# MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI
# EMELT SZINT

## Halmazok

**A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!**

**1) Egy gimnázium egyik érettségiző osztályába 30 tanuló jár, közülük 16 lány. A lányok testmagassága centiméterben mérve az osztályozó naplóbeli sorrend szerint:**
**166, 175, 156, 161, 159, 171, 167, 169, 160, 159, 168, 161, 165, 158, 170, 159**

**a) Számítsa ki a lányok testmagasságának átlagát! Mekkora az osztály tanulóinak centiméterben mért átlagmagassága egy tizedesjegyre kerekítve, ha a fiúk átlagmagassága 172,5 cm? (5 pont)**

**Ebben a 30 fős osztályban a tanulók három idegen nyelv közül választhattak, ezek az angol, német és francia.**

**b) Hányan tanulják mindhárom nyelvet, és hányan nem tanulnak franciát, ha tudjuk a következőket:**
**(1) Minden diák tanul legalább két nyelvet.**
**(2) Az angol is és németet is tanuló diákok száma megegyezik a franciát tanuló diákok számával.**
**(3) Angolul 27-en tanulnak.**
**(4) A németet is és franciát is tanulók száma 15. (7 pont)**

***Megoldás:***

a) A lányok testmagasságának átlaga: $\frac{2624}{16} = 164$ cm (1 pont)

Az osztály tanulóinak átlagmagasságát ($t$) a 16 lány átlagmagassága ($l$) és a 14 fiú átlagmagassága ($f$) segítségével számolhatjuk ki: $t = \frac{16 \cdot l + 14 \cdot f}{30} =$ (1 pont)

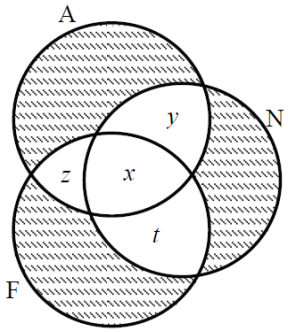
$= \frac{16 \cdot 164 + 14 \cdot 172{,}5}{30} =$ (1 pont)

$= \frac{5039}{30}$ (1 pont)

Az osztály tanulóinak átlagmagassága **168,0 cm** (1 pont)

b)

Ha az osztály 30 tanulóját a három tanult nyelv szerint Venn-diagramon ábrázoljuk, csak négy tartományba jut tanuló, az ábra alapján jelöljük az egyes tartományokat $x$-szel, $y$-nal, $z$-vel és $t$-vel. (2 pont)




(1) alapján $x+y+z+t=30$

(2) alapján $z+t=y$

(3) alapján $x+y+z=27$

(4) alapján $x+t=15$ (2 pont)

Ezekből: $x=12, y=9, z=6, t=3$ (2 pont)

**Három nyelven 12-en tanulnak, és 9-en nem tanulnak franciát.** (1 pont)

**Összesen: 12 pont**

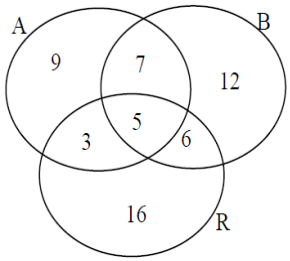
**2) Anett és Berta egy írott szöveget figyelmesen átolvasott. Anett 24 hibát talált benne, Berta 30-at. Ezek között 12 hiba volt csak, amit mindketten észrevettek. Később Réka is átnézte ugyanazt a –javítatlan- szöveget, és ő is 30 hibát talált. Réka az Anett által megtalált hibákból 8-at vett észre, a Berta által észleltekből 11-et. Mindössze 5 olyan hiba volt, amit mind a hárman észrevettek.**

**a) Együtt összesen a szöveg hány hibáját fedezték fel? (9 pont)**

**b) A megtalált hibák hány százalékát vették észre legalább ketten? (4 pont)**

***Megoldás:***

a)




A halmazok elemi a lányok által megtalált hibák (1 pont)

Helyes kitöltés (7 pont)

A felfedezett hibák számát a részhalmazokba írt elemszámok összege adja. **Tehát a három lány összesen 58 hibát fedezett fel**. (1 pont)

b) Legalább ketten vették észre a hibát, ha pontosan ketten, vagy ha pontosan hárman találták meg azt. (1 pont)

