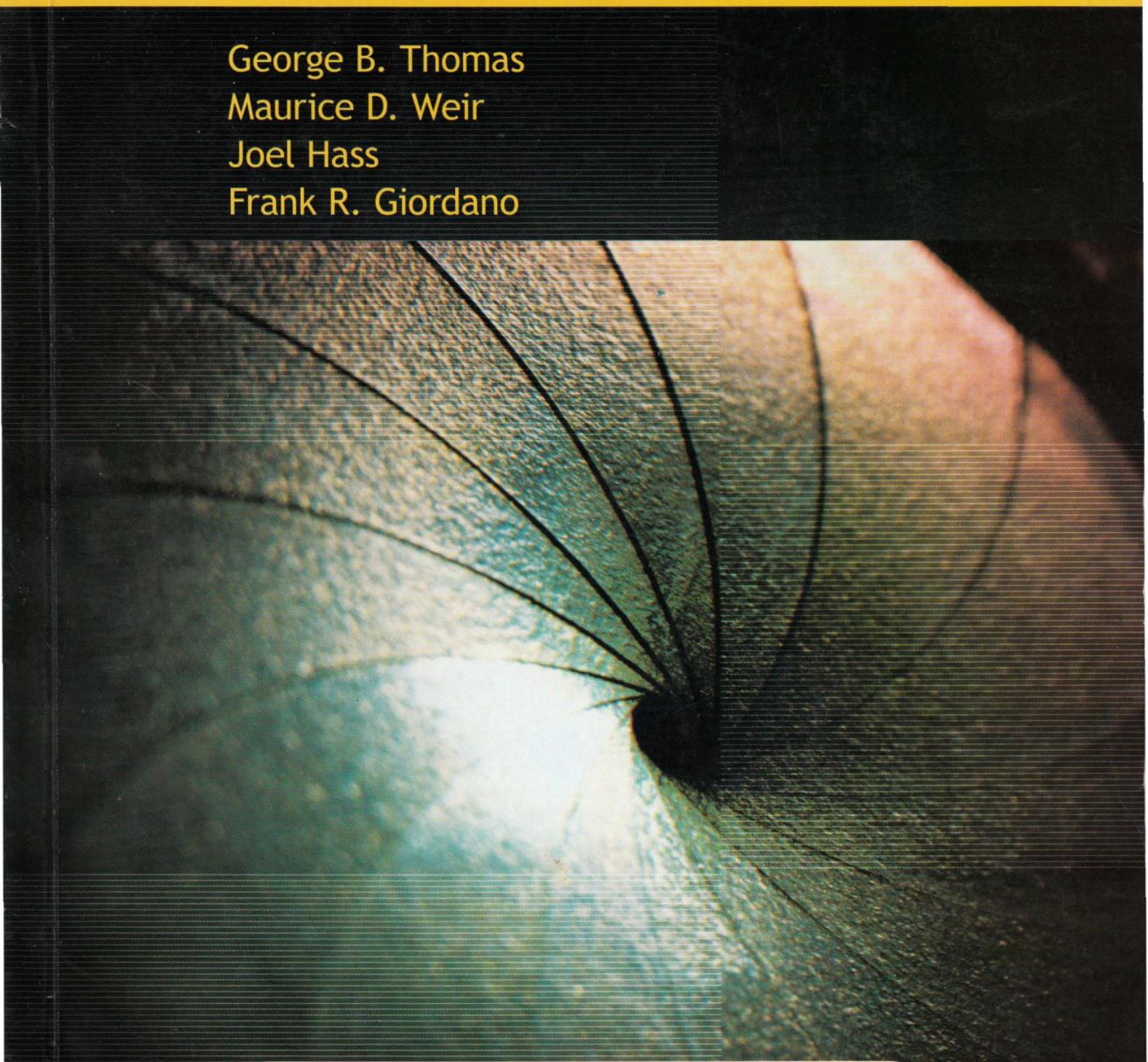
George B. Thomas
Maurice D. Weir
Joel Hass
Frank R. Giordano



Thomas-féle KALKULUS 3.

TYPOTEX

Thomas-féle

Kalkulus

III. kötet

THOMAS-FÉLE
KALKULUS

III. kötet

Az eredeti művet készítette
George B. Thomas, Jr.
Massachusetts Institute of Technology

Átdolgozták

Maurice D. Weir
Naval Postgraduate School

Joel Hass
University of California, Davis

Frank R. Giordano
Naval Postgraduate School

A magyar kiadás főszerkesztője

Szász Domokos
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem



TYPOTEX
Budapest, 2007

Az eredeti mű címe: Thomas' Calculus, 11th Edition.

Authorized translation from the English Language edition, entitled THOMAS' Calculus, 11th Edition, ISBN 0321185587, by Thomas, George B.; Weir, Maurice D.; and Giordano, Frank R., published by Pearson Education Inc., publishing as Addison-Wesley
Copyright © 2005 Pearson Education Inc. All rights reserved.
Hungarian translation © Csaba Ferenc; Gerner József; Ruzsa Zoltán; Szép Gabriella; Typotex, 2007

A megjelenést támogatta a
Korszerű Mérnökért Alapítvány és a
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Rektori Hivatala.

Szakmailag ellenőrizte: Horváth Miklós, Moson Péter, Nagyné Szilvási Márta, Serény György és Szabados Tamás.

ISBN 978 963 9664 28 9

Témakör: matematikai analízis

Kedves Olvasó!

Önre gondoltunk, amikor a könyv előkészítésén munkálkodtunk. Kapcsolatunkat szorosabbra fűzhetjük, ha belép a Typoklubba, ahonnan értesülhet új kiadványainkról, akcióinkról, programjainkról, és amelyet a www.typotex.hu címen érhet el. Honlapunkon megtalálhatja az egyes könyvekhez tartozó hibajegyzéket is, mert sajnos hibák olykor előfordulnak.

Kiadja a Typotex Elektronikus Kiadó Kft., az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesületének tagja

Felelős kiadó: Votisky Zsuzsa
Felelős szerkesztő: Szép Gabriella
Műszaki szerkesztő: Hesz Gábor
A borítót Tóth Norbert készítette
Terjedelem: 67 (A/5) ív
Készült a pécsi Bornus Nyomdában
Felelős vezető: Borbély Tamás

Tartalomjegyzék

10. Kúpszeletek és polárkoordináták **9**

10.1. Kúpszeletek és másodfokú egyenletek 9
10.2. Kúpszeletek osztályozása excentricitásuk alapján 20
10.3. Másodfokú egyenletek és forgatások 24
10.4. Kúpszeletek és paraméteres egyenletek, a ciklois 30
10.5. Polárkoordináták 35
10.6. Ábrázolás polárkoordinátákban 40
10.7. Terület és hosszúság polárkoordinátákban 46
10.8. Kúpszeletek polárkoordinátákban 52
Áttekintő kérdések 58
Gyakorló feladatok 58
Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok 61

11. Sorozatok és végtelen sorok **65**

11.1. Sorozatok 66
11.2. Végtelen sorok 79
11.3. Az integrálkritérium 88
11.4. Összehasonlító kritériumok 93
11.5. A hányados- és a gyökkritérium 96
11.6. Alternáló sorok, abszolút és feltételes konvergencia 101
11.7. Hatványsorok 108
11.8. Taylor- és Maclaurin-sorok 118
11.9. A Taylor-sorok konvergenciája, Taylor tétele 123
11.10. Hatványsorok alkalmazása 132
11.11. Fourier-sorok 142
Áttekintő kérdések 147
Gyakorló feladatok 148
Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok 150

12. Vektorok és a tér geometriája **155**

12.1. Háromdimenziós koordináta-rendszerek 155
12.2. Vektorok 160
12.3. Skalárszorzat 168
12.4. Vektoriális szorzat 176
12.5. Egyenesek és síkok a térben 182

12.6. Hengerek és másodrendű felületek 191
Áttekintő kérdések 199
Gyakorló feladatok 200
Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok 202

13. Vektor értékű függvények, mozgás a térben 205

13.1. Vektorfüggvények 205
13.2. Egy lövedék röppályájának leírása 218
13.3. Ívhossz és a normált érintővektor 227
13.4. Görbület és a normált főnormális 232
13.5. Torzió és a normált binormális 238
13.6. Bolygómozgás és műholdpályák 244
Áttekintő kérdések 252
Gyakorló feladatok 252
Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok 254

14. Parciális deriváltak 257

14.1. Többváltozós függvények 257
14.2. Határérték és folytonosság magasabb dimenzióban 266
14.3. Parciális deriváltak 273
14.4. A láncszabály 284
14.5. Iránymenti deriváltak és gradiens vektor 291
14.6. Érintősíkok és differenciálok 299
14.7. Szélsőértékek és nyeregpontok 310
14.8. Lagrange-multiplikátorok 321
14.9. Feltételes parciális deriváltak 330
14.10. Kétváltozós Taylor-formula 335
Áttekintő kérdések 338
Gyakorló feladatok 339
Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok 343

15. Többes integrálok 347

15.1. Kettős integrál 347
15.2. Terület, nyomaték, tömegközéppont 360
15.3. Kettős integrálás polárkoordinátákkal 370
15.4. Hármas integrál derékszögű koordináta-rendszerben 376
15.5. Tömeg és nyomaték három dimenzióban 386
15.6. Hármas integrálok henger- és gömbi koordináta-rendszerben 391
15.7. Helyettesítés többes integráloknál 403
Áttekintő kérdések 410
Gyakorló feladatok 410
Az anyag alaposabb megértését segítő további feladatok 413

16. **Integrálás vektormezőben** **417**

16.1. Vonalintegrál 417
16.2. Vektormezők, cirkuláció, munka, áramlás 423
16.3. Útfüggetlenség, potenciálfüggvény, konzervatív vektormező 432
16.4. Green-tétel a síkban 440
16.5. Felület felszíne és felületi integrál 451
16.6. Paraméteresen adott felületek 460
16.7. Stokes-tétel 469
16.8. A Gauss–Osztrogradszkij-tétel 477
Áttekintő kérdések 487
Gyakorló feladatok 488
Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok 491

Függelékek **493**

F.6. Gyakran előforduló határértékek 493
F.7. A vektoriális szorzás disztributivitása 494
F.8. A vegyes deriváltak egyenlőségéről és a kétváltozós függvények megváltozásáról szóló tétel bizonyítása 495
F.9. Paralelogramma síkra eső vetületének területe 499

Megoldások **501**

Tárgymutató **533**

10. fejezet
Kúpszeletek és polárkoordináták

ÁTTEKINTÉS: Ebben a fejezetben geometriai definíciót adunk a parabolára, az ellipszisre és a hiperbolára, és levezetjük normálegyenletüket. Ezeket a görbéket kúpszeleteknek nevezzük. Kúpszeletpályán mozognak a bolygók, a mesterséges holdak és minden olyan test, amelyet a távolság négyzetével fordítottan arányos erő mozgat. A 13. fejezetben látni fogjuk, hogy amennyiben egy test pályájáról tudjuk, hogy az kúpszelet, akkor a test sebességéről és a rá ható erőről is közvetlenül informálódni tudunk. A bolygók mozgását célszerű polárkoordinátákkal leírni, ezért a görbéket, a deriváltjaikat és az integrálokat ebben az új koordináta-rendszerben is tanulmányozni fogjuk.

10.1. Kúpszeletek és másodfokú egyenletek

Az 1. fejezetben a **kör**t olyan síkbeli pontok mértani helyeként definiáltuk, amelyek egy rögzített ponttól azonos távolságra vannak. Ha a középpont a (h,k) pont, a sugár pedig a, akkor a kör normálegyenlete $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$. A kör példa kúpszeletre. A *kúpszeletek* olyan görbék, amelyek egy kettős kúp és egy sík metszésvonalaként állnak elő (10.1. ábra).

A parabolát, az ellipszist és a hiperbolát most koordinátasíkban fekvő másodrendű görbeként fogjuk leírni.

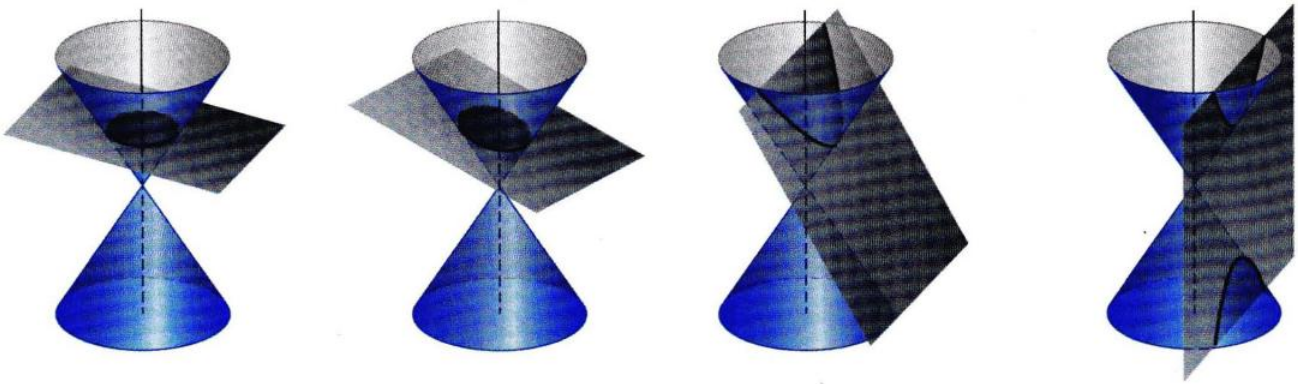
Parabola

DEFINÍCIÓ: **parabola, fókusz, direktrix**

A sík azon pontjainak halmazát, amelyek a sík egy rögzített pontjától és egy rögzített egyenesétől egyenlő távolságra vannak, **parabolának** nevezzük. A rögzített pont a parabola **fókusza**, a rögzített egyenes a parabola **vezéregyenese vagy direktrixe.**

Ha az F fókusz az L egyenesre illeszkedik, akkor a parabola az F-en átmenő, L-re merőleges egyenes. Ez elfajult eset, s ezentúl úgy vesszük, hogy F nem lehet rajta L-en.

A parabola egyenlete akkor a legegyszerűbb, ha a fókusz és a vezéregyenes közrefogja az egyik koordinátatengelyt. Tegyük fel például, hogy a fókusz az y-tengely $F(0,p)$ pontja, a vezéregyenes pedig az $y=-p$ egyenes. A 10.2. ábra jelöléseivel a $P(x,y)$ pont akkor és csak akkor van rajta a parabolán, ha $PF=PQ$.



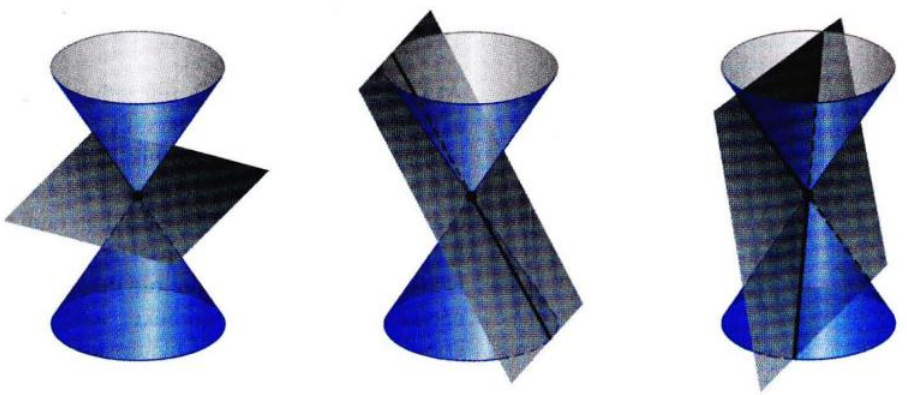
Kör: a sík merőleges a kúp tengelyére

Ellipszis: a sík ferdén metszi a kúp tengelyét

Parabola: a sík egyetlen kúpalkotóval párhuzamos

Hiperbola: a sík mind a két kúpot metszi

(a)



Pont: a sík csupán a kúp csúcsán halad át

Egyenes: a sík érinti a kúpot

Metsző egyenespár

(b)

10.1. ÁBRA: A nem elfajult kúpszeletek (a) olyan görbék, amelyek egy sík és egy kettős kúp metszésvonalai. A hiperbola két részből áll, ezeket a hiperbola *ág*ainak nevezzük. A kettős kúp csúcsán átmenő síkokkal vett síkmetszetek az *elfajult* kúpszeletek (b).

A távolságképletből:

$$PF = \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{x^2+(y-p)^2},$$
$$PQ = \sqrt{(x-x)^2+(y-(-p))^2} = \sqrt{(y+p)^2}.$$

Ha a két kifejezést egymással egyenlővé tesszük és egyszerűsítünk, akkor azt kapjuk, hogy

$$y = \frac{x^2}{4p} \text{ vagy } x^2 = 4py. \qquad \text{normálalak} \qquad (10.1)$$

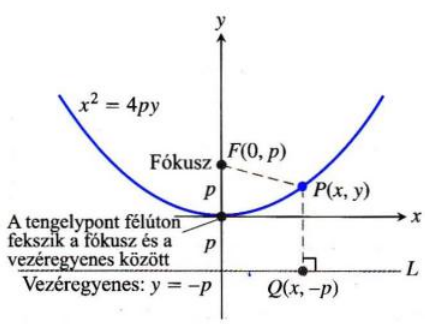
Ezek az egyenletek a parabola y-tengelyre vonatkozó szimmetriáját mutatják. Az y-tengelyt a parabola **tengely**ének (szimmetriatengelyének) nevezzük.

A parabola és a szimmetriatengely metszéspontja a **tengelypont**. Az $x^2 = 4py$ parabola tengelypontja az origó (10.2. ábra). A p pozitív szám a parabola fókusztávolsága (paramétere).

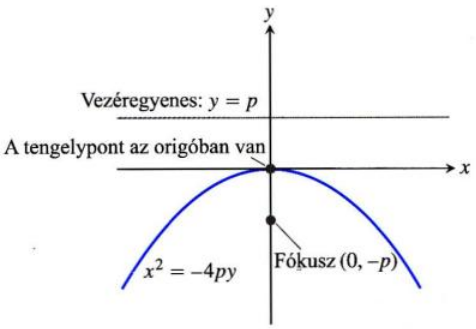
Ha a parabola lefelé nyitott, fókusza a $(0,-p)$ pont, vezéregyenese az $y = p$ egyenes, akkor a (10.1) egyenlet

$$y = -\frac{x^2}{4p} \text{ vagy } x^2 = -4py$$

alakú lesz (10.3. ábra). Hasonló egyenleteket kapunk jobbról, illetve balról nyitott parabolára is (10.4. ábra és 10.1. táblázat).



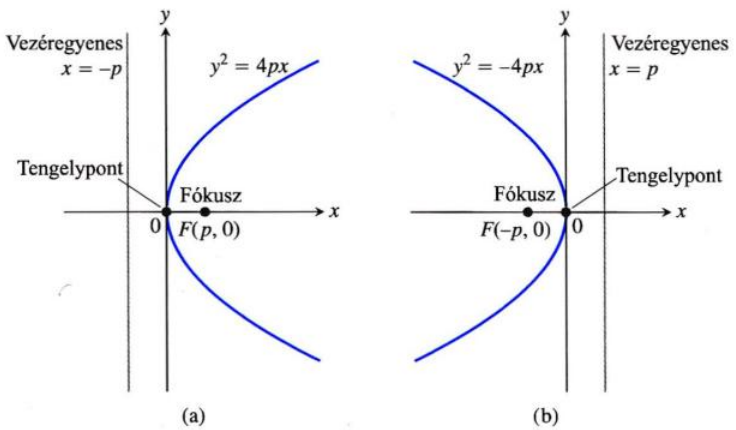
10.2. ÁBRA: Az $x^2 = 4py$, $p > 0$ parabola.



10.3. ÁBRA: Az $x^2 = -4py$, $p > 0$ parabola.

Egyenlet	Fókusz	Vezéregyenes	Tengely	Nyitott
$x^2 = 4py$	$(0,p)$	$y = -p$	y-tengely	felülről
$x^2 = -4py$	$(0,-p)$	$y = p$	y-tengely	alulról
$y^2 = 4px$	$(p,0)$	$x = -p$	x-tengely	jobbról
$y^2 = -4px$	$(-p,0)$	$x = p$	x-tengely	balról

10.1. TÁBLÁZAT: A parabola egyenletének normálalakja, amikor a tengelypont az origóban van ($p > 0$)



10.4. ÁBRA: (a) Az $y^2 = 4px$ parabola. (b) Az $y^2 = -4px$ parabola.

1. PÉLDA:

Határozzuk meg az $y^2 = 10x$ parabola fókuszpontját és vezéregyenesét!

Megoldás: Az $y^2 = 4px$ normálegyenlet alapján meghatározzuk p értékét:

$$4p = 10, \quad \text{így} \quad p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

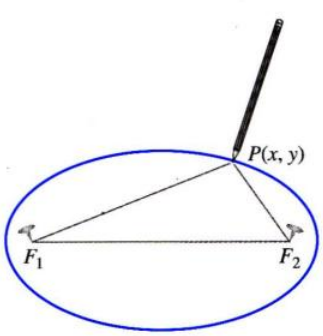
Ezután meghatározzuk az ehhez a p értékhez tartozó fókuszpontot és vezéregyenest:

$$\text{Fókusz:} \quad (p,0) = \left(\frac{5}{2},0\right),$$

$$\text{Vezéregyenes:} \quad x = -p \text{ vagy } x = -\frac{5}{2}. \qquad \square$$

Más helyzetű parabolák egyenletét úgy kaphatjuk meg, hogy a 10.1. táblázatban szereplő egyenletekre alkalmazzuk 1.5. alfejezetbeli eltolási képleteket (lásd a 39., 40. és 45–48. gyakorlatokat).

Ellipszis

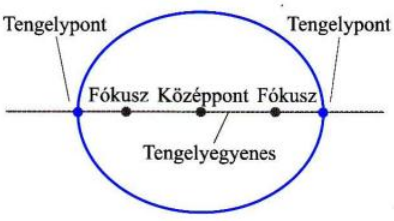


10.5. ÁBRA: Ellipszis rajzolása két szeg, fonal és ceruza segítségével.

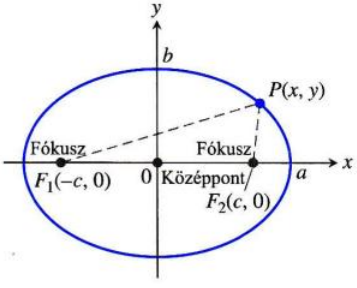
DEFINÍCIÓ: Ellipszis, fókuszok

Az **ellipszis** azoknak a síkbeli pontoknak a halmaza, amelyeknek a sík két rögzített pontjától mért távolságösszege állandó. A rögzített pontokat az ellipszis **fókuszpontjai**nak nevezzük.

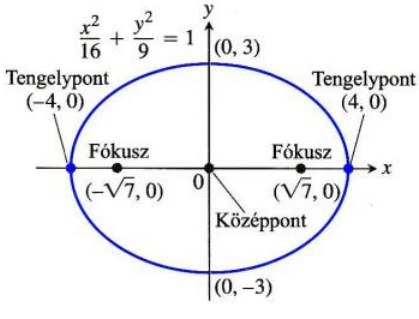
Ellipszist legegyszerűbben a definícióból kiindulva rajzolhatunk. Egy fonaldarab két végét összekötve készítsünk hurkot, a hurok belsejében üssünk le két szeget, F_1-et és F_2-t, majd egy ceruza segítségével feszítsük ki a fonalat. Ha a ceruzát a szegek körül körbevisszük úgy, hogy a fonal mindvégig feszes maradjon, egy zárt görbét rajzolunk ki (10.5. ábra). A görbe ellipszis lesz, mivel a



10.6. ÁBRA: Az ellipszis tengelyegyenesének nevezetes pontjai



10.7. ÁBRA: A $PF_1 + PF_2 = 2a$ összefüggéssel definiált ellipszis az $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$ görbe grafikonja, ahol $b^2 = a^2 - c^2$.



10.8. ÁBRA: Vízszintes nagytengelyű ellipszis (2).

$PF_1 + PF_2$ távolságösszeg egyenlő a zsinór hosszának és a szegek távolságának különbségével, ami állandó érték. Az ellipszis fókuszai az F_1, F_2 pontok.

DEFINÍCIÓ: Tengelyegyenes, középpont, tengelypont

A fókuszpontokon átmenő egyenes az ellipszis **tengelyegyenese**, a fókuszokat összekötő szakasz felezőpontja az ellipszis **középpontja** vagy **centruma**, a tengelyegyenes és az ellipszis metszéspontjai az ellipszis **csúcspontjai** vagy **tengelypontjai**.

Ha a fókuszpontok $F_1(-c,0)$ és $F_2(c,0)$ (10.7. ábra), és a $PF_1 + PF_2$ távolságot $2a$-val jelöljük, akkor az ellipszis P pontjának koordinátáira fennáll a

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

egyenlőség. Ezt az egyenletet úgy egyszerűsítjük, hogy a második négyzetgyökös kifejezést átvisszük a jobb oldalra, négyzetre emelünk, a fennmaradó gyökös kifejezést egy oldalra rendezzük és újra négyzetre emelünk. Így kapjuk az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \tag{10.2}$$

alakot. Mivel $PF_1 + PF_2$ nagyobb az F_1F_2 távolságnál (ez a PF_1F_2 háromszögre vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségből következik), $2a$ nagyobb lesz $2c$-nél. Egy pont tehát akkor és csak akkor pontja az ellipszisnek, ha koordinátái kielégítik a (10.2) egyenletet.

Ha

$$b=\sqrt{a^2-c^2}, \tag{10.3}$$

akkor $a^2 - c^2 = b^2$, és a (10.2) egyenlőség a

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{10.4}$$

alakot ölti.

A (10.4) egyenlőség azt mutatja, hogy az ellipszis szimmetrikus az origóra és mindkét koordinátatengelyre nézve. Az $x = \pm a$ és $y = \pm b$ egyenesek által határolt téglalapban fekszik. A koordinátatengelyeket a $(\pm a, 0)$ és $(0, \pm b)$ pontokban metszi. E pontbeli érintők merőlegesek a tengelyekre, mivel a

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

Ezt (10.4)-ből közvetett deriválással kapjuk.

nulla, ha $x = 0$ és végtelen, ha $y = 0$.

A (10.4) egyenlettel adott ellipszis **nagytengelye** a $(\pm a, 0)$ pontokat összekötő szakasz $2a$ hossza. A **kistengely** a $(\pm b, 0)$ pontokat összekötő szakasz $2b$ hossza. Az a szám a **félnagytengely**, a b szám a **félkistengely**. A (10.3) egyenletből kifejezhető

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

szám a **középpont és a fókusz távolsága**. Ha ez a távolság nulla, akkor az ellipszis kör.

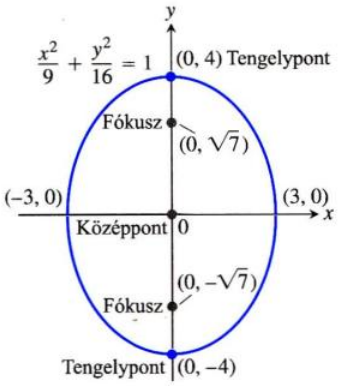
2. PÉLDA: **Vízszintes nagytengely**

Az

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \tag{10.5}$$

ellipszis (10.8. ábra)

félnagytengelye: $a=\sqrt{16}=4$
félkistengelye: $b=\sqrt{9}=3$
középpont–fókusz távolsága: $c=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$
fókuszpontjai: $(\pm c,0)=(\pm\sqrt{7},0)$
tengelypontjai: $(\pm a,0)=(\pm 4,0)$
középpontja: $(0,0)$. □



10.9. ÁBRA: Függőleges nagytengelyű ellipszis (3. példa).

3. PÉLDA: **Függőleges nagytengely**

Az

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1 \tag{10.6}$$

ellipszist úgy kaptuk, hogy a (10.5) egyenletben x-et és y-t fölcseréltük. Ennek az ellipszisnek függőleges lesz a nagytengelye (10.9. ábra). Mivel most $a^2=16$ és $b^2=9$, azt kapjuk, hogy az ellipszis

félnagytengelye: $a=\sqrt{16}=4$
félkistengelye: $b=\sqrt{9}=3$
középpont–fókusz távolsága: $c=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$
fókuszpontjai: $(0,\pm c)=(0,\pm\sqrt{7})$
tengelypontjai: $(0,\pm a)=(0,\pm 4)$
középpontja: $(0,0)$. □

Amikor a (10.5) és (10.6) egyenleteket vizsgáljuk, ne tartsunk keveredéstől. Egyszerűen csak az ellipszis koordinátatengelyekkel vett metszéspontjait keressük. Tudni fogjuk, hogy milyen állású lesz a nagytengely, hiszen a két tengely közül az a nagyobb. A középpont mindkét esetben az origóban van, a fókuszok és a tengelypontok pedig a nagytengelyen.

Origó középpontú ellipszis egyenletének normálalakja

Ha a fókuszpontok az x-tengelyen vannak: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0)$

középpont–fókusz távolság: $c=\sqrt{a^2-b^2}$
fókuszpontok: $(\pm c,0)$
tengelypontok: $(\pm a,0)$

Ha a fókuszpontok az y-tengelyen vannak: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\ (a>0)$

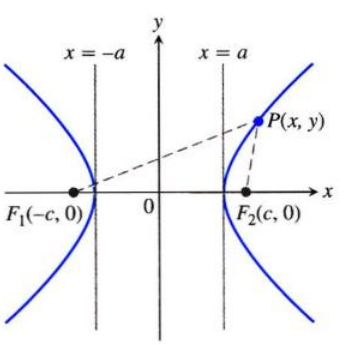
középpont–fókusz távolság: $c=\sqrt{a^2-b^2}$
fókuszpontok: $(0,\pm c)$
tengelypontok: $(0,\pm a)$

A félnagytengely mindkét esetben a, a félkistengely pedig b.

Hiperbola

DEFINÍCIÓ: **Hiperbola, fókuszpontok**

A **hiperbola** a sík azon pontjainak halmaza, amelyeknek a sík két rögzített pontjától mért távolságának különbsége állandó érték. A rögzített pontokat a hiperbola **fókusz**ainak nevezzük.



10.10. ÁBRA: A hiperbolának két ága van. Az itt látható hiperbola jobb oldali ágának pontjaira $PF_1-PF_2=2a$. A bal oldali hiperbolaág pontjaira $PF_2-PF_1=2a$. Ilyenkor $b=\sqrt{c^2-a^2}$.

Ha a fókuszpontok az $F_1(-c,0)$ és $F_2(c,0)$ pontok, a távolság különbség pedig $2a$ (10.10. ábra), akkor az (x,y) pont akkor és csak akkor pontja a hiperbolának, ha

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \tag{10.7}$$

Ezt az egyenletet úgy egyszerűsítjük, hogy a második négyzetgyökös kifejezést átvisszük a jobb oldalra, négyzetre emelünk, a fennmaradó gyökös kifejezést egy oldalra rendezzük és újra négyzetre emelünk. Így kapjuk az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \tag{10.8}$$

egyenletet. Ez éppen olyan, mint az ellipszis egyenlete. Most azonban a^2-c^2 negatív, mivel $2a$, a PF_1F_2 háromszög két oldalának különbsége kisebb mint a harmadik oldal, azaz $2c$.

A (10.8) egyenlethez vezető algebrai lépéseket visszafelé is elvégezhetjük azért, hogy lássuk: minden olyan P pont, amely eleget tesz ennek az egyenletnek $0<a<c$ esetén, az a (10.7) egyenletet is kielégíti.

Ha b-vel jelöljük $c^2 - a^2$ pozitív négyzetgyökét:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}, \tag{10.9}$$

akkor $a^2 - c^2 = -b^2$ és a (10.8) a még tömörebb

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10.10}$$

alakot ölti. A (10.10) egyenlet és a (10.4) ellipszis-egyenlet között egy mínusz jel a különbség, valamint az új

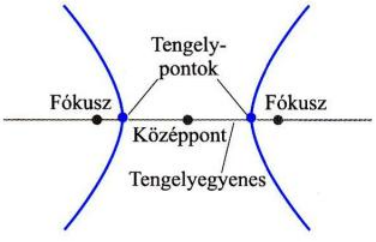
$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{A (10.9) egyenletből}$$

összefüggés.

Akárcsak az ellipszis, a hiperbola is szimmetrikus az origóra és a koordinátatengelyekre. Az x-tengelyt a $(\pm a, 0)$ pontokban metszi. Az e pontokhoz tartozó érintői függőlegesek, mivel a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y} \qquad \text{Ezt (10.10)-ből közvetett deriválással kapjuk.}$$

mennyiség végtelen, ha $y = 0$. A hiperbolának nincs metszéspontja az y-tengellyel: valóban, a görbének egyetlen darabja sincs az $x = -a$ és $x = a$ egyenesek között.



10.11. ÁBRA: A hiperbola tengelyegyenesének nevezetes pontjai.

DEFINÍCIÓ: Tengelyegyenes, középpont, tengelypont

A fókuszpontokon átmenő egyenes a hiperbola **tengelyegyenese**, a fókuszokat összekötő szakasz felezőpontja a hiperbola **középpontja** vagy centruma, a tengelyegyenes és a hiperbola metszéspontjai a hiperbola **csúcspontjai** vagy **tengelypontjai**. (10.11. ábra)

A hiperbola aszimptotái és ábrázolása

Ha a (10.10) egyenletet y-ra megoldjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} y^2 &= b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \\ &= \frac{b^2}{a^2} x^2 \left(1 - \frac{a^2}{x^2} \right) \end{aligned}$$

vagy négyzetgyökvonás után:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Amint $x \to \pm\infty$, a $\sqrt{1 - a^2/x^2}$ tényező 1-hez tart és a $\pm(b/a)x$ tényező válik dominánssá. Ezért a (10.10) egyenlettel definiált hiperbola **aszimptotái** az

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

egyenesek. Aszimptotái segítségével gyorsan ábrázolhatjuk a hiperbolát. Az aszimptoták egyenletét legegyszerűbben úgy határozhatjuk meg, hogy a (10.10) egyenletben 1 helyébe 0-t írunk, s aztán az egyenletet megoldjuk y-ra:

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}_{\text{hiperbola}} \to \underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0}_{\text{1 helyébe 0}} \to \underbrace{y = \pm \frac{b}{a} x.}_{\text{aszimptoták}}$$

Origó középpontú hiperbolák normálalakja

Ha a fókuszpontok az x-tengelyen vannak: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

középpont–fókusz távolság: $c=\sqrt{a^2+b^2}$
fókuszpontok: $(\pm c,0)$
tengelypontok: $(\pm a,0)$
aszimptoták: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ vagy $y=\pm\dfrac{b}{a}x$

Ha a fókuszpontok az y-tengelyen vannak: $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$

középpont–fókusz távolság: $c=\sqrt{a^2+b^2}$
fókuszpontok: $(0,\pm c)$
tengelypontok: $(0,\pm a)$
aszimptoták: $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=0$ vagy $y=\pm\dfrac{a}{b}x$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az aszimptota egyenletek nem egyformák (az első esetben b/a, a második esetben a/b szerepel x együtthatójaként).

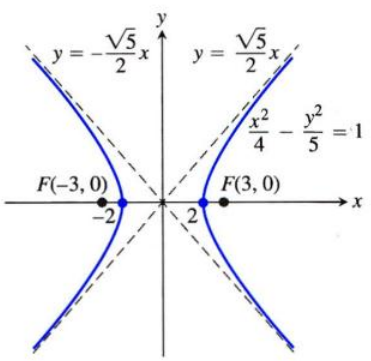
4. PÉLDA: **A fókuszpontok az x-tengelyen vannak**

Az

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1 \tag{10.11}$$

egyenlet valójában a (10.10) egyenlet az $a^2=4$ és $b^2=5$ értékekkel (10.12. ábra). Erre a hiperbolára:

a középpont–fókusz távolság: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+5}=3$
a fókuszpontok: $(\pm c,0)=(\pm 3,0)$
a tengelypontok: $(\pm a,0)=(\pm 2,0)$
a középpont: $(0,0)$
az aszimptoták: $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=0$ vagy $y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$ □



10.12. ÁBRA: A 4. példában szereplő hiperbola és annak aszimptotái.

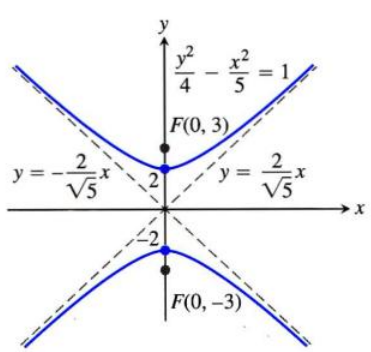
5. PÉLDA: **A fókuszpontok az y-tengelyen vannak**

Az

$$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$$

hiperbolát úgy kaptuk, hogy a (10.11) egyenletben x-et és y-t felcseréltük. Így ennek a hiperbolának a tengelypontjai nem az x-, hanem az y-tengelyen vannak (10.13. ábra). Továbbra is igaz, hogy $a^2=4$ és $b^2=5$. Erre a hiperbolára:

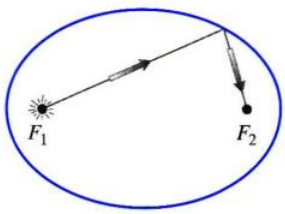
a középpont–fókusz távolság: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+5}=3$
a fókuszpontok: $(0,\pm c)=(0,\pm 3)$
a tengelypontok: $(0,\pm a)=(0,\pm 2)$
a középpont: $(0,0)$
az aszimptoták: $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{5}=0$ vagy $y=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}x$ □



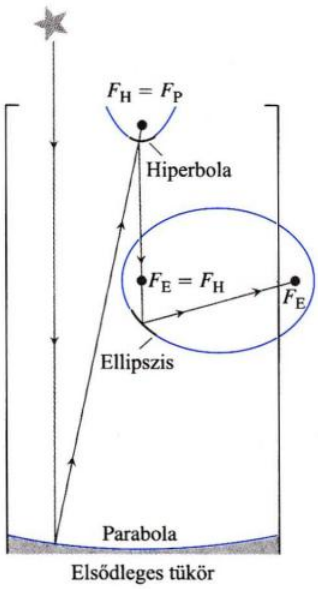
10.13. ÁBRA: Az 5. példában szereplő hiperbola és annak aszimptotái.

