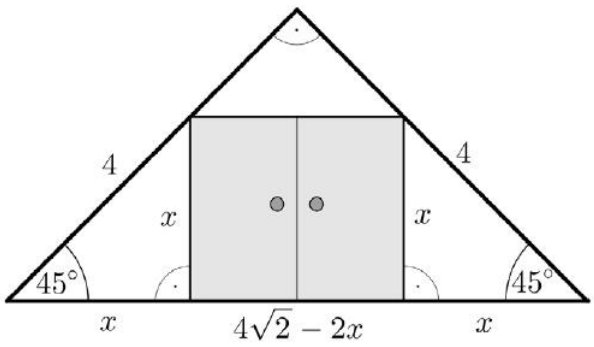
a) Mekkora legyen a szekrény vízszintes és függőleges mérete (azaz a szélessége és a magassága), ha a lehető legnagyobb térfogatú szekrényt szeretné elkészíttetni? (A magasság, a szélesség és a mélység a szekrény külső méretei, Kovács úr ezekkel számítja ki a térfogatot.) (8 pont)

A szekrény elkészült. Az akasztós részébe Kovács úr vasárnap este 7 inget tesz be, a hét minden napjára egyet-egyet. Az ingek között van 2 fehér, 2 világoskék és 3 sárga. Reggelente nagyon siet, ezért Kovács úr csak benyúl a szekrénybe, és anélkül, hogy odanézne, véletlenszerűen kivesz egy inget.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a hét első három napján vagy három különböző színű vagy három egyforma színű inget választ? (Ha valamelyik nap viselt egy inget, azt utána már nem teszi vissza a szekrénybe.) (8 pont)

Megoldás:

a) Ha a szekrény magassága x méter, akkor szélessége az ábrán látható egyenlő szárú háromszögek miatt $4\sqrt{2}-2x$. (2 pont)



A térfogata pedig: $V=0,6x\left(4\sqrt{2}-2x\right)$, amennyiben $0<x<2\sqrt{2}$. (1 pont)

Az $x\mapsto 0,6x\left(4\sqrt{2}-2x\right)$ másodfokú függvénynek két zérushelye van, a 0 és a $2\sqrt{2}$. (1 pont)

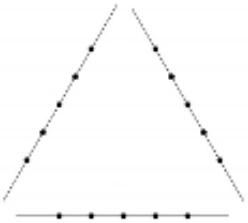
Így a negatív főegyüttható miatt ennek a függvénynek a maximuma a két zérushelye számtani közepénél, az $x=\sqrt{2}$ helyen lesz. (2 pont)

Mivel a $\sqrt{2}$ eleme a feladat értelmezési tartományának, ezért a legnagyobb térfogatú szekrény magassága körülbelül **1,41 méter**, szélessége pedig körülbelül **2,83 méter** lesz. (2 pont)

b) Az azonos színű ingeket megkülönböztetve az első három napon $7\cdot 6\cdot 5=210$ különböző lehetőség van a három ing kiválasztására. (1 pont)
Kedvező esemény az, ha valamilyen sorrendben mindegyik színből pontosan egyet vagy három sárga inget választott Kovács úr. (1 pont)
Egy adott színsorrendben $2\cdot 2\cdot 3=12$ különböző módon lehet három inget kiválasztani. (1 pont)
Három adott szín sorrendje 3!-féle lehet, tehát három különböző színű inget $2\cdot 2\cdot 3\cdot 3!=72$ különböző módon választhat ki Kovács úr. (2 pont)
A három sárga inget 3! különböző sorrendben választhatja ki. (1 pont)
A kedvező esetek száma:
$2\cdot 2\cdot 3\cdot 3!+3!=78$. (1 pont)
A kérdezett valószínűség tehát:
$\frac{78}{210}=\frac{13}{35}\approx \mathbf{0,371}$. (1 pont)

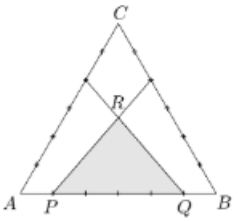
Összesen: 16 pont

31) Megadtunk három egyenest, és mindegyiken megadtunk öt-öt pontot az ábra szerint.



