MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK
EMELT SZINT

Bizonyítások

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1)

a) Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x)=x^3+kx^2+9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl).
Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x=1$ a függvénynek lokális szélsőértékhelye a függvénynek!
Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x=1$ a függvények lokális maximumhelye vagy lokális minimumhelye!
Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőértékhelye is! (11 pont)

b) Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x)=x^3-9x^2$ képlettel értelmezett g függvény inflexiós pontját! (5 pont)

2) Adott f és g függvény.

$$f:\ D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{k\cdot\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}\quad x\mapsto(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)\cdot\sin 2x$$

a) Igazolja, hogy az így definiált f függvény konstans! (3 pont)

$$g:\quad D_g=[-7;7]\quad x\mapsto x^2-6|x|$$

b) Számítsa ki g függvény zérushelyeit! (3 pont)

c) Adja meg g függvény értékkészletét! (6 pont)

3) Legyen $f(x)=-\frac{4x^3}{a}+\frac{3x^2}{a}+\frac{2x}{a}-a$, ahol a pozitív valós szám és $x\in\mathbb{R}$.

a) Igazolja, hogy $\int_0^a f(x)\,dx=-a^3+a$! (6 pont)

b) Mely pozitív a számokra teljesül, hogy $\int_0^a f(x)\,dx\geq 0$? (4 pont)

c) Az x mely pozitív valós értéke lesz a $g(x)=-x^3+x$ függvények lokális (helyi) minimuma? (6 pont)

4) Az $ABCD$ konvex négyszög oldalegyeneseinek egyenlete rendre:

$$DA:3x-4y-20=0\quad AB:3x+5y-20=0$$
$$BC:4x-3y+12=0\quad CD:5x+3y+15=0$$

a) Igazolja, hogy a négyszög átlói az x és az y tengelyre illeszkednek, továbbá, hogy ennek a négyszögnek nincs derékszöge! (8 pont)

b) Bizonyítsa be, hogy a négyszög húrnégyszög! (8 pont)

5) Az A pont helyvektora: $\overrightarrow{OA}\left(\lg a;\lg b\right)$; a B pont helyvektora: $\overrightarrow{OB}\left(\lg ab;\lg\frac{b}{a}\right)$, ahol a és b olyan valós számokat jelölnek, melyekre $0<a<1$, illetve $1<b$ teljesül.

a) Bizonyítsa be, hogy a B pont mindkét koordinátája nagyobb az A pont megfelelő koordinátáinál! (3 pont)

b) Bizonyítsa be, hogy az $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ vektor merőleges az $\overrightarrow{OA}$ vektorra! (3 pont)

c) Mekkora az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok hajlásszöge? (4 pont)

d) Legyen $a=\frac{1}{10}$, b pedig jelöljön tetszőleges 1-nél nagyobb valós számot. Adja meg (egyenletével, vagy a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva) az A, illetve B pontok halmazát! (6 pont)

6) A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segítségre vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északkeleti irányba halad, a hajótöröttek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket.

a) Igazolja, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérő jelzést! (7 pont)

Egy 1,5 km magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a tengerjáró hajót, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km-t tett meg.

b) Mekkora depresszió szög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! Számításai során a Föld görbületétől tekintsen el! (7 pont)

7) Igazolja, hogy ha egy háromszög szögeire érvényes az alábbi összefüggés:

$$\sin\alpha:\sin\beta=\cos\left(\alpha+\gamma\right):\cos\left(\beta+\gamma\right),$$

akkor a háromszög egyenlő szárú és derékszögű! (14 pont)

8) A csonkakúp alakú tárgyak térfogatát régebben a gyakorlat számára elegendően pontos közelítő számítással határozták meg. Eszerint a csonkakúp térfogata közelítőleg egy olyan henger térfogatával egyezik meg, amelynek átmérője akkora, mint a csonkakúp alsó és felső átmérőjének számtani közepe, magassága pedig akkora, mint a csonkakúp magassága.

a) Egy csonkakúp alakú fatörzs hossza (vagyis a csonkakúp magassága) 2 m, alsó átmérője 12 cm, felső átmérője 8 cm. A közelítő számítással kapott térfogat hány százalékkal tér el a pontos térfogattól? (Ezt nevezzük a közelítő eljárás relatív hibájának.) (3 pont)