Tükrözési tulajdonságok

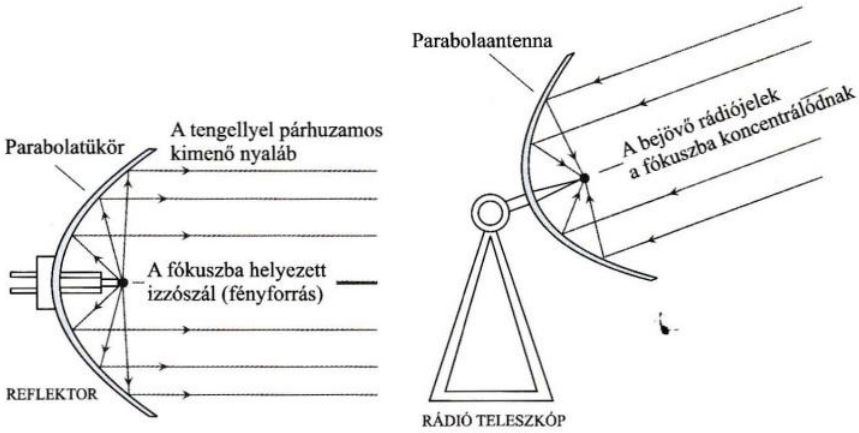
A parabola legfontosabb alkalmazási területe a fényt és a rádióhullámokat visszaverő parabolatükör. A parabola fókuszpontjából kibocsátott fénysugarat a parabola a tengelyével párhuzamosan veri vissza (10.14. ábra és 90. gyakorlat). Sőt a fókuszból induló fénysugár bármerre is indul, a parabolatükörről visszatükröződve ugyanannyi idő alatt jut el a parabola direktrixével párhuzamos (tehát a tengelyére merőleges) egyeneshez. Ez a tulajdonsága teszi alkalmassá jelzőfények, reflektorok és antennák előállítására.



10.15. ÁBRA: Az elliptikus tükör (itt oldalról látható) az egyik fókuszból induló fénysugarat a másik fókuszba tükrözi.



10.16. ÁBRA: Tükrös távcső vázlatos rajza.



10.14. ÁBRA: A parabolatükör a fókuszából induló fénysugarakból párhuzamos nyalábot állít elő. Ha a parabolatükörre a tengelyével párhuzamos fénysugarakat küldünk, a tükör a fénysugarakat a fókuszpontjába gyűjti.

Ha egy ellipszist megforgatunk a főtengelye körül, akkor egy ellipszoidnak nevezett felületet kapunk. Az ellipszoid belső felületét befoncsorozva tükröző felület jön létre, amely az egyik fókuszpontból kiinduló fénysugarakat a másik fókuszpontban gyűjti össze (10.15. ábra). A hanghullámokkal ugyanez történik, ezért lehet megépíteni az úgynevezett suttogószobákat, melyek fókuszpontjaiban álló személyek suttogva beszélgethetnek egymással (ilyen suttógószoba például a Kapitóliumban a Statuary Hall). A hiperbola egyik fókuszpontjába irányított fénysugarat a hiperbolikus tükör a másik fókuszpont irányában veri vissza. A hiperbola, a parabola és az ellipszis tükrözési tulajdonságait kombinálják néhány modern teleszkópban. A 10.16. ábra egy ilyen teleszkópot mutat. A távoli csillag fényét először az elsődleges parabolikus tükör veri vissza annak F_P fókusza irányába. Azután egy kis hiperbolikus tükrön verődik vissza, amely úgy van elhelyezve, hogy egyik fókusza megegyezzék a parabolikus tükör fókuszával, $F_H = F_P$. A fénysugár a hiperbolikus tükörről visszaverődve annak másik fókusza felé tart. Ez a fókusz egyben egy elliptikus tükör egyik fókusza is, azaz $F_H = F_E$. Az elliptikus tükör a fényt másik saját fókuszpontjába továbbítja, ahol azt a megfigyelő érzékeli.

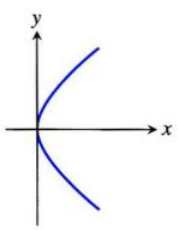
10.1. Feladatok

Grafikonok azonosítása

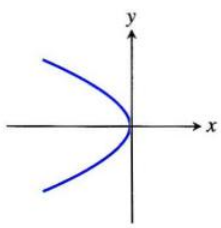
Az 1–4. feladatok grafikonjait társítsuk az alábbi egyenletekkel:

$$x^2 = 2y, \quad x^2 = -6y, \quad y^2 = 8x, \quad y^2 = -4x.$$

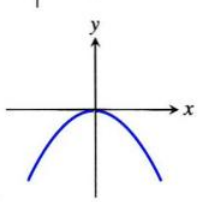
1.



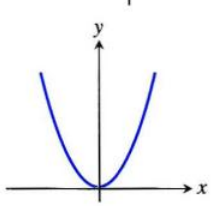
2.



3.



4.

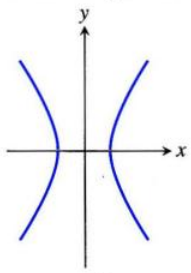


Az 5–8. feladatokban szereplő grafikonokhoz rendeljünk hozzá egyet-egyet az alábbi egyenletek közül:

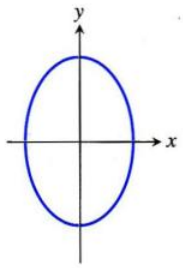
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \quad \frac{y^2}{4} - x^2 = 1, \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Keressük meg a fókuszpontokat és tengelypontokat is, illetve a hiperbolák aszimptotáit!

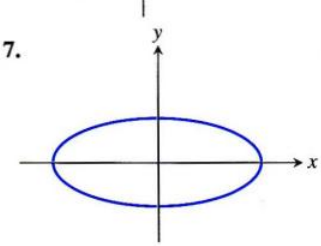
5.



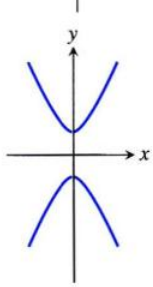
6.



7.



8.



Parabolák

A 9–16. feladatokban megadtuk egy-egy parabola egyenletét. Határozzuk meg fókuszpontjukat és direktrixüket! Ábrázoljuk a görbéket! Az ábrán a direktrix és a fókusz is legyen rajta!

9. $y^2 = 12x$ **10.** $x^2 = 6y$ **11.** $x^2 = -8y$

12. $y^2 = -2x$ **13.** $y = 4x^2$ **14.** $y = -8x^2$

15. $x = -3y^2$ **16.** $x = 2y^2$

Ellipszisek

A 17–24. feladatokban megadtuk egy-egy ellipszis egyenletét. Hozzuk normálalakra az egyenleteket! Ábrázoljuk az ellipsziseket, valamint fókuszpontjaikat!

17. $16x^2 + 25y^2 = 400$ **18.** $7x^2 + 16y^2 = 112$

19. $2x^2 + y^2 = 2$ **20.** $2x^2 + y^2 = 4$

21. $3x^2 + 2y^2 = 6$ **22.** $9x^2 + 10y^2 = 90$

23. $6x^2 + 9y^2 = 54$ **24.** $169x^2 + 25y^2 = 4225$

A 25. és 26. feladatban megadtuk az ellipszis fókuszainak és tengelypontjainak koordinátáit. Az ellipszisek az xy-síkban fekszenek, középpontjuk az origó. Ezeknek az információknak a segítségével határozzuk meg az ellipszisek normálegyenletét!

25. Fókuszok: $(\pm\sqrt{2}, 0)$
Tengelypontok: $(\pm 2, 0)$

26. Fókuszok: $(0, \pm 4)$
Tengelypontok: $(0, \pm 5)$

Hiperbolák

A 27–34. feladatokban hiperbolák egyenletét adtuk meg. Hozzuk normálalakra ezeket az egyenleteket és határozzuk meg a hiperbola aszimptotáit! Ezután ábrázoljuk a hiperbolákat, aszimptotáikat és fókuszaikat.

27. $x^2 - y^2 = 1$ **28.** $9x^2 - 16y^2 = 144$

29. $y^2 - x^2 = 8$ **30.** $y^2 - x^2 = 4$

31. $8x^2 - 2y^2 = 16$ **32.** $y^2 - 3x^2 = 3$

33. $8y^2 - 2x^2 = 16$ **34.** $64x^2 - 36y^2 = 2304$

A 35–38. feladatokban megadtuk a hiperbola fókuszait és aszimptotáit. A hiperbolák az xy-síkban fekszenek, középpontjuk az origó. Ezeknek az információknak a segítségével határozzuk meg a hiperbolák normálegyenletét!

35. Fókuszok: $(0, \pm\sqrt{2})$
Aszimptoták: $y = \pm x$

36. Fókuszok: $(\pm 2, 0)$
Aszimptoták: $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} x$

37. Fókuszok: $(\pm 3, 0)$
Aszimptoták: $y = \pm \frac{4}{3} x$

38. Fókuszok: $(0, \pm 2)$
Aszimptoták: $y = \pm \frac{1}{2} x$

Kúpszeletek eltolása

39. Az $y^2 = 8x$ parabolát két egységgel lefelé és egy egységgel jobbra tolva létrehozzuk az $(y+2)^2 = 8(x-1)$ parabolát.

(a) Határozzuk meg az új parabola csúcspontját, fókuszát és vezéregyenesét!

(b) Jelöljük ki az új csúcspontot, fókuszpontot és vezéregyenest, majd ábrázoljuk a görbét!

40. Az $x^2 = -4y$ parabolát 1 egységgel balra és 3 egységgel felfelé toljuk. Így az $(x+1)^2 = -4(y-3)$ parabola jön létre.

(a) Határozzuk meg az új parabola csúcspontját, fókuszát és vezéregyenesét!

(b) Jelöljük ki az új csúcspontot, fókuszpontot és vezéregyenest, majd ábrázoljuk a görbét!

41. Az $(x^2/16) + (y^2/9) = 1$ ellipszist 4 egységgel jobbra és 3 egységgel felfelé toljuk. Az így keletkező ellipszis egyenlete:

$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1.$$

(a) Határozzuk meg az új ellipszis fókuszait, tengelypontjait és centrumát!

(b) Jelöljük ki a fókuszpontok, a tengelypontok és a centrum helyét, majd ábrázoljuk az ellipszist!

42. Az $(x^2/9) + (y^2/25) = 1$ ellipszist 3 egységgel balra és 2 egységgel lefelé toljuk. Az így keletkező ellipszis egyenlete:

$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1.$$

(a) Határozzuk meg az új ellipszis fókuszait, tengelypontjait és centrumát!

(b) Jelöljük ki a fókuszpontok, a tengelypontok és a centrum helyét, majd ábrázoljuk az ellipszist!

43. Az $(x^2/16) - (y^2/9) = 1$ hiperbolát 2 egységgel jobbra toljuk. Az így keletkező hiperbola egyenlete:

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

(a) Határozzuk meg az új hiperbola centrumát, fókuszait, tengelypontjait és aszimptotáit!

(b) Jelöljük ki a centrumot, a fókuszpontokat, a tengelypontokat és az aszimptotákat, majd ábrázoljuk a hiperbolát!

44. Az $(y^2/4) - (x^2/5) = 1$ hiperbolát 2 egységgel lefelé tolva az

$$\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$

hiperbolát kapjuk.

(a) Határozzuk meg az új hiperbola centrumát, fókuszait, tengelypontjait és aszimptotáit!

(b) Jelöljük ki a centrumot, a fókuszpontokat, a tengelypontokat és az aszimptotákat, majd ábrázoljuk a hiperbolát!

A 45–48. feladatokban megadjuk egy parabola egyenletét és azt, hogy hány egységgel kell eltolni vízszintes és függőleges irányban. Adjuk meg az új parabola egyenletét, keressük meg csúcspontját, fókuszát és vezéregyenesét!

45. $y^2 = 4x$, balra 2, le 3 **46.** $y^2 = -12x$, jobbra 4, fel 3

47. $x^2 = 8y$, jobbra 1, le 7 **48.** $x^2 = 6y$, balra 3, le 2

A 49–52. feladatokban megadunk egy-egy ellipszisegyenletet és megmondjuk, hány egységgel kell eltolni az ellipszist vízszintes és függőleges irányban. Határozzuk meg az új ellipszis egyenletét, fókuszpontjait, tengelypontjait és középpontját!

49. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1$, balra 2, le 1

50. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, jobbra 3, fel 4

51. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$, jobbra 2, fel 3

52. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$, balra 4, le 5

Az 53–56. feladatokban megadunk egy-egy hiperbolaegyenletet és megmondjuk, hány egységgel kell eltolni a hiperbolát vízszintes és függőleges irányban. Határozzuk meg az új hiperbola egyenletét, középpontját, fókuszpontjait, tengelypontjait és aszimptotáit!

53. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, jobbra 2, fel 2

54. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, balra 2, le 1

55. $y^2 - x^2 = 1$, balra 1, le 1

56. $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$, jobbra 1, fel 3

Az 57–68. feladatokban határozzuk meg a kúpszeletek centrumát, fókuszpontjait, tengelypontjait, aszimptotáit, sugarát, melyiknek mije van!

57. $x^2 + 4x + y^2 = 12$

58. $2x^2 + 2y^2 - 28x + 12y + 114 = 0$

59. $x^2 + 2x + 4y - 3 = 0$

60. $y^2 - 4y - 8x - 12 = 0$

61. $x^2 + 5y^2 + 4x = 1$

62. $9x^2 + 6y^2 + 36y = 0$

63. $x^2 + 2y^2 - 2x - 4y = -1$

64. $4x^2 + y^2 + 8x - 2y = -1$

65. $x^2 - y^2 - 2x + 4y = 4$

66. $x^2 - y^2 + 4x - 6y = 6$

67. $2x^2 - y^2 + 6y = 3$

68. $y^2 - 4x^2 + 16x = 24$

Egyenlőtlenségek

Rajzoljuk fel azokat az xy-síkbeli tartományokat, amelyeknek a koordinátái eleget tesznek a 69–74. feladatokban megadott egyenlőtlenségnek vagy egyenlőtlenségpárnak.

69. $9x^2 + 16y^2 \le 144$

70. $x^2 + y^2 \ge 1$ és $4x^2 + y^2 \le 4$

71. $x^2 + 4y^2 \ge 4$ és $4x^2 + 9y^2 \le 36$

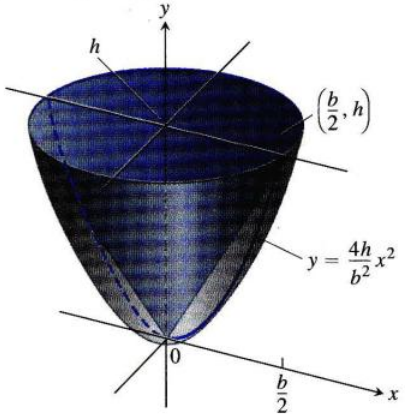
72. $(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + 9y^2 - 9) \le 0$

73. $4y^2 - x^2 \ge 4$

74. $|x^2 - y^2| \le 1$

Elmélet példákkal

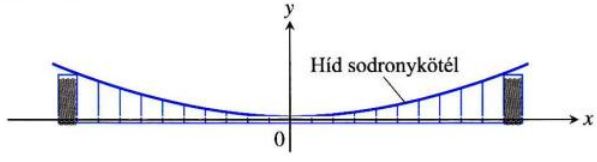
75. Archimédesz térfogatképlete parabolikus testre: Forgassuk meg az $y = (4h/b^2)x^2$ parabola és az $y = h$ egyenes által határolt tartományt az y-tengely körül. Az így előállt forgástestet mutatja az alábbi ábra. Mutassuk meg, hogy a forgástest térfogata a megfelelő kúp térfogatának a 3/2-szerese!



76. A függőhíd tartókötele parabolaalakot vesz fel: Tegyük fel, hogy az alább látható függőhíd kábeljét egyenletesen w N terheli vízszintes méterenként. Meg lehet mutatni, hogy ha H a tartókötélre a 0 pontban ható feszítőerő, akkor a kötél által felvett görbe eleget tesz a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{H}x$$

egyenletnek. Ezt a differenciálegyenletet megoldva mutassuk meg, hogy a kötél alakja parabolaív. A kezdeti feltétel: $y = 0$, ha $x = 0$.



77. Határozzuk meg az $(1,0)$, $(0,1)$ és $(2,2)$ pontokon átmenő kör egyenletét!

78. Határozzuk meg a $(2,3)$, $(3,2)$ és $(-4,3)$ pontokon átmenő kör egyenletét!

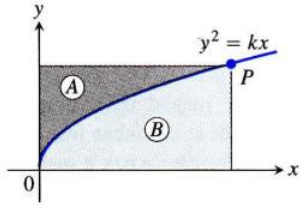
79. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja a $(-2,1)$ pont és átmegy az $(1,3)$ ponton. Az $(1{,}1; 2{,}8)$ a körön belül, kívül vagy rajta van?

80. Adjuk meg az $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ kör érintőit a kör és a koordinátatengelyek metszéspontjaiban!

81. Ha az $y^2 = kx$, $k > 0$ parabola valamely P pontján keresztül párhuzamosokat húzunk a koordinátatengelyekkel, akkor a két egyenes és a koordinátatengelyek által határolt téglalaptartományt a parabola két tartományra, A-ra és B-re osztja fel.

(a) Forgassuk meg ezeket a tartományokat az y-tengely körül és mutassuk meg, hogy a generált forgástestek térfogatának aránya 4 : 1.

(b) Mi lesz a forgástestek térfogatának aránya, ha az x-tengely körül forgatunk?



82. Mutassuk meg, hogy az $x = -p$ egyenes bármely pontjából az $y^2 = 4px$ görbéhez húzott érintők merőlegesek lesznek egymásra!

83. Mekkorák az oldalai annak a maximális területű téglalapnak, amelyet az $x^2 + 4y^2 = 4$ ellipszisbe írhatunk, és amelynek oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel? Mekkora lesz ennek a téglalapnak a területe?

84. Határozzuk meg annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet a $9x^2 + 4y^2 = 36$ ellipszis **(a)** x-tengely **(b)** y-tengely körüli forgatásával állítunk elő?

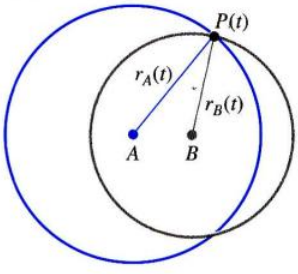
85. Az x-tengely, az $x = 4$ egyenes és a $9x^2 - 4y^2 = 36$ hiperbola által határolt első síknegyedbeli „háromszögtartományt" forgassuk meg az x-tengely körül. Határozzuk meg a keletkezett forgástest térfogatát!

86. Forgassuk meg az y-tengely körül azt a tartományt, amelyet balról az y-tengely, jobbról az $x^2 - y^2 = 1$ hiperbola, alulról és felülről pedig az $y = \pm 3$ egyenesek határolnak. Mekkora lesz az így keletkezett forgástest térfogata?

87. Határozzuk meg a súlypontját annak a tartománynak, amelyet alulról az x-tengely, felülről az $(x^2/9)+(y^2/16)=1$ ellipszis határol.

88. Az $y=\sqrt{x^2+1}$, $0\le x\le\sqrt{2}$ görbét, amely az $y^2-x^2=1$ hiperbola felső ágának egy darabja, megforgatjuk az x-tengely körül. Határozzuk meg a keletkezett forgástest felszínét!

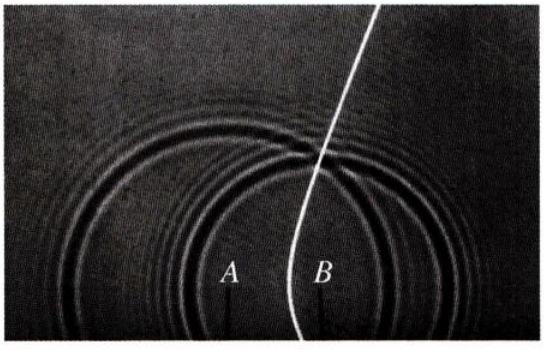
89. Az alábbi fotó kör alakú felületi hullámokat mutat, amelyeket úgy keltettünk, hogy egy tálba töltött víz felszínét először az A majd a B pontban megérintettük. A két hullámfront találkozási pontja látszólag egy hiperbolát rajzol ki. Valóban? A probléma megoldásában segít, ha a hullámokat A, illetve B középpontú körökkel modellezzük.



A P pont a t időpontban $r_A(t)$ távolságra van az A, és $r_B(t)$ távolságra van a B ponttól. Mivel a hullámkör átmérője állandó sebességgel nő, a hullám terjedési sebességére fennáll a

$$\frac{dr_A}{dt}=\frac{dr_B}{dt}$$

összefüggés. Ebből az egyenlőségből következik, hogy az r_A-r_B távolság állandó, így P szükségképpen egy olyan hiperbolának a pontja, amelynek fókuszai az A és a B pontok.



90. A parabolatükör tükrözési tulajdonságai: Az alábbi ábrán az $y^2=4px$ parabola egy $P(x_0,y_0)$ pontja látható. Az L egyenes a parabola P pontbeli érintője. A parabola fókusza az $F(p,0)$ pont. A P pontból jobbra induló L' félegyenes párhuzamos az x-tengellyel. Látjuk, hogy az F-ből induló és P-ben visszaverődő fénysugár L' mentén halad tovább, s az α szög egyenlő a β szöggel. A szögegyenlőséget lássuk be az alábbi lépésekkel:

(a) Mutassuk meg, hogy $\operatorname{tg}\beta=2p/y_0$.

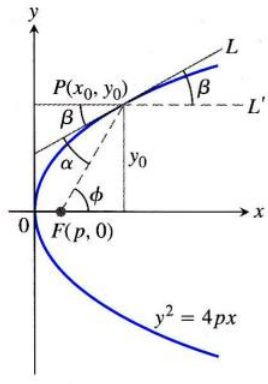
(b) Mutassuk meg, hogy $\phi=y_0/(x_0-p)$.

(c) A

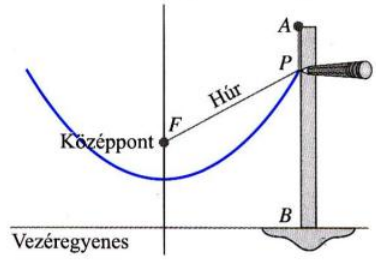
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\phi-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\phi\operatorname{tg}\beta}$$

azonosságot felhasználva mutassuk meg, hogy $\operatorname{tg}\alpha=2p/y_0$.

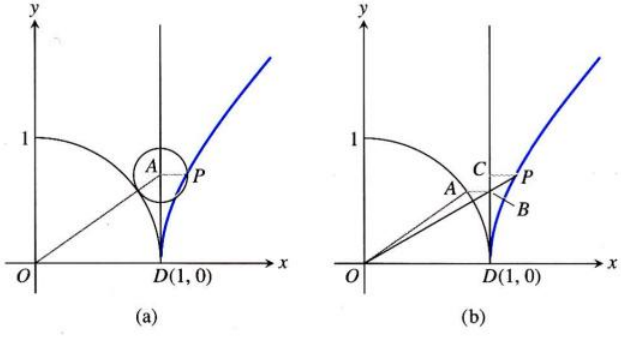
Mivel α és β hegyesszögek, a $\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha$ egyenlőségből következik, hogy $\alpha=\beta$.



91. Hogyan rajzolt parabolát Kepler fonal segítségével: Kepler parabolaszerkesztési eljárásához egy fejesvonalzóra, a fejesvonalzó szárával azonos hosszúságú zsinegre és egy asztallapra van szükség. Az asztal széle lesz a parabola vezéregyenese. Gombostűvel rögzítsük a zsineg egyik végét a parabola leendő fókuszpontjába, másik végét a fejesvonalzó szárának végéhez. Ezután a zsineget ceruzánkkal a vonalzó élénél folyamatosan feszesen tartva csúsztassuk a vonalzót az asztal éle mentén. A vonalzó mozgása közben a ceruza parabolát rajzol ki. Miért?



92. Hiperbola szerkesztése: Az alábbi rajz (betűjelek nélkül) először Ernest J. Eckert: „Construction without words" c. cikkében tűnt fel (*Mathematical Magazine*, Vol. 66, No. 2, Apr. 1993, p. 113). Értelmezzük ezt a szerkesztési eljárást oly módon, hogy felírjuk a P pont koordinátáit!



93. A parabola szélessége a fókuszpontnál: Mutassuk meg, hogy a $4p$ szám az $x^2=4py$ $(p>0)$ parabola fókuszponthoz tartozó *szélessége*, azaz mutassuk meg, hogy az $y=p$ egyenes két olyan pontban metszi a parabolát, amelyek egymástól $4p$ távolságra vannak.

94. Az $(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1$ hiperbola aszimptotái: Mutassuk meg, hogy az $(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1$ hiperbola jobb oldali ágának és az $y=(b/a)x$ egyenesnek a (függőleges) távolsága nullához tart, azaz igazoljuk a

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=0$$

egyenlőséget! Hasonló igaz a hiperbola másik ágára és az $y=\pm(b/a)x$ egyenesekre.

10.2. Kúpszeletek osztályozása excentricitásuk alapján

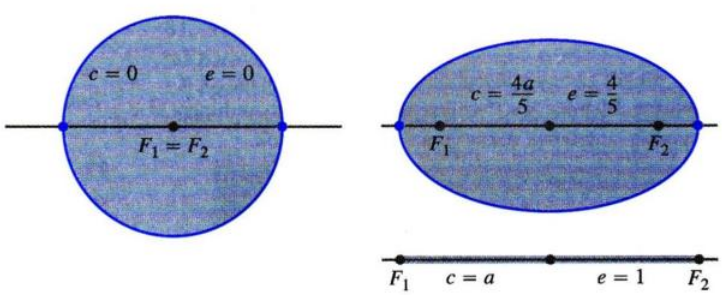
A továbbiakban látni fogjuk, hogyan társíthatunk a kúpszeletekhez egy-egy számértéket, amelyet a kúpszelet *excentricitás*ának nevezünk. Az excentricitás megmutatja, hogy adott esetben milyen típusú kúpszeletről van szó (körről, ellipszisről, paraboláról vagy hiperboláról), sőt az ellipszis és a hiperbola esetében a kúpszelet általános arányait is leírja.

Excentricitás

Bár az ellipszis

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad (a>b)$$

egyenletében nem szerepel a c, a középpont–fókusz távolság, az egyenletből kifejezhetjük ezt a mennyiséget: $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Ha a értékét rögzítjük, c értéke viszont változhat a $0 \le c \le a$ intervallumon belül, akkor az eredményül kapott ellipszis alakja is változni fog (10.17. ábra). Az ellipszis valójában kör a $c=0$ (azaz $a=b$) esetben, c növekedtével viszont egyre nyújtottabbá válik. A $c=a$ esetben a fókusz- és tengelypontok egybeesnek, az ellipszis pedig egyenes szakasszá fajul el. A c/a hányados az ellipszis alakjára jellemző mennyiség, amelyet az ellipszis excentricitásának nevezzük.



10.17. ÁBRA: Miközben c nullától a-ig nő, az ellipszis alakja a kör és az egyenes szakasz között változik.

DEFINÍCIÓ: Ellipszis excentricitása

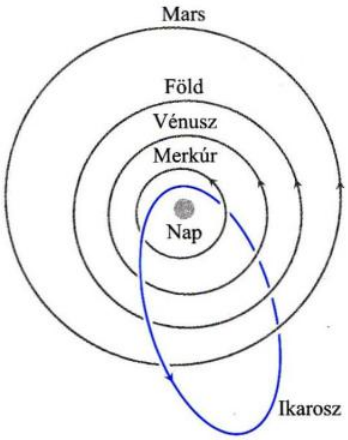
Az $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$ $(a>b)$ ellipszis excentricitása

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

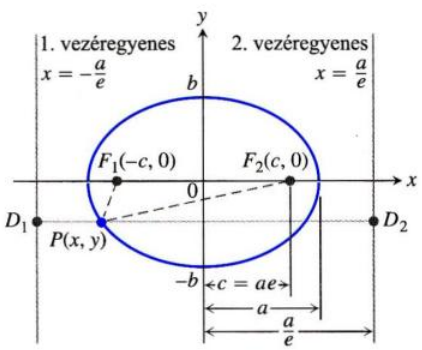
A Naprendszer bolygói (közelítőleg) ellipszispályán keringenek a Nap körül, amelyek egyik fókuszpontja a Nap. A pályák többsége majdnem kör, mint ahogy az a 10.2. táblázatban megadott excentricitásértékekből is látható. Valóban excentrikus pályán csak a Plútó ($e=0{,}25$) és a Merkúr kering ($e=0{,}21$).

Merkúr	0,21	Szaturnusz	0,06
Vénusz	0,01	Uránusz	0,05
Föld	0,02	Neptunusz	0,01
Mars	0,09	Plútó	0,25
Jupiter	0,05		

10.2. TÁBLÁZAT: Bolygópályák excentricitása.



10.18. ÁBRA: Az Ikarosz kisbolygó pályája erősen excentrikus. A földpálya oly kevéssé tér el a körtől, hogy fókuszai a Nap belsejébe esnek.



10.19. ÁBRA: Az $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ ellipszis fókuszai és vezéregyenesei. Az 1. vezéregyenes megfelelője az F_1 pont, a 2. vezéregyenesé az F_2 pont.

A Naprendszernek vannak olyan objektumai, amelyek pályája még inkább excentrikus. Az Ikarosz nevű kisbolygónak, amely 409 földi nap alatt kerüli meg a Napot, 0,83 a pályaexcentricitása (10.18. ábra).

1. PÉLDA: A Halley-üstökös

A Halley-üstökös pályája olyan ellipszis, amely hosszában 36,18 csillagászati egység, széltében pedig 9,12 csillagászati egység. (1 csillagászati egység [CSE] 149 597 870 km, a földpálya félnagytengelyének a hossza.) Az üstököspálya excentricitása:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{(36{,}18/2)^2 - (9{,}12/2)^2}}{(1/2)(36{,}18)} = \frac{\sqrt{(18{,}09)^2 - (4{,}56)^2}}{18{,}09} \approx 0{,}97.$$

□

Láttuk, hogy a parabolának egy fókusza és egy vezéregyenese van, az **ellipszis**nek viszont két fókusza és két **vezéregyenes**e. Ezek a vezéregyenesek merőlegesek az ellipszis főtengelyére és az ellipszis középpontjától $\pm a/e$ távolságra vannak. A parabolának megvan az a tulajdonsága, hogy bármely P pontjára fennáll a

$$PF = 1 \cdot PD \tag{10.12}$$

egyenlőség, ahol F a fókuszpont, D pedig a vezéregyenes P-hez legközelebb eső pontja. Meg lehet mutatni, hogy az ellipszis esetében két, a (10.12)-höz hasonló egyenlőség áll fenn:

$$PF_1 = e \cdot PD_1, \qquad PF_2 = e \cdot PD_2. \tag{10.13}$$

Itt e az excentricitás, P az ellipszis tetszőleges pontja, F_1 és F_2 a fókuszpontok, D_1 és D_2 pedig a vezéregyenesek P-hez legközelebb eső pontjai (10.19. ábra).

A fókusz és a direktrix (10.13) mindkét egyenletében megfelel egymásnak, azaz például a PF_1 szakaszhoz az a szakasz tartozik, amely P-t F_1-gyel azonos oldali vezéregyenessel köti össze. Az $x = -a/e$ vezéregyenes az $F_1(-c, 0)$ pontnak, az $x = a/e$ vezéregyenes az $F_2(c, 0)$ pontnak felel meg.

A hiperbola excentricitása szintén $e = c/a$, csak ebben az esetben c értéke $\sqrt{a^2 + b^2}$, és nem $\sqrt{a^2 - b^2}$. Az ellipszis excentricitásával ellentétben a hiperbola excentricitása mindig nagyobb 1-nél.

DEFINÍCIÓ: Hiperbola excentricitása

Az $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ hiperbola **excentricitása**

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Az ellipszisre és a hiperbolára egyformán igaz, hogy az excentricitás a fókuszok távolságának és a tengelypontok távolságának a hányadosa (mert $c/a = 2c/2a$).

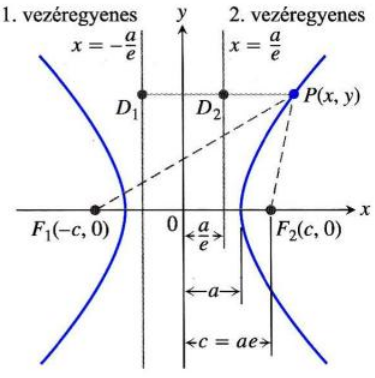
$$\text{excentricitás} = \frac{\text{a fókuszok távolsága}}{\text{a tengelypontok távolsága}}$$

Az ellipszis fókuszpontjai közelebb esnek egymáshoz, mint a tengelypontjai, ezért a hányados kisebb 1-nél. A hiperbola esetében a fókuszpontok távolabb vannak egymástól, mint a tengelypontok, így a hányados nagyobb 1-nél.

2. PÉLDA: Ellipszis tengelypontjai

Hol vannak a tengelypontjai annak az ellipszisnek, amelynek excentricitása 0,8, fókuszai pedig a $(0, \pm 7)$ pontok?

Megoldás: Mivel $e = c/a$, azok a $(0, \pm a)$ koordinátájú pontok lesznek a tengelypontok, amelyekre $a = \frac{c}{e} = \frac{7}{0{,}8} = 8{,}75$, vagyis $(0; \pm 8{,}75)$. □



10.20. ÁBRA: Az $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ hiperbola fókuszai és vezéregyenesei. A hiperbola P pontjának helyzetétől függetlenül igaz, hogy $PF_1 = e \cdot PD_1$ és $PF_2 = e \cdot PD_2$.

3. PÉLDA: **Hiperbola excentricitása**

Határozzuk meg a $9x^2 - 16y^2 = 144$ hiperbola excentricitását!

Megoldás: Először normálalakra hozzuk a hiperbola egyenletét oly módon, hogy mindkét oldalát elosztjuk 144-gyel:

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1, \text{ azaz } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

$a^2 = 16$ és $b^2 = 9$, tehát $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16+9} = 5$, és így

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}.$$ □

Be lehet látni, hogy – mint az ellipszisnél – az $x = \pm a/e$ egyenesek **a hiperbola vezéregyeneseiként** funkcionálnak és, hogy

$$PF_1 = e \cdot PD_1 \text{ és } PF_2 = e \cdot PD_2. \tag{10.14}$$

Itt P a hiperbola tetszőleges pontja, F_1, F_2 a fókuszai, D_1 és D_2 pedig a vezéregyenesek P-hez legközelebb eső pontjai (10.20. ábra).

A kép teljessé tétele érdekében a parabola excentricitását definíció szerint 1-nek vesszük: $e = 1$. Így a (10.12) és (10.14) egyenletekre a közös $PF = e \cdot PD$ alakot kapjuk.

DEFINÍCIÓ: **Parabola excentricitása**

A parabola **excentricitása** $e = 1$.

A $PF = e \cdot PD$ „fókusz–vezéregyenes egyenlőség" révén egységesen kezelhetjük a háromféle kúpszeletet, az ellipszist, a parabolát és a hiperbolát, mégpedig a következő módon. Tegyük fel, hogy egy P pont PF távolsága egy rögzített F ponttól (a fókusztól) a P rögzített egyenestől (a vezéregyenestől) vett távolságának a konstansszorosa. Azaz tegyük fel, hogy

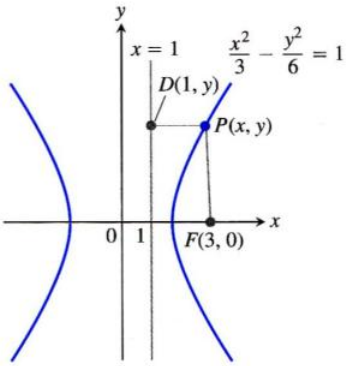
$$PF = e \cdot PD, \tag{10.15}$$

ahol e az arányossági állandó. Ekkor a P pont által leírt pálya

1. *parabola*, ha $e = 1$,
2. *ellipszis*, ha $e < 1$ és
3. *hiperbola*, ha $e > 1$.

A (10.15) egyenlőségben nem szerepelnek koordináták, s ha átírjuk koordináta-alakba, a kapott egyenlet alakja e nagyságától függ. Legalább is ez a helyzet a Descartes-koordinátákkal. Polárkoordinátákban azonban – mint a 10.8. alfejezetben látni fogjuk – ez az egyenlet az e értékétől függetlenül továbbra is egyetlen egyszerű egyenlet marad, ezért aztán a csillagászok és az űrkutatók már vagy 300 éve a kúpszeletek egyenletét polárkoordinátákban írják fel.

Ha egy hiperbola középpontja az origóban van, fókuszai pedig az x-tengelyen, és meg van adva az egyik fókusz és a neki megfelelő vezéregyenes, akkor e-t meghatározhatjuk a 10.20. ábrán látható mennyiségből. e ismeretében a $PF = e \cdot PD$ összefüggésből már le tudjuk vezetni a hiperbola Descartes-koordinátarendszerre vonatkozó egyenletét, amint azt a következő példában látni fogjuk. Hasonló módon le tudjuk vezetni a 10.19. ábrán látható mennyiségekből az olyan ellipsziseknek az egyenletét, amelyek középpontja az origóban van, fókuszai pedig az x-tengelyen.



10.21. ÁBRA: A 4. példában szereplő hiperbola és vezéregyenese.

4. PÉLDA: **A hiperbola egyenlete Descartes-koordinátákban**

Vezessük le annak a hiperbolának a Descartes-koordinátás egyenletét, amelynek centruma a koordináta-rendszer kezdőpontja, egyik fókuszpontja a $(3,0)$ pont, s ennek a fókusznak megfelelő vezéregyenes az $x = 1$ egyenes.

Megoldás: Először is a hiperbola excentricitását számoljuk ki a 10.20. ábrán szereplő mennyiségek segítségével. A fókusz

$$(c,0) = (3,0), \text{ így } c = 3.$$

A vezéregyenes

$$x = \frac{a}{e} = 1, \text{ így } a = e.$$

Ezeket az értékeket az excentricitás definíciójába behelyettesítve kapjuk, hogy

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{e}, \quad \text{így} \quad e^2 = 3 \quad \text{és} \quad e = \sqrt{3}.$$

e ismeretében a kívánt egyenlőséget most már megkapjuk a $PF = e \cdot PD$ egyenlőségből. A 10.21. ábra jelöléseivel:

$$\begin{aligned} PF &= e \cdot PD \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} &= \sqrt{3}|x-1| \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 &= 3(x^2 - 2x + 1) \\ 2x^2 - y^2 &= 6 \\ \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} &= 1. \end{aligned}$$

□

10.2. Feladatok

Ellipszisek

Az 1–8. feladatokban először az ellipszis excentricitását kell meghatároznunk. Azután határozzuk meg és ábrázoljuk is a fókuszokat és a vezéregyeneseket!

1. $16x^2 + 25y^2 = 400$

2. $7x^2 + 16y^2 = 112$

3. $2x^2 + y^2 = 2$

4. $2x^2 + y^2 = 4$

5. $3x^2 + 2y^2 = 6$

6. $9x^2 + 10y^2 = 90$

7. $6x^2 + 9y^2 = 54$

8. $169x^2 + 25y^2 = 4225$

A 9–12. feladatokban az xy-sík néhány origó középpontú ellipszisének fókuszait vagy tengelypontjait és excentricitását adtuk meg. Írjuk fel az ellipszisek normálegyenletét!

9. Fókuszok: $(0, \pm 3)$
Excentricitás: 0,5

10. Fókuszok: $(\pm 8, 0)$
Excentricitás: 0,2

11. Tengelypontok: $(0, \pm 70)$
Excentricitás: 0,1

12. Tengelypontok: $(\pm 10, 0)$
Excentricitás: 0,24

A 13–16. feladatokban az xy-sík néhány origó középpontú ellipszisének fókuszát és a neki megfelelő vezéregyenest adtuk meg. A 10.19. ábrán szerepeltetett menyiségek felhasználásával határozzuk meg az egyes ellipszisek excentricitását! Azután írjuk fel az ellipszisek egyenletét normálalakban!