a) Hány olyan szakasz van, amelynek mindkét végpontja az ábrán megadott 15 pont valamelyike, de a szakasz nem tartalmaz további pontot a megadott 15 pont körül? (6 pont)

Az egyenlő oldalú *ABC* háromszög 18 egység hosszúságú oldalait hat-hat egyenlő részre osztottuk, és az ábra szerinti osztópontok összekötésével megrajzoltuk a *PQR* háromszöget.



b) Számítsa ki a *PQR* háromszög területének pontos értékét! (10 pont)

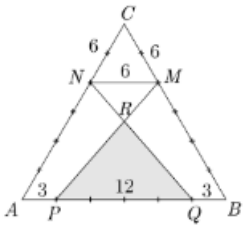
Megoldás:

a) A megadott 15 pont összesen $\binom{15}{2}$ szakaszt határoz meg. (2 pont)

Egy-egy megadott egyenesen a nem megfelelő szakaszok száma 6, (2 pont)
tehát összesen 18 nem megfelelő szakasz van. (1 pont)

A megfelelő szakaszok száma $\binom{15}{2}-18=87$ (1 pont)

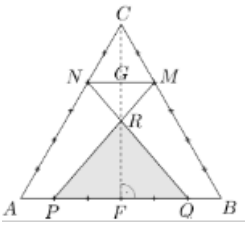
b) Az ábra jelöléseit használjuk. A CNM háromszög egy 6 egység oldalú szabályos háromszög. (2 pont)



A CNM szabályos háromszög magassága az ABC szabályos háromszög magasságának a harmada $\left(CG = \frac{1}{3} \cdot CF\right)$ (1 pont)

$CG = \left(\frac{1}{3} \cdot 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =\right) 3\sqrt{3}$, (1 pont)

a $PQMN$ trapéz magassága pedig ennek a kétszerese: $FG = 6\sqrt{3}$ (1 pont)



A PQR háromszög hasonló az MNR háromszöghöz, mert szögeik páronként egyenlők (csúcsszögek, illetve váltószögek). (1 pont)

A két háromszög hasonlóságának aránya $2:1$, (1 pont)

így a megfelelő oldalaikhoz tartozó magasságainak aránya is ennyi. (1 pont)

Ezért $FR = 4\sqrt{3}$, (1 pont)

és a PQR **háromszög területe** $\left(\frac{\mathbf{12 \cdot 4\sqrt{3}}}{\mathbf{2}} =\right) \mathbf{24\sqrt{3}}$ **(területegység).** (1 pont)

Összesen: 16 pont

32) Egy üzemben egyforma, nagyméretű fémdobozok gyártását tervezik. A téglatest alakú doboz hálózatát egy 2 méter × 1 méteres téglalapból vágják ki az ábrán látható módon. A kivágott idom felhajtott lapjait az élek mentén összeforrasztják. (A forrasztási eljárás nem jár anyagveszteséggel.)

a) Hogyan válasszák meg a doboz méreteit, hogy a térfogata maximális legyen? Válaszát centiméterben, egészre kerekítve adja meg!(11 pont)

A dobozokat egy öt karakterből álló kóddal jelölik meg. Minden kódban két számjegy és három nagybetű szerepel úgy, hogy a két számjegy nincs egymás mellett. Mindkét számjegy eleme a $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaznak, a betűket pedig a 26 betűs (angol) ábécéből választják ki (például 7WA3A egy lehetséges kód).

b) Hány különböző kód lehetséges? (5 pont)

Megoldás:

a) (Az ábra jelöléseit használva) a téglatest méretei méterben:
$x, 1-x, 1-2x,$ (1 pont)
a téglatest térfogata m^3-ben: $x(1-x)(1-2x)$ (ahol $0<x<0{,}5$). (1 pont)
Keressük a $(V:]0;0{,}5[\to\mathbb{R})$ $V(x)=x(1-x)(1-2x)=2x^3-3x^2+x$ függvény maximumát. (1 pont)
$V'(x)=6x^2-6x+1$. (1 pont)
(A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy) $V'(x)=0$. (1 pont)
A másodfokú egyenlet (valós) megoldásai: $\frac{3-\sqrt{3}}{6}(\approx 0{,}211)$ és
$\frac{3+\sqrt{3}}{6}(\approx 0{,}789)$. (2 pont)
Ez utóbbi nem eleme a V értelmezési tartományának, ezért ez nem jöhet szóba. (1 pont)
A V' függvény a $\frac{3-\sqrt{3}}{6}(\approx 0{,}211)$ helyen előjelet vált (pozitívból negatívba megy át), ezért ez a V függvénynek az egyetlen szélsőértékhelye, mégpedig a maximumhelye. (1 pont)
A maximális térfogatú doboz méretei (a kért kerekítéssel): 21,79 és 58 (cm). (2 pont)

