MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI
EMELT SZINT

Függvények – Analízis

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Legyen *f* és *g* a valós számok halmazán értelmezett függvény:

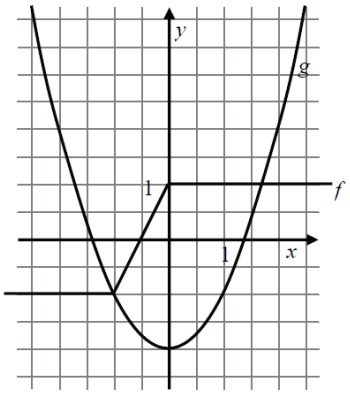
$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{ha } x\le -1\\ 2x+1 & \text{ha } -1<x<0\\ 1 & \text{ha } x\ge 0\end{cases} \quad \text{és} \quad g(x)=x^2-2$$

a) Ábrázolja ugyanabban a koordinátarendszerben mindkét függvényt! Adja meg az $f(x)=g(x)$ egyenlet valós megoldásait! (6 pont)

b) Számítsa ki a két függvény grafikonja által közrefogott zárt síkidom területét! (8 pont)

Megoldás:

a)



A függvények ábrázolása (2 pont)

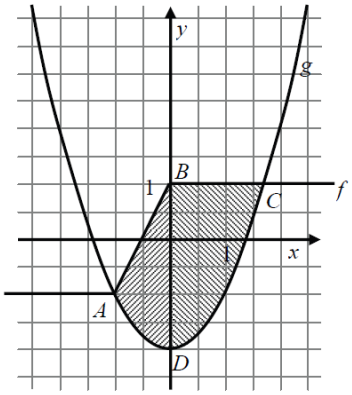
$-1=x^2-2$ egyenlet megoldása $x\le -1$ feltétel esetén $x=-1$ (1 pont)

$2x+1=x^2-2$ egyenletnek nincs megoldása a $]-1;0[$ intervallumon (1 pont)

$1=x^2-2$ egyenlet megoldása az $x\ge 0$ feltétel esetén $x=\sqrt{3}$ (1 pont)

Az $f(x)=g(x)$ egyenletnek két megoldása van: $x_1=-1$ és $x_2=\sqrt{3}$ (1 pont)

b)



Tekintsük az f és g grafikonját ahol $A(-1;-1), B(0;1), C\left(\sqrt{3};1\right), D(0;-2)$ (1 pont)

A vizsgálandó síkidomot az AB, a BC szakaszok és az ADC parabolaív határolja (1 pont)

Vágjuk ketté a síkidomot az y tengellyel. $T_{ABCD} = T_{ABD} + T_{DBC}$ (1 pont)

$$T_{ABD} = \int_{-1}^{0} \left(f(x) - g(x)\right) dx = \int_{-1}^{0} \left(-x^2 + 2x + 3\right) dx = \quad \text{(1 pont)}$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^{0} = \frac{5}{3} \quad \text{(1 pont)}$$

$$T_{DBC} = \int_{0}^{\sqrt{3}} \left(f(x) - g(x)\right) dx = \int_{0}^{\sqrt{3}} \left(3 - x^2\right) dx = \quad \text{(1 pont)}$$

$$= \left[3x - \frac{x^3}{3} \right]_{0}^{\sqrt{3}} = 2 \cdot \sqrt{3} \quad \text{(1 pont)}$$

A keresett terület nagysága: $\frac{5}{3} + 2 \cdot \sqrt{3} \approx \mathbf{5{,}13}$ (1 pont)

Összesen: 14 pont

2) Legyen adott az $f:[-2,5;2,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x$ függvény.

a) Határozza meg az *f* függvény zérushelyeit! (4 pont)

b) Vizsgálja meg az *f* függvényt monotonitás szempontjából! (6 pont)

c) Adja meg az *f* függvény legnagyobb és legkisebb értékét! (4 pont)

Megoldás:

a) Mivel $x^3-3x=\left(x+\sqrt{3}\right)x\left(x-\sqrt{3}\right)$, ezért f zérushelyei lehetnek $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=0$ és $x_3=\sqrt{3}$. (3 pont)

Az egyenlet mindhárom gyöke eleme az f értelmezési tartományának. ezért mindegyik zérushely jó megoldást ad (1 pont)

b) Az f a teljes értelmezési tartományának belső pontjaiban differenciálható függvény, ezért a monotonitás megállapítása és a szélsőértékek megkeresése az első derivált előjelvizsgálatával történhet (1 pont)

$f'(x)=3x^2-3$ (1 pont)

Az első derivált értéke 0, ha $x=-1$ és $x=1$ (1 pont)

Ezek az x értékek az értelmezési tartomány elemei. Készítsünk táblázatot az f' előjelviszonyai alapján az f menetének meghatározása:

x	$-2,5<x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1$	$x=1$	$1<x<2,5$
f'	pozitív	0	negatív	0	pozitív
f	**növekvő**	$f(-1)=2$	**csökkenő**	$f(1)=-2$	**növekvő**

Monotonitás megállapítása a táblázat helyes kitöltése alapján. (3 pont)

c) Az f helyi maximumot vesz fel az $x=-1$ helyen, a helyi maximum értéke $f(-1)=2$ (1 pont)

Az f helyi minimumot vesz fel az $x=1$ helyen, a helyi minimum értéke $f(1)=-2$ (1 pont)

Mivel $f(-2,5)=-8,125$, a **legkisebb függvényérték -8,125** (1 pont)

Mivel $f(2,5)=8,125$, ezért a **legnagyobb függvényérték 8,125** (1 pont)

Összesen: 14 pont

3)

a) Ábrázolja függvény-transzformációk segítségével a $[-3;4]$ intervallumon az $x\mapsto x^2-2|x|-3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt! (6 pont)

b) Legyen az *f*, a *g* és a *h* függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza, hozzárendelési szabályuk: $f(x)=x^2-2x-3$; $g(x)=x-3$, $h(x)=|x|$.

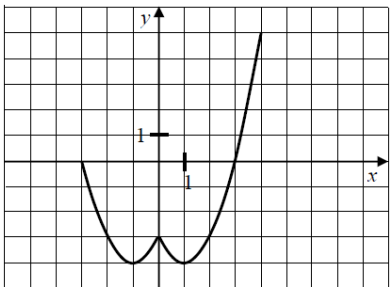
Képezzünk egyszeresen összetett függvényeket a szokásos módon. Például: $(g\circ f)(x)=g(f(x))=(x^2-2x-3)-3=x^2-2x-6$

Készítse el –a fenti példának megfelelően- az *f*, *g* és *h* függvényekből pontosan két különböző felhasználásával képezhető egyszeresen összetett függvényeket! Sorolja fel valamennyit! (6 pont)

c) Keressen példát olyan p és t, a valós számok halmazán értelmezett függvényre, amelyre $(p \circ t)(x) = (t \circ p)(x)$!
Adja meg a p és t függvény hozzárendelési szabályát! (4 pont)

***Megoldás*:**

a)



$x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & \text{ha } x \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$ (1 pont)

$x \mapsto \begin{cases} (x-1)^2 - 4, & \text{ha } x \geq 0 \\ (x+1)^2 - 4, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$ (1 pont)

A grafikon két összetevőjének ábrázolása transzformációval (2 pont)
A függvény képe a megadott intervallumon (2 pont)

b) Összetett függvényhez a 3 függvény közül 2-t kell kiválasztani a sorrendre való tekintettel, ezt 6-féleképpen tehetjük meg. (1 pont)

A függvények: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^2 - 2x - 3) - 3 = \mathbf{x^2 - 2x - 6}$ (megadva)

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x-3)^2 - 2(x-3) - 3 = \mathbf{x^2 - 8x + 12}$ (1 pont)

$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = \mathbf{|x^2 - 2x - 3|}$ (1 pont)

$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = |x^2| - 2|x| - 3 = \mathbf{x^2 - 2|x| - 3}$ (1 pont)

$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \mathbf{|x| - 3}$ (1 pont)

$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = \mathbf{|x - 3|}$ (1 pont)

c) Egy egyszerű példa: $p(x) = x + c$ és $t(x) = x - c$ (ahol c nullától különböző konstans) (1 pont)

$(p \circ t)(x) = (x + c) - c = x$ (1 pont)

$(t \circ p)(x) = (x - c) + c = x$ (1 pont)

Tehát $\mathbf{(p \circ t)(x) = (t \circ p)(x)}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

4) Egy arborétumban 1969 óta figyelik a fák természetes növekedését. Úgy tapasztalták, hogy a mandzsu fűzfa magasságát közelítően jól írja le az $m(t)=12-\frac{10}{t+1}$ képlet; a hegyi mamutfenyő magasságát közelítően jól írja le a következő formula: $h(t)=5\cdot\sqrt{0,4t+1}+0,4$.