13. Fókusz: $(\sqrt{5}, 0)$
Vezéregyenes: $x = \frac{9}{\sqrt{5}}$

14. Fókusz: $(4, 0)$
Vezéregyenes: $x = \frac{16}{3}$

15. Fókusz: $(-4, 0)$
Vezéregyenes: $x = -16$

16. Fókusz: $(-\sqrt{2}, 0)$
Vezéregyenes: $x = -2\sqrt{2}$

17. Rajzoljunk egy 4/5 excentricitású ellipszist! Indokoljuk eljárásunkat!

18. Rajzoljuk fel méretarányosan a Plútó pályáját (excentricitása 0,25). Indokoljuk eljárásunkat!

19. Egy ellipszis félnagy- és félkistengelyének végpontjai az $(1,1)$, $(3,4)$, $(1,7)$ és $(-1,4)$ pontok. Vázoljuk fel az ellipszist, adjuk meg normálegyenletét, határozzuk meg fókuszpontjait, excentricitását és vezéregyeneseit!

20. Írjuk fel annak az ellipszisnek az egyenletét, amelynek excentricitása 2/3, egyik vezéregyenese az $x = 9$ egyenes, s az ennek megfelelő fókusza a $(4,0)$ pont.

21. Milyen a, b és c értékek mellett teljesül, hogy a

$$4x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

ellipszisnek origóbeli érintője az x-tengely, és az ellipszis átmegy a $(-1,2)$ ponton?

22. Az ellipszis tükrözési tulajdonsága: Az ellipszist nagytengelye körül megforgatva egy ellipszoidot kapunk. Az ellipszoid belsejét befoncsorozva egy tükröt kapunk. Mutassuk meg, hogy a fókuszból kiinduló fénysugár a másik fókuszpontba verődik vissza. A hanghullámok ugyanilyen utat járnak be, s az ellipszistükörnek ezt a tulajdonságát használják ki az ún. „suttogószobák" építésekor. (*Útmutatás:* Pozícionáljuk az ellipszist az xy-síkon a szokásos módon és mutassuk meg, hogy az ellipszis P pontját a fókuszpontokkal összekötő szakaszok azonos szöget zárnak be az ellipszis P pontbeli érintőjével.)

Hiperbolák

A 23–30. feladatokban a hiperbola excentricitását kell meghatározni. Azután számítsuk ki és rajzoljuk fel a fókuszpontokat és a vezéregyeneseket!

23. $x^2 - y^2 = 1$

24. $9x^2 - 16y^2 = 144$

25. $y^2 - x^2 = 8$

26. $y^2 - x^2 = 4$

27. $8x^2 - 2y^2 = 16$

28. $y^2 - 3x^2 = 3$

29. $8y^2 - 2x^2 = 16$

30. $64x^2 - 36y^2 = 2304$

A 31–34. feladatokban az xy-sík néhány origó középpontú hiperbolájának excentricitását és fókuszait vagy tengelypontjait adtuk meg. Írjuk fel a hiperbolák normálegyenletét!

31. Excentricitás: 3
Tengelypontok: $(0, \pm 1)$

32. Excentricitás: 2
Tengelypontok: $(\pm 2, 0)$

33. Excentricitás: 3
Fókuszok: $(\pm 3, 0)$

34. Excentricitás: 1,25
Fókuszok: $(0, \pm 5)$

A 35–38. feladatokban az xy-sík néhány origó középpontú hiperbolájának fókuszát és a neki megfelelő vezéregyenest adtuk meg. Határozzuk meg az egyes hiperbolák excentricitását! Azután írjuk fel a hiperbolaegyenletet normálalakban!

35. Fókusz: $(4, 0)$
Vezéregyenes: $x = 2$

36. Fókusz: $(\sqrt{10}, 0)$
Vezéregyenes: $x = \sqrt{2}$

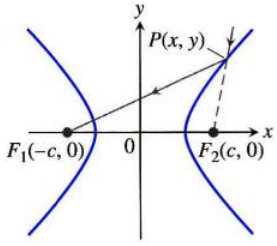
37. Fókusz: $(-2, 0)$
Vezéregyenes: $x = -\frac{1}{2}$

38. Fókusz: $(-6, 0)$
Vezéregyenes: $x = -2$

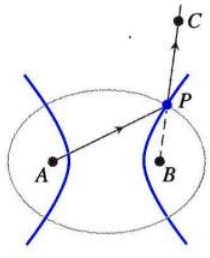
39. Egy 3/2 excentricitású hiperbola egyik fókusza az $(1, -3)$ pont. A megfelelő vezéregyenes az $y = 2$ egyenes. Írjuk fel a hiperbola egyenletét!

40. Az excentricitás hatása a hiperbola alakjára: Mi történik a hiperbola grafikonjával, ha megnöveljük az excentricitását? Ezt derítsük ki oly módon, hogy a hiperbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ egyenletét átírjuk olyan alakba, amely a és b helyett az a és e paramétereket tartalmazza. Ábrázoljuk a hiperbolát különféle e értékek mellett és vizsgáljuk meg, hogyan változik a grafikon alakja!

41. A hiperbola tükrözési tulajdonsága: Mutassuk meg, hogy az egyik fókusz irányába menő fénysugár a hiperbolikus tükrön visszaverődve – ahogy a mellékelt ábrán is látható – a másik fókusz felé tart! (*Útmutatás:* Mutassuk meg, hogy a hiperbola P pontjához húzott érintő felezi a PF_1 és PF_2 szakaszok által közbezárt szöget.)



42. Konfokális ellipszis és hiperbola: Mutassuk meg, hogy ha – mint az a mellékelt ábrán látható – egy ellipszisnek és egy hiperbolának ugyanaz az A és B pontok a fókuszai, akkor derékszögben metszik egymást! (*Útmutatás:* Az A pontból jövő fénysugár, amely a hiperbolát a P pontban éri el, úgy tükröződik vissza, mintha csak közvetlenül a B pontból érkezne. Ugyanez a fénysugár az ellipszisről visszatükröződve a B ponton halad át.)

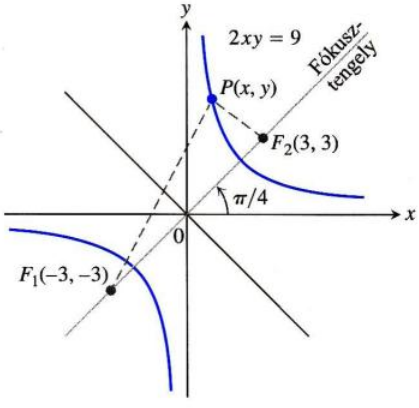


10.3. Másodfokú egyenletek és forgatások

Ebben az alfejezetben tetszőleges

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{10.16}$$

kifejezés grafikonját fogjuk vizsgálni, ahol A, B és C nem lehet egyszerre mind nulla, és meg fogjuk mutatni, hogy ezek a görbék csaknem mindig kúpszeletek. Kivételt képeznek azok az esetek, amikor egyáltalán nem létezik a grafikon, vagy az két párhuzamos egyenesből áll. A (10.16) egyenlet grafikonját, akár görbe, akár nem, *másodfokú vagy kvadratikus görbé*nek szokás nevezni.



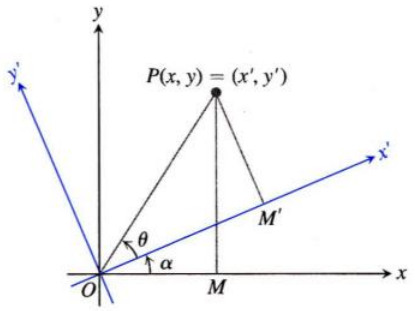
10.22. ÁBRA: A $2xy = 9$ hiperbola fókusztengelye $\pi/4$ radián szöget zár be az x-tengely pozitív felével.

Vegyes tagot tartalmazó kifejezés

Talán észrevették, hogy a Bxy tényező a 10.1. alfejezetbeli kúpszelet-egyenletekben nem fordult elő. Ez azért van, mert a kúpszeletek tengelyei párhuzamosak voltak (valójában egybe is estek) a koordinátatengelyekkel.

Hogy lássuk mi történik akkor, ha ez a párhuzamosság nem áll fenn, írjuk fel annak a hiperbolának az egyenletét, amelyre $a = 3$, fókuszai pedig az $F_1(-3, -3)$ és $F_2(3, 3)$ pontok. A $|PF_1 - PF_2| = 2a$ egyenlőség esetünkben azt adja, hogy $|PF_1 - PF_2| = 2 \cdot 3 = 6$, és

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+3)^2} - \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} = \pm 6.$$



10.23. ÁBRA: A kezdőpont körüli, α szögű, az óramutató járásával ellenkező irányú forgatás.

Ezt az egyenletet azonos átalakításokkal a

$$2xy = 9 \tag{10.17}$$

alakra hozhatjuk, s ez már a (10.16) egyenletnek olyan speciális alakja, amelyben csak vegyes tag szerepel. A (10.17) hiperbola aszimptotái az x- és az y-tengely, a fókuszait összekötő egyenes pedig $\pi/4$ radián szöget zár be az x-tengely pozitív felével. Akárcsak ebben a példában, általában is igaz, hogy a (10.16) egyenletben csak akkor fordul elő a vegyes tag, ha a kúpszelet tengelyei dőlnek a koordinátatengelyekhez képest.

Ha a kúpszelet egyenletéből el akarjuk tüntetni az xy típusú kifejezést, a koordinátatengelyek elforgatásával meg kell szüntetnünk a kúpszelet tengelyeinek dőlését. A forgatást megadó egyenletekhez a következőképpen juthatunk el. A 10.23. ábra egy kezdőpont körüli, α szögű, az óramutató járásával ellenkező irányú forgatást mutat. Az ábra jelöléseivel:

$$\begin{aligned} x &= OM = OP\cos(\theta+\alpha) = OP\cos\theta\cos\alpha - OP\sin\theta\sin\alpha, \\ y &= MP = OP\sin(\theta+\alpha) = OP\cos\theta\sin\alpha + OP\sin\theta\sin\alpha. \end{aligned} \tag{10.18}$$

Mivel

$$OP\cos\theta = OM' = x'$$

és

$$OP\sin\theta = M'P = y',$$

ezért (10.18) a következő alakra redukálódik:

A régi és az új koordináták közötti összefüggés

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned} \tag{10.19}$$

1. PÉLDA: **Hiperbola egyenlete**

Az x- és az y-tengelyeket $\pi/4$ szöggel elforgatjuk az origó körül. Írjuk fel az új koordinátákban a $2xy = 9$ hiperbola egyenletét!

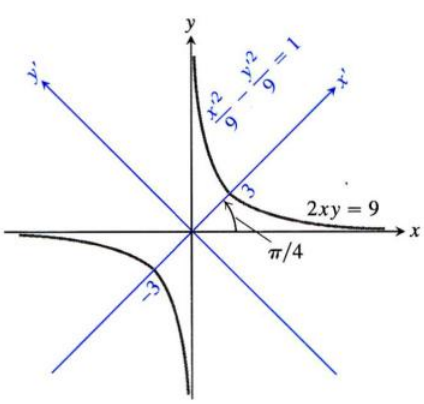
Megoldás: Mivel $\cos\pi/4 = \sin\pi/4 = 1/\sqrt{2}$, a (10.19) egyenletekből az

$$x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$$

kifejezéseket kell behelyettesítenünk a $2xy = 9$ egyenletbe, és így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) &= 9 \\ x'^2 - y'^2 &= 9 \\ \frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{9} &= 1. \end{aligned}$$

Lásd a 10.24. ábrát. □



10.24. ÁBRA: Az 1. példában szereplő hiperbola (a koordináták x' és y').

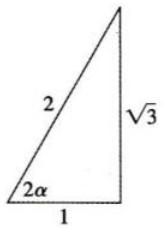
Ha (10.19)-et a (10.16) kvadratikus egyenletre alkalmazzuk, egy újabb kvadratikus egyenletet kapunk:

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0. \tag{10.20}$$

Az új és a régi együtthatókat az

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\alpha + B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha \\ B' &= B\cos 2\alpha + (C-A)\sin 2\alpha \\ C' &= A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha \\ D' &= D\cos\alpha + E\sin\alpha \\ E' &= -D\sin\alpha + E\cos\alpha \\ F' &= F \end{aligned} \tag{10.21}$$

egyenletek kapcsolják össze.



10.25. ÁBRA: E háromszög alapján $2\alpha = \operatorname{ctg}^{-1}(1/\sqrt{3}) = \pi/3$ (2. példa).

Ezek az egyenletek egyebek között azt mutatják, hogy ha adva van egy olyan görbeegyenlet, amely tartalmaz vegyes tagot ($B \neq 0$), akkor meg tudunk adni egy olyan α forgatási szöget, amelynek eredménye egy vegyes tagot nem tartalmazó egyenlet lesz ($B' = 0$). Az α szöget úgy határozhatjuk meg, hogy (10.21) második egyenletében B'-t nullával tesszük egyenlővé, és a

$$B\cos 2\alpha + (C - A)\sin 2\alpha = 0$$

egyenletet megoldjuk α-ra. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy α-t az alábbi két egyenlet valamelyikéből határozzuk meg:

A forgatás szöge

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{B} \quad \text{vagy} \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{B}{A - C}. \tag{10.22}$$

2. PÉLDA: **A forgatási szög meghatározása**

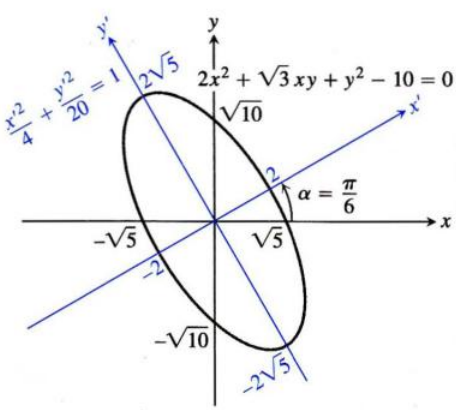
α szöggel el kell forgatnunk a koordinátatengelyeket annak érdekében, hogy a

$$2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 - 10 = 0$$

görbeegyenletből eliminálju k a vegyes tagot. Határozzuk meg α értékét és az új görbeegyenletet! Azonosítsuk a görbét!

Megoldás: A $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 - 10 = 0$ egyenlet esetében $A = 2$, $B = \sqrt{3}$ és $C = 1$. Ezeket az értékeket helyettesítsük be a (10.22) egyenletbe:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{B} = \frac{2 - 1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



10.26. ÁBRA: A 2. példában megadott kúpszelet.

A 10.25. ábra derékszögű háromszögéből látható, hogy az alkalmas választás a $2\alpha = \pi/3$ érték, azaz $\alpha = \pi/6$. A (10.21) egyenletbe behelyettesítve az $\alpha = \pi/6$, $A = 2$, $B = \sqrt{3}$, $C = 1$, $D = E = 0$ és $F = -10$ értékeket kapjuk, hogy

$$A' = \frac{5}{2}, \quad B' = 0, \quad C' = \frac{1}{2}, \quad D' = E' = 0, \quad F' = -10.$$

A (10.20) egyenlet ekkor azt adja, hogy

$$\frac{5}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 - 10 = 0 \quad \text{vagy} \quad \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{20} = 1.$$

A görbe ellipszis, fókuszai az új y'-tengelyen vannak rajta (10.26. ábra). □

A másodfokú egyenletek grafikonja

Most térjünk vissza az általános másodfokú egyenlet grafikonjához!

Mivel a koordinátatengelyek elforgatásával az egyenletből mindig ki lehet küszöbölni a vegyes tagot, nem jelenti az általánosság megszorítását, ha csupán az

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{10.23}$$

alakú egyenleteket vesszük figyelembe.

A (10.23) egyenlet az alábbi alakzatokat reprezentálhatja:

1. *kör*, ha $A = C \neq 0$ (speciális esetek: a grafikon egy pontból áll, vagy nem is létezik);

2. *parabola*, ha a (10.23) egyenlet kvadratikus az egyik és lineáris a másik változóban;

3. *ellipszis*, ha A és C egyszerre negatív vagy pozitív (speciális eset: kör, pont vagy üres halmaz);

	A	B	C	D	E	F	Egyenlete	Megjegyzés
kör	1		1			−4	$x^2+y^2=4$	$A=C, F<0$
parabola			1	−9			$y^2=9x$	kvadratikus y-ban, lineáris x-ben
ellipszis	4		9			−36	$4x^2+9y^2=36$	A, C előjele megegyezik, $A\neq C$, $F<0$
hiperbola	1		−1			−1	$x^2-y^2=1$	A, C előjele ellentétes
egyenes (még kúpszelet)	1						$x^2=0$	y-tengely
metsző egyenesek (még kúpszelet)		1		1	−1	−1	$xy+x-y-1=0$	szorzatalakban: $(x-1)(y+1)=0$, így $x=1, y=-1$
párhuzamos egyenesek (nem kúpszelet)	1			−3		2	$x^2-3x+2=0$	szorzatalakban: $(x-1)(x-2)=0$, így $x=1, y=2$
pont	1		1				$x^2+y^2=0$	az origó
nincs grafikon	1					1	$x^2=-1$	nincs grafikon

10.3. TÁBLÁZAT: Példák az $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ kvadratikus görbére.

4. *hiperbola*, ha A és C ellentétes előjelűek (speciális eset: két egymást metsző egyenes);

5. *egyenes*, ha A és C nulla, valamint D és E közül legalább az egyik különbözik nullától;

6. *egy vagy két egyenes*, ha a (10.23) egyenlet bal oldalát fel lehet írni két lineáris tényező szorzataként.

A 10.3. táblázat a fenti esetekre mutat példákat.

A diszkrimináns vizsgálata

Az

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{10.24}$$

egyenletből nem feltétlenül szükséges eliminálni az xy-os tagot ahhoz, hogy meg tudjuk mondani, milyen kúpszeletfajtával van dolgunk. Ha csupán erre az információra van szükségünk, akkor elegendő az alábbi tesztet elvégeznünk.

Mint láttuk, a $B\neq 0$ esetben egy olyan α szöggel elforgatva a koordinátatengelyeket, amely kielégíti a

$$\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{A-C}{B} \tag{10.25}$$

egyenlőséget, a (10.25) az

$$A'x'^2+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0 \tag{10.26}$$

alakot veszi fel, amely az eredetivel ekvivalens, de már nem tartalmaz vegyesszorzatot.

A (10.26) egyenlet grafikonja (valódi vagy degenerált)

1. *parabola*, ha A' vagy $C'=0$, azaz $A'C'=0$;

2. *ellipszis*, ha A'-nek és C'-nek ugyanaz az előjele, azaz $A'C'>0$;

3. *hiperbola*, ha A'-nek és C'-nek ellentétes az előjele, azaz $A'C'<0$;

A (10.21) egyenlőség alapján azt is be lehet látni, hogy tetszőleges forgásszög esetén teljesül

$$B^2-4AC=B'^2-4A'C'. \tag{10.27}$$

Ez azt jelenti, hogy a B^2-4AC mennyiség a forgatás során nem változik. Ám ha a (10.25) egyenlettel megadott α szöggel forgatunk, akkor B' nulla lesz, s így

$$B^2-4AC=-4A'C'.$$

Mivel a görbe $A'C'=0$ esetén parabola, $A'C'>0$ esetén ellipszis és $A'C'<0$ esetén pedig hiperbola, ebből az következik, hogy $B^2-4AC=0$ esetben a görbe szükségképpen parabola, $B^2-4AC<0$ esetben ellipszis és $B^2-4AC>0$ esetben hiperbola. A B^2-4AC kifejezést a (10.24) egyenlet **diszkriminánsának** nevezzük.

A diszkrimináns vizsgálata

Az időnként előálló elfajult eseteket is megengedve az $Ax^2+Bxy+Cy^2+$ $+Dx+Ey+F=0$ kvadratikus görbe

1. **parabola**, ha $B^2-4AC=0$,
2. **ellipszis**, ha $B^2-4AC<0$,
3. **hiperbola**, ha $B^2-4AC>0$.

3. PÉLDA: **A diszkrimináns-teszt alkalmazása**

1. A $3x^2-6xy+3y^2+2x-7=0$ egyenlet parabola egyenlete, mert
$$B^2-4AC=(-6)^2-4\cdot 3\cdot 3=36-36=0.$$
2. Az $x^2+xy+y^2-1=0$ egyenlet ellipszis egyenlete, mert
$$B^2-4AC=1^2-4\cdot 1\cdot 1=-3<0.$$
3. Az $xy-y^2-5y+1=0$ egyenlet hiperbola egyenlete, mert
$$B^2-4AC=1^2-4\cdot 0\cdot(-1)=1>0.$$

□

Hogyan számolja ki a kalkulátor a szinusz és a koszinusz értékét forgatás segítségével?

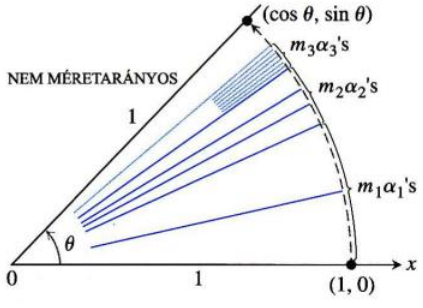
Egyes kalkulátorokban forgatásokat használnak szögek szinuszának és koszinuszának kiszámítására. Az eljárás vázlatosan a következő: a kalkulátor eltárol

1. mintegy tíz szöget, mondjuk az
$$\alpha_1=\arcsin(10^{-1}),\quad \alpha_2=\arcsin(10^{-2}),\quad \ldots\alpha_{10}=\arcsin(10^{-10})$$
szögeket és
2. húsz számot, az α_1, α_2, …, α_{10} szögek szinuszát és koszinuszát.

Egy tetszőleges θ szög szinuszának és koszinuszának kiszámításához először beütjük a kalkulátorba a szög értékét (radiánban). Ehhez a kalkulátor hozzáadja 2π egész számú többszörösét azért, hogy a szög értéke 0 és 2π közé essék. (Valamely szöghöz 2π egész számú többszörösét hozzáadva a szinusz és a koszinusz értéke nem változik, ezért a szöget továbbra is θ-nak nevezzük.) Ezután a kalkulátor (túlcsordulás nélkül) „felírja" θ-t az $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{10}$ szögek többszöröseinek összegeként, azaz

$$\theta\approx m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+\cdots+m_{10}\alpha_{10}$$

alakban. Ezt követően az $(1,0)$ pontot elforgatja a kezdőpont körül először $m_1\alpha_1$, majd $m_2\alpha_2$ és így tovább, végül pedig $m_{10}\alpha_{10}$ szöggel (10.27. ábra). Az $(1,0)$ pont végső pozíciójának koordinátáit adja meg a gép $(\cos\theta,\sin\theta)$ értékeként.



10.27. ÁBRA: Egy 0 és 2π közé eső θ szög szinuszának és koszinuszának kiszámításához a kalkulátor egy egységsugarú kör mentén az alkalmas helyzetbe forgatja az $(1,0)$ pontot, s annak koordinátáit adja meg szinusz- és koszinuszérték gyanánt.

10.3. Feladatok

A diszkrimináns alkalmazása

A $B^2 - 4AC$ diszkrimináns segítségével döntsük el, hogy az 1–16. feladatokban szereplő egyenletek parabola-, ellipszis- vagy hiperbolaegyenletek!

1. $x^2 - 3xy + y^2 - x = 0$

2. $3x^2 - 18xy + 27y^2 - 5x + 7y = -4$

3. $3x^2 - 7xy + \sqrt{17}y^2 = 1$

4. $2x^2 - \sqrt{15}xy + 2y^2 + x + y = 0$

5. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - y + 2 = 0$

6. $2x^2 - y^2 + 4xy - 2x + 3y = 6$

7. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 3x = 6$

8. $x^2 + y^2 + 3x - 2y = 10$

9. $xy + y^2 - 3x = 5$

10. $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12$

11. $3x^2 - 5xy + 2y^2 - 7x - 14y = -1$

12. $2x^2 - 4{,}9xy + 3y^2 - 4x = 7$

13. $x^2 - 3xy + 3y^2 + 6y = 7$

14. $25x^2 + 21xy + 4y^2 - 350x = 0$

15. $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y + 2 = 0$

16. $3x^2 + 12xy + 12y^2 + 435x - 9y + 72 = 0$

A koordinátatengelyek elforgatása

A 17–26. feladatokban forgassuk el a koordinátatengelyeket úgy, hogy az új egyenlet már ne tartalmazzon vegyes tagot. Ezután ábrázoljuk a görbéket. (Az egyenletek alakja más és más lehet aszerint, hogy milyen irányú és mértékű forgatást alkalmaztunk.)

17. $xy = 2$ **18.** $x^2 + xy + y^2 = 1$

19. $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 8x + 8\sqrt{3}y = 0$

20. $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 1$ **21.** $x^2 - 2xy + y^2 = 2$

22. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 = 1$

23. $\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}xy + \sqrt{2}y^2 - 8x + 8y = 0$

24. $xy - y - x + 1 = 0$

25. $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 19$

26. $3x^2 + 4\sqrt{3}xy - y^2 = 7$

27. Számítsuk ki annak az első síknegyedbeli szögnek a szinuszát és koszinuszát, amellyel el kell forgatni a koordinátatengelyeket ahhoz, hogy a

$$14x^2 + 16xy + 2y^2 - 10x + 26\,370y - 17 = 0$$

egyenletből eltűnjön a vegyes tag! A forgatást már ne végezzük el!

28. Számítsuk ki annak az első síknegyedbeli szögnek a szinuszát és koszinuszát, amellyel el kell forgatni a koordinátatengelyeket ahhoz, hogy a

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{y} = 0$$

egyenletből eltűnjön a vegyes tag! A forgatást már ne végezzük el!

T A 17–26. feladatokban a kúpszeletegyenletekben lévő vegyesszorzatok eltűntetéséhez választandó szögek „kellemesek" voltak abban az értelemben, hogy ha már egyszer ismertük $\operatorname{ctg} 2\alpha$ vagy $\operatorname{tg} 2\alpha$ értékét, akkor könnyen ki tudtuk számolni 2α-t, majd $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ értékét.

A 29–34. feladatokban kalkulátor segítségével határozzuk meg annak a szögnek a nagyságát, amellyel el kell forgatni a koordinátatengelyeket, hogy a kvadratikus egyenletből eltűnjön a vegyes tag. Azután két tizedes jegyre határozzuk meg $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ értékét, majd a (10.21) egyenletet felhasználva határozzuk meg az új egyenlet együtthatóinak kerekített értékét! Minden esetben döntsük el azt is, hogy az illető kúpszelet ellipszis, hiperbola vagy parabola!

29. $x^2 - xy + 3y^2 + x - y - 3 = 0$

30. $2x^2 + xy - 3y^2 + 3x - 7 = 0$

31. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5 = 0$

32. $2x^2 - 12xy + 18y^2 - 49 = 0$

33. $3x^2 + 5xy + 2y^2 - 8y - 1 = 0$

34. $2x^2 + 7xy + 9y^2 + 20x - 86 = 0$

Elmélet példákkal

35. Milyen hatással van a következő kúpszeletegyenletekre a 90°-os elforgatás? Adjuk meg az új egyenleteket!

(a) $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ $(a > b)$ ellipszis

(b) $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ hiperbola

(c) $x^2 + y^2 = a^2$ kör

(d) $y = mx$ egyenes

(e) $y = mx + b$ egyenes.

36. Milyen hatással van a következő kúpszeletegyenletekre a 180°-os elforgatás? Adjuk meg az új egyenleteket!

(a) $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ $(a > b)$ ellipszis

(b) $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ hiperbola

(c) $x^2 + y^2 = a^2$ kör

(d) $y = mx$ egyenes

(e) $y = mx + b$ egyenes.

37. Az $xy = a$ egyenletű hiperbola: Az $xy = 1$ hiperbola csupán egyike a tudományban és a matematikában gyakran feltűnő $xy = a$ egyenletű hiperboláknak

(a) Forgassuk el 45°-os szöggel a koordinátatengelyeket azért, hogy az $xy = 1$ egyenlet ne tartalmazzon vegyes tagot! Mi lesz az új egyenlet?

(b) Végezzük el ugyanezt az $xy = a$ egyenlettel is!

38. Határozzuk meg az $xy = 2$ egyenletű hiperbola excentricitását!

39. Mondhatunk-e bármit is az $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ egyenlet grafikonjáról, ha $AC < 0$? Válaszunkat indokoljuk!

40. Elfajult kúpszeletek: Az $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ egyenletű kúpszeletek között van-e olyan, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(a) Szimmetrikus az origóra.

(b) Átmegy a $(1,0)$ ponton.

(c) A $(-2,1)$ pontban érintője az $y=1$ egyenes.

Válaszunkat indokoljuk!

41. Mutassuk meg, hogy tetszőleges α szögű (10.19) forgatás esetén az $x^2+y^2=a^2$ egyenlet az $x'^2+y'^2=a^2$ alakot ölti!

42. Mutassuk meg, hogy a tengelyek $\pi/4$ szöggel való elforgatása eltünteti az xy-os tagot a (10.16) egyenletből, ha $A=C$.

43. **(a)** Döntsük el, hogy az

$$x^2+4xy+4y^2+6x+12y+9=0$$

egyenlet ellipszist, parabolát vagy hiperbolát reprezentál!

(b) Mutassuk meg, hogy a feladat (a) részében szereplő egyenlet grafikonja a $2y=-x-3$ egyenes!

44. **(a)** Döntsük el, hogy az

$$9x^2+6xy+y^2-12x-4y+4=0$$

egyenlet ellipszist, parabolát vagy hiperbolát reprezentál!

(b) Mutassuk meg, hogy a feladat (a) részében szereplő egyenlet grafikonja az $y=-3x+2$ egyenes!

45. **(a)** Milyen kúpszelet az $xy+2x-y=0$ görbe?

(b) Oldjuk meg y-ra az $xy+2x-y=0$ egyenletet és ábrázoljuk a görbét mint x racionális függvényének grafikonját!

(c) Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az $y=-2x$ egyenessel és merőleges a görbére abban a pontban, ahol metszi. Ezt az egyenest is tüntessük fel ábránkon!

46. A következő állítások az $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ görbe grafikonjára vonatkoznak. Bizonyítsuk be az állítást vagy adjunk rá ellenpéldát!

(a) Ha $AC>0$, akkor a grafikon ellipszis.

(b) Ha $AC>0$, akkor a grafikon hiperbola.

(c) Ha $AC<0$, akkor a grafikon hiperbola.

47. **Egy szép összefüggés az ellipszis területére:** Ha a B^2-4AC mennyiség negatív, akkor az

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=1$$

egyenlet ellipszist reprezentál. Ha az ellipszis féltengelyei a és b, akkor területe πab (ez a közismert területképlet). Mutassuk meg, hogy a területet a $2\pi/\sqrt{4AC-B^2}$ formula is megadja! (*Útmutatás:* Forgassuk el a koordinátatengelyeket, s ezzel eliminálják az xy-tagot, majd alkalmazzuk az új egyenletre (10.27)-t.)

48. **Más invariánsok:** Azt a tényt, hogy B^2-4AC értéke a koordinátatengelyek elforgatásával nem változik úgy is kifejezhetjük, hogy a kvadratikus egyenletek diszkriminánsa az egyenleteknek egy *invariánsa*. (10.21) segítségével mutassuk meg, hogy az **(a)** $A+C$ és **(b)** D^2+E^2 mennyiségek szintén invariánsok abban az értelemben, hogy

$$A'+C'=A+C \text{ és } D'^2+E'^2=D^2+E^2.$$

Ezeket az összefüggéseket arra is felhasználhatjuk, hogy ellenőrizzük: a tengelyek elforgatása során nem vétettünk-e számolási hibát.

49. **A $B^2-4AC=B'^2-4A'C'$ egyenlőség igazolása:** (10.21) segítségével mutassuk meg, hogy $B^2-4AC=B'^2-4A'C'$ a koordinátatengelyeknek az origó körüli bármely elforgatására igaz!

10.4. Kúpszeletek és paraméteres egyenletek, a ciklois

A paraméteres egyenlettel definiált Descartes-síkbeli görbékkel, deriváltjuk kiszámításával már foglalkoztunk a 3.5. alfejezetben. Ott egyenesek, körök és ellipszisek paraméterezését tárgyaltuk. Ebben az alfejezetben a parabola, a hiperbola, a ciklois, a brachisztochron és a tautochron paraméterezéséről lesz szó.

Parabola és hiperbola

A 3.5. alfejezetben az $y=x^2$ parabola jobb oldali ága mentén végigfutó részecske mozgásának leírására az

$$x=\sqrt{t}, \quad y=t, \quad t>0$$

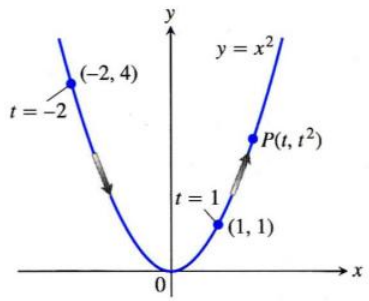
paraméterezését használtuk. A következő példában a parabola egészét fogjuk megadni paraméteres alakban.

1. PÉLDA: **Teljes parabolaív**

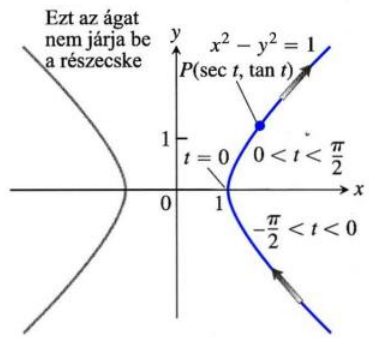
Az xy-síban mozgó részecske $P(x,y)$ helyzetét az

$$x=t, \quad y=t^2, \quad -\infty<t<\infty$$

egyenletekkel adhatjuk meg. Milyen pályán mozog a részecske? Írjuk le a mozgását!



10.28. ÁBRA: Az $x = t$, $y = t^2$, $-\infty < t < \infty$ összefüggésekkel definiált pálya az $y = x^2$ parabola (1. példa).



10.29. ÁBRA: Az $x = \frac{1}{\cos t}$, $y = \operatorname{tg} t$ egyenletek és a $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ intervallum az $x^2 - y^2 = 1$ hiperbola jobb oldali ágát írja le (2. példa).

Megoldás: A pálya alakját úgy határozzuk meg, hogy t-t kiküszöböljük az egyenletekből. Mivel $x = t$ és $y = t^2$, így

$$y = t^2 = x^2.$$

A részecske helyzetének koordinátái kielégítik az $y = x^2$ egyenletet, ezért a részecske e görbe mentén mozog.

A 3.5. alfejezet 10. feladatával ellentétben most a parabola teljes egészét bejárja. Miközben t $-\infty$-től ∞-ig növekszik, a részecske előbb balról lefelé mozog, áthalad az origón, majd jobbra és felfelé halad tovább (10.28. ábra). □

2. PÉLDA: **Az $x^2 - y^2 = 1$ hiperbola jobb oldali ágának paraméterezése**

Határozzuk meg annak a részecskének a pályáját, amelynek $P(x, y)$ helyzetét a t időpontban az

$$x = \frac{1}{\cos t}, \quad y = \operatorname{tg} t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

összefüggések adják meg!

Megoldás: A P pont Descartes-koordinátáit úgy kapjuk meg, hogy az

$$x = \frac{1}{\cos t}, \quad y = \operatorname{tg} t$$

egyenletekből kiküszöböljük t-t. Ezt az $1/\cos^2 t - \operatorname{tg}^2 t = 1$ azonosság segítségével hajtjuk végre, ami esetünkben az

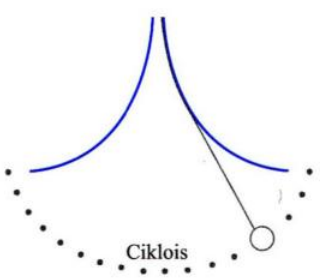
$$x^2 - y^2 = 1$$

összefüggést adja. Mivel a részecske (x, y) koordinátái kielégítik az $x^2 - y^2 = 1$ összefüggést, a mozgás valahol ezen a hiperbolapályán történik. Mivel t $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ között változhat, $x = 1/\cos t$ mindig pozitív lesz, y pedig $-\infty$ és ∞ közötti értékeket vesz fel. Ez azt jelenti, hogy P a jobb oldali hiperbolaágon halad végig. A részecske az ág alsó fele felől érkezik, az $(1, 0)$ pontot a $t = 0$ időpontban éri el, és az első síknegyedben mozog felfelé, ahogy t tovább nő (10.29. ábra). □

Ciklois

A köríven mozgó ingaórával az a probléma, hogy a frekvenciája függ a lengés amplitúdójától.

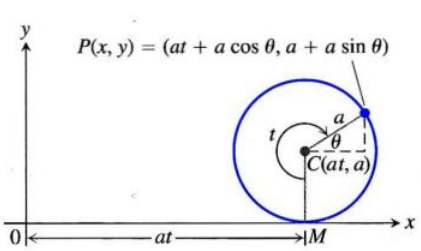
Nem ez a helyzet azonban, ha az inga egy ciklois mentén leng. 1673-ban Christiaan Huygens tervezett egy olyan ingaórát, amelynek ingája cikloisíven lengett. Ezt a görbét a 3. példában fogjuk definiálni. A vékony huzalra függesztett ingasúlyt Huygens cikloispályára kényszerítette (10.30. ábra).



10.30. ÁBRA: Huygens ingaórájában az inga cikloispályán mozog.

3. PÉLDA: **A ciklois paraméteres megadása**

Egy a sugarú korong vízszintes egyenes mentén gurul. Adjunk meg olyan paraméteres egyenletrendszert, amely leírja a korong egy P kerületi pontjának pályáját! Ezt a pályát **cikloisnak** hívjuk.



10.31. ÁBRA: A forgó korong P pontjának helyzete (3. példa).

Megoldás: Mozogjon a korong az x-tengely mentén. Jelöljük meg a korong P pontját, s a mozgást akkor kezdjük el vizsgálni, amikor P az origóban van, s a korong tartson jobbra. A paraméter legyen a korong elfordulási szöge radiánban mérve. A 10.31. ábra kis idővel később mutatja a korongot, amikor a talajjal való érintkezési pontja at távolságra van az origótól. A korong középpontjának koordinátái $C(at, a)$, a P pont koordinátái pedig

$$x = at + a\cos\theta, \quad y = a + a\sin\theta.$$

θ-t t-vel szeretnénk kifejezni. Az ábra alapján $t + \theta = 3\pi/2$, így

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - t.$$

Ezt a kifejezést θ-ba behelyettesítve:

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t, \quad \sin\theta = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t.$$

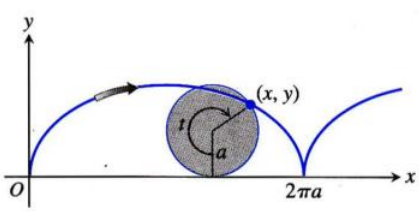
Tehát a keresett egyenletek:

$$x = at - a\sin t, \qquad y = a - a\cos t.$$

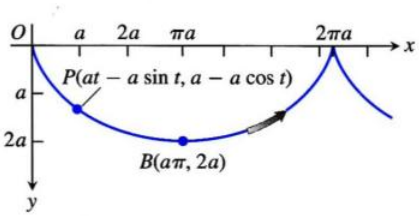
Szokás ezt úgy is felírni, hogy a-t kiemeljük:

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t). \tag{10.28}$$

A 10.32. ábra a ciklois első ívdarabját mutatja. □



10.32. ÁBRA: Az $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \geq 0$ ciklois.



