MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI
EMELT SZINT

Exponenciális és Logaritmikus kifejezések

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Igazolja, hogy az alábbi négy egyenlet közül az a) és b) jelű egyenletnek pontosan egy megoldása van, a c) és d) jelű egyenletnek viszont nincs megoldása a valós számok halmazán!

a) $\dfrac{2x^2+x-10}{2^{x-1}-2}=0$ **(4 pont)**

b) $\sqrt{x+16}+\sqrt{x-9}=5$ **(4 pont)**

c) $\lg\left(x^2+x-6\right)=\lg\left(1-x^2\right)$ **(4 pont)**

d) $\sin x-1=\sqrt{\lg\left(\cos^2 x-1{,}5\cos x\right)}$ **(4 pont)**

Megoldás:

a) A nevező nem lehet 0, ezért $2^{x-1}-2\neq 0$ (1 pont)
ebből $x\neq 2$ (1 pont)
A továbbiakban a tört akkor 0, ha számlálója 0, tehát $2x^2+x-10=0$, azaz $x_1=2$ és $x_2=-2{,}5$ (1 pont)
Így az egyenletnek csak egy valós megoldása van: $\boldsymbol{x=-2{,}5}$ (1 pont)

b) A rendezés után kapott $\sqrt{x+16}=5-\sqrt{x-9}$ egyenletet mindkét oldalról négyzetre emelve, (1 pont)
rendezés után kapjuk, hogy $10\sqrt{x-9}=0$ (1 pont)
Innen $\boldsymbol{x=9}$ (1 pont)
Behelyettesítéssel ellenőrizve ez jó megoldás. (1 pont)

c) A logaritmus értelmezése szerint: $x^2+x-6>0$ és $1-x^2>0$ (1 pont)
Az első egyenlet megoldásai azon x valós számok, amelyekre $x<-3$ vagy $x>2$ (1 pont)
a másodiké: $-1<x<1$ (1 pont)
A két egyenlőtlenség megoldáshalmazának nincs közös eleme, így az egyenletnek nincs megoldása. (1 pont)

d) A jobb oldali kifejezés az értelezési tartományán csak nem negatív lehet, így $\sin x-1\geq 0$. (1 pont)
Ez csak $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ esetén teljesül (1 pont)
De mivel $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)=0$ minden $k\in\mathbb{Z}$ esetén (1 pont)
és nullára a logaritmus nincs értelmezve, **így nincs olyan valós szám, amelyre az egyenlet értelmezve lenne, így nincs megoldása.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

2) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $(x-2)\cdot \lg(x^2-8)=0$ **(5 pont)**

b) $x^2-|x|=6$ **(5 pont)**

Megoldás:

a) A logaritmus értelmezése alapján: $x^2-8>0$ $(x<-2\sqrt{2}$ vagy $x>2\sqrt{2})$ (1 pont)
Egy szorzat értéke pontosan akkor 0, ha valamelyik szorzótényező 0.
azaz ha $x-2=0$ vagy $\lg(x^2-8)=0$

1. eset: $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ (1 pont)

2. eset: $\lg(x^2-8)=0 \Leftrightarrow \lg(x^2-8)=\lg 1$ (1 pont)

$x^2-8=1 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x_1=3$ vagy $x_2=-3$ (1 pont)

Az $x=2$ nem eleme az értelmezési tartománynak. Az értelmezési tartomány $x=3$ és $x=-3$ elemei a megoldások, mert az átalakítások ekvivalensek voltak. $\boldsymbol{M=\{3;-3\}}$ (1 pont)

b) Ha $x\geq 0$, akkor az egyenlet 0-ra redukált alakja $x^2-x-6=0$; ha $x<0$, akkor a megoldandó egyenlet: $x^2+x-6=0$ (1 pont)

1. eset: ($x^2-x-6=0$, $x\geq 0$). Az egyenlet gyökei: $x_1=3$; $x_2=-2$ (1 pont)

