ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2026. május 5.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a) első megoldás		
Az első egyenletet 3-mal, a másodikat 2-vel szorozva: $\begin{cases} 9x+54\cdot 3^y=78 \\ 10x-54\cdot 3^y=74. \end{cases}$	1 pont	
A két egyenletet összeadva: $19x=152$,	1 pont	
amiből $x=8$.	1 pont	
Az első egyenletbe visszahelyettesítve: $3\cdot 8+18\cdot 3^y=26$,	1 pont	
amiből $3^y=\frac{1}{9}$.	1 pont	
(Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért) $y=-2$.	1 pont	
Ellenőrzés (például mindkét egyenletbe történő behelyettesítéssel).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

1. a) második megoldás		
Az első egyenletből: $x=\frac{26}{3}-6\cdot 3^y$,	1 pont	
amit a második egyenletbe helyettesítve: $5\cdot\left(\frac{26}{3}-6\cdot 3^y\right)-27\cdot 3^y=37.$	1 pont	
A zárójel felbontása és összevonás után: $\frac{130}{3}-57\cdot 3^y=\frac{111}{3}$,	1 pont	
amiből $3^y=\frac{1}{9}$.	1 pont	
(Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért) $y=-2$.	1 pont	
$x=\frac{26}{3}-6\cdot\frac{1}{9}=8$	1 pont	
Ellenőrzés (például mindkét egyenletbe történő behelyettesítéssel).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

1. b)		
A feladat szövege alapján: $(n-2)\cdot 180 = 20\cdot\frac{360}{n-5}$ (ahol $n \geq 8$).	2 pont	
$0 = n^2 - 7n - 30$	1 pont	
$n = -3$ nem megoldás,	1 pont	
$n = 10$ oldalú a sokszög (ami megfelel a feltételeknek).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

2. a)		
Hét év elteltével a teherautó értéke $0{,}95^7 \approx 0{,}698$-szeresére csökken,	1 pont	
tehát újkori értékének kb. 70%-át éri.	1 pont	
Ez $24\,000\,000 \cdot 0{,}7 = 16{,}8$ millió Ft-nak felel meg.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

2. b)		
Az eltelt évek számát n-nel jelölve: $24\,000\,000 \cdot 0{,}95^n < 13\,000\,000$.	1 pont	
$0{,}95^n < \frac{13}{24}$	1 pont	
A 0,95 alapú exponenciális függvény szigorúan monoton csökken.	1 pont	
$n > \log_{0{,}95}\frac{13}{24} \approx 11{,}95$	1 pont	$n > \frac{\lg\frac{13}{24}}{\lg 0{,}95}$
Tehát 12 teljes év elteltével csökken a teherautó leltár szerinti értéke 13 millió Ft alá.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó észszerű és helyes kerekítésekkel évről évre kiszámítja a teherautó értékét, és ez alapján helyesen válaszol, akkor a teljes pontszám jár.
2. Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett egyenletet old meg, majd a teherautó értékének szigorúan monoton csökkenésére hivatkozva jó választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.
Ha a vizsgázó az egyenlet megoldása után indoklás nélkül ad választ a feladat kérdésére, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.

2. c)		
A rakodótér ismeretlen oldalának hosszát (méterben) x-szel jelölve, a téglatest testátlójára vonatkozó összefüggés szerint: $2{,}4^2 + 3{,}2^2 + x^2 = 10{,}4^2$.	1 pont	
Innen $x = 9{,}6$ m.	1 pont	
A ponyva területe: $9{,}6 \cdot 2{,}4 + 2 \cdot 9{,}6 \cdot 3{,}2 + 2 \cdot 2{,}4 \cdot 3{,}2 \approx$	1 pont	
≈ 100 m^2.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. a)		
$\overline{ab} = 10a + b$,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
így $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b)$, és éppen ezt kellett bizonyítani.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3. b)		
$S(\overline{ab}) = 11(a + b)$ pontosan akkor osztható 17-tel, ha $a + b$ osztható 17-tel (mivel a 11 és a 17 relatív prímek).	1 pont	
Ez csak $a = 9$, $b = 8$ vagy $a = 8$, $b = 9$ esetén teljesül. (Tehát két megfelelő kétjegyű szám van, a 98 és a 89.)	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

