MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK EMELT SZINT

Egyenletek, egyenletrendszerek

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$x^2 = |x-6|$ (5 pont)

b) Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned}\lg(x+y) &= 2\lg x\\ \lg x &= \lg 2 + \lg(y-1)\end{aligned}\right\}$$ (9 pont)

2)

a) Mely valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőtlenséget?

$(x-1)^3 - (x+1)^3 > -8$ (4 pont)

b) Az alábbi f és g függvényt is a $[-3;6]$ intervallumon értelmezzük. $f(x) = \sqrt{x+3}$ és $g(x) = -0{,}5x + 2{,}5$.

Ábrázolja közös koordináta-rendszerben az f és g függvényt a $[-3;6]$ intervallumon! Igazolja számítással, hogy a két grafikon metszéspontjának mindkét koordinátája egész szám! (4 pont)

c) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$0{,}5x + \sqrt{x+3} \le 2{,}5$ (6 pont)

3) Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x és y valós számok, továbbá $x > 0$, $x \neq 1$ és $y > 0$, $y \neq 1$.

$$\left.\begin{aligned}\log_x y + \log_y x &= 2\\ \sin(2x+3y) + \sin(4x+y) &= 1\end{aligned}\right\}$$ (13 pont)

4)

a) Ábrázolja a derékszögű koordinátarendszerben az $f:[0;5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ függvényt! (5 pont)

b) Tekintsük az $|(x-2)^2 - 1| = k$ paraméteres egyenletet, ahol k valós paraméter. Vizsgálja a megoldások számát a k paraméter függvényében! (7 pont)

c) Ábrázolja a megoldások számát megadó függvényt a $k \in]-6;6[$ intervallumon! (2 pont)

d) Adja meg a c)-beli függvény értékkészletét! (2 pont)

5) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned}\log_x\left(x^2y^3\right)+\log_y\left(x^3y\right)&=9\\ \cos(x+y)+\cos(x-y)&=0\end{aligned}\right\}$$

(16 pont)

6) Egy város sportklubjának 640 fős tagságát felnőttek és diákok alkotják. A tagság 55 %-a sportol rendszeresen. A rendszeresen sportoló tagok számának és a sportklub teljes taglétszámának az aránya $\frac{11}{8}$-szor akkora, mint a rendszeresen sportoló felnőttek számának aránya a felnőtt klubtagok számához viszonyítva. A rendszeresen sportolók aránya a felnőtt tagságban fele akkora, mint amekkora ez az arány a diákok között. Hány felnőtt és hány diák tagja van ennek a sportklubnak? (13 pont)

7) Egy egyetem 10 580 hallgatójának tanulmányi lapjáról összesítették az angol és német nyelvvizsgák számát. Kiderült, hogy a német nyelvvizsgával nem rendelkezők 70%-ának, a német nyelvvizsgával rendelkezők 30%-ának nincs angol nyelvvizsgája. Az angol nyelvvizsgával nem rendelkezők 60%-ának nyelvvizsgája sincs.
   a) Ezek közül a hallgatók közül hányan rendelkeznek angol és hányan német nyelvvizsgával? (12 pont)
   b) A hallgatók hány százaléka rendelkezett angol és német nyelvvizsgák mindegyikével? (4 pont)

8) Egy áruházban egy mosóport négyféle kiszerelésben árusítanak. Az első kiszerelés 50%-kal drágább a harmadiknál, és 20%-kal kevesebb mosópor van benne, mint a másodikban. A második 50%-kal több mosóport tartalmaz, mint a harmadik, és 25%-kal többe kerül, mint az első.
   a) Az első három kiszerelés közül melyikben a legalacsonyabb a mosópor egységára? (13 pont)

   A negyedik fajta kiszerelést úgy állították össze, hogy annak dobozán a feltüntetett egységár megegyezett az első három kiszerelés átlagos egységárával.
   b) Ha a legolcsóbb kiszerelésű dobozon 600 Ft egységárat tüntettek fel, akkor hány forint egységár szerepel a negyedik fajta dobozon? (3 pont)

