MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI
EMELT SZINT

Bizonyítások

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1)

a) **Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x)=x^3+kx^2+9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl).**
Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x=1$ a függvénynek lokális szélsőértékhelye a függvénynek!
Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x=1$ a függvények lokális maximumhelye vagy lokális minimumhelye!
Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőértékhelye is! **(11 pont)**

b) **Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x)=x^3-9x^2$ képlettel értelmezett g függvény inflexiós pontját!** **(5 pont)**

Megoldás:

a) A differenciálható f függvénynek az $x=1$ akkor lehet szélsőértékhelye, ha itt az első deriváltja nulla (1 pont)
Mivel $f'(x)=3x^2+2kx+9$ (1 pont)
Ezért $f'(1)=3+2k+9=0$ (1 pont)
Innen $\boldsymbol{k=-6}$ (1 pont)
Erre a k értékre $f'(x)=3x^2-12x+9$ (1 pont)
A másodfokú polinom szorzatalakja: $f'(x)=3\cdot(x-1)\cdot(x-3)$ (2 pont)
Az $x=1$ helyen a derivált pozitívból negatívba vált (1 pont)
ezért itt az f függvénynek **lokális maximuma** van (1 pont)
A derivált $x=3$ helyen negatívból pozitívba vált (1 pont)
ezért itt az f függvénynek lokális minimuma van (1 pont)

b) Mivel $g'(x)=3x^2-18x$ (1 pont)
Ebből $g''(x)=6x-18$ (1 pont)
A második derivált zérushelye $x=3$ (1 pont)
Itt a második derivált előjelet vált (1 pont)
A g függvény egyetlen inflexiós pontja az $\boldsymbol{x=3}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

2) **Adott f és g függvény.**

$$f:\quad D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{k\cdot\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}\qquad x\mapsto(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)\cdot\sin 2x$$

a) **Igazolja, hogy az így definiált f függvény konstans!** **(3 pont)**

$$g:\quad D_g=[-7;7]\qquad x\mapsto x^2-6|x|$$

b) **Számítsa ki g függvény zérushelyeit!** **(3 pont)**

c) **Adja meg g függvény értékkészletét!** **(6 pont)**

Megoldás:

a) Az értelmezési tartományon minden x esetén

$$f(x)=(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)\cdot\sin 2x=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)\cdot\sin 2x= \quad \text{(1 pont)}$$

$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}\cdot 2\sin x\cos x= \quad \text{(1 pont)}$$

$$=\mathbf{2} \quad \text{(1 pont)}$$

b) $g(x)=\begin{cases}x^2-6x=x(x-6) & (7\geq)\,x\geq 0\\ x^2+6x=x(x+6) & (-7\leq)\,x\leq 0\end{cases}$, ha (2 pont)

ezért a g függvénynek három zérushelye van: **-6; 0; 6** (1 pont)

c) A $g(x)$ kifejezést átalakíthatjuk:

$$g(x)=\begin{cases}x^2-6x=(x-3)^2-9 & 0\leq x\,(\leq 7)\\ x^2+6x=(x+3)^2-9 & (-7\leq)\,x\leq 0\end{cases}, \text{ ha} \quad \text{(2 pont)}$$

innen következik, hogy

a legkisebb függvényérték $g(3)=g(-3)=-9$ (1 pont)

a legnagyobb függvényérték $g(7)=g(-7)=7$ (1 pont)

A g (folytonos) függvény értékkészlete: $\boldsymbol{R_g=[-9;7]}$ (2 pont)

Összesen: 12 pont

3) Legyen $f(x)=-\frac{4x^3}{a}+\frac{3x^2}{a}+\frac{2x}{a}-a$, ahol a pozitív valós szám és $x\in\mathbb{R}$.

a) Igazolja, hogy $\int_0^a f(x)\,dx=-a^3+a$! (6 pont)

b) Mely pozitív a számokra teljesül, hogy $\int_0^a f(x)\,dx\geq 0$? (4 pont)

c) Az x mely pozitív valós értéke lesz a $g(x)=-x^3+x$ függvények lokális (helyi) minimuma? (6 pont)

Megoldás:

a) Az f függvény integrálható.

$$\int_0^a\left(-\frac{4x^3}{a}+\frac{3x^2}{a}+\frac{2x}{a}-a\right)dx=\left[-\frac{x^4}{a}+\frac{x^3}{a}+\frac{x^2}{a}-ax\right]_0^a= \quad \text{(4 pont)}$$

$$=-\frac{a^4}{a}+\frac{a^3}{a}+\frac{a^2}{a}-a^2= \quad \text{(1 pont)}$$

$$=\boldsymbol{-a^3+a} \quad \text{(1 pont)}$$

b) Megoldandó (az $a\in\mathbb{R}^+$ feltétel mellett) a

$-a^3+a\geq 0$ egyenlőtlenség (1 pont)

$(a+1)\cdot a\cdot(1-0)\geq 0$ (1 pont)

Mivel $a>0$, így az első két tényező pozitív, ezért $1-a\geq 0$ (1 pont)

Az a lehetséges értékeinek figyelembe vételével: $\boldsymbol{0<a\leq 1}$ (1 pont)

c) A nyílt intervallumon értelmezett $(x \in \mathbb{R})$ g függvény differenciálható.