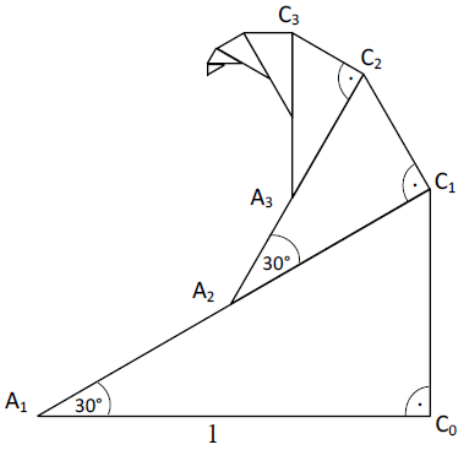
b) Igazolja, hogy a csonkakúp térfogatát – a fentiekben leírt útmutatás alapján kapott - közelítő érték sohasem nagyobb, mint a csonkakúp térfogatának pontos értéke! (7 pont)

Jelölje x a csonkakúp két alapköre sugarának az arányát, és legyen $x>1$. Bizonyítandó, hogy a fentiekben leírt, közelítő számítás relatív hibájának

százalékban mérve a következő függvény adja meg: $f:\left]1;+\infty\right[\to\mathbb{R},\ f(x)=25\cdot\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$.

c) Igazolja, hogy f-nek nincs szélsőértéke!

9) Két egyenes hasábot építünk, H_1-et és H_2-t. Az építéshez használt négyzetes oszlopok (négyzet alapú egyenes hasábok) egybevágok, magasságuk kétszer akkora, mint az alapélük. A H_1 hasáb építésekor a szomszédos négyzetes oszlopokat az oldallapjukkal illesztjük össze, a H_2 hasáb építésekor pedig a négyzet alaplapjukkal- az ábra szerint.



a) A H_1 és H_2 egyenes hasábok felszínének hányadosa $\frac{A_{H_1}}{A_{H_2}}=0{,}8$. Hány négyzetes oszlopot használtunk az egyes hasábok építéséhez, ha H_1-et és H_2-t ugyanannyi négyzetes oszlopból építettük fel? (8 pont)

b) Igazolja, hogy $\left\{\frac{3n+2}{4n+1}\right\}\left(n\in\mathbb{N}^+\right)$ sorozat szigorú monoton növekvő és korlátos! (8 pont)

10) Az 52941 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben.

a) Az 52941 számmal együtt hány ötjegyű számot kapunk? (2 pont)

b) Ezen számok közül hány osztható 12-vel? (6 pont)

c) Bizonyítsa be, hogy e számok egyik sem négyzetszám! (4 pont)

11)

a) Egy derékszögű háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Számítsa ki a háromszög másik két oldalának hosszát! (5 pont)

b) Egy háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Tudjuk, hogy a háromszög nem szabályos. Igazolja, hogy a háromszögnek nincs 60°-os szöge! (11 pont)

12) Az $A_1C_0C_1$ derékszögű háromszögben az A_1 csúcsnál 30°-os szög van, az A_1C_0 befogó hossza 1, az A_1C_1 átfogó felezőpontja A_2.

Az A_2C_1 szakasz „fölé” az $A_1C_0C_1$ háromszöghöz hasonló $A_2C_1C_2$ derékszögű háromszöget rajzoljunk az ábra szerint. Az A_2C_2 átfogó felezőpontja A_3.

Az A_3C_2 szakasz „fölé” az $A_2C_1C_2$ háromszöghöz hasonló $A_3C_2C_3$ derékszögű háromszöget rajzolunk.

