MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK EMELT SZINT

Exponenciális és Logaritmikus kifejezések

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Igazolja, hogy az alábbi négy egyenlet közül az a) és b) jelű egyenletnek pontosan egy megoldása van, a c) és d) jelű egyenletnek viszont nincs megoldása a valós számok halmazán!

a) $\dfrac{2x^2+x-10}{2^{x-1}-2}=0$ (4 pont)

b) $\sqrt{x+16}+\sqrt{x-9}=5$ (4 pont)

c) $\lg\left(x^2+x-6\right)=\lg\left(1-x^2\right)$ (4 pont)

d) $\sin x-1=\sqrt{\lg\left(\cos^2 x-1{,}5\cos x\right)}$ (4 pont)

2) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $(x-2)\cdot\lg\left(x^2-8\right)=0$ (5 pont)

b) $x^2-|x|=6$ (5 pont)

3) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\lg(x+7)+\lg(3x+1)=2$ (5 pont)

b) $2^x=3^{2x+1}$ (6 pont)

4) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\frac{x^2-10x-24}{x^2-x-6}=\sin\frac{\pi}{2}+2^{\log_2 9}$$ (11 pont)

5)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$x^2=|x-6|$ (5 pont)

b) Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned}\lg(x+y)&=2\lg x\\ \lg x&=\lg 2+\lg(y-1)\end{aligned}\right\}$$ (9 pont)

6) Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $0{,}5^{2-\log_{0,5} x}=3$, ahol $x>0$ és $x\in\mathbb{R}$ (4 pont)

b) $7+6\log_x\frac{1}{2}=\log_2 x$, ahol $1<x\le 2$ és $x\in\mathbb{R}$ (7 pont)

7) Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x és y valós számok, továbbá $x>0,\ x\neq 1$ és $y>0,\ y\neq 1$.

$$\left.\begin{aligned}\log_x y+\log_y x&=2\\ \sin(2x+3y)+\sin(4x+y)&=1\end{aligned}\right\}$$ (13 pont)

8) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned}\log_x\left(x^2y^3\right)+\log_y\left(x^3y\right)&=9\\ \cos(x+y)+\cos(x-y)&=0\end{aligned}\right\}$$

(16 pont)

9) Az alábbi három kifejezés mindegyike esetén adja meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a kifejezés értelmezhető!

a) $\cos\left(\log_2\sqrt{x}\right)$ (3 pont)

b) $\sqrt{\log_2(\cos x)}$ (5 pont)

c) $\log_{\sqrt{x}}\left(\cos^2 x\right)$ (5 pont)

10) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\sqrt{x+2}=-x$ (4 pont)

b) $2^{2(x-1)(x+4)}=4^{\frac{x-1}{x+4}}\qquad (x\neq -4)$ (7 pont)

11) Jelölje H a $\sqrt{5{,}2-x}\le 3$ egyenlőtlenség pozitív egész megoldásainak halmazát. Jelölje továbbá B azon pozitív egész b számok halmazát, amelyekre a $\log_b 2^6$ kifejezés értéke is pozitív egész szám. Elemeinek felsorolásával adja meg a H, a B, a $H\cap B$ és a $B\setminus H$ halmazt! (11 pont)

12)

a) Igazolja, hogy a $\left(-\frac{1}{2}\right)$, a 0 és a 3 is gyöke a $2x^3-5x^2-3x=0$ egyenletnek, és az egyenletnek ezeken kívül más valós gyöke nincs! (5 pont)

b) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$2\cos^3 x-5\cos^2 x-3\cos x=0$ (6 pont)

c) Mutassa meg, hogy a $2\cdot 8^x+7\cdot 4^x+3\cdot 2^x=0$ egyenletnek nincs valós gyöke! (5 pont)

13) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $2\sin x-2\sin^2 x=\cos^2 x$ (5 pont)

b) $25^{\lg x}=5+4\cdot 5^{\lg x}$ (7 pont)

14) Egy kereskedőcég bevételei két forrásból származnak: bolti árusításból és internetes eladásból. Ebben az évben az internetes árbevétel 70%-a volt a bolti árbevételnek. A cég vezetői arra számítanak, hogy a következő években az internetes eladásokból származó árbevétel évente az előző évi internetes árbevétel 4%-ával nő, a bolti eladásokból származó árbevétel viszont évente az előző évi bolti árbevétel 2%-ával csökken.

a) Számítsa ki, hány év múlva lesz a két forrásból származó árbevétel egyenlő! (8 pont)

A cég ügyfélszolgálatának hosszú időszakra vonatkozó adataiból az derült ki, hogy átlagosan minden nyolcvanadik vásárló tér vissza később valamilyen minőségi kifogással.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy 100 vásárló közül legfeljebb kettőnek lesz később minőségi kifogása! (6 pont)