b) Az ötkarakteres kódban $\binom{5}{2}-4(=6)$ különböző módon lehet két számjegy helyét kijelölni. (2 pont)
A két helyre $10\cdot 10(=100)$ különböző módon lehet két számjegyet választani úgy, hogy a sorrendjük is számít, (1 pont)
a másik három helyre pedig $26^3(=17576)$ különböző módon három nagybetűt. (1 pont)
A különböző kódok száma tehát $(6\cdot 100\cdot 17576=)10\,545\,600$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

33) Egy kisvárosban hét nagyobb üzlet található. A tavalyi évben elért, millió forintra kerekített árbevételeikről tudjuk, hogy az átlaguk 120 millió Ft, és ez megegyezik a mediánjukkal. A hét adat egyetlen módusza 100 millió Ft. Két üzletben éppen átlagos, azaz 120 millió forintos a kerekített bevétel, a legnagyobb bevétel pedig 160 millió forint volt.
a) Számítsa ki a kerekített bevételek szórását! (6 pont)

A városban az egyik ruhakereskedéssel foglalkozó kisvállalkozás 80%-os haszonkulccsal dolgozik. Ez azt jelenti, hogy például egy 10 000 Ft-os beszerzési értékű terméket 18 000 Ft-ért árulnak az üzletükben. Amikor

akciós időszak van, akkor a „rendes” eladási árból 50%-os árengedményt adnak minden eladott termékre.

b) Mekkora volt az eladásból származó árbevételnek és az eladott áru beszerzési értékének a különbsége (vagyis az „árnyereség”) a tavalyi évben, ha összesen 54 millió Ft volt az éves árbevétel, és ebből 9 millió Ft-ot az akciós időszakban értek el? (4 pont)

A kisvállalkozás üzletében az egyik fajta férfizakóból négyféle méretet árusítanak (S, M, L, XL). Nyitáskor egy rögzített állvány egyenes rúdjára mindegyik méretből 4-4 darabot helyeztek el (minden zakót külön vállfára akasztva, egymás mellett). A nap folyamán ezek közül megvettek 4 darab S-es, 3 darab M-es, és 2 darab L-es méretűt, a megmaradt zakók pedig összekeveredtek.

c) Az üzlet zárásakor hányféle sorrendben lehetnek (balról jobbra nézve) a rúdra akasztva a megmaradt zakók, ha az azonos méretű zakókat nem különböztetjük meg egymástól? (3 pont)

Megoldás:

a) A kerekített bevételek összege $7 \cdot 120 = 840$ (millió Ft). (1 pont)

A medián 120 millió forint, és két 120 millió forintos árbevétel volt, ezért legfeljebb három 120 millió forintnál kisebb bevétel lehet. (1 pont)

Mivel a módusz 100 millió forint, ezért három 100 millió forintos árbevétel volt. (1 pont)

A 160 millió Ft-os árbevétel figyelembevételével a hetedik árbevétel $(840 - 3 \cdot 100 - 2 \cdot 120 - 160 =) 140$ millió forintnak adódik. (1 pont)

A (kerekített) bevételek szórása:

$$\sqrt{\frac{3 \cdot (100-120)^2 + 2 \cdot (120-120)^2 + (140-120)^2 + (160-120)^2}{7}} \approx$$ (1 pont)

≈ 21,4 millió (Ft). (1 pont)

b) A rendes eladási ár árengedmény nélkül $(54 + 9 =) 63$ millió Ft lett volna. (1 pont)