10.33. ÁBRA: a 10.32. ábrát feje tetejére állítottuk, hogy így tanulmányozhassuk a fordított ciklois mentén a gravitációs erő hatására megvalósuló mozgást. Így az y-tengely a gravitációs erő irányába mutat, s az alsó féltengely pontjai lesznek pozitív koordinátájúak. A cikloist megadó egyenletrendszer és paramétertartomány továbbra is $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \geq 0$. A nyíl mutatja t növekedésének irányát.

Brachisztochron és a tautochron

Ha a 10.32. ábrát a feje tetejére állítjuk, akkor a (10.28) egyenletet továbbra is alkalmazhatjuk. Az így előálló görbe, amely a 10.32. ábrán látható, két érdekes fizikai tulajdonsággal rendelkezik. Tekintsük az origót és a görbe legmélyebb pontját, a B pontot. E két pontot összekötő összes sima görbe közül éppen a ciklois az, amely mentén haladva egy súrlódásmentesen, csupán a nehézségi erő hatása alatt mozgó tömegpont (kis gyöngy vagy golyó) a leggyorsabban jut el O-ból B-be. E tulajdonsága miatt nevezik a cikloist brachisztochronnak, legrövidebb idejű görbének. A ciklois másik érdekes tulajdonsága, hogy bárhonnan is indítjuk a tömegpontot B felé, ugyanannyi idő alatt jut el oda. E tulajdonsága miatt nevezik a cikloist tautochronnak, azonos idejű görbének.

Létezik-e más, az O és B pontokat összekötő brachisztochron-görbe is, vagy a ciklois az egyedüli? Ezt a kérdést az alábbi módon önthetjük matematikai formába. Induláskor a golyó mozgási energiája 0, mivel sebessége 0. Miközben a golyót a gravitációs erő a $(0,0)$ pontból az (x,y) pontba mozgatja, mgy munkát végez, s ez egyenlő a mozgási energia megváltozásával, azaz

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2.$$

Ezért a golyó sebessége az (x,y) pontban

$$v = \sqrt{2gy},$$

azaz

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy} \quad ds \text{ az ívhossz differenciálja a golyó pályája mentén}$$

vagy másképp

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}.$$

Az az idő, amely alatt a golyó valamely $y = f(x)$ pályán O-ból eljut a $B(a\pi, 2a)$ pontba:

$$T_f = \int_{x=0}^{x=a\pi} \sqrt{\frac{1 + (dy/dx)^2}{2gy}}\,dx. \tag{10.29}$$

Milyen $y = f(x)$ görbe esetén lesz – ha egyáltalán van ilyen görbe – minimális ennek az integrálnak az értéke?

Első látásra feltételezhetjük, hogy az O és B pontokat összekötő egyenes vonal mentén haladva kapjuk a legrövidebb időt, de lehet, hogy ez nem így van. Az is értelmes felvetés, hogy a golyó először lefelé indul azért, hogy fokozza a sebességét. Ha nagyobb a sebessége, még hosszabb utat is képes gyorsabban megtenni, s így elsőként ér B-be. Valóban ez a helyes elgondolás. A megoldást *variációszámítás*sal kapjuk – ami a matematika egyik ága –, s kiderül, hogy az eredeti ciklois az egyetlen brachisztochron-görbe O és B között.

Mivel a brachisztochron-probléma megoldása számunkra jelenleg még nem érthető, most csak azt mutatjuk meg, hogy miért tautochron a ciklois. Ciklois esetén (10.29) a

$$T_{\text{ciklois}} = \int_{x=0}^{x=a\pi} \sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{2gy}}$$

$$= \int_{t=0}^{t=\pi} \sqrt{\frac{a^2(2-2\cos t)}{2ga(1-\cos t)}}\,dt \qquad \begin{array}{l}\text{A (10.28) egyenletből}\\ dx = a(1-\cos t)dt,\\ dy = a\sin t dt \text{ és } y = a(1-\cos t)\end{array}$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{a}{g}}dt = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

alakot ölti. Azaz a súrlódásmentesen csúszó golyó, miután O-ból elengedtük, $\pi\sqrt{a/g}$ idő alatt ér B-be.

Tegyük fel, hogy most nem O-ból, hanem valamivel lejjebbről, a $t_0 > 0$ paraméterértéknek megfelelő (x_0, y_0) pontból indítjuk a golyót. A ciklois mentén haladó golyó sebessége valamely később (x,y) pontban:

$$v = \sqrt{2g(y-y_0)} = \sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)}. \qquad y = a(1-\cos t)$$

Ennek megfelelően, az (x_0, y_0) pontból a B pontba a golyó

$$T = \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{a^2(2-2\cos t)}{2ga(\cos t_0 - \cos t)}}\,dt = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{\cos t_0 - \cos t}}\,dt =$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2\sin^2(t/2)}{(2\cos^2(t_0/2)-1)-(2\cos^2(t/2)-1)}}\,dt =$$

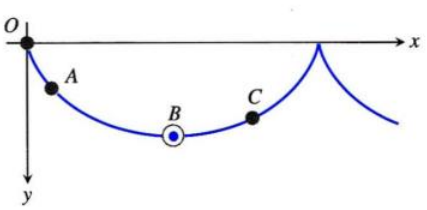
$$= \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{t_0}^{\pi} \frac{\sin(t/2)dt}{\sqrt{\cos^2(t_0/2)-\cos^2(t/2)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{t=t_0}^{t=\pi} \frac{-2du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \qquad \begin{array}{r}u = \cos(t/2)\\ -2du = \sin(t/2)dt\\ c = \cos(t_0/2)\end{array}$$

$$= 2\sqrt{\frac{a}{g}}\left[-\arcsin\frac{u}{c}\right]_{t=t_0}^{t=\pi} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{a}{g}}\left[-\arcsin\frac{\cos(t/2)}{\cos(t_0/2)}\right]_{t_0}^{\pi} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{a}{g}}(-\arcsin 0 + \arcsin 1) = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$



10.34. ÁBRA: Ha egyszerre indítunk el golyókat az O, A és C pontokból a ciklois mentén, azok egyszerre érkeznek a B pontba.

idő alatt jut el. Ez pontosan annyi idő, mint amennyire a golyónak az O-ból B-be való eljutáshoz szüksége van. A golyó mindig ugyanannyi idő alatt jut el B-be, bárhonnan is indul. Például a 10.34. ábra O, A és C pontjából induló golyók mind egyszerre érnek a B pontba. Ez az oka annak, hogy Huygens ingaórájának járása független a lengés amplitúdójától.

10.4. Feladatok

Kúpszeletek paraméteres egyenletrendszere

Az 1–12. feladatokban megadtuk egy xy-síkban mozgó részecske mozgásának paraméteres egyenletrendszerét és a paramétertartományt. Határozzuk meg a részecske mozgásának pályáját oly módon, hogy mozgásegyenletét Descartes-koordinátákban írjuk fel. Ábrázoljuk a Descartes-koordinátákban felírt görbét! Jelöljük ki a görbének azt a részét, amelyet a részecske bejár! Állapítsuk meg a részecske mozgásának irányát is!

1. $x = \cos t, y = \sin t, 0 \le t \le \pi$

2. $x = \sin(2\pi(1-t)), y = \cos(2\pi(1-t)), 0 \le t \le 1$

3. $x = 4\cos t, y = 5\sin t, 0 \le t \le \pi$

4. $x = 4\sin t, y = 5\cos t, 0 \le t \le 2\pi$

5. $x = t, y = \sqrt{t}, t \ge 0$

6. $x = \sec^2 t - 1, y = \operatorname{tg} t, -\pi/2 < t < \pi/2$

7. $x = -\sec t, y = \operatorname{tg} t, -\pi/2 < t < \pi/2$

8. $x = \csc t, y = \operatorname{ctg} t, 0 < t < \pi$

9. $x = t, y = \sqrt{4-t^2}, 0 \le t \le 2$

10. $x = t^2, y = \sqrt{t^4+1}, t \ge 0$

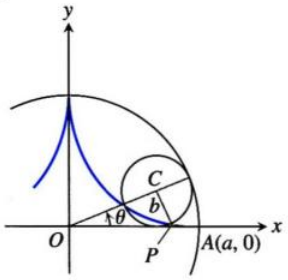
11. $x = -\operatorname{ch} t, y = \operatorname{sh} t, -\infty < t < \infty$

12. $x = 2\operatorname{sh} t, y = 2\operatorname{ch} t, -\infty < t < \infty$

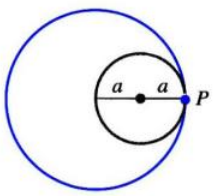
13. Hipociklois: Gördüljön végig egy kör valamilyen rögzített kör kerületén, de a rögzített kör belsejében. A gördülő kör kerületének valamely P pontja *hipocikloist* ír le. Legyen $x^2 + y^2 = a^2$ a rögzített kör, legyen a gördülő kör sugara b, s a P pont a mozgás megkezdésekor legyen az $A(a,0)$ pontban. Írjuk fel a hipociklois paraméteres egyenletrendszerét úgy, hogy az x tengely pozitív felének a körök középpontjait összekötő egyenessel alkotott hajlásszöge legyen a paraméter. Arra az esetre, ha – mint a mellékelt ábrán is – $b = a/4$, mutassuk meg, hogy a hipociklois azonos az

$$x = a\cos^3\theta, \quad y = a\sin^3\theta$$

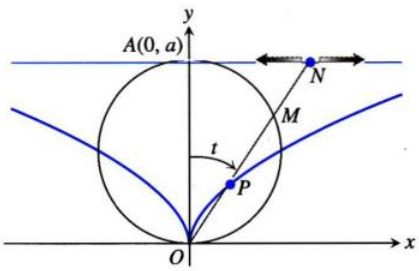
egyenletű csillaggörbével.



14. Még többet a hipocikloisról: A mellékelt ábra egy a sugarú kört mutat, amely belülről érintkezik egy $2a$ sugarú körrel. A P pont, amely pillanatnyilag a körök érintkezési pontja, a kisebbik körhöz van rögzítve. Milyen utat jár be a P pont, miközben a kis kör végiggördül a nagyobbik kör kerületén?



15. A mellékelt ábrán az N pont az $y = a$ egyenes mentén mozog, P pedig úgy mozog, hogy teljesüljön az $OP = MN$ egyenlőség. Paraméteres egyenletrendszerrel írjuk le P mozgását! A paraméter az y-tengely pozitív fele és az ON egyenes által bezárt szög legyen!



16. Trochoid: Egy a sugarú biciklikerék csúszásmentesen gördül egy vízszintes egyenes mentén. Paraméteres egyenletrendszerrel írjuk le a küllő egy P pontjának pályáját, ha az b távolságra van a kerékagytól! A paraméter legyen a kerék forgásszöge. A P által leírt görbét trochoisnak nevezzük, melyből a $b = a$ esetben ciklois lesz.

Távolágmeghatározás paraméteres egyenletrendszerrel

17. Keressük meg az $x = t, y = t^2, -\infty < t < \infty$ parabolának azt a pontját, amelyik a legközelebb van a $(2, 1/2)$ ponthoz. (*Útmutatás:* Minimalizáljuk a távolság négyzetét mint t függvényét.)

18. Keressük meg az $x = 2\cos t, y = \sin t, 0 \le t \le 2\pi$ ellipszisnek azt a pontját, amelyik a legközelebb van a $(3/4, 0)$ ponthoz. (*Útmutatás:* Minimalizáljuk a távolság négyzetét mint t függvényét.)

Grafikai felfedezőút

Ha van paraméteres egyenletek megjelenítésére alkalmas grafikai programunk, ábrázoljuk a következő egyenletrendszert a megadott intervallumokon.

19. Ellipszis: $x = 4\cos t, y = 2\sin t$ a

(a) $0 \le t \le 2\pi$ **(b)** $0 \le t \le \pi$

(c) $-\pi/2 \le t \le \pi/2$

intervallumon.

20. Hiperbolaág: $x = \sec t$ ($1/\cos t$-ként kell begépelni), $y = \operatorname{tg} t$ ($\sin t/\cos t$-ként kell begépelni) a

(a) $-1{,}5 \le t \le 1{,}5$ **(b)** $-0{,}5 \le t \le 0{,}5$

(c) $-0{,}1 \le t \le 0{,}1$

intervallumon.

21. Parabola: $x = 2t + 3, y = t^2 - 1, -2 \le t \le 2$

22. Ciklois: $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ a

(a) $0 \le t \le 2\pi$ **(b)** $0 \le t \le 4\pi$

(c) $\pi \le t \le 3\pi$

intervallumon.

23. Egy szép görbe (deltoid):

$$x = 2\cos t + \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t; \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Mi történik, ha az x-et és y-t megadó egyenletben 2-t -2-vel helyettesítjük? Ábrázoljuk az új egyenleteket!

24. Még szebb görbe:

$$x = 3\cos t + \cos 3t, \quad y = 3\sin t - \sin 3t; \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Mi történik, ha az x-et és y-t megadó egyenletben 3-at -3-mal helyettesítjük? Ábrázoljuk az új egyenleteket!

25. Három gyönyörű görbe:

(a) *Epiciklois*

$$x = 9\cos t - \cos 9t, \quad y = 9\sin t - \sin 9t; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

(b) *Hipociklois*

$$x = 8\cos t + 2\cos 4t, \quad y = 8\sin t - 2\sin 4t; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

(c) *Hipotrochois*

$$x = \cos t + 5\cos 3t, \quad y = 6\sin t - 5\sin 3t; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

26. Még szebb görbék:

(a) $x = 6\cos t + 5\cos 3t$, $y = 6\sin t - 5\sin 3t$; $0 \le t \le 2\pi$

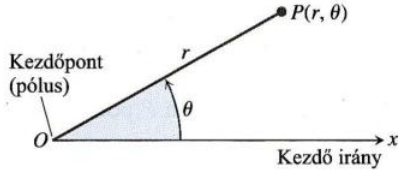
(b) $x = 6\cos 2t + 5\cos 6t$, $y = 6\sin 2t - 5\sin 6t$; $0 \le t \le \pi$

(c) $x = 6\cos t + 5\cos 3t$, $y = 6\sin 2t - 5\sin 3t$; $0 \le t \le 2\pi$

(d) $x = 6\cos 2t + 5\cos 6t$, $y = 6\sin 4t - 5\sin 6t$; $0 \le t \le \pi$

10.5. Polárkoordináták

Ebben az alfejezetben a polárkoordinátákat tárgyaljuk és viszonyukat a Descartes-koordinátákkal. A sík tetszőleges pontjának pontosan egy Descartes-koordináta-párja van, azonban végtelen sok polárkoordinátapárja lehet. Ennek érdekes következményei vannak az ábrázolásnál, amint ezt a következő alfejezetben látni fogjuk.



10.35. ÁBRA: A síkbeli polárkoordinátákat úgy definiáljuk, hogy először rögzítünk egy pólusnak nevezett kezdőpontot és egy kezdőirányt, a polártengelyt.

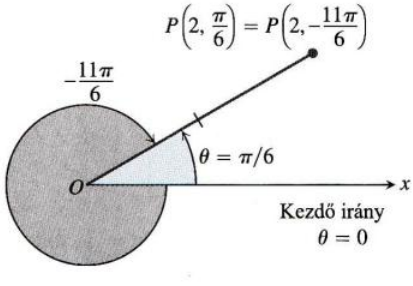
A polárkoordináták definíciója

A polárkoordináták értelmezéséhez először is jelöljük ki az O **kezdőpont**ot (amelyet **pólus**nak is szokás nevezni) és az O-ból induló **kezdőirány**t, amelyet **polártengely**nek nevezünk (10.35. ábra). Ezután minden P ponthoz hozzárendeljük az (r, θ) **polárkoordinátapárt**, ahol r az O és a P pont irányított távolsága, θ pedig az irányszög, azaz a polártengely és az OP félegyenes által bezárt irányított szög.

Polárkoordináták

$P(r, \theta)$

O és P irányított távolsága — OP-nak a polártengellyel bezárt irányított szöge



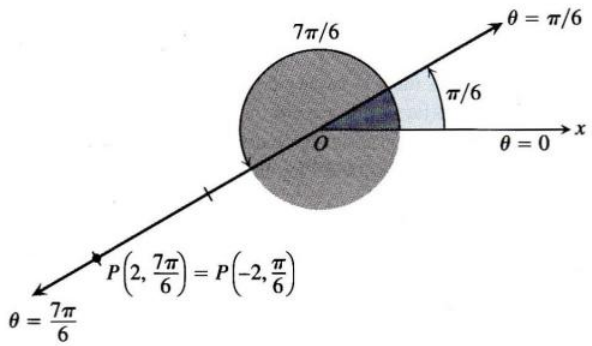
10.36. ÁBRA: A polárkoordináták nem egyértelműek.

Mint a trigonometriában, θ-t itt is akkor tekintjük pozitívnak, ha az óramutató járásával ellentétes irányú, és akkor negatív, ha az óramutató járásával azonos irányú. Egy adott ponthoz hozzárendelt szög nem egyértelmű. Például a $\theta = \pi/6$ egyenletű sugáron a kezdőponttól 2 egység távolságra lévő pont koordinátái: $r = 2$, $\theta = \pi/6$, de koordinátája az $r = 2$, $\theta = -11\pi/6$ számpár is (10.36. ábra). Vannak esetek, amikor szeretnénk r-re negatív értéket is megengedni. Ezért használtuk a definícióban az irányított távolság fogalmát. A $P(2, 7\pi/6)$ pontba eljuthatunk úgy, hogy elfordulunk a polártengely irányától az óramutató járásával ellentétes irányban $7\pi/6$ radiánnal, s azután két egységnyit előrelépünk a pólusból (10.37. ábra). De ebbe a pontba úgy is eljuthatunk, hogy $\pi/6$ radiánnal fordulunk el a polártengely irányától az óramutató járásával ellentétesen, majd a pólusból két egységnyit *visszalépünk*. A pontnak tehát $r = -2$, $\theta = \pi/6$ is polárkoordinátái.[1]

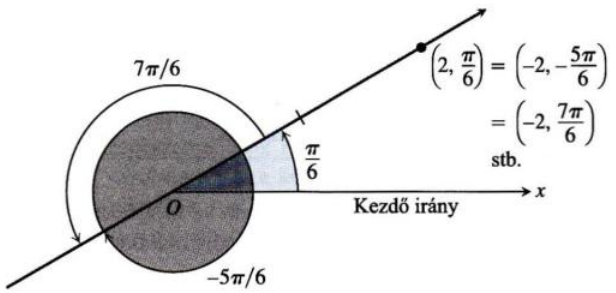
1. PÉLDA: A polárkoordináták meghatározása

Határozzuk meg a $P(2, \pi/6)$ pont valamennyi polárkoordinátáját!

[1] Az európai terminológiában az első polárkoordináta (r = sugár) mindig pozitív! (a lektor megjegyzése)



10.37. ÁBRA: A polárkoordináták negatív r értéket is felvehetnek.



10.38. ÁBRA: A $P(2,\pi/6)$ pontnak végtelen sok polárkoordinátapárja van (1. példa).

Megoldás: Vegyük fel a koordináta-rendszer polártengelyét és húzzuk meg azt a sugarat, amelyik $\pi/6$ radián nagyságú szöget zár be a kezdőiránnyal, majd jelöljük ki a $(2,\pi/6)$ koordinátájú pontot (10.38. ábra). Ezután keressünk olyan szögeket, amelyek az $r=2$ és $r=-2$ értékekkel együtt szintén P polárkoordinátáit alkotják.

$r=2$-re a megfelelő szögértékek teljes listája:

$$\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\pm 2\pi,\ \frac{\pi}{6}\pm 4\pi,\ \frac{\pi}{6}\pm 6\pi,\ldots$$

Az $r=-2$-höz tartozó szögek pedig:

$$-\frac{5\pi}{6},\ -\frac{5\pi}{6}\pm 2\pi,\ -\frac{5\pi}{6}\pm 4\pi,\ -\frac{5\pi}{6}\pm 6\pi,\ldots$$

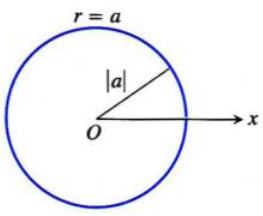
P megfelelő koordinátapárjai:

$$\left(2,\frac{\pi}{6}+2n\pi\right),\quad n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

és

$$\left(-2,-\frac{5\pi}{6}+2n\pi\right),\quad n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots.$$

$n=0$-ra a képlet a $(2,\pi/6)$ és $(-2,-5\pi/6)$ értékeket adja. Ha $n=1$, akkor $(2,13\pi/6)$ és $(-2,7\pi/6)$ lesznek a koordináták és így tovább. □

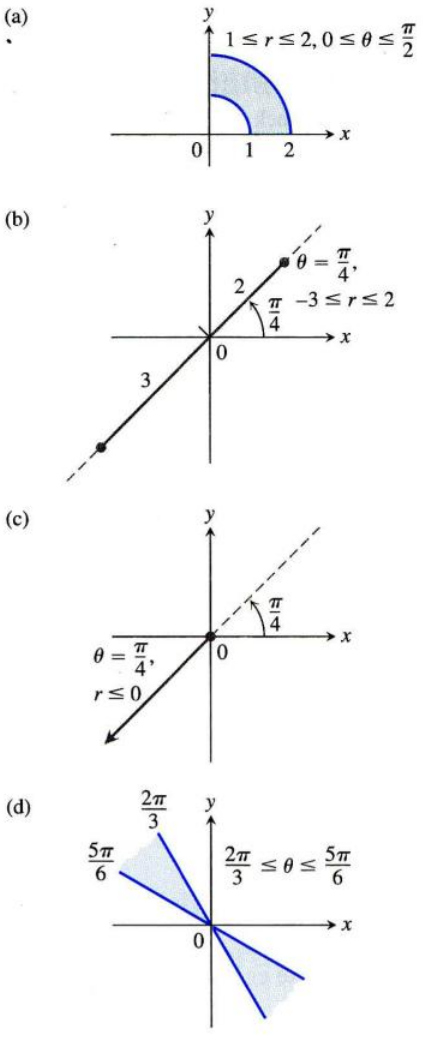


10.39. ÁBRA: A kör polárkoordinátás egyenlete $r=a$.

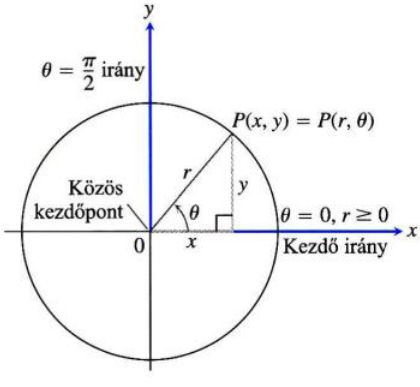
Polárkoordinátás egyenletek és ábrázolásuk

Ha r-nek az $r=a\neq 0$ állandó értéket adjuk, akkor a $P(r,\theta)$ pont $|a|$ távolságra lesz a kezdőponttól. Miközben θ végigfut egy 2π hosszúságú intervallum értékein, a P pont egy $|a|$ sugarú, O középpontú körpályát ír le (10.39. ábra).

Ha θ-nak valamilyen konstans $\theta=\theta_0$ értéket adunk, r-et pedig $-\infty$ és ∞ között változtatjuk, akkor a $P(r,\theta)$ pont egy olyan, O-n átmenő egyenesen halad végig, amely a polártengellyel θ_0 szöget zár be.



10.40. ÁBRA: Néhány tipikus egyenlőtlenség grafikonja (3. példa)



10.41. ÁBRA: A polár- és Descartes-koordináták átszámításának szokásos módja.

Egyenlet	Grafikon
$r = a$	O középpontú, $\lvert a\rvert$ sugarú kör
$\theta = \theta_0$	O-n átmenő, a polártengellyel θ_0 szöget bezáró egyenes.

2. PÉLDA: **Polárkoordinátás egyenlet megadása a grafikon alapján**

(a) $r = 1$ és $r = -1$ az O középpontú, 1 sugarú kör egyenletei.
(b) $\theta = \pi/6$, $\theta = 7\pi/6$ és $\theta = -5\pi/6$ a 10.38. ábrán látható egyenes egyenletei. □

Az $r = a$ és $\theta = \theta_0$ alakú egyenleteket kombinálva tartományokat, cikkelyeket és egyeneseket is megadhatunk.

3. PÉLDA: **A grafikon meghatározása**

Ábrázoljuk azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek polárkoordinátái kielégítik a következő feltételeket!

1. $1 \le r \le 2$ és $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
2. $-3 \le r \le 2$ és $\theta = \frac{\pi}{4}$
3. $r \le 0$ és $\theta = \frac{\pi}{4}$
4. $\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$ (r-re nincs megkötés)

Megoldás: A grafikonok a 10.40. ábrán láthatók. □

A polárkoordináták és a Descartes-koordináták viszonya

Ha a síkbeli polár- és Descartes-koordinátákat együtt szeretnénk használni, akkor célszerű, ha a két rendszer kezdőpontja, valamint a polárkoordináta-rendszer polártengelye és az x-tengely pozitív fele egybeesik. A $\theta = \pi/2$, $r > 0$ lesz az y-tengely pozitív fele (10.41. ábra). Ekkor a kétféle koordináta-rendszert az alábbi egyenlőségek kapcsolják össze:

A polár- és a Descartes koordinátákat összekapcsoló egyenletek

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

Az első két egyenlet adott r, θ polárkoordináták mellett egyértelműen meghatározza az x, y Descartes-koordinátákat. Másfelől adott x, y értékek esetén a harmadik egyenlet r-re két lehetséges értéket ad (egy pozitív és egy negatív értéket). Mindkét esetben létezik olyan egyértelműen meghatározott $\theta \in [0, 2\pi)$ érték, amely kielégíti az első két egyenletet, s mindkét eset az (x, y) Descartes-koordinátájú pont egy polárkoordináta-rendszerbeli reprezentációját adja. A pont összes többi lehetséges polárkoordinátás felírását megkaphatjuk ebből a két reprezentációból, ahogy azt az 1. példában láttuk.

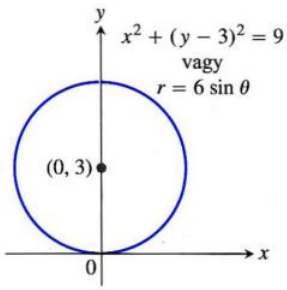
4. PÉLDA: **Ekvivalens egyenletek**

Polárkoordinátás egyenlet	Ekvivalens Descartes-koordinátás egyenlet
$r\cos\theta = 2$	$x = 2$
$r^2\cos\theta\sin\theta = 4$	$xy = 4$
$r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1$	$x^2 - y^2 = 1$
$r = 1 + 2r\cos\theta$	$y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$
$r = 1 - \cos\theta$	$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$

Néhány görbét könnyebb polárkoordinátás felírásban kezelni. □

5. PÉLDA: **A Descartes-koordináták átalakítása polárkoordinátákká**

Írjuk fel az $x^2 + (y-3)^2 = 9$ kör polárkoordinátás egyenletét (10.42. ábra)!



10.42. ÁBRA: Az 5. példában szereplő kör.

Megoldás:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-6y+9 &= 9 && \text{elvégeztük a négyzetre emelést}\\ x^2+y^2-6y &= 0 && \text{a 9-esek kiesnek}\\ r^2-6r\sin\theta &= 0 && x^2+y^2=r^2\\ r=0 \text{ vagy } r-6\sin\theta &= 0\\ r &= 6\sin\theta && \text{mindkét lehetőséget magában foglalja} \end{aligned}$$

A kúpszeletek polárkoordinátás egyenletéről a 10.8. alfejezetben fogunk többet megtudni. □

6. PÉLDA: **A polárkoordináták átalakítása Descartes-koordinátákká**

Helyettesítsük a következő polárkoordinátás egyenleteket velük ekvivalens, Descartes-koordinátákban felírt egyenletekkel és azonosítsuk a megfelelő görbéket!

(a) $r\cos\theta = -4$ **(b)** $r^2 = 4r\cos\theta$ **(c)** $r = \frac{4}{2\cos\theta - \sin\theta}$

Megoldás: Tekintsük az $r\cos\theta = x$, $r\sin\theta = y$, $r^2 = x^2+y^2$ helyettesítéseket!

(a) $r\cos\theta = -4$

A Descartes-koordinátákban felírt egyenlet: $r\cos\theta = -4$, $x = -4$

A grafikon: Az x-tengely $x = -4$ pontján átmenő függőleges egyenes.

(b) $r^2 = 4r\cos\theta$

A Descartes-koordinátákban felírt egyenlet:

$$\begin{aligned} r^2 &= 4r\cos\theta\\ x^2+y^2 &= 4x\\ x^2-4x+y^2 &= 0\\ x^2-4x+4+y^2 &= 4 && \text{teljes négyzetté egészítünk ki}\\ (x-2)^2+y^2 &= 4. \end{aligned}$$

A grafikon: 2 egység sugarú kör, középpontja a $(h,k) = (2,0)$ pont.

(c) $r = \dfrac{4}{2\cos\theta - \sin\theta}$

A Descartes-koordinátákban felírt egyenlet:

$$\begin{aligned} r(2\cos\theta - \sin\theta) &= 4\\ 2r\cos\theta - r\sin\theta &= 4\\ 2x - y &= 4\\ y &= 2x-4. \end{aligned}$$

A grafikon: $m = 2$ meredekségű egyenes, amely a $b = -4$ pontban metszi az y-tengelyt. □

10.5. Feladatok

Polárkoordináta-párok

1. Mely polárkoordináta-párok jelölik ugyanazokat a pontokat?

(a) $(3,0)$ **(b)** $(-3,0)$ **(c)** $(2,2\pi/3)$
(d) $(2,7\pi/3)$ **(e)** $(-3,\pi)$ **(f)** $(2,\pi/3)$
(g) $(-3,2\pi)$ **(h)** $(-2,-\pi/3)$

2. Mely polárkoordináta-párok jelölik ugyanazokat a pontokat?

(a) $(-2,\pi/3)$ **(b)** $(2,-\pi/3)$ **(c)** (r,θ)
(d) $(r,\theta+\pi)$ **(e)** $(-r,\theta)$ **(f)** $(2,-2\pi/3)$
(g) $(-r,\theta+\pi)$ **(h)** $(-2,2\pi/3)$

3. Ábrázoljuk az alábbi (polárkoordinátákkal megadott) pontokat! Azután keressük meg az egyes pontok összes polárkoordinátáját!

(a) $(2,\pi/2)$ **(b)** $(2,0)$
(c) $(-2,\pi/2)$ **(d)** $(-2,0)$

4. Ábrázoljuk az alábbi (polárkoordinátákkal megadott) pontokat! Azután keressük meg az egyes pontok összes polárkoordinátáját!

(a) $(3,\pi/4)$ **(b)** $(-3,\pi/4)$
(c) $(3,-\pi/4)$ **(d)** $(-3,-\pi/4)$

Polárkoordináták átírása Descartes-koordinátákká

5. Határozzuk meg az 1. feladatban szereplő pontok Descartes-koordinátáit!

6. Határozzuk meg a következő, polárkoordinátákban megadott pontok Descartes-koordinátáit!

(a) $(\sqrt{2},\pi/4)$ **(b)** $(1,0)$
(c) $(0,\pi/2)$ **(d)** $(-\sqrt{2},\pi/4)$
(e) $(-3,5\pi/6)$ **(f)** $(5,\operatorname{arctg}(4/3))$
(g) $(-1,7\pi)$ **(h)** $(2\sqrt{3},2\pi/3)$

Polárkoordinátás egyenletek és egyenlőtlenségek ábrázolása

7. $r=2$ **8.** $0\le r\le 2$
9. $r\ge 1$ **10.** $1\le r\le 2$
11. $0\le\theta\le\pi/6, r\ge 0$ **12.** $\theta=2\pi/3, r\le -2$
13. $\theta=\pi/3, -1\le r\le 3$ **14.** $\theta=11\pi/4, r\ge -1$
15. $\theta=\pi/2, r\ge 0$ **16.** $\theta=\pi/2, r\le 0$
17. $0\le\theta\le\pi, r=1$ **18.** $0\le\theta\le\pi, r=-1$
19. $\pi/4\le\theta\le 3\pi/4, 0\le r\le 1$
20. $-\pi/4\le\theta\le\pi/4, -1\le r\le 1$
21. $-\pi/2\le\theta\le\pi/2, 1\le r\le 2$
22. $0\le\theta\le\pi/2, 1\le|r|\le 2$

Polárkoordinátás egyenletek átírása Descartes-koordinátákra

A 23–48. feladatokban a polárkoordinátákban megadott egyenleteket helyettesítsük velük ekvivalens Descartes-koordinátákban felírt egyenletekkel! Mi lesz a grafikonjuk?

23. $r\cos\theta=2$ **24.** $r\sin\theta=-1$
25. $r\sin\theta=0$ **26.** $r\cos\theta=0$
27. $r=4\csc\theta$ **28.** $r=-3\sec\theta$
29. $r\cos\theta+r\sin\theta=1$ **30.** $r\sin\theta=r\cos\theta$
31. $r^2=1$ **32.** $r^2=4r\sin\theta$
33. $r=\frac{5}{\sin\theta-2\cos\theta}$ **34.** $r^2\sin 2\theta=2$
35. $r=\operatorname{ctg}\theta\csc\theta$ **36.** $r=4\operatorname{tg}\theta\sec\theta$
37. $r=\csc\theta e^{r\cos\theta}$ **38.** $r\sin\theta=\ln r+\ln\cos\theta$
39. $r^2+2r^2\cos\theta\sin\theta=1$ **40.** $\cos^2\theta=\sin^2\theta$
41. $r^2=-4r\cos\theta$ **42.** $r^2=-6r\sin\theta$
43. $r=8\sin\theta$ **44.** $r=3\cos\theta$
45. $r=2\cos\theta+2\sin\theta$ **46.** $r=2\cos\theta-\sin\theta$
47. $r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=2$ **48.** $r\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)=5$

Descartes-koordinátákban felírt egyenletek átírása polárkoordinátákba

A 49–62. feladatokban a Descartes-koordinátákban megadott egyenleteket helyettesítsük velük ekvivalens polárkoordináta-egyenletekkel!

49. $x=7$ **50.** $y=1$
51. $x=y$ **52.** $x-y=3$
53. $x^2+y^2=4$ **54.** $x^2-y^2=1$
55. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ **56.** $xy=2$
57. $y^2=4x$ **58.** $x^2+xy+y^2=1$
59. $x^2+(y-2)^2=4$ **60.** $(x-5)^2+y^2=25$
61. $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ **62.** $(x+2)^2+(y-5)^2=16$

Elmélet példákkal

63. Adjuk meg az origó összes lehetséges polárkoordinátás felírását!

64. Függőleges és vízszintes egyenesek:

(a) Mutassuk meg, hogy az xy-sík függőleges egyeneseinek polárkoordinátás egyenlete mindig $r=a/\cos\theta$ alakú.

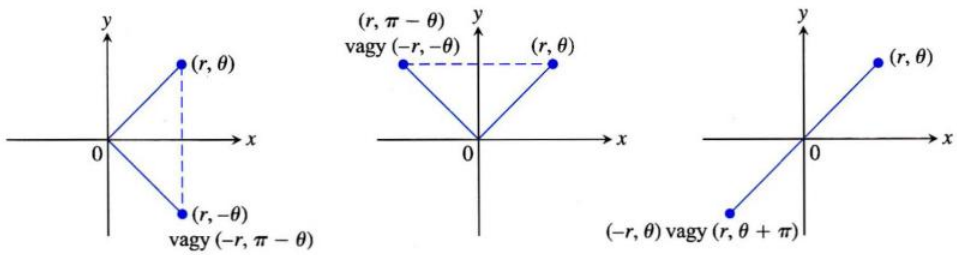
(b) Mi lesz az xy-sík vízszintes egyeneseinek polárkoordinátás egyenlete?

10.6. Ábrázolás polárkoordinátákban

Ebben az alfejezetben a polárkoordinátákban megadott egyenletek ábrázolásának néhány módszerét mutatjuk be.

Szimmetria

A 10.43. ábra mutatja, hogyan lehet megállapítani a szimmetriát polárkoordináták esetében.



(a) Az x-tengelyre vonatkozó szimmetria

(b) Az y-tengelyre vonatkozó szimmetria

(c) Az origóra vonatkozó szimmetria

10.43. ÁBRA: Szimmetria polárkoordinátákban.

Szimmetriateszt

1. *Az x-tengelyre vonatkozó szimmetria:* Ha az (r, θ) pont rajta van a grafikonon, akkor az $(r, -\theta)$ vagy $(-r, \pi - \theta)$ pont is rajta van (10.43a ábra).
2. *Az y-tengelyre vonatkozó szimmetria:* Ha az (r, θ) pont rajta van a grafikonon, akkor az $(r, \pi - \theta)$ vagy $(-r, -\theta)$ pont is rajta van (10.43b ábra).
3. *Az origóra vonatkozó szimmetria:* Ha az (r, θ) pont rajta van a grafikonon, akkor az $(-r, \theta)$ vagy $(r, \theta + \pi)$ pont is rajta van (10.43c ábra).

Meredekség

Az $r = f(\theta)$ polárgörbe meredekségét dy/dx adja meg és nem $r' = df/d\theta$. Hogy miért? Tekintsük f grafikonját úgy, mint az

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$$

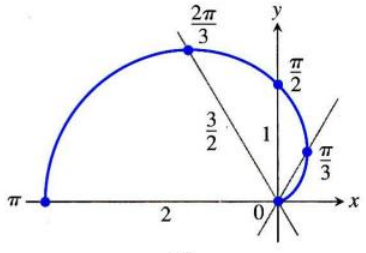
paraméteres egyenletrendszer grafikonját. Ha f a θ differenciálható függvénye, akkor x és y is az, és amennyiben $dx/d\theta \neq 0$, dy/dx-t kiszámíthatjuk a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} && \text{3.5. alfejezet, (2) képlet } t = \theta\text{-val} \\ &= \frac{\frac{d}{d\theta}(f(\theta)\cdot\sin\theta)}{\frac{d}{d\theta}(f(\theta)\cdot\cos\theta)} \\ &= \frac{\frac{df}{d\theta}\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{\frac{df}{d\theta}\cos\theta - f(\theta)\sin\theta} && \text{a deriváltakra vonatkozó szorzási szabály} \end{aligned}$$

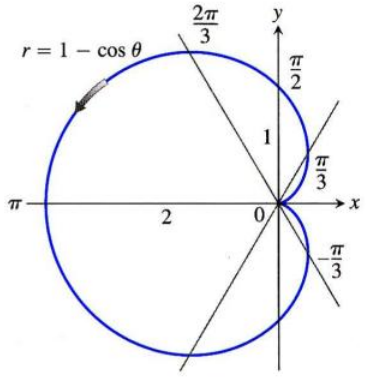
paraméteres képlet alapján.