Csak az $x_1=3$ megoldása az egyenletnek az $x\geq 0$ feltétel miatt (1 pont)

2. eset: ($x^2+x-6=0$, $x<0$). Az egyenlet gyökei: $x_1=2$; $x_2=-3$ (1 pont)

Csak az $\boldsymbol{x_2=-3}$ megoldása az egyenletnek az $x<0$ feltétel miatt (1 pont)

Összesen: 10 pont

3) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\lg(x+7)+\lg(3x+1)=2$ **(5 pont)**

b) $2^x=3^{2x+1}$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) A logaritmus azonosságait és a 10-es alapú logaritmus szigorú monotonitását felhasználva, megoldandó a $(x+7)(3x+1)=100$ másodfokú egyenlet (1 pont)

Ezt megoldva: $x_1=-\frac{31}{3}$, $x_2=3$ (2 pont)

Mivel a bal oldal értelmezése alapján $x>-\frac{1}{3}$, ezért $x_1=-\frac{31}{3}$ nem gyöke az egyenletnek (1 pont)

Az $\boldsymbol{x=3}$ kielégíti az eredeti egyenletet. (1 pont)

b) A jobb oldalon alkalmazva a hatványozás azonosságait, megoldandó a $2^x = 3 \cdot 9^x$ egyenlet (2 pont)

Ebből rendezéssel kapjuk, hogy $\left(\frac{9}{2}\right)^x = \frac{1}{3}$ (2 pont)

Innen $x = \log_{\frac{9}{2}}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\lg\frac{1}{3}}{\lg\frac{9}{2}} \approx -0{,}7304$ (1 pont)

A kapott gyök kielégíti az eredeti egyenletet (1 pont)

Összesen: 11 pont

4) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\frac{x^2 - 10x - 24}{x^2 - x - 6} = \sin\frac{\pi}{2} + 2^{\log_2 9}$$ **(11 pont)**

Megoldás:

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$ (1 pont)

$\lg 1 = 0$ (1 pont)

$2^{\log_2 9} = 9$ (1 pont)

Így az $\frac{x^2 - 10x - 24}{x^2 - x - 6} = 10$ egyenletet kell megoldani, ebből $x^2 = 4$ (4 pont)

$x_1 = 2$ (1 pont)

$x_2 = -2$ (1 pont)

Ellenőrzés:

$x_1 = 2$ jó megoldás (1 pont)

$x_2 = -2$ nem jó megoldás (1 pont)

Összesen: 11 pont

5)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$x^2 = |x - 6|$$ **(5 pont)**

b) Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} \lg(x+y) &= 2\lg x \\ \lg x &= \lg 2 + \lg(y-1) \end{aligned}\right\}$$ **(9 pont)**

Megoldás:

a) 1. eset: $x^2 + x - 6 = 0,\ x < 6$ (1 pont)

ennek valós gyökei 2 és -3 (1 pont)

Ezek megoldásai az eredeti egyenletnek (1 pont)

2. eset: $x^2 - x + 6 = 0,\ x \geq 6$ (1 pont)

ennek nincs valós megoldása (1 pont)

Tehát az egyenlet megoldásai a **–3** és a **2**.

b) $x>0$ és $y>1$ a logaritmus értelmezése miatt (1 pont)

A logaritmus azonosságait használva

$$\left.\begin{aligned}\lg(x+y)&=\lg x^2\\ \lg x&=\lg 2(y-1)\end{aligned}\right\}$$ (2 pont)

Az lg függvény szigorú monoton nő (1 pont)

$$\left.\begin{aligned}x+y&=x^2\\ x&=2y-2\end{aligned}\right\}$$ (1 pont)

A második egyenletből kifejezzük x-et, behelyettesítve az elsőbe kapjuk, hogy

$4y^2-11y+6=0$ (1 pont)

Ennek valós gyökei 2 és 0,75 (1 pont)

Az $y>1$ miatt 0,75 nem eleme az értelmezési tartománynak (1 pont)