Tehát az eladott áru beszerzési értéke $\frac{63}{1,8} = 35$ millió Ft, (2 pont)

az árnyereség pedig $(54 - 35 =)$ **19 millió Ft volt.** (1 pont)

c) Megmaradt 1 darab M-es, 2 darab L-es és 4 darab XL-es zakó. (1 pont)

Ezek lehetséges sorrendjeinek száma $\frac{7!}{2! \cdot 4!} =$ (1 pont)

=105. (1 pont)

Összesen: 13 pont

34)

a) Igazolja a következő állítást: ha egy négyszög szögei valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor a négyszög húrnégyszög vagy trapéz! (6 pont)

b) Fogalmazza meg az előző állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

Egy geometriai építőkészletben csak olyan pálcikák vannak, amelyek hossza centiméterben mérve egész szám, és mindenféle lehetséges hosszúság előfordul 1 cm-től 12 cm-ig. (Mindegyik fajta pálcikából elegendően sok van a készletben.)

c) Hány különböző módon választhatunk ki 4 pálcikát a készletből úgy, hogy belőlük egy 24 cm kerületű érintőnégyszöget lehessen építeni? (Két kiválasztást különbözőnek tekintünk, ha az egyik kiválasztás 4 pálcikája nem állítható párba a másik kiválasztás 4 pálcikájával úgy, hogy mind a 4 párban egyenlő hosszú legyen a két pálcika. Tudjuk továbbá, hogy ha *a, b, c, d* pozitív számok, és $a+c=b+d$, akkor az *a, b, c, d* hosszúságú szakaszokból szerkeszthető négyszög.) (7 pont)

Megoldás:

a) Legyen a négyszög legkisebb szöge α fok, a sorozat differenciája pedig d fok $(d \geq 0)$. Ekkor a négyszög szögei (valamilyen sorrendben) α, $\alpha+d$, $\alpha+2d$ és $\alpha+3d$ fok nagyságúak. (1 pont)

A négyszög belső szögeinek összege 360°, ezért $4\alpha+6d=360$, (1 pont)
vagyis $2\alpha+3d=180$. (1 pont)
$2\alpha+3d=(\alpha+d)+(\alpha+2d)$, ami azt jelenti, hogy a négyszög két-két szögének összege 180°. (1 pont)
Ha a két szög szomszédos, akkor a négyszög trapéz, (1 pont)
ha pedig szemközti, akkor húrnégyszög.
Tehát az **állítást igazoltuk.** (1 pont)

b) A megfordítás: **Ha egy négyszög trapéz vagy húrnégyszög, akkor a szögei (valamilyen sorrendben) egy számtani sorozat szomszédos tagjai.** (1 pont)
A megfordítás **hamis.** (1 pont)
Egy ellenpélda. Például: egy trapéz, amelynek szögei 50°, 70°, 110° és 130° nagyságúak. (1 pont)

c) A négy kiválasztott pálcikából pontosan akkor készíthető érintőnégyszög, ha a két-két szemközti pálcika hosszának összege egyenlő. (1 pont)
A készlet négy pálcikájából tehát pontosan akkor építhető 24 cm kerületű érintőnégyszög, ha a négyszögben egymással szemben elhelyezkedő két-két oldal (centiméterben mért) hossza az $(1;11)$, $(2;10)$, $(3;9)$, $(4;8)$, $(5;7)$, $(6;6)$ számpárok valamelyike. (2 pont)
Annyiféleképpen választható ki négy megfelelő pálcika a készletből, ahányféleképpen a hat számpárból kettő (sorrendre való tekintet nélkül) kiválasztható úgy, hogy egy számpárt kétszer is választhatunk. (1 pont)
Ez a szám 6 különböző objektum másodosztályú ismétléses kombinációinak számával egyezik meg. (1 pont)
Az összes különböző lehetőségek száma tehát $\binom{6+2-1}{2}=\binom{7}{2}=$ (1 pont)
=21. (1 pont)
Összesen: 16 pont

35) Két sportiskola legjobb teniszezői egyéni teniszbajnokság keretében mérték össze tudásukat. A verseny emblémáját parabolaszelet alakúra tervezték (lásd az ábrát). A koordináta-rendszerben készült tervrajzon a teniszlabda röppályáját jelképező $y=4-x^2$ egyenletű parabola, valamint az x tengely határolja a parabolaszeletet. Az emblémán látható még a teniszlabdát jelképező kör is, ennek egyenlete $x^2+y^2-2{,}6y=0$.