θ	$r = 1 - \cos\theta$
0	0
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3}{2}$
π	2

(a)



(b)



(c)

10.44. ÁBRA: Az $r = 1 - \cos\theta$ kardioidgörbe ábrázolásának lépései (1. példa). A nyíl θ növekedési irányát mutatja.

Az $r = f(\theta)$ görbe meredeksége

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(r,\theta)} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta},$$

feltéve, hogy $dx/d\theta \neq 0$ az (r, θ) pontban.

Ha az $r = f(\theta)$ görbe $\theta = \theta_0$ értéket felvéve halad át a kezdőponton, akkor $f(\theta) = 0$ és a meredekségi egyenlet ekkor azt adja, hogy

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,\theta_0)} = \frac{f'(\theta_0)\sin\theta_0}{f'(\theta_0)\cos\theta_0} = \operatorname{tg}\theta_0.$$

Ha az $r = f(\theta)$ görbe $\theta = \theta_0$ értéket felvéve halad át a kezdőponton, akkor a görbe meredeksége $\operatorname{tg}\theta_0$ lesz. Azért mondjuk, hogy „a $(0, \theta_0)$ értékhez tartozó meredekség" és nem egyszerűen azt, hogy a kezdőpontbeli meredeksége, mert a polárgörbe egynél többször is áthaladhat az origón (vagy tetszőleges más ponton), s a különféle θ értékekhez különféle meredekség tartozhat. Első példánkban azonban nem ez a helyzet.

1. PÉLDA: **Kardioid**

Ábrázoljuk az $r = 1 - \cos\theta$ görbét!

Megoldás: A görbe szimmetrikus az x-tengelyre, mert

$$\begin{aligned}(r,\theta) \text{ rajta van a görbén } &\Rightarrow r = 1 - \cos\theta \\ &\Rightarrow r = 1 - \cos(-\theta) \qquad \cos\theta = \cos(-\theta) \\ &\Rightarrow (r, -\theta) \text{ szintén rajta van a görbén.}\end{aligned}$$

Miközben θ 0-tól π-ig növekszik, $\cos\theta$ 1-ről -1-re csökken, $r = 1 - \cos\theta$ pedig a 0 minimumértékről a 2 maximumértékig nő. Miközben θ tovább növekszik π-től 2π-ig, $\cos\theta$ -1-ről újra 1-re növekszik, r pedig 2-ről 0-ra csökken. 2π-től a görbe alakja ismétlődik, mivel a koszinusz 2π szerint periodikus.

A görbe $\operatorname{tg}(0) = 0$ meredekséggel lép ki a kezdőpontból és $\operatorname{tg}(2\pi) = 0$ meredekséggel tér vissza oda.

Készítsünk táblázatot a $\theta = 0$ és $\theta = \pi$ értékekre, vegyük fel ezeket a pontokat, majd húzzunk meg egy olyan, ezeken a pontokon áthaladó sima görbét, amelynek a kezdőpontban vízszintes az érintője, és tegyük teljessé a görbét oly módon, hogy tükrözzük az x-tengelyre (10.44. ábra). A görbét alakja miatt *kardioid*nak nevezzük. A kardioidgörbét a gyakorlatban is alkalmazzák, például a textiliparban az orsók egyenletes csévézéséhez és bizonyos rádióantennák jelerősítésére. □

2. PÉLDA:

Ábrázoljuk az $r^2 = 4\cos\theta$ görbét!

Megoldás: Az $r^2 = 4\cos\theta$ egyenlet megköveteli, hogy $\cos\theta \geq 0$ legyen, így θ $-\pi/2$ és $\pi/2$ közötti értékeket vehet fel. A görbe az x-tengelyre nézve szimmetrikus, mert

$$\begin{aligned}(r,\theta) \text{ rajta van a görbén } &\Rightarrow r^2 = 4\cos\theta \\ &\Rightarrow r^2 = 4\cos(-\theta) \qquad \cos\theta = \cos(-\theta) \\ &\Rightarrow (r, -\theta) \text{ szintén rajta van a görbén.}\end{aligned}$$

A görbe még a kezdőpontra is szimmetrikus, mert

$$\begin{aligned}(r,\theta) \text{ rajta van a görbén } &\Rightarrow r^2 = 4\cos\theta \\ &\Rightarrow (-r)^2 = 4\cos(-\theta) \\ &\Rightarrow (-r, \theta) \text{ szintén rajta van a görbén.}\end{aligned}$$

A fenti két szimmetriából következik, hogy a görbe az y-tengelyre is szimmetrikus.

A görbe akkor halad át a kezdőponton, amikor $\theta = -\pi/2$ és $\theta = \pi/2$. Érintője mindkét esetben függőleges, mert $\operatorname{tg}\theta$ végtelen.

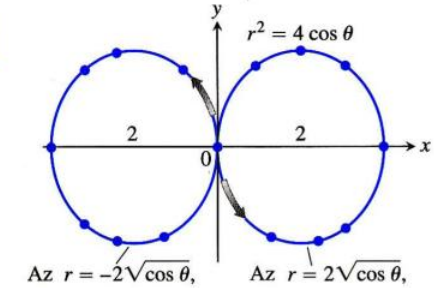
Minden $\theta = -\pi/2$ és $\theta = \pi/2$ közötti θ értékre az $r^2 = 4\cos\theta$ képlet két értéket ad r-re:

$$r = \pm\sqrt{\cos\theta}.$$

Készítsünk értéktáblázatot, vegyük fel a megfelelő pontokat, s a szimmetriatulajdonságok és az érintőre vonatkozó információ alapján rajzoljuk fel a görbét (10.45. ábra). □

θ	$\cos\theta$	$r = \pm 2\sqrt{\cos\theta}$
0	1	± 2
$\pm\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\approx \pm 1.9$
$\pm\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\approx \pm 1.7$
$\pm\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\approx \pm 1.4$
$\pm\frac{\pi}{2}$	0	0

(a)



(b)

10.45. ÁBRA: Az $r^2 = 4\cos\theta$ görbe grafikonja. A nyilak θ növekedésének irányába mutatnak. A táblázatban kerekített r értékek szerepelnek (2. példa).

Egy ábrázolási módszer

Az $r = f(\theta)$ poláregyenlet ábrázolásának egyik módja, hogy táblázatot készítünk az (r, θ) értékekre, felvesszük a megfelelő pontokat, aztán θ növekedésének irányában összekötjük őket. Ez a módszer akkor működik jól, ha elegendő pontot veszünk fel ahhoz, hogy a görbe egyetlen hurka, mélyedése, kidudorodása se kerülje el figyelmünket. Van egy gyorsabb és megbízhatóbb ábrázolási mód is, és ez a következő:

1. Először ábrázoljuk $r = f(\theta)$-t a *Descartes-féle* $r\theta$-síkon,
2. aztán a Descartes-féle grafikont használjuk „értéktáblázatként" a görbe *polárkoordinátás* ábrázolásához.

Ez a módszer jobb annál, mintha egyszerűen csak kiszámolunk néhány értékpárt és felvesszük a nekik megfelelő pontokat, mert bármily hevenyészett is a Descartes-grafikonunk, rápillantva máris látni fogjuk, hol pozitív vagy negatív r, hol nincs értelmezve, hol nő, illetve csökken. Íme egy példa.

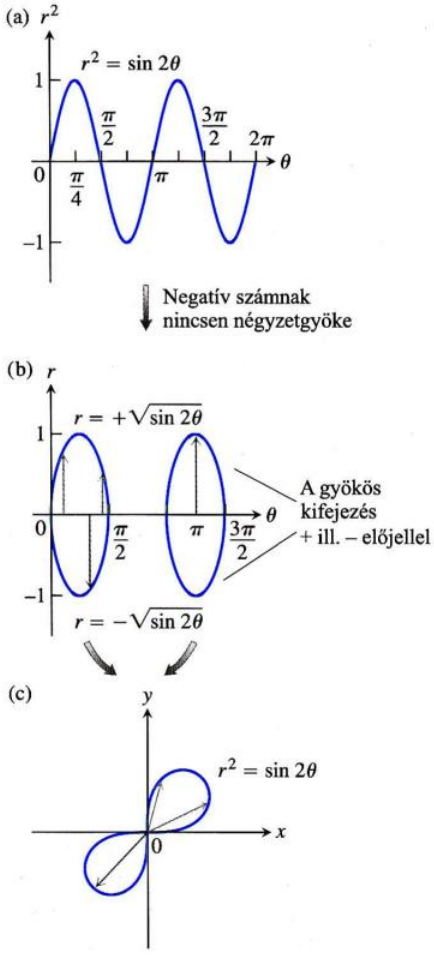
3. PÉLDA: **Egy lemniszkáta**

Ábrázoljuk az

$$r^2 = \sin 2\theta$$

görbét![2]

Megoldás: Azzal kezdjük, hogy a Descartes-féle $r^2\theta$ síkon ábrázoljuk r^2-et (és nem r-et) mint θ függvényét. Lásd a 10.46a ábrát! Innen áttérünk az $r\theta$-síkra, s ott ábrázoljuk $r = \pm\sqrt{\sin 2\theta}$-t (10.46b ábra). Aztán rajzoljuk meg csak a polárgörbét (10.46c ábra). A 10.46b grafikonja kétszeresen „lefedi" a 10.46c ábra polárgrafikonját. A görbe felső, illetve alsó felét külön is kezelhetjük. A kétszeres fedés nem okoz bajt, sőt ily módon kicsit többet is megtudhatunk a függvény viselkedéséről. □



10.46. ÁBRA: Ahhoz, hogy az $r = f(\theta)$ görbét az r, θ Descartes-síkon (b) ábrázolhassuk, először az $r^2 = \sin 2\theta$ görbét ábrázoljuk az $r^2\theta$-síkon (a), azután eltekintünk azoktól a θ értékektől, amelyekre $\sin 2\theta$ negatív. A (b) pontjai kétszeresen lefedik a (c) lemniszkáta pontjait (3. példa).

[2] Az európai terminológiának megfelelően a lemniszkáta egyenlete $r^2 = a^2 \sin 2\theta$. Ebben a példában $a = \pm 1$. (a lektor megjegyzése)

A polárkoordinátás grafikon metszéspontjainak megkeresése

Polárkoordinátákban egyetlen pontnak végtelen sok különböző koordinátapár felel meg, és ha ezek közül csak egyetlenegy is kielégíti a görbe egyenletét, akkor a pont rajta van a görbén. Ha két, egy-egy egyenlettel megadott görbe közös pontjait keressük, előfordulhat, hogy a metszéspont más koordinátákkal elégíti ki az egyik, és más koordinátákkal elégíti ki a másik egyenletet, így a két egyenletből álló egyenletrendszer megoldásai között, ami a közös koordinátájú pontokat szolgáltatja, nem biztos, hogy minden metszéspont szerepel. Ha lehetőségünk van arra, hogy ábrázoljuk a görbéket, láthatjuk, hány metszéspontot kell találnunk.

Ha algebrai úton, egyenletrendszerrel akarjuk az összes metszéspontot megkapni, akkor figyelembe kell venni, hogy ha $r = 0$, akkor θ bármekkora lehet. Ezen kívül a görbék minden egyenletével meg kell oldani az egyenletrendszert, tehát $r = f(\theta)$ esetén $-r = f(\theta + \pi)$-vel, $r = f(\theta + 2\pi)$-vel, $-r = f(\theta + 2\pi)$-vel is. Egy-egy konkrét feladatban, pl. ha periodikus függvények szerepelnek benne, ennek a (végtelen) sok egyenletrendszernek a száma jelentősen csökkenthető (49. feladat).

4. PÉLDA: **Megtévesztő polárkoordináták**

Mutassuk meg, hogy a $(2, \pi/2)$ pont rajta van az $r = 2\cos 2\theta$ görbén!

Megoldás: Első pillantásra úgy tűnik, hogy a $(2, \pi/2)$ pont nem lehet rajta a görbén, ugyanis koordinátáit a görbe egyenletébe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$2 = 2\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos \pi = -2,$$

s ez nyilvánvalóan hamis. A számérték azonos, az előjel azonban ellentétes. Ez arra ösztönöz, hogy keressünk az adott pontra olyan koordinátapárokat, amelyekben r-nek negatív az előjele. Ilyen például a $(-2, -(\pi/2))$ számpár. Ha ezt behelyettesítjük az $r = 2\cos 2\theta$ egyenletbe, akkor azt kapjuk, hogy

$$-2 = 2\cos 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2(-1) = -2,$$

azaz az egyenlőség fennáll. A $(2, \pi/2)$ pont tehát mégis rajta van a görbén. □

5. PÉLDA: **Nehezen megtalálható metszéspontok**

Határozzuk meg az

$$r^2 = 2\cos\theta \quad \text{és} \quad r = 1 - \cos\theta$$

görbék metszéspontjait!

Megoldás: Descartes-koordinátákban mindig meg tudjuk határozni két görbe metszéspontjait oly módon, hogy megkeressük a görbeegyenletek közös megoldásait. Polárkoordinátákban más a helyzet. Az egyenletek közös megoldásai megadnak némely metszéspontot, másokat viszont nem. Ebben a példában az egyenletek közös megoldásaként a négy metszéspont közül csak kettőt kapunk meg. A többit itt és most ábrázolás révén. (Algebrai úton lásd a 49. feladatot.)

Ha $\cos\theta = r^2/4$-et behelyettesítjük az $r = 1 - \cos\theta$ egyenletbe, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} r = 1 - \cos\theta &= 1 - \frac{r^2}{4} \\ 4r &= 4 - r^2 \\ r^2 + 4r - 4 &= 0 \\ r &= -2 \pm 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

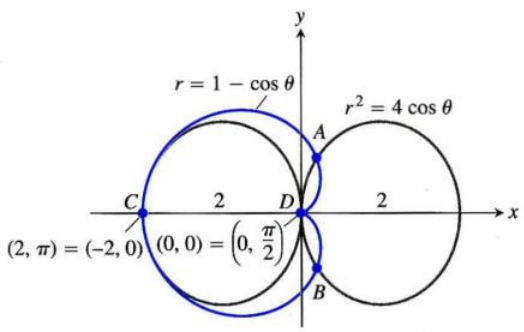
másodfokú egyenlet megoldóképlete

Az $r = -2 - 2\sqrt{2}$ érték abszolút értékben túl nagy ahhoz, hogy valamelyik görbéhez tartozhassék. Az $r = -2 + 2\sqrt{2}$-höz tartozó θ értékek:

$$\begin{aligned}
\theta &= \arccos(1 - r) && r = 1 - \cos\theta\text{-ból} \\
&= \arccos(1 - (2\sqrt{2} - 2)) && \text{behelyettesítettük } r = 2\sqrt{2} - 2\text{-t} \\
&= \arccos(3 - 2\sqrt{2}) \\
&= \pm 80°. && \text{kerekítve}
\end{aligned}$$

Ezzel azonosítottunk két metszéspontot: $(r, \theta) = (2\sqrt{2} - 2, \pm 80°)$.

Ha együtt ábrázoljuk az $r^2 = 4\cos\theta$ és az $r = 1 - \cos\theta$ egyenletet (10.47. ábra), amit egyszerűen megtehetünk úgy, hogy fedésbe hozzuk a 10.44. és a 10.45. ábrát, láthatjuk, hogy a görbék a $(2, \pi)$ pontban és a kezdőpontban is metszik egymást. Miért nem jelentek meg az egyenlet megoldásaiként ezeknek a pontoknak megfelelő r értékek? A válasz az, hogy a $(0,0)$ és $(2, \pi)$ pontok ezen koordinátái nem elégítik ki egyidejűleg az adott két egyenletet. Ugyanahhoz az r értékhez nem ugyanaz a θ érték tartozik, mégha a pont maga ugyanaz is. Az $r = 1 - \cos\theta$ görbe akkor éri el a $(2, \pi)$ pontot, amikor $\theta = \pi$. Az $r^2 = 4\cos\theta$ görbe pedig akkor, amikor $\theta = 0$. Hasonlóan, a kardioid akkor éri el a kezdőpontot, amikor $\theta = 0$, az $r^2 = 4\cos\theta$ görbe azonban akkor, amikor $\theta = \pi/2$. □



10.47. ÁBRA: Az $r = 1 - \cos\theta$ és $r^2 = \sin 2\theta$ görbék metszéspontjai (5. példa). Az egyenletek közös megoldásaként csak az A és a B metszéspont adódik. A másik két metszéspont ábrázolással tárul fel, vagy helyes algebrai megoldással.

Polárgörbék paraméteres ábrázolása

Bonyolult polárgörbéket grafikus kalkulátor vagy számítógép segítségével lehet felrajzolni. Ha a program közvetlenül nem képes ábrázolni polárgörbéket, akkor az $r = f(\theta)$ összefüggést az

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$$

egyenletek segítségével először paraméteres alakra kell hozni. Azután a program segítségével felrajzoljuk a paraméterezett görbét az xy-síkban. Szükség lehet arra, hogy θ helyett inkább egy másik, t paramétert használjunk.

10.6. Feladatok

Szimmetriák és polárgörbék

Állapítsuk meg, hogy az 1–12. feladatokban megadott görbék milyen szimmetriatulajdonságokkal rendelkeznek! Aztán ábrázoljuk a görbéket!

1. $r = 1 + \cos\theta$ **2.** $r = 2 - 2\cos\theta$ **3.** $r = 1 - \sin\theta$

4. $r = 1 + \sin\theta$ **5.** $r = 2 + \sin\theta$ **6.** $r = 1 + 2\sin\theta$

7. $r = \sin(\theta/2)$ **8.** $r = \cos(\theta/2)$ **9.** $r^2 = \cos\theta$

10. $r^2 = \sin\theta$ **11.** $r^2 = -\sin\theta$ **12.** $r^2 = -\cos\theta$

Ábrázoljuk a 13–16. feladatokban megadott lemniszkátákat! Milyen szimmetriatulajdonságokkal rendelkeznek?

13. $r^2 = 4\cos 2\theta$ **14.** $r^2 = 4\sin 2\theta$

15. $r^2 = -\sin 2\theta$ **16.** $r^2 = -\cos 2\theta$

Polárgörbék meredeksége

Határozzuk meg a 17–20. feladatokban megadott görbék meredekségét a megadott pontban! Ábrázoljuk a görbéket az adott pontbeli érintőjük környezetében!

17. Kardioid: $r = -1 + \cos\theta;\ \theta = \pm\pi/2$

18. Kardioid: $r = -1 + \sin\theta;\ \theta = 0, \pi$

19. Négylevelű lóhere: $r = \sin 2\theta;\ \theta = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4$

20. Négylevelű lóhere: $r = \cos 2\theta;\ \theta = 0, \pm\pi/2, \pi$

Csigagörbék

Ábrázoljuk a 21–24. feladatokban megadott csigagörbéket! A grafikonból kiderül, hogy miért hívjuk így ezeket a görbéket. Az alábbiakban 4 alapgörbével ismerkedhetünk meg. A csigagörbék egyenlete $r = a \pm b\cos\theta$ vagy $r = a \pm b\sin\theta$.

21. Belső hurokkal rendelkező csigavonalak:

(a) $r = \frac{1}{2} + \cos\theta$ **(b)** $r = \frac{1}{2} + \sin\theta$

22. Kardioidok:

(a) $r = 1 - \cos\theta$ **(b)** $r = -1 + \sin\theta$

23. Gödrös csigavonalak:

(a) $r = \frac{3}{2} + \cos\theta$ **(b)** $r = \frac{3}{2} - \sin\theta$

24. Ovális csigavonalak:

(a) $r = 2 + \cos\theta$ **(b)** $r = -2 + \sin\theta$

Polárkoordinátákban felírt egyenlőtlenségek ábrázolása

25. Ábrázoljuk a $-1 \le r \le 2$ és $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ egyenlőtlenségekkel megadott tartományt!

26. Ábrázoljuk a $0 \le r \le 2\sec\theta$ és $-\pi/4 \le \theta \le \pi/4$ egyenlőtlenségekkel megadott tartományt!

27. Ábrázoljuk a $0 \le r \le 2 - 2\cos\theta$ egyenlőtlenséggel megadott tartományt!

28. Ábrázoljuk a $0 \le r^2 \le \cos\theta$ egyenlőtlenséggel megadott tartományt!

Metszéspontok

29. Mutassuk meg, hogy a $(2, 3\pi/4)$ pont rajta van az $r = 2\sin 2\theta$ görbén!

30. Mutassuk meg, hogy az $(1/2, 3\pi/2)$ pont rajta van az $r = -\sin(\theta/3)$ görbén!

Határozzuk meg a 31–38. feladatokban megadott görbepárok metszéspontjait!

31. $r = 1 + \cos\theta,\quad r = 1 - \cos\theta$

32. $r = 1 + \sin\theta,\quad r = 1 - \sin\theta$

33. $r = 2\sin\theta,\quad r = 2\sin 2\theta$ **34.** $r = \cos\theta,\quad r = 1 - \cos\theta$

35. $r = \sqrt{2},\quad r^2 = 4\sin\theta$

36. $r^2 = \sqrt{2}\sin\theta,\quad r^2 = \sqrt{2}\cos\theta$

37. $r = 1,\quad r^2 = 2\sin 2\theta$

38. $r^2 = \sqrt{2}\cos 2\theta,\quad r^2 = \sqrt{2}\sin 2\theta$

Határozzuk meg a 39–42. feladatokban megadott görbepárok metszéspontjait!

39. $r^2 = \sin 2\theta,\quad r^2 = \cos 2\theta$

40. $r = 1 + \cos\frac{\theta}{2},\quad r = 1 - \sin\frac{\theta}{2}$

41. $r = 1,\quad r = 2\sin 2\theta$ **42.** $r = 1,\quad r^2 = 2\sin 2\theta$

Grafikai felfedezőút

43. Az alábbi görbék közül melyiknek ugyanaz a grafikonja, mint az $r = 1 - \cos\theta$-nak?

(a) $r = -1 - \cos\theta$ **(b)** $r = 1 + \cos\theta$

A feleletet algebrai módszerrel ellenőrizzük!

44. Az alábbi görbék közül melyiknek ugyanaz a grafikonja, mint az $r = \cos 2\theta$-nak?

(a) $r = -\sin(2\theta + \frac{\pi}{2})$ **(b)** $r = -\cos(\frac{\theta}{2})$

A feleletet algebrai módszerrel ellenőrizzük!

45. Rózsa a rózsában: Ábrázoljuk az $r = 1 - 2\sin 3\theta$ egyenletet!

46. Vesegörbe: Ábrázoljuk az $r = 1 + 2\sin\frac{\theta}{2}$ görbét!

47. Rózsák: Ábrázoljuk az $r = \cos m\theta$ görbét $m = 1/3$, 2, 3 és 7 esetén!

48. Spirálgörbék: A polárkoordináták a spirálgörbék felírásának legalkalmasabb eszközei. Ábrázoljuk a következő spirálokat!

(a) $r = \theta$

(b) $r = -\theta$

(c) *Logaritmikus spirál:* $r = e^{\theta/10}$

(d) *hiperbolikus spirál:* $r = 8/\theta$

(e) *Ekvilaterális hiperbola:* $r = \pm 10/\sqrt{\theta}$. (A két ág legyen eltérő színű.)

Elmélet példákkal

49. (*az 5. példa folytatása*) Az

$$r^2 = 4\cos\theta \tag{10.30}$$

$$r = 1 - \cos\theta \tag{10.31}$$

egyenletek közös megoldásával nem kaptuk meg a görbék $(0,0)$ és $(2,\pi)$ metszéspontjait.

(a) A $(2,\pi)$ pontot mégis megkapjuk, ha (10.30)-ben (r,θ)-t a vele ekvivalens $(-r,\theta+\pi)$-vel helyettesítjük. Ekkor ugyanis azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} r^2 &= 4\cos\theta \\ (-r)^2 &= 4\cos(\theta+\pi) \\ r^2 &= -4\cos\theta. \end{aligned} \tag{10.32}$$

(10.31) és (10.32) közös megoldását megkeresve látni fogjuk, hogy $(2,\pi)$ szokványos megoldásként adódik. Mivel r kifejezésében θ-nak csak koszinuszai szerepelnek, és a koszinusz 2π szerint periodikus, a görbék többi, $(\theta + 2\pi)$-t tartalmazó egyenletét felesleges vizsgálni. (A (0, 0) pontbeli metszéspontot így sem kapjuk meg.)

(b) A kezdőpont egy másik speciális eset, amit külön kell vizsgálni. Nézzük meg, az origó rajta van-e görbéken. A (10.30) és (10.31) egyenletekbe helyettesítsünk $r = 0$-t, s az egyenleteket külön-külön megoldva keressük meg a megfelelő θ értékeket. Mivel $(0, \theta)$ bármilyen θ érték mellett a kezdőpontot jelenti, ez azt mutatja, hogy mind a két görbe áthalad a kezdőponton még akkor is, ha ezt különböző θ értékek mellett teszik.

50. Tegyük fel, hogy egy görbe ennek az alfejezetnek az elején felsorolt szimmetriák közül kettővel rendelkezik. Ez a két tulajdonság jelent-e valamit a harmadikra nézve? Válaszunkat indokoljuk!

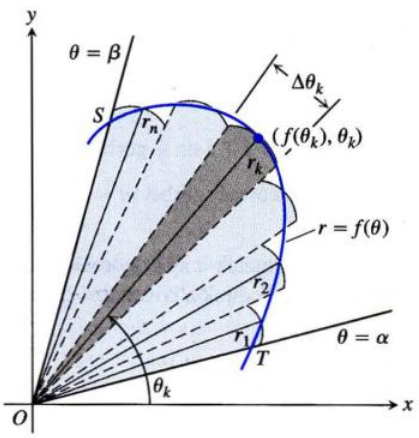
51. Maximum milyen széles a szirma az $r = \cos 2\theta$ négyszirmú rózsának, amely az x-tengelyen fekszik?

52. Az $r = 2(1 + \cos\theta)$ kardioid legfelső pontja mennyivel van az x-tengely fölött?

10.7. Terület és hosszúság polárkoordinátákban

Ebben az alfejezetben arról lesz szó, hogyan kell kiszámolni polárkoordinátákban adott görbék hosszát, tartományok területét és forgástestek felszínét.

Szektortartomány területe



10.48. ÁBRA: Az OTS tartomány területét úgy vezetjük le, hogy legyezőszerű körszektorokkal közelítjük.

A 10.48. ábrán látható OTS tartományt a $\theta = \alpha$ és $\theta = \beta$ félegyenesek, valamint az $r = f(\theta)$ görbe határolja. A tartományt a TOS szög egy P felosztásához tartozó n számú, egymást nem átfedő, legyező alakú körszektorral közelítjük. Egy tipikus körszektor sugara $r_k = f(\theta_k)$, radiánban mért középponti szöge pedig $\Delta\theta_k$. Területe az r_k sugarú kör területének $\Delta\theta_k/2\pi$-szerese vagy

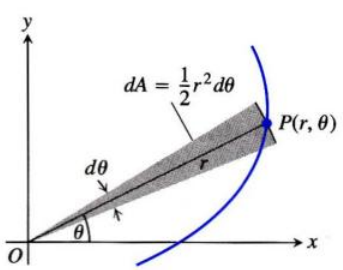
$$A_k = \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\theta_k = \frac{1}{2} (f(\theta_k))^2 \Delta\theta_k.$$

Az OTS tartomány területe közelítőleg

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} (f(\theta_k))^2 \Delta\theta_k.$$

A felosztás $\|P\|$ normáját az eddigiekhez hasonlóan a $\Delta\theta_k$ értékek maximumával definiáljuk. Folytonos f függvény esetén azt várjuk, hogy a közelítés javul, ha a felosztás normájára $\|P\| \to 0$, és a tartomány területére végül is a következő összefüggés adódik:

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} (f(\theta_k))^2 \Delta\theta_k$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} (f(\theta_k))^2 \, d\theta.$$



10.49. ÁBRA: Az $r = f(\theta)$ görbe dA területdifferenciálja.

Az $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$ (legyező alakú) görbevonalú szektortartomány területe

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta.$$

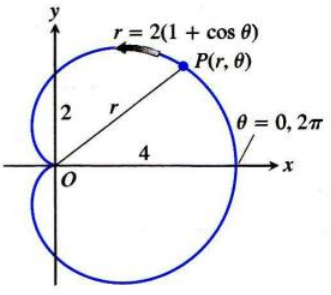
Ez a

$$dA = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2} (f(\theta))^2 \, d\theta$$

területdifferenciál (10.49. ábra) integrálja.

1. PÉLDA: **Területszámítás**

Számítsuk ki az $r = 2(1 + \cos\theta)$ kardioidgörbe által közrezárt tartomány területét!



10.50. ÁBRA: Az 1. példában szereplő kardioid.

Megoldás: Felrajzoljuk a kardioidot (10.50. ábra). Annak a tartománynak a területét kell meghatároznunk, amelyet az OP szakasz söpör végig, miközben θ pontosan egyszer felveszi a 0 és 2π közötti értékeket. Ezért a terület:

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2}r^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cdot 4(1+\cos\theta)^2 d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} 2(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(2+4\cos\theta+2\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (3+4\cos\theta+\cos 2\theta)d\theta$$
$$= \left[3\theta+4\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 6\pi - 0 = 6\pi. \qquad \square$$

2. PÉLDA: Területszámítás

Számítsuk ki az

$$r = 2\cos\theta + 1$$

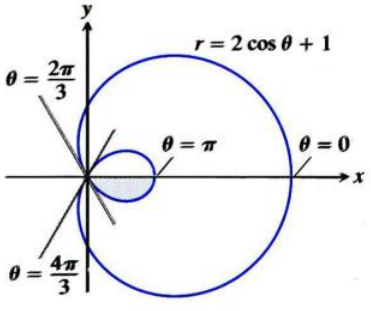
görbe kisebbik hurka által közrezárt tartomány területét!

Megoldás: Ha ábrázoljuk a görbét (10.51. ábra) láthatjuk, hogy a kisebbik hurkon akkor söpör végig az (r,θ) pont, amikor θ $2\pi/3$ és $4\pi/3$ közötti értékeket vesz fel. Mivel a görbe szimmetrikus az x-tengelyre nézve (az egyenlet nem változik, ha θ-t $-\theta$-val helyettesítjük), számolhatunk a belső hurok satírozott felével, s ekkor $\theta = 2\pi/3$-tól $\theta = \pi$-ig kell integrálnunk. A keresett terület az

$$A = 2\int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2}r^2 d\theta = \int_{2\pi/3}^{\pi} r^2 d\theta$$

integrál kétszerese lesz. Mivel

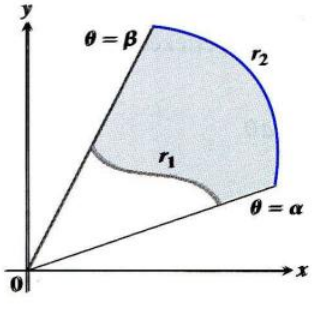
$$r^2 = (2\cos\theta+1)^2 = 4\cos^2\theta + 4\cos\theta + 1$$
$$= 4\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} + 4\cos\theta + 1$$
$$= 2 + 2\cos 2\theta + 4\cos\theta + 1$$
$$= 3 + 2\cos 2\theta + 4\cos\theta,$$



10.51. ÁBRA: Az 1. példában szereplő csigagörbe.

ezért

$$A = \int_{2\pi/3}^{\pi} (3+2\cos 2\theta + 4\cos\theta)d\theta$$
$$= \left[3\theta + \sin 2\theta + 4\sin\theta\right]_{2\pi/3}^{\pi}$$
$$= 3\pi - \left(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}. \qquad \square$$



10.52. ÁBRA: A satírozott tartomány területét úgy számíthatjuk ki, hogy az r_2 görbe és az origó közötti területből kivonjuk az r_1 görbe és az origó közé eső területet.

A 10.52. ábrán láthatóhoz hasonló tartományok területét, amelyeket két polárkoordinátákban felírt görbe, $r_1 = r_1(\theta)$ és $r_2 = r_2(\theta)$ határol ($\theta \in [\alpha,\beta]$), úgy

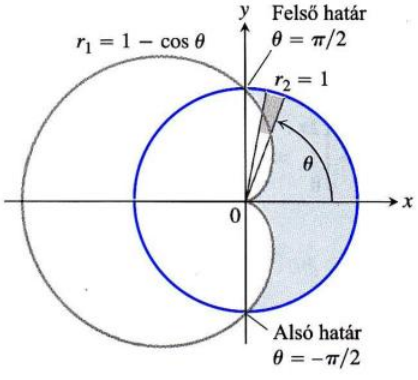
számíthatjuk ki, hogy az $(1/2)r_2^2 d\theta$ integrálból kivonjuk az $(1/2)r_1^2 d\theta$ integrált. Ez a következő összefüggéshez vezet:

A $0 \le r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$ tartomány területe

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r_2^2 d\theta - \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r_1^2 d\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) d\theta. \qquad (10.33)$$

3. PÉLDA: **Polárkoordinátákban megadott görbék által határolt terület kiszámítása**

Számítsuk ki annak a tartománynak a területét, amely az $r = 1$ sugarú körön belül, de az $r = 1 - \cos\theta$ kardioidon kívül fekszik!



10.53. ÁBRA: A 3. példában szereplő tartomány és az integrálás határai.

Megoldás: Ábrázoljuk a tartományt, állapítsuk meg határait és keressük meg az integrálási határokat (10.53. ábra). $r_2 = 1$ lesz a külső görbe, $r_1 = 1 - \cos\theta$ a belső görbe, θ pedig $-\pi/2$ és $\pi/2$ közötti értékeket vehet fel. A (10.33) egyenlet alapján a terület:

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2) d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2) d\theta \qquad \text{szimmetria}$$

$$= \int_0^{\pi/2} (2\cos\theta - \cos^2\theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(2\cos\theta - \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \left[2\sin\theta - \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = 2 - \frac{\pi}{4}. \qquad \square$$

Polárgörbe ívhossza

Az $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$ görbe ívhosszára polárkoordinátákban felírt összefüggést nyerhetünk, ha a görbét az

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta, \qquad \alpha \le \theta \le \beta \quad (10.34)$$

alakban paraméterezzük. A 6.3. alfejezet (6.1) képletéből, a paraméteres ívhosszképletből ekkor az adódik, hogy

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

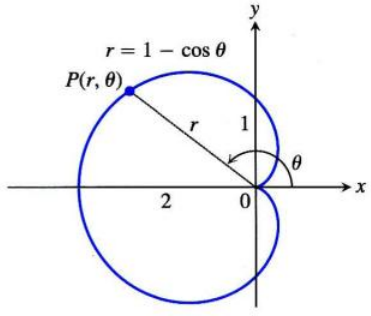
Ha ebbe a képletbe behelyettesítjük x és y (10.34)-beli értékét (33. feladat):

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

Polárgörbe ívhossza

Ha $r = f(\theta)$-nak van első deriváltja, és az folytonos az $\alpha \le \theta \le \beta$ intervallumon, és ha a $P(r, \theta)$ pont pontosan egyszer söpri végig az $r = f(\theta)$ görbét, miközben θ végigfut az α és β közötti értékeken, akkor a görbe ívhossza

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta. \qquad (10.35)$$



10.54. ÁBRA: Kardioid ívhosszának kiszámítása (4. példa).

4. PÉLDA: **A kardioid ívhosszának kiszámítása**

Határozzuk meg az $r = 1 - \cos\theta$ kardioid ívhosszát!

Megoldás: Ábrázoljuk a görbét és határozzuk meg az integrálási határokat (10.54. ábra). A $P(r,\theta)$ pont az óramutató járásával ellentétes irányban egyszer fut végig a görbén, miközben θ 0-ról 2π-re nő, így ezek lesznek α és β értékei. Az

$$r = 1 - \cos\theta, \qquad \frac{dr}{d\theta} = \sin\theta$$

értékekkel azt kapjuk, hogy

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = (1-\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2$$
$$= 1 - 2\cos\theta + \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1} = 2 - 2\cos\theta$$

és

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta \qquad 1-\cos\theta = 2\sin^2\tfrac{\theta}{2}$$
$$= \int_0^{2\pi} 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta \qquad \sin\tfrac{\theta}{2} \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ esetén}$$
$$= \left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 4+4 = 8. \qquad \square$$

Forgásfelület felszíne

Forgásfelület felszínére úgy kaphatunk polárkoordinátákban felírt összefüggést, hogy a (10.34) egyenletek segítségével paraméterezzük az $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ görbét, és a 6.5. alfejezetbeli, paraméterezett görbékre vonatkozó felszínképleteket alkalmazzuk rá.

Polárgörbe forgatásával előálló felület felszíne

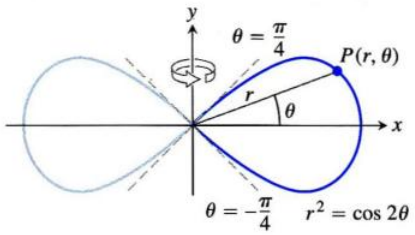
Ha $r = f(\theta)$-nak az $\alpha \leq \theta \leq \beta$ intervallumban van deriváltja, és az folytonos, valamint ha a $P(r,\theta)$ pont pontosan egyszer járja be a görbét, miközben θ felveszi az α és β közötti értékeket, akkor a görbe x-, illetve y-tengely körüli forgatásával előálló forgásfelület felszínére a következő képleteket kapjuk:

1. x-tengely körüli forgatás ($y \geq 0$):

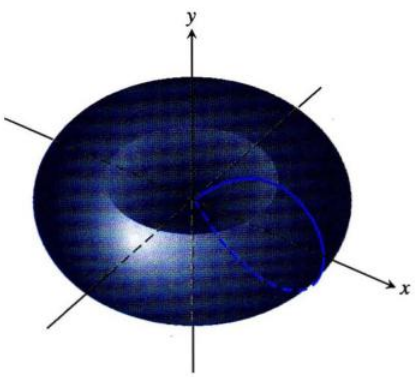
$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi r\sin\theta\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)}\,d\theta \qquad (10.36)$$

2. y-tengely körüli forgatás ($x \geq 0$):

$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi r\cos\theta\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)}\,d\theta \qquad (10.37)$$



(a)



(b)

10.55. ÁBRA: A lemniszkáta jobb oldali hurokja (a) y-tengely körüli megforgatásával generált felület (b), amelynek felszínét az 5. példában számoltuk ki.

5. PÉLDA: **Felszínszámítás**

Határozzuk meg annak a forgásfelületnek a felszínét, amely az $r^2 = \cos 2\theta$ lemniszkáta jobb oldali hurkának y-tengely körüli forgatásával keletkezik.