$g'(x) = -3x + 1$ (1 pont)

A lehetséges szélsőértékhely keresése: $-3x^2 + 1 = 0$ (1 pont)

A lehetséges szélsőértékhely: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (benne van az értelmezési tartományban) (1 pont)

$g''(x) = -6x$ (1 pont)

$g''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{6}{\sqrt{3}} < 0$ (1 pont)

Tehát az $\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{3}}}$ lokális minimumhely. (1 pont)

Összesen: 16 pont

4) Az *ABCD* konvex négyszög oldalegyeneseinek egyenlete rendre:

$$\boldsymbol{DA: 3x - 4y - 20 = 0} \quad \boldsymbol{AB: 3x + 5y - 20 = 0}$$

$$\boldsymbol{BC: 4x - 3y + 12 = 0} \quad \boldsymbol{CD: 5x + 3y + 15 = 0}$$

a) Igazolja, hogy a négyszög átlói az *x* és az *y* tengelyre illeszkednek, továbbá, hogy ennek a négyszögnek nincs derékszöge! (8 pont)

b) Bizonyítsa be, hogy a négyszög húrnégyszög! (8 pont)

Megoldás:

a)

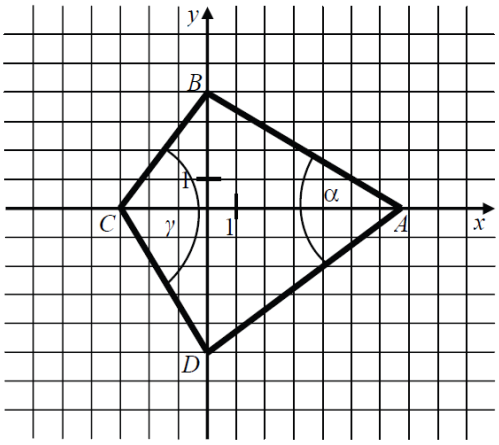
az egyenes	x tengelyen lévő pontja	y tengelyen lévő pontja
$DA: 3x - 4y - 20 = 0$	$\left(\frac{20}{3}; 0\right)$	$(0; -5)$
$AB: 3x + 5y - 20 = 0$	$\left(\frac{20}{3}; 0\right)$	$(0; 4)$
$BC: 4x - 3y + 12 = 0$	$(-3; 0)$	$(0; 4)$
$CD: 5x + 3y + 15 = 0$	$(-3; 0)$	$(0; -5)$

A DA és az AB egyenesek metszéspontja az x tengely $A = \left(\frac{20}{3}; 0\right)$ pontja. (1 pont)

Az AB és a BC egyenesek metszéspontja az y tengely $B = (0; 4)$ pontja. (1 pont)

A BC és a CD egyenesek metszéspontja az x tengely $C = (-3; 0)$ pontja. (1 pont)

A CD és a DA egyenesek metszéspontja az y tengely $D = (0; -5)$ pontja. (1 pont)



A csúcspontok alapján beláttuk, hogy az *ABCD* négyszög *AC* átlója az *x*, a *BD* átlója pedig az *y* tengelyre illeszkedik (1 pont)

Felírjuk az oldalegyeneseket és egy-egy normálvektorukat (2 pont)

az egyenes	egy normálvektor
$DA: 3x-4y-20=0$	$(3;-4)$
$AB: 3x+5y-20=0$	$(3;5)$
$BC: 4x-3y+12=0$	$(4;-3)$
$CD: 5x+3y+15=0$	$(5;3)$

A normálvektorok között és ezért az egyenesek közt sincs két egymásra merőleges (skalárszorzatuk nem 0), ezért az *ABCD* négyszögnek nincs derékszöge (1 pont)

b)

Legyen $\gamma = BCD\sphericalangle$ és $\alpha = DAB\sphericalangle$

Vektorok skalárszorzatával fogjuk kiszámítani két szemközti szög koszinuszát. $\cos\gamma = \dfrac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CB}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|}$ (1 pont)

ahol $\overrightarrow{CB}=(3;4)$ és $\overrightarrow{CD}=(3;-5)$ (1 pont)

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=-11$, $\left|\overrightarrow{CB}\right|=5$ és $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{34}$ (1 pont)

$\cos\gamma = -\dfrac{11}{5\sqrt{34}}$ (1 pont)

$\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|}$, ahol $\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{20}{3};4\right)$ és $\overrightarrow{AD}=\left(-\dfrac{20}{3};-5\right)$ (1 pont)

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\dfrac{220}{9}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\dfrac{\sqrt{544}}{3}$ és $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\dfrac{25}{3}$ (1 pont)

$\cos\alpha = \dfrac{11}{5\sqrt{34}}$ (1 pont)

A γ és az α szögek tehát kiegészítő szögek, az *ABCD* négyszög húrnégyszög.

(1 pont)

Összesen: 16 pont

5) Az *A* pont helyvektora: $\overrightarrow{OA}(\lg a;\lg b)$; a *B* pont helyvektora: $\overrightarrow{OB}\left(\lg ab;\lg\dfrac{b}{a}\right)$, ahol *a* és *b* olyan valós számokat jelölnek, melyekre $0<a<1$, illetve $1<b$ teljesül.

a) Bizonyítsa be, hogy a *B* pont mindkét koordinátája nagyobb az *A* pont megfelelő koordinátáinál! (3 pont)

b) Bizonyítsa be, hogy az $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ vektor merőleges az $\overrightarrow{OA}$ vektorra! (3 pont)

c) Mekkora az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok hajlásszöge? (4 pont)

d) Legyen $a=\frac{1}{10}$, b pedig jelöljön tetszőleges 1-nél nagyobb valós számot. Adja meg (egyenletével, vagy a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva) az A, illetve B pontok halmazát! (6 pont)

Megoldás:

a) Mivel $\lg ab=\lg a+\lg b$, és $\lg\frac{b}{a}=\lg b-\lg a$, így $B(\lg a+\lg b;\lg b-\lg a)$ (1 pont)

Bizonyítandó tehát, hogy $\lg a<\lg a+\lg b$ és $\lg b<\lg b-\lg a$ (1 pont)

rendezés után kapjuk, hogy $\lg b>0$ és $\lg a>0$.

