MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK
EMELT SZINT

Gráfelmélet

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1)

a) Döntse el az alábbi négy állítás közül melyik igaz és melyik hamis! Válaszát írja a táblázatba! (4 pont)
A: Egy 6 pontot tartalmazó teljes gráfnak 15 éle van
B: Ha egy teljes gráfnak páros számú éle van, akkor a pontok száma is páros:
C: Ha egy 51 pontú gráfban nincs kör, akkor legfeljebb 50 éle lehet.
D: Nincs olyan 6 pontú gráf, amelyben a fokszámok összege 11.

A	B	C	D

b) Ha valaki sohasem hallott a gráfokról, és mégis kitölti a fenti táblázatot, akkor mekkora valószínűséggel lesz helyes mind a négy válasza? (3 pont)

c) Tagadja az alábbi mondatot:
„Nincs olyan szerelem, aki el nem múlik” (*Népdalgyűjtés*) (3 pont)

d) Fogalmazzon meg egy olyan szöveges feladatot, amelynek a megoldása így számítható ki: $\binom{17}{2}$. (3 pont)

2)

a) A következő két állításról döntse el, hogy igaz vagy hamis. Válaszait indokolja! (6 pont)
- Van olyan ötpontú egyszerű gráf, amelynek 11 éle van.
- Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan van negyedfokú csúcsa is.

b) Az A, B, C, D és E pontok egy ötpontú teljes gráf csúcsai. A gráf élei közül véletlenszerűen beszínezünk hatot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az A, B, C, D, E pontokból és a színezett élekből álló gráf nem lesz összefüggő? (10 pont)

3) Tekintsük a következő, egyszerű gráfokra vonatkozó állítást:

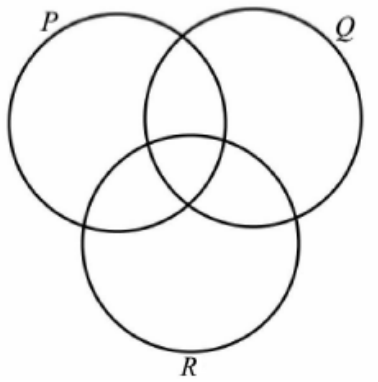
Ha a gráf minden pontjának fokszáma legalább 2, akkor a gráf biztosan összefüggő.

a) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás! Válaszát indokolja! (2 pont)

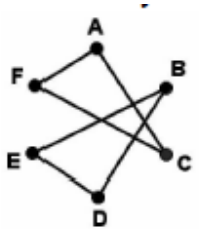
b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása! Válaszát indokolja! (4 pont)

Tekintsük a következő halmazokat:

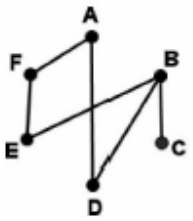
P = {összefüggő gráfok}, Q = {egyszerű gráfok}, R = {kört tartalmazó gráfok}.



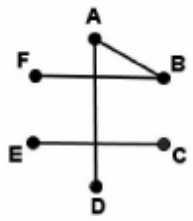
c) Helyezze el az alábbi gráfok ábrájának sorszámát a fenti halmazábrán a megfelelő helyre! (4 pont)



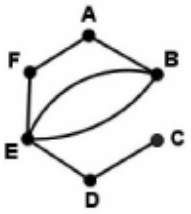
1. ábra



2. ábra

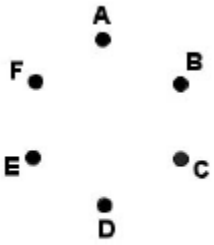


3. ábra



4. ábra

d) Rajzoljon egy 6 pontú fagráfot az 5. ábrára és helyezze el ennek a sorszámát is a fenti halmazábrában a megfelelő helyre! (3 pont)



5. ábra

4)

a) Határozza meg az alábbi kijelentések logikai értékét (igaz-hamis)! Válaszait indokolja! (8 pont)

I. Van olyan hatpontú fagráf, amelynek minden csúcsa páratlan fokszámú

II. Ha egy hétpontú egyszerű gráfnak 15 éle van, akkor a gráf összefüggő.

III. Van olyan fagráf amelyben a csúcsok számának és az élek számának összege páros.

Egy hatfős társaság tagjai A, B, C, D, E *és* F. Mindenkit megkérdeztünk, hogy hány ismerőse van a többiek között (az ismeretség kölcsönös). A válaszként kapott hat természetes szám szorzata 180. Az is kiderült, hogy A-nak legalább annyi ismerőse van, mint B-nek, B-nek legalább annyi ismerőse van, mint C-nek, és így tovább, E-nek legalább annyi ismerőse van, mint F-nek.

b) Szemléltesse egy-egy gráffal a lehetséges ismeretségi rendszereket! (8 pont)

5)

a) Igazolja a következő állítást: ha egy négyszög szögei valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor a négyszög húrnégyszög vagy trapéz! (6 pont)

b) Fogalmazza meg az előző állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

Egy geometriai építőkészletben csak olyan pálcikák vannak, amelyek hossza centiméterben mérve egész szám, és mindenféle lehetséges hosszúság előfordul 1 cm-től 12 cm-ig. (Mindegyik fajta pálcikából elegendően sok van a készletben.)

c) Hány különböző módon választhatunk ki 4 pálcikát a készletből úgy, hogy belőlük egy 24 cm kerületű érintőnégyszöget lehessen építeni? (Két kiválasztást különbözőnek tekintünk, ha az egyik kiválasztás 4 pálcikája nem állítható párba a másik kiválasztás 4 pálcikájával úgy, hogy mind a 4 párban egyenlő hosszú legyen a két pálcika. Tudjuk továbbá, hogy ha a, b, c, d pozitív számok, és $a+c=b+d$, akkor az a, b, c, d hosszúságú szakaszokból szerkeszthető négyszög.) (7 pont)