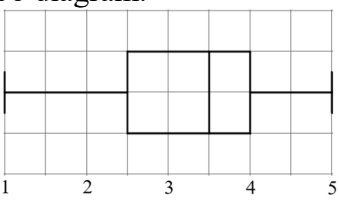
3. c)		
A kétjegyű szám nem tartalmazhat 0-t, ezért a és b értéke is az 1, 2, …, 9 közül választható.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Összesen $9 \cdot 9 = 81$-féle számot képezhetünk.	1 pont	
$S(\overline{ab}) = 11(a + b)$ akkor háromjegyű, ha $a + b \geq 10$.	1 pont*	
Ha a értéke 1, akkor b értéke csak 9 lehet, ha a értéke 2, akkor b értéke csak 8 vagy 9 lehet, és így tovább. Ha a értéke 9, akkor b értéke 1, 2, …, 9 lehet.	2 pont*	*Ha $a + b = 10$, az 9 lehetőség. Ha $a + b = 11$, az 8 lehetőség, és így tovább. Ha $a + b = 18$, az 1 lehetőség.*
Ez összesen $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ lehetőség (kedvező esetek száma).	1 pont*	
A keresett valószínűség tehát $\frac{45}{81} = \frac{5}{9}$ ($\approx 0{,}556$).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

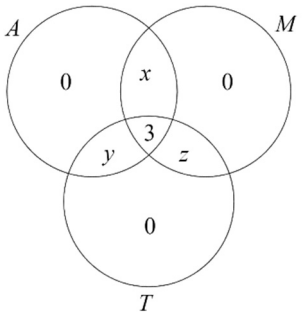
*Megjegyzés: A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Komplementer eseménnyel számolva: $S(\overline{ab}) = 11(a + b)$ akkor kétjegyű, ha $a + b \leq 9$.	1 pont	
Ha a értéke 1, akkor b értéke csak 1, 2, …, 8 lehet, ha a értéke 2, akkor b értéke csak 1, 2, …, 7 lehet, és így tovább. Ha a értéke 8, akkor b értéke csak 1 lehet.	2 pont	
Ez összesen $8 + 7 + \ldots + 1 = 36$ lehetőség, a kedvező esetek száma tehát $(81 - 36 =) 45$.	1 pont	

4. a) első megoldás		
Igaz,	1 pont	
mert mindegyik adat, így az átlag is 1-gyel nő, tehát az adatok átlagtól való eltérése (és így az eltérések négyzetes közepe) nem változik.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4. a) második megoldás		
Igaz.	1 pont	
Az első félévben a jegyek átlaga 3, így a szórása $\sqrt{\frac{2^2+2\cdot 0^2+2\cdot 1^2}{5}}=\sqrt{\frac{6}{5}}$, a második félévben a jegyek átlaga 4, így a szórása szintén $\sqrt{\frac{2^2+2\cdot 0^2+2\cdot 1^2}{5}}=\sqrt{\frac{6}{5}}$.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4. b)		
<table><tr><td>Minimum</td><td>Alsó kvartilis</td><td>Medián</td><td>Felső kvartilis</td><td>Maximum</td></tr><tr><td>1</td><td>2,5</td><td>3,5</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	3 pont	*A minimum és a maximum összesen 1, a medián 1, az alsó és a felső kvartilis megadása összesen 1 pontot ér.* *A pontok akkor is járnak, ha a megfelelő értékek csak a diagramról olvashatók le.*
Jó diagram. 	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. c)		
A (2) és a (3) feltétel alapján a megfelelő értékek megállapítása. (x, y és z jelöli azoknak a számát, akik pontosan két tárgyból érettségiztek jelesre.) 	1 pont	
Az (1) feltétel alapján: $x+y+z+3=32$, és a (4) feltétel miatt: $x+y+3=27$.	1 pont	(1): $x+y+z+3=32$ (5): $y+3+z+3=x+3$
Az első egyenletből kivonva a másodikat $z=5$ adódik.	1 pont	$x=16$
Az (5) feltétel miatt: $y+3+8=x+3$, így $x=y+8$.	1 pont	(4): $x+y+3=27$
Ezt (4)-be helyettesítve: $y+8+y+3=27$.	1 pont	$y=8$

