MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI
EMELT SZINT

Egyenletek, egyenletrendszerek

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$x^2 = |x-6|$$ **(5 pont)**

b) Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} \lg(x+y) &= 2\lg x \\ \lg x &= \lg 2 + \lg(y-1) \end{aligned}\right\}$$ **(9 pont)**

Megoldás:

a) 1. eset: $x^2 + x - 6 = 0,\ x < 6$ (1 pont)
ennek valós gyökei 2 és -3 (1 pont)
Ezek megoldásai az eredeti egyenletnek (1 pont)
2. eset: $x^2 - x + 6 = 0,\ x \geq 6$ (1 pont)
ennek nincs valós megoldása (1 pont)
Tehát az egyenlet megoldásai a **–3** és a **2**.

b) $x > 0$ és $y > 1$ a logaritmus értelmezése miatt (1 pont)
A logaritmus azonosságait használva

$$\left.\begin{aligned} \lg(x+y) &= \lg x^2 \\ \lg x &= \lg 2(y-1) \end{aligned}\right\}$$ (2 pont)

Az lg függvény szigorú monoton nő (1 pont)

$$\left.\begin{aligned} x+y &= x^2 \\ x &= 2y-2 \end{aligned}\right\}$$ (1 pont)

A második egyenletből kifejezzük *x*-et, behelyettesítve az elsőbe kapjuk, hogy
$4y^2 - 11y + 6 = 0$ (1 pont)
Ennek valós gyökei 2 és 0,75 (1 pont)
Az $y > 1$ miatt 0,75 nem eleme az értelmezési tartománynak (1 pont)
Ezért csak $y = 2$ és így $x = 2$ lehetséges. A $(2;2)$ számpár megoldása az egyenletnek (1 pont)

Összesen: 14 pont

2)

a) **Mely valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőtlenséget?**
$(x-1)^3-(x+1)^3>-8$ **(4 pont)**

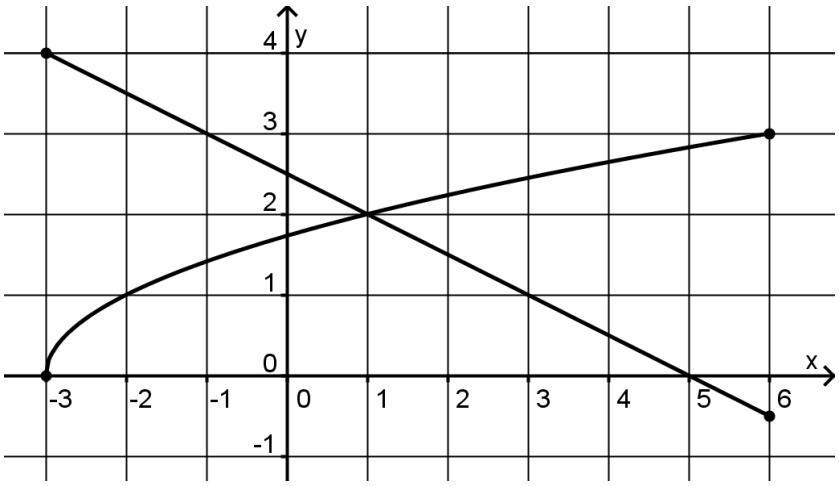
b) **Az alábbi *f* és *g* függvényt is a $[-3;6]$ intervallumon értelmezzük.**
$f(x)=\sqrt{x+3}$ **és** $g(x)=-0,5x+2,5$.
Ábrázolja közös koordináta-rendszerben az *f* és *g* függvényt a $[-3;6]$ intervallumon! Igazolja számítással, hogy a két grafikon metszéspontjának mindkét koordinátája egész szám! **(4 pont)**

c) **Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!**
$0,5x+\sqrt{x+3}\le 2,5$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) Elvégezve a köbre emelést: $(x^3-3x^2+3x-1)-(x^3+3x^2+3x+1)>-8$ (2 pont)
összevonva és rendezve: $x^2<1$ (1 pont)
a megoldáshalmaz tehát a $]-\mathbf{1;1}[$ intervallum (1 pont)