Mindkét formulában t az 1969 óta eltelt időt jelöli években $(t\geq 1)$, és a magasságot méterben számolják.

a) Szemléltesse a mandzsu fűzfa és a hegyi mamutfenyő magasságának változását, olyan közös oszlopdiagram, amely a magasság értékét az 1970 és 2000 közötti időszakban 10 évenként mutatja! A diagramon tüntesse fel a számított magasságértékeket! (6 pont)

b) A mamutfenyő melyik évben érte el 10,5 méteres magasságot? (4 pont)

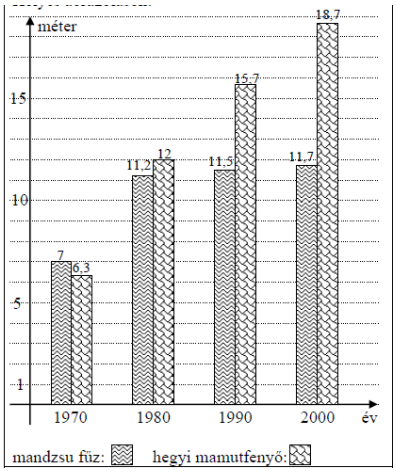
c) Indokolja, hogy nem lehet olyan fa az arborétumban, amely magasságát a $g(t)=t^3-16,5t^2+72t+60$ képlet írja le. (A magasságot centiméterben számolják, t az 1985 óta eltelt időt jelöli években, és $t\leq 21$.) (6 pont)

Megoldás:

a) Táblázatba foglaljuk a képletek által kiszámított magasságokat az eltelt évek függvényében: (2 pont)

	1970	1980	1990	2000
t	1	11	21	31
$m(t)$	7	11,2	11,5	11,7
$h(t)$	6,3	12,0	15,7	18,7

Helyes ábrázolások: (4 pont)



b) Megoldandó a $10,5=5\cdot\sqrt{0,4t+1}+0,4$ egyenlet (1 pont)

Rendezés után kapjuk, hogy $t\approx 7,7$ (2 pont)

A kívánt magasságot a mamutfenyő a 8. évben, vagyis $1969+8=$ **1977** (1 pont)

c) A megadott függvény menetét előjel-vizsgálattal állapítjuk meg. (1 pont)
A derivált: $g'(t) = 3t^2 - 33t + 72$ (2 pont)
A derivált értéke 0, ha $t = 3$ vagy $t = 8$ (1 pont)
A derivált mindkét nullhelyénél előjelet vált, a két nullhely közötti t értékekre a derivált negatív, ezért a $g(t)$ függvény ezen a tartományon $3 < t < 8$ szigorú monoton csökkenő (1 pont)
A fa magassága nem csökkenhet az arborétumban, ezért a $g(t)$ függvény egyetlen fa növekedését sem írhatja le (1 pont)

Összesen: 16 pont

5)

a) Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$ kifejezés értelmezhető! (2 pont)

b) Ábrázolja a $[-5;8]$ intervallumon értelmezett $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ függvény! (5 pont)

c) Melyik állítás igaz és melyik hamis a fenti függvényre vonatkozóan? Válaszát írja a sor végén lévő téglalapba! (Az indoklást nem kell leírnia.)

A: Az *f* értékkészlete: $[0;5]$

B: Az *f* függvény minimumát az $x = -3$ helyen veszi fel.

C: Az *f* függvény szigorúan monoton nő a $[4;8]$ intervallumon.

(3 pont)

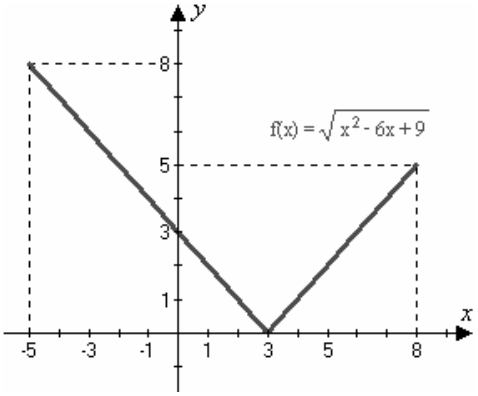
A	
B	
C	

d) Határozza meg az $\int_{-3}^{3} (x^2 - 6x + 9)\,dx$ értékét! (6 pont)

Megoldás:

a) $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ (1 pont)
Mivel ez minden valós x értékre nem negatív, ezért a legbővebb részhalmaz az $\mathbb{R}$. (1 pont)

b) $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$ (2 pont)



(3 pont)

c) A: **Hamis** (1 pont)
B: **Hamis** (1 pont)
C: **Igaz** (1 pont)

d) $\int_{-3}^{3}\left(x^2-6x+9\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_{-3}^{3}=$ (3 pont)

$=(9-27+27)-(-9-27-27)=$ (2 pont)

$=$ **72** (1 pont)

Összesen: 16 pont

6) Adott az *f* függvény: $f:]-1;6[\to\mathbb{R};\ f(x)=-4x^3+192x$

a) Határozza meg *f* zérushelyeit és elemezze az *f* függvényt monotonitás szempontjából! (7 pont)

Jelölje *c* az *f* értelmezési tartományának egy pozitív elemét

b) Határozza meg *c* értékét úgy, hogy az *x* tengely $[0;c]$ szakasza, az $x-c=0$ egyenletű egyenes és az *f* grafikonja által közbezárt síkidom területe 704 területegységnyi legyen! (9 pont)

Megoldás:

a) A $-4x\left(x^2-48\right)=0$ egyenlet $]-1;6[$ intervallumba eső egyetlen megoldása a **0**. (2 pont)

f deriváltjának hozzárendelési szabálya: $f'(x)=-12x^2+192$ (1 pont)

A deriváltfüggvény $]-1;6[$ intervallumba eső egyetlen zérushelye 4. (1 pont)

Itt a derivált előjelet vált, mégpedig pozitívból negatívba (1 pont)

Az *f* függvény tehát monoton növekszik a $]-1;4]$ intervallumon és monoton csökken a $[4;6[$ intervallumon. (2 pont)

b) A $[0;c]$ intervallumon $f(x)\geq 0$ (1 pont)

ezért $\int_0^c\left(-4x^3+192x\right)dx=704$ egyenletet kell megoldani a $[0;6[$ intervallumon (2 pont)

$\int_0^c\left(-4x^3+192x\right)dx=\left[-x^4+96x^2\right]_0^c$ (2 pont)

$\left[-x^4+96x^2\right]_0^c=-c^4+96c^2$ (1 pont)

$-c^4+96c^2=704$

$c^4-96c^2+704=0$ (1 pont)

Megoldóképlettel: $c^2=8$ vagy $c^2=88$ (1 pont)

Az értelmezési tartományban az egyetlen pozitív megoldás: $\boldsymbol{c=\sqrt{8}}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

7)

a) **Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x)=x^3+kx^2+9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl).**
Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x=1$ a függvénynek lokális szélsőértékhelye a függvénynek!
Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x=1$ a függvények lokális maximumhelye vagy lokális minimumhelye!
Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőértékhelye is! **(11 pont)**

b) **Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x)=x^3-9x^2$ képlettel értelmezett g függvény inflexiós pontját!** **(5 pont)**

Megoldás:

a) A differenciálható f függvénynek az $x=1$ akkor lehet szélsőértékhelye, ha itt az első deriváltja nulla (1 pont)
Mivel $f'(x)=3x^2+2kx+9$ (1 pont)
Ezért $f'(1)=3+2k+9=0$ (1 pont)
Innen $\boldsymbol{k=-6}$ (1 pont)
Erre a k értékre $f'(x)=3x^2-12x+9$ (1 pont)
A másodfokú polinom szorzatalakja: $f'(x)=3\cdot(x-1)\cdot(x-3)$ (2 pont)
Az $x=1$ helyen a derivált pozitívból negatívba vált (1 pont)
ezért itt az f függvénynek **lokális maximuma** van (1 pont)
A derivált $x=3$ helyen negatívból pozitívba vált (1 pont)
ezért itt az f függvénynek lokális minimuma van (1 pont)

b) Mivel $g'(x)=3x^2-18x$ (1 pont)
Ebből $g''(x)=6x-18$ (1 pont)
A második derivált zérushelye $x=3$ (1 pont)
Itt a második derivált előjelet vált (1 pont)
A g függvény egyetlen inflexiós pontja az $\boldsymbol{x=3}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

8) **Adott a $K(t)=t^2+6t+5$ polinom. Jelölje H a koordinátasík azon $P(x;y)$ pontjainak halmazát, amelyekre $K(x)+K(y)\le 0$.**

a) **A H halmaz pontjai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont az $C(-3;3)$ ponttól 2 egységnél nem nagyobb távolságra van?** **(9 pont)**

Az f függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+6x+5$$

b) **Számítsa ki az f függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt síkidom területét!** **(7 pont)**

Megoldás:

a) $K(x)+K(y)=x^2+6x+5+y^2+6y+5\le 0$ (1 pont)

A bal oldali kifejezés teljes négyzetté kiegészítéssel a következő alakra hozható: $(x+3)^2+(y+3)^2\le 8$ (1 pont)

a H halmaz a $(-3;3)$ középpontú (1 pont)

$\sqrt{8}$ sugarú zárt körlap (1 pont)

A kérdéses valószínűség a geometriai modell alapján a két koncentrikus körlap területének arányaként számolható (2 pont)

A kedvező tartomány a $C(-3;3)$ középpontú, 2 egység sugarú zárt körlap, ennek területe 4π (1 pont)

A teljes tartomány a H halmaz, ennek területe 8π (1 pont)

Így a keresett valószínűség $P=\frac{4\pi}{8\pi}=\mathbf{\frac{1}{2}}$ (1 pont)

b) Az f függvény zérushelyei -5 és 1 (1 pont)

Mivel f főegyütthatója pozitív, a másodfokú függvény a két zérushelye között negatív értékeket vesz fel (1 pont)

kérdéses terület a függvény két zérushely közötti integráljának -1-szerese (1 pont)

$$T=-\int_{-5}^{-1}\left(x^2+6x+5\right)dx=-\left[\frac{x^3}{3}+3x^2+5x\right]_{-5}^{-1}$$ (2 pont)

behelyettesítés után, (1 pont)

a keresett terület nagysága $\mathbf{\frac{32}{3}}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

9) Egy egyenlő szárú háromszög szárainak metszéspontja $C(0;7)$ pont, a szárak hossza $\sqrt{53}$ egység. A háromszög másik két csúcsa (*A*, *B*) illeszkedik az $y=-\frac{1}{4}x^2+1$ egyenletű parabolára.

a) Számítsa ki az *A* és a *B* pont koordinátáit! (6 pont)

b) Írja fel az *ABC* háromszög egyik száregyenesének egyenletét! Ennek az egyenesnek és a parabolának további közös pontja *D*. Határozza meg a *D* pont koordinátáit! (4 pont)

c) Mekkora területű részekre bontja az *ABC* háromszöget a parabola íve? (6 pont)

Megoldás:

a) A keresett két csúcs rajta van a C középpontú $\sqrt{53}$ egység sugarú körön. A kör egyenlete: $x^2+(y-7)^2=53$ (1 pont)

A keresett pontokat a következő egyenletrendszer megoldása adja:

$$\left.\begin{aligned} y&=-\frac{1}{4}x^2+1\\ x^2+(y-7)^2&=53\end{aligned}\right\}$$ (1 pont)

Az első egyenlet átalakításával: $x^2 = -4y + 4$. Az x^2 kifejezést behelyettesítve a második egyenletbe kapjuk, hogy: $y^2 - 18y = 0$ (1 pont)

