MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI
EMELT SZINT

Gráfelmélet

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1)

a) Döntse el az alábbi négy állítás közül melyik igaz és melyik hamis! Válaszát írja a táblázatba! (4 pont)
A: Egy 6 pontot tartalmazó teljes gráfnak 15 éle van
B: Ha egy teljes gráfnak páros számú éle van, akkor a pontok száma is páros:
C: Ha egy 51 pontú gráfban nincs kör, akkor legfeljebb 50 éle lehet.
D: Nincs olyan 6 pontú gráf, amelyben a fokszámok összege 11.

A	B	C	D

b) Ha valaki sohasem hallott a gráfokról, és mégis kitölti a fenti táblázatot, akkor mekkora valószínűséggel lesz helyes mind a négy válasza? (3 pont)

c) Tagadja az alábbi mondatot:
„Nincs olyan szerelem, aki el nem múlik” (*Népdalgyűjtés*) (3 pont)

d) Fogalmazzon meg egy olyan szöveges feladatot, amelynek a megoldása így számítható ki: $\binom{17}{2}$. (3 pont)

Megoldás:

a)

A	B	C	D
Igaz	**Hamis**	**Igaz**	**Igaz**

(4 pont)

b) Összesen $2^4 = 16$ kitöltés lehetséges. (1 pont)
Ezek közül csak 1 helyes (1 pont)
Így a valószínűség $\frac{1}{16}$ (1 pont)

c) **Van olyan szerelem, amelyik nem múlik el** (3 pont)

d) Például: **Hány egyenest határoz meg a sík 17 pontja, ha nincs közöttük három egy egyenesre illeszkedő?** (3 pont)

Összesen: 13 pont

2)

a) A következő két állításról döntse el, hogy igaz vagy hamis. Válaszait indokolja! (6 pont)

- **Van olyan ötpontú egyszerű gráf, amelynek 11 éle van.**
- **Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan van negyedfokú csúcsa is.**

b) Az *A*, *B*, *C*, *D* és *E* pontok egy ötpontú teljes gráf csúcsai. A gráf élei közül véletlenszerűen beszínezünk hatot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az *A*, *B*, *C*, *D*, *E* pontokból és a színezett élekből álló gráf nem lesz összefüggő? (10 pont)

Megoldás:

a) Az első állítás **hamis** (1 pont)
Egy ötpontú egyszerű gráfban **legfeljebb 10 él húzható**. (2 pont)
A második állítás **igaz** (1 pont)
Ha a gráf minden csúcsa harmadfokú volna, akkor a gráfban **a fokszámok összege páratlan lenne**, ami lehetetlen. (2 pont)

b) Ha úgy színeztünk be 6 élt, hogy kaptunk egy négypontú teljes részgráfot és egy izolált pontot, akkor ez a gráf nem összefüggő, tehát jó. (2 pont)
Másképp nem kaphattunk nem összefüggő gráfot, hiszen ha egy két- és egy hárompontú komponense lenne, akkor legfeljebb 4 él lehetne. (2 pont)
Az első típushoz ötféleképpen választhatjuk ki az izolált pontot, és ez már meghatározza a 6 beszínezhető élt, tehát az ilyen gráfok száma 5. (2 pont)
Az ötpontú teljes gráfnak 10 éle van (1 pont)
Ezek közül $\binom{10}{6}$ féleképpen választhatjuk ki a 6 kiszínezendő élt. (2 pont)
A keresett valószínűség tehát $p = \frac{5}{20} \approx \mathbf{0,024}$ (1 pont)

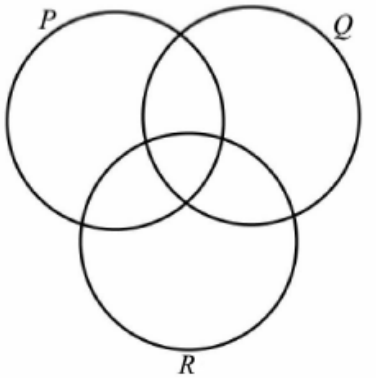
Összesen: 16 pont

3) Tekintsük a következő, egyszerű gráfokra vonatkozó állítást:
Ha a gráf minden pontjának fokszáma legalább 2, akkor a gráf biztosan összefüggő.