Megoldás: Ábrázoljuk a hurkot, hogy megállapíthassuk az integrálási határokat (10.55a ábra). A $P(r,\theta)$ görbe az óramutató járásával ellentétes irányban pontosan egyszer járja be a görbét, miközben θ $-\pi/4$-ről $\pi/4$-re nő, így ezek az értékek lesznek α és β értékei. A (10.37)-ben szereplő integrandus értékét több lépésben számítjuk ki. Először is

$$2\pi r\cos\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = 2\pi\cos\theta\sqrt{r^4+\left(r\frac{dr}{d\theta}\right)^2}. \qquad (10.38)$$

Azután $r^2 = \cos 2\theta$, így

$$2r\frac{dr}{d\theta} = -2\sin 2\theta$$
$$r\frac{dr}{d\theta} = -\sin 2\theta$$
$$\left(r\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \sin^2 2\theta.$$

Végül $r^4 = (r^2)^2 = \cos^2 2\theta$, így a (10.38) jobb oldalán a négyzetgyök:

$$\sqrt{r^4+\left(r\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta} = 1$$

alakra egyszerűsödik. Mindent összevetve azt kapjuk, hogy

$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi r\cos\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \qquad \text{(10.38) egyenlőség}$$
$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (2\pi\cos\theta)\cdot 1\,d\theta$$
$$= 2\pi\Big[\sin\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$
$$= 2\pi\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 2\pi\sqrt{2}. \qquad \square$$

10.7. Feladatok

Polárgörbe által határolt szektortartomány területe

Határozzuk meg az 1–6. feladatokban megadott tartományok területét!

1. Az $r = 4+2\cos\theta$ ovális csigavonal belseje
2. Az $r = a(1+\cos\theta)$, $a>0$ kardioid belseje
3. Az $r = 2\cos\theta$ négylevelű lóhere egyik levele
4. Az $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$, $a>0$ lemniszkáta belseje
5. Az $r^2 = 4\sin 2\theta$ lemniszkáta belseje
6. Az $r^2 = 2\sin 2\theta$ hatlevelű lóhere belseje

Görbevonalú szektortartományok közös részének területe

Határozzuk meg a 7–16. feladatokban megadott görbék által határolt tartományok közös részének területét!

7. Az $r = 2\cos\theta$ és az $r = 2\sin\theta$ körök
8. Az $r = 1$ és $r = 2\sin\theta$ körök
9. Az $r = 2$ kör és az $r = 2(1-\cos\theta)$ kardioid
10. Az $r = 2(1+\cos\theta)$ és az $r = 2(1-\cos\theta)$ kardioidok
11. Az $r^2 = 6\cos 2\theta$ lemniszkáta belseje és az $r = \sqrt{3}$ kör körön kívül eső tartomány
12. Az $r = 3a\cos\theta$ kör belseje és az $r = a(1+\cos\theta)$ $a>0$ kardioidon kívül eső tartomány

13. Az $r = -2\cos\theta$ kör belseje és az $r = 1$ kör külseje

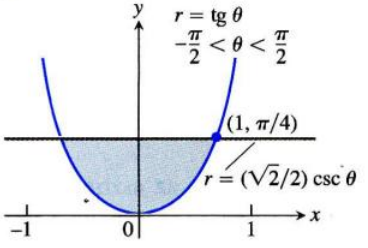
14. **(a)** Az $r = 2\cos\theta + 1$ görbe külső hurkának belső része (lásd a 10.51. ábrát).

(b) Az $r = 2\cos\theta + 1$ görbe külső hurkának belseje és belső hurkának külseje

15. Az $r = 6$ kör belsejének az $r = 3\csc\theta$ egyenes fölötti része

16. Az $r^2 = 6\cos 2\theta$ lemniszkáta belsejének az $r = 3/(2\cos\theta)$ egyenestől jobbra eső része

17. **(a)** Határozzuk meg a mellékelt ábrán látható satírozott tartomány területét!



(b) Úgy tűnik, hogy az $r = \operatorname{tg}\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ görbe grafikonja aszimptotikusan közelít az $x = 1$ és $x = -1$ egyenesekhez. Igaz ez? Válaszunkat indokoljuk!

18. Az $r = \cos\theta + 1$ kardioidon belül, de az $r = \cos\theta$ körön kívül fekvő tartomány területe nem

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(\cos\theta+1)^2 - \cos^2\theta]d\theta = \pi.$$

Miért nem? Mi a terület valódi értéke? Válaszunkat indokoljuk!

Polárgörbék ívhossza

Határozzuk meg a 19–27. feladatokban megadott görbék ívhosszát!

19. Az $r = \theta^2$ spirális, $0 \le \theta \le \sqrt{5}$

20. Az $r = e^\theta/\sqrt{2}$ exponenciális spirális, $0 \le \theta \le \pi$

21. Az $r = 1 + \cos\theta$ kardioid

22. Az $r = a\sin^2(\theta/2)$ görbe, $0 \le \theta \le \pi$, $a > 0$

23. Az $r = 6/(1+\cos\theta)$, $0 \le \theta \le \pi/2$ parabolaszelet

24. Az $r = 2/(1-\cos\theta)$, $\pi/2 \le \theta \le \pi$ parabolaszelet

25. Az $r = \cos^3(\theta/3)$, $0 \le \theta \le \pi/4$ görbe

26. Az $r = \sqrt{1+\sin 2\theta}$, $0 \le \theta \le \pi\sqrt{2}$ görbe

27. Az $r = \sqrt{1+\cos 2\theta}$, $0 \le \theta \le \pi\sqrt{2}$ görbe

28. Körkerület: Ha egy új formulával van dolgunk, általában célszerű kipróbálni valami ismert objektumon, mert így meggyőződhetünk róla, hogy a korábbi tapasztalatainkkal egyező eredményt ad-e. A (10.35) ívhosszképlettel számítsuk ki az alábbi körök kerületét:

(a) $r = a$ **(b)** $r = a\cos\theta$ **(c)** $r = a\sin\theta$

Forgásfelületek felszíne

Határozzuk meg a 29–32. feladatokban megadott görbék adott tengely körüli forgatásával előálló felületek felszínét!

29. $r = \sqrt{\cos 2\theta}$, $0 \le \theta \le \pi/4$, y-tengely

30. $r = \sqrt{2}e^{\theta/2}$, $0 \le \theta \le \pi/2$, x-tengely

31. $r^2 = \cos 2\theta$, x-tengely

32. $r = 2a\cos\theta$, $a > 0$, y-tengely

Elmélet példákkal

33. Az $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$ görbe hossza: Feltéve, hogy a szükséges deriváltak folytonosak, mutassuk meg, hogy az

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\sin\theta$$

helyettesítés az

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

kifejezést az

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

kifejezésbe viszi át!

34. Átlagérték: Ha f folytonos, akkor az $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$ görbén r-nek a θ-ra vonatkozó átlagértéke az

$$r_{\text{átl.}} = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(\theta)d\theta.$$

E képlet alkalmazásával keressük meg r θ-ra vonatkozó átlagértékét a következő görbéken ($a > 0$)

(a) Az $r = a(1-\cos\theta)$ kardioid

(b) Az $r = a$ kör

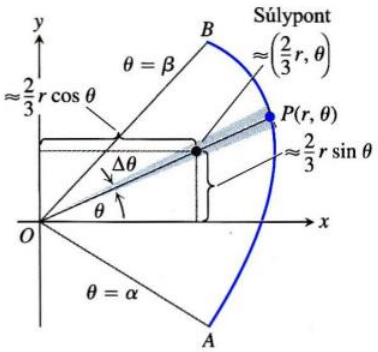
(c) Az $r = a\cos\theta$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ kör

35. $r = f(\theta)$ kontra $r = 2f(\theta)$: Mondhatunk-e valamit az $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$ és az $r = 2f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$ görbék relatív hosszáról? Válaszunkat indokoljuk!

36. $r = f(\theta)$ kontra $r = 2f(\theta)$: Az $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$ és $r = 2f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$ görbéket megforgatjuk az x-tengely körül. Mondhatunk-e valamit egymáshoz viszonyítva a felületek felszínéről?

Görbevonalú szektortartományok súlypontja

Mivel a háromszög súlypontja a súlyvonalak kétharmadánál, a csúcstól távolabb van, ezért a mellékelt ábrán látható keskeny háromszög alakú tartomány x-tengelyre vonatkozó nyomatékának erőkarja hozzávetőleg $(2/3)r\sin\theta$. Hasonlóan, az y-tengelyre vonatkozó nyomaték $(2/3)r\cos\theta$ lesz. Ez a közelítés javul, ha $\Delta\theta \to 0$, s az AOB tartomány súlypontjának koordinátáira vonatkozóan a következő összefüggésre vezet:



$$\bar{x} = \frac{\int \frac{2}{3} r\cos\theta \cdot \frac{1}{2} r^2 d\theta}{\int \frac{1}{2} r^2 d\theta} = \frac{\frac{2}{3}\int r^2 \cos\theta d\theta}{\int r^2 d\theta},$$

$$\bar{y} = \frac{\int \frac{2}{3} r\sin\theta \cdot \frac{1}{2} r^2 d\theta}{\int \frac{1}{2} r^2 d\theta} = \frac{\frac{2}{3}\int r^2 \sin\theta d\theta}{\int r^2 d\theta},$$

$\theta = \alpha$ és $\theta = \beta$ határokkal az összes integrálra.

37. Keressük meg az $r = a(1+\cos\theta)$ kardioid által határolt tartomány súlypontját!

38. Keressük meg a $0 \le r \le a, 0 \le \theta \le \pi$ félkör alakú tartomány súlypontját!

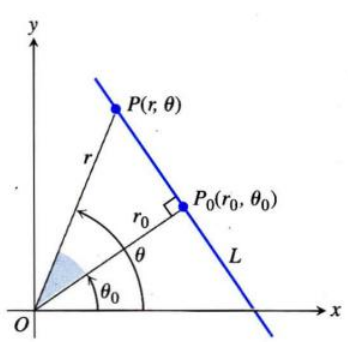
10.8. Kúpszeletek polárkoordinátákban

A polárkoordináták fontosak a csillagászatban és az asztronautikában, mert a műholdak, holdak, bolygók és üstökösök elliptikus, parabolikus és hiperbolikus pályáit polárkoordinátákban egyetlen, aránylag egyszerű koordináta-egyenlettel le lehet írni. Most ezeket az egyenleteket mutatjuk meg.

Egyenesek

Tegyük fel, hogy az origóból az L egyenesre bocsátott merőleges a $P_0(r_0, \theta_0)$ pontban metszi azt, ahol $r_0 \ge 0$ (10.56. ábra). Ha $P(r, \theta)$ az L egyenes egy másik pontja, akkor P, P_0 és O egy derékszögű háromszög csúcsai, s e háromszögből:

$$r_0 = r\cos(\theta - \theta_0).$$



10.56. ÁBRA: Az L egyenesre úgy kapunk polárkoordinátás egyenletet, hogy az OPP_0 derékszögű háromszögből leolvassuk az $r_0 = r\cos(\theta - \theta_0)$ összefüggést.

Egyenes polárkoordinátás egyenlete

Ha $P_0(r_0, \theta_0)$ az origóból az L egyenesre bocsátott merőleges talppontja és $r_0 \ge 0$, akkor L egyenlete:

$$r\cos(\theta - \theta_0) = r_0. \qquad (10.39)$$

1. PÉLDA: **Egyenes polárkoordinátás egyenletének átírása Descartes-koordinátákba**

A $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$ azonosságot felhasználva írjuk fel a 10.57. ábrán látható egyenes egyenletét Descartes-koordinátákban!

Megoldás:

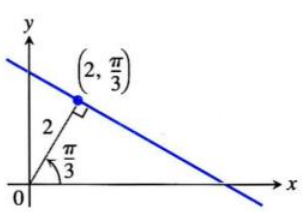
$$r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

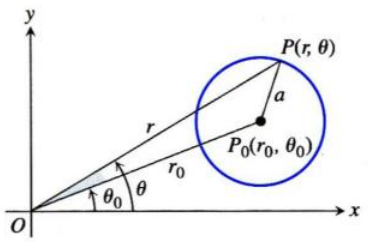
$$\frac{1}{2}r\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta = 2$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 2$$

$$x + \sqrt{3}y = 4. \qquad \square$$



10.57. ÁBRA: Ennek az egyenesnek a polárkoordinátás egyenlete az $x + \sqrt{3} = 4$ Descartes-egyenletre vezet.



10.58. ÁBRA: Ennek a körnek úgy kapjuk meg a polárkoordinátás egyenletét, hogy az OPP_0 háromszögre alkalmazzuk a koszinusz-tételt.

Körök

Az a sugarú, $P_0(r_0, \theta_0)$ középpontú kör polárkoordinátás egyenletének felírásához tekintsük a kör egy $P(r, \theta)$ pontját és az OPP_0 háromszögre alkalmazzuk a koszinusz-tételt (10.58. ábra):

$$a^2 = r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\theta - \theta_0).$$

Ha a kör átmegy az origón, akkor $r_0 = a$ és az egyenlet az

$$\begin{aligned} a^2 &= a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \theta_0) \\ r^2 &= 2ar\cos(\theta - \theta_0) \\ r &= 2a\cos(\cos\theta - \theta_0) \end{aligned}$$

alakra egyszerűsödik. Ha a kör középpontja az x-tengelyen van, akkor $\theta_0 = 0$ és az előbbinél is egyszerűbb

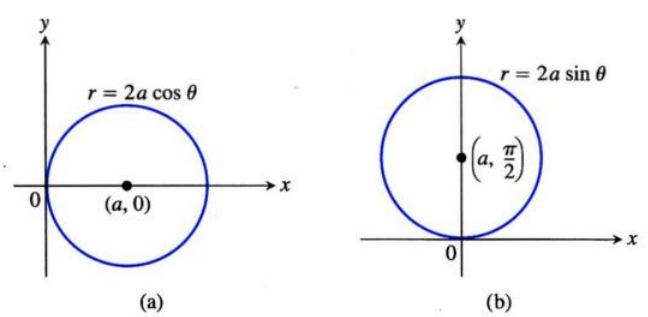
$$r = 2a\cos\theta$$

képletet kapjuk (10.59a ábra).

Ha a kör középpontja az y-tengely pozitív felén van, akkor $\theta = \pi/2$, $\cos(\theta - -\pi/2) = \sin\theta$, és az $r = 2a\cos(\theta - \theta_0)$ egyenlet

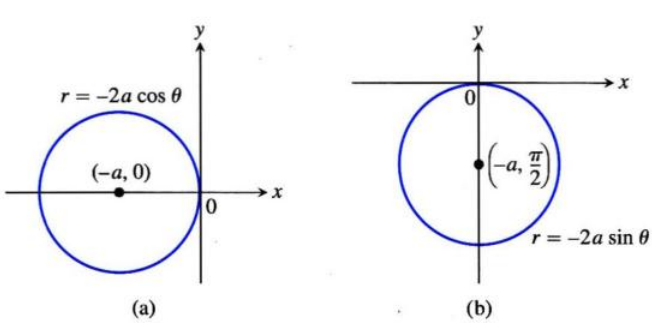
$$r = 2a\sin\theta$$

alakú lesz (10.59b ábra).



10.59. ÁBRA: Az a sugarú, origón átmenő kör polárkoordinátás egyenlete, ha középpontja (a) az x-tengely pozitív felén, (b) az y-tengely pozitív felén van.

Azoknak a köröknek az egyenletét, amelyek középpontja a koordinátatengelyek negatív felén fekszik, úgy kapjuk meg, hogy a fenti egyenletekben r-et $-r$-rel helyettesítjük (10.60 ábra).



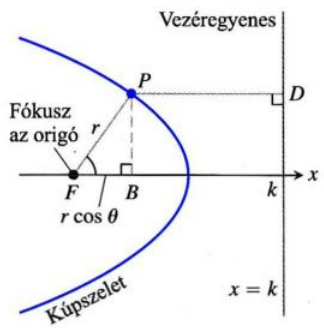
10.60. ÁBRA: Az a sugarú, origón átmenő kör polárkoordinátás egyenlete, ha középpontja (a) az x-tengely negatív felén, (b) az y-tengely negatív felén van.

2. PÉLDA: **Origón átmenő körök**

sugár	középpont (polárkoordinátákban)	polárkoordinátás egyenlet
3	$(3,0)$	$r = 6\cos\theta$
2	$(2,\pi/2)$	$r = 4\sin\theta$
1/2	$(-1/2,0)$	$r = -\cos\theta$
1	$(-1,\pi/2)$	$r = -2\sin\theta$

□

Ellipszis, parabola, hiperbola



10.61. ÁBRA: Ha úgy vesszük fel a koordináta-rendszert, hogy a kúpszelet egyik fókusza az origóra essen, vezéregyenese pedig merőleges legyen a polártengelyre és a kezdőponttól jobbra helyezkedjen el, akkor a kúpszelet polárkoordinátás egyenletét megkaphatjuk a fókusz–vezéregyenes egyenletből.

Az ellipszis, a parabola és a hiperbola egyenletét polárkoordinátákban úgy fogjuk felírni, hogy az egyik fókuszpont a kezdőpontban, e fókuszpontnak megfelelő vezéregyenes pedig az origótól jobbra elhelyezkedő $x = k$ egyenes legyen (10.61. ábra). Így

$$PF = r$$

és

$$PD = k - FB = k - r\cos\theta.$$

A kúpszelet $PF = e \cdot PD$ fókusz–vezéregyenes egyenlete ezért az

$$r = e(k - r\cos\theta)$$

alakot ölti, amiből r-et kifejezhetjük:

Az e excentricitású kúpszelet polárkoordinátás egyenlete

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta}, \qquad (10.40)$$

ahol $x = k > 0$ a függőleges vezéregyenes.

Ez az egyenlet ellipszisegyenlet, ha $0 < e < 1$, parabola, ha $e = 1$ és hiperbola, ha $e > 1$. Azaz az ellipszis, a parabola és a hiperbola egyenletét egységesen felírhatjuk az excentricitással és a vezéregyenes helyzetével kifejezve.

3. PÉLDA: **Néhány kúpszelet polárkoordinátás egyenlete**

$$e = \frac{1}{2}; \quad \text{ellipszis} \quad r = \frac{k}{2 + \cos\theta}$$

$$e = 1; \quad \text{parabola} \quad r = \frac{k}{1 + \cos\theta}$$

$$e = 2; \quad \text{hiperbola} \quad r = \frac{2k}{1 + 2\cos\theta}$$

□

(10.40) a vezéregyenes helyzetétől függően különféle változatokban fordulhat elő. Ha $x = -k$ a vezéregyenes, azaz a fókusz az origóban van, de a vezéregyenes tőle balra, akkor

$$r = \frac{ke}{1 - e\cos\theta}$$

lesz a megfelelő egyenlet. A nevezőben a + jel helyett ilyenkor − szerepel. Ha a direktrix az $y = k$ vagy $y = -k$ egyenesek valamelyike, akkor az egyenletekben koszinusz helyett szinusz szerepel, amint az a 10.62. ábrán látható.

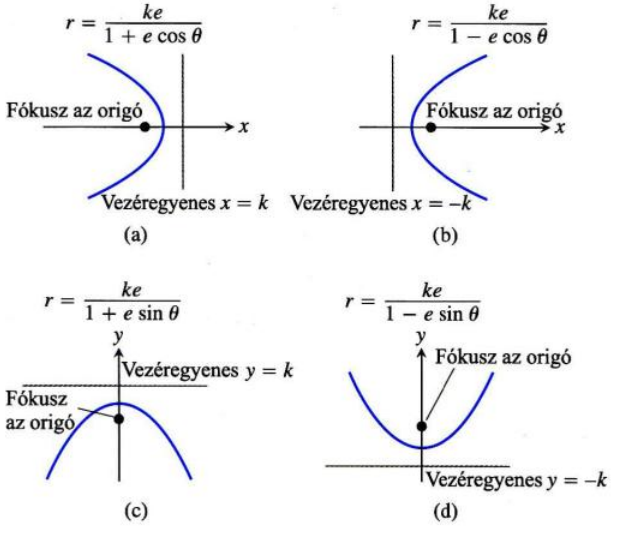
4. PÉLDA: **Hiperbola polárkoordinátás egyenlete**

Írjuk fel a 3/2 excentricitású, $x = 2$ vezéregyenesű hiperbola egyenletét!

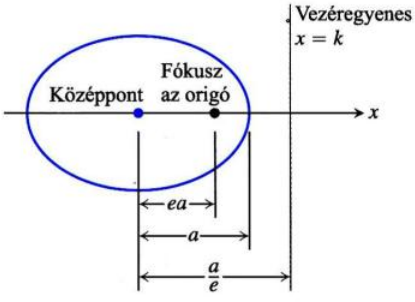
Megoldás: (10.40)-t alkalmazzuk a $k = 2$ és $e = 3/2$ esetre:

$$r = \frac{2(3/2)}{1 + (3/2)\cos\theta} \text{ vagy } r = \frac{6}{2 + 3\cos\theta}.$$

□



10.62. ÁBRA: $e > 0$ excentricitású kúpszelet egyenlete a vezéregyenes különböző elhelyezkedése esetén. Az ábrán parabolát láthatunk, tehát $e = 1$.



10.63. ÁBRA: Az a félnagytengelyű ellipszisre a fókusz–vezéregyenes távolság $k = (a/e) - ea$, így $ke = a(1 - e^2)$.

5. PÉLDA: A vezéregyenes meghatározása

Mi a vezéregyenese az $r = \dfrac{25}{10 + 10\cos\theta}$ parabolának?

Megoldás: A számlálót is, a nevezőt is elosztjuk 10-zel, így hozzuk az egyenletet olyan alakra, amiből az excentricitást könnyű leolvasni:

$$r = \frac{5/2}{1 + \cos\theta}.$$

Ez valójában az $r = \frac{ke}{1+e\cos\theta}$ egyenlet, amelyre most $k = 5/2$ és $e = 1$. A vezéregyenes egyenlete: $x = 5/2$. □

A 10.63. ábra ellipszisdiagramjáról láthatjuk, hogy k, az e excentricitás és az a félnagytengely között a

$$k = \frac{a}{e} - ea$$

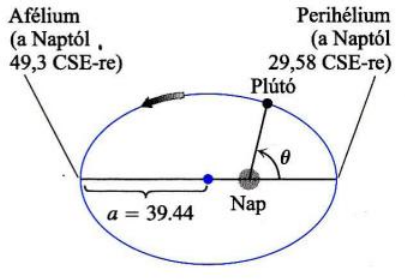
összefüggés áll fenn. Ebből $ke = a(1 - e^2)$. (10.40)-ben ke-t $a(1 - e^2)$-tel helyettesítve megkapjuk az ellipszis polárkoordinátás egyenletét.

Az e excentricitású, a félnagytengelyű ellipszis polárkoordinátás egyenlete

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}. \qquad (10.41)$$

Megjegyezzük, hogy ha $e = 0$, akkor (10.41) az $r = a$ alakot ölti, ami köregyenlet.

A (10.41) egyenlet a bolygópálya-számítás kiindulópontja.



10.64. ÁBRA: A Plútó pályája (6. példa).

6. PÉLDA: A Plútó pályája

Írjuk fel a 39,44 CSE (csillagászati egység) félnagytengelyű, 0,25 excentricitású ellipszis polárkoordinátás egyenletét! Hozzávetőleg ilyen pályán kering a Plútó a Nap körül.

Megoldás: Alkalmazzuk a (10.41) egyenletet az $a = 39{,}44$ és $e = 0{,}25$ értékekkel:

$$r = \frac{39{,}44(1 - (0{,}25)^2)}{1 + 0{,}25\cos\theta} = \frac{147{,}9}{4 + \cos\theta}.$$

Napközeli (perihélium) pontjában, amelyre $\theta = 0$, a Plútó

$$r = \frac{147{,}9}{4+1} = 29{,}58 \text{ CSE}$$

távolságra van a Naptól. Naptávoli (afélium) pontjában, amelyre $\theta = \pi$,

$$r = \frac{147{,}9}{4-1} = 49{,}3 \text{ CSE}$$

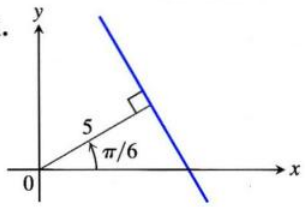
távolságra van a Naptól (10.64. ábra). □

10.8. Feladatok

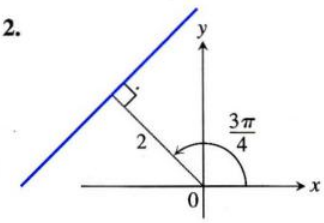
Egyenesek

Írjuk fel az 1–4. feladatok egyeneseinek egyenletét polár- és Descartes-koordinátákban!

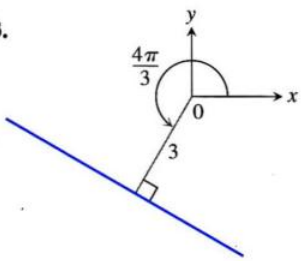
1.



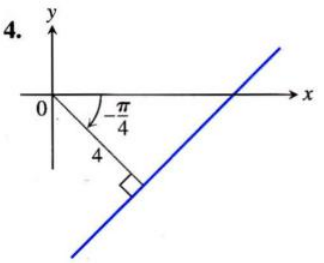
2.



3.



4.



Ábrázoljuk az 5–8. feladatok görbéit és adjuk meg egyenletüket Descartes-koordinátákban!

5. $r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ **6.** $r\cos\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right) = 1$

7. $r\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = 3$ **8.** $r\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 2$

Írjuk fel polárkoordinátákban a 9–12. feladatokban megadott egyeneseket!

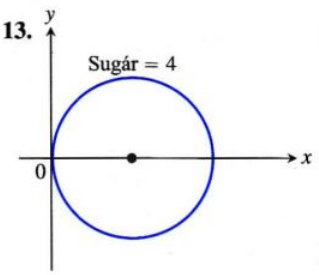
9. $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 6$ **10.** $\sqrt{3}x - y = 1$

11. $y = -5$ **12.** $x = -4$

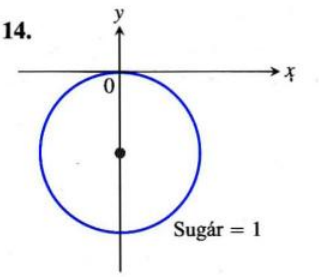
Körök

Írjuk fel a 13–16. feladatokban látható körök egyenletét polárkoordinátákban!

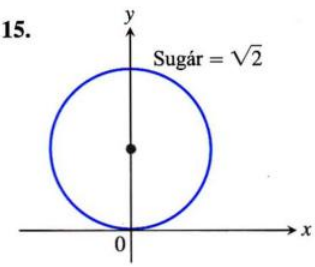
13.



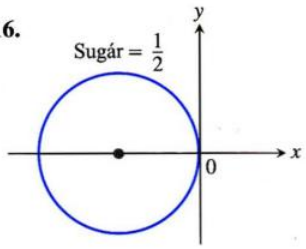
14.



15.



16.



Ábrázoljuk a 17–20. feladatokban megadott köröket, állapítsuk meg középpontjuk polárkoordinátáit és a körsugár nagyságát!

17. $r = 4\cos\theta$ **18.** $r = 6\sin\theta$

19. $r = -2\cos\theta$ **20.** $r = -8\sin\theta$

Írjuk fel a 21–28. feladatokban megadott körök egyenletét polárkoordinátákban! Ábrázoljuk a köröket a koordinátasíkon és a grafikon mellé írjuk oda mind a polár-, mind a Descartes-koordinátás egyenletüket!

21. $(x-6)^2 + y^2 = 36$ **22.** $(x+2)^2 + y^2 = 4$

23. $x^2 + (y-5)^2 = 25$ **24.** $x^2 + (y+7)^2 = 49$

25. $x^2 + 2x + y^2 = 0$ **26.** $x^2 - 16x + y^2 = 0$

27. $x^2 + y^2 + y = 0$ **28.** $x^2 + y^2 - \frac{4}{3}y = 0$

Kúpszeletek meghatározása excentricitásuk és vezéregyenesük alapján

A 29–36. feladatokban olyan kúpszeletek excentricitását adtuk meg, amelyek egyik fókusza az origóban van és megadtuk e fókusznak megfelelő vezéregyenest is. Írjuk fel e kúpszeletek polárkoordinátás egyenletét!

29. $e = 1, x = 2$ **30.** $e = 1, y = 2$

31. $e = 5, y = -6$ **32.** $e = 2, x = 4$

33. $e = 1/2, x = 1$ **34.** $e = 1/4, x = -2$

35. $e = 1/5, y = -10$ **36.** $e = 1/3, y = 6$

Parabola és ellipszis

Ábrázoljuk a 37–44. feladatokban megadott parabolákat és ellipsziseket. Vegyük fel az origóban elhelyezett fókusznak megfelelő vezéregyenest is! Írjuk fel a tengelypontok és az ellipszisek középpontjának koordinátáit is!

37. $r = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$ **38.** $r = \dfrac{6}{2+\cos\theta}$

39. $r = \dfrac{25}{10-5\cos\theta}$ **40.** $r = \dfrac{4}{2-2\cos\theta}$

41. $r = \dfrac{400}{16+8\sin\theta}$ **42.** $r = \dfrac{12}{3+3\sin\theta}$

43. $r = \dfrac{8}{2-2\sin\theta}$ **44.** $r = \dfrac{4}{2-\sin\theta}$

Egyenlőtlenségek ábrázolása

Ábrázoljuk a 45–46. feladatokban egyenlőtlenségekkel értelmezett tartományokat!

45. $0 \le r \le 2\cos\theta$ **46.** $-3\cos\theta \le r \le 0$

Grafikai felfedezőút

Ábrázoljuk a 45–46. feladatokban megadott egyeneseket és kúpszeleteket!

47. $r = 3\sec(\theta - \pi/3)$ **48.** $r = 4\sec(\theta + \pi/6)$

49. $r = 4\sin\theta$ **50.** $r = -2\cos\theta$

51. $r = 8/(4+\cos\theta)$ **52.** $r = 8/(4+\sin\theta)$

53. $r = 1/(1-\sin\theta)$ **54.** $r = 1/(1+\cos\theta)$

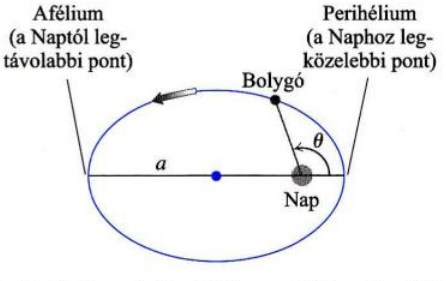
55. $r = 1/(1+2\sin\theta)$ **56.** $r = 1/(1+2\cos\theta)$

Elmélet példákkal

57. Perihélium és afélium: Egy bolygó a Nap körül olyan ellipszispályán mozog, amelynek félnagytengelye a. (Lásd a mellékelt ábrát.)

(a) Mutassuk meg, hogy afféliumban $r = a(1+e)$, perihéliumban pedig $r = (1-e)$!

(b) Az 58. feladat táblázatának adatait felhasználva számítsuk ki, mennyi a Naprendszer bolygóinak afélium-, illetve perihélium-távolsága.



58. Bolygópályák: A 6. példában polárkoordinátákban felírtuk a Plútó pályájának egyenletét. Az alábbi táblázat adatait felhasználva írjuk fel a többi bolygó pályaegyenletét is polárkoordinátákban!

Bolygó	Félnagytengely (csillagászati egység)	Excentricitás
Merkúr	0,3871	0,2056
Vénusz	0,7233	0,0068
Föld	1,000	0,0167
Mars	1,524	0,0934
Jupiter	5,203	0,0484
Szaturnusz	9,539	0,0543
Uránusz	19,18	0,0460
Neptunusz	30,06	0,0082
Plútó	39,44	0,2481

59. **(a)** Írjuk fel Descartes-koordinátákban az $r = 4\sin\theta$ és $r = \sqrt{3}\sec\theta$ görbéket!

(b) Vázoljuk a görbéket mind polár-, mind Descartes-koordináta-rendszerben és írjuk fel metszéspontjaik koordinátáit is!

60. Ismételjük meg az előző feladatot az $r = 8\cos\theta$ és $r = 2\sec\theta$ görbékkel!

61. Írjuk fel a $(0,0)$ fókuszú, $r\cos\theta = 4$ vezéregyenesű parabola polárkoordinátás egyenletét!

62. Írjuk fel a $(0,0)$ fókuszú, $r\cos(\theta - \pi/2) = 2$ vezéregyenesű parabola polárkoordinátás egyenletét!

63. **(a)** **Az asztrofizikusok excentricitásképlete:** Az asztrofizikusok excentricitásképlete egy elliptikus pályára:

$$e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}},$$

ahol r az űrhajónak a közelebbi fókusztól mért távolsága. Miért használható ez az összefüggés?

(b) **Ellipszisgörbe megrajzolása fonal segítségével:** Fonal két végére kössünk csomót és a csomókat gombostű segítségével rögzítsük egy deszkalaphoz. A fonal legyen 10 cm hosszú. Milyen távolságra kell leszúrni a gombostűket, hogy a 10.5. ábra módszerével (10.1. alfejezet) megrajzolt ellipszis excentricitása 0,2 legyen? Ez az ellipszis hasonló a Merkúr pályájához.

64. **A Halley-üstökös:** (Lásd a 10.2. alfejezet 1. példáját!)

(a) Írjuk fel a Halley üstökös pályájának egyenletét egy olyan koordináta-rendszerben, amelynek kezdőpontja a Nap, a másik fókusz pedig az x-tengely negatív felén fekszik. A koordináta-rendszer egysége legyen a csillagászati egység.

(b) Csillagászati egységben mérve milyen közel kerülhet az üstökös a Naphoz? Kilométerben mérve?

(c) Csillagászati egységben mérve milyen távol kerülhet az üstökös a Naptól? Kilométerben mérve?

A 65–68. feladatokban az adott görbe polárkoordinátás egyenletét kell felírni. Ábrázoljuk is a görbét!

65. $x^2 + y^2 - 2ay = 0$

66. $y^2 = 4ax + 4a^2$

67. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ (α, p állandók)

68. $(x^2+y^2)^2 + 2ax(x^2+y^2) - a^2y^2 = 0$

Számítógépes vizsgálatok

69. *Maple*-ben vagy *Mathematica*ban ábrázoljuk az

$$r = \frac{ke}{1+e\cos\theta}$$

görbét különféle k, e értékekre $-\pi \le \theta \le \pi$ mellett. Válaszoljunk a következő kérdésekre:

(a) Legyen $k = -2$. Mi történik az $e = 3/4$, 1 és 5/4 esetekben? Ismételjük meg az ábrázolást $k = 2$-re!

(b) Legyen $k = -1$. Mi történik az $e = 7/6, 5/4, 4/3, 3/2$, 2, 3, 5, 10 és 20 esetekben? Ismételjük meg az ábrázolást $e = 1/2, 1/3, 1/4, 1/10$ és $1/20$ esetekben!

(c) Most legyen $e > 0$ rögzített érték és vizsgáljuk a $k = -1, -2, -3, -4$ és -5 eseteket! Mikor lesz a görbe ellipszis, hiperbola, parabola?

70. *Maple*-ben vagy *Mathematica*ban ábrázoljuk az

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

ellipszist különféle $a > 0$ és $0 < e < 1$ értékekre $-\pi \le \theta \le \pi$ mellett.

(a) Legyen $e = 9/10$. Milyen a görbe, amikor $a = 1$, 3/2, 2, 3, 5 és 10? Nézzük meg ugyanezt $e = 1/4$ esetén!

(b) Legyen $a = 2$. Milyen a görbe, amikor $e = 9/10$, 8/10, 7/10, ..., 1/10, 1/20, 1/50?

10. fejezet Áttekintő kérdések

1. Mi a parabola? Mi az egyenlete Descartes-koordinátákban azoknak a paraboláknak, amelyeknek a tengelypontja a kezdőpontban van, fókuszuk pedig valamelyik koordinátatengelyen fekszik? Hogyan határozhatjuk meg az egyenlet alapján az ilyen parabolák fókuszát és vezéregyenesét?

2. Mi az ellipszis? Mi az egyenlete Descartes-koordinátákban az olyan ellipsziseknek, amelyeknek a középpontja a kezdőpontban van, fókuszaik pedig valamelyik koordinátatengelyen? Hogyan határozhatjuk meg az egyenlet alapján az ilyen ellipszisek fókuszait, tengelypontjait és vezéregyeneseit?

3. Mi a hiperbola? Mi az egyenlete Descartes-koordinátákban az olyan hiperboláknak, amelyeknek a középpontja a kezdőpontban van, fókuszaik pedig valamelyik koordinátatengelyen? Hogyan határozhatjuk meg az egyenlet alapján az ilyen hiperbolák fókuszait, tengelypontjait és vezéregyeneseit?

4. Mi egy kúpszelet excentricitása? Hogyan osztályozzuk a kúpszeleteket excentricitásuk alapján? Hogyan viszonyul egymáshoz az ellipszis alakja és excentricitása?

5. Értelmezzük a $PF = e \cdot PD$ egyenletet!

6. Mit nevezünk másodrendű görbének az xy-síkon? Mutassunk példát elfajult és nem elfajult másodrendű görbékre!

7. Hogyan adhatunk meg egy olyan új Descartes-féle koordináta-rendszert, amelyben a másodrendű görbe egyenlete már nem tartalmaz xy-os tagokat? Mutassunk példát is erre!

8. Hogyan tudjuk megmondani, hogy egy x-ben, y-ban kvadratikus görbének milyen lesz a grafikonja? Mondjunk példákat!

9. Melyek a kúpszeletek tipikus paraméterezései?

10. Mi a ciklois? Mi a ciklois szokásos paraméteres egyenletrendszere? Milyen tulajdonságai vannak a cikloisnak?

11. Mik a polárkoordináták? Milyen egyenletek kapcsolják össze a polár- és a Descartes-koordinátákat? Miért kell áttérni egyik koordináta-rendszerről a másikra?

12. Az ábrázolás tekintetében milyen következményei vannak annak, hogy a polárkoordináták nem egyértelműen vannak meghatározva? Mondjunk egy példát!

13. Hogyan ábrázolhatunk polárkoordinátás egyenleteket? A kifejtés érintse a szimmetriát, a görbe alakját, origóbeli viselkedését, valamint a Descartes-koordinátákban felrajzolt görbék alkalmazását is! Hozzunk példákat!

14. Hogyan határozzuk meg a polárkoordináta-sík $0 \le r_a(\theta) \le r \le r_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$ tartományának területét? Mutassunk konkrét példákat!

15. Milyen feltételek mellett tudjuk kiszámítani a polárkoordináta-sík $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$ görbéjének ívhosszát? Mutassuk be egy példán a szokásos számítási módot!

16. Milyen feltételek mellett tudjuk kiszámítani az $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$ görbe x-tengely körüli megforgatásával előállított felület felszínét? S ha az y-tengely a forgástengely? Mutassunk példát a tipikus számítási eljárásokra!

17. Mi az egyenes és a kúpszeletek polárkoordinátás egyenlete? Mondjunk konkrét példákat!

10. fejezet Gyakorló feladatok

Kúpszeletek ábrázolása

Ábrázoljuk az 1–4. gyakorlatok paraboláit! A rajzon a vezéregyenest és a fókuszt is tüntessük fel!

1. $x^2 = -4y$ **2.** $x^2 = 2y$

3. $y^2 = 3x$ **4.** $y^2 = -(8/3)x$

Határozzuk meg az 5–8. gyakorlatokban megadott ellipszisek és parabolák excentricitását! Ábrázoljuk a kúpszeleteket! Tüntessük fel a fókuszokat, a tengelypontokat és (ha van) az aszimptotákat is!