A feltételek szerint $0<a<1$, illetve $1<b$, és a tízes alapú logaritmus függvény szigorúan növő a pozitív számok halmazán, valamint $\lg 1=0$, **tehát mindkét egyenlőtlenség igaz** (1 pont)

b) $\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{BA}(-\lg b;\lg a)$ (1 pont)

Mivel az $\overrightarrow{OA}$ és az $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ vektorok skaláris szorzata a megfelelő koordináták szorzatának összege, vagyis

$\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)=-\lg a\cdot\lg b+\lg b\cdot\lg a=0$, **tehát a két vektor merőleges egymásra** (2 pont)

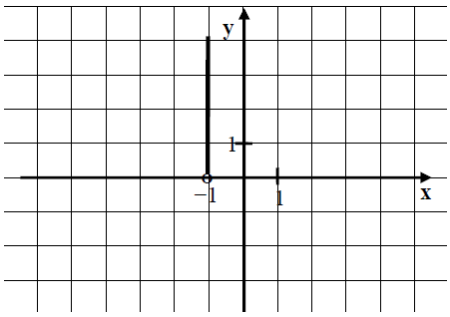
c) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ és $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ egyike sem nullvektor. Mivel

$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{\lg^2 a+\lg^2 b}=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|$ (2 pont)

tehát az OAB háromszög egyenlő szárú és derékszögű (1 pont)

így $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\sphericalangle=\mathbf{45°}$ (1 pont)

d) $A(-1;\lg b)$ (1 pont)



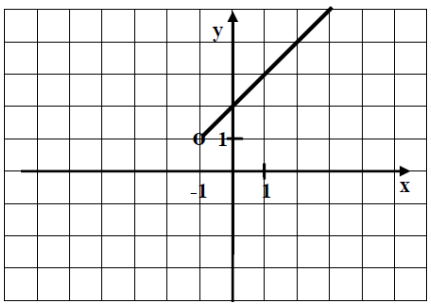
A tízes alapú logaritmus függvény szigorú növő, folytonos, felülről korlátos függvény, így $\lg b$ tetszőleges pozitív értéket felvehet.

Ezért az A pontok halmaza azon nyílt kezdőpontú félegyenes, amelynek $(x;y)$ koordinátái kielégítik az $x=-1$ egyenletet és az $0<y$ egyenlőtlenséget. (1 pont)

$B(\lg b-1;\lg b+1)$ (1 pont)

A B pont második koordinátája 2-vel nagyobb az első koordinátájánál $\left(\lg b+1=(\lg b-1)+2\right)$ (1 pont)

$\lg b-1$ tetszőleges, (-1)-nél nagyobb szám lehet, így $\lg b+1$ tetszőleges 1-nél nagyobb értéket vesz föl. (1 pont)



Így a B pontok halmaza azon nyílt kezdőpontú félegyenes, amelynek $(x;y)$ koordinátái kielégítik az $y=x+2$ egyenletet és az $-1<x$ egyenlőtlenséget (1 pont)

Összesen: 16 pont

6) A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segítségre vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északkeleti irányba halad, a hajótöröttek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket.

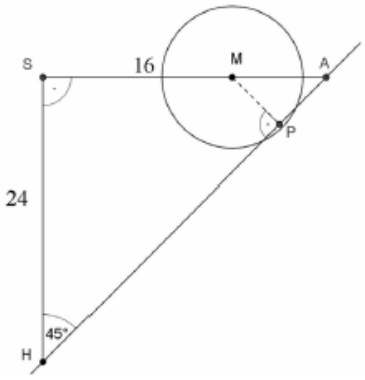
a) Igazolja, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérő jelzést! (7 pont)

Egy 1,5 km magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a tengerjáró hajót, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km-t tett meg.

b) Mekkora depresszió szög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! Számításai során a Föld görbületétől tekintsen el! (7 pont)

Megoldás:

a) A feladat feltételeit feltüntető jó ábra.



A sziget az *S*, a metőcsónakot az *M*, a tengerjáró hajót a *H* pont jelöli. A hajó útjának és az *SM* egyenesnek a metszéspontját jelölje *A*. (2 pont)

A *HSA* háromszög derékszögű, egyenlő szárú, ezért

$AS = 24$ km (1 pont)

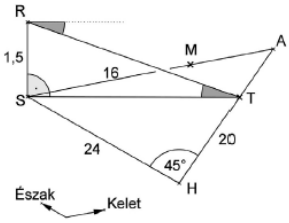
$MA = 8$ km (1 pont)

Valamint az *APM* háromszög derékszögű és van 45°-os szöge (1 pont)

Ezért $MP = 4\sqrt{2}\,(\approx 5,7)$ (1 pont)