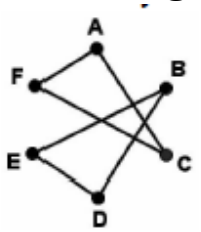
a) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás! Válaszát indokolja! **(2 pont)**

b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása! Válaszát indokolja! **(4 pont)**

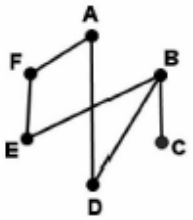
Tekintsük a következő halmazokat:
P **= {összefüggő gráfok},** ***Q*** **= {egyszerű gráfok},** ***R*** **= {kört tartalmazó gráfok}.**



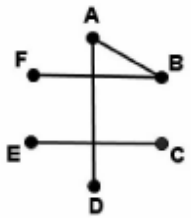
c) Helyezze el az alábbi gráfok ábrájának sorszámát a fenti halmazábrán a megfelelő helyre! **(4 pont)**



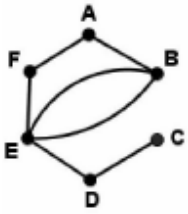
1. ábra



2. ábra

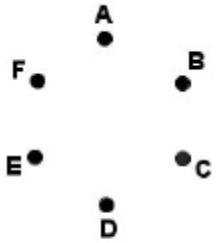


3. ábra



4. ábra

d) Rajzoljon egy 6 pontú fagráfot az 5. ábrára és helyezze el ennek a sorszámát is a fenti halmazábrában a megfelelő helyre! **(3 pont)**



5. ábra

Megoldás:

a) Az állítás **hamis** (1 pont)

Bármilyen jó ellenpélda, ami nem összefüggő, egyszerű gráf és minden pont fokszáma legalább 2 (1 pont)

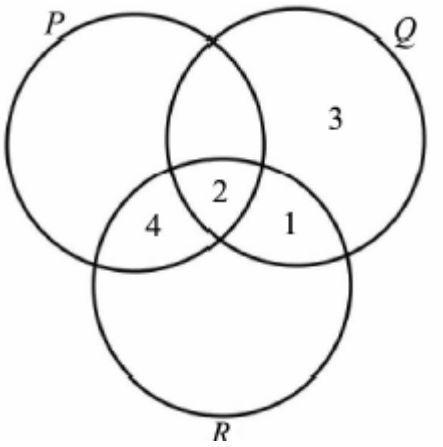
b) Az állítás megfordítása:

Ha a gráf összefüggő, akkor minden pontjának fokszáma legalább 2 (2 pont)

Az állítás **hamis** (1 pont)

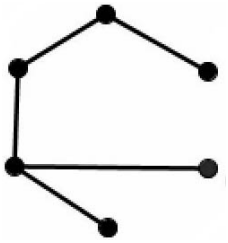
Bármilyen ellenpélda, összefüggő gráf, aminek van elsőfokú pontja (1 pont)

c) A következő behelyettesítés a jó:



(1-1 pont minden jó helyre)

d) Bármilyen jó 6 pontú fa, például:



(2 pont)

Az 5-ös sorszám elhelyezése a $(P \cap Q) \setminus R$ halmazba (1 pont)

Összesen: 13 pont

4)

a) Határozza meg az alábbi kijelentések logikai értékét (igaz-hamis)! Válaszait indokolja! (8 pont)

I. Van olyan hatpontú fagráf, amelynek minden csúcsa páratlan fokszámú

II. Ha egy hétpontú egyszerű gráfnak 15 éle van, akkor a gráf összefüggő.

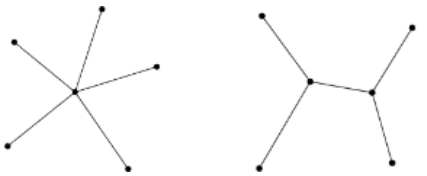
III. Van olyan fagráf amelyben a csúcsok számának és az élek számának összege páros.

Egy hatfős társaság tagjai *A*, *B*, *C*, *D*, *E* és *F*. Mindenkit megkérdeztünk, hogy hány ismerőse van a többiek között (az ismeretség kölcsönös). A válaszként kapott hat természetes szám szorzata 180. Az is kiderült, hogy *A*-nak legalább annyi ismerőse van, mint *B*-nek, *B*-nek legalább annyi ismerőse van, mint *C*-nek, és így tovább, *E*-nek legalább annyi ismerőse van, mint *F*-nek.

b) Szemléltesse egy-egy gráffal a lehetséges ismeretségi rendszereket! (8 pont)

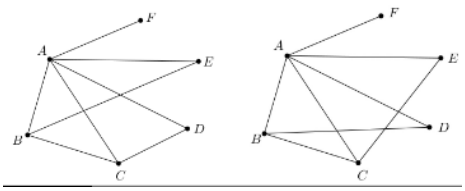
Megoldás:

a) Az I. állítás **igaz**. Megfelelő konstrukció (lásd az alábbi két példát) vagy szöveges indoklás. (2 pont)