5. $16x^2 + 7y^2 = 112$ **6.** $x^2 + 2y^2 = 4$

7. $3x^2 - y^2 = 3$ **8.** $5y^2 - 4x^2 = 20$

Kúpszeletek eltolása

A 9–14. gyakorlatokban adva van a kúpszelet egyenlete és az eltolás mértéke. Írjuk fel az eltolással keletkező kúpszelet egyenletét, adjuk meg fókuszait, tengelypontjait, középpontját és aszimptotáit, amennyiben vannak. Ha a görbe parabola, akkor az új vezéregyenest is adjuk meg!

9. $x^2 = -12y$, jobbra 2, fel 3

10. $y^2 = 10x$, balra 1/2, le 1

11. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, balra 3, le 5

12. $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$, jobbra 5, fel 12

13. $\dfrac{y^2}{8} - \dfrac{x^2}{2} = 1$, jobbra 2, fel $2\sqrt{2}$

14. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$, balra 10, le 3

Kúpszeletek felismerése

Azonosítsuk fajtájuk szerint a 15–22. gyakorlatokban megadott kúpszeleteket, keressük meg fókusz-, tengely- és középpontjukat, valamint aszimptotáikat (amennyiben vannak). Ha a görbe parabola, akkor a vezéregyenest is adjuk meg.

15. $x^2 - 4x - 4y^2 = 0$ **16.** $4x^2 - y^2 + 4y = 8$

17. $y^2 - 2y + 16x = -49$ **18.** $x^2 - 2x + 8y = -17$

19. $9x^2 + 16y^2 + 54x - 64y = -1$

20. $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y = 44$

21. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

22. $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 1$

A diszkrimináns használata

Milyen kúpszeletet vagy elfajult kúpszeletet reprezentálnak a 23–28. gyakorlatok egyenletei? Válaszunkat minden esetben indokoljuk is!

23. $x^2 + xy + y^2 + x + y + 1 = 0$

24. $x^2 + 4xy + 4y^2 + x + y + 1 = 0$

25. $x^2 + 3xy + 2y^2 + x + y + 1 = 0$

26. $x^2 + 2xy - 2y^2 + x + y + 1 = 0$

27. $x^2 - 2xy + y^2 = 0$

28. $x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$

Kúpszeletek elforgatása

Állapítsuk meg, milyen kúpszeletek vannak megadva a 29–32. gyakorlatokban. Azután forgassuk el a koordinátatengelyeket oly módon, hogy a kúpszelet új koordináta-rendszerben felírt egyenletében már ne szerepeljen vegyes tag. (Az új egyenlet alakja függ az alkalmazott elforgatás irányától és mértékétől.)

29. $2x^2 + xy + 2y^2 - 15 = 0$

30. $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 19$

31. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 4 = 0$

32. $x^2 - 3xy + y^2 = 5$

Síkbeli paraméteres egyenletrendszerek

A 33–36. gyakorlatokban az xy-síkban mozgó részecske mozgását leíró paraméteres egyenletrendszert adtunk meg a paramétertartományokkal együtt. Állapítsuk meg, mi a részecske pályája! Írjuk fel a mozgásegyenletet Descartes-koordinátákban, jelöljük ki a mozgás irányát és azt a tartományt a görbén, amelyet a részecske bejár.

33. $x = (1/2)\operatorname{tg} t,\ y = 1/(2\cos t);\ -\pi/2 \le t \le \pi/2$

34. $x = -2\cos t,\ y = 2\sin t;\ 0 \le t \le \pi$

35. $x = -\cos t,\ y = \cos^2 t;\ 0 \le t \le \pi$

36. $x = 4\cos t,\ y = 9\sin t;\ 0 \le t \le \pi$

Grafikonok a polárkoordináta-síkban

Ábrázoljuk a 37–38. gyakorlatokban polárkoordinátás egyenlőtlenségekkel megadott tartományokat!

37. $0 \le r \le 6\cos\theta$ **38.** $-4\sin\theta \le r \le 0$

A 39–46. gyakorlatok görbéit párosítsuk az (a)–(l) egyenletekkel! Figyelem: Több egyenlet van, mint ahány grafikon!

(a) $r = \cos 2\theta$ **(b)** $r = r\cos\theta = 1$

(c) $r = \frac{6}{1-2\cos\theta}$ **(d)** $r = \sin 2\theta$

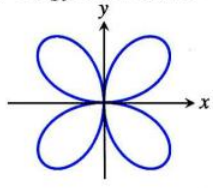
(e) $r = \theta$ **(f)** $r^2 = \cos 2\theta$

(g) $r = 1 + \cos\theta$ **(h)** $r = 1 - \sin\theta$

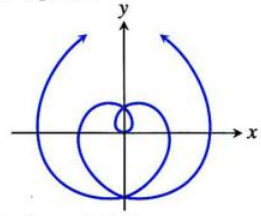
(i) $r = \frac{2}{1-\cos\theta}$ **(j)** $r^2 = \sin 2\theta$

(k) $r = -\sin\theta$ **(l)** $r = 2\cos\theta + 1$

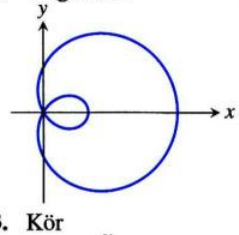
39. Négylevelű lóhere



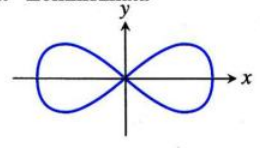
40. Spirális



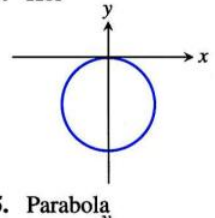
41. Csigavonal



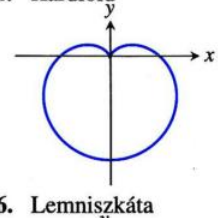
42. Lemniszkáta



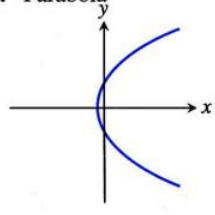
43. Kör



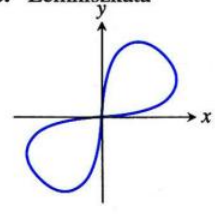
44. Kardioid



45. Parabola



46. Lemniszkáta



Egymást metsző grafikonok a polársíkon

Határozzuk meg a 47–54. gyakorlatokban polárkoordinátás egyenlettel megadott görbék metszéspontjait!

47. $r = \sin\theta,\ r = 1 + \sin\theta$

48. $r = \cos\theta,\ r = 1 - \cos\theta$

49. $r = 1 + \cos\theta,\ r = 1 - \cos\theta$

50. $r = 1 + \sin\theta,\ r = 1 - \sin\theta$

51. $r = 1 + \sin\theta,\ r = -1 + \sin\theta$

52. $r = 1 + \cos\theta,\ r = -1 + \cos\theta$

53. $r = \sec\theta,\ r = 2\sin\theta$

54. $r = -2\csc\theta,\ r = -4\cos\theta$

Polárkoordinátákról Descartes-koordinátákra

Ábrázoljuk az 55–60. gyakorlatokban megadott egyeneseket, azaz írjuk fel egyenletüket Descartes-koordinátákban!

55. $r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$

56. $r\cos\left(\theta-\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

57. $r=2\sec\theta$ **58.** $r=-\sqrt{2}\sec\theta$

59. $r=-(3/2)\csc\theta$ **60.** $r=(3\sqrt{3})\csc\theta$

Írjuk fel a 61–64. gyakorlatokban megadott körök egyenletét Descartes-koordinátákban! Rajzoljuk fel a köröket a koordinátasíkon és írjuk mellé Descartes-, illetve polárkoordinátás egyenletüket is!

61. $r=-4\sin\theta$ **62.** $r=3\sqrt{3}\sin\theta$

63. $r=2\sqrt{2}\cos\theta$ **64.** $r=-6\cos\theta$

Descartes-koordinátákról polárkoordinátákra

Írjuk fel a 65–68. gyakorlatokban megadott körök polárkoordinátás egyenletét! Ábrázoljuk a köröket a koordinátasíkon és a grafikonra írjuk rá a Descartes-, illetve polárkoordinátás egyenletet is!

65. $x^2+y^2+5y=0$ **66.** $x^2+y^2-2y=0$

67. $x^2+y^2-3x=0$ **68.** $x^2+y^2+4x=0$

Kúpszeletek polárkoordinátákban

Ábrázoljuk a 69–72. gyakorlatokban polárkoordinátákkal felírt kúpszeleteket! Adjuk meg a csúcspontok polárkoordinátáit, ellipszis esetében pedig a centrumét is!

69. $r=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$ **70.** $r=\dfrac{8}{2+\cos\theta}$

71. $r=\dfrac{6}{1-\cos\theta}$ **72.** $r=\dfrac{12}{3+\sin\theta}$

A 73–76. gyakorlatokban szereplő kúpszeletek egyik fókusza a polárkoordinátasík kezdőpontja. Megadtuk a kúpszeletek excentricitását és az említett fókuszhoz tartozó vezéregyenest. Írjuk fel a kúpszelet polárkoordinátás egyenletét!

73. $e=2, r\cos\theta=2$ **74.** $e=1, r\cos\theta=-4$

75. $e=1/2, r\sin\theta=2$ **76.** $e=1/3, r\sin\theta=-6$

Terület, ívhossz és felszín polárkoordinátákban

A 77–80. gyakorlatokban határozzuk meg a polárkoordináta-sík megadott tartományainak területét!

77. Az $r=\sin 3\theta$ háromlevelű lóhere egyik levele által határolt tartomány.

78. Az $r=2-\cos\theta$ görbe által határolt tartomány.

79. A tartomány $r=1+\cos 2\theta$ „nyolcasgörbén" belül és az $r=1$ körön kívül helyezkedik el.

80. Az $r=2(1+\sin\theta)$ kardioidon kívül eső tartomány és az $r=2\sin\theta$ kör belsejének metszete.

Határozzuk meg a 81–84. gyakorlatokban polárkoordinátákban megadott görbék ívhosszát!

81. $r=-1+\cos\theta$

82. $r=2\sin\theta+2\cos\theta, 0\le\theta\le\pi/2$

83. $r=8\sin^3(\theta/3), 0\le\theta\le\pi/4$

84. $r=\sqrt{1+\cos 2\theta}, -\pi/2\le\theta\le\pi/2$

Határozzuk meg a 85. és a 86. gyakorlatban megadott görbék adott tengely körüli megforgatásával generált forgásfelületek felszínét!

85. $r=\sqrt{\cos 2\theta}, 0\le\theta\le\pi/4$, x-tengely

86. $r^2=\sin 2\theta$, y-tengely

További példák és feladatok

87. Határozzuk meg annak a forgástestnek a térfogatát, amely a $9x^2+4y^2=36$ ellipszis (a) x-tengely, (b) y-tengely körüli megforgatásával áll elő!

88. Az x-tengely, az $x=4$ egyenes és a $9x^2-4y^2=36$ hiperbola által határolt „háromszögtartományt" megforgatjuk az x-tengely körül. Határozzuk meg a keletkező forgástest térfogatát!

89. Tartályt készítünk oly módon, hogy egy bádoglemezcsíkot ellipszis alakban meghajtunk, s az aljára egy síklemezt forrasztunk. A tartályba néhány centiméternyi magasan vizet töltünk, majd az ellipszis egyik fókuszpontjában a vízbe ejtünk egy golyót. A vizen hullámok terjednek szét, visszaverődnek a tartály faláról, s néhány másodperc elteltével a másik fókuszban vízcseppek szöknek a magasba. Miért?

90. Az észak-kaliforniai partoknál két egymástól néhány száz kilométernyire elhelyezkedő A és B jelzőtornyok folyamatosan rádiójeleket bocsátanak ki a tenger irányába. Egy partmenti vizeken haladó hajó az A torony jelzéseit 1400 mikroszekundummal előbb fogja, mint a B toronyét. Mit mondhatunk a hajó jelzőtornyokhoz viszonyított helyzetéről, ha a jelek 3000 méter/mikroszekundum sebességgel terjednek? (LORAN a neve egy alacsony frekvenciájú rádióhullámokkal működő földi navigációs rendszernek, ami azon alapul, hogy az ismert jeladóktól érkező jelek időkülönbségéből állapítja meg a vevő helyét. A helymegállapításhoz három különböző helyről érkező jelre van szükség. A jelenleg használt frekvencia 90-110 kHz. A LORAN betűszó a Long Range Navigation szavakból származik.)

91. Sík terepen állva ugyanabban a pillanatban halljuk meg egy lövés csattanását és a becsapódó lövedék hangját. Mit mondhatunk a puskához és a céltárgyhoz viszonyított helyzetünkről?

92. Archimédeszi spirál: Az $r=a\theta$ görbét, ahol a nem nulla állandó, archimédeszi spirálnak nevezzük. Van-e valami sajátos összefüggés az egyes menetek távolságát illetően?

93. **(a)** Mutassuk meg, hogy az $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ összefüggések az

$$r=\frac{k}{1+e\cos\theta}$$

polárkoordinátás egyenletet az

$$(1-e^2)x^2+y^2+2kex-k^2=0$$

Descartes-egyenletbe transzformálják!

(b) A 10.3. alfejezetbeli kritérium felhasználásával mutassuk meg, hogy az (a)-beli görbe

$$e = 0 \Rightarrow \text{kör}$$
$$0 < e < 1 \Rightarrow \text{ellipszis}$$
$$e = 1 \Rightarrow \text{parabola}$$
$$e > 1 \Rightarrow \text{hiperbola.}$$

94. Műhold pályája: Egy műholdnak olyan a pályája, hogy áthalad a Föld északi és déli pólusa fölött. A Déli-sark fölött van a pályájának legmagasabb pontja, 1600 km magasságban. Az Északi-sark fölött van a pálya legalacsonyabb pontja, 480 km-re a földfelszín felett.

(a) Határozzuk meg az excentricitást, ha a műhold pályája olyan ellipszis, amelynek egyik gyújtópontja a Föld középpontja. (A Föld átmérőjét vegyük 12 800 km-nek.)

(b) A Föld észak–déli tengelyét tekintsük az x-tengelynek, a Föld középpontját pedig a koordináta-rendszer kezdőpontjának. Írjuk fel a műhold pályaegyenletét polárkoordinátákkal!

10. fejezet Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

Kúpszelet egyenletek

1. Írjuk fel a $(4,0)$ fókuszú és $x = 3$ vezéregyenesű parabola egyenletét! Ábrázoljuk a parabolát, csúcspontját, fókuszát és vezéregyenesét!

2. Határozzuk meg az

$$x^2 - 6x - 12y + 9 = 0$$

egyenletű parabola csúcspontját, fókuszát és vezéregyenesét!

3. Írjuk fel annak a görbének az egyenletét, amelynek $P(x,y)$ pontja kétszer akkora távolságra van az $x^2 = 4y$ parabola vezéregyenesétől, mint fókuszától! Milyen típusú ez a görbe?

4. Az $a+b$ hosszúságú egyenes szakasz egyik végpontja az x-, másik az y-tengelyen van rajta. A szakasz P pontja a távolságra van az egyik és b távolságra annak másik végpontjától. Mutassuk meg, hogy miközben a szakasz a tengelyeken csúszik, a P pont egy ellipszist ír le!

5. Egy 0,5 excentricitású ellipszis tengelypontjai a $(0,\pm 2)$ pontok. Hol vannak a fókuszai?

6. Írjuk fel annak a 2/3 excentricitású ellipszisnek az egyenletét, amelynek vezéregyenese az $x = 2$ egyenes, s az annak megfelelő fókusz pedig a $(4,0)$ pont.

7. Egy hiperbola egyik fókusza a $(0,-7)$ pont, e fókuszpontnak megfelelő vezéregyenes egyenlete $y = -1$. Írjuk fel a hiperbola egyenletét, ha excentricitása (a) 2, (b) 5.

8. Írjuk fel annak a hiperbolának az egyenletét, amelynek fókuszai a $(0,-2)$ és $(0,2)$ pontok, és áthalad a $(12,7)$ ponton.

9. **(a)** Mutassuk meg, hogy a

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 - a^2b^2 = 0$$

egyenes az (x_1,y_1) pontban érinti a $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ ellipszist!

(b) Mutassuk meg, hogy a

$$b^2xx_1 - a^2yy_1 - a^2b^2 = 0$$

egyenes az (x_1,y_1) pontban érinti a $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ hiperbolát!

10. Mutassuk meg, hogy az

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

kúpszelethez az (x_1,y_1) pontban vont érintő egyenlete

$$Axx_1 + B\left(\frac{x_1y + xy_1}{2}\right) + Cyy_1 + D\left(\frac{x+x_1}{2}\right) +$$
$$+ E\left(\frac{y+y_1}{2}\right) + F = 0$$

alakban írható fel!

Egyenletek és egyenlőtlenségek

Az xy-sík mely pontjai elégítik ki a 11–18. feladatokban megadott egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket?

11. $(x^2 - y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + 4y^2 - 4) = 0$

12. $(x+y)(x^2 + y^2 - 1) = 0$

13. $(x^2/9) + (y^2/16) \le 1$

14. $(x^2/9) - (y^2/16) \le 1$

15. $(9x^2 + 4y^2 - 36)(4x^2 + 9y^2 - 16) \le 0$

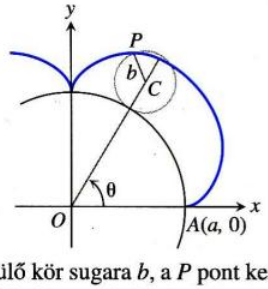
16. $(9x^2 + 4y^2 - 36)(4x^2 + 9y^2 - 16) > 0$

17. $x^4 - (y^2 - 9) = 0$

18. $x^2 + xy + y^2 < 3$

Paraméteres egyenletek és cikloisok

19. Epicikloisok: Ha egy kör gördül végig kívülről egy másik, rögzített kör kerületén, akkor a gördülő kör egy rögzített P pontja *epicikloist* ír le (lásd a mellékelt ábrát). Legyen a rögzített kör középpontja az origóban, sugara pedig legyen a.



Legyen a gördülő kör sugara b, a P pont kezdőhelyzete pedig legyen $A(a,0)$. Írjuk fel az epiciklois paraméteres egyenletrendszerét, a paraméter legyen a körközéppontokat összekötő egyenesnek az x-tengellyel bezárt θ szöge.

20. **(a)** Keressük meg az x-tengely és az

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t); \quad 0 \le t \le 2\pi$$

cikloisív által határolt tartomány súlypontját!

(b) Határozzuk meg az

$$x = (2/3)t^{3/2}, \quad y = 2\sqrt{t}; \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$$

görbe koordinátatengelyekre vonatkozó nyomatékát!

Polárkoordináták

21. **(a)** Írjuk fel az

$$x = e^{2t}\cos t, \quad y = e^{2t}\sin t; \quad -\infty < t < \infty$$

görbe egyenletét polárkoordinátákban!

(b) Határozzuk meg a görbe ívhosszát $t = 0$ és $t = 2\pi$ között!

22. Határozzuk meg a polárkoordinátasík $r = 2\sin^3(\theta/3)$ görbéjének ívhosszát, ha $0 \le \theta \le 3\pi$!

23. Határozzuk meg annak a tartománynak a területét, amely az $r = 1 + \cos\theta$ kardioid első síknegyedbe eső darabjának x-tengely körüli megforgatásával áll elő! (*Útmutatás:* Az integrál egyszerűsítéséhez használjuk fel az $1 + \cos\theta = 2\cos^2(\theta/2)$ és $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ azonosságokat.)

24. Ábrázoljuk a polárkoordinátasíkon az $r = 2a\cos^2(\theta/2)$ és $r = 2a\sin^2(\theta/2)$, $a > 0$ görbék által határolt tartományokat és számítsuk ki közös részüknek a területét!

A 25–28. feladatokban megadtuk a kúpszelet excentricitását és az origóban elhelyezkedő fókuszhoz tartozó vezéregyenest. Írjuk fel a kúpszelet polárkoordinátás egyenletét!

25. $e = 2, r\cos\theta = 2$ **26.** $e = 1, r\cos\theta = -4$

27. $e = 1/2, r\sin\theta = 2$ **28.** $e = 1/3, r\sin\theta = -6$

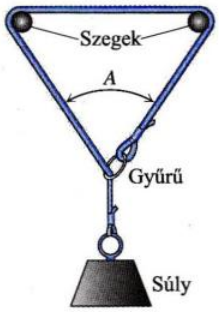
Elmélet példákkal

29. Azonos magasságban két szeget verünk a falba, majd átvetünk rajtuk egy kötelet, amelynek egyik végére előzőleg karikát kötöttünk. A kötél másik végét átvezetjük a karikán és valamilyen nehezékkel látjuk el. Legyen a kötél legalább négyszer olyan hosszú, mint a két szeg távolsága, és tegyük fel, hogy a rendszer szimmetrikus a függőleges kötéldarabra nézve.

(a) Mekkora szöget zár be a kötél két szára? (Lásd a mellékelt ábrát.)

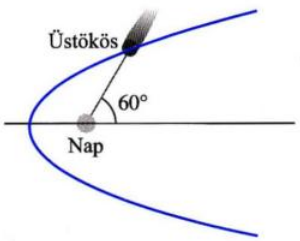
(b) Mutassuk meg, hogy ha a gyűrűt rögzítjük a kötél másik ágához, akkor a gyűrű lehetséges térbeli helyzete olyan ellipszisen van, amelynek fókuszpontjai a szegek!

(c) A (b) rész eredménye és azon ismeret alapján, hogy a kötél és a súly a minimális potenciális energiájú helyen jut nyugalomba, igazoljuk, hogy a szimmetriára vonatkozó eredeti feltevésünk jogos volt.



30. Két radarállomás kelet-nyugati irányban egymástól 20 km távolságra helyezkedik el. Kis magasságban egy gép tart keletről nyugat felé ismert, v_0 km/h sebességgel. A $t = 0$ időpontban a $(-10, 0)$ pozíciójú radarállomásról kibocsátott jel a repülőgépről visszaverődve $30/c$ másodperc elteltével jut el a (10,0) helyzetű radarhoz (c a jel terjedési sebessége). A $t = 10/v_0$ időpontban egy második jelet is kibocsát a $(-10, 0)$ pozíciójú radarállomás, ami a gépről visszaverődve ugyancsak $30/c$ másodperc elteltével jut el a másik radarhoz. Határozzuk meg a gép helyzetét abban az időpontban, amikor a második jel visszaverődik róla. Tegyük fel, hogy v_0 jóval kisebb, mint c.

31. Egy üstökös olyan parabolapályán mozog, amelynek fókuszpontja a Nap. Amikor az üstökös $6{,}4 \times 10^7$ km távolságra van a Naptól, az üstököst a Nappal összekötő egyenes 60°-os szöget zár be a pálya tengelyével (lásd a mellékelt ábrát). Milyen közel kerül az üstökös a Naphoz?



32. Az $x = 2t$, $y = t^2$, $-\infty < t < \infty$ parabolának melyik pontja esik legközelebb a $(0, 3)$ ponthoz?

33. Számítsuk ki 1 század pontossággal az $x^2 + xy + y^2 = 1$ ellipszis excentricitását!

34. Számítsuk ki az $xy = 1$ hiperbola excentricitását!

35. Kúpszelet-e a $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ görbe? Ha igen, milyen kúpszelet? Ha nem, miért nem?

36. Igazoljuk, hogy a $2xy - \sqrt{2}y + 2 = 0$ görbe hiperbola. Keressük meg a centrumát, tengelypontjait, fókuszait, tengelyeit és aszimptotáit!

37. Írjuk fel

(a) az origó fókuszú, $(a, \pi/4)$ csúcspontú parabola

(b) az origó és $(2, 0)$ fókuszú, $(4, 0)$ tengelypontú ellipszis

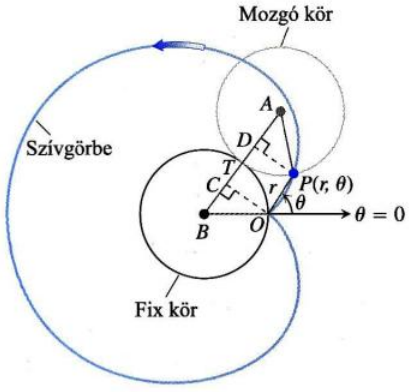
(c) az origó fókuszú, $(2, \pi/2)$ középpontú és $(1, \pi/2)$ tengelypontú hiperbola

egyenletét polárkoordinátákban!

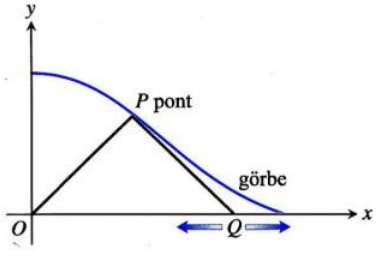
38. Az origón átmenő egyenes a P_1, P_2 pontokban metszi az $r = 3/(2 + \cos\theta)$ ellipszist. Legyen P_1 távolsága az origótól d_1, P_2-é pedig d_2. Számítsuk ki $(1/d_1) + (1/d_2)$ értékét!

39. **Kardioid előállítása körök segítségével:** A kardioid az epiciklois speciális fajtája (18. feladat). Mutassuk meg, hogy ha a polárkoordináta-sík egy a sugarú körén végiggörgetünk egy másik, szintén a sugarú kört, akkor a körök eredeti P érintkezési

pontja egy kardioidot jár be (lásd a mellékelt ábrát). (*Útmutatás:* Először mutassuk meg, hogy az *OBC* szög és a *PAD* szög is θ-val egyenlő.)



40. Csuklós ajtó: Egy csuklós ajtó két panelből áll, amelyek a P pontban vannak egymáshoz illesztve (lásd az ábrát). Az egyik panel alsó sarka az O pontbeli pánthoz van rögzítve, a másik panel Q-val jelölt alsó sarka pedig egy egyenes mentén csúszkál, amely az ábrán az x-tengely egy szakasza. A Q pont előre-hátra mozog, az ajtó alsó éle pedig egy vastag szőnyeget súrol. Milyen görbét rajzol ki az ajtó a szőnyegen?

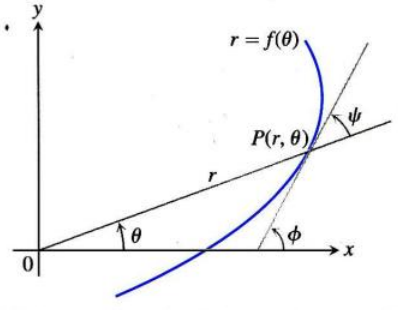


Polárkoordinátákban megadott görbe sugáriránya és érintője által bezárt szög

Amikor egy görbe adott pontbeli irányáról beszélünk, Descartes-koordinátákban, azt az óramutató járásával ellentétesen mért ϕ szöget használjuk, amelyet az x-tengely pozitív fele zár be az érintőegyenessel. Polárkoordinátákban célszerűbb az *sugárirány* és az érintőegyenes által bezárt ψ szöggel számolni (lásd a mellékelt ábrát). ϕ-t a

$$\phi = \theta + \psi \tag{10.42}$$

összefüggésből számolhatjuk ki, amely a háromszög külső szögéről szóló tétel folyománya.



Tegyük fel, hogy valamely görbe egyenlete $r = f(\theta)$ alakban van megadva, ahol $f(\theta)$ a θ differenciálható függvénye. Ekkor

$$x = r\cos\theta \text{ és } y = r\sin\theta \tag{10.43}$$

differenciálható függvénye θ-nak, és

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -r\sin\theta + \cos\theta\frac{dr}{d\theta}, \\ \frac{dy}{d\theta} &= r\cos\theta + \sin\theta\frac{dr}{d\theta}. \end{aligned} \tag{10.44}$$

Mivel $\psi = \phi - \theta$, ezért (10.42) alapján

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}(\phi - \theta) = \frac{\operatorname{tg}\phi - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\phi\operatorname{tg}\theta}.$$

Továbbá

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta},$$

mivel $\operatorname{tg}\phi$ a görbe P pontbeli meredeksége. Tehát

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}.$$

Ezért

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{x}{y}\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}} = \frac{x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta}}{x\frac{dx}{d\theta} + y\frac{dy}{d\theta}}. \tag{10.45}$$

A (10.45) jobb oldalán álló tört számlálójára (10.43) és (10.44) alapján

$$x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta} = r^2.$$

Hasonlóképpen a nevező:

$$x\frac{dx}{d\theta} + y\frac{dy}{d\theta} = r\frac{dr}{d\theta}.$$

Ha ezeket (10.45)-be behelyettesítjük, akkor azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r}{dr/d\theta}. \tag{10.46}$$

Ebből az egyenlőségből kifejezhetjük ψ-t, mint θ függvényét.

41. Készítsünk alkalmas ábrát és mutassuk meg, hogy két görbe metszéspontbeli érintői által bezárt szöget kifejezhetjük a

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\psi_2 - \operatorname{tg}\psi_1}{1 + \operatorname{tg}\psi_2\operatorname{tg}\psi_1}$$

képlettel. Mikor metszi egymást derékszögben a két görbe?

42. Számítsuk ki $\operatorname{tg}\psi$ értékét az $r = \sin^4(\theta/4)$ görbére!

43. Számítsuk ki az $r = 2a\sin 3\theta$ görbe rádiuszvektora és érintője által bezárt szöget, amikor $\theta = \pi/6$!

T 44. **(a)** Ábrázoljuk az $r\theta = 1$ hiperbolikus spirálist! Mi történik a ψ szöggel, miközben a spirál egyszer körbefordul az origó körül?

(b) Az (a) pontbeli eredményünket bizonyítsuk analitikus módszerrel!

45. Az $r = \sqrt{3}\cos\theta$ és az $r = \sin\theta$ kör a $(\sqrt{3}/2, \pi/3)$ pontban metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy érintőik ebben a pontban merőlegesek egymásra!

46. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $r = 3a\cos\theta$ kört és az $r = a(1 + \cos\theta)$ kardioidot, és keressük meg első síknegyedbeli metszéspontjukban vont érintőik által bezárt szöget!

47. Keressük meg az

$$r = \frac{1}{1 - \cos\theta} \text{ és } r = \frac{3}{1 + \cos\theta}$$

parabolák metszéspontjait és a metszéspontbeli érintőik által bezárt szöget!

48. Keressünk olyan pontokat az $r = a(1 + \cos\theta)$ kardioidon, ahol az érintőegyenes (a) vízszintes, (b) függőleges!

49. Mutassuk meg, hogy az

$$r = \frac{a}{1+\cos\theta} \quad \text{és} \quad r = \frac{b}{1-\cos\theta}$$

parabolák minden metszéspontjukban ortogonálisak ($ab \neq 0$)!

50. Milyen szög alatt metszi a $\theta = \pi/2$ sugár az $r = a(1-\cos\theta)$ kardioidot?

51. Mekkora szöget zárnak be egymással valamelyik metszéspontjukban az $r = 4(1+\cos\theta)$ kardioid és az $r = 3\sec\theta$ egyenes?

52. Számítsuk ki az $r = a\,\mathrm{tg}(\theta/2)$ görbéhez a $\theta = \pi/2$ pontban húzott érintő meredekségét!

53. Milyen szögben metszi egymást az első síknegyedben az $r = 1/(1-\cos\theta)$ és az $r = 1/(1-\sin\theta)$ parabola?

54. Az $r^2 = 2/\sin 2\theta$ egyenlet egy polárkoordinátákban felírt görbét reprezentál.

(a) Ábrázoljuk ezt a görbét!

(b) Írjuk fel egyenletét Descartes-koordinátákban!

(c) Számítsuk ki, hogy milyen szögben metszi a görbe a $\theta = \pi/4$ félegyenest!

55. Tegyük fel, hogy az $r = f(\theta)$ görbéhez húzott érintő és a rádiuszvektor által bezárt ψ szög értéke az α állandó.

(a) Igazoljuk, hogy a görbe és a $\theta = \theta_1$ és $\theta = \theta_2$ sugarak által határolt terület arányos az $r_2^2 - r_1^2$ mennyiséggel, ahol (r_1, θ) és (r_2, θ) a görbe azon ívének végpontjai, amely ezen sugarak közé esik. Mi az arányossági tényező?

(b) Mutassuk meg, hogy a feladat (a) részében megadott görbe ívhossza arányos az $r_2 - r_1$ mennyiséggel és határozzuk meg az arányossági tényezőt is!

56. Legyen P az $r^2 \sin 2\theta = 2a^2$ hiperbola egy pontja. Mutassuk meg, hogy az OP szakasz, a görbe P pontbeli érintője és a polártengely által alkotott háromszög egyenlőszárú!

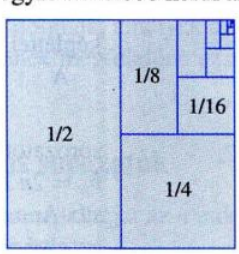
11. fejezet

Sorozatok és végtelen sorok

ÁTTEKINTÉS: Mindenki tudja, hogyan kell két – esetleg több – számot összeadni, az viszont, hogy miként lehet végtelen sok számot összeadni, már nem ilyen világos. Ebben a fejezetben efféle, a végtelen sorok tárgykörébe tartozó kérdésekkel foglalkozunk. Végtelen sok szám összege nem mindig végtelen, amint a

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$$

példa is mutatja. Az egyenlőség bal oldalán szereplő végtelen összeget geometriailag úgy szemléltethetjük, hogy egy egységnyi oldalú négyzetet újra és újra megfelezünk. A felezésekkel kapott végtelen sok téglalap, illetve négyzet – mint azt az ábra mutatja – együttesen az egész négyzetet kiadja, területük összege a tagok számának növekedtével egyre közelebb kerül az eredeti négyzet területéhez.



Van olyan végtelen sor is, amelynek nincs véges összege. Az

$$1+2+3+4+5+\ldots$$

összeg például – amennyiben elég sok tagot veszünk – bármely előre megadott számnál nagyobb lehet.

Vannak olyan végtelen sorok is, amelyekben nem nyilvánvaló, hogy létezik-e véges összeg. Ez a helyzet például az

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$$

harmonikus sor esetében. Itt első pillantásra nem nyilvánvaló, hogy egyre több tagot véve mi történik: az összeg egyre közelebb kerül egy konkrét számhoz, vagy minden határon túl növekszik.

A végtelen sorozatok és sorok elméletének fontos alkalmazása az a módszer, amelynek segítségével a differenciálható $f(x)$ függvényeket az x hatványainak végtelen soraként állíthatjuk elő. A módszer segítségével a polinomok értékének, deriváltjának és integráljának meghatározására megismert szabályokat általánosabb függvényosztályokra is alkalmazhatjuk. Megvizsgáljuk azt is, hogy miként lehet egy függvényt szinusz-, illetve koszinuszfüggvények végtelen sorával reprezentálni, ami a függvényvizsgálatban ugyancsak nagy segítségünkre lehet.

11.1. Sorozatok

Egy számsorozat egy számokból álló

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

rendezett lista; a_1, a_2, a_3 stb. tehát számok, amelyeket a sorozat **tagjainak** vagy **elemeinek** nevezünk. A

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots, 2n, \ldots$$

sorozat első tagja például $a_1 = 2$, második tagja $a_2 = 4$, n-edik tagja pedig $a_n = 2n$. Az n szám – az a_n tag indexe – azt mutatja, hogy az adott tag a sorozatban hol foglal helyet. Magára az

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

sorozatra tehát úgy is gondolhatunk, mint egy függvényre, amely 1-hez az a_1 számot, 2-höz az a_2-t, 3-hoz az a_3-at, és általában n-hez az a_n tagot rendeli. Ezt rögzítjük a sorozat formális definíciójaként.

> **DEFINÍCIÓ: Sorozat**
>
> **Sorozatnak** (alkalmanként **végtelen sorozatnak**) nevezzük az olyan függvényeket, amelyeknek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza.

A

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots, 2n, \ldots$$

sorozatnak megfelelő függvény például az, amely 1-hez az $a_1 = 2$-t, 2-höz az $a_2 = 4$-et rendeli, és így tovább. A sorozatot általánosan az

$$a_n = 2n$$

képlettel adhatjuk meg.

A

$$12, 14, 16, 18, 20, 22, \ldots$$

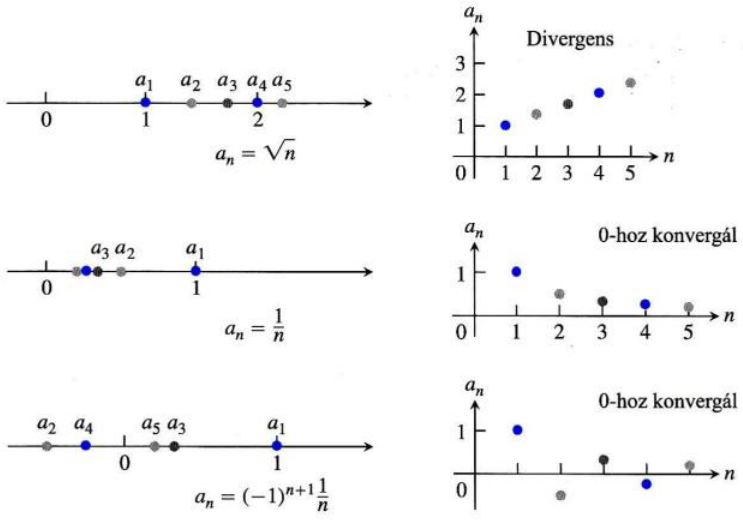
sorozatot az $a_n = 10 + 2n$ képlet adja meg, de használhatnánk az egyszerűbb, $b_n = 2n$ képletet is, amelyben az n index első értéke 6, a következők pedig 7, 8 stb. Annak érdekében, hogy képleteinket egyszerűsíthessük, megengedjük, hogy az első index tetszőleges pozitív egész szám legyen. Az iménti $\{a_n\}$ sorozat például a_1-gyel, a $\{b_n\}$ sorozat pedig b_6-tal kezdődik. A sorrend minden esetben fontos: az 1, 2, 3, 4,... sorozat nem ugyanaz, mint a 2, 1, 3, 4,... sorozat.

A sorozatokat megadhatjuk úgy, hogy megmondjuk, miként kell a tagjaikat kiszámítani:

$$a_n = \sqrt{n},$$
$$b_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n},$$
$$c_n = \frac{n-1}{n},$$
$$d_n = (-1)^{n+1},$$

de ki is írhatjuk az első néhány tagot, például

$$\{a_n\} = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\right\}$$
$$\{b_n\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ldots\right\}$$
$$\{c_n\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right\}$$
$$\{d_n\} = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}.$$



11.1. ÁBRA: A sorozatokat grafikusan a számegyenes vagy a sík pontjaival reprezentálhatjuk. Az utóbbi esetben az n indexet a vízszintes, az a_n tag értékét pedig a függőleges tengelyre mérjük fel.

(Ha a tagok képzésére konkrét utasítás nincs, csak néhány tag van felsorolva, akkor a sorozat nincs definiálva, hiszen utasítás hiányában bármilyen kezdést bárhogy folytathatunk.) Néha használjuk az

$$\{a_n\} = \{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$$

jelölést is.

A 11.1. ábrán a sorozatok kétféle grafikus ábrázolását tanulmányozhatjuk. Az első a valós számegyenesen helyezi el a sorozat $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ tagjait, a második a sorozatot megadó függvény grafikonját mutatja. Az utóbbi esetben olyan függvényekkel van dolgunk, amelyek csupán az egész számokon vannak értelmezve, a grafikon ennek megfelelően az xy-sík pontjaiból – az $(1, a_1)$, $(2, a_2)$ stb. pontokból – áll.

