MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI
EMELT SZINT

Abszolútértékes és Gyökös kifejezések

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Igazolja, hogy az alábbi négy egyenlet közül az a) és b) jelű egyenletnek pontosan egy megoldása van, a c) és d) jelű egyenletnek viszont nincs megoldása a valós számok halmazán!

a) $\dfrac{2x^2+x-10}{2^{x-1}-2}=0$ **(4 pont)**

b) $\sqrt{x+16}+\sqrt{x-9}=5$ **(4 pont)**

c) $\lg\left(x^2+x-6\right)=\lg\left(1-x^2\right)$ **(4 pont)**

d) $\sin x-1=\sqrt{\lg\left(\cos^2 x-1{,}5\cos x\right)}$ **(4 pont)**

Megoldás:

a) A nevező nem lehet 0, ezért $2^{x-1}-2\neq 0$ (1 pont)
ebből $x\neq 2$ (1 pont)
A továbbiakban a tört akkor 0, ha számlálója 0, tehát $2x^2+x-10=0$, azaz $x_1=2$ és $x_2=-2{,}5$ (1 pont)
Így az egyenletnek csak egy valós megoldása van: $\boldsymbol{x=-2{,}5}$ (1 pont)

b) A rendezés után kapott $\sqrt{x+16}=5-\sqrt{x-9}$ egyenletet mindkét oldalról négyzetre emelve, (1 pont)
rendezés után kapjuk, hogy $10\sqrt{x-9}=0$ (1 pont)
Innen $\boldsymbol{x=9}$ (1 pont)
Behelyettesítéssel ellenőrizve ez jó megoldás. (1 pont)

c) A logaritmus értelmezése szerint: $x^2+x-6>0$ és $1-x^2>0$ (1 pont)
Az első egyenlet megoldásai azon x valós számok, amelyekre $x<-3$ vagy $x>2$ (1 pont)
a másodiké: $-1<x<1$ (1 pont)
A két egyenlőtlenség megoldáshalmazának nincs közös eleme, így az egyenletnek nincs megoldása. (1 pont)

d) A jobb oldali kifejezés az értelezési tartományán csak nem negatív lehet, így $\sin x-1\geq 0$. (1 pont)
Ez csak $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ esetén teljesül (1 pont)
De mivel $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)=0$ minden $k\in\mathbb{Z}$ esetén (1 pont)
és nullára a logaritmus nincs értelmezve, **így nincs olyan valós szám, amelyre az egyenlet értelmezve lenne, így nincs megoldása.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

2) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $(x-2)\cdot \lg(x^2-8)=0$ **(5 pont)**

b) $x^2-|x|=6$ **(5 pont)**

Megoldás:

a) A logaritmus értelmezése alapján: $x^2-8>0$ ($x<-2\sqrt{2}$ vagy $x>2\sqrt{2}$) (1 pont)
Egy szorzat értéke pontosan akkor 0, ha valamelyik szorzótényező 0.
azaz ha $x-2=0$ vagy $\lg(x^2-8)=0$
1. eset: $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ (1 pont)
2. eset: $\lg(x^2-8)=0 \Leftrightarrow \lg(x^2-8)=\lg 1$ (1 pont)
$x^2-8=1 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x_1=3$ vagy $x_2=-3$ (1 pont)
Az $x=2$ nem eleme az értelmezési tartománynak. Az értelmezési tartomány $x=3$ és $x=-3$ elemei a megoldások, mert az átalakítások ekvivalensek voltak. $\boldsymbol{M=\{3;-3\}}$ (1 pont)

b) Ha $x\geq 0$, akkor az egyenlet 0-ra redukált alakja $x^2-x-6=0$; ha $x<0$, akkor a megoldandó egyenlet: $x^2+x-6=0$ (1 pont)
1. eset: ($x^2-x-6=0$, $x\geq 0$). Az egyenlet gyökei: $\boldsymbol{x_1=3}$; $x_2=-2$ (1 pont)
Csak az $x_1=3$ megoldása az egyenletnek az $x\geq 0$ feltétel miatt (1 pont)
2. eset: ($x^2+x-6=0$, $x<0$). Az egyenlet gyökei: $x_1=2$; $x_2=-3$ (1 pont)
Csak az $\boldsymbol{x_2=-3}$ megoldása az egyenletnek az $x<0$ feltétel miatt (1 pont)
Tehát a megoldások: $\boldsymbol{x_1=3}$ és $\boldsymbol{x_2=-3}$.