a) Hány százaléka a kör területe a parabolaszelet területének? A választ egészre kerekítve adja meg! (8 pont)

A Zöld Iskolából 8, a Piros Iskolából 10 tanuló versenyzett a bajnokságon. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszott, az ugyanabba az iskolába járó tanulók is játszottak egymással. A verseny végén kiderült, hogy a Piros Iskola tanulói összesen kétszer annyi mérőzést nyertek meg, mint a Zöld Iskola tanulói. (Teniszben döntetlen nincs.)

b) A Zöld Iskola versenyzői összesen hány olyan mérkőzést nyertek meg, amelyet a Piros Iskola valamelyik teniszezőjével játszottak? (6 pont)

Megoldás:

a) Az $y=4-x^2$ egyenletű parabola a (–2; 0), illetve a (2; 0) pontban metszi az abszcisszatengelyt (és az emblémát határoló parabolaív az x tengely fölött van). (1 pont)

A parabolaszelet területe: $\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx=$ (1 pont)

$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} =$ (1 pont)

$\left(= 8 - \frac{8}{3} - \left(-8 + \frac{8}{3}\right)\right) = \frac{32}{3}$. (1 pont)

A kör egyenletét átalakítva: $x^2 + (y - 1{,}3)^2 = 1{,}3^2$, (1 pont)

ebből a kör sugara 1,3, területe pedig $1{,}69\pi (\approx 5{,}31)$ (1 pont)

A kör és a parabolaszelet területének aránya: $1{,}69\pi : \frac{32}{3} (\approx 0{,}4977)$ (1 pont)

A kör területe (a kért kerekítéssel) **a parabolaszelet területének 50%-a.**

(1 pont)

b) A lejátszott mérkőzések: $\binom{18}{2} = 153$. (1 pont)

A Zöld Iskola 8 tanulójának egymás közötti mérkőzései mindig a 8 tanuló valamelyikének győzelmével végződtek. (1 pont)

ez $\binom{8}{2} (= 28)$ győzelmet jelent. (1 pont)

Ha a Zöld Iskola tanulói x mérkőzést nyertek a Piros Iskola tanulói ellen, akkor megnyert mérkőzéseik száma összesen x + 28, a Piros Iskola tanulói által nyert mérkőzések száma pedig $(153 - (x + 28) =) 125 - x$. (1 pont)

A szöveg szerint $125 - x = 2(x + 28)$, amiből $x = 23$ (1 pont)

A Zöld Iskola tanulói **23 mérkőzést** nyertek a Piros Iskola tanulói ellen.

(1 pont)

Összesen: 14 pont

36) A *H* halmaz egy nyolcpontú egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a *H* elemeire vonatkozik: Ha egy (nyolcpontú egyszerű) gráf minden pontjának fokszáma legalább 3, akkor a gráf összefüggő.

a) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását a *H* elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

Az *ABCDE* konvex ötszög csúcsait piros, kék vagy zöld színűre színezzük úgy, hogy bármely két szomszédos csúcsa különböző színű legyen.

c) Hány különböző színezés lehetséges? (Az ötszög csúcsait megkülönböztetjük egymástól.) (5 pont)

Egy négypontú teljes gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztott négy élt kiszínezünk zöldre (teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.)

d) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a zöldre színezett élek a gráf egy négypontú körének élei! (5 pont)