A II. állításra ellenpélda az a hétpontú gráf, amelynek van egy hatpontú teljes részgráfja és egy izolált pontja. (2 pont)
A II. állítás tehát **hamis**. (1 pont)
Az n pontú gráfnak $n-1$ éle van, (1 pont)
ezért a csúcsok és az élek számának összege $2n-1$, ami páratlan. (1 pont)
A III. állítás tehát **hamis**. (1 pont)

b) (Ha az ismeretségek száma rendre a, b, c, d, e és f, akkor $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f =$)
$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. (1 pont)
Mivel az ismeretségi gráfban a pontok száma legfeljebb 5 (és $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq f$), (1 pont)
ezért a csúcsok fokszámai a következők lehetnek (az ismeretségek számát a névsornak megfelelően rendezve): 5, 3, 3, 2, 2, 1 (1 pont)
vagy 5, 4, 3, 3, 1, 1. (1 pont)
A második esethez nem tartozik gráf, (1 pont)
mert nincs olyan gráf, amelyben a páratlan fokszámú csúcsok száma páratlan. (1 pont)
Két lehetséges ismeretségi gráf van (például azért, mert *B*-nek és *C*-nek is van ismerőse *D* és *E* között, ezért *D* és *E* nem ismerheti egymást, így *D* az *A*-n kívül vagy *C*-t vagy *B*-t ismerheti). (2 pont)



Összesen: 16 pont

5)

a) Igazolja a következő állítást: ha egy négyszög szögei valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor a négyszög húrnégyszög vagy trapéz! (6 pont)

b) Fogalmazza meg az előző állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

Egy geometriai építőkészletben csak olyan pálcikák vannak, amelyek hossza centiméterben mérve egész szám, és mindenféle lehetséges hosszúság előfordul 1 cm-től 12 cm-ig. (Mindegyik fajta pálcikából elegendően sok van a készletben.)

c) Hány különböző módon választhatunk ki 4 pálcikát a készletből úgy, hogy belőlük egy 24 cm kerületű érintőnégyszöget lehessen építeni? (Két kiválasztást különbözőnek tekintünk, ha az egyik kiválasztás 4 pálcikája nem állítható párba a másik kiválasztás 4 pálcikájával úgy, hogy mind a 4 párban egyenlő hosszú legyen a két pálcika. Tudjuk továbbá, hogy ha *a, b, c, d* pozitív számok, és $a+c=b+d$, akkor az *a, b, c, d* hosszúságú szakaszokból szerkeszthető négyszög.) (7 pont)

Megoldás:

a) Legyen a négyszög legkisebb szöge α fok, a sorozat differenciája pedig d fok $(d \geq 0)$. Ekkor a négyszög szögei (valamilyen sorrendben) $\alpha,\ \alpha+d,\ \alpha+2d$ és $\alpha+3d$ fok nagyságúak. (1 pont)

A négyszög belső szögeinek összege 360°, ezért $4\alpha+6d=360$, (1 pont)
vagyis $2\alpha+3d=180$. (1 pont)
$2\alpha+3d=(\alpha+d)+(\alpha+2d)$, ami azt jelenti, hogy a négyszög két-két szögének összege 180°. (1 pont)
Ha a két szög szomszédos, akkor a négyszög trapéz, (1 pont)
ha pedig szemközti, akkor húrnégyszög.
Tehát az **állítást igazoltuk.** (1 pont)

b) A megfordítás: **Ha egy négyszög trapéz vagy húrnégyszög, akkor a szögei (valamilyen sorrendben) egy számtani sorozat szomszédos tagjai.** (1 pont)
A megfordítás **hamis.** (1 pont)
Egy ellenpélda. Például: egy trapéz, amelynek szögei 50°, 70°, 110° és 130° nagyságúak. (1 pont)

c) A négy kiválasztott pálcikából pontosan akkor készíthető érintőnégyszög, ha a két-két szemközti pálcika hosszának összege egyenlő. (1 pont)
A készlet négy pálcikájából tehát pontosan akkor építhető 24 cm kerületű érintőnégyszög, ha a négyszögben egymással szemben elhelyezkedő két-két oldal (centiméterben mért) hossza az $(1;11)$, $(2;10)$, $(3;9)$, $(4;8)$, $(5;7)$, $(6;6)$ számpárok valamelyike. (2 pont)
Annyiféleképpen választható ki négy megfelelő pálcika a készletből, ahányféleképpen a hat számpárból kettő (sorrendre való tekintet nélkül) kiválasztható úgy, hogy egy számpárt kétszer is választhatunk. (1 pont)
Ez a szám 6 különböző objektum másodosztályú ismétléses kombinációinak számával egyezik meg. (1 pont)
Az összes különböző lehetőségek száma tehát $\binom{6+2-1}{2}=\binom{7}{2}=$ (1 pont)
=21. (1 pont)

Összesen: 16 pont