b)



f függvény helyes ábrázolása (2 pont)
g függvény helyes ábrázolása (1 pont)
a metszéspont koordinátái $(\mathbf{1;2})$ (1 pont)

c) A megoldandó egyenlőtlenség ekvivalens a $\sqrt{x+3}\le -0,5x+2,5$ egyenlőtlenséggel (1 pont)
A bal oldal nem negatív (1 pont)
a jobb oldal 5-nél nagyobb *x*-ekre negatív (1 pont)
Az egyenlőtlenség megoldásait a $[-3;6]$ intervallumon a b) részben ábrázolt *f* és *g* függvényekről leolvashatjuk (1 pont)
A megoldáshalmaz a $[-\mathbf{3;1}]$ intervallum (2 pont)

Összesen: 14 pont

3) Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x és y valós számok, továbbá $x>0, x\neq 1$ és $y>0, y\neq 1$.

$$\left.\begin{aligned}\log_x y+\log_y x&=2\\ \sin(2x+3y)+\sin(4x+y)&=1\end{aligned}\right\}$$

(13 pont)

Megoldás:

Áttérve azonos alapú logaritmusra: $\log_x y+\dfrac{1}{\log_x y}=2$ (2 pont)

Mivel egy pozitív számnak és a szám reciprokának összege pontosan akkor 2, ha a szám 1 (2 pont)

ezért $\log_x y=1$ (1 pont)

azaz $x=y$ (1 pont)

Behelyettesítve a második egyenletbe: $2\sin 5=1$, azaz $\sin 5x=\dfrac{1}{2}$ (1 pont)

Innen $5x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ (1 pont)

vagy $5x=\dfrac{5\pi}{6}+2l\pi$ (1 pont)

ahol $k\in\mathbb{N}$ és $l\in\mathbb{N}$ (1 pont)

A megoldások így: $\boldsymbol{x_1=y_1=\dfrac{\pi}{30}+\dfrac{2}{5}\cdot k\cdot\pi\ (k\in\mathbb{N})}$ (1 pont)

és $\boldsymbol{x_2=y_2=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2}{5}\cdot l\cdot\pi\ \ (l\in\mathbb{N})}$ (1 pont)

A kapott értékek kielégítik az egyenletet (1 pont)

Összesen: 13 pont

4)

a) Ábrázolja a derékszögű koordinátarendszerben az $f:[0;5]\to\mathbb{R}, f(x)=|x^2-4x+3|$ függvényt! (5 pont)

b) Tekintsük az $|(x-2)^2-1|=k$ paraméteres egyenletet, ahol k valós paraméter. Vizsgálja a megoldások számát a k paraméter függvényében! (7 pont)

c) Ábrázolja a megoldások számát megadó függvényt a $k\in\,]-6;6[$ intervallumon! (2 pont)

d) Adja meg a c)-beli függvény értékkészletét! (2 pont)

Megoldás:

a) $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|=\left|(x-2)^2-1\right|$ (1 pont)

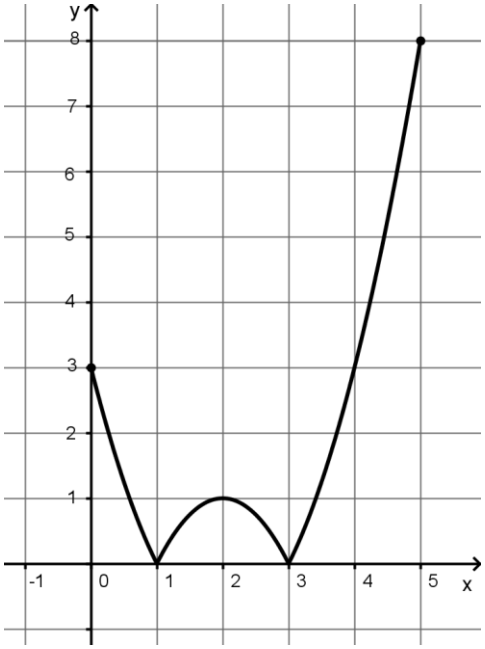
Az $y=(x-2)^2-1$ parabola tengelypontja $(2;-1)$ (1 pont)

az x tengelyt az $(1;0)$ és $(3;0)$ pontokban metszi (1 pont)