Innen $y_1 = 0$ és $y_2 = 18$. (1 pont)

Ezek közül csak az $y_1 = 0$ ad megoldást (1 pont)

Behelyettesítve az első egyenletbe: $x^2 = 4$. Innen $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$

A keresett két pont: $\boldsymbol{A(-2;0)}$ és $\boldsymbol{B(2;0)}$ (1 pont)

b) A BC egyenes egyenlete: $\boldsymbol{7x + 2y = 14}$ (1 pont)

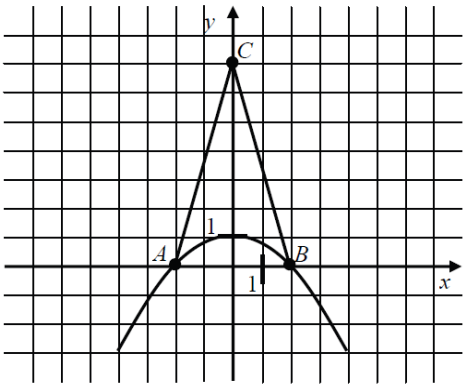
A D pont koordinátáit a $7x + 2y = 14$ és a $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ görbék B-től különböző metszéspontjai adják. (1 pont)

$7x - \frac{1}{2}x^2 = 12$ gyökei $x_1 = 2$ és $x_2 = 12$ (1 pont)

$\boldsymbol{D(12;-35)}$ (1 pont)

(A másik száregyenes egyenlete: $\boldsymbol{AC: 7x - 2y = -14}$, közös pont pedig $\boldsymbol{D(-12;-35)}$.)

c)



Az ABC háromszög területe: $\frac{AB \cdot m_c}{2} = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14$ (1 pont)

A parabola két részre osztja a háromszöget. (1 pont)

A kisebbik rész területének fele a szimmetria miatt:

$\int_0^2 \left(-\frac{1}{4}x^2 + 1\right) dx = \frac{4}{3}$ (2 pont)

A háromszögnek parabolaív alá eső területe: $\frac{8}{3}$ (területegység) (1 pont)

A háromszögnek a parabolaív felé eső területe: $14 - \frac{8}{3} = \boldsymbol{\frac{34}{3}}$ **(te)** (1 pont)

Összesen: 16 pont

10) Adott f és g függvény.

$$f: \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\} \qquad x \mapsto (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \cdot \sin 2x$$

a) Igazolja, hogy az így definiált f függvény konstans! **(3 pont)**

$$g: \quad D_g = [-7;7] \qquad x \mapsto x^2 - 6|x|$$

b) Számítsa ki g függvény zérushelyeit! **(3 pont)**

c) Adja meg g függvény értékkészletét! **(6 pont)**

Megoldás:

a) Az értelmezési tartományon minden x esetén

$$f(x) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \cdot \sin 2x = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) \cdot \sin 2x = \quad \text{(1 pont)}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} \cdot 2 \sin x \cos x = \quad \text{(1 pont)}$$

$$= \mathbf{2} \quad \text{(1 pont)}$$

b) $$g(x) = \begin{cases} x^2 - 6x = x(x-6) \\ x^2 + 6x = x(x+6) \end{cases}, \text{ ha } \begin{matrix} (7 \geq) x \geq 0 \\ (-7 \leq) x \leq 0 \end{matrix} \quad \text{(2 pont)}$$

ezért a g függvénynek három zérushelye van: **-6;0;6** (1 pont)

c) A $g(x)$ kifejezést átalakíthatjuk:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9 \\ x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9 \end{cases}, \text{ ha } \begin{matrix} 0 \leq x (\leq 7) \\ (-7 \leq) x \leq 0 \end{matrix} \quad \text{(2 pont)}$$

innen következik, hogy

a legkisebb függvényérték $g(3) = g(-3) = -9$ (1 pont)

a legnagyobb függvényérték $g(7) = g(-7) = 7$ (1 pont)

A g (folytonos) függvény értékkészlete: $\boldsymbol{R_g = [-9;7]}$ (2 pont)

Összesen: 12 pont

11) Legyen $f(x) = -\frac{4x^3}{a} + \frac{3x^2}{a} + \frac{2x}{a} - a$, ahol a pozitív valós szám és $x \in \mathbb{R}$.

a) Igazolja, hogy $\int_0^a f(x)\,dx = -a^3 + a$! **(6 pont)**

b) Mely pozitív a számokra teljesül, hogy $\int_0^a f(x)\,dx \geq 0$? **(4 pont)**

c) Az x mely pozitív valós értéke lesz a $g(x) = -x^3 + x$ függvények lokális (helyi) minimuma? **(6 pont)**

Megoldás:

a) Az f függvény integrálható.

$$\int_0^a \left(-\frac{4x^3}{a}+\frac{3x^2}{a}+\frac{2x}{a}-a\right)dx=\left[-\frac{x^4}{a}+\frac{x^3}{a}+\frac{x^2}{a}-ax\right]_0^a= \quad \text{(4 pont)}$$

$$=-\frac{a^4}{a}+\frac{a^3}{a}+\frac{a^2}{a}-a^2= \quad \text{(1 pont)}$$

$$=\boldsymbol{-a^3+a} \quad \text{(1 pont)}$$

b) Megoldandó (az $a\in\mathbb{R}^+$ feltétel mellett) a

$-a^3+a\geq 0$ egyenlőtlenség (1 pont)

$(a+1)\cdot a\cdot(1-0)\geq 0$ (1 pont)

Mivel $a>0$, így az első két tényező pozitív, ezért $1-a\geq 0$ (1 pont)

Az a lehetséges értékeinek figyelembe vételével: $\boldsymbol{0<a\leq 1}$ (1 pont)

c) A nyílt intervallumon értelmezett $(x\in\mathbb{R})$ g függvény differenciálható.

$g'(x)=-3x+1$ (1 pont)

A lehetséges szélsőértékhely keresése: $-3x^2+1=0$ (1 pont)

A lehetséges szélsőértékhely: $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (benne van az értelmezési tartományban) (1 pont)

$g''(x)=-6x$ (1 pont)

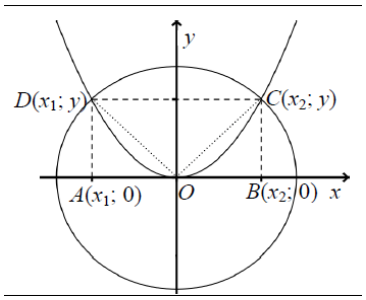
$g''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{6}{\sqrt{3}}<0$ (1 pont)

Tehát az $\boldsymbol{x=\frac{1}{\sqrt{3}}}$ lokális minimumhely. (1 pont)

Összesen: 16 pont

12) Az $x^2 = 2y$ egyenletű parabola az $x^2 + y^2 \le 8$ egyenletű körlapot két részre vágja. Mekkora a konvex rész területe? Számolása során ne használja a π közelítő értékét! (16 pont)

Megoldás:



Az $x^2 + y^2 = 8$ egyenletű kör középpontja és a parabola tengelypontja is az origó (O) (2 pont)

A metszéspontok meghatározása:

$$\left.\begin{aligned} 2y &= x^2 \\ x^2 + y^2 &= 8 \end{aligned}\right\}$$

$y^2 + 2y - 8 = 0$ (3 pont)

$y_1 = 2 \quad y_2 = -4$

amelyek közül az $y = 2$ a feladatnak megfelelő (1 pont)

A CD húr a körlapból egy olyan körszeletet vág le, amelynek a középponti szöge $\frac{\pi}{2}(=90°)$, mert (1 pont)

az OD és OC is egy-egy négyzet átlója (1 pont)

$$T_{\text{körszelet}} = \frac{1}{2} r^2 (\alpha - \sin\alpha) =$$

így a területe: (2 pont)

$$= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} \right) = 2\pi - 4$$

A parabolából a CD húr által levágott parabolaszelet területe:

$$T_{\text{parabolaszelet}} = T_{ABCD} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^2}{2} dx = 4 \cdot 2 - \int_{-2}^{2} \frac{x^2}{2} =$$

(5 pont)

$$= 8 - \left[\frac{x^3}{6} \right]_{-2}^{2} = 8 - \left[\frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3} \right) \right] = \frac{16}{3}$$

A konvex rész területe:

$$T = T_{\text{körszelet}} + T_{\text{parabolaszelet}} = 2\pi - 4 + \frac{16}{3} = \mathbf{2\pi + \frac{4}{3}}$$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

13) Egy kozmetikumokat gyártó vállalkozás nagy tételben gyárt egyfajta krémet. A termelés havi mennyisége (x mennyisége) 100 és 700 kg közé esik, amelyet egy megállapodás alapján a gyártás hónapjában el is adnak egy nagykereskedőnek. A megállapodás azt is tartalmazza, hogy egy kilogramm krém eladási ára: $(36-0{,}03x)$ euró.

a) Számítsa ki, hogy hány kilogramm krém eladása esetén lesz az eladásból származó havi bevétel a legnagyobb! Mekkora a legnagyobb havi bevétel? (6 pont)

b) Adja meg a krémgyártással elérhető legnagyobb havi nyereséget! Hány kilogramm krém értékesítése esetén valósul ez meg? (nyereség = bevétel – kiadás) (10 pont)

Megoldás:

a) Az eladásból származó havi bevétel: $x(36-0{,}03x)$ euró (1 pont)

Az $x \mapsto -0{,}03x^2+36x \quad (x \in \mathbb{R})$, maximummal rendelkező másodfokú függvény (1 pont)

A függvény zérushelyei 0 és 1200 (1 pont)

ezért a függvény maximumhelye 600 (1 pont)

Ez az érték a feltételek szerinti intervallumba tartozik (1 pont)

A legnagyobb bevételt tehát 600 kg termék értékesítése esetén érik el, a legnagyobb bevétel 10 800 euró (1 pont)

b) A havi nyereség a havi bevétel és a havi kiadás különbségével egyenlő. A havi nyereséget az $x \mapsto -0{,}03x^2+36x-\left(0{,}0001x^3-30{,}12x+13000\right) \quad (100<x<700)$ függvény adja meg (1 pont)

A nyereséget leíró függvény:

$x \mapsto -0{,}0001x^3-0{,}03x^2+66{,}12x-13000 \quad (100<x<700)$ (1 pont)

Ez a függvény deriválható, és deriváltja az

$x \mapsto -0{,}0003x^2-0{,}06x+66{,}12 \quad (100<x<700)$ függvény (1 pont)

A $-0{,}0003x^2-0{,}06x+66{,}12=0$ egyenletnek $\left(x^2+200x-220400=0\right)$ egy negatív $(x_1=-580)$ és egy pozitív $(x_2=380)$ valós gyöke van (1 pont)

A deriváltfüggvény a $]100;380[$ intervallumon pozitív (1 pont)

az $]380;700[$ intervallumon negatív (1 pont)

tehát a nyereségfüggvény 380-ig szigorúan nő, majd szigorúan csökken (1 pont)

A vizsgált függvénynek tehát egy abszolút maximumhelye van és az a 380 (1 pont)

A legnagyobb függvényérték 2306,4 (1 pont)

A legnagyobb havi nyereség tehát 380 kg termék eladása esetén keletkezik, értéke 2306,4 euró (1 pont)

Összesen: 16 pont

14) A nyomda egy plakátot 14 400 példányban állít elő. A költségeket csak a nyomtatáshoz felhasznált nyomólemezek (klisék) darabszámának változtatásával tudják befolyásolni. Egy nyomólemez 2500 Ft-ba kerül, és a nyomólemezek mindegyikével óránként 100 plakát készül. A nyomólemezek árán felül, a lemezek számától függetlenül, minden nyomtatásra fordított munkaóra további 40 000 Ft költséget jelent a nyomdának. A ráfordított idő és az erre az időre jutó költség egyenesen arányos.

a) Mennyi a nyomólemezek árának és a nyomtatásra fordított munkaórák miatt fellépő költségek összege, ha a 14 400 plakát kinyomtatásához 16 nyomólemezt használnak? (4 pont)

b) A 14 400 plakát kinyomtatását a nyomda a legkisebb költséggel akarja megoldani. Hány nyomólemezt kell ekkor használnia? Mennyi ebben az esetben a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege? (12 pont)

Megoldás:

a) 16 nyomólemez óránként 1600 plakát elkészítését tesz lehetővé (1 pont)

ezért a teljes mennyiséghez $\frac{14\,400}{1600} = 9$ óra szükséges (1 pont)

A nyomólemezek előállítási költsége és a munkaidő további költségének összege: $16 \cdot 2500 + 9 \cdot 40\,000 =$ **400 000 Ft** (2 pont)

b) Ha a nyomda x darab nyomólemezt használ, akkor ennek a költsége $2500x$ (1 pont)

Az x darab lemezzel óránként $100x$ darab plakát készül el, ezért a 14 400 darab kinyomtatásához $\frac{14\,400}{100x} = \frac{144}{x}$ órát vesz igénybe (1 pont)

és ez további $\frac{5{,}76 \cdot 10^6}{x}$ forint, (1 pont)

A két költség összege $K(x) = 2500x + \frac{5{,}76 \cdot 10^6}{x}$, ahol x pozitív egész (1 pont)

Tekintsük a pozitív valós számok halmazán a K utasítása szerint értelmezett függvényt (1 pont)

Az így megadott K függvény minimumár keressük. A K függvény deriválható és minden $0 < x$ esetén $K'(x) = 2500 - \frac{5{,}76 \cdot 10^6}{x^2}$. (1 pont)

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy $K'(x) = 0$ (1 pont)

$2500 - \frac{5{,}76 \cdot 10^6}{x^2} = 0$, innen $x^2 = 2304$ (1 pont)

$x = 48$, mert $x > 0$ (1 pont)

Annak igazolása, hogy az $x = 48$ (abszolút) minimumhely: $\left(K''(x) = \frac{1{,}152 \cdot 10^7}{x^3}\right)$ (1 pont)

Azaz **48** nyomólemez alkalmazása esetén lesz minimális a költség (1 pont)

48 darab nyomólemez alkalmazása esetén a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege: $K(48) = \mathbf{240\,000\ Ft}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

15)

a) Két szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Számítsa ki a következő két esemény valószínűségét:
***A*: a dobott számok összege prím**
***B*: a dobott számok összege osztható 3-mal** **(6 pont)**

b) Az 1,2,3,4,5,6 számjegyekből véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával 4-gyel osztható háromjegyű számot tudunk képezni? **(5 pont)**

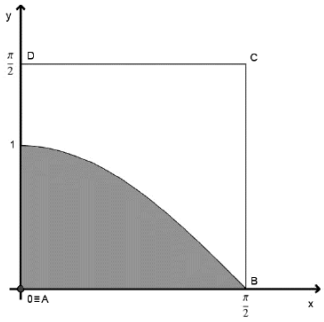
c) Az *ABCD* négyzet csúcsai: $A(0;0)$, $B\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, $C\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy belső pontját. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a koordinátatengelyek és az $f:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$ függvény grafikonja által határolt tartomány egyik pontja? **(5 pont)**

Megoldás:

a) A dobott számok összege a következő esetekben lesz prím: $1+1$, $1+2$, $1+4$, $2+3$, $1+6$, $2+5$, $3+4$, $5+6$. (1 pont)
Az $1+1$ eset kivételével mindegyik összeg kétféleképpen valósulhat meg, így az A eseményt 15 elemi esemény valósítja meg (1 pont)
Az összes elemi esemény $6\cdot 6=36$, ezért $P(A)=\frac{15}{36}$ (1 pont)
A dobott számok összege a következő esetekben lesz 3-mal osztható: $1+2$, $1+5$, $2+4$, $3+3$, $3+6$, $4+5$, $6+6$. (1 pont)
A $3+3$ és a $6+6$ esetek egyféleképpen, a többi kétféleképpen valósulhat meg, (1 pont)
így $\boldsymbol{P(B)=\frac{12}{36}}$ (1 pont)

b) A hat számjegyből hármat $\binom{6}{3}=20$ különböző módon tudunk kiválasztani (1 pont)
A 4-gyel oszthatóság szabálya alapján kedvező esetet kapunk, ha a kiválasztott három számjegy között van kettő, amelyekből 4-gyel osztható kétjegyű szám képezhető (1 pont)
Ezek között négy olyan hármas van, amely nem tartalmaz két megfelelő számjegyet: (1, 3, 5); (1, 3, 4); (1, 4, 5); (3, 4, 5). (2 pont)
Így a keresett valószínűség $P=\frac{20-4}{20}=\frac{16}{20}=\boldsymbol{\frac{4}{5}}$ (1 pont)

c) A négyzet és az f függvény grafikonjának felvétele közelítő pontossággal



(1 pont)

A négyzet területe $\frac{\pi^2}{4}$ (1 pont)

A koordinátatengelyek és az f függvény grafikonja által határolt tartomány területe: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx =$ (1 pont)

$= \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$ (1 pont)

A valószínűség kiszámításának geometriai modelljét alkalmazva, a keresett valószínűség: $P = \frac{1}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{4}{\pi^2} \approx \mathbf{0,405}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

16) Legyen p valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $f(x) = -3x^3 + (p-3)x^2 + p^2x - 6$.

a) Számítsa ki a $\int_0^2 f(x)dx$ határozott integrált, ha $p = 3$ (4 pont)

b) Határozza meg p értékét úgy, hogy az $x = 1$ zérushelye legyen az f függvénynek! (3 pont)

c) Határozza meg p értékét úgy, hogy az f függvény deriváltja az $x = 1$ helyen pozitív legyen! (7 pont)

***Megoldás*:**

a) Ha $p = 3$, akkor $f(x) = -3x^3 + 9x - 6$ (1 pont)

$\int_0^2 \left(-3x^3 + 9x - 6\right)dx = \left[-0,75x^4 + 4,5x^2 - 6x\right]_0^2 =$ (2 pont)

$= -6$ (1 pont)

b) $-3 + (p-3) + p^2 - 6 = 0$ (1 pont)

Rendezve: $p^2 + p - 12 = 0$ (1 pont)

Ennek a megoldásából adódik, hogy $p = 3$ vagy $p = -4$ esetén lesz a megadott függvénynek zérushelye az **1**. (1 pont)

c) Deriváltfüggvény: $f'(x) = -9x^2 + 2(p-3)x + p^2$ (2 pont)
$x = 1$-hez tartozó helyettesítési érték: $p^2 + 2p - 15$ (1 pont)
$p^2 + 2p - 15 > 0$ egyenlőtlenség megoldható (1 pont)
$p^2 + 2p - 15 = 0$ egyenlet megoldásai 3 és -5 (1 pont)
mivel $p^2 + 2p - 15 > 0$ bal oldalának főegyütthatója pozitív (1 pont)
ezért az egyenlőtlenség teljesül, ha $\boldsymbol{p < -5}$ vagy $\boldsymbol{p > 3}$ (1 pont)

Összesen: 14 pont

17)

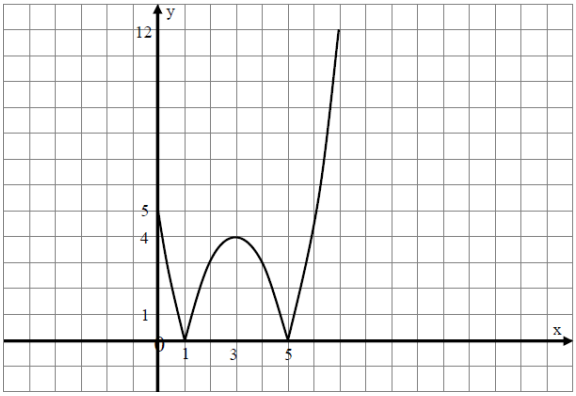
a) Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben az $f : [0;7] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$ függvényt! (4 pont)

b) Adja meg az f függvény értékkészletét! (2 pont)

c) A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az $|x^2 - 6x + 5| = p$ egyenletnek a $[0;7]$ intervallumon? (8 pont)

Megoldás:

a) $f(x) = |x^2 - 6x + 5| = |(x-3)^2 - 4|$ (1 pont)