Ezért csak $\boldsymbol{y=2}$ és így $\boldsymbol{x=2}$ lehetséges. A $(2;2)$ számpár megoldása az egyenletnek (1 pont)

Összesen: 14 pont

6) Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\boldsymbol{0{,}5^{2-\log_{0,5}x}=3}$**, ahol** $\boldsymbol{x>0}$ **és** $\boldsymbol{x\in\mathbb{R}}$ **(4 pont)**

b) $\boldsymbol{7+6\log_x\frac{1}{2}=\log_2 x}$ **, ahol** $\boldsymbol{1<x\le 2}$ **és** $\boldsymbol{x\in\mathbb{R}}$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) Az $0{,}5^{2-\log_{0,5}x}=3$ egyenletben a hatványozás megfelelő azonosságát alkalmazva, az $\frac{0{,}5^2}{0{,}5^{\log_{0,5}x}}=3$ egyenlethez jutunk. (1 pont)

Innen a logaritmus definíciója szerint $\frac{0{,}5^2}{x}=3$ egyenlet adódik (2 pont)

Ebből $\boldsymbol{x=\frac{1}{12}}$ (1 pont)

b) Mivel $\log_x\frac{1}{2}=\frac{\log_2\frac{1}{2}}{\log_2 x}=-\frac{1}{\log_2 x}$ (1 pont)

Így a megoldandó egyenlet: $7-\frac{6}{\log_2 x}=\log_2 x$ (1 pont)

Mindkét oldalt $\log_2 x$-szel szorozva, és az egyenletet nullára redukálva:

$\log_2^2 x-7\log_2 x+6=0$ (1 pont)

A $\log_2 x$-re másodfokú egyenlet megoldásai: $\log_2 x=6$ vagy $\log_2 x=1$ (1 pont)

$x=64$ vagy $x=2$ (1 pont)

Mivel $1<x\le 2$, a 64 nem megoldás (1 pont)

A megadott halmazon az egyenleteknek egy megoldása van, a 2. (1 pont)

Összesen: 11 pont

7) Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x és y valós számok, továbbá $x>0, x\neq 1$ és $y>0, y\neq 1$.

$$\left.\begin{aligned}\log_x y+\log_y x&=2\\ \sin(2x+3y)+\sin(4x+y)&=1\end{aligned}\right\}$$

(13 pont)

Megoldás:

Áttérve azonos alapú logaritmusra: $\log_x y+\dfrac{1}{\log_x y}=2$ (2 pont)

Mivel egy pozitív számnak és a szám reciprokának összege pontosan akkor 2, ha a szám 1 (2 pont)

ezért $\log_x y=1$ (1 pont)

azaz $x=y$ (1 pont)

Behelyettesítve a második egyenletbe: $2\sin 5=1$, azaz $\sin 5x=\dfrac{1}{2}$ (1 pont)

Innen $5x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ (1 pont)

vagy $5x=\dfrac{5\pi}{6}+2l\pi$ (1 pont)

ahol $k\in\mathrm{N}$ és $l\in\mathbb{N}$ (1 pont)

A megoldások így: $\boldsymbol{x_1=y_1=\dfrac{\pi}{30}+\dfrac{2}{5}\cdot k\cdot\pi\ (k\in\mathbb{N})}$ (1 pont)

és $\boldsymbol{x_2=y_2=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2}{5}\cdot l\cdot\pi\ \ (l\in\mathbb{N})}$ (1 pont)

A kapott értékek kielégítik az egyenletet (1 pont)

Összesen: 13 pont

8) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned}\log_x\left(x^2y^3\right)+\log_y\left(x^3y\right)&=9\\ \cos(x+y)+\cos(x-y)&=0\end{aligned}\right\}$$

(16 pont)

Megoldás:

A logaritmus miatt x és y 1-től különböző pozitív számok lehetnek (1 pont)

Az első egyenlet bal oldalát alakítsuk át a logaritmus azonosságát használva:

$\log_x\left(x^2y^3\right)+\log\left(x^3y\right)=2+\log_x y+3\log_y x+1=3+3\left(\log_x y+\log_y x\right)$ (3 pont)

Így az első egyenlet: $\log_x y+\log_y x=2$ (1 pont)

A $\log_x y$ és a $\log_y x$ egymás reciprokai, és összegük 2 (2 pont)

Ez pontosan akkor teljesül, ha mindkettő 1-gyel egyenlő, amiből azt kapjuk, hogy $x=y$ (2 pont)

Beírva a második egyenletbe: $\cos 2x+\cos 0=0$, ahonnan $\cos 2x=-1$ (2 pont)

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $2x=\pi+2k\pi$,

azaz $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$ (3 pont)

Összevetve az $x,y>0$ feltétellel, $\boldsymbol{x=y=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{N}}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

9) Az alábbi három kifejezés mindegyike esetén adja meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a kifejezés értelmezhető!

a) $\cos\left(\log_2 \sqrt{x}\right)$ **(3 pont)**

b) $\sqrt{\log_2(\cos x)}$ **(5 pont)**

c) $\log_{\sqrt{x}}\left(\cos^2 x\right)$ **(5 pont)**

Megoldás:

a) A négyzetgyök miatt $x \geq 0$ (1 pont)
A logaritmus miatt $\sqrt{x} > 0$ (1 pont)
A keresett halmaz: $]0;+\infty[$ (1 pont)

b) A logaritmus miatt $\cos x > 0$ (1 pont)
A négyzetgyök miatt $\log_2(\cos x) \geq 0$ (1 pont)
azaz $\cos x \geq 1$ (1 pont)
A koszinusz függvény értékkészlete miatt $\cos x = 1$ (1 pont)
Az értelmezési tartomány tehát $\{x \in \mathbb{R} \mid x = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ (1 pont)

c) A logaritmus alapjai miatt $x > 0$ és $x \neq 1$ (1 pont)
A logaritmus miatt $\cos^2 x > 0$ (1 pont)
Tehát $\cos x \neq 0$ (1 pont)
$x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ahol $k \in \mathbb{Z}$ (1 pont)
Az értelmezési tartomány tehát
$\mathbb{R}^+ \setminus \left(\{1\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}\right)$ **ahol** $k \in \mathbb{N}$ (1 pont)

Összesen: 13 pont

10) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\sqrt{x+2} = -x$ **(4 pont)**

b) $2^{2(x-1)(x+4)} = 4^{\frac{x-1}{x+4}} \quad (x \neq -4)$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) A négyzetgyök függvény értelmezési tartománya és értékkészlete miatt: $x \in [-2;0]$ (1 pont)
Négyzetre emelés után: $x+2 = x^2$ (1 pont)
Az $x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet gyökei: 2 és -1. (1 pont)
Közülük csak a -1 eleme a fenti intervallumnak (és az átalakítások ezen az intervallumon ekvivalensek), ezért ez az egyetlen megoldás. (1 pont)
(A grafikus módszerrel való megoldásért szintén maximális pontszám jár)

b) Közös alapra hozva a két oldalt:
$4^{(x-1)(x+4)} = 4^{\frac{x-1}{x+4}}$. (1 pont)

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt az alapok elhagyhatóak:

$(x-1)(x+4)=\frac{x-1}{x+4}$ (1 pont)

Ebből $x_1=1$ vagy (2 pont)

$(x+4)^2=1$. (1 pont)

Ebből $x_2=-3$ vagy $x_3=-5$. (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

Összesen: 11 pont

11) Jelölje *H* a $\sqrt{5,2-x}\le 3$ egyenlőtlenség pozitív egész megoldásainak halmazát. Jelölje továbbá *B* azon pozitív egész *b* számok halmazát, amelyekre a $\log_b 2^6$ kifejezés értéke is pozitív egész szám. Elemeinek felsorolásával adja meg a *H*, a *B*, a $H\cap B$ és a $B\setminus H$ halmazt! (11 pont)