Konvergens és divergens sorozatok

Gyakran megesik, hogy egy sorozat tagjai az n index növekedtével egyre jobban megközelítenek egy adott számot. Az

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$$

sorozat tagjai n növekedtével egyre közelebb kerülnek az 0-hoz, a

$$\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, 1 - \frac{1}{n}, \ldots\right\}$$

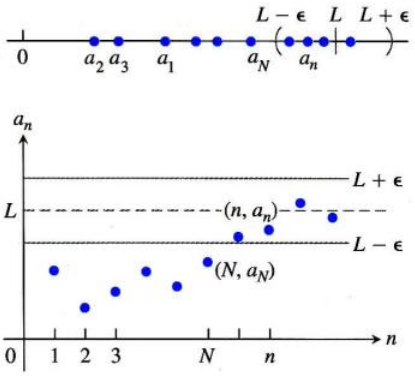
sorozat tagjai pedig 1-hez közelítenek. Vannak azonban olyan sorozatok is, mint például

$$\left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots,\right\},$$

amelyekben az n-edik tag (ha n elég nagy) tetszőlegesen nagy lehet, és olyanok is, amilyen az

$$\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\},$$

amelynek tagjai felváltva az 1 és a -1 számok, nincs tehát egyetlen olyan szám, amelyhez n növekedtével közelítenének. A „közelítés" intuitív fogalmát a következő definíció ragadja meg: eszerint egy sorozat konvergens, vagyis egy adott számhoz tart, ha elég nagy – egy adott N-nél nagyobb – n indexek esetén az a_n tag és a szóban forgó – a sorozat határértékének nevezett – szám különbsége tetszőleges, előre megadott $\varepsilon > 0$ számnál kisebbé válik.



11.2. ÁBRA: $a_n \to L$, ha az $y = L$ egyenletű egyenes az $\{(n, a_n)\}$ pontok vízszintes aszimptotája. A sorozat a_N utáni tagjai az L számtól ε-nál kisebb távolságra helyezkednek el.

DEFINÍCIÓ: Konvergens és divergens sorozat, határérték

Az $\{a_n\}$ sorozat az L számhoz **tart** (vagy **konvergál**), ha tetszőleges pozitív ε számhoz létezik olyan N pozitív egész szám, hogy minden n-re

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Ha ilyen L szám nem létezik, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat divergens.

Azt, hogy az $\{a_n\}$ sorozat az L számhoz tart, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ vagy egyszerűen $a_n \to L$ jelöli; az L számot ilyenkor az $\{a_n\}$ sorozat **határérték**ének nevezzük (11.2. ábra).

A definíció emlékeztet a függvény végtelenben vett határértékének meghatározására (2.4. alfejezet); ezt a megfigyelést a határértékek meghatározásakor rögvest ki is használjuk.

1. PÉLDA: **A definíció alkalmazása**

Igazoljuk, hogy
(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ és **(b)** tetszőleges k állandó esetén $\lim_{n\to\infty} k = k$.

Megoldás:

1. Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Azt kell belátnunk, hogy létezik olyan N szám, amelyre teljesül, hogy minden n esetén

$$n > N \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Ha $\frac{1}{n} < \varepsilon$, azaz ha $n > \frac{1}{\varepsilon}$, akkor az implikáció igaz. Így ha N tetszőleges, $\frac{1}{\varepsilon}$-nál nagyobb egész szám, akkor az implikáció bármely $n > N$ esetén igaz, ami éppen azt bizonyítja, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Azt kell belátnunk, hogy létezik olyan N szám, amelyre teljesül, hogy minden n esetén

$$n > N \Rightarrow |k - k| < \varepsilon.$$

Mivel $k - k = 0$, az implikáció N helyében tetszőleges pozitív egész számmal teljesül, vagyis valóban: bármely k állandó esetén $\lim_{n\to\infty} k = k$. □

2. PÉLDA: **Divergens sorozat**

Mutassuk meg, hogy az $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}$ sorozat divergens!

Megoldás: Tegyük fel, hogy a sorozat egy L számhoz konvergál. A határérték definíciójában ε-nak $\frac{1}{2}$-et választva azt kapjuk, hogy valamely N indextől kezdve a sorozat valamennyi a_n tagjának az L számtól való távolsága kisebb, mint $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Mivel az 1 szám a sorozat tagjai között végtelen sokszor megjelenik, arra következtethetünk, hogy 1-nek az L számtól való távolsága kisebb, mint $\frac{1}{2}$, azaz $|L - 1| < \frac{1}{2}$, vagy ami ezzel ekvivalens, $\frac{1}{2} < L < \frac{3}{2}$. Hasonlóan: a sorozat tagjai között a -1 is végtelen sokszor előfordul, így teljesülnie kell az $|L - (-1)| < \frac{1}{2}$, azaz a $-\frac{3}{2} < L < -\frac{1}{2}$ egyenlőtlenségeknek is. Lehetetlen azonban, hogy egy L szám az $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ és a $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ intervallumoknak egyaránt eleme legyen, ezeknek az intervallumoknak a metszete ugyanis üres. Ilyen szám tehát nem létezik, ami azt mutatja, hogy sorozatunk divergens.

Megjegyezzük, hogy a gondolatmenet $\frac{1}{2}$ helyében tetszőleges 1-nél kisebb, pozitív ε számmal érvényben marad. □

A $\{\sqrt{n}\}$ sorozat is divergens, bár más okból. Ahogy ugyanis n növekszik, a sorozat tagjai is minden határon túl nőnek, amit a következőképpen fejezünk ki:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty.$$

Ezzel természetesen nem azt állítjuk, hogy a sorozat a_n tagjainak a ∞-től való eltérése tetszőleges kicsivé válik, amint n nő, miként azt sem, hogy létezik egy „végtelen" szám, amelyhez a sorozat tart. A jelöléssel pusztán azt fejezzük ki, hogy az a_n tagok – amint n egyre nagyobb – tetszőleges előre megadott számnál nagyobbá válnak.

DEFINÍCIÓ: **Végtelenhez divergáló sorozat**

Az $\{a_n\}$ sorozat **végtelenhez divergál**, ha tetszőleges M számhoz létezik olyan N pozitív egész szám, hogy minden N-nél nagyobb n-re $a_n > M$. Jelölés:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ vagy } a_n \to \infty.$$

Hasonlóan: az $\{a_n\}$ sorozat a **mínusz végtelenhez divergál**, ha tetszőleges m számhoz létezik olyan N pozitív egész szám, hogy minden N-nél nagyobb n esetén $a_n < m$. Jelölés:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ vagy } a_n \to -\infty.$$

Egy sorozat divergens lehet úgy is, hogy sem végtelenhez, sem a mínusz végtelenhez nem divergál. Ilyen sorozattal már találkoztunk a 2. példában, de ilyen az $\{1,-2,3,-4,5,-6,7,-8\ldots\}$ vagy az $\{1,0,2,0,3,0\ldots\}$ sorozat is.

Sorozat határértékének kiszámítása

Nem lenne könnyű dolgunk, ha minden alkalommal a sorozat határtékére vonatkozó „hivatalos", ε–N-es definíciót kellene alkalmaznunk. Szerencsére erre nincs is szükség: néhány alapvető példából kiindulva számos további sorozat határértékét kiszámíthatjuk. Ehhez értelmeznünk kell, miként kaphatunk – például algebrai műveletek vagy kompozíció eredményeként – új sorozatokat régiekből, és mikor mondunk egy sorozatot valamely másiknál kisebbnek. Figyelembe véve, hogy a sorozatokat speciális – pozitív egész számokon értelmezett – függvényekként értelmeztük, a legkevésbé sem meglepő, hogy a függvények határértékére vonatkozó, a 2. fejezetben bebizonyított tételek megfelelői a sorozatokra is érvényesek.

1. TÉTEL:

Legyenek $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok, A és B pedig valós számok; tegyük fel továbbá, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Ekkor teljesülnek a következők:

1. ÖSSZEGSZABÁLY: $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$;
2. KÜLÖNBSÉGSZABÁLY: $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B$;
3. SZORZATSZABÁLY: $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$;
4. KONSTANSSAL VALÓ SZORZÁS: $\lim_{n\to\infty} (k \cdot b_n) = k \cdot B$;
5. HÁNYADOSSZABÁLY: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, ha $b_n \neq 0$, $B \neq 0$.

A bizonyítást, amely hasonló a 2.2. alfejezetbeli 1. Tétel bizonyításához, ehelyütt elhagyjuk.

3. PÉLDA:

Az 1. Tétel állításai és az 1. példában szereplő határértékek alapján kapjuk a következőket:

1. $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = -1\cdot 0 = 0$ (konstanssal való szorzás, 1. példa (a) része);

2. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1-0 = 1$ (különbségszabály; 1. példa (a) része);

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} = 5\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 5\cdot 0\cdot 0 = 0$ (szorzatszabály);

4. $\lim_{n\to\infty}\frac{4-7n^6}{n^6+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(4/n^6)-7}{1+(3/n^6)} = \frac{0-7}{1+0} = -7$ (szorzat- és hányadosszabály). □

Az 1. Tétel állításai nyilvánvalóan nem megfordíthatóak. A tétel nem állítja, hogy az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatoknak mindig van határértéke, amennyiben – például – az $\{a_n+b_n\}$ sorozatnak van. Az $\{a_n\} = \{1,2,3\ldots\}$ és a $\{b_n\} = \{-1,-2,-3\ldots\}$ sorozatok például divergensek, $\{a_n+b_n\} = \{0,0,0\ldots\}$ összegsorozat viszont nyilvánvalóan 0-hoz tart.

Az 1. Tételből következik, hogy bármely divergens sorozatot egy nemnulla konstanssal megszorozva újra csak divergens sorozatot kapunk. Ha ugyanis a $\{c\cdot a_n\}$ sorozat valamely $c\neq 0$ szám esetén konvergens, akkor az 1. Tételbeli konstansszabály alapján a $k=\frac{1}{c}$ állandóval kapott

$$\left\{\frac{1}{c}\cdot ca_n\right\} = \{a_n\}$$

sorozat konvergál. A $\{c\cdot a_n\}$ sorozat tehát csak úgy lehet konvergens, ha $\{a_n\}$ is az. Ha tehát $\{a_n\}$ nem konvergens, akkor $\{c\cdot a_n\}$ sem az.

A következő tétel a 2.2. alfejezetbeli szendvicstétel sorozatos megfelelője (a bizonyítását a 95. feladatban tűzzük majd ki).

2. TÉTEL: Szendvicstétel sorozatokra

Legyenek $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ és $\{c_n\}$ olyan sorozatok, amelyeknek minden tagja valós szám. Ha valamely N indextől kezdve $a_n \le b_n \le c_n$ minden n-re teljesül, továbbá fennáll $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, akkor $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ is igaz.

A 2. Tétel közvetlen következménye: ha $|b_n| \le c_n$ és $c_n \to 0$, akkor $b_n \to 0$ is fennáll, elvégre $-c_n \le b_n \le c_n$. A következő példában ezt ki is használjuk.

4. PÉLDA: **A szendvicstétel alkalmazása**

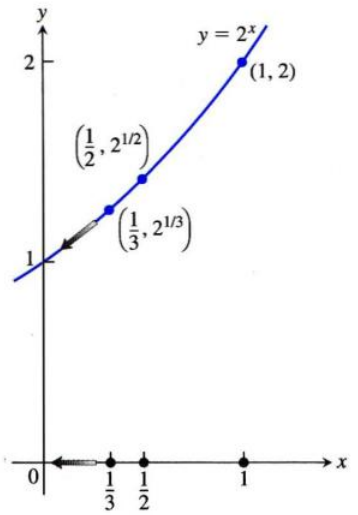
Mivel $\frac{1}{n} \to 0$, fennállnak a következők:

1. $\frac{\cos n}{n} \to 0$, mivel $-\frac{1}{n} \le \frac{\cos n}{n} \le \frac{1}{n}$;

2. $\frac{1}{2^n} \to 0$, mivel $0 \le \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{n}$;

3. $(-1)^n\frac{1}{n} \to 0$, mivel $-\frac{1}{n} \le (-1)^n\frac{1}{n} \le \frac{1}{n}$. □

Az 1. és a 2. Tétel általánosítása is igaz: ha egy konvergens sorozat tagjaira egy folytonos függvényt alkalmazunk, akkor az így kapott sorozat is konvergens. A tételt újfent bizonyítás nélkül mondjuk ki (de lásd a 96. feladatot).



11.3. ÁBRA: Amint $n \to \infty$, $1/n \to 0$ és $2^{1/n} \to 2^0$ (6. példa).

3. TÉTEL: A sorozatokra vonatkozó folytonosfüggvény-tétel

Legyen $\{a_n\}$ valós számokból álló sorozat. Ha $a_n \to L$, f pedig az L helyen folytonos függvény, amely valamennyi a_n-re értelmezve van, akkor $f(a_n) \to f(L)$.

5. PÉLDA: A 3. Tétel alkalmazása

Igazoljuk, hogy $\sqrt{(n+1)/n} \to 1$!

Megoldás: Tudjuk, hogy $(n+1)/n \to 1$. Az $f(x) = \sqrt{x}$ és $L = 1$ választással a 3. Tétel szerint $\sqrt{(n+1)/n} \to \sqrt{1} = 1$. □

6. PÉLDA: A $\{2^{1/n}\}$ sorozat

Az $\{1/n\}$ sorozat 0-hoz tart. Az $a_n = 1/n$, $f(x) = 2^x$ és $L = 0$ választással a 3. Tétel alapján azt kapjuk, hogy $2^{1/n} = f(1/n) \to f(L) = 2^0 = 1$. A $\{2^{1/n}\}$ sorozat határértéke tehát 1 (11.3. ábra). □

A L'Hospital-szabály alkalmazása

A következő tétel – amely a $\lim_{n\to\infty} a_n$ és a $\lim_{n\to\infty} f(x)$ közötti kapcsolatot formalizálja – azt mutatja meg, miként alkalmazható a L'Hospital-szabály bizonyos sorozatok határértékének kiszámítására.

4. TÉTEL:

Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény minden $x \geq n_0$ esetén értelmezve van, továbbá, hogy $\{a_n\}$ olyan sorozat, amelyre teljesül, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $a_n = f(n)$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. Ekkor tetszőleges pozitív ε számhoz létezik olyan M szám, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ha most N tetszőleges M-nél nagyobb és n_0-nál nem kisebb egész szám, akkor

$$n > N \Rightarrow a_n = f(n) \text{ és } |a_n - L| = |f(n) - L| < \varepsilon.$$ □

7. PÉLDA: A L'Hospital-szabály alkalmazása

Igazoljuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Megoldás: Az $(\ln x)/x$ függvény minden $x \geq 1$ számra értelmezve van, és a függvényérték minden pozitív egész szám esetén egyenlő a sorozat megfelelő tagjával. A 4. Tétel szerint így $\lim_{n\to\infty} (\ln n)/n$ megegyezik a $\lim_{n\to\infty} (\ln x)/x$ határértékkel, amennyiben az utóbbi létezik. A L'Hospital-szabály szerint

$$\lim_{x\to\infty} (\ln x)/x = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0,$$

így tehát $\lim_{n\to\infty} (\ln n)/n = 0$. □

Amikor a L'Hospital-szabályt alkalmazzuk egy sorozat határértékének kiszámítására, n-t gyakran egy differenciálható függvény független változójának tekintjük, és – ahelyett, hogy a 7. példa mintájára átírnánk a képletet – közvetlenül n szerint deriválunk.

8. PÉLDA: **A L'Hospital-szabály alkalmazása**

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n}$ határértéket!

Megoldás: A L'Hospital-szabályt alkalmazzuk, ezúttal n szerint deriválunk:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot \ln 2}{5} = \infty. \qquad \square$$

9. PÉLDA: **A L'Hospital-szabály alkalmazása sorozat konvergenciájának megállapítására**

Konvergens-e az a sorozat, amelynek n-edik tagja $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$? Ha igen, mennyi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

Megoldás: A határérték 1^∞ alakú határozatlan kifejezés. Első lépésben az a_n tagok természetes alapú logaritmusát véve $\infty \cdot 0$ alakra hozzuk:

$$\ln a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right),$$

aminek alapján

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \ln a_n &= \lim_{n\to\infty} n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = && \infty \cdot 0 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{1/n} = && \frac{0}{0} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-2/(n^2-1)}{-1/n^2} = && \text{L'Hospital-szabály} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2-1} = 2.
\end{aligned}$$

Mivel $\ln a_n \to 2$, $f(x) = e^x$ pedig folytonos, a 4. Tétel alapján azt kapjuk, hogy

$$a_n = e^{\ln a_n} \to e^2.$$

Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke tehát e^2. $\square$

Gyakran előforduló határértékek

A következő tételben néhány gyakran előforduló határértéket rögzítünk.

5. TÉTEL: **Nevezetes határértékek**

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0;$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1;$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \quad (x > 0);$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (|x| < 1);$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ (tetszőleges x-re);
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ (tetszőleges x-re).

A 3–6. képletekben az x állandó marad, amint $n \to \infty$.

Bizonyítás: Az első határértéket a 7. példából már ismerjük, a következő kettő a 4. Tétel alapján igazolható (93. és 94. feladat), a többit az F.6. függelékben bizonyítjuk be. □

Faktoriális
$n!$ (kiolvasása „n faktoriális") az $1\cdot 2\cdot 3\cdots n$ szorzatot jelöli, így például
$4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$ és
$5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$.
Definíció szerint $0! = 1$. A faktoriális az exponenciális függvénynél is gyorsabban növekszik, amint azt a következő táblázat is mutatja:

n	e^n (kerekítve)	$n!$
0	3	1
5	148	120
10	22 026	3 628 800
20	$4{,}9\cdot 10^8$	$2{,}4\cdot 10^{18}$

10. PÉLDA: **Az 5. Tétel alkalmazása**

(a) $\dfrac{\ln(n^2)}{n} = \dfrac{2\ln n}{n} \to 2\cdot 0$ (1. képlet)

(b) $\sqrt[n]{n^2} = n^{2/n} = \left(n^{1/n}\right)^2 \to (1)^2 = 1$ (2. képlet)

(c) $\sqrt[n]{3n} = 3^{1/n}\left(n^{1/n}\right) \to (1) = 1$ (3. képlet), x helyében 3-mal, és (2. képlet)

(d) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$ (4. képlet), x helyében $-\frac{1}{2}$-del

(e) $\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^n = \left(1+\dfrac{-2}{n}\right)^n \to e^{-2}$ (5. képlet), x helyében -2-vel

(f) $\dfrac{100^n}{n!} \to 0$ (6. képlet), x helyében 100-zal. □

Rekurzív definíciók

A sorozatokat az előzőekben úgy adtuk meg, hogy explicite megmondtuk, miként kell az n ismeretében az n-edik tagot meghatározni. Gyakran előfordul azonban, hogy egy sorozatot rekurzív módon adunk meg, azaz

1. megadjuk a sorozat első (néhány) tagját, és
2. egy szabályt, amelynek alapján a későbbi tagokat az őket megelőző tag(ok) ismeretében kiszámíthatjuk. Az ilyen képletet **rekurzív képletnek** nevezzük.

11. PÉLDA: **Rekurzív módon megadott sorozatok**

(a) Az $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 1$ feltételek az $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ sorozatot adják meg. Valóban: ha $a_1 = 1$, akkor $a_2 = a_1 + 1 = 2$, $a_3 = a_2 + 1 = 3$ és így tovább.

(b) Az $a_1 = 1$, $a_n = n\cdot a_{n-1}$ feltételek a faktoriálisok $1, 2, 6, 24, \ldots, n!, \ldots$ sorozatát adják meg: $a_1 = 1$, $a_2 = 2\cdot a_1 = 2$, $a_3 = 3\cdot a_2 = 6$, $a_4 = 4\cdot a_3 = 24$ stb.

(c) Ha $a_1 = a_2 = 1$, továbbá $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$, akkor a nevezetes **Fibonacci-sorozatot** kapjuk, amelynek tagjai: 1, 1, 2, 3, 5 stb.

(d) Mint azt a Newton-módszer alapján könnyen igazolhatjuk, az $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n - [(\sin x_n - x_n)^2)/(\cos x_n - 2x_n)]$ rekurzív definíció olyan sorozatot ad meg, amely a $\sin x - x^2 = 0$ egyenlet egyik megoldásához konvergál. □

Korlátos monoton sorozatok

Egy sorozat tagjai alkalmanként ide-oda ugrálnak, máskor egyre nagyobbak, vagy egyre kisebbek lesznek. Fontos speciális esetet jelentenek azok a sorozatok, amelyeknek minden tagja legalább akkora, mint az őt közvetlenül megelőző.

DEFINÍCIÓ: **Növekvő sorozat**
Az $\{a_n\}$ sorozat **növekvő**, ha minden n index esetén $a_n \le a_{n+1}$.

12. PÉLDA: **Növekvő sorozatok**

(a) a természetes számok $1,2,3,\ldots,n,\ldots$ sorozata;

(b) az $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots$ sorozat;

(c) a $\{3\}$ konstans sorozat. □

A növekvő sorozatok két csoportra oszlanak: az egyikben olyan sorozatok szerepelnek, amelyeknek a tagjai minden határon túl növekednek, a másik csoportba pedig azok tartoznak, amelyeknél nem ez a helyzet.

DEFINÍCIÓ: **Korlátos sorozat, felső korlát, legkisebb felső korlát**

Az $\{a_n\}$ sorozat **felülről korlátos**, ha létezik olyan M szám, hogy minden n index esetén $a_n \leq M$. Az ilyen M számokat a sorozat **felső korlátainak** nevezzük. Ha M az $\{a_n\}$ sorozat felső korlátja, de egyetlen nála kisebb szám sem felső korlát, akkor M-et az $\{a_n\}$ sorozat **legkisebb felső korlátjának** nevezzük.

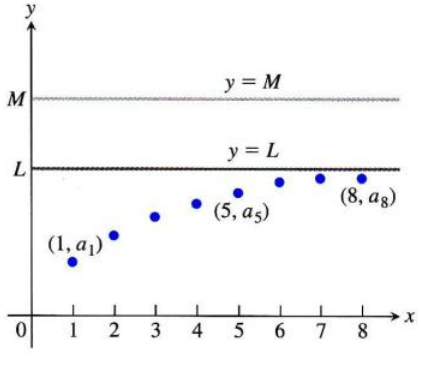
Az **alulról korlátos**, **alsó korlát**, **legnagyobb alsó korlát** fogalmakat hasonló módon definiáljuk. Egy sorozat **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

13. PÉLDA: **A definíció alkalmazása**

(a) Az $1,2,3,\ldots,n,\ldots$ sorozatnak nincs felső korlátja.

(b) Az $M=1$ szám felső korlátja a $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots$ sorozatnak, és mivel egyetlen M-nél kisebb szám sem felső korlát, 1 a sorozat legkisebb felső korlátja (113. feladat). □

Egy felülről korlátos növekvő sorozatnak mindig van legkisebb felső korlátja (az 1. kötet F.2. függelékében részletesebben is tárgyalt felső határ axióma értelmében). Belátjuk, hogy ha L a korlátos és növekvő $\{a_n\}$ sorozat legkisebb felső korlátja, akkor a sorozat L-hez tart.



11.4. ÁBRA: Ha egy növekvő sorozatnak az M szám felső korlátja, akkor a sorozat konvergens, és L határértékére teljesül, hogy $L \leq M$.

Képzeljük el az $(1,a_1)$, $(2,a_2)$, $(3,a_3)$ pontokat az xy-síkon. Tetszőleges M számra teljesül, hogy amennyiben M a sorozat felső korlátja, úgy valamennyi pont az $y=M$ egyenletű egyenes alatt helyezkedik el (11.4. ábra). Esetünkben az (n,a_n) pontok közül egy sem helyezkedik el az $y=L$ egyenletű egyenes fölött, de tetszőleges pozitív ε szám esetén vannak olyan pontok, amelyek az $y=L-\varepsilon$ egyenletű egyenes fölött vannak. A sorozat határértéke ekkor L, elvégre

1. minden n esetén $a_n \leq L$, és

2. tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan N, hogy $a_N > L-\varepsilon$, aminek következtében – mivel a sorozat növekvő – az N-edik tagtól kezdve a sorozat minden tagja ε-nál kisebb távolságra van L-hez. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy a sorozat határértéke az L szám.

A növekvő sorozatokra vonatkozó eredményeinket a következő tételben foglaljuk össze. (A csökkenő sorozatokra vonatkozó analóg tételt a 107. feladatban tárgyaljuk.)

6. TÉTEL: **Weierstrass tétele**

Valós számok egy növekvő sorozata pontosan akkor konvergens, ha korlátos. Ha egy növekvő sorozat konvergens, akkor a határértéke a legkisebb felső korlátja.

A 6. Tétel szerint minden monoton növekedő, felülről korlátos sorozat konvergens. Ha nem korlátos, akkor a végtelenhez divergál.

11.1. Feladatok

Sorozat tagjainak kiszámítása

Az 1–6. feladatokban megadtuk, miként lehet egy $\{a_n\}$ sorozat n-edik tagját kiszámítani. Határozzuk meg a képlet alapján a sorozat első négy tagját!

1. $a_n = \dfrac{1-n}{n^2}$

2. $a_n = \dfrac{1}{n!}$

3. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

4. $a_n = 2+(-1)^n$

5. $a_n = \dfrac{2^n}{2^{n+1}}$

6. $a_n = \dfrac{2^n-1}{2^n}$

A 7–12. feladatokban a sorozatokat rekurzív definíciókkal adtuk meg. Írjuk fel minden esetben az első tíz tagot!

7. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + (1/2^n)$

8. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n/(n+1)$

9. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = (-1)^{n+1}a_n/2$

10. $a_1 = -2,\ a_{n+1} = na_n/(n+1)$

11. $a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

12. $a_1 = 2,\ a_2 = -1,\ a_{n+2} = a_{n+1}/a_n$

Sorozat képletének megkeresése

Írjuk fel a sorozatok n-edik tagját megadó képletet (13–22. feladatok)!

13. Váltakozó előjelű 1-esek: $1,-1,1,-1,1,\ldots$

14. Váltakozó előjelű 1-esek: $-1,1,-1,1,-1,\ldots$

15. A négyzetszámok váltakozó előjellel: $1,-4,9,-16,25,\ldots$

16. A négyzetszámok reciproka váltakozó előjellel: $1,-\frac{1}{4},\frac{1}{9},-\frac{1}{16},\frac{1}{25},\ldots$

17. A négyzetszámoknál 1-gyel kisebb számok: 0, 3, 8, 15, 24, ...

18. Az egész számok -3-mal kezdve: $-3,-2,-1,0,1,\ldots$

19. Minden második páratlan szám 1-gyel kezdve: 1, 5, 9, 13, 17, ...

20. Minden második páros szám 2-vel kezdve: $2,6,10,14,\ldots$

21. Váltakozva 1-esek és 0-k: $1,0,1,0,1,\ldots$

22. A 0 után minden pozitív egész szám kétszer: 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ...

Határértékek meghatározása

A 23–84. feladatokban megadott sorozatok közül állapítsuk meg, hogy melyek konvergensek, és melyek divergensek. A konvergens sorozatok esetében határozzuk meg a sorozat határértékét is!

23. $a_n = 1+(0{,}1)^n$

24. $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$

25. $a_n = \dfrac{1-2n}{1+2n}$

26. $a_n = \dfrac{2n+1}{1-3\sqrt{n}}$

27. $a_n = \dfrac{1-5n^4}{n^4+8n^3}$

28. $a_n = \dfrac{n+3}{n^2+5n+6}$

29. $a_n = \dfrac{n^2-2n+1}{n-1}$

30. $a_n = \dfrac{1-n^3}{70-4n^2}$

31. $a_n = 1+(-1)^n$

32. $a_n = (-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

33. $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

34. $a_n = \left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)\left(3+\dfrac{1}{2^n}\right)$

35. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

36. $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

37. $a_n = \sqrt{\dfrac{2n}{n+1}}$

38. $a_n = \dfrac{1}{0{,}9^n}$

39. $a_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{n}\right)$

40. $a_n = n\pi\cos(n\pi)$

41. $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$

42. $a_n = \dfrac{\sin^2 n}{2^n}$

43. $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

44. $a_n = \dfrac{3^n}{n^3}$

45. $a_n = \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$

46. $a_n = \dfrac{\ln n}{\ln 2n}$

47. $a_n = 8^{1/n}$

48. $a_n = (0{,}03)^{1/n}$

49. $a_n = \left(1+\dfrac{7}{n}\right)^n$

50. $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

51. $a_n = \sqrt[n]{10n}$

52. $a_n = \sqrt[n]{n^2}$

53. $a_n = \left(\dfrac{3}{n}\right)^{1/n}$

54. $a_n = (n+4)^{1/(n+4)}$

55. $a_n = \dfrac{\ln n}{n^{1/n}}$

56. $a_n = \ln n - \ln(n+1)$

57. $a_n = \sqrt[n]{4^n n}$

58. $a_n = \sqrt[n]{3^{2n+1}}$

59. $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ (*Útmutatás*: vessük össze $\frac{1}{n}$-nel.)

60. $a_n = \dfrac{(-4)^n}{n!}$

61. $a_n = \dfrac{n!}{10^{6n}}$

62. $a_n = \dfrac{n!}{2^n\cdot 3^n}$

63. $a_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1/\ln n}$

64. $a_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

65. $a_n = \left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^n$

66. $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

67. $a_n = \left(\dfrac{x^n}{2n+1}\right)^{1/n},\ x>0$

68. $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

69. $a_n = \dfrac{3^n\cdot 6^n}{2^{-n}\cdot n!}$

70. $a_n = \dfrac{(10/11)^n}{(9/10)^n+(11/12)^n}$

71. $a_n = \operatorname{th} n$

72. $a_n = \operatorname{sh}(\ln n)$

73. $a_n = \dfrac{n^2}{2n-1}\sin\dfrac{1}{n}$

74. $a_n = n\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$

75. $a_n = \operatorname{arctg} n$

76. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg} n$

77. $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{1}{\sqrt{2^n}}$

78. $a_n = \sqrt[n]{n^2+n}$

79. $a_n = \dfrac{(\ln n)^{200}}{n}$

80. $a_n = \dfrac{(\ln n)^5}{\sqrt{n}}$

81. $a_n = n-\sqrt{n^2-n}$

82. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+n}}$

83. $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}dx$

84. $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^p}dx, \quad p>1$

További példák és feladatok

85. Egy sorozat első tagja $x_1 = 1$, a további tagok mindegyike az őket megelőző tagok összege:

$$x_{n+1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Írjuk fel a sorozat első néhány tagját, majd adjuk meg a sorozat n-edik tagjára ($n \geq 2$) vonatkozó általános képletet!

86. Tekintsük a következő, racionális számokból álló sorozatot:

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \ldots, \frac{a}{b}, \frac{a+2b}{a+b}, \ldots$$

A számlálók, a nevezők és maguk a törtek is egy-egy sorozatot alkotnak. Jelölje x_n és y_n az n-edik tört számlálóját, illetve nevezőjét, a törtet magát pedig $r_n = x_n/y_n$.

(a) Igazoljuk, hogy $x_1^2 - 2y_1^2 = -1$, $x_2^2 - 2y_2^2 = 1$; általában pedig: ha $a^2 - 2b^2 = -1$ vagy 1, akkor

$$(a+2b)^2 - 2(a+b)^2 = 1 \text{ vagy } -1!$$

(b) Az $r_n = x_n/y_n$ törtek sorozata konvergens. Mi a sorozat határértéke? (*Útmutatás*: a feladat (a) része alapján igazoljuk, hogy $r_n^2 - 2 = \pm(1/y_n)^2$ és $y_n \geq n$.)

87. A Newton-módszer: A következő sorozatokat a Newton-módszerbeli

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

rekurziós képlet alapján adtuk meg. Konvergensek-e a sorozatok? Ha igen, mi a határértékük? Minden esetben kezdjük a képletbeli f függvény azonosításával!

(a) $x_0 = 1, \; x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$

(b) $x_0 = 1, \; x_{n+1} = x_n - \frac{\operatorname{tg} x_n - 1}{\sec^2 x_n}$

(c) $x_0 = 1, \; x_{n+1} = x_n - 1$

88. **(a)** Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény a $[0,1]$ intervallum minden pontjában differenciálható és $f(0) = 0$. Definiáljuk az $\{a_n\}$ sorozatot a következőképpen: $a_n = nf(1/n)$. Igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = f'(0)$!

A feladat (a) részét felhasználva határozzuk meg a következő sorozatok határértékét!

(b) $a_n = n \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$

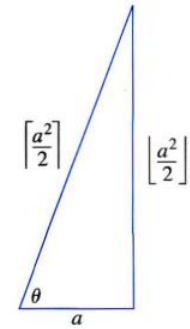
(c) $a_n = n\left(e^{1/n} - 1\right)$

(d) $a_n = n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$

89. Pitagoraszi számhármasok: Az a,b,c pozitív számokból álló hármast pitagoraszi számhármasnak nevezzük, ha $a^2 + b^2 = c^2$. Legyen a tetszőleges páratlan, pozitív egész szám, legyen továbbá

$$b = \left\lfloor \frac{a^2}{2} \right\rfloor \quad \text{és} \quad c = \left\lceil \frac{a^2}{2} \right\rceil.$$

(A b és c tehát az $a^2/2$ szám alsó, illetve felső egészrésze.)



(a) Igazoljuk, hogy $a^2 + b^2 = c^2$. (*Útmutatás*: legyen $a = 2n+1$, majd fejezzük ki b-t és c-t n segítségével.)

(b) Számítással vagy az iménti ábra alapján határozzuk meg a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor a^2/2 \rfloor}{\lceil a^2/2 \rceil}$$

határértéket!

90. Az $n!$ szám n-edik gyöke:

(a) Igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} (2n\pi)^{1/(2n)} = 1$, és ebből a Stirling-formulát (lásd a 8. fejezet végén szereplő 50. feladat (a) részét) is felhasználva bizonyítsuk be, hogy ha n elég nagy, akkor

$$\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e}.$$

(b) Ellenőrizzük a közelítést $n = 40, 50, 60, \ldots$ esetén, ameddig a számológépünk bírja!

91. **(a)** Mutassuk meg, hogy tetszőleges pozitív c állandó esetén $\lim_{n\to\infty} (1/n^c) = 0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^c} = 0.$$

(b) Mutassuk meg, hogy tetszőleges c állandó esetén $\lim_{n\to\infty} (1/n^c) = 0$. (*Útmutatás*: ha $\varepsilon = 0{,}001$ és $c = 0{,}04$, milyen nagynak kell az N számnak lennie ahhoz, hogy minden $n > N$ esetén $\left|1/n^c - 0\right| < \varepsilon$ legyen?)

92. A cipzár-tétel: Bizonyítsuk be a sorozatokra vonatkozó „cipzár-tételt": ha az $\{a_n\}$ és a $\{b_n\}$ sorozatok határértéke egyaránt L, akkor az

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$$

sorozat is L-hez tart!

93. Igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$!

94. Igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1, \; x > 0$!

95. Bizonyítsuk be a 2. Tételt.

96. Bizonyítsuk be a 3. Tételt.

A 97–100. feladatokbeli sorozatokról állapítsuk meg, hogy növekvőek, illetve korlátosak-e.

97. $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$

98. $a_n = \frac{(2n+3)!}{(n+1)!}$

99. $a_n = \frac{2^n 3^n}{n!}$

100. $a_n = 2 - \frac{2}{n} - \frac{1}{2^n}$

A 101–105. feladatokban megadott sorozatok közül melyek konvergensek, és melyek divergensek? Válaszunkat indokoljuk!

101. $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

102. $a_n = n - \frac{1}{n}$

103. $a_n = \dfrac{2^n-1}{2^n}$ **104.** $a_n = \dfrac{2^n-1}{3^n}$

105. $a_n = ((-1)^n+1)\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

106. A sorozat első tagja $x_1 = \cos 1$. A következő tagokat így adjuk meg: x_2 az x_1 és $\cos 2$ közül a nagyobb, x_3 az x_2 és $\cos 3$ közül a nagyobb, általában pedig:

$$x_{n+1} = \max\{x_n, \cos(n+1)\}.$$

107. Csökkenő sorozatok: Az $\{a_n\}$ sorozat **csökkenő**, ha minden n-re $a_n \geq a_{n+1}$; a sorozat **alulról korlátos**, ha van olyan M szám, hogy minden n esetén $M \leq a_n$. Az ilyen M számokat a sorozat alsó korlátjának nevezzük. A 6. Tétel gondolatmenetét követve bizonyítsuk be, hogy minden csökkenő és alulról korlátos sorozat konvergens, és minden olyan csökkenő sorozat, amely nem korlátos, divergál!

(***A 107. feladat folytatása.***) A 107. feladat alapján állapítsuk meg, hogy a 108–112. feladatokban megadott sorozatok közül melyik konvergál, és melyik divergál!

108. $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ **109.** $a_n = \dfrac{1+\sqrt{2n}}{\sqrt{n}}$

110. $a_n = \dfrac{1-4^n}{2^n}$ **111.** $a_n = \dfrac{4^{n+1}+3^n}{4^n}$

112. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n - 3$

113. Az $\{n/(n+1)\}$ sorozat legkisebb felső korlátja: Igazoljuk, hogy ha az M szám kisebb, mint 1, akkor van olyan index, amelytől kezdve az $\{n/(n+1)\}$ sorozat tagjai nagyobbak, mint M! (Ez a következőt jelenti: ha $M < 1$, akkor van olyan N egész szám, amelyre teljesül, hogy minden $n > N$ esetén $n/(n+1) > M$.) Mivel minden n esetén $n/(n+1) < 1$, ezzel egyúttal azt is beláttuk, hogy az $\{n/(n+1)\}$ sorozat legkisebb felső korlátja 1.

114. A legkisebb felső korlát egyértelműsége: Igazoljuk, hogy ha az $\{a_n\}$ sorozatnak M_1 és M_2 is legkisebb felső korlátja, akkor $M_1 = M_2$! Egy sorozatnak tehát nem lehet két különböző legkisebb felső korlátja.

115. Igaz-e, hogy minden, kizárólag pozitív tagokból álló, felülről korlátos sorozat konvergens? Válaszunkat indokoljuk!

116. Bizonyítsuk be, hogy ha $\{a_n\}$ konvergens sorozat, akkor minden pozitív ε számhoz létezik olyan N egész szám, amelyre teljesül, hogy minden m és n esetén

$$m > N \text{ és } n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

117. A határérték egyértelműsége: Bizonyítsuk be, hogy egy sorozatnak legfeljebb egy határértéke lehet: ha L_1 és L_2 olyan számok, amelyekre $a_n \to L_1$ és $a_n \to L_2$ egyaránt teljesül, akkor $L_1 = L_2$.

118. Részsorozatok: Ha egy sorozat tagjai – a megfelelő sorrendben – egy másik sorozat tagjai között is szerepelnek, akkor az előbbi sorozatot az utóbbi **részsorozatának** nevezzük. