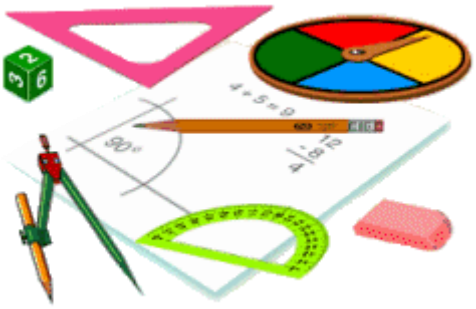
PRÓBAÉRETTSÉGI

2003. május-június

MATEMATIKA

EMELT SZINT

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ



Kiss Árpád OKSZI
Országos Közoktatási Szolgáltató Intézmény
Vizsgafejlesztő Központ

OKÉV
ORSZÁGOS KÖZOKTATÁSI ÉRTÉKELÉSI ÉS VIZSGAKÖZPONT

Kedves Kolléga!

Kérjük, hogy a dolgozatok javítását a javítási útmutató alapján végezze, a következők figyelembevételével:

Formai kérdések:

- Az 1. javító tanár *piros tollal* javítson, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölje a hibákat, hiányokat stb.
  A 2. javító tanár *zöld tollat* használjon, és az első javítótól függetlenül a tanári gyakorlatnak megfelelően ő is jelölje a hibákat, hiányokat stb.

- A feladatok mellett található üres négyzetek közül az 1. javító mindig az *elsőt*, a 2. javító mindig a *másodikat* töltse ki.
  Kifogástalan megoldás esetén elég a megfelelő maximális pontszám beírása a szürke négyzetekbe.
  Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük az egyes *részpontszámokat* is írja rá a dolgozatra.

- Kérjük, a dolgozat javítása után a füzetek belső borítóján található *szürke táblázatot* is töltse ki.

Tartalmi kérdések:

- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól *eltérő megoldás* születik, kérjük, hogy keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit és ennek alapján pontozzon.

- A pontozási útmutató pontjai további részpontokra *bonthatók*.

- Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél *kevésbé részletezett*.

- Ha a megoldásban *számolási hiba*, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.

- *Elvi hiba* esetén, egy gondolati egységen belül a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban az elhibázott részt egy újabb részkérdés követi, és a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot.

Munkájukat, együttműködésüket előre is köszönjük.

I. rész

1. feladat

a)

$y = 3x - 2$

$x + 3(3x - 2) = -6$

$x = 0 \qquad y = -2$

M(0; – 2) — 2 pont

Bármilyen rendezéssel eljuthat az x és y értékéig. Pontos rajz és annak leolvasása esetén 1 pont adható.

Összesen: 2 pont

b)

$\underline{n}_e\ (3; -1)$ — 1 pont

$\underline{n}_f\ (1; 3)$ — 1 pont

$|\underline{n}_e| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

$|\underline{n}_f| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ — 1 pont

A vektorok hosszának meghatározásáért.

$3 - 3 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos\alpha$ — 1 pont

A skalárszorzat kétféle felírásáért.

$\cos\alpha = 0$

$\alpha = 90°$ — 1 pont

Ha a normálvektorok vagy az irányvektorok skaláris szorzatából vagy a meredekségekből veszi észre, hogy a két egyenes egymásra merőleges, természetesen akkor is jár az 5 pont.
Ha a pontos rajzról olvassa le a szöget, akkor 1 pont jár.

Összesen: 5 pont

c)

Az origón átmenő, az e egyenesre merőleges egyenes egyenlete: $x + 3y = 0$ — 2 pont

Ennek metszéspontja az e egyenessel: $T\left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$ — 2 pont

Ennek távolsága az origótól: $\frac{\sqrt{10}}{5} \approx 0{,}63$ — 1 pont

Ha a pont – egyenes távolságképletével vagy más módon számol, akkor is jár az 5 pont.