$y = 8$ és $x = 16$	1 pont	$z = 5$
Tehát magyarból (16 + 3 + 5 =) 24-en, történelemből pedig (8 + 3 + 5 =) 16-an érettségiztek jelesre (ami valóban megfelel a feltételeknek).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

II.

5. a)		
A hétvégi túranapok számát h-val jelölve: $22h + 17(56 - h) = 1172$.	2 pont	*A hétköznapi túranapok számát k-val jelölve:* $17k + 22(56 - k) = 1172$
Innen $952 + 5h = 1172$, azaz $h = 44$.	1 pont	$k = 12$
Tehát 44 hétvégi és (56 – 44 =) 12 hétköznapi túranapon gyalogolt Bence (ami valóban megfelel a feltételeknek).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. b)		
Az egyszemélyes sátorba kerülő embert 6-féleképpen,	1 pont	
a kétszemélyesbe kerülő 2 embert ezután $\binom{5}{2} = 10$-féleképpen lehet kiválasztani (a kimaradt 3 ember pedig a háromszemélyes sátorba kerül).	1 pont	
A sátorbeosztást tehát $6 \cdot 10 = 60$-féleképpen tudják kialakítani.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5. c) első megoldás		
Bence és Csaba számára a 6 cédula közül kettőt (ezek sorrendjére való tekintet nélkül) $\binom{6}{2} = 15$-féleképpen választhatunk ki (összes eset száma).	1 pont	*Bence és Csaba húzásának sorrendjét is figyelembe véve:* $6 \cdot 5 = 30$.
Ebből kedvező, ha a két 2-est húzzák (1 lehetőség),	1 pont	$2 \cdot 1 = 2$
vagy a három 3-as közül bármelyik kettőt, ez $\binom{3}{2} = 3$ lehetőség.	1 pont	$3 \cdot 2 = 6$
Így a kedvező esetek száma (1 + 3 =) 4.	1 pont	$2 + 6 = 8$
A keresett valószínűség tehát $\frac{4}{15}$ (≈ 0,267).	1 pont	$\frac{8}{30}$
Összesen:	**5 pont**	