Az első csoportba $7+6+3$, a másodikba 5 hiba tartozott. Legalább ketten észleltek 21 hibát. (2 pont)

Ez az összes észlelt hiba $\frac{21}{58}=0,36$-ad része, azaz **36%** (1 pont)

**Összesen: 13 pont**

**3) A Kovács családban 4 embernek kezdődik a keresztneve B betűvel. Négyen teniszeznek, és négyen kerékpároznak rendszeresen.**
**A család tagjairól tudjuk:**
- **csak Bea és Barbara jár teniszezni és kerékpározni is;**
- **egyedül Balázs nem űzi egyik sportágat sem**
- **Zoli próbálja testvérét, Borit a teniszezőktől hozzájuk, a kerékpározókhoz csábítani- sikertelenül.**

**a) A fentiek alapján legalább hány tagja van a Kovács családnak? (5 pont)**

**Egyik nap Barbara, Bea, Bori és Balázs barátaikkal vonaton utaztak, és hogy jobban teljen az idő, játszottak. A játék kezdetekor a társaság minden tagjának egy-egy olyan háromjegyű pozitív számra kellett gondolnia, amelynek minden számjegye 4-nél nagyobb és 7-nél kisebb. Amikor sorra megmondták a gondolt számot, kiderült, hogy nincs a mondott számok között azonos.**

**b) Legfeljebb hány tagú lehetett a társaság? (3 pont)**

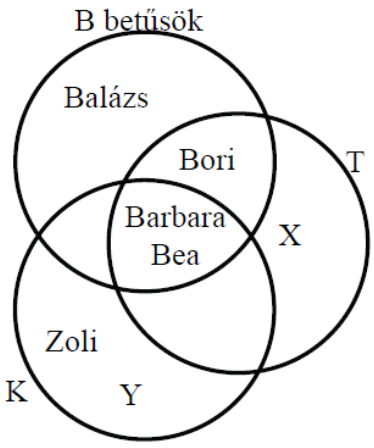
**Egy másik alkalommal Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt.**

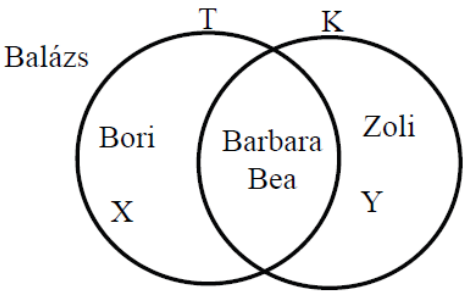
**c) A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnevűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé? (5 pont)**

**d) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a c) pont szerinti ülésrend alakul ki, ha minden ülésrend egyenlően valószínű? (3 pont)**

***Megoldás:***

a) Jelölje *T* a teniszezők, *K* a kerékpározók halmazát a Kovács családon belül.
Barbara, Balázs, Bea, Bori elhelyezése (1 pont)




Zoli elhelyezése (1 pont)
Új családtag elhelyezése *T* halmazon belül (1 pont)
Új családtag elhelyezése *K* halmazon belül (1 pont)
**A Kovács családnak tehát legalább 7 tagja van** (1 pont)

b) A háromjegyű szám minden számjegye 5 vagy 6 lehet csak (1 pont)
Minden számjegy kétféleképpen választható meg, tehát $2\cdot 2\cdot 2=8$ ilyen háromjegyű szám van (1 pont)
**Mivel a társaság minden tagja különböző számot mondott, így legfeljebb 8 tagú lehet a társaság** (1 pont)

c) A feladat szerint Barbara, Bea, Bori és Balázs vagy az 1,3,5 és 7-es számú székeken, vagy a 2,4,6 és 8-as számú székeken foglalnak helyet, és mindkét esetben a maradék 4 helyre a 4 barát ül. (1 pont)
Az első sorrendben az adott 4 helyre Barbara, Bea, Bori és Balázs $4!$-féleképpen helyezkedhet el (1 pont)
Barbara, Bea, Bori és Balázs bármelyik elhelyezkedése esetén a maradék 4 helyre a 4 barát szintén $4!$-féleképpen foglalhat helyet (1 pont)
Így az első esetben a 8 embernek $4!\cdot 4!=576$-féle ülésrendje alakulhat ki (1 pont)
A második esetben is ugyanennyi, ezért a 8 embernek összesen $2\cdot 4!\cdot 4!=\mathbf{1152}$ ülésrendje alakulhat ki (1 pont)