Ez az eljárás tovább folytatható.

a) Számítsa ki az így nyerhető végtelen sok derékszögű háromszög területének összegét (az összeg első tagja az $A_1C_0C_1$ háromszög területe.)! (7 pont)

b) Igazolja, hogy a $C_0C_1C_2\ldots C_n$ töröttvonal hossza minden pozitív n-re kisebb, mint 1,4. (9 pont)

13) Igazolja, hogy az alábbi négy egyenlet közül az a) és b) jelű egyenletnek pontosan egy megoldása van, a c) és d) jelű egyenletnek viszont nincs megoldása a valós számok halmazán!

a) $\frac{2x^2+x-10}{2^{x-1}-2}=0$ (4 pont)

b) $\sqrt{x+16}+\sqrt{x-9}=5$ (4 pont)

c) $\lg\left(x^2+x-6\right)=\lg\left(1-x^2\right)$ (4 pont)

d) $\sin x-1=\sqrt{\lg\left(\cos^2 x-1{,}5\cos x\right)}$ (4 pont)

14)

a) Igazolja a következő állítást: ha egy négyszög szögei valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor a négyszög húrnégyszög vagy trapéz! (6 pont)

b) Fogalmazza meg az előző állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

Egy geometriai építőkészletben csak olyan pálcikák vannak, amelyek hossza centiméterben mérve egész szám, és mindenféle lehetséges hosszúság előfordul 1 cm-től 12 cm-ig. (Mindegyik fajta pálcikából elegendően sok van a készletben.)

c) Hány különböző módon választhatunk ki 4 pálcikát a készletből úgy, hogy belőlük egy 24 cm kerületű érintőnégyszöget lehessen építeni? (Két kiválasztást különbözőnek tekintünk, ha az egyik kiválasztás 4 pálcikája nem állítható párba a másik kiválasztás 4 pálcikájával úgy, hogy mind a 4 párban egyenlő hosszú legyen a két pálcika. Tudjuk továbbá, hogy ha a, b, c, d pozitív számok, és $a+c=b+d$, akkor az a, b, c, d hosszúságú szakaszokból szerkeszthető négyszög.) (7 pont)

15)

a) Egy kocka és egy gömb felszíne egyenlő. Bizonyítsa be, hogy a gömb térfogata nagyobb, mint a kockáé! (6 pont)

Két fémkocka összeolvasztásával egy nagyobb kockát készítünk. Az egyik beolvasztott kocka egy élének hossza p, a másiké pedig q $\left(p>0, q>0\right)$. (Feltesszük, hogy az összeolvasztással kapott kocka térfogata egyenlő a két összeolvasztott kocka térfogatának összegével.)

b) Igazolja, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne $6\cdot\sqrt[3]{\left(p^3+g^3\right)^2}$ (2 pont)

c) Bizonyítsa be, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne kisebb, mint a két összeolvasztott kocka felszínének összege! (8 pont)

16) Egy kör középpontja egy derékszögű háromszög b hosszúságú befogójára illeszkedik. A kör érinti a c hosszúságú átfogót és z a hosszúságú befogó egyenesét is. Andrea és Petra egymástól függetlenül kifejezték a kör

sugarának hosszát a háromszög oldalainak hosszával. Andrea szerint a kör sugara $R_A = \frac{ab}{a+c}$, Petra szerint pedig $R_P = \frac{ac-a^2}{b}$.

a) Igazolja, hogy $R_A = R_P$! (5 pont)

b) Bizonyítsa be, hogy Andrea képlete helyes! (4 pont)

Egy derékszögű háromszög oldalai $a = 8$ cm, $b = 6$ cm és $c = 10$ cm.
Megrajzoltuk azt a két kört, melyek középpontja a háromszög egyik, illetve másik befogójára illeszkedik, és amelyek érintik a háromszög másik két oldalegyenesét.

c) Számítsuk ki, hogy a két körnek a háromszög belsejébe eső M metszéspontja milyen messze van a derékszögű C csúcstól! (5 pont)

17)

a) A $PQRS$ húrnégyszöget a PR és a QS átlók megrajzolásával négy háromszögre bontottuk. Igazolja, hogy ezek közül a két-két szemközti háromszög hasonló egymáshoz! (4 pont)

Az $ABCD$ húrnégyszög AB oldala a négyszög körülírt körének egyik átmérője. A négyszög BC oldala 3 cm, a CD oldala 5 cm hosszú, továbbá $BCD\sphericalangle = 120°$.

b) Számítsa ki a négyszög BD átlójának, AB oldalának és AD oldalának hosszát, valamint a négyszög többi szögét! (10 pont)