Összesen: 10 pont

3)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$\boldsymbol{x^2=|x-6|}$ **(5 pont)**

b) Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned}\lg(x+y)&=2\lg x\\ \lg x&=\lg 2+\lg(y-1)\end{aligned}\right\}$$ **(9 pont)**

Megoldás:

a) 1. eset: $x^2+x-6=0$, $x<6$ (1 pont)
ennek valós gyökei 2 és -3 (1 pont)
Ezek megoldásai az eredeti egyenletnek (1 pont)
2. eset: $x^2-x+6=0$, $x\geq 6$ (1 pont)
ennek nincs valós megoldása (1 pont)
Tehát az egyenlet megoldásai a **–3** és a **2**.

b) $x>0$ és $y>1$ a logaritmus értelmezése miatt (1 pont)

A logaritmus azonosságait használva

$$\left.\begin{aligned}\lg(x+y)&=\lg x^2\\ \lg x&=\lg 2(y-1)\end{aligned}\right\}$$ (2 pont)

Az lg függvény szigorú monoton nő (1 pont)

$$\left.\begin{aligned}x+y&=x^2\\ x&=2y-2\end{aligned}\right\}$$ (1 pont)

A második egyenletből kifejezzük x-et, behelyettesítve az elsőbe kapjuk, hogy

$4y^2-11y+6=0$ (1 pont)

Ennek valós gyökei 2 és 0,75 (1 pont)

Az $y>1$ miatt 0,75 nem eleme az értelmezési tartománynak (1 pont)

Ezért csak $\boldsymbol{y=2}$ és így $\boldsymbol{x=2}$ lehetséges. A $(2;2)$ számpár megoldása az egyenletnek (1 pont)

Összesen: 14 pont

4) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3}=2$$ **(10 pont)**

Megoldás:

Megoldást csakis az $x^2\geq 3$ feltételnél kereshetjük (1 pont)

Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát!

$x^2+1+2\sqrt{(x^2+1)(x^2-3)}+x^2-3=4$ (2 pont)

Rendezés után: $\sqrt{(x^2+1)(x^2-3)}=3-x^2$ (2 pont)

A baloldali kifejezés nem negatív, ezért a jobboldali kifejezés is nem negatív kell, hogy legyen (1 pont)

ezért $x^2\leq 3$ feltételnek fent kell állnia. (1 pont)

A kezdeti feltétellel összevetve, csak $x^2=3$ teljesülhet (1 pont)

Visszahelyettesítés után látjuk, hogy $x^2=3$ kielégíti az egyenletet (1 pont)

Innen a két gyök: $\boldsymbol{x_1=\sqrt{3}}$, $\boldsymbol{x_2=-\sqrt{3}}$ (1 pont)

Összesen: 10 pont

5)

a) Mely valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőtlenséget?

$$(x-1)^3-(x+1)^3>-8$$ **(4 pont)**

b) Az alábbi f és g függvényt is a $[-3;6]$ intervallumon értelmezzük.

$f(x)=\sqrt{x+3}$ **és** $g(x)=-0{,}5x+2{,}5$.