5. c) második megoldás		
(A húzás sorrendje nem befolyásolja az eredményt, ezért) feltehetjük, hogy először Bence húz. Annak a valószínűsége, hogy 2-es feliratú cédulát húz, $\frac{2}{6}$. Annak a valószínűsége, hogy ezután Csaba a másik 2-est húzza, $\frac{1}{5}$. Tehát annak a valószínűsége, hogy mindketten a kétszemélyes sátorba kerülnek, $\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$.	2 pont	
Annak a valószínűsége, hogy Bence 3-as feliratú cédulát húz, $\frac{3}{6}$. Annak a valószínűsége, hogy ezután Csaba egy másik 3-ast húz, $\frac{2}{5}$. Tehát annak a valószínűsége, hogy mindketten a háromszemélyes sátorba kerülnek, $\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$.	2 pont	
A keresett valószínűség tehát $\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{5}=\right)\frac{4}{15}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. c) harmadik megoldás		
(A b) feladatrész alapján) a lehetséges (egyenlően valószínű) sátorbeosztások száma 60 (összes eset száma).	1 pont	
Ebből kedvező egyrészt, ha Bence és Csaba is a kétszemélyes sátorba kerül, ekkor a másik négy ember közül 4-féleképpen választható ki az egyszemélyesbe kerülő személy (4 lehetőség).	1 pont	
Másrészt kedvező, ha Bence és Csaba is a háromszemélyes sátorba kerül. Ekkor a másik négy ember közül 4-féleképpen választható ki a háromszemélyesbe kerülő harmadik személy, majd 3-féleképpen választható ki az egyszemélyesbe kerülő személy. Ez $4\cdot 3 = 12$ lehetőség.	1 pont	
A kedvező esetek száma tehát $(4 + 12 =)$ 16.	1 pont	
A keresett valószínűség tehát $\frac{16}{60}=\frac{4}{15}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. d) első megoldás		
Két szakaszra 11-féleképpen oszthatjuk a távot.	1 pont	
Ha három szakaszra osztjuk a távot, akkor a 11 lehetséges osztópont (1, 2, …, 11 km után) közül kettőt kell kiválasztani (és ez egyértelműen meghatározza a három szakasz hosszát). Ezt $\binom{11}{2} = 55$-féleképpen tehetjük meg.	2 pont*	
A lehetséges felosztások száma így (11 + 55 =) 66.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatért is megkaphatja a vizsgázó.*

Ha az első szakasz 1 km hosszú, akkor 10-féleképpen (10 + 1 = 9 + 2 = ... = 1 + 10), ha 2 km hosszú, akkor 9-féleképpen oszthatjuk két részre a maradék távot. És így tovább, ha az első szakasz 10 km hosszú, akkor már csak egyféleképpen (1 + 1) osztható két részre a maradék táv. Ez összesen 10 + 9 + ... + 1 = 55 lehetőség.	2 pont	

5. d) második megoldás		
Ha az első szakasz 11 km hosszú, akkor a második szakasz csak 1 km lehet (1 lehetőség). Ha az első szakasz 10 km, akkor a folytatás vagy 2 (+ 0) km vagy 1 + 1 km lehet (2 lehetőség). Ha az első szakasz 9 km, akkor a folytatás 3 (+ 0) km vagy 2 + 1 vagy 1 + 2 km lehet (3 lehetőség).	1 pont	
És így tovább: ha az első szakasz n km hosszú (n = 11, 10, 9, …, 2, 1), akkor 12 – n lehetőség van a folytatásra.	2 pont	
A lehetséges felosztások száma 1 + 2 + … + 11 = 66.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. d) harmadik megoldás		
A 11 lehetséges osztópontból kell kettőt kiválasztani úgy, hogy a két kiválasztott osztópont lehet ugyanaz (ebben az esetben csak egy pihenő van).	1 pont	
Ez 11 elem másodosztályú ismétléses kombinációja,	1 pont	
melyek száma $\binom{11+2-1}{2} = \binom{12}{2} = 66$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. a)		
$f(x)=(x^2-3x+2)(x-3)=$	1 pont	
$=x^3-3x^2+2x-3x^2+9x-6=x^3-6x^2+11x-6$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6. b)		
$f'(x)=3x^2-12x+11$	1 pont	
A keresett érintőegyenes meredeksége: $f'(4)=11$.	1 pont	
$f(4)=6$	1 pont	
A (4; 6) ponton áthaladó, 11 meredekségű egyenes egyenlete $y=11x-38$.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. c)		
$f''(x)=6x-12$	1 pont	
Ha $x\in\,]-\infty;2[$, akkor $f''(x)<0$,	1 pont	
ezért f konkáv a megadott intervallumon.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6. d)		
Az]1; 2[intervallumon $x-1$ pozitív, $x-2$ és $x-3$ pedig negatív,	1 pont	
a három tényező szorzata tehát valóban pozitív.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6. e)		
(Az adott intervallumon f nemnegatív.) $T=\int_1^2(x^3-6x^2+11x-6)dx=$	1 pont	
$=\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11x^2}{2}-6x\right]_1^2=$	1 pont	
$=(4-16+22-12)-\left(\frac{1}{4}-2+\frac{11}{2}-6\right)=$	1 pont	
$=(-2)-\left(-\frac{9}{4}\right)=\frac{1}{4}$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. a)		
A 10 pohárka összmagassága $(427 + 9 \cdot 2 =)$ 445 mm.	1 pont	
A számtani sorozat első tagját a_1-gyel jelölve: $445 = \frac{2a_1 + 9 \cdot 1}{2} \cdot 10.$	2 pont	
A legalacsonyabb pohárka $a_1 = 40$ mm magas.	1 pont	
A legmagasabb pohárka $a_{10} = 49$ mm magas.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a válaszait mértékegység nélkül adja meg, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.

7. b)		
A pohárka (henger) belső térfogata 50 cm^3.	1 pont	
(Ha a henger alapkörének sugarát – cm-ben mérve – r-rel jelöljük, akkor a henger magassága $2r$.) A henger térfogata: $r^2\pi \cdot 2r = 50$.	1 pont	
$r^3 \approx 7{,}96$	1 pont	
A henger belső alapkörének sugara $r \approx 2$ cm.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. c)		
A henger alapkörének sugarát r-rel, magasságát m-mel jelölve $r + m = 10{,}5$, amiből $m = 10{,}5 - r$.	1 pont	
$V = r^2\pi(10{,}5 - r) = 10{,}5r^2\pi - r^3\pi$	1 pont	
Vizsgáljuk az f:]0; 10,5[$\rightarrow$ **R**, $f(r) = -\pi r^3 + 10{,}5\pi r^2$ függvényt. Ennek ott lehet maximuma, ahol a deriváltja nulla.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$f'(r) = -3\pi r^2 + 21\pi r = 0$	1 pont	
$r = 7$ ($r = 0$ nem megoldás)	1 pont	
($f'(r) = -3\pi r(7 - r)$, ezért) ha $0 < r < 7$, akkor $f'(r) > 0$, ha pedig $r > 7$, akkor $f'(r) < 0$, ezért $r = 7$ valóban maximumhelye f-nek.	1 pont	$f''(r) = -6\pi \cdot r + 21\pi$ $f''(7) = -21\pi < 0$
Tehát a henger alapkörének sugara 7 (cm), a henger magassága pedig $(10{,}5 - 7 =)$ 3,5 (cm).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8. a)		
Az n pontú fának $n-1$, a $4n$ pontú fának $4n-1$,	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
az n pontú teljes gráfnak $\frac{n(n-1)}{2}$ éle van.	1 pont	
A megoldandó egyenlet: $n-1+4n-1=\frac{n(n-1)}{2}+10.$	1 pont	
2-vel szorozva és rendezve: $n^2-11n+24=0.$	1 pont	
Innen $n=3$ vagy $n=8$.	1 pont	
Ellenőrzés: (A 3 pontú fának 2, a 12 pontúnak 11, a 3 pontú teljes gráfnak 3 éle van, és) $2+11=3+10$ valóban. (A 8 pontú fának 7, a 32 pontúnak 31, a 8 pontú teljes gráfnak 28 éle van, és) $7+31=28+10$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. b)		
G és $\overline{G}$ együttesen egy 10 pontú teljes gráfot alkot,	1 pont	
melynek $\frac{10\cdot 9}{2}=45$ éle van.	1 pont	
Ezért az egyiknek legalább 23 éle van, különben összesen legfeljebb 44 élük lenne.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

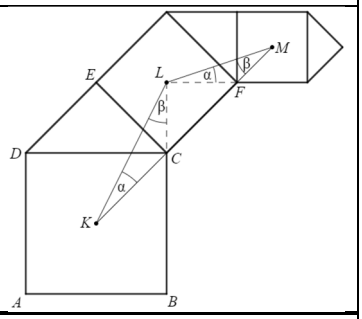
8. c)		
Az m pontú teljes gráfnak $\binom{m}{2}=\frac{m(m-1)}{2}$ éle van (összes eset száma).	1 pont	
Az 1-es, a 2-es és a 3-as sorszámú csúcsból is $m-1$ él húzható. Ez összesen $3m-3$ él.	1 pont*	
De ekkor az 1-es, 2-es és 3-as sorszámú csúcsok közt haladó három élt kétszer is megszámoltuk, így a kedvező esetek száma $3m-6$.	1 pont*	
A feltétel szerint $\frac{3m-6}{\frac{m(m-1)}{2}}=0{,}35.$	1 pont*	
$0{,}35m^2-6{,}35m+12=0$	1 pont	
Ennek a gyökei $\frac{15}{7}$ és 16,	1 pont	
melyek közül a $\frac{15}{7}$ nem felel meg a feltételnek, tehát $m=16$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

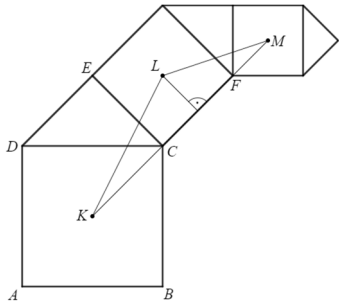
Komplementer módszerrel dolgozunk, a komplementer esemény valószínűsége (1 – 0,35 =) 0,65.	1 pont	
Ha a kiválasztott él egyik végpontja sincs az 1-es, 2-es, 3-as sorszámú csúcsok között, akkor az élt a maradék $m - 3$ pont által alkotott teljes gráf élei közül kell kiválasztani. Ennek $\frac{(m-3)(m-4)}{2}$ éle van (kedvező esetek száma).	1 pont	
A feltétel szerint $\frac{\frac{(m-3)(m-4)}{2}}{\frac{m(m-1)}{2}} = 0,65.$	1 pont	

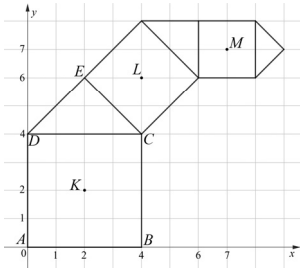
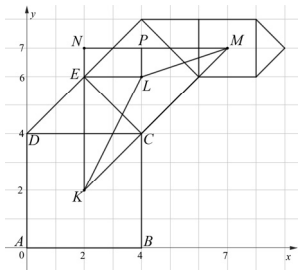
9. a)		
Jelölje az *ABCD* négyzet középpontját *K*. A súlypont a *KE* szakaszon helyezkedik el, és a háromszög *E* csúcsából induló súlyvonalát a csúcstól távolabbi harmadolópontjában osztja két részre.	1 pont	
A *KE* szakasz 4 cm hosszú (mert a *K* pont *CD* oldalra vonatkozó tükörképe *E*), amiből a súlyvonal 2 cm hosszú, így a keresett távolság $2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$ cm.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

9. b)		
Mivel a *CED* háromszög egyenlőszárú és derékszögű, ezért a *CD* átfogó a *CE* befogónak a $\sqrt{2}$-szöröse.	1 pont	
Tehát két egymást követő házikó hasonlóságának aránya $\frac{CE}{AB}=\frac{CE}{CD}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

9. c) első megoldás		
(A második és harmadik négyzet közös csúcsát jelölje *F*.) A *KCL* és *LFM* háromszögek hasonlók a házikók hasonlósága miatt (két megfelelő oldaluk aránya és az ezek által közbezárt szögük megegyezik), így hegyesszögeiket α-val, illetve β-val jelölve $\alpha + \beta = 180° - 3 \cdot 45° = 45°$, tehát $KLM\sphericalangle = \alpha + \beta + 90° = 135°$.	2 pont	
KC szakasz az *ABCD* négyzet átlójának fele, ezért $KC = 2\sqrt{2}$ cm.	1 pont	