Összesen: 5 pont

2. feladat

a)
Súlyozott számtani átlaggal kell számolni.

1930:

$253 \cdot 40{,}9 + 217 \cdot 158{,}5 + 181 \cdot 151{,}8 + 173 \cdot 110{,}7 +$
$+ 194 \cdot 74{,}8 + 205 \cdot 15{,}7 = 109\,098{,}8$ 1 pont

Tehát 1930-ban 109 099 gyerek született. 1 pont

1995:

$417 \cdot 33{,}6 + 372 \cdot 113{,}9 + 331 \cdot 110{,}3 + 305 \cdot 50{,}2 +$
$+ 382 \cdot 17{,}2 + 418 \cdot 2 = 115\,608{,}7$ 1 pont

Tehát 1995-ban 115 609 gyerek született. 1 pont

Ha a számolásban korábban kerekít, és ezzel az értékkel jól számol, akkor is jár a 4 pont. (Ez a megjegyzés a feladat során végig érvényes.)

Összesen: 4 pont

b)
A születések számának változása:

$$\frac{115609 - 109099}{109099} \cdot 100 \approx 6$$ 1 pont

Tehát 6%-os a növekedés. 1 pont

Összesen: 2 pont

c)
Az 1000 nőre jutó szülések számának változása:
1930-ban a nők száma összesen 1223 ezer,
tehát, 1000 nőre

$$\frac{109098{,}8}{1223} = 89{,}2$$ szülés jutott. 1 pont

1995-ben a nők száma összesen 2225 ezer,
tehát 1000 nőre

$$\frac{115609}{2225} = 52{,}0$$ szülés jutott. 1 pont

A második adat az elsőnek

$$100 \cdot \frac{52{,}0}{89{,}2} = 58{,}3\%\text{-a.}$$ 1 pont

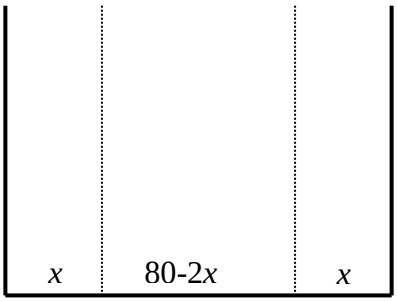
Tehát 41,7%-os a csökkenés. 1 pont

Összesen: 4 pont

d)
Az adott korosztályba (20–24) tartozó nőknek
113,9 ezreléke szült gyereket,
ami 11,39%-os valószínűséget jelent. 3 pont

Összesen: 3 pont

3. feladat



a)
Legyen a felhajtott rész szélessége x.

Többféle megoldást is megadunk, a pontszámot az alábbiak szerint bontjuk:

A függvény felírásáért.	2 pont	
A szélsőérték helyének jó meghatározásáért.	8 pont	Ha a függvény felírása után a maximum helyét a lépések részletezése nélkül állapítja meg, akkor is kapja meg a teljes pontszámot.
Mértékegységgel megadott válaszért.	1 pont	

1. megoldás:
A keresztmetszet területe, amelynek a maximumát keressük:

$T(x) = x \cdot (80 - 2x)$ *2 pont*

$T(x) = -2x^2 + 80x$ *2 pont*

Teljes négyzetté alakítva:

$T(x) = -2(x - 20)^2 + 800$ *3 pont*

A negatív előjel miatt a függvénynek maximuma van. *2 pont*

A maximum helye: $x_{max} = 20$ *1 pont*

Tehát a felhajtott rész szélessége 20 cm. *1 pont* A mértékegység helyes feltüntetéséért.

2. megoldás
A keresztmetszet területe, amelynek a maximumát keressük:

$T(x) = x \cdot (80 - 2x)$ *2 pont*

$T(x) = -2x^2 + 80x$ *2 pont*

Deriváltja:

$T`(x) = -4x + 80$ *2 pont*

$T`(x) = 0$ *1 pont*

$-4x + 80 = 0$ *1 pont*

$x = 20$ *1 pont*

$T``(20) = -4 < 0$, azaz maximuma van. *1 pont*

Tehát a felhajtott rész szélessége 20 cm. *1 pont* A mértékegység helyes feltüntetéséért.