Ábrázolja közös koordináta-rendszerben az f és g függvényt a $[-3;6]$ intervallumon! Igazolja számítással, hogy a két grafikon metszéspontjának mindkét koordinátája egész szám! **(4 pont)**

c) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$0{,}5x+\sqrt{x+3}\leq 2{,}5$$ **(6 pont)**

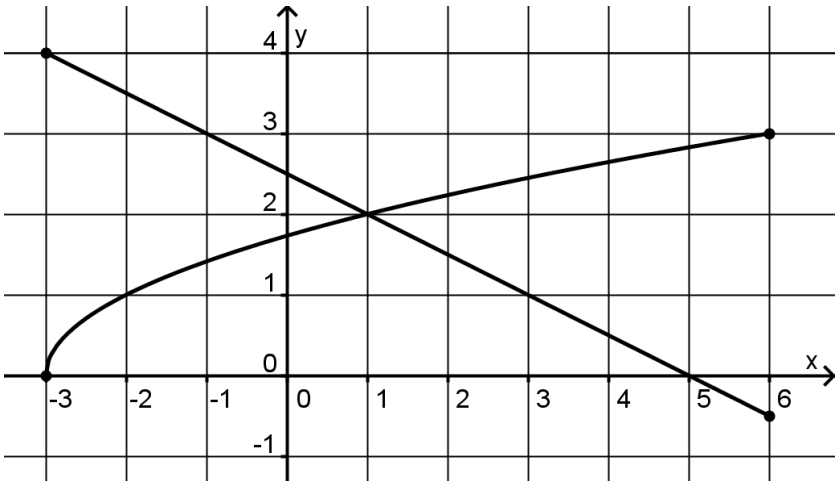
Megoldás:

a) Elvégezve a köbre emelést: $\left(x^3-3x^2+3x-1\right)-\left(x^3+3x^2+3x+1\right)>-8$ (2 pont)

összevonva és rendezve: $x^2<1$ (1 pont)

a megoldáshalmaz tehát a $]-\mathbf{1;1}[$ intervallum (1 pont)

b)



f függvény helyes ábrázolása (2 pont)

g függvény helyes ábrázolása (1 pont)

a metszéspont koordinátái $(\mathbf{1;2})$ (1 pont)

c) A megoldandó egyenlőtlenség ekvivalens a $\sqrt{x+3}\le -0,5x+2,5$ egyenlőtlenséggel (1 pont)

A bal oldal nem negatív (1 pont)

a jobb oldal 5-nél nagyobb *x*-ekre negatív (1 pont)

Az egyenlőtlenség megoldásait a $[-3;6]$ intervallumon a b) részben ábrázolt *f* és *g* függvényekről leolvashatjuk (1 pont)

A megoldáshalmaz a $[-\mathbf{3;1}]$ intervallum (2 pont)

Összesen: 14 pont

6)

a) Ábrázolja a derékszögű koordinátarendszerben az $f:[0;5]\to\mathbb{R}, f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$ függvényt! (5 pont)

b) Tekintsük az $\left|(x-2)^2-1\right|=k$ paraméteres egyenletet, ahol k valós paraméter. Vizsgálja a megoldások számát a k paraméter függvényében! (7 pont)

c) Ábrázolja a megoldások számát megadó függvényt a $k\in]-6;6[$ intervallumon! (2 pont)

d) Adja meg a c)-beli függvény értékkészletét! (2 pont)

Megoldás:

a) $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|=\left|(x-2)^2-1\right|$ (1 pont)

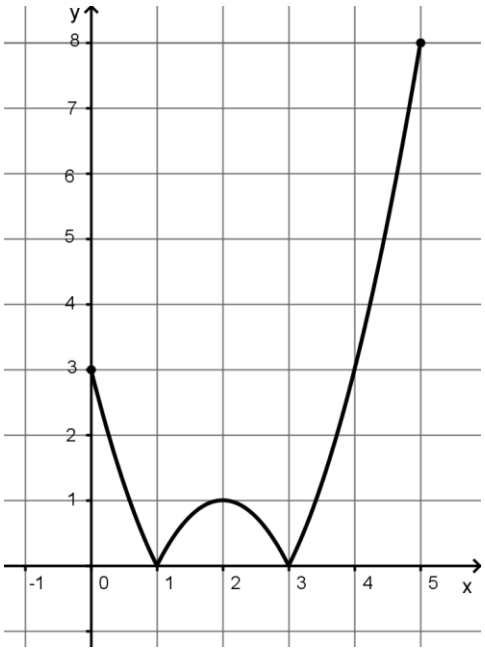
Az $y=(x-2)^2-1$ parabola tengelypontja $(2;-1)$ (1 pont)

az x tengelyt az $(1;0)$ és $(3;0)$ pontokban metszi (1 pont)