Megoldás:

A gyökös kifejezés értelmezési tartomány vizsgálata alapján: $x\le 5,2$. (1 pont)

Az egyenlőtlenség elvégzése során:

$5,2-x\le 9\Rightarrow -3,8\le x$ (1 pont)

Tehát azok a pozitív számok elemei *H* halmaznak, melyek $-3,8$-nál nagyobbak és 5,2-nél kisebbek:

$H=\{1;2;3;4;5\}$ (1 pont)

Ha $\log_b 2^6=k$, akkor $b^k=2^6$, ami 64. (2 pont)

A *k* kitevő pozitív egész, ezért a *b* olyan pozitív egész szám lehet, melynek valamely pozitív egész kitevős hatványa 64-gyel egyenlő: (1 pont)

$2^6=4^3=8^2=64^1=64$ (2 pont)

Ezért $B=\{2;4;8;64\}$. (1 pont)

$H\cap B=\{2;4\}$ (1 pont)

$B\setminus H=\{8;64\}$ (1 pont)

Összesen: 11 pont

12)

a) Igazolja, hogy a $\left(-\frac{1}{2}\right)$, a 0 és a 3 is gyöke a $2x^3-5x^2-3x=0$ egyenletnek, és az egyenletnek ezeken kívül más valós gyöke nincs! (5 pont)

b) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$2\cos^3 x-5\cos^2 x-3\cos x=0$ **(6 pont)**

c) Mutassa meg, hogy a $2\cdot 8^x+7\cdot 4^x+3\cdot 2^x=0$ egyenletnek nincs valós gyöke! (5 pont)

Megoldás:

a) $2x^3-5x^2-3x=x\left(2x^2-5x-3\right)=0$ (1 pont)

Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla! Az $\boldsymbol{x = 0}$ valóban gyök. (1 pont)

A többi gyököt a megmaradt másodfokú egyenletből kapjuk meg:

$2x^2 - 5x - 3 = 0$ (1 pont)

A két gyök: $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$ **és 3**, azaz a megadott három szám valóban gyöke az eredeti egyenletnek. (1 pont)

Másodfokú egyenletnek legfeljebb két különböző valós gyöke lehet, ezért több gyök nincsen. (1 pont)

b) Vezessünk be új ismeretlent: $y = \cos x$!

A $2y^3 - 5y^2 - 3y = 0$ egyenletnek keressük a valós gyökeit, melyeket az a) feladatrészből tudhatunk is: $y_1 = 0$, $y_2 = -\frac{1}{2}$, $y_3 = 3$. (1 pont)

Mivel a $\cos x$ kifejezés értéke -1 és 1 között mozoghat csak, ezért a 3 nem jó megoldás. (1 pont)

A $\cos x = 0$ egyenlet megoldása: $\boldsymbol{x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi}$, ahol $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$ (2 pont)

A $\cos x = -\frac{1}{2}$ egyenlet megoldásai: $\boldsymbol{x_{2,3} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2m\pi}$, ahol $\boldsymbol{m \in \mathbb{Z}}$ (2 pont)

c) Az egyenlet bal oldalán 2^x kiemelhető:

$2^x \cdot \left(2 \cdot 4^x + 7 \cdot 2^x + 3\right) = 0$. (1 pont)

Az exponenciális függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza, így $2^x = 0$ nem lehetséges. (1 pont)

Másodfokúra visszavezethető a megmaradt egyenlet:

$2 \cdot \left(2^x\right)^2 + 7 \cdot 2^x + 3 = 0$. (1 pont)

$2^x = -3$ vagy $2^x = -\frac{1}{2}$. (1 pont)

Az exponenciális függvény már említett értékkészlete miatt ezek nem valós gyökei, így **valóban nincs megoldása az egyenletnek**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

13) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\boldsymbol{2\sin x - 2\sin^2 x = \cos^2 x}$ **(5 pont)**

b) $\boldsymbol{25^{\lg x} = 5 + 4 \cdot 5^{\lg x}}$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) Az egyenlet jobb oldalát azonosság alkalmazásával alakítva:

$2\sin x - 2\sin^2 x = 1 - \sin^2 x$. (1 pont)

$\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$, (1 pont)

Innen $\sin x = 1$, (1 pont)

$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$, ahol $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$. (1 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

b) A logaritmus függvény értelmezése miatt $x > 0$. (1 pont)

Mivel $25^{\lg x} = \left(5^{\lg x}\right)^2$, ezért az egyenlet (1 pont)

$\left(5^{\lg x}\right)^2 - 4 \cdot 5^{\lg x} - 5 = 0$ alakban is írható. (1 pont)

Az $5^{\lg x}$-re nézve másodfokú egyenlet megoldásai:
$5^{\lg x} = -1$ és $5^{\lg x} = 5$. (1 pont)

Mivel $5^{\lg x} > 0$, ezért $5^{\lg x} = -1$ nem lehetséges. (1 pont)

Ha $5^{\lg x} = 5$, akkor $\boldsymbol{x = 10}$. (1 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

Összesen: 12 pont

14) Egy kereskedőcég bevételei két forrásból származnak: bolti árusításból és internetes eladásból. Ebben az évben az internetes árbevétel 70%-a volt a bolti árbevételnek. A cég vezetői arra számítanak, hogy a következő években az internetes eladásokból származó árbevétel évente az előző évi internetes árbevétel 4%-ával nő, a bolti eladásokból származó árbevétel viszont évente az előző évi bolti árbevétel 2%-ával csökken.

a) Számítsa ki, hány év múlva lesz a két forrásból származó árbevétel egyenlő! (8 pont)

A cég ügyfélszolgálatának hosszú időszakra vonatkozó adataiból az derült ki, hogy átlagosan minden nyolcvanadik vásárló tér vissza később valamilyen minőségi kifogással.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy 100 vásárló közül legfeljebb kettőnek lesz később minőségi kifogása! (6 pont)

Megoldás:

a) Ha a bolti eladásokból származó idei árbevétel b (Ft), akkor az internetes eladásokból származó árbevétel jelenleg $0{,}7b$ (Ft). $(b > 0)$ (1 pont)

Ha a bevételek egyenlősége x év múlva következik de, akkor $1{,}04^x \cdot 0{,}7 = 0{,}98^x \cdot b$, (1 pont)

amiből (a pozitív b-vel való osztás után) $1{,}04^x \cdot 0{,}7 = 0{,}98^x$. (1 pont)

Mindkét oldal tízes alapú logaritmusát véve és a logaritmus azonosságait felhasználva:
$x \lg 1{,}04 + \lg 0{,}7 = x \lg 0{,}98$ (2 pont)

Ebből $x = \dfrac{\lg 0{,}7}{\lg 0{,}98 - \lg 1{,}04} (\approx 6)$ (1 pont)

A két forrásból származó árbevétel **6 év múlva** lesz (körülbelül) egyenlő. (1 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

b) Annak a valószínűsége, hogy egy vevő reklamál: $\frac{1}{80}$,

annak a valószínűsége, hogy nem reklamál: $\frac{1}{79}$ (1 pont)

$P(\text{legfeljebb 2 reklamál}) = P(\text{senki nem reklamál}) +$ (1 pont)

$P(1 \text{ reklamál}) + P(2 \text{ reklamál}) =$

$\left(\frac{79}{80}\right)^{100} + \binom{100}{1}\left(\frac{1}{80}\right)\left(\frac{79}{80}\right)^{99} + \binom{100}{2}\left(\frac{1}{80}\right)^2\left(\frac{79}{80}\right)^{98} \approx$ (3 pont)

$\mathbf{(\approx 0,2843 + 0,3598 + 0,2255) \approx 0,87}$ (1 pont)

Összesen: 14 pont