3. megoldás:

Számtani és mértani közép segítségével:

$(80-2x)\cdot x$ maximumát keressük. *2 pont*

Nézzük a függvény kétszeresét, annak ugyanott van a maximuma:

$$(80-2x)\cdot 2x \le \left[\frac{(80-2x)+2x}{2}\right]^2$$ *3 pont*

$(80-2x)\cdot 2x \le 40^2 = 1600$ *1 pont*

Maximum ott van, ahol a két tényező egyenlő: *2 pont*

$80 - 2x = 2x$ *1 pont*

$x = 20$ *1 pont*

Tehát a felhajtott rész szélessége 20 cm. *1 pont* A mértékegység helyes feltüntetéséért.

4. megoldás:

$T(x) = x \cdot (80 - 2x)$ *2 pont*

A kapott konkáv parabola *2 pont*

zérushelyei: 0 és 40. *3 pont*

A maximum helye tehát $x = 20$. *3 pont*

Tehát a felhajtott rész szélessége 20 cm. *1 pont* A mértékegység helyes feltüntetéséért.

Összesen: 11 pont

b)

Értéke: $T_{max} = 800\ cm^2$. 2 pont

Összesen: 2 pont

4. feladat

a)

Az eredetileg tervezett sebesség: v.

Az eredetileg tervezett menetidő: $t = \frac{2400}{v}$

Az út első harmada: 800 km.
Ezen a részen az átlagsebessége: 0,75v.

A menetidő: $t_1 = \frac{800}{0{,}75v}$

Az út másik része: 1600 km.
Ezen a részen az átlagsebessége: x

A menetidő: $t_2 = \frac{1600}{x}$

$t = t_1 + t_2$

$\frac{2400}{v} = \frac{800}{0{,}75v} + \frac{1600}{x}$ — 3 pont — Az egyenlet felírásáért.

$x = 1{,}2v$ — 2 pont — Az egyenlet megoldásáért.

Tehát 20%-os sebességnövelésre van szükség. — 1 pont — A % megállapításáért.

Összesen: 6 pont

b)

A sebesség $160\frac{km}{h}$-val csökken, ezért az út második részén az átlagsebesség: v – 160.

A menetidő: $t_2' = \frac{1600}{v-160}$

$t + 1 = t_1 + t_2'$

$\frac{2400}{v} + 1 = \frac{800}{0{,}75v} + \frac{1600}{v-160}$ — 3 pont — Az egyenlet felírásáért.

Az egyenletrendezés után a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$0{,}75v^2 - 320v - 160\,000 = 0$ — 2 pont — Az egyenlet rendezéséért.

Ennek pozitív gyöke: v = 722,1
Tehát az eredeti sebesség 722,1 km/h. — 1 pont — A gyök kiszámításáért és értelmezéséért.

A tervezett menetidő: $t = \frac{2400}{722{,}1} \approx 3{,}32$

A tervezett menetidő 3,32 óra. — 1 pont — A menetidő meghatározásáért.

Összesen: 7 pont

Ha az eredeti sebesség helyett az a)-ban kiszámolt értéket csökkenti 160-nal (szövegértési hiba) és ezzel az értékkel mindent jól kiszámol, akkor 5 pont jár.

II. rész

Az alábbi öt feladat (5.–9.) közül a tanulónak tetszés szerint választott *négyet* kellett megoldani és négyet kell értékelni!

5. feladat

1. megoldás

A másodfokú egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha a diszkrimináns nemnegatív:

$64\cos^2 y - 64 \geq 0$ — 3 pont

$\cos^2 y \geq 1$ — 1 pont

Ez csak akkor teljesülhet, ha $\cos y = \pm 1$. — 3 pont — Ha csak az egyiket írja, akkor 1 pont jár. A $\cos y$ lehetséges értékeinek a meghatározásáért összesen 7 pont.