d) A 8 ember összes ülésrendjének száma $8!=40320$ (1 pont)
Mivel bármilyen ülésrend egyenlően valószínű, a kérdéses valószínűség
$P=\frac{2\cdot 4!\cdot 4!}{8!}=\frac{1152}{40320}=\frac{1}{35}\approx \mathbf{0,0286}$ (2 pont)

**Összesen: 16 pont**

**4) Legyen $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\sqrt{x-1}\geq\sqrt{5-x}\right\}$ és $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\log_{\frac{1}{2}}(2x-4)>-2\right\}$. Adja meg az $A\cup B$, $A\cap B$, $B\setminus A$ halmazokat! (13 pont)**

***Megoldás:***

$x-1\geq 0$ és $5-x\geq 0$ (1 pont)
ezért az egyenlőség értelmezési tartománya $[1;5]$ (1 pont)
Mindkét oldal nem negatív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.
Ebből: $x\geq 3$ (1 pont)
Így $A=[3;5]$ (1 pont)
Az $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4)>-2$ egyenlőség értelmezési tartománya $]2;\infty[$ (2 pont)
Az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan csökkenő (1 pont)
ezért $2x-4<4$ (1 pont)
Innen $x<4$
Így $B=]2;4[$ (2 pont)
$\boldsymbol{A\cup B=]2;5]}$ (1 pont)
$\boldsymbol{A\cap B=[3;4[}$ (1 pont)
$\boldsymbol{B\setminus A=]2;3[}$ (1 pont)

**Összesen: 13 pont**

**5) Egy város 18 étterme közül 11-ben reggelit, 11-ben vegetáriánus menüt lehet kapni, és 10-ben van felszolgálás. Mind a 18 étterem legalább egy szolgáltatást nyújt az előző három közül. Öt étteremben adnak reggelit, de nincs vegetáriánus menü. Azok közül az éttermek közül, ahol reggelizhetünk, ötben van felszolgálás. Csak egy olyan étterem van, ahol mindhárom szolgáltatás megtalálható.**

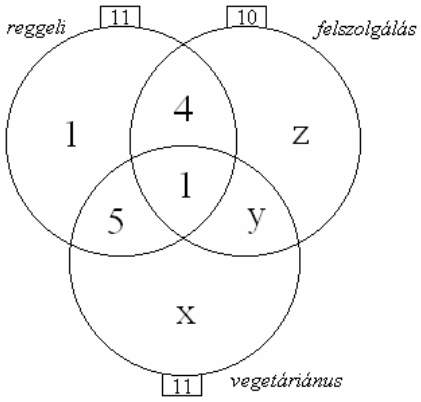
**a) Hány étteremben lehet vegetáriánus menüt kapni, de reggelit nem?** **(5 pont)**

**b) Hány olyan étterem van, ahol felszolgálnak vegetáriánus menüt?** **(6 pont)**

**c) A Kiskakas étteremben minden vendég a fizetés után nyereménysorsoláson vehet részt. Két urnát tesznek elé, amelyekben golyócskák rejtik a város egy-egy éttermének nevét. Az *A* urnában a város összes vendéglőjének neve szerepel, mindegyik pontosan egyszer. A *B* urnában azoknak az éttermeknek a neve található, – mindegyik pontosan egyszer– amelyikben nincs felszolgálás. A vendég tetszés szerint húzhat egy golyót. Ha a húzott étteremben van reggelizési lehetőség, akkor a vendég egy heti ingyen reggelit nyer, ha nincs, nem nyer. Melyik urnából húzva nagyobb a nyerés valószínűsége?** **(5 pont)**

***Megoldás:***

a)




Mivel egy olyan étterem van csak, ahol mindhárom szolgáltatás megtalálható, ezért a három halmaz metszetébe 1-et írhatunk (1 pont)

Mivel 5 étteremben van reggeli és felszolgálás is, ezért a reggeli és felszolgálás vegetáriánus menü nélkül $5-1=4$ helyen van (1 pont)

Mivel 5 étteremben adnak reggelit, de vegetáriánus menüt nem kapni, ezért csak reggelit 1 helyen lehet kapni (1 pont)

Mivel 11-ben lehet reggelit kapni, ezért reggeli és vegetáriánus menü felszolgálás nélkül $11-1-4-1=5$ helyen van (1 pont)

Mivel 11 helyen van vegetáriánus menü, és ezek közül 6 helyen van reggeli is, ezért **5 helyen van vegetáriánus menü, de nincs reggeli.** (1 pont)

b) A „vegetáriánus helyek” száma miatt: $y = 5 - x$, a felszolgálós helyek száma $z = x$ (2 pont)
Így az összes vendéglők száma $11 + 2x + 5 - x = 18$ (1 pont)
ahonnan $x = 2$ (1 pont)
ezért $y = 3; z = 2$ (1 pont)
Tehát $y + 1 =$ **4 étteremben szolgálnak fel vegetáriánus menüt** (1 pont)

c) Összesen 18 étterem van, ebből 11-ben lehet reggelizni. Az összes címet tartalmazó *A* urnából húzva $\frac{11}{18} \approx 0,61$ a nyerés valószínűsége (2 pont)
A 8 önkiszolgáló étterem közül 6-ban lehet reggelizni, így a *B* urnából húzva $\frac{6}{8} = 0,75$ a nyerés valószínűsége (2 pont)
tehát **a *B* urnából érdemes húzni** (1 pont)
**Összesen: 16 pont**

**6)**

**a) Egy osztály tanulói a tanév során három kiránduláson vehettek részt. Az elsőn az osztály tanulóinak 60 százaléka vett részt, a másodikon 70 százalék, a harmadikon 80 százalék. Így három tanuló háromszor, a többi kétszer kirándult.**
**Hány tanulója van az osztálynak? (6 pont)**

**b) A három közül az első kiránduláson tíz tanuló körmérkőzésen asztalitenisz-bajnokságot játszott. (Ez azt jelenti, hogy a tíz tanuló közül mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést vívott.)**
**Mutassa meg, hogy 11 mérkőzés után volt olyan tanuló, aki legalább háromszor játszott! (4 pont)**

**c) A második kirándulásra csak az osztály kosárlabdázó tanulói nem tudtak elmenni, mivel éppen mérkőzésük volt. A kosarasok átlagmagassága 182 cm, az osztály átlagmagassága 174,3 cm.**
**Számítsa ki a kiránduláson részt vevő tanulók átlagmagasságát! (6 pont)**

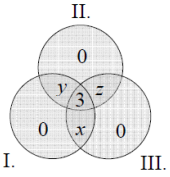
***Megoldás:***

a) Ha az első kiránduláson az osztály 60%-a vett részt, akkor csak a második és harmadik kiránduláson az osztály 40%-a. Hasonlóan adódik, hogy csak az első és harmadik kiránduláson az osztály 30%-a, csak az első és második kiránduláson az osztály 20%-a vett részt. (3 pont)
Mivel nem volt olyan tanuló, aki csak egy kiránduláson vett volna részt, ezért az osztály 10%-a vett részt minden kiránduláson. (2 pont)
Az előző megállapítás és a feltétel alapján az osztály létszáma **30** (1 pont)

***Alternatív megoldás:***

(algebrai megoldás)

$$x + y + 3 = 0,6(3 + x + y + z)$$
$$y + z + 3 = 0,7(3 + x + y + z)$$
$$z + x + 3 = 0,8(3 + x + y + z)$$



$4x+4y-6z=-12$

$-7x+3y+3z=-9$ (3 pont)

$2x-8y+2z=-6$

$x-y=3$

$2x-3y=0$ (1 pont)

$x=9,\ y=6,\ z=12$ (1 pont)

Az osztálylétszám: $6+9+12+3=$ **30** fő. (1 pont)

b) Ha minden tanuló legfeljebb két mérkőzést játszott volna, akkor eddig 10 mérkőzés zajlott volna le (2 pont)