(3 pont)

b) f értékkészlete: $\boldsymbol{[0;12]}$ (2 pont)

c) A lehetséges megoldások a grafikonról leolvashatók (1 pont)
Ha $\boldsymbol{p < 0}$, **akkor nincs megoldás** (1 pont)
Ha $\boldsymbol{p = 0}$, **akkor 2 megoldás van** (1 pont)
Ha $\boldsymbol{0 < p < 4}$, **akkor 4 megoldás van** (1 pont)
Ha $\boldsymbol{p = 4}$, **akkor 3 megoldás van** (1 pont)
Ha $\boldsymbol{4 < p \le 5}$, **akkor 2 megoldás van** (1 pont)
Ha $\boldsymbol{5 < p \le 12}$, **akkor 1 megoldás van** (1 pont)
Ha $\boldsymbol{12 < p}$, **akkor nincs megoldás** (1 pont)

Összesen: 14 pont

18) Egy üzemben olyan forgáshenger alakú konzervdoboz gyártását szeretnék elkezdeni, amelynek térfogata 1000 cm³. A doboz aljának és tetejének anyagköltsége 0,2 cm² Ft, míg oldalának anyagköltsége 0,1 cm² Ft.

a) Mekkorák legyenek a konzervdoboz méretei (az alapkör sugara és a doboz magassága), ha a doboz anyagköltségét minimalizálni akarják? Válaszát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! Számítsa ki a minimális anyagköltséget is egész forintra kerekítve! (13 pont)

A megtöltött konzervdobozokat tizenkettesével csomagolták kartondobozokba. Egy ellenőrzés alkalmával 10 ilyen kartondoboz tartalmát megvizsgálták. Minden kartondoboz esetén feljegyezték, hogy a benne található 12 konzerv között hány olyat találtak, amelyben a töltősúly nem érte el az előírt minimális értéket. Az ellenőrök a 10 kartondobozban rendre 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 3, 0 ilyen konzervet találtak, s ezeket a konzerveket selejtesnek minősítették.

b) Határozza meg a kartondobozonkénti selejtes konzervek számának átlagát, és az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését! (3 pont)

Megoldás:

a) Ha r a doboz alapkörének sugara m pedig a doboz magassága cm-ben mérve, akkor $V = r^2\pi m$ ahonnan $m = \frac{V}{r^2\pi} = \frac{1000}{r^2\pi}$ (1 pont)

Az alap- és a fedőlap együttes anyagköltsége r függvényében $0{,}2 \cdot 2r^2\pi$ (1 pont)

A palást anyagköltsége $0{,}1 \cdot 2r\pi \cdot \frac{V}{r^2\pi} = \frac{200}{r}$ (2 pont)

A teljes anyagköltség $r > 0$ esetében

$f(r) = 0{,}4r^2\pi + \frac{200}{r}$ (1 pont)

Az f függvénynek a pozitív számok halmazán ott lehet minimuma, ahol deriváltja 0. (1 pont)

$f'(r) = 0{,}8r\pi - \frac{200}{r^2}$ (2 pont)

$f'(r) = 0$ ha $r\left(= \sqrt[3]{\frac{200}{0{,}8\pi}}\right) \approx 4{,}3$ (1 pont)

$f''(r) = 0{,}8\pi + \frac{400}{r^3} > 0$ ezért itt valóban minimális f értéke (1 pont)

Minimális anyagköltséghez tartozó magasság

$m = \frac{1000}{r^2\pi} \approx 17{,}2$ cm (1 pont)

Tehát a minimális anyagköltség forintra kerekítve **70 Ft** (2 pont)

b) Az adatok átlaga 0,7 (1 pont)

A minta átlagtól mért átlagos abszolút eltérése

$$\frac{6\cdot 0,7+2\cdot 0,3+1,3+2,3}{10}=\mathbf{0,84}$$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

19) Egy teherszállító taxikat üzemeltető társaság egyik, elsősorban városi forgalomban alkalmazott kocsijának teljes működtetési költsége két részből tevődik össze:

- **az üzemeltetési költség $x\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebesség esetén $400+0,8x$ Ft kilométerenként;**
- **a gépkocsivezető alkalmazása 2200 Ft óránként.**

a) Mekkora átlagsebesség esetén minimális a kocsi kilométerenkénti működtetési költsége? Válaszát $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ban, egészre kerekítve adja meg! **(8 pont)**

b) A társaság emblémájának alaprajzát az f és $-f$ függvények grafikonjai által közrezárt síkidommal modellezhetjük, ahol

$$f:[0;6]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{ha } x\in[0;4]\\ \frac{x^2-12x+36}{2} & \text{ha } x\in\,]4;6]\end{cases}$$

Számítsa ki az embléma modelljének területét! **(8 pont)**

Megoldás:

a) A tehertaxi működtetésének kilométerenkénti teljes költsége az üzemeltetésből származó $400+0,8x$ (Ft) költségből, és a vezető $\frac{2200}{x}$ (Ft) munkadíjából tevődik össze $x\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebesség esetén. (1 pont)

A teljes költséget 1 kilométerre forintban az $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\ f(x)=400+0,8x+\frac{2200}{x}$ függvény adja meg. (1 pont)

Az f-nek csak ott lehet szélsőértéke, ahol az első deriváltja 0. (1 pont)

$f'(x)=0,8-\frac{2200}{x^2}$ (1 pont)

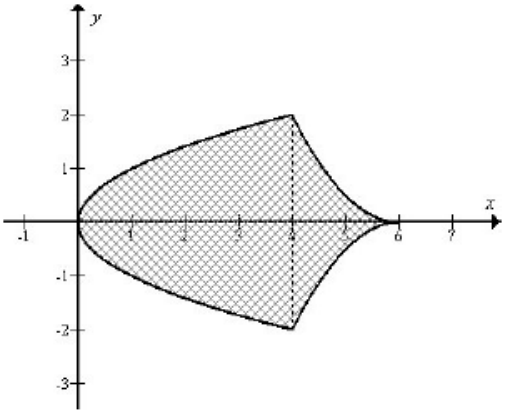
$f'(x)=0$ pontosan akkor teljesül, ha $0,8x^2=2200$. (1 pont)

Ebből $x=\sqrt{2750}\approx 52,44$. (1 pont)

Mivel $f''(x)=\frac{4400}{x^3}>0\quad(x>0)$, tehát a függvény második deriváltja mindenhol, így 52,44-ben is pozitív, ezért f-nek itt valóban minimuma van. (1 pont)

Tehát (egészre kerekítve) **52 km/h** átlagsebességgel esetén minimális a kocsi kilométerenkénti működtetési költsége. (1 pont)

b) Jó ábra. (1 pont)



A kérdéses terület:

$T = 2\left(\int_0^4 \sqrt{x}dx + \int_4^6 \frac{x^2-12x+36}{2}dx\right)$ (2 pont)

A zárójelben szereplő első tag primitív függvénye: $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)$, (1 pont)

a második tagé pedig: $\frac{x^3}{6}-3x^2+18x$ (1 pont)

Alkalmazva a Newton-Leibniz tételt:

$T = 2\left(\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^4 + \left[\frac{x^3}{6}-3x^2+18x\right]_4^6\right) =$ (1 pont)

$= 2\left[\left(\frac{16}{3}-0\right)+\left(36-\frac{104}{3}\right)\right] = 2\left(\frac{16}{3}+\frac{4}{3}\right) = \frac{40}{3}$, tehát az embléma modelljének területe $\mathbf{\frac{40}{3}}$ területegység. (2 pont)

Összesen: 16 pont

20) Az *ABCDEF* szabályos hatszögben a rövidebb átló hossza $\mathbf{5\sqrt{2}}$.

a) Számolja ki a hatszög területének pontos értékét! (6 pont)

b) Az *ABCDEF* hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét jelölje t_1, a t_1 területű hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét t_2, és így tovább, képezve ezzel a $\{t_n\}$ sorozatot. Számítsa ki a $\lim_{n\to\infty}(t_1+t_2+\ldots+t_n)$ határértékét! (Pontos értékkel számoljon!) (10 pont)

Megoldás:

a) Ha a hatszög oldalának hossza a, a rövidebb átló az a oldalú szabályos háromszög magasságának kétszerese, (1 pont)

így $a\sqrt{3} = 5\sqrt{2}$, (1 pont)

ahonnan $a = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(=\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)$. (1 pont)

A szabályos hatszög területe 6 darab a oldalú szabályos háromszög területének összege, (1 pont)

így $T = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \mathbf{25\sqrt{3}}$ (2 pont)

b) A t_1 területű szabályos hatszög oldala az ABC háromszög AC oldalához (mely az eredeti hatszög rövidebb átlója) tartozó középvonala, (1 pont)

hossza $a_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, (1 pont)

$t_1 = 6\frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{4}$ (1 pont)

A következő szabályos hatszög t_2 területét megkaphatjuk például úgy, hogy a t_1 területű hatszög szomszédos oldalfelező pontjait összekötő szakaszok által a hatszögből levágott háromszögek területének összegét levonjuk t_1-ből.