Ha $\cos y = 1$, akkor $y = 2k\pi$ — 1 pont

ahol $k \in Z$ — 1 pont

$16x^2 - 8x + 1 = 0$ — 1 pont

$x = \frac{1}{4}$ — 1 pont

Az egyik megoldás: $\left(\frac{1}{4};\ 2k\pi\right)$ ahol $k \in Z$ — Az egyik gyöksorozat felírásáért összesen 4 pont.

Ha $\cos y = -1$, akkor $y = \pi + 2k\pi$ — 1 pont

ahol $k \in Z$ — 1 pont

$16x^2 + 8x + 1 = 0$ — 1 pont

$x = -\frac{1}{4}$ — 1 pont

A másik megoldás: $\left(-\frac{1}{4};\ \pi + 2k\pi\right)$ ahol $k \in Z$ — A másik gyöksorozat felírásáért összesen 4 pont.

Ellenőrzés: — 1 pont — Ha csak az egyik gyöksorozatot találja meg és azt ellenőrzi, akkor is megkapja az 1 pontot.

- ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre, tehát a kapott gyökök kielégítik az egyenletet.
- behelyettesítéssel.

2. megoldás
A megoldóképletet alkalmazva:

$$x = \frac{8\cos y \pm \sqrt{64\cos^2 y - 64}}{32}$$ *2 pont*

$$x = \frac{\cos y \pm \sqrt{-\sin^2 y}}{4}$$ *1 pont*

Ez akkor értelmezhető, ha $\sin y = 0$. *1 pont*

Ekkor $\cos y = \pm 1$. *3 pont* Ha csak az egyiket írja, akkor 1 pont jár. Eddig összesen 7 pont.

Innen kezdve ld. az *1. megoldást*.

Összesen: 16 pont

6. feladat

a)

$n^3 - n = n(n^2 - 1) =$ 1 pont
$= n(n+1)(n-1)$ 1 pont

Három szomszédos szám közül az egyik biztosan páros, ezért osztható 2-vel, és 1 pont
van közöttük biztosan hárommal osztható is, 1 pont
ezért a szorzatuk osztható 6-tal. 1 pont

Összesen 5 pont

b)
1. megoldás
A feltétel szerint

$k^2 - 3k = p^2$, ahol p prímszám.

A fenti egyenlet

$k \cdot (k - 3) = p^2$ alakban írható fel. 1 pont Átírás szorzat alakba.

A jobboldal: $1 \cdot p^2$ (1) 1 pont

vagy $p \cdot p$ (2) 1 pont
vagy $(-p) \cdot (-p)$ (3) 1 pont
vagy $(-1) \cdot (-p^2)$ (4) lehet. 1 pont Az esetek szétválasztásáért összesen 4 pont jár.

(1)
Ha a $k = 1$ *és* $k - 3 = p^2$, akkor $p^2 = -2$, ami nem lehet. 1 pont

Ha $k - 3 = 1$, *és* $k = p^2$, akkor $k = 4$, tehát $p^2 = 4$, azaz $p = 2$. 1 pont Az (1) eset vizsgálatáért összesen 2 pont jár.

(2) és (3)
$k = k - 3$ ami nem lehetséges. 1 pont A (2) és (3) eset vizsgálatáért 1 pont jár.

(4)
Ha $k = -1$ és $k - 3 = -p^2$, akkor $p^2 = 4$, tehát $p = 2$ 1 pont

Ha $k - 3 = -1$ és $k = -p^2$ akkor $k = 2$, tehát $p^2 = -2$, ami nem lehet. 1 pont A (4) eset vizsgálatáért összesen 2 pont jár.