Jó ábrázolás, leszűkítés a $[0;5]$ intervallumra (1 pont)

Az abszolút érték figyelembe vétele (1 pont)

Helyes ábra:



b) A megoldások számát az $f(x)$ teljes grafikonja és az $y=k$ egyenes közös pontjainak száma adja (2 pont)

Ha $k>1$, akkor két közös pontja van (1 pont)

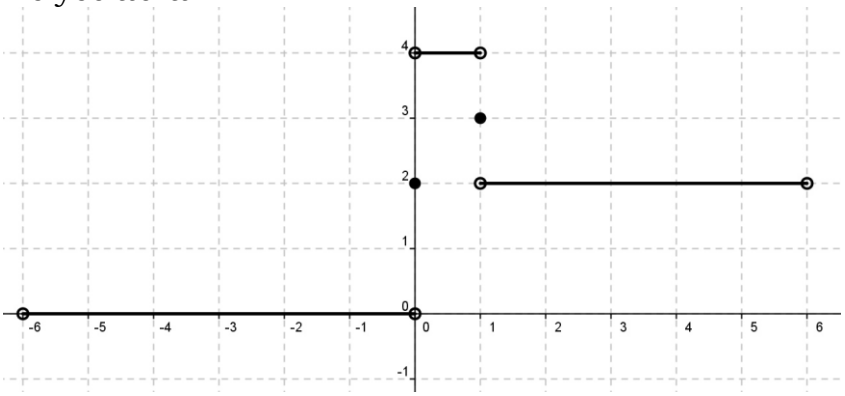
Ha $k=1$, akkor három közös pontja van (1 pont)

Ha $0<k<1$, akkor négy közös pontja van (1 pont)

Ha $k=0$, akkor két közös pontja van (1 pont)

Ha $k<0$, akkor nincs közös pont (1 pont)

c) Helyes ábra



(2 pont)

d) Értékkészlete: $\boldsymbol{R_f=\{0;2;3;4\}}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

5) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned}\log_x\left(x^2y^3\right)+\log_y\left(x^3y\right)&=9\\ \cos(x+y)+\cos(x-y)&=0\end{aligned}\right\}$$

(16 pont)

Megoldás:

A logaritmus miatt x és y 1-től különböző pozitív számok lehetnek (1 pont)

Az első egyenlet bal oldalát alakítsuk át a logaritmus azonosságát használva:

$\log_x\left(x^2y^3\right)+\log\left(x^3y\right)=2+\log_x y+3\log_y x+1=3+3\left(\log_x y+\log_y x\right)$ (3 pont)

Így az első egyenlet: $\log_x y+\log_y x=2$ (1 pont)

A $\log_x y$ és a $\log_y x$ egymás reciprokai, és összegük 2 (2 pont)

Ez pontosan akkor teljesül, ha mindkettő 1-gyel egyenlő, amiből azt kapjuk, hogy $x=y$ (2 pont)

Beírva a második egyenletbe: $\cos 2x+\cos 0=0$, ahonnan $\cos 2x=-1$ (2 pont)

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $2x=\pi+2k\pi$,

azaz $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$ (3 pont)

Összevetve az $x,y>0$ feltétellel, $\boldsymbol{x=y=\frac{\pi}{2}+k\pi}$, $\boldsymbol{k\in\mathbb{N}}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

6) Egy város sportklubjának 640 fős tagságát felnőttek és diákok alkotják. A tagság 55%-a sportol rendszeresen. A rendszeresen sportoló tagok számának és a sportklub teljes taglétszámának az aránya $\frac{11}{8}$-szor akkora, mint a rendszeresen sportoló felnőttek számának aránya a felnőtt klubtagok számához viszonyítva. A rendszeresen sportolók aránya a felnőtt tagságban fele akkora, mint amekkora ez az arány a diákok között. Hány felnőtt és hány diák tagja van ennek a sportklubnak? (13 pont)