$t_2 = t_1 - 6\frac{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 \cdot \sin 120°}{2} = \frac{3 \cdot 75\sqrt{3}}{16}\left(= \frac{225\sqrt{3}}{16}\right)$. (2 pont)

A $\{t_n\}$ sorozat mértani sorozat, (1 pont)

amelynek hányadosa $q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{4}$. (1 pont)

A kérdéses határérték annak a mértani sornak az összege, amelynek első tagja $t_1 = \frac{75\sqrt{3}}{4}$, hányadosa pedig $q = \frac{3}{4}$. (1 pont)

Így $\lim\limits_{n\to\infty}(t_1 + t_2 + \ldots + t_n) = \frac{t_1}{1-q} =$ (1 pont)

$= \mathbf{75\sqrt{3}}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

21)

a) Deriváltfüggvényének segítségével elemezze az $f:]-2;3[\to \mathbb{R}$; $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x$ függvényt a következő szempontok szerint: növekedés és fogyás, lokális szélsőértékek helye és értéke! (10 pont)

b) Adja meg azt a $g:]-2;3[\to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre igaz, hogy $g' = f$ (tehát az f függvény a g deriváltfüggvénye) és ezen kívül $g(2) = 0$ is teljesül! (4 pont)

Megoldás:

a) Az f deriváltfüggvénye:

$(f:]-2;3[\to\mathbb{R})\ f'(x)=3x^2-3x-6$. (1 pont)

f' zérushelyei: -1 és 2. (1 pont)

Az f' másodfokú függvény főegyütthatója pozitív, ezért f' értékei $x<-1$ esetén pozitívak, $-1<x<2$ esetén negatívak, $2<x$ esetén pozitívak. (1 pont)

Az f függvény menete ezek alapján:

a $]-2;-1]$ intervallumon (szigorúan monoton) növekvő; (1 pont)

az $x=-1$ helyen (lokális) maximuma van, (1 pont)

amelynek értéke 3,5; (1 pont)

a $[-1;2]$ intervallumon (szigorúan monoton) csökkenő; (1 pont)

az $x=2$ helyen (lokális) minimuma van, (1 pont)

amelynek értéke -10; (1 pont)

a $[2;3[$ intervallumon (szigorúan monoton) növekvő. (1 pont)

x	$-2<x<-1$	$x=-1$	$-1<x<2$	$x=2$	$2<x<3$
f'	$f'(x)>0$	$f'(x)=0$	$f'(x)<0$	$f'(x)=0$	$f'(x)>0$
f	$\uparrow$	maximum $f(-1)=3,5$	$\downarrow$	minimum $f(2)=-10$	$\uparrow$

b) Mivel g az f-nek egyik primitív függvénye:

$g(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}-3x^2+c\ \ (c\in\mathbb{R})$. (1 pont)

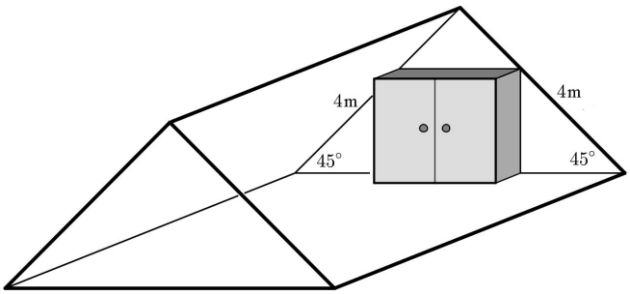
Mivel $g(2)=4-4-12+c=0$, (1 pont)

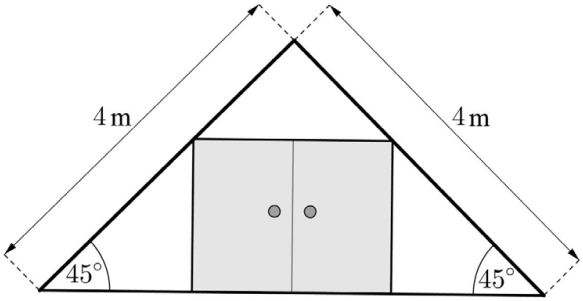
ezért $c=12$, (1 pont)

és így $\boldsymbol{g(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}-3x^2+12}$ (1 pont)

Összesen: 14 pont

22) Kovács úr a tetőterébe egy téglatest alakú beépített szekrényt készíttet. Két vázlatot rajzolt a terveiről az asztalosnak, és ezeken feltüntette a tetőtér megfelelő adatait is. Az első vázlat „térhatású”, a második pedig elölnézetben ábrázolja a szekrényt.





A tetőtér adottságai miatt a szekrény mélységének pontosan 60 cm-nek kell lennie.

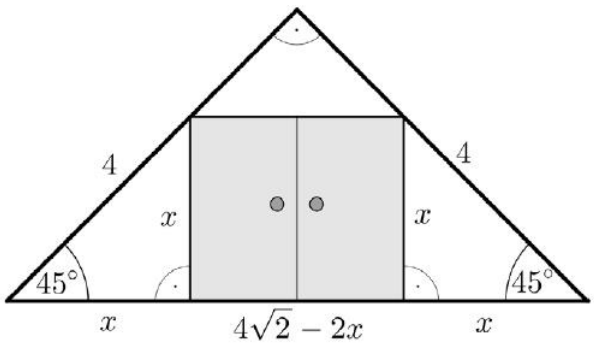
a) Mekkora legyen a szekrény vízszintes és függőleges mérete (azaz a szélessége és a magassága), ha a lehető legnagyobb térfogatú szekrényt szeretné elkészíttetni? (A magasság, a szélesség és a mélység a szekrény külső méretei, Kovács úr ezekkel számítja ki a térfogatot.) (8 pont)

A szekrény elkészült. Az akasztós részébe Kovács úr vasárnap este 7 inget tesz be, a hét minden napjára egyet-egyet. Az ingek között van 2 fehér, 2 világoskék és 3 sárga. Reggelente nagyon siet, ezért Kovács úr csak benyúl a szekrénybe, és anélkül, hogy odanézne, véletlenszerűen kivesz egy inget.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a hét első három napján vagy három különböző színű vagy három egyforma színű inget választ? (Ha valamelyik nap viselt egy inget, azt utána már nem teszi vissza a szekrénybe.) (8 pont)

Megoldás:

a) Ha a szekrény magassága x méter, akkor szélessége az ábrán látható egyenlő szárú háromszögek miatt $4\sqrt{2}-2x$. (2 pont)



A térfogata pedig: $V=0,6x\left(4\sqrt{2}-2x\right)$, amennyiben $0<x<2\sqrt{2}$. (1 pont)

Az $x\mapsto 0,6x\left(4\sqrt{2}-2x\right)$ másodfokú függvénynek két zérushelye van, a 0 és a $2\sqrt{2}$. (1 pont)

Így a negatív főegyüttható miatt ennek a függvénynek a maximuma a két zérushelye számtani közepénél, az $x=\sqrt{2}$ helyen lesz. (2 pont)

Mivel a $\sqrt{2}$ eleme a feladat értelmezési tartományának, ezért a legnagyobb térfogatú szekrény magassága körülbelül **1,41 méter**, szélessége pedig körülbelül **2,83 méter** lesz. (2 pont)

b) Az azonos színű ingeket megkülönböztetve az első három napon $7\cdot6\cdot5=210$ különböző lehetőség van a három ing kiválasztására. (1 pont)
Kedvező esemény az, ha valamilyen sorrendben mindegyik színből pontosan egyet vagy három sárga inget választott Kovács úr. (1 pont)
Egy adott színsorrendben $2\cdot2\cdot3=12$ különböző módon lehet három inget kiválasztani. (1 pont)
Három adott szín sorrendje 3!-féle lehet, tehát három különböző színű inget $2\cdot2\cdot3\cdot3!=72$ különböző módon választhat ki Kovács úr. (2 pont)
A három sárga inget 3! különböző sorrendben választhatja ki. (1 pont)
A kedvező esetek száma:
$2\cdot2\cdot3\cdot3!+3!=78$. (1 pont)
A kérdezett valószínűség tehát:
$\frac{78}{210}=\frac{13}{35}\approx\mathbf{0,371}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

23) Adott síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $y=3x^2-x^3$ egyenletű görbe.

a) Igazolja, hogy ha $x\in]0;3[$, akkor $y>0$. (4 pont)

b) Írja fel a görbe 3 abszcisszájú pontjában húzható érintőjének egyenletét! (abszcissza: első koordináta) (5 pont)

c) Számítsa ki annak a síkidomnak a területét, amelyet a görbe első síknegyedbe eső íve és az x tengely fog közre! (5 pont)

Megoldás:

a) $3x^2-x^3=x^2\cdot(3-x)$ (1 pont)

Az x^2 tényező pozitív, mert $x\neq0$. (1 pont)
A $3-x$ tényező is pozitív, mert $x<3$, (1 pont)
Így a két tényező szorzata is pozitív, ha $x\in]0;3[$. (1 pont)

b) (A megadott görbe az $f(x)=3x^2-x^3$, $x\in\mathbb{R}$ függvény grafikonja.)

Ekkor $f'(x)=6x-3x^2$, (1 pont)
$f'(3)=-9$, (1 pont)
$f(3)=0$. (1 pont)
Az érintő meredeksége tehát -9 (és átmegy a $(3;0)$ ponton). (1 pont)
Az érintő egyenlete: $\boldsymbol{y=-9x+27}$. (1 pont)

c) Az $y = 3x^2 - x^3$ egyenletű görbének az $x = 0$ helyen van közös pontja az x tengellyel. (1 pont)

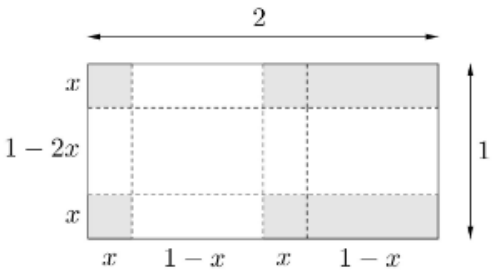
(Tudjuk, hogy ha $x \in [0;3]$, akkor $y \geq 0$, ezért) a kérdezett terület $T = \int_0^3 f(x)\,dx$. (1 pont)

$$\int_0^3 \left(3x^2 - x^3\right) dx = \left[x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \quad \text{(2 pont)}$$

$$= \left(27 - \frac{81}{4}\right) - (0 - 0) = \mathbf{6,75}. \quad \text{(1 pont)}$$

Összesen: 14 pont

24) Egy üzemben egyforma, nagyméretű fémdobozok gyártását tervezik. A téglatest alakú doboz hálózatát egy 2 méter × 1 méteres téglalapból vágják ki az ábrán látható módon. A kivágott idom felhajtott lapjait az élek mentén összeforrasztják. (A forrasztási eljárás nem jár anyagveszteséggel.)



a) Hogyan válasszák meg a doboz méreteit, hogy a térfogata maximális legyen? Válaszát centiméterben, egészre kerekítve adja meg!(11 pont)

A dobozokat egy öt karakterből álló kóddal jelölik meg. Minden kódban két számjegy és három nagybetű szerepel úgy, hogy a két számjegy nincs egymás mellett. Mindkét számjegy eleme a $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaznak, a betűket pedig a 26 betűs (angol) ábécéből választják ki (például 7WA3A egy lehetséges kód).

b) Hány különböző kód lehetséges? (5 pont)

Megoldás:

a) (Az ábra jelöléseit használva) a téglatest méretei méterben:
$x,\ 1-x,\ 1-2x,$ (1 pont)

a téglatest térfogata m^3-ben: $x(1-x)(1-2x)$ (ahol $0<x<0{,}5$). (1 pont)