A feladat feltételeinek a
$k = 4$ és az $k = -1$ felel meg. 1 pont

Ez esetekben lesz a $k^2 - 3k$ kifejezés egy prímszám, a 2 négyzetével egyenlő.

2. megoldás
A feltétel szerint
$k^2 - 3k = p^2$, ahol p prímszám.

$k^2 - 3k$ kifejezés mindenképpen páros, mert *2 pont*

- ha *k páros*, akkor két páros szám különbsége páros, *2 pont*
- ha *k páratlan*, akkor két páratlan szám különbsége szintén páros. *2 pont*

Így tehát p^2 is páros.
Ha p^2 páros, akkor p csak 2 lehet. *2 pont*
Így $k^2 - 3k = 4$ *1 pont*
ahonnan $k = 4$ *1 pont*
vagy $k = -1$ *1 pont*
Összesen: 11 pont

7. feladat

a)
366 különböző születésnap lehet. 1 pont 365 nap esetén is jár a pont.

Ha minden napra legfeljebb 2 születésnap esik, akkor legfeljebb $366 \cdot 2 = 732$ tanulója van az iskolának. 1 pont 365 nap esetén 730.

A 733. tanulónak már biztosan van 2 azonos napon született társa. 1 pont

Tehát legalább 733-an járnak az iskolába. 1 pont 365 nap esetén 731. Ha nincs részletes szöveges magyarázat, de a gondolatmenet egyértelműen jó, akkor is megadható a 4 pont.

Összesen: 4 pont

b)

Mindhárom helyre 2 lehetőségünk van, így
$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ lehetséges számhármas van. 1 pont

A 000 nem lehet, 1 pont
ezért összesen 7 marad. 1 pont

Ha módszeresen összeszámlálja a lehetséges eseteket, akkor az 3 pont.
Ha az összeszámlálásban téved, akkor legfeljebb 1 pont adható.

Összesen: 3 pont

c)

7 különböző lehetőség van. 1 pont

Ha mindegyikbe 3 tanuló tartozik, akkor
$7 \cdot 3 = 21$ tanuló lenne. 3 pont

De 22 van, ezért valamelyik csoportban 4 tanuló lesz. 2 pont

Ez halmazábrán is megmutatható.

Összesen: 6 pont

d)

$22 = 16 + 3 + x$ 2 pont

$x = 3$ 1 pont

Összesen: 3 pont

8. feladat

a)

$$|x| + |x-4| = -\frac{2}{7}x + 10 \quad \text{1 pont}$$

Ha $x < 0$, akkor:

$$-x - x + 4 = -\frac{2}{7}x + 10 \quad \text{1 pont}$$

$x = -\frac{7}{2}$, és ez benne van a vizsgált intervallumban. 1 pont

Szöveges indoklás helyett más jelölés is megfelelő.

Ha $0 \le x \le 4$, akkor: 1 pont

$$x - x + 4 = -\frac{2}{7}x + 10 \quad \text{1 pont}$$

$x = 21$, de ez nincs benne a vizsgált intervallumban. 1 pont

Ha $x \ge 4$, akkor: 1 pont

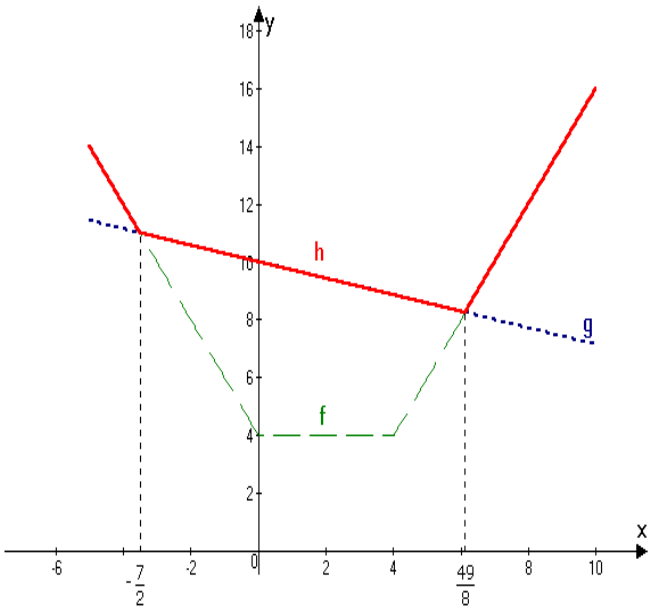
$$x + x - 4 = -\frac{2}{7}x + 10 \quad \text{1 pont}$$

$x = \frac{49}{8}$, és ez benne van a vizsgált intervallumban. 1 pont

A három eset vizsgálatáért 3–3 pont jár.

Összesen: 9 pont

b)

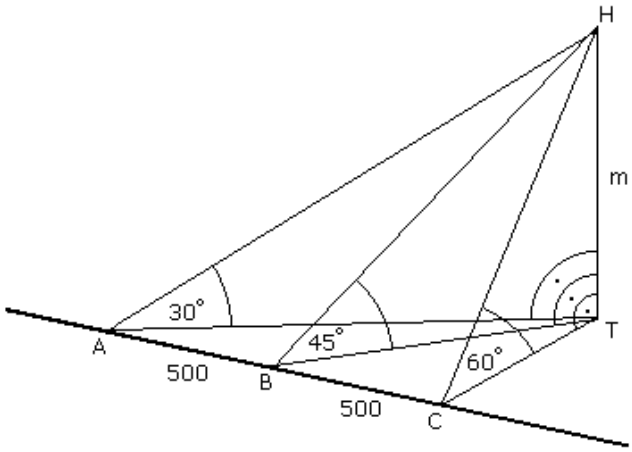


3 pont	f ábrázolása
1 pont	g ábrázolása
3 pont	h ábrázolása

Összesen: 7 pont

9. feladat

Az első pont A, a második B, a harmadik C,
a kilátó teteje H.



3 pont

A térbeli viszonyok jó elképzelését tükröző ábráért az adatok feltüntetése nélkül is 3 pont adható.

A hegy magasságát jelölje a $HT = m$ szakasz.
Az ATH, BTH és CTH derékszögű háromszögekből rendre:

$AT = m\sqrt{3}$	1 pont
$BT = m$	1 pont
$CT = \frac{m}{\sqrt{3}}$	1 pont

AT; BT és CT ugyanazzal a paraméterrel való kifejezéséért 1-1 pont jár.

Ha ABT szöget α-val jelöljük,
akkor a TBC$\angle = 180° - \alpha$.
Az ABT és TBC háromszögekben a koszinusztételt az AT, illetve a CT oldalakra felírva:

Vagy pl. az ACT háromszögben a CT és az ABT-ben a BT oldalakra felírva a koszinusztételt:
3–3 pont.

(1) $3m^2 = 500^2 + m^2 - 2 \cdot 500 \cdot m \cdot \cos\alpha$ 2 pont

(2) $\frac{m^2}{3} = 500^2 + m^2 - 2 \cdot 500 \cdot m \cdot \cos\left(180^\circ - \alpha\right)$ 2 pont

(2) $\frac{m^2}{3} = 500^2 + m^2 + 2 \cdot 500 \cdot m \cdot \cos\alpha$ 2 pont

A kétismeretlenes egyenletrendszer felírásáért összesen 6 pont.

Az (1) és (2) egyenleteket összeadva:

$m^2\left(3 + \frac{1}{3}\right) = 2(500^2 + m^2)$ 2 pont

$m = \sqrt{375\ 000} \approx 612{,}4$ 1 pont

A hegy magassága körülbelül 612 méter. 1 pont

A kapott végeredményhez még a megfigyelő magasságát kellene hozzáadnunk, de ettől a megoldás értékelésénél eltekinthetünk.

Összesen: 16 pont