Megoldás:

Jelölje f a sportklub felnőtt tagjainak számát. Ekkor a diákok száma a sportklubban $640-f$. (1 pont)

A rendszeresen sportolók száma 640-nek a az 55%-a, $0{,}55\cdot 640=352$ fő. (1 pont)

A rendszeresen sportolók aránya a teljes tagságban 0,55. Ennek a $\frac{8}{11}$-ed része, vagyis $0{,}55\cdot\frac{8}{11}=0{,}4$ a rendszeresen sportolók aránya a felnőttek között. (2 pont)

A rendszeresen sportolók aránya a diákok között ennek az arányszámnak a kétszerese, vagyis 0,8 (1 pont)

A rendszeresen sportoló felnőttek száma $0{,}4\cdot f$ (1 pont)

A rendszeresen sportoló diákok száma $0{,}8\cdot(640-f)$ (1 pont)

A rendszeresen sportolók száma e két létszám összege:
$0,4f + 0,8 \cdot (640 - f) = 352$ (2 pont)

Innen $f = 400$ (1 pont)

és $640 - f = 240$ (1 pont)

A felnőtt tagok száma 400, a diákok száma 240 (1 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

Összesen: 13 pont

7) Egy egyetem 10 580 hallgatójának tanulmányi lapjáról összesítették az angol és német nyelvvizsgák számát. Kiderült, hogy a német nyelvvizsgával nem rendelkezők 70%-ának, a német nyelvvizsgával rendelkezők 30%-ának nincs angol nyelvvizsgája. Az angol nyelvvizsgával nem rendelkezők 60%-ának nyelvvizsgája sincs.

a) Ezek közül a hallgatók közül hányan rendelkeznek angol és hányan német nyelvvizsgával? (12 pont)

b) A hallgatók hány százaléka rendelkezett angol és német nyelvvizsgák mindegyikével? (4 pont)

Megoldás:

a) Szemléltessük a feltételeket ábrával, ahol a hallgatók közül x főnek nincs német nyelvvizsgája és $(10580 - x)$ főnek van német nyelvvizsgája,

	nincs német nyelvvizsgája (x fő)	van német nyelvvizsgája $(10580 - x)$
nincs angol nyelvvizsgája	nincs sem német, sem angol nyelvvizsgája	van német, de nincs angol nyelvvizsgája
van angol nyelvvizsgája	nincs német, de van angol nyelvvizsgája	német és angol nyelvvizsgája is van

A feladat helyes értelmezése (komplementer halmazok) (1 pont)

A feladat feltétele alapján az x fő 70%-ának, vagyis $0,7x$ főnek nincs sem német, sem angol nyelvvizsgája (1 pont)

és a $(10580 - x)$ fő 30%-ának vagyis főnek van német, de nincs angol nyelvvizsgája (1 pont)

Tehát nincs angol nyelvvizsgája $0,7x + 0,3 \cdot (10580 - x) =$ (1 pont)

$= 3174 + 0,4x$ főnek (1 pont)

Így a feladat feltétele szerint a $(3174 + 0,4x)$ fő 60%-ának, vagyis $0,6 \cdot (3174 + 0,4x)$ főnek nincs sem német, sem angol nyelvvizsgája (1 pont)

$0,7x = 0,6 \cdot (3174 + 0,4x)$ (1 pont)

Innen $x = 4140$ (2 pont)

A német nyelvvizsgával rendelkezők száma: $(10580 - x) =$ **6440 fő** (1 pont)

Nincs angol nyelvvizsgája $3174 + 0,4x = 4830$ főnek (1 pont)

Van angol nyelvvizsgája $10580 - 4830 =$ **5750 főnek** (1 pont)

b) A német vizsgával rendelkezők 6440 fő 30%-a, (vagyis 1932 fő) nem vizsgázott angolból (1 pont)

vagyis a német nyelvvizsgával rendelkezők 70%-a angolból is vizsgázott, ezek száma 4508 fő (1 pont)

$\frac{4508}{10580} = 0,426$ (1 pont)

A hallgatók **42,6 %-**ának van angolból és németből is vizsgája (1 pont)

Összesen: 16 pont

8) Egy áruházban egy mosóport négyféle kiszerelésben árusítanak. Az első kiszerelés 50%-kal drágább a harmadiknál, és 20%-kal kevesebb mosópor van benne, mint a másodikban. A második 50%-kal több mosóport tartalmaz, mint a harmadik, és 25%-kal többe kerül, mint az első.

a) Az első három kiszerelés közül melyikben a legalacsonyabb a mosópor egységára? (13 pont)

A negyedik fajta kiszerelést úgy állították össze, hogy annak dobozán a feltüntetett egységár megegyezett az első három kiszerelés átlagos egységárával.

b) Ha a legolcsóbb kiszerelésű dobozon 600 Ft egységárat tüntettek fel, akkor hány forint egységár szerepel a negyedik fajta dobozon?(3 pont)

Megoldás:

a) (12 pont)

	1.	2.	3.
ár	$1,5x$	$1,25 \cdot 1,5x = 1,875x$	x
tömeg	$1,5 \cdot 0,8y = 1,2y$	$1,5y$	y
egységár = $\frac{\text{ár}}{\text{tömeg}}$	$\frac{1,5x}{1,2y} = 1,25\frac{x}{y}$	$\frac{1,875x}{1,5y} = 1,25\frac{x}{y}$	$\frac{x}{y}$

Tehát a harmadik kiszerelés egységára a legalacsonyabb (1 pont)

b) Ha a legolcsóbb kiszerelés egységára 600 Ft, a másik kettőé ennek a 125%-a, azaz 750-750 Ft (1 pont)

A három kiszerelés átlagos egységára: $\frac{600+750+750}{3} = 700$ (1 pont)

A negyedik kiszerelésen **700 Ft** egységár szerepel (1 pont)

Összesen: 16 pont

9) A mosogatógépünkön háromféle program van. Egy mosogatáshoz az *A* program 20%-kal több elektromos energiát, viszont 10%-kal kevesebb vizet használ, mint a *B* program.

A *B* program 30%-kal kevesebb elektromos energiát és 25%-kal több vizet használ mosogatáshoz, mint a *C* program.

Mindhárom program futtatásakor 40 Ft-ba kerül az alkalmazott mosogatószer. Egy mosogatás az *A* programmal 151 Ft-ba, *B* programmal 140 Ft-ba kerül.

Mennyibe kerül a *C* programmal a mosogatás? (14 pont)

Megoldás:

A B program x Ft értékű elektromos energiát és y Ft értékű vizet használ egy mosogatás alkalmával (1 pont)
Ekkor $x+y+40=140$ (1 pont)
Az A program $1{,}2x$ Ft értékű elektromos energiát, (1 pont)
és $0{,}9y$ Ft értékű vizet használ egy mosogatáskor (1 pont)
A költségekre vonatkozó egyenlet: $1{,}2x+0{,}9y+40=151$ (1 pont)
A következő egyenletrendszert kapjuk x-re és y-ra:
(1) $x+y=100$
(2) $1{,}2x+0{,}9y=111$ (1 pont)
Az egyenletrendszert megoldva: $x=70, y=30$ (3 pont)
A feltételek alapján a C program futtatása során az elektromos energia ára:
$\frac{x}{0{,}7}=100\,\text{Ft}$ (2 pont)

a víz ára: $\frac{y}{1{,}25}=24\ \text{Ft}$ (2 pont)

A mosogatószer árát is figyelembe véve, a *C* programmal egy mosogatás 164 Ft-ba kerül (1 pont)

Összesen: 14 pont

10) Jelölje *H* a $\sqrt{5{,}2-x}\le 3$ egyenlőtlenség pozitív egész megoldásainak halmazát. Jelölje továbbá *B* azon pozitív egész *b* számok halmazát, amelyekre a $\log_b 2^6$ kifejezés értéke is pozitív egész szám. Elemeinek felsorolásával adja meg a *H*, a *B*, a $H\cap B$ és a $B\setminus H$ halmazt! (11 pont)

Megoldás:

A gyökös kifejezés értelmezési tartomány vizsgálata alapján: $x\le 5{,}2$. (1 pont)
Az egyenlőtlenség elvégzése során:
$5{,}2-x\le 9 \Rightarrow -3{,}8\le x$ (1 pont)
Tehát azok a pozitív számok elemei H halmaznak, melyek $-3{,}8$-nál nagyobbak és 5,2-nél kisebbek:
$\boldsymbol{H=\{1;2;3;4;5\}}$ (1 pont)
Ha $\log_b 2^6=k$, akkor $b^k=2^6$, ami 64. (2 pont)
A k kitevő pozitív egész, ezért a b olyan pozitív egész szám lehet, melynek valamely pozitív egész kitevős hatványa 64-gyel egyenlő: (1 pont)
$2^6=4^3=8^2=64^1=64$ (2 pont)
Ezért $\boldsymbol{B=\{2;4;8;64\}}$. (1 pont)
$\boldsymbol{H\cap B=\{2;4\}}$ (1 pont)
$\boldsymbol{B\setminus H=\{8;64\}}$ (1 pont)

Összesen: 11 pont

11)

a) **Igazolja, hogy a $\left(-\frac{1}{2}\right)$, a 0 és a 3 is gyöke a $2x^3-5x^2-3x=0$ egyenletnek, és az egyenletnek ezeken kívül más valós gyöke nincs!** **(5 pont)**

b) **Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!**
$2\cos^3 x-5\cos^2 x-3\cos x=0$ **(6 pont)**

c) **Mutassa meg, hogy a $2\cdot 8^x+7\cdot 4^x+3\cdot 2^x=0$ egyenletnek nincs valós gyöke!** **(5 pont)**

Megoldás:

a) $2x^3-5x^2-3x=x\left(2x^2-5x-3\right)=0$ (1 pont)

Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla! Az $x=0$ valóban gyök. (1 pont)

A többi gyököt a megmaradt másodfokú egyenletből kapjuk meg:

$2x^2-5x-3=0$ (1 pont)

A két gyök: $-\frac{1}{2}$ **és 3**, azaz a megadott három szám valóban gyöke az eredeti egyenletnek. (1 pont)

Másodfokú egyenletnek legfeljebb két különböző valós gyöke lehet, ezért több gyök nincsen. (1 pont)

b) Vezessünk be új ismeretlent: $y=\cos x$!

A $2y^3-5y^2-3y=0$ egyenletnek keressük a valós gyökeit, melyeket az a) feladatrészből tudhatunk is: $y_1=0$, $y_2=-\frac{1}{2}$, $y_3=3$. (1 pont)

Mivel a $\cos x$ kifejezés értéke -1 és 1 között mozoghat csak, ezért a 3 nem jó megoldás. (1 pont)

A $\cos x=0$ egyenlet megoldása: $x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$ (2 pont)

A $\cos x=-\frac{1}{2}$ egyenlet megoldásai: $x_{2,3}=\pm\frac{2\pi}{3}+2m\pi$, ahol $m\in\mathbb{Z}$ (2 pont)

c) Az egyenlet bal oldalán 2^x kiemelhető:

$2^x\cdot\left(2\cdot 4^x+7\cdot 2^x+3\right)=0$. (1 pont)

Az exponenciális függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza, így $2^x=0$ nem lehetséges. (1 pont)

Másodfokúra visszavezethető a megmaradt egyenlet:

$2\cdot\left(2^x\right)^2+7\cdot 2^x+3=0$. (1 pont)

$2^x=-3$ vagy $2^x=-\frac{1}{2}$. (1 pont)

Az exponenciális függvény már említett értékkészlete miatt ezek nem valós gyökei, így **valóban nincs megoldása az egyenletnek**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

12) Két valós szám összege 29. Ha az egyikből elveszünk 15-öt, a másikhoz pedig hozzáadunk 15-öt, az így kapott két szám szorzata éppen ötszöröse lesz az eredeti két szám szorzatának. Melyik lehet ez a két szám? (13 pont)

Megoldás:

Jelölje x azt a számot, amelyet 15-tel csökkentünk, y pedig a másikat

$$\left.\begin{aligned} x+y&=29\\ (x-15)\cdot(y+15)&=5xy\end{aligned}\right\}$$ (3 pont)

Az első egyenletből például y-t kifejezve és a második egyenletbe behelyettesítve: $(x-15)\cdot(29-x+15)=5x(29-x)$ (1 pont)

A műveleteket elvégezve:

$-x^2+59x-660=145x-5x^2$ (2 pont)

Rendezve: $4x^2-86x-660=0$ (1 pont)

Az egyenlet megoldásai a -6 és a 27,5 (2 pont)

Ha a 15-tel csökkentendő szám a **–6**, akkor a másik szám a **35** (1 pont)

Ha a 15-tel csökkentendő szám a **27,5**, akkor a másik szám a **1,5** (1 pont)

Ellenőrzés a szöveg alapján:

Ha a két szám a -6 és a 35, akkor az összegük 29, a szorzatuk -210

A megváltoztatott számok a -21 és az 50, ezek szorzata -1050, ami valóban az 5-szöröse a -210-nek. (1 pont)

Ha a két szám a 27,5 és az 1,5, akkor az összegük 29, a szorzatuk 41,25.

A megváltoztatott számok a 12,5 és a 16,5, ezek szorzata 206,25, ami valóban 5-szöröse a 41,25-nek. (1 pont)

Összesen: 13 pont

13) A tavaszi idény utolsó bajnoki mérkőzésén a Magas Fiúk Kosárlabda Klubjának (MAFKK) teljes csapatából heten léptek pályára. A mérkőzés után az edző elkészítette a hét játékos egyéni statisztikáját. Az alábbi táblázat mutatja a játékosok dobási kísérleteinek számát és az egyes játékosok dobószázalékát egészre kerekítve. (A dobószázalék megmutatja, hogy a dobási kísérleteknek hány százaléka volt sikeres.)

Játékos mezszáma	Dobási kísérletek száma	Dobószázalék
4	2	50
5	3	0
6	10	60
7	8	25
10	7	43
13	6	33
15	14	57

a) Számítsa ki, hogy mennyi volt a csapat dobószázaléka ezen a mérkőzésen! (5 pont)

Az őszi idény kezdete előtt egy hónappal a MAFKK csapatához csatlakozott egy 195 cm magas játékos, így a csapattagok magasságának átlaga a korábbi átlagnál 0,5 cm-rel nagyobb lett. Pár nap múlva egy 202 cm magas játékos is a csapat tagja lett, emiatt a csapattagok magasságának átlaga újabb 1 cm-rel nőtt.

b) Hány tagja volt a MAFKK-nak, és mekkora volt a játékosok magasságának átlaga a két új játékos csatlakozása előtt? (11 pont)

Megoldás:

a) Az egyes játékosok sikeres dobásainak száma rendre:
1, 0, 6, 2, 3, 2 és 8. (2 pont)
A csapat dobási kísérleteinek a száma a mérkőzésen 50, (1 pont)
a sikeres dobások száma 22 volt. (1 pont)
A csapat dobószázaléka 44. (1 pont)

b) A két új játékos csatlakozása előtt a csapat tagjainak száma x a tagok magasságának átlaga pedig y cm volt $(x \in \mathbb{N},\ y > 0)$. (1 pont)

(Az első játékos belépése előtt a csapattagok magasságának összege xy volt, az új játékos után $xy+195$ lett, tehát) $\dfrac{xy+195}{x+1} = y+0{,}5$. (2 pont)

Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy a második új játékos belépését követően $\dfrac{xy+195+202}{x+2} = y+1{,}5$. (2 pont)

Az egyenletek rendezése után a
$\left.\begin{aligned} 0{,}5x+y &= 194{,}5 \\ 1{,}5x+2y &= 394 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszerhez jutunk. (2 pont)

$x = 10$ és $y = 189{,}5$. (2 pont)

A csapat tagjainak száma 10, az átlagos magasságuk pedig 189,5 cm volt. (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

Összesen: 16 pont

14) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a rendezett valós számpárok halmazán!

a) $\begin{cases} 2x = 12 - y \\ 2\sqrt{x} = y \end{cases}$ **(7 pont)**

b) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{3} - \dfrac{y-3}{4} = 3 \\ \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{1}{y-3} = 0 \end{cases}$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) $x \geq 0$ (és $y \geq 0$) esetén (1 pont)

A két egyenlet összeadásával: $2x + 2\sqrt{x} = 12$ (1 pont)

$\sqrt{x} = 6 - x$, amiből (négyzetre emelés és rendezés után) $x^2 - 13x + 36 = 0$ adódik. (1 pont)

Az egyenlet gyökei: 4 és 9. (1 pont)

A 9 nem megoldása a $\sqrt{x} = 6 - x$ egyenletnek. (1 pont)

Tehát $\boldsymbol{x = 4}$**, és így** $\boldsymbol{y = 4}$. (1 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

b) Értelmezési tartomány: $x \neq -2$ és $y \neq 3$. (1 pont)

Az első egyenletből $4x - 3y = 19$. (1 pont)

A második egyenletből: $x = 3y - 11$. (1 pont)

Behelyettesítve: $4(3y - 11) - 3y = 19$. (1 pont)

$\boldsymbol{y = 7}$ (1 pont)

$\boldsymbol{x = 10}$ (1 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

Összesen: 14 pont

15) Oldja meg a $[4;6]$ alaphalmazon az alábbi egyenleteket, illetve egyenlőtlenséget!

a) $\big|5 - |x|\big| = 3$ (3 pont)

b) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+10} - 1$ (6 pont)

c) $2\cos^2 x + \cos x - 1 \leq 0$ (7 pont)

Megoldás:

b) $5 - |x| = -3$ esetén $|x| = 8$ (1 pont)

$5 - |x| = 3$ esetén $|x| = 2$ (1 pont)

Ilyen elemei nincsenek az alaphalmaznak, ezért az eredeti egyenlet megoldáshalmaza az **üres halmaz**. (1 pont)

c) Négyzetre emelve: $2x - 3 = x + 10 + 1 - 2\sqrt{x+10}$ (1 pont)

$2\sqrt{x+10} = 14 - x$ (1 pont)

Négyzetre emelve és rendezve: $x^2 - 32x + 156 = 0$ (1 pont)

$x_1 = 6,\ x_2 = 26$ (1 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

26 hamis gyök, a helyes megoldás csak a **6** (1 pont)

d) A $2\cos^2 x+\cos x-1=0$ (cos*x*-ben másodfokú) egyenlet teljesül, ha $\cos x=-1$ vagy $\cos x=0{,}5$. (2 pont)

(A megadott egyenlőtlenség cos*x*-ben másodfokú tagjának együtthatója pozitív, ezért) $-1\le\cos x\le 0{,}5$. (1 pont)

$-1\le\cos x$ minden $x\in\mathbb{R}$ esetén (így az alaphalmaz minden elemére is) igaz. (1 pont)

($[4;6]\subset[\pi;2\pi]$ miatt) a koszinuszfüggvény a [4;6] alaphalmazon szigorúan monoton növekedő, (1 pont)

és itt $\cos x=0{,}5$, ha $x=\frac{5\pi}{3}(\approx 5{,}24)$ (1 pont)

ezért az egyenlőtlenség megoldáshalmaza $\left[\mathbf{4;\frac{5\pi}{3}}\right]$ (1 pont)

Összesen 16 pont