Keressük a $(V:]0;\ 0{,}5[\to\mathbb{R})$ $V(x)=x(1-x)(1-2x)=2x^3-3x^2+x$ függvény maximumát. (1 pont)

$V'(x)=6x^2-6x+1$. (1 pont)

(A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy) $V'(x)=0$. (1 pont)

A másodfokú egyenlet (valós) megoldásai: $\frac{3-\sqrt{3}}{6}(\approx 0{,}211)$ és

$\frac{3+\sqrt{3}}{6}(\approx 0{,}789)$. (2 pont)

Ez utóbbi nem eleme a V értelmezési tartományának, ezért ez nem jöhet szóba. (1 pont)

A V' függvény a $\frac{3-\sqrt{3}}{6}(\approx 0{,}211)$ helyen előjelet vált (pozitívból negatívba megy át), ezért ez a V függvénynek az egyetlen szélsőértékhelye, mégpedig a maximumhelye. (1 pont)

A maximális térfogatú doboz méretei (a kért kerekítéssel): 21,79 és 58 (cm). (2 pont)

b) Az ötkarakteres kódban $\binom{5}{2}-4(=6)$ különböző módon lehet két számjegy helyét kijelölni. (2 pont)

A két helyre $10\cdot 10(=100)$ különböző módon lehet két számjegyet választani úgy, hogy a sorrendjük is számít, (1 pont)

a másik három helyre pedig $26^3(=17\,576)$ különböző módon három nagybetűt. (1 pont)

A különböző kódok száma tehát $(6\cdot 100\cdot 17\,576=)10\,545\,600$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

25) Adott az f és g függvény:

$$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R};\ f(x)=2x+1;$$
$$g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R};\ g(x)=x^2-2.$$

a) Számítsa ki a $2f+g$ függvény zérushelyeit! (3 pont)

b) Számítsa ki az f és g függvények grafikonja által közbezárt területet! (7 pont)

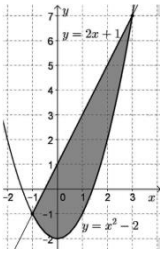
c) Számítással igazolja, hogy a $h:\left]-\infty;-0,5\right[\Rightarrow\mathbb{R};h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ függvény szigorúan monoton növekedő! (6 pont)

Megoldás:

a) $(2f+g)(x)=2(2x+1)+x^2-2=x^2+4x$ (1 pont)

$x(x+4)=0$ (1 pont)

A $2f+g$ függvény zérushelyei $x_1=0$ és $x_2=-4$. (1 pont)



b) A kérdéses területet integrálással számítjuk ki. Az $f(x)=g(x)$ egyenlet megoldásai adják az integrálás határait. (1 pont)

A $2x+1=x^2-2$ egyenlet megoldásai -1, illetve 3. (1 pont)

Mivel a $[-1;3]$ zárt intervallumon $f(x)\geq g(x)$ (a metszéspontok első koordinátái által meghatározott intervallumon a g grafikonja egy „felfelé nyíló” parabolaív, amely „felett” van az f grafikonja), (1 pont)

ezért a kérdéses terület $\int_{-1}^{3}\left(f(x)-g(x)\right)dx$. (1 pont)

$$\int_{-1}^{3}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{-1}^{3}\left((2x+1)-\left(x^2-2\right)\right)dx=\int_{-1}^{3}\left(-x^2+2x+3\right)dx=$$ (1 pont)

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{3}=9-\left(-\frac{5}{3}\right)=\mathbf{\frac{32}{3}(\approx 10,67)}.$$ (2 pont)

c) A $h(x)$ függvény a megadott intervallumon

differenciálható. $h'(x)=\left(\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)'=\left(\dfrac{x^2-2}{2x+1}\right)'=\dfrac{2x(2x+1)-\left(x^2-2\right)\cdot 2}{(2x+1)^2}=$ (2 pont)

$$=\frac{2(x+0,5)^2+3,5}{(2x+1)^2}$$ (1 pont)

A tört számlálója és nevezője is pozitív (a h értelmezési tartományán), így a tört értéke is pozitív. (1 pont)

Tehát a függvény valóban **szigorúan monoton növekvő.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

26) Egy pénzintézet a tőle felvett H forint összegű hitel visszafizetésekor havi $p\%$-os kamattal számol $(p>0)$, ezért az adós havi törlesztőrészletét a $t_n = H \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n-1}$ képlettel számítja ki (minden hónapban ekkora összeget kell visszafizetni). A képletben $q = 1+\frac{p}{100}$, az n pedig azt jelenti, hogy összesen hány hónapig fizetjük a törlesztőrészletet (ez a hitel futamideje).

a) Fogyasztási cikkek vásárlására 1,6 millió forint hitelt vettünk fel a pénzintézettől; a havi kamat 2%. Összesen hány forintot fizetünk vissza, ha 72 hónap alatt törlesztjük a felvett hitelt?
Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg! (4 pont)

b) Legkevesebb hány hónapos futamidőre vehetünk fel egy 2 millió forintos hitelt, ha legfeljebb 60 ezer forintot tudunk havonta törleszteni, és a havi kamat 2%-os? (8 pont)

c) Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$ határértékét, ha $q = 1,02$ és $H = 2\,000\,000$! (4 pont)

Megoldás:

a) A havi törlesztés összege (Ft-ban):

$$t_{72} = 1,6\cdot 10^6 \cdot \frac{1,02^{72}\cdot 0,02}{1,02^{72}-1} \approx 42123\,. \qquad \text{(2 pont)}$$

A 72 hónap alatt összesen $72\cdot t_{72} \approx 3032856$ forintot fizetünk vissza, (1 pont)

ami ezer forintra kerekítve **3 033 000 Ft.** (1 pont)

b) Azt a legkisebb n pozitív egész számot keressük, amelyre

$$2\cdot 10^6 \cdot \frac{1,02^n\cdot 0,02}{1,02^n-1} \le 60\,000\,. \qquad \text{(2 pont)}$$

Mivel $1,02^n - 1 > 0$, ezért $0,02\cdot 1,02^n \le 0,03\cdot\left(1,02^n-1\right)$. (1 pont)

$3 \le 1,02^n$ (1 pont)

Az 1,02 alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő. (1 pont)

ezért $n \ge \log_{1,02} 3$. (1 pont)

A logaritmus azonosságát használva: $n \ge \frac{\lg 3}{\lg 1,02} \approx 55,48$ (1 pont)

Tehát a törlesztőrészletek száma **legalább 56** azaz legalább 56 hónapos futamidőt kell választanunk. (1 pont)

c) A megadott számokkal $t_n = H\cdot(q-1)\cdot\frac{q^n}{q^n-1} = 40\,000\cdot\frac{1,02^n}{1,02^n-1}$ (1 pont)

Egyszerűsítés után: $t_n = 40\,000\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1,02^n}}$ (1 pont)

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1,02^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1,02}\right)^n=0$, (1 pont)

ezért $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=40\,000\cdot\dfrac{1}{1-0}=$**40 000.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

27) Két sportiskola legjobb teniszezői egyéni teniszbajnokság keretében mérték össze tudásukat. A verseny emblémáját parabolaszelet alakúra tervezték (lásd az ábrát). A koordináta-rendszerben készült tervrajzon a teniszlabda röppályáját jelképező $y=4-x^2$ egyenletű parabola, valamint az x tengely határolja a parabolaszeletet. Az emblémán látható még a teniszlabdát jelképező kör is, ennek egyenlete $x^2+y^2-2{,}6y=0$.

a) Hány százaléka a kör területe a parabolaszelet területének? A választ egészre kerekítve adja meg! (8 pont)

A Zöld Iskolából 8, a Piros Iskolából 10 tanuló versenyzett a bajnokságon. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszott, az ugyanabba az iskolába járó tanulók is játszottak egymással. A verseny végén kiderült, hogy a Piros Iskola tanulói összesen kétszer annyi mérőzést nyertek meg, mint a Zöld Iskola tanulói. (Teniszben döntetlen nincs.)

b) A Zöld Iskola versenyzői összesen hány olyan mérkőzést nyertek meg, amelyet a Piros Iskola valamelyik teniszezőjével játszottak? (7 pont)

Megoldás:

a) Az $y=4-x^2$ egyenletű parabola a (–2; 0), illetve a (2; 0) pontban metszi az abszcisszatengelyt (és az emblémát határoló parabolaív az x tengely fölött van). (1 pont)

A parabolaszelet területe: $\int\limits_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx=$ (1 pont)

$=\left[4x-\dfrac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}=$ (1 pont)

$\left(=8-\dfrac{8}{3}-\left(-8+\dfrac{8}{3}\right)\right)=\dfrac{32}{3}$. (1 pont)

A kör egyenletét átalakítva: $x^2+\left(y-1{,}3\right)^2=1{,}3^2$, (1 pont)

ebből a kör sugara 1,3, területe pedig $1{,}69\pi\left(\approx 5{,}31\right)$ (1 pont)

A kör és a parabolaszelet területének aránya: $1{,}69\pi:\dfrac{32}{3}\left(\approx 0{,}4977\right)$ (1 pont)

A kör területe (a kért kerekítéssel) **a parabolaszelet területének 50%-a.**

(1 pont)

b) A lejátszott mérkőzések: $\binom{18}{2}=153$. (1 pont)

A Zöld Iskola 8 tanulójának egymás közötti mérkőzései mindig a 8 tanuló valamelyikének győzelmével végződtek. (1 pont)

ez $\binom{8}{2}(=28)$ győzelmet jelent. (1 pont)

Ha a Zöld Iskola tanulói x mérkőzést nyertek a Piros Iskola tanulói ellen, akkor megnyert mérkőzéseik száma összesen x + 28, a Piros Iskola tanulói által nyert mérkőzések száma pedig $(153-(x+28)=)125-x$. (1 pont)

A szöveg szerint $125-x=2(x+28)$, amiből $x=23$ (1 pont)

A Zöld Iskola tanulói **23 mérkőzést** nyertek a Piros Iskola tanulói ellen. (1 pont)

Összesen: 15 pont

28) Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};f(x)=x^4+8x^3-270x^2+275$ függvény.