**Mivel 11 mérkőzés volt, ezért a skatulya-elv alapján lennie kell olyan tanulónak, aki 3 mérkőzést játszott** (2 pont)

c) A második kiránduláson 21 tanuló volt (1 pont)

Jelölje a kiránduláson résztvevők átlagmagasságát $h$. Ezzel a feltételek alapján: $174,3=\dfrac{21\cdot h+9\cdot 182}{30}$ (3 pont)

ahonnan $\boldsymbol{h=171}$ **cm** (2 pont)

**Összesen: 16 pont**

**7) Jelölje *A* az $\dfrac{x+4}{x-3}=0$ egyenlőtlenség egész megoldásainak a halmazát, *B* pedig az $|x+3|<4$ egyenlőtlenség egész megoldásainak a halmazát. Elemei felsorolásával adja meg az $A\cap B$, az $A\setminus B$ és az $A\cup B$ halmazt!**

**(11 pont)**

***Megoldás:***

Egy tört nempozitív, ha vagy a számlálója és a nevezője ellenétes előjelű, vagy a számlálója nulla, de a nevezője nem. (1 pont)

Első eset $x-3>0$ és $x+4\le 0$ (1 pont)

Ebből $x>3$ és $x\le -4$ (1 pont)

Ezért az *A* halmaz elemei {-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2} (1 pont)

Ez az abszolútértékes egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $-4<x+3<4$ (2 pont)

Azaz $-7<x<1$ Ezért a *B* halmaz elemei {-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0} (2 pont)

$\boldsymbol{A\cap B=\{-4;-3;-2;-1;0\}}$ (1 pont)

$\boldsymbol{A\setminus B=\{1;2\}}$ (1 pont)

$\boldsymbol{A\cup B=\{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}}$ (1 pont)

**Összesen: 11 pont**

**8) Jelölje $H$ a $\sqrt{5,2-x} \le 3$ egyenlőtlenség pozitív egész megoldásainak halmazát. Jelölje továbbá $B$ azon pozitív egész $b$ számok halmazát, amelyekre a $\log_b 2^6$ kifejezés értéke is pozitív egész szám. Elemeinek felsorolásával adja meg a $H$, a $B$, a $H \cap B$ és a $B \setminus H$ halmazt! (11 pont)**

***Megoldás:***

A gyökös kifejezés értelmezési tartomány vizsgálata alapján: $x \le 5,2$. (1 pont)

Az egyenlőtlenség elvégzése során:

$5,2 - x \le 9 \Rightarrow -3,8 \le x$ (1 pont)

Tehát azok a pozitív számok elemei $H$ halmaznak, melyek $-3,8$-nál nagyobbak és 5,2-nél kisebbek:

$\boldsymbol{H = \{1;2;3;4;5\}}$ (1 pont)

Ha $\log_b 2^6 = k$, akkor $b^k = 2^6$, ami 64. (2 pont)

A $k$ kitevő pozitív egész, ezért a $b$ olyan pozitív egész szám lehet, melynek valamely pozitív egész kitevős hatványa 64-gyel egyenlő: (1 pont)

$2^6 = 4^3 = 8^2 = 64^1 = 64$ (2 pont)

Ezért $\boldsymbol{B = \{2;4;8;64\}}$. (1 pont)

$\boldsymbol{H \cap B = \{2;4\}}$ (1 pont)

$\boldsymbol{B \setminus H = \{8;64\}}$ (1 pont)

**Összesen: 11 pont**

**9) Három ponthalmazt vizsgálunk a derékszögű koordináta-rendszer ($S$) síkjában. Az $A$ halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátái: $\boldsymbol{A := \{P(x;y) \in S \mid 4x - 3y \ge 18\}}$;**

**a $B$ halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira: $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 \le 0}$,**

**azaz $\boldsymbol{B := \{P(x;y) \in S \mid x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 \le 0\}}$,**

**a $C$ halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira: $\boldsymbol{y^2 = 4}$, azaz $\boldsymbol{C := \{P(x;y \in S) \mid y^2 = 4\}}$.**

**a) Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a három halmazt! Fogalmazza meg, milyen geometriai alakzatok az $A$, a $B$ és a $C$ halmaz pontjai! (8 pont)**

**b) Ábrázolja újabb koordináta-rendszerben a $B \setminus A$ halmazt! Fogalmazza meg pontosan, hogy milyen geometriai alakzatot alkot ez a ponthalmaz? (4 pont)**

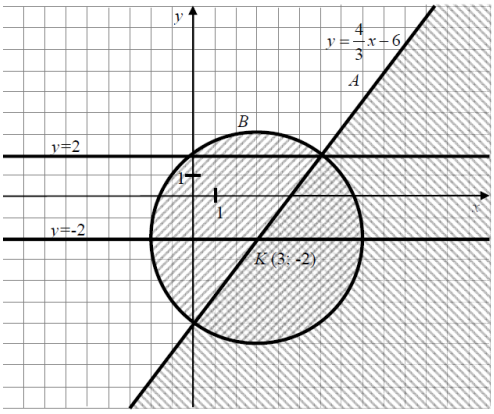
**c) Ábrázolja a $B \cap C$ halmazt! Ennek a ponthalmaznak melyik $P(x;y)$ pontja van a legközelebb illetve a legtávolabb a koordináta-rendszer origójától? (4 pont)**

***Megoldás:***

a)

Az $A$ halmaz pontjai a $y=\frac{4}{3}x-6$ egyenletű egyenes alatti **zárt félsík** pontjai (1 pont)

Az $A$ halmaz ábrája (1 pont)




A $B$ halmaz pontja az $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ egyenletű **kör** és a kör belső pontjai (1 pont)

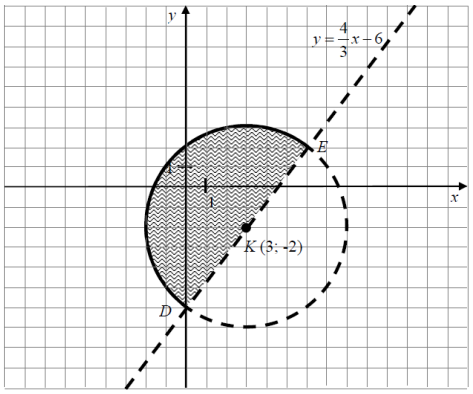
A kör középpontja $K(3;-2)$, sugara $r=5$ (1 pont)

A $B$ halmaz ábrája (2 pont)

A $C$ halmaz pontjai az $y=2$ és $y=-2$ egyenletű **párhuzamos egyenesek** pontjai (1 pont)

A $C$ halmaz ábrája (1 pont)

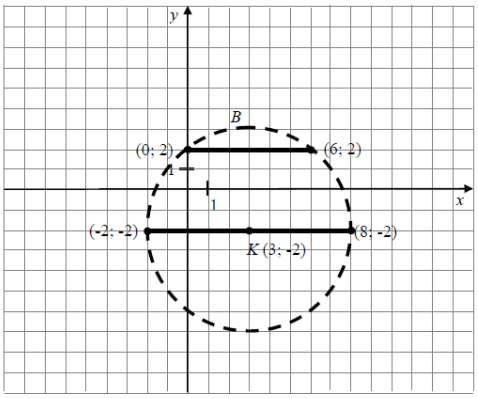
b) A $B\setminus A$ halmaz ábrázolása: (1 pont)




A $B\setminus A$ halmaz pontjai egy félkörlemez pontjai, amihez a félkörív és a belső pontok hozzá tartoznak, de a kör $DE$ átmérője nem. (Az átmérő végpontjai $D(0;-6)$ és $E(6;2)$.) (2 pont)

**A ponthalmaz pontjai a *DE* átmérő fölött vannak.** (1 pont)

c)




A $B \cap C$ halmaz a $B$ ponthalmaz határoló körének két párhuzamos húrja;
A húrok végpontjai: $(0;2)$ és $(6;2)$, valamint $(-2;-2)$ és $(8;-2)$.
(ez utóbbi húr egyben átmérő is)
A $B \cap C$ halmaz ábrázolása: (1 pont)
Az origótól a **legmesszebb** a $\mathbf{(8;-2)}$ pont (1 pont)
**legközelebb** a $\mathbf{(0;2)}$ és a $\mathbf{(0;-2)}$ pont van (2 pont)

**Összesen: 16 pont**