MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK
EMELT SZINT

Halmazok

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Egy gimnázium egyik érettségiző osztályába 30 tanuló jár, közülük 16 lány. A lányok testmagassága centiméterben mérve az osztályozó naplóbeli sorrend szerint:
166; 175; 156; 161; 159; 171; 167; 169; 160; 159; 168; 161; 165; 158; 170; 159

a) Számítsa ki a lányok testmagasságának átlagát! Mekkora az osztály tanulóinak centiméterben mért átlagmagassága egy tizedesjegyre kerekítve, ha a fiúk átlagmagassága 172,5 cm? (5 pont)

Ebben a 30 fős osztályban a tanulók három idegen nyelv közül választhattak, ezek az angol, német és francia.

b) Hányan tanulják mindhárom nyelvet, és hányan nem tanulnak franciát, ha tudjuk a következőket:
(1) minden diák tanul legalább két nyelvet.
(2) Az angol is és németet is tanuló diákok száma megegyezik a franciát tanuló diákok számával.
(3) Angolul 27-en tanulnak.
(4) A németet is és franciát is tanulók száma 15. (7 pont)

2) Anett és Berta egy írott szöveget figyelmesen átolvasott. Anett 24 hibát talált benne, Berta 30-at. Ezek között 12 hiba volt csak, amit mindketten észrevettek. Később Réka is átnézte ugyanazt a –javítatlan- szöveget, és ő is 30 hibát talált. Réka az Anett által megtalált hibákból 8-at vett észre, a Berta által észleltekből 11-et. Mindössze 5 olyan hiba volt, amit mind a hárman észrevettek.

a) Együtt összesen a szöveg hány hibáját fedezték fel? (9 pont)
b) A megtalált hibák hány százalékát vették észre legalább ketten? (4 pont)

3) A Kovács családban 4 embernek kezdődik a keresztneve B betűvel. Négyen teniszeznek, és négyen kerékpároznak rendszeresen.
A család tagjairól tudjuk:
- csak Bea és Barbara jár teniszezni és kerékpározni is;
- egyedül Balázs nem űzi egyik sportágat sem
- Zoli próbálja testvérét, Borit a teniszezőktől hozzájuk, a kerékpározókhoz csábítani- sikertelenül.

a) A fentiek alapján legalább hány tagja van a Kovács családnak? (5 pont)

Egyik nap Barbara, Bea, Bori és Balázs barátaikkal vonaton utaztak, és hogy jobban teljen az idő, játszottak. A játék kezdetekor a társaság minden tagjának egy-egy olyan háromjegyű pozitív számra kellett gondolnia, amelynek minden számjegye 4-nél nagyobb és 7-nél kisebb. Amikor sorra megmondták a gondolt számot, kiderült, hogy nincs a mondott számok között azonos.

b) Legfeljebb hány tagú lehetett a társaság? (3 pont)

Egy másik alkalommal Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt.

c) A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnevűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé? (5 pont)

d) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a c) pont szerinti ülésrend alakul ki, ha minden ülésrend egyenlően valószínű? (3 pont)

4) Legyen $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\sqrt{x-1}\geq\sqrt{5-x}\right\}$ és $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\log_{\frac{1}{2}}(2x-4)>-2\right\}$. Adja meg az $A\cup B$, $A\cap B$, $B\setminus A$ halmazokat! (13 pont)

5) Egy város 18 étterme közül 11-ben reggelit, 11-ben vegetáriánus menüt lehet kapni, és 10-ben van felszolgálás. Mind a 18 étterem legalább egy szolgáltatást nyújt az előző három közül. Öt étteremben adnak reggelit, de nincs vegetáriánus menü. Azok közül az éttermek közül, ahol reggelizhetünk, ötben van felszolgálás. Csak egy olyan étterem van, ahol mindhárom szolgáltatás megtalálható.

a) Hány étteremben ehet vegetáriánus menüt kapni, de reggelit nem? (5 pont)

b) Hány olyan étterem van, ahol felszolgálnak vegetáriánus menüt? (6 pont)

c) A Kiskakas étteremben minden vendég a fizetés után nyereménysorsoláson vehet részt. Két urnát tesznek elé, amelyekben golyócskák rejtik a város egy-egy éttermének nevét. Az *A* urnában a város összes vendéglőjének neve szerepel, mindegyik pontosan egyszer. A *B* urnában azoknak az éttermeknek a neve található, –mindegyik pontosan egyszer– amelyikben nincs felszolgálás. A vendég tetszés szerint húzhat egy golyót. Ha a húzott étteremben van reggelizési lehetőség, akkor a vendég egy heti ingyen reggelit nyer, ha nincs, nem nyer. Melyik urnából húzva nagyobb a nyerés valószínűsége? (5 pont)

6)

a) Egy osztály tanulói a tanév során három kiránduláson vehettek részt. Az elsőn az osztály tanulóinak 60 százaléka vett részt, a másodikon 70 százalék, a harmadikon 80 százalék. Így három tanuló háromszor, a többi kétszer kirándult.
Hány tanulója van az osztálynak? (6 pont)

b) A három közül az első kiránduláson tíz tanuló körmérkőzésen asztalitenisz-bajnokságot játszott. (Ez azt jelenti, hogy a tíz tanuló közül mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést vívott.)
Mutassa meg, hogy 11 mérkőzés után volt olyan tanuló, aki legalább háromszor játszott! (4 pont)

c) A második kirándulásra csak az osztály kosárlabdázó tanulói nem tudtak elmenni, mivel éppen mérkőzésük volt. A kosarasok átlagmagassága 182 cm, az osztály átlagmagassága 174,3 cm.
Számítsa ki a kiránduláson részt vevő tanulók átlagmagasságát! (6 pont)

7) Jelölje A az $\frac{x+4}{x-3} \le 0$ egyenlőtlenség egész megoldásainak a halmazát, B pedig az $|x+3| < 4$ egyenlőtlenség egész megoldásainak a halmazát. Elemei felsorolásával adja meg az $A \cap B$, az $A \setminus B$ és az $A \cup B$ halmazt! (11 pont)

8) Jelölje H a $\sqrt{5,2-x} \le 3$ egyenlőtlenség pozitív egész megoldásainak halmazát. Jelölje továbbá B azon pozitív egész b számok halmazát, amelyekre a $\log_b 2^6$ kifejezés értéke is pozitív egész szám. Elemeinek felsorolásával adja meg a H, a B, a $H \cap B$ és a $B \setminus H$ halmazt! (11 pont)

9) Három ponthalmazt vizsgálunk a derékszögű koordináta-rendszer (S) síkjában. Az A halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátái: $4x-3y \ge 18$, azaz $A := \{P(x;y) \in S \mid 4x-3y \ge 18\}$;

a B halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira: $x^2+y^2-6x+4y-12 \le 0$,

azaz $B := \{P(x;y) \in S \mid x^2+y^2-6x+4y-12 \le 0\}$,

a C halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira: $y^2 = 4$, azaz $C := \{P(x;y \in S) \mid y^2 = 4\}$.

a) Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a három halmazt! Fogalmazza meg, milyen geometriai alakzatok az A, a B és a C halmaz pontjai! (8 pont)

b) Ábrázolja újabb koordináta-rendszerben a $B \setminus A$ halmazt! Fogalmazza meg pontosan, hogy milyen geometriai alakzatot alkot ez a ponthalmaz? (4 pont)

c) Ábrázolja a $B \cap C$ halmazt! Ennek a ponthalmaznak melyik $P(x;y)$ pontja van a legközelebb illetve a legtávolabb a koordináta-rendszer origójától? (4 pont)