Mivel $MP < 6$ km, ezért a hajó legénysége észlelheti a jelzéseket. (1 pont)

b) A feladat feltételeit feltüntető jó ábra



A repülőgép (*R*), a sziget (*S*) és a tengerjáró hajó (*T*) egy *S*-nél derékszögű háromszög három csúcsában helyezkedik el. (1 pont)

Az *ST* távolságot koszinusztétellel számolhatjuk ki

$ST^2 = 24^2 + 20^2 - 2 \cdot 24 \cdot 20 \cdot \cos 45°$ (2 pont)

$ST \approx 17,2$ km (1 pont)

A depresszió szög nagysága megegyezik a *TRS* derékszögű háromszög *RTS* szögének nagyságával (váltószögek). (1 pont)

$\operatorname{tg} RTS\sphericalangle = \dfrac{RS}{TS} \approx \dfrac{1,5}{17,2}$ (1 pont)

A depresszió szög kb 5° nagyságú (1 pont)

Összesen: 14 pont

7) Igazolja, hogy ha egy háromszög szögeire érvényes az alábbi összefüggés:

$$\sin\alpha : \sin\beta = \cos(\alpha+\gamma) : \cos(\beta+\gamma),$$

akkor a háromszög egyenlő szárú és derékszögű! **(14 pont)**

Megoldás:

Mivel a háromszög szögeinek összege 180°, ezért $\alpha+\gamma = 180-\beta$, valamint $\beta+\gamma = 180-\alpha$ (1 pont)

és $\cos(180-\beta) = -\cos\beta$, valamint $\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$ (1 pont)

A megadott egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\sin\alpha : \sin\beta = \cos\beta : \cos\alpha$ (1 pont)

Ebből a $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin\beta \cdot \cos\beta$ egyenlőség következik (1 pont)

A kétszeres szög szinuszára vonatkozó azonosságot használva kapjuk, hogy $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ (3 pont)

Egy háromszög bármely szög kétszeresének értéke 0° és 360° közé esik, ezért a fenti egyenlőség két esetben áll fenn: (3 pont)

$2\alpha = 2\beta$, vagy $2\alpha + 2\beta = 180$ (2 pont)

Az első esetben $\alpha = \beta$, a háromszög két szöge egyenlő, tehát a háromszög **egyenlő szárú** (1 pont)

A második esetben $\alpha+\beta=90$, a háromszögben $\gamma=90$, a háromszög **derékszögű** (1 pont)

Összesen: 14 pont

8) A csonkakúp alakú tárgyak térfogatát régebben a gyakorlat számára elegendően pontos közelítő számítással határozták meg. Eszerint a csonkakúp térfogata közelítőleg egy olyan henger térfogatával egyezik meg, amelynek átmérője akkora, mint a csonkakúp alsó és felső átmérőjének számtani közepe, magassága pedig akkora, mint a csonkakúp magassága.

a) Egy csonkakúp alakú fatörzs hossza (vagyis a csonkakúp magassága) 2 m, alsó átmérője 12 cm, felső átmérője 8 cm. A közelítő számítással kapott térfogat hány százalékkal tér el a pontos térfogattól? (Ezt nevezzük a közelítő eljárás relatív hibájának.) **(3 pont)**

b) Igazolja, hogy a csonkakúp térfogatát – a fentiekben leírt útmutatás alapján kapott - közelítő érték sohasem nagyobb, mint a csonkakúp térfogatának pontos értéke! **(7 pont)**

Jelölje x a csonkakúp két alapköre sugarának az arányát, és legyen $x>1$. Bizonyítandó, hogy a fentiekben leírt, közelítő számítás relatív hibájának százalékban mérve a következő függvény adja meg:

$$f:\,]1;+\infty[\,\to\mathbb{R},\quad f(x)=25\cdot\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}.$$

c) Igazolja, hogy f-nek nincs szélsőértéke! **(6 pont)**

Megoldás:

a) A közelítő henger alapkörének sugara: $\frac{1}{2}\cdot\frac{12+8}{2}=5$ cm, térfogata $25\cdot\pi\cdot 200=5000\pi\approx 15708$ cm^3. (1 pont)

A csonkakúp elméletileg pontos térfogata:

$\frac{200\pi}{3}\left(6^2+6\cdot 4+4^2\right)=\frac{15200\pi}{3}\approx 15917$ cm^3. (1 pont)

A közelítő érték $\frac{200\pi}{3}\approx 209$ cm^3-rel kisebb, tehát a pontos értéktől $\frac{200}{152}\approx$ **1,3 %-kal** tér el. (1 pont)

b) Legyen a csonkakúp alapköreinek sugara R és r, magassága m.

A csonkakúp elméleti térfogata: $\frac{m\pi}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)$ (1 pont)

A csonkakúp gyakorlati térfogata: $\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 m\pi$ (1 pont)

A két térfogat különbségéről állítjuk: $\frac{m\pi}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)-\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 m\pi\ge 0$ (1 pont)

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát $\frac{12}{m\pi}$-vel, bontsuk fel a zárójeleket és az összevonások után: $R^2-2Rr+r^2\ge 0$ (2 pont)

Vagyis $(R+r)^2 \geq 0$ adódik, ami minden R és r esetén igaz. (1 pont)

A következtetés minden lépése megfordítható, ezért az állítás igaz (1 pont)

c) Az f függvény deriválható, a deriváltfüggvény hozzárendelési szabálya:

$$f'(x) = 25 \cdot \frac{2(x-1)\left(x^2+x+1\right) - (x-1)^2(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$ (2 pont)

$$f'(x) = 75 \cdot \frac{x^2-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$ (2 pont)