Jó ábrázolás, leszűkítés a $[0;5]$ intervallumra (1 pont)

Az abszolút érték figyelembe vétele (1 pont)

Helyes ábra:



b) A megoldások számát az $f(x)$ teljes grafikonja és az $y=k$ egyenes közös pontjainak száma adja (2 pont)

Ha $k>1$, akkor két közös pontja van (1 pont)

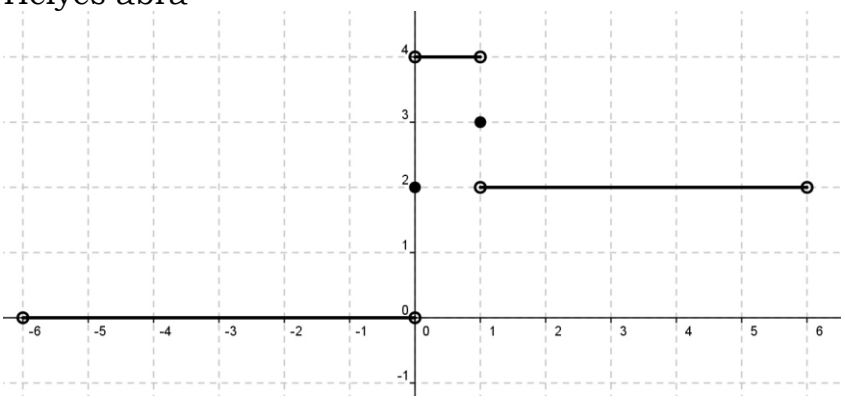
Ha $k=1$, akkor három közös pontja van (1 pont)

Ha $0<k<1$, akkor négy közös pontja van (1 pont)

Ha $k=0$, akkor két közös pontja van (1 pont)

Ha $k<0$, akkor nincs közös pont (1 pont)

c) Helyes ábra



(2 pont)

d) Értékkészlete: $\boldsymbol{R_f=\{0;2;3;4\}}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

7) Az alábbi három kifejezés mindegyike esetén adja meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a kifejezés értelmezhető!

a) $\cos\left(\log_2 \sqrt{x}\right)$ **(3 pont)**

b) $\sqrt{\log_2(\cos x)}$ **(5 pont)**

c) $\log_{\sqrt{x}}\left(\cos^2 x\right)$ **(5 pont)**

Megoldás:

a) A négyzetgyök miatt $x \geq 0$ (1 pont)
A logaritmus miatt $\sqrt{x} > 0$ (1 pont)
A keresett halmaz: $]0;+\infty[$ (1 pont)

b) A logaritmus miatt $\cos x > 0$ (1 pont)
A négyzetgyök miatt $\log_2(\cos x) \geq 0$ (1 pont)
azaz $\cos x \geq 1$ (1 pont)
A koszinusz függvény értékkészlete miatt $\cos x = 1$ (1 pont)
Az értelmezési tartomány tehát $\{x \in \mathbb{R} \mid x = k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ (1 pont)

c) A logaritmus alapjai miatt $x > 0$ és $x \neq 1$ (1 pont)
A logaritmus miatt $\cos^2 x > 0$ (1 pont)
Tehát $\cos x \neq 0$ (1 pont)
$x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ahol $k \in \mathbb{Z}$ (1 pont)
Az értelmezési tartomány tehát
$\mathbb{R}^+ \setminus \left(\{1\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}\right)$ **ahol** $k \in \mathbb{N}$ (1 pont)

Összesen: 13 pont

8) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\sqrt{x+2} = -x$ **(4 pont)**

b) $2^{2(x-1)(x+4)} = 4^{\frac{x-1}{x+4}} \quad (x \neq -4)$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) A négyzetgyök függvény értelmezési tartománya és értékkészlete miatt: $x \in [-2;0]$ (1 pont)
Négyzetre emelés után: $x + 2 = x^2$ (1 pont)
Az $x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet gyökei: 2 és -1. (1 pont)
Közülük csak a -1 eleme a fenti intervallumnak (és az átalakítások ezen az intervallumon ekvivalensek), ezért ez az egyetlen megoldás. (1 pont)
(A grafikus módszerrel való megoldásért szintén maximális pontszám jár)

b) Közös alapra hozva a két oldalt:

$4^{(x-1)(x+4)} = 4^{\frac{x-1}{x+4}}$. (1 pont)

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt az alapok elhagyhatóak:

$(x-1)(x+4) = \frac{x-1}{x+4}$ (1 pont)

Ebből $\boldsymbol{x_1 = 1}$ vagy (2 pont)

$(x+4)^2 = 1$. (1 pont)

Ebből $\boldsymbol{x_2 = -3}$ vagy $\boldsymbol{x_3 = -5}$. (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

Összesen: 11 pont

9) Jelölje *H* a $\sqrt{5,2-x} \le 3$ egyenlőtlenség pozitív egész megoldásainak halmazát. Jelölje továbbá *B* azon pozitív egész *b* számok halmazát, amelyekre a $\log_b 2^6$ kifejezés értéke is pozitív egész szám. Elemeinek felsorolásával adja meg a *H*, a *B*, a $H \cap B$ és a $B \setminus H$ halmazt! (11 pont)

Megoldás:

A gyökös kifejezés értelmezési tartomány vizsgálata alapján: $x \le 5,2$. (1 pont)

Az egyenlőtlenség elvégzése során:

$5,2 - x \le 9 \Rightarrow -3,8 \le x$ (1 pont)

Tehát azok a pozitív számok elemei *H* halmaznak, melyek $-3,8$-nál nagyobbak és 5,2-nél kisebbek:

$\boldsymbol{H = \{1;2;3;4;5\}}$ (1 pont)

Ha $\log_b 2^6 = k$, akkor $b^k = 2^6$, ami 64. (2 pont)

A *k* kitevő pozitív egész, ezért a *b* olyan pozitív egész szám lehet, melynek valamely pozitív egész kitevős hatványa 64-gyel egyenlő: (1 pont)

$2^6 = 4^3 = 8^2 = 64^1 = 64$ (2 pont)

Ezért $\boldsymbol{B = \{2;4;8;64\}}$. (1 pont)

$\boldsymbol{H \cap B = \{2;4\}}$ (1 pont)

$\boldsymbol{B \setminus H = \{8;64\}}$ (1 pont)

Összesen: 11 pont

10) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sin x - \cos^2 x = -1$ (6 pont)

b) $|x - |x|| = 2x + 1$ (7 pont)

Megoldás:

a) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ helyettesítése. (1 pont)

Nullára rendezve: $\sin^2 x + \sin x = 0$. (1 pont)

Szorzattá alakítás után: $\sin x \cdot (\sin x + 1) = 0$. (1 pont)

$\sin x = 0$ pontosan akkor, ha $\boldsymbol{x = k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}}$. (1 pont)

$\sin x = -1$ pontosan akkor, ha $\boldsymbol{x = \frac{3\pi}{2} + l \cdot 2\pi,\ l \in \mathbb{Z}}$. (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

b) Ha $x \geq 0$, akkor $|x| = x$. (1 pont)

Ekkor $0 = 2x + 1$, ahonnan $x = -\frac{1}{2}$, (1 pont)

de ez $x \geq 0$ miatt nem megoldás. (1 pont)

Ha $x < 0$, akkor $|x| = -x$, (1 pont)

és az egyenlet $|2x| = 2x + 1$. (1 pont)

Mivel $x < 0$ ezért $-2x = 2x + 1$, azaz $\boldsymbol{x = -\frac{1}{4}}$ (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

Összesen: 13 pont