(Az egymást követő házikók hasonlóságának aránya $\frac{1}{\sqrt{2}}$, így) $CL = FL = \left(2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} =\right)$ 2 cm, továbbá $MF = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ cm.	1 pont	
Koszinusztétellel: $KL = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 2^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos 135°} = \sqrt{20}$ cm.	1 pont	
$ML = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 135°} = \sqrt{10}$ cm	1 pont	$ML = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot KL = \sqrt{10}$ cm
A kérdezett terület így $\frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{10} \cdot \sin 135°}{2} = 5$ cm^2.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

9. c) második megoldás		
(A négyzetek középpontját jelölje rendre K, L és M, a második és harmadik négyzet közös csúcsát pedig F.) A négyzet átlója 45°-os szöget zár be a négyzet oldalával, így $KCF\sphericalangle$ és $CFM\sphericalangle$ is két 45°-os és egy 90°-os szög összege, tehát K, C, F és M egy egyenesre illeszkedik.	2 pont	
KC szakasz az $ABCD$ négyzet átlójának fele, ezért $KC = 2\sqrt{2}$ cm.	1 pont	
(Az egymást követő házikók hasonlóságának aránya $\frac{1}{\sqrt{2}}$, így) $CF = \left(4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} =\right) 2\sqrt{2}$ cm, és $FM = \sqrt{2}$ cm.	1 pont	
Így a KM szakasz hossza $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ cm.	1 pont	
A KLM háromszög L csúcsához tartozó magasság hossza a második négyzet oldalhosszának (a CF szakasznak) a fele, tehát $\sqrt{2}$ cm.	1 pont	
A kérdezett terület így: $\frac{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 5$ cm^2.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

9. c) harmadik megoldás		
Helyezzük el a házikókat derékszögű koordinátarendszerben úgy, hogy az A csúcs az origó, és az egység 1 cm legyen. Ekkor $B(4; 0)$, $C(4; 4)$ és $D(0; 4)$,	1 pont	
továbbá $K(2; 2)$ és $E(2; 6)$.	1 pont	
A szerkesztésből adódóan az L pont első koordinátája megegyezik B pont első koordinátájával, a második koordinátája pedig E pont második koordinátájával, így $L(4; 6)$. Hasonlóan kapjuk, hogy $M(7; 7)$.	2 pont	
Legyen KMN az a derékszögű háromszög, amelynek befogói párhuzamosak a tengelyekkel, átfogója pedig a KM szakasz. Az L csúcsból a tengelyekkel húzott párhuzamos egyenesek az NK, illetve az NM befogókat E, illetve P pontban metszik.	1 pont	
A koordináták segítségével a keresett terület: $T_{KLM} = T_{KMN} - T_{KLE} - T_{LMP} - T_{LPNE} =$ $= \frac{5\cdot 5}{2} - \frac{4\cdot 2}{2} - \frac{1\cdot 3}{2} - 1\cdot 2 = 12{,}5 - 4 - 1{,}5 - 2 = 5$ cm^2.	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

9. d)		
Az első házikó területe $t_1 = 4\cdot 4 + \frac{4\cdot 2}{2} = 20$ cm^2.	1 pont	
Az egymást követő házikók területének aránya $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.	1 pont	
A házrendszerek területei egy olyan végtelen mértani sort alkotnak, amelynek első tagja 20 cm^2, hányadosa pedig 0,5 ($0 < q < 1$ miatt ennek létezik véges határértéke). Az n házikóból álló házrendszer területe: $S_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$.	1 pont	$S_n = 20\cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}$
$T = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{20}{1-0{,}5} =$	1 pont	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, *ezért* $T = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 20\cdot \frac{-1}{-\frac{1}{2}} =$
$= 40$ (cm^2) a házrendszer területe.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	