a) Igazolja, hogy $x=-15$-ben abszolút minimuma, $x=0$-ban lokális maximuma, $x=9$-ben lokális minimuma van a függvénynek! (9 pont)

b) Igazolja, hogy f konkáv a $]-9;5[$ intervallumon! (4 pont)

c) A Newton-Leibniz-tétel segítségével határozza meg a $\int_0^5 f(x)dx$ határozott integrál értékét! (3 pont)

Megoldás:

a) (Az f egy nyílt intervallumon deriválható függvény, ezért) az f függvénynek ott lehet szélsőérték-helye, ahol az első deriváltfüggvényének zérushelye van. (1 pont)

$f'(x)=4x^3+24x^2-540x$ (1 pont)

Mivel x kiemelhető, ezért az egyik zérushelye a 0, (1 pont)

további két zérushelyét a $4x^2+24x-540=0$ egyenlet gyökei adják: 9 és –15. (1pont)

A (harmadfokú) deriváltfüggvény –15-ben és 9-ben negatívból pozitívba megy át, ezért ezek lokális minimumhelyei, 0-ban pedig pozitívból negatívba megy át, ezért ez lokális maximumhelye a függvénynek. (2 pont)

Mivel $f(-15)=-36850<f(9)=-9202$, (1 pont)

továbbá a $]-\infty;-15[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $]9;+\infty[$ intervallumon pedig szigorúan monoton növekedő az f függvény, ezért a –15 **valóban abszolút minimumhelye** f-nek. (2 pont)

b) $f''(x) = 12x^2 48x - 540 \ (x \in \mathbb{R})$ (1 pont)

Az $f''(x) = 0$ egyenletnek két gyöke van: –9 és 5. (1 pont)

Az f ” grafikonja egy „felfelé nyíló parabola”, ezért a két zérushely között az f'' negatív. (1 pont)

Mivel az f'' függvény a $]-9;5[$ intervallumon negatív, ezért az f függvény itt **konkáv**. (1 pont)

c) $\int_0^5 f(x)dx = \left[\frac{x^5}{5} + 2x^4 - 90x^3 + 275x\right]_0^5$ (1 pont)

$= (625 + 1250 - 11250 + 1375) - 0 =$ (1 pont)

= -8000 (1 pont)

Összesen: 16 pont

29)

a) Egy számtani sorozat differenciája 1,6. A sorozat első, harmadik és hetedik tagját (az adott sorrendben) tekinthetjük egy mértani sorozat első három tagjának is. Határozza meg ezt a három számot! (6 pont)

Tekintsük a következő állítást: *Ha az $\{a_n\}$ számsorozat konvergens, akkor az $\{a_n\}$ sorozat értékkészlete véges számhalmaz.* (Véges halmaz: elemeinek száma megadható egy természetes számmal.)

b) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (4 pont)

Megoldás:

a) Ha a számtani sorozat első tagja a, akkor a 3. tagja a + 3,2. A 7. tag a + 9,6. (1 pont)

A mértani sorozat tulajdonsága miatt $(a+3,2)^2 = a(a+9,6)$. (1 pont)

$a^2 + 6,4a + 10,24 = a^2 + 9,6a$ (1 pont)

$3,2a = 10,24 \Rightarrow a = 3,2$ (1 pont)

A három szám: **3,2; 6,4; 12,8**. (1 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

b) **Az állítás hamis**. (1 pont)

Például az $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ számsorozat (1pont)

konvergens, az értékkészlete azonban végtelen szám-halmaz. (1 pont)

c) Megfordítás: **Ha az $\{a_n\}$ számsorozat értékkészlete véges számhalmaz, akkor az $\{a_n\}$ sorozat konvergens.** (1 pont)

A megfordított **állítás hamis**. (1 pont)

Például a $\{(-1)^n\}$ sorozat (1 pont)

értékkészlete véges $(\{-1;1\})$, de a sorozat nem konvergens. (1 pont)

Összesen 13 pont

30) Adott az *f*, a *g* és a *h* függvény:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x-1;$

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=3x+2;$

$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=12-x^2.$

a) Legyen a *k* összetett függvény belső függvénye az *f* és külső függvénye a *h* (vagyis $k(x)=h(f(x))$ minden *x* valós szám esetén). Igazolja, hogy $k(x)=11+2^{x+1}-4^x$. (3 pont)

b) Oldja meg az $f(g(x))<g(f(x))$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! (7 pont)

c) Mekkora a *h* és az $x\mapsto -4\,(x\in\mathbb{R})$ függvények görbéi által közbezárt (korlátos) terület? (6 pont)

Megoldás:

a) $k(x)=12-(2^x-1)^2=$ (1 pont)

$\left(=12-\left(2^{2x}-2\cdot 2^x+1\right)\right)=12-\left(4^x-2^{x+1}+1\right)$ (1 pont)

A zárójel felbontása után $k(x)=11+2^{x+1}-4^x$ adódik, tehát **igaz az állítás**.

(1 pont)

b) Megoldandó a $2^{3x+2}-1<3\left(2^x-1\right)+2$ egyenlőtlenség a valós számok halmazán.

(2 pont)

$4\cdot 2^{3x}-1<3\cdot 2^x-1$ (1 pont)

$2^x\left(4\cdot 2^{2x}-3\right)<0$ (1 pont)

Mivel minden valós szám esetén $2^x>0$, ezért az egyenlőtlenség ekvivalens a egyenlőtlenséggel. (1 pont)

A 4-es alapú exponenciális/logaritmus függvény szigorúan monoton nő, ezért

(1 pont)

$\boldsymbol{x<\log_4 0,75\left(=-1+\log_4 3\approx -0,2075\right)}$ (1 pont)

c) A két görbe közös pontjainak első koordinátáját a $12-x^2=-4$ egyenlet megoldásai adják: (1 pont)

-4 és 4 (1 pont)

(Mivel a [–4; 4] intervallumon a *h* függvény grafikonja az $x\mapsto -4$ függvény grafikonja fölött helyezkedik el, ezért) a kérdezett terület: $\int_{-4}^{4}\left(16-x^2\right)dx=$

(1pont)

$= \left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{4} =$ (1 pont)

$= \left(64 - \frac{64}{3}\right) - \left(-64 - \left(-\frac{64}{3}\right)\right) = \frac{128}{3} - \left(-\frac{128}{3}\right) =$ (1 pont)

$= \mathbf{\frac{256}{3}}.$ (1 pont)

Összesen 16 pont

31) A repülőgépek üzemanyag-fogyasztását számos tényező befolyásolja. Egy leegyszerűsített matematikai modell szerint (a vizsgálatba bevont repülőgépek esetében) az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömegét az $f(x) = \frac{1}{20}\left(x^2 - 1800x + 950\,000\right)$ összefüggés adja meg. Ebben az összefüggésben *x* a repülési átlagsebesség km/h-ban $(x < 0)$, $f(x)$ pedig a felhasznált üzemanyag tömege kg-ban.

a) A modell alapján hány km/h átlagsebesség esetén lesz minimális az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömege? Mekkora ez a tömeg?

(5 pont)

Egy repülőgép Londonból New Yorkba repül. A repülési távolság 5580 km.

b) Igazolja, hogy *v* km/h átlagsebesség esetén a repülőgép üzemanyag-felhasználása ezen a távolságon (a modell szerint) $279v - 502\,200 + \frac{265\,050\,000}{v}$ kg lesz! $(v > 0)$ **(3 pont)**

A vizsgálatba bevont, Londontól New Yorkig közlekedő repülőgépek *v* átlagsebességé-re teljesül, hogy 800 km/h $\le v \le$ 1100 km/h.

c) A megadott tartományban melyik átlagsebesség esetén a legnagyobb, és melyik esetén a legkisebb az egy útra jutó üzemanyag-felhasználás?

(5 pont)

Megoldás:

a) $f(x) = \frac{1}{20}\left((x-900)^2 - 810\,000 + 950\,000\right) =$ (2 pont)

$= \frac{1}{20}(x-900)^2 + 7000$ (1 pont)

(Mivel $(x-900)^2 \ge 0$, és egyenlőség pontosan akkor van, ha $x = 900$, ezért) az óránkénti üzemanyag-fogyasztás 900 km/h átlagsebesség esetén minimális,

(1 pont)

és ez a minimum **7000 kg** óránként. (1 pont)

b) A repülési idő órában: $t = \frac{5580}{v}$ (1 pont)

Az út során elfogyasztott üzemanyag kg-ban:

$t \cdot f(v) = \frac{5580}{v} \cdot \frac{1}{20}\left(v^2 - 1800v + 950\,000\right) =$ (1 pont)

$= 279v - 502\,200 + \frac{265\,050\,000}{v}$. (1 pont)

c) A pozitív valós számok halmazán értelmezett $g(v) = 279v - 502\,200 + \frac{265\,050\,000}{v}$ függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0. (1 pont)

$g'(v) = 279 - \frac{265\,050\,000}{v^2}$ (1 pont)

$g'(v) = 0$, ha $v = 100\sqrt{95}$ $(\approx 974{,}68)$ $(\text{mert } v > 0)$ (1 pont)

A deriváltfüggvény értékei $v < 100\sqrt{95}$ esetén negatívak, $v > 100\sqrt{95}$ esetén pedig pozitívak. Ezért a $100\sqrt{95}$ a g függvénynek abszolút minimumhelye.

(1pont)

(A deriváltfüggvény előjele alapján tehát) a g függvény a $\left[800; 100\sqrt{95}\right]$ zárt intervallumon szigorúan csökkenő, a $\left[100\sqrt{95}; 1100\right]$ zárt intervallumon pedig szigorúan növekvő, ezért a g függvény [800; 1100] intervallumra való leszűkítése a maximumát vagy 800-nál vagy 1100-nál veszi fel. (1 pont)

$g(800) = 52\,312{,}5$
$g(1100) = 45\,654{,}5$ (1 pont)

Tehát a modell szerint 800 km/h átlagsebesség esetén a legnagyobb,

(1pont)

és $\left(100\sqrt{95} \approx\right)$ **975 km/h** átlagsebesség esetén a legkisebb az egy útra jutó üzemanyag-felhasználás. (1 pont)

Összesen: 16 pont