Megoldás:

a) Az állítás hamis. (1 pont)
Ellenpélda: a nyolcpontú egyszerű gráf két négypontú teljes gráf egyesítése. (2 pont)

b) A megfordítás: Ha egy (nyolcpontú egyszerű) gráf összefüggő, akkor a gráf minden pontjának fokszáma legalább 3. (1 pont)
A Zöld Iskola 8 tanulójának egymás közötti mérkőzései mindig a 8 tanuló valamelyikének győzelmével végződtek. (1 pont)
ez $\binom{8}{2}(=28)$ győzelmet jelent. (1 pont)

c) Rögzítsük A és B színét, például pirosra és kékre. (1 pont)
Ekkor C, D és E (ebben a sorrendben) a következőképpen színezhető: pkz, pzk, zpz, zpk, zkz. (2 pont)
Mivel A és B színe $(3\cdot 2=)$6-féleképpen választható meg, (1 pont)
ezért összesen $(5\cdot 6=)$**30** különböző színezés lehetséges. (1 pont)

d) Egy négypontú teljes gráfnak $\binom{4}{2}=6$ éle van. (1 pont)
Ezek közül 4 élt $\binom{6}{4}=15$-féleképpen lehet kiválasztani. (Ez az összes esetek száma.) (1 pont)
Ha a zöld élek kört alkotnak, akkor a 2 nem zöld él a gráf két-két különböző pontját köti össze. (1 pont)
A két nem zöld él kiválasztása 3-féleképpen történhet; ez a kedvező esetek száma. (Ha a gráf csúcsai A, B, C, D, akkor a megfelelő kiválasztások: AB-CD, AC-BD, AD-BC.) (1 pont)
A keresett valószínűség: $\boldsymbol{p=\frac{3}{15}=0,2}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

37)

a) Legyen G egy nyolcpontú egyszerű gráf, amelynek összesen 9 éle van. Igazolja, hogy G csúcsai között biztosan van olyan, amelynek a fokszáma legalább 3. (4 pont)

b) Az A, B, C, D, E, F, G, H pontok egy szabályos nyolcszög csúcsai. Megrajzoljuk a nyolcszög oldalait és átlóit. A megrajzolt szakaszok

közül véletlenszerűen kiválasztunk négyet. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy mind a négy kiválasztott szakasz az *A* csúcsból indul ki! (6 pont)

c) Nyolc sakkozó részére egyéni bajnokságot szerveznek. Hányféleképpen készíthető el az első forduló párosítása, ha ebben a fordulóban mindenki egy mérkőzést játszik? (Két párosítást különbözőnek tekintünk, ha az egyik tartalmaz olyan mérkőzést, amelyet a másik nem.) (6 pont)

Megoldás:

a) Ha minden csúcs fokszáma legfeljebb 2 lenne, akkor *G*-nek összesen legfeljebb 8 éle lehetne. (2 pont)
Mivel *G*-nek 9 éle van, ezért ellentmondásra jutottunk. (1 pont)
A csúcsok között tehát van olyan, amelyiknek a fok-száma legalább 3.
(Az állítást bizonyítottuk.) (1 pont)

b) Egy szabályos nyolcszög oldalai és átlói számának összege 28. (1 pont)
Egy csúcsból összesen 7 szakasz indul. (1 pont)
Annak a valószínűsége, hogy az első, második, harmadik, majd negyedik kiválasztott szakasz is az *A* csúcsból indul, rendre $\frac{7}{28}, \frac{6}{27}, \frac{5}{26}$, majd $\frac{4}{25}$. (2 pont)
A kérdéses valószínűség ezek szorzata, tehát $\frac{7}{28}\cdot\frac{6}{27}\cdot\frac{5}{26}\cdot\frac{4}{25}=$ (1 pont)
$\mathbf{\frac{1}{585}(\approx 0{,}0017)}$. (1 pont)

c) Válasszunk ki tetszőlegesen egy sakkozót. (1 pont)
Az ő ellenfelét (a többi sakkozó közül) 7-féleképpen választhatjuk ki. (1 pont)
Folytatva ezt az eljárást a maradék hat sakkozó közül válasszunk ki tetszőlegesen egyet, az ő ellenfelét 5-féleképpen választhatjuk ki, majd a maradék négy sakkozó közül kiválasztva egyet, az ő ellenfelét 3-féleképpen választhatjuk ki. A negyedik párost az ezek után megmaradt két sakkozó alkotja (ez 1 lehetőség). (2 pont)
(Ez az eljárás minden lehetőséget megad, és mind-egyiket pontosan egyszer, ezért) a lehetséges párosítások száma a fentiek szorzata, azaz (1 pont)
$7\cdot 5\cdot 3\cdot 1=\mathbf{105}$ (1 pont)

Összesen16 pont