Az $f'(x)=0$ egyenletnek nincs megoldása az $]1;+\infty[$ intervallumon, tehát f-nek nincs szélsőértéke (2 pont)

Összesen: 16 pont

9) Két egyenes hasábot építünk, H_1-et és H_2-t. AZ építéshez használt négyzetes oszlopok (négyzet alapú egyenes hasábok) egybevágók, magasságuk kétszer akkora, mint az alapélük. A H_1 hasáb építésekor a szomszédos négyzetes oszlopokat az oldallapjukkal illesztjük össze, a H_2 hasáb építésekor pedig a négyzet alaplapjukkal- az ábra szerint.

a) A H_1 és H_2 egyenes hasábok felszínének hányadosa $\frac{A_{H_1}}{A_{H_2}} = 0,8$. Hány négyzetes oszlopot használtunk az egyes hasábok építéséhez, ha H_1-et és H_2-t ugyanannyi négyzetes oszlopból építettük fel? (8 pont)

b) Igazolja, hogy $\left\{\frac{3n+2}{4n+1}\right\}\left(n \in \mathbb{N}^+\right)$ sorozat szigorú monoton növekvő és korlátos! (8 pont)

Megoldás:

a) Ha a jelöli a négyzetes oszlop alapélének hosszát, és k darabból készítjük a hasábokat, akkor H_1 felszíne:

$A_{H_1} = 2 \cdot 2a + 2 \cdot k \cdot a^2 + 2 \cdot k \cdot 2a^2 \left(= 2a^2(3k+2)\right)$ (2 pont)

H_2 felszíne: $A_{H_2} = 2a^2 + 4 \cdot k \cdot 2a^2 \left(= 2a^2(4k+1)\right)$ (2 pont)

Az $\frac{A_{H_1}}{A_{H_2}} = 0,8$ feltételből $3k+2 = 0,8 \cdot (4k+1)$ (2 pont)

Az egyenlet megoldása $k=6$ (1 pont)

tehát **6-6** négyzetes oszlopot használtunk fel az építéshez (1 pont)

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+5)(4n+1)}{(4n+5)(3n+2)} =$ (1 pont)

$\frac{12n^2+23n+5}{12n^2+23n+10}\left(=1-\frac{5}{12n^2+23n+10}\right)$ (1 pont)

A fenti hányados minden pozitív egész n esetén 1-nél kisebb (1 pont)

a sorozat minden tagja pozitív (1 pont)

ezért a sorozat szigorú monoton csökkenő (1 pont)

Ebből következik, hogy a sorozat felülről korlátos (1 pont)

Mivel a sorozat minden tagja pozitív, így alulról is korlátos (1 pont)

tehát a sorozat korlátos (1 pont)

Összesen 16 pont

10) Az 52941 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben.

a) Az 52941 számmal együtt hány ötjegyű számot kapunk? (2 pont)

b) Ezen számok közül hány osztható 12-vel? (6 pont)

c) Bizonyítsa be, hogy e számok egyik sem négyzetszám! (4 pont)

Megoldás:

a) $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = \mathbf{120}$ darab ilyen ötjegyű számot képezhetünk (2 pont)

b) Egy egész szám pontosan akkor osztható 12-vel, ha osztható 3-mal és 4-gyel is (1 pont)

Az ötjegyű számok mindegyike osztható 3-mal, mert a számjegyek összege mindegyiknél 21, ami osztható 3-mal (1 pont)

4-gyel ezen ötjegyű számok közül azok oszthatók, amelyek utolsó két számjegye a következő: 12; 52; 92; 24 (2 pont)

Az ötjegyű számban az első három számjegyből álló szám hatféle lehet, ha az utolsó kettőt rögzítettük (1 pont)

így az ötjegyű számok között $4\cdot 6 = \mathbf{24}$ db 12-vel osztható szám van (1 pont)

c) Az ötjegyű számok mindegyikében a számjegyek összege 21 (1 pont)

Tehát a számok oszthatók 3-mal (1 pont)

Mivel 3-mal oszthatóak, ezért csak abban az esetben lehetne köztük négyzetszám, ha az 3 valamely páros kitevőjű hatványa lenne. Ehhez feltétlenül szükséges az is, hogy 9-cel osztható legyen, 9-cel viszont nem osztható egyik sem, **így egyik szám sem lehet négyzetszám.** (2 pont)

Összesen: 12 pont

11)

a) Egy derékszögű háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Számítsa ki a háromszög másik két oldalának hosszát! (5 pont)

b) Egy háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Tudjuk, hogy a háromszög nem szabályos. Igazolja, hogy a háromszögnek nincs 60°-os szöge! (11 pont)

Megoldás:

a) Ha d a számtani sorozat differenciája, akkor a háromszög oldalhosszai 4 $(4+d)$, $(4+2d)$ (és $0<d$) (1 pont)

A háromszög derékszögű, így $4^2+(4+d)^2=(4+2d)^2$ (1 pont)

Négyzetre emelve, rendezve: $3d^2+8d-16=0$ (1 pont)

A gyökök $d_1=-4$ és $d_2=\frac{4}{3}$ (1 pont)

A negatív gyök nem megoldás, a háromszög oldalai tehát **4, $\frac{16}{3}$, $\frac{20}{3}$** egység hosszúak (1 pont)

b) Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy van 60°-os szöge a háromszögnek. (1 pont)

Mivel az oldalak páronként különböző hosszúságúak, és a nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, (1 pont)
ezért ha van 60°-os szöge, akkor az a $4+d$ hosszúságú oldallal szemben van (2 pont)

Erre az oldalra felírva a koszinusztételt:
$(4+d)^2 = 4^2 + (4+2d)^2 - 2\cdot 4\cdot(4+2d)\cdot\cos 60°$ (2 pont)

Ebből $16+8d+d^2 = 16+8d+4d^2$ (1 pont)

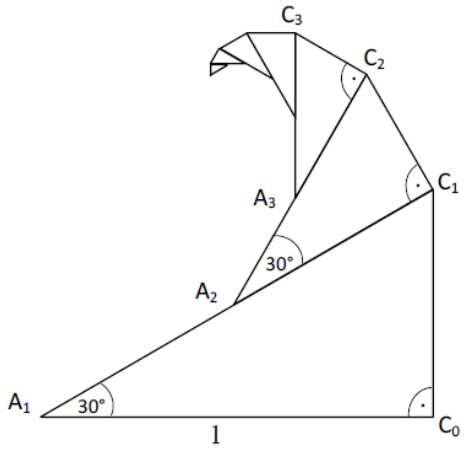
Ebből $d^2 = 0$, tehát $d = 0$ (1 pont)

Ez viszont ellentmond annak, hogy a háromszög nem szabályos (2 pont)

Az eredeti feltételezésünk tehát hamis, azaz a háromszögnek valóban nincs 60°-os szöge. (1 pont)

Összesen 16 pont

12) Az $A_1C_0C_1$ derékszögű háromszögben az A_1 csúcsnál 30°-os szög van, az A_1C_0 befogó hossza 1, az A_1C_1 átfogó felezőpontja A_2.
Az A_2C_1 szakasz „fölé” az $A_1C_0C_1$ háromszöghöz hasonló $A_2C_1C_2$ derékszögű háromszöget rajzoljunk az ábra szerint. Az A_2C_2 átfogó felezőpontja A_3.
Az A_3C_2 szakasz „fölé” az $A_2C_1C_2$ háromszöghöz hasonló $A_3C_2C_3$ derékszögű háromszöget rajzolunk.
Ez az eljárás tovább folytatható.



a) Számítsa ki az így nyerhető végtelen sok derékszögű háromszög területének összegét (az összeg első tagja az $A_1C_0C_1$ háromszög területe.)! **(7 pont)**

b) Igazolja, hogy a $C_0C_1C_2\ldots C_n$ töröttvonal hossza minden pozitív n-re kisebb, mint 1,4. **(9 pont)**

Megoldás:

a) Az $A_1C_0C_1$ háromszög területe $t_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ (1 pont)

Az $A_nC_{n-1}C_n$ háromszöget $\frac{1}{\sqrt{3}}$ arányú hasonlósággal lehet átvinni $A_{n+1}C_nC_{n+1}$ háromszögbe $\left(n\in\mathbb{N}^+\right)$ (1 pont)

A hasonló síkidomok területének arányára vonatkozó tétel alapján (1 pont)

az $A_nC_{n-1}C_n$ háromszög területe: $t_n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 t_{n-1} = \frac{1}{3}t_{n-1}$ (ha $n>1$) (1 pont)

A területek összegéből képzett $\left(t_1+t_2+\ldots+t_n+\ldots\right)$ mértani sor (1 pont)

amelynek hányadosa $\frac{1}{3}$ (1 pont)

A végtelen sok háromszög területének összege: $T = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \approx \mathbf{0,433}$

(1 pont)

b) Jelölje d_n a $C_{n-1}C_n$ szakasz hosszát $\left(n \in \mathbb{N}^+\right)$, $d_1 = C_0C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (1 pont)

A hasonlóság miatt minden $n > 0$ esetén $d_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot d_{n-1}$ (1 pont)

A $\{d_n\}$ sorozat tehát olyan mértani sorozat, (1 pont)

amelynek első tagja és hányadosa is $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (1 pont)

Vizsgáljuk az $S = d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ összegeket. A $d_1 + d_2 + \ldots + d_n \ldots$ olyan mértani sorozat, menynek hányadosa $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, tehát van határértéke (1 pont)

Az $\{S_n\}$ sorozat határértéke (a mértani sor összege): $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$ (1 pont)

$\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ és mivel $\sqrt{3}$ kisebb, mint 1,8 ezért $\{S_n\}$ határértéke kisebb, mint 1,4. (1 pont)

az $\{S_n\}$ sorozat szigorúan növekvő (1 pont)

ezért az $\{S_n\}$ sorozat egyetlen tagja sem lehet nagyobb a határértékénél

(1 pont)

Összesen: 16 pont

13) Igazolja, hogy az alábbi négy egyenlet közül az a) és b) jelű egyenletnek pontosan egy megoldása van, a c) és d) jelű egyenletnek viszont nincs megoldása a valós számok halmazán!

a) $\dfrac{2x^2 + x - 10}{2^{x-1} - 2} = 0$ **(4 pont)**

b) $\sqrt{x+16} + \sqrt{x-9} = 5$ **(4 pont)**

c) $\lg\left(x^2 + x - 6\right) = \lg\left(1 - x^2\right)$ **(4 pont)**

d) $\sin x - 1 = \sqrt{\lg\left(\cos^2 x - 1{,}5\cos x\right)}$ **(4 pont)**

Megoldás:

a) A nevező nem lehet 0, ezért $2^{x-1} - 2 \neq 0$ (1 pont)

ebből $x \neq 2$ (1 pont)

A továbbiakban a tört akkor 0, ha számlálója 0, tehát $2x^2+x-10=0$, azaz $x_1=2$ és $x_2=-2{,}5$ (1 pont)

Így az egyenletnek csak egy valós megoldása van: $\boldsymbol{x=-2{,}5}$ (1 pont)

b) A rendezés után kapott $\sqrt{x+16}=5-\sqrt{x-9}$ egyenletet mindkét oldalról négyzetre emelve, (1 pont)

rendezés után kapjuk, hogy $10\sqrt{x-9}=0$ (1 pont)

Innen $\boldsymbol{x=9}$ (1 pont)

Behelyettesítéssel ellenőrizve ez jó megoldás. (1 pont)

c) A logaritmus értelmezése szerint: $x^2+x-6>0$ és $1-x^2>0$ (1 pont)

Az első egyenlet megoldásai azon x valós számok, amelyekre $x<-3$ vagy $x>2$ (1 pont)

a másodiké: $-1<x<1$ (1 pont)

A két egyenlőtlenség megoldáshalmazának nincs közös eleme, így az egyenletnek nincs megoldása. (1 pont)

d) A jobb oldali kifejezés az értelezési tartományán csak nem negatív lehet, így $\sin x-1\geq 0$. (1 pont)

Ez csak $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ esetén teljesül (1 pont)

De mivel $\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=0$ minden $k\in\mathbb{Z}$ esetén (1 pont)

és nullára a logaritmus nincs értelmezve, **így nincs olyan valós szám, amelyre az egyenlet értelmezve lenne, így nincs megoldása.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

14)

a) Igazolja a következő állítást: ha egy négyszög szögei valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor a négyszög húrnégyszög vagy trapéz! (6 pont)

b) Fogalmazza meg az előző állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

Egy geometriai építőkészletben csak olyan pálcikák vannak, amelyek hossza centiméterben mérve egész szám, és mindenféle lehetséges hosszúság előfordul 1 cm-től 12 cm-ig. (Mindegyik fajta pálcikából elegendően sok van a készletben.)

c) Hány különböző módon választhatunk ki 4 pálcikát a készletből úgy, hogy belőlük egy 24 cm kerületű érintőnégyszöget lehessen építeni? (Két kiválasztást különbözőnek tekintünk, ha az egyik kiválasztás 4 pálcikája nem állítható párba a másik kiválasztás 4 pálcikájával úgy, hogy mind a 4 párban egyenlő hosszú legyen a két pálcika. Tudjuk továbbá, hogy ha *a, b, c, d* pozitív számok, és $a+c=b+d$, akkor az *a, b, c, d* hosszúságú szakaszokból szerkeszthető négyszög.) (7 pont)

Megoldás:

a) Legyen a négyszög legkisebb szöge α fok, a sorozat differenciája pedig d fok $(d \geq 0)$. Ekkor a négyszög szögei (valamilyen sorrendben) α, $\alpha + d$, $\alpha + 2d$ és $\alpha + 3d$ fok nagyságúak. (1 pont)

A négyszög belső szögeinek összege 360°, ezért $4\alpha + 6d = 360$, (1 pont)
vagyis $2\alpha + 3d = 180$. (1 pont)
$2\alpha + 3d = (\alpha + d) + (\alpha + 2d)$, ami azt jelenti, hogy a négyszög két-két szögének összege 180°. (1 pont)
Ha a két szög szomszédos, akkor a négyszög trapéz, (1 pont)
ha pedig szemközti, akkor húrnégyszög.
Tehát az **állítást igazoltuk.** (1 pont)

b) A megfordítás: **Ha egy négyszög trapéz vagy húrnégyszög, akkor a szögei (valamilyen sorrendben) egy számtani sorozat szomszédos tagjai.** (1 pont)
A megfordítás **hamis.** (1 pont)
Egy ellenpélda. Például: egy trapéz, amelynek szögei 50°, 70°, 110° és 130° nagyságúak. (1 pont)

c) A négy kiválasztott pálcikából pontosan akkor készíthető érintőnégyszög, ha a két-két szemközti pálcika hosszának összege egyenlő. (1 pont)
A készlet négy pálcikájából tehát pontosan akkor építhető 24 cm kerületű érintőnégyszög, ha a négyszögben egymással szemben elhelyezkedő két-két oldal (centiméterben mért) hossza az $(1; 11)$, $(2; 10)$, $(3; 9)$, $(4; 8)$, $(5; 7)$, $(6; 6)$ számpárok valamelyike. (2 pont)
Annyiféleképpen választható ki négy megfelelő pálcika a készletből, ahányféleképpen a hat számpárból kettő (sorrendre való tekintet nélkül) kiválasztható úgy, hogy egy számpárt kétszer is választhatunk. (1 pont)
Ez a szám 6 különböző objektum másodosztályú ismétléses kombinációinak számával egyezik meg. (1 pont)
Az összes különböző lehetőségek száma tehát $\binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} =$ (1 pont)
=21. (1 pont)

Összesen: 16 pont

15)

a) Egy kocka és egy gömb felszíne egyenlő. Bizonyítsa be, hogy a gömb térfogata nagyobb, mint a kockáé! (6 pont)