9) A mosogatógépünkön háromféle program van. Egy mosogatáshoz az *A* program 20%-kal több elektromos energiát, viszont 10%-kal kevesebb vizet használ, mint a *B* program.
   A *B* program 30%-kal kevesebb elektromos energiát és 25%-kal több vizet használ mosogatáshoz, mint a *C* program.
   Mindhárom program futtatásakor 40 Ft-ba kerül az alkalmazott mosogatószer. Egy mosogatás az *A* programmal 151 Ft-ba, *B* programmal 140 Ft-ba kerül.
   Mennyibe kerül a *C* programmal a mosogatás? (14 pont)

10) Jelölje *H* a $\sqrt{5{,}2-x}\le 3$ egyenlőtlenség pozitív egész megoldásainak halmazát.
   Jelölje továbbá *B* azon pozitív egész *b* számok halmazát, amelyekre a $\log_b 2^6$ kifejezés értéke is pozitív egész szám. Elemeinek felsorolásával adja meg a *H*, a *B*, a $H\cap B$ és a $B\setminus H$ halmazt! (11 pont)

11)

a) Igazolja, hogy a $\left(-\frac{1}{2}\right)$, a 0 és a 3 is gyöke a $2x^3-5x^2-3x=0$ egyenletnek, és az egyenletnek ezeken kívül más valós gyöke nincs! (5 pont)

b) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!
$2\cos^3 x-5\cos^2 x-3\cos x=0$ (6 pont)

c) Mutassa meg, hogy a $2\cdot 8^x+7\cdot 4^x+3\cdot 2^x=0$ egyenletnek nincs valós gyöke! (5 pont)

12) Két valós szám összege 29. Ha az egyikből elveszünk 15-öt, a másikhoz pedig hozzáadunk 15-öt, az így kapott két szám szorzata éppen ötszöröse lesz az eredeti két szám szorzatának. Melyik lehet ez a két szám? (13 pont)

13) A tavaszi idény utolsó bajnoki mérkőzésén a Magas Fiúk Kosárlabda Klubjának (MAFKK) teljes csapatából heten léptek pályára. A mérkőzés után az edző elkészítette a hét játékos egyéni statisztikáját. Az alábbi táblázat mutatja a játékosok dobási kísérleteinek számát és az egyes játékosok dobószázalékát egészre kerekítve. (A dobószázalék megmutatja, hogy a dobási kísérleteknek hány százaléka volt sikeres.)

Játékos mezszáma	Dobási kísérletek száma	Dobószázalék
4	2	50
5	3	0
6	10	60
7	8	25
10	7	43
13	6	33
15	14	57

a) Számítsa ki, hogy mennyi volt a csapat dobószázaléka ezen a mérkőzésen! (5 pont)

Az őszi idény kezdete előtt egy hónappal a MAFKK csapatához csatlakozott egy 195 cm magas játékos, így a csapattagok magasságának átlaga a korábbi átlagnál 0,5 cm-rel nagyobb lett. Pár nap múlva egy 202 cm magas játékos is a csapat tagja lett, emiatt a csapattagok magasságának átlaga újabb 1 cm-rel nőtt.

b) Hány tagja volt a MAFKK-nak, és mekkora volt a játékosok magasságának átlaga a két új játékos csatlakozása előtt? (11 pont)

14) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a rendezett valós számpárok halmazán!

a) $\begin{cases} 2x=12-y \\ 2\sqrt{x}=y \end{cases}$ (7 pont)

b) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{3} - \dfrac{y-3}{4} = 3 \\ \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{1}{y-3} = 0 \end{cases}$ (7 pont)

15) Oldja meg a $[4;6]$ alaphalmazon az alábbi egyenleteket, illetve egyenlőtlenséget!

a) $\left|5-\left|x\right|\right| = 3$ (3 pont)

b) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+10} - 1$ (6 pont)

c) $2\cos^2 x + \cos x - 1 \le 0$ (7 pont)