Két fémkocka összeolvasztásával egy nagyobb kockát készítünk. Az egyik beolvasztott kocka egy élének hossza *p*, a másiké pedig *q* $(p > 0, q > 0)$. (Feltesszük, hogy az összeolvasztással kapott kocka térfogata egyenlő a két összeolvasztott kocka térfogatának összegével.)

b) Igazolja, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne $6 \cdot \sqrt[3]{(p^3 + g^3)^2}$. (2 pont)

c) Bizonyítsa be, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne kisebb, mint a két összeolvasztott kocka felszínének összege! (8 pont)

Megoldás:

a) Ha a két test felszíne egyaránt A, akkor $V^2_{\text{kocka}} = \frac{A^3}{6^3}$, (2 pont)

$V^2_{\text{gömb}} = \frac{A^3}{36\pi}$ (2 pont)

Mivel $36\pi < 6^3$, (1 pont)

ezért **a gömb térfogata valóban nagyobb a kocka térfogatánál.** (1 pont)

b) Az összeolvasztással kapott kocka térfogata p^3+q^3, ezért élének hossza $\sqrt[3]{p^3+q^3}$, (1 pont)

felszíne tehát $6\cdot\left(\sqrt[3]{p^3+q^3}\right)^2$, ami valóban $6\cdot\sqrt[3]{\left(p^3+q^3\right)^2}$-nel **egyenlő.** (1 pont)

c) A bizonyítandó állítás: $6\cdot\sqrt[3]{\left(p^3+q^3\right)^2} < 6\cdot\left(p^2+q^2\right)$ (1 pont)

Mindkét oldalt 6-tal osztva és köbre emelve (az x^3 függvény szigorú monotonitása miatt): $\left(p^3+q^3\right)^2 < \left(p^2+q^2\right)^3$. (1 pont)

Elvégezve a hatványozásokat: $p^6+2p^3q^3+q^6 < p^6+3p^4q^2+3p^2q^4+q^6$. (2 pont)

Rendezve és a pozitív p^2q^2 szorzattal osztva: $0 < 3p^2+3q^2-2pq$. (1 pont)

$0 < 2p^2+2q^2+(p-q)^2$, (1 pont)

ez pedig mindig igaz (hiszen a jobb oldalon két pozitív és egy nemnegatív szám összege áll). (1 pont)

Mivel minden átalakítás ekvivalens volt, ezért a bizonyítandó állítás is **igaz.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

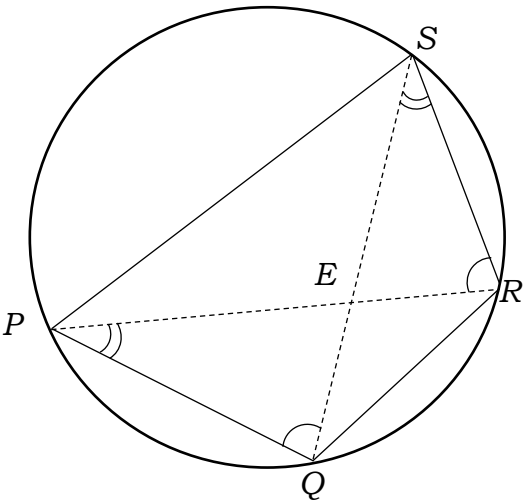
a) A *PQRS* húrnégyszöget a *PR* és a *QS* átlók megrajzolásával négy háromszögre bontottuk. Igazolja, hogy ezek közül a két-két szemközti háromszög hasonló egymáshoz! (4 pont)

Az *ABCD* húrnégyszög *AB* oldala a négyszög körülírt körének egyik átmérője. A négyszög *BC* oldala 3 cm, a *CD* oldala 5 cm hosszú, továbbá $BCD\sphericalangle = 120°$.

b) Számítsa ki a négyszög *BD* átlójának, *AB* oldalának és *AD* oldalának hosszát, valamint a négyszög többi szögét! (10 pont)

Megoldás:

a) Az átlók metszéspontját jelölje E. A kerületi szögek tétele miatt $PQS\sphericalangle = PRS\sphericalangle$ és $QPR\sphericalangle = QSR\sphericalangle$ (azonos ívhez tartozó kerületi szögek). (2 pont)



A PEQ és az SER háromszögekben két-két szög megegyezik (így a harmadik is), ezért ez a két háromszög hasonló. (1pont)

Ugyanígy bizonyíthatjuk a QER és a PES háromszögek hasonlóságát is. (1 pont)

b) BCD háromszögben felírjuk a koszinusztételt:

$BD^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120°$. (1 pont)

$BD = 7$ (cm) (1 pont)

(A húrnégyszögek tétele miatt) az $ABCD$ négyszög DAB szöge $(180° - 120° =)\ 60°$-os, (1 pont)

a Thalész-tétel miatt pedig $ADB\sphericalangle = 90°$, (1 pont)

ezért az ADB háromszög egy szabályos háromszög fele. (1 pont)

$$AD = \frac{BD}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} \approx 4,04\ (\text{cm})$$
$$AB = 2AD \approx 8,08\,(\text{cm})$$ (2 pont)

Szinusztétellel a BCD háromszögből:

$$\frac{\sin CBD\angle}{5} = \frac{\sin 120°}{7},\ \left(\sin CBD\angle = \frac{5 \cdot \sin 120°}{7} \approx 0,6186\right)$$ (1 pont)

$CBD\sphericalangle \approx 38,2°$

$ABD\sphericalangle \approx 68,2°$ (2 pont)

$ADC\sphericalangle \approx 111,8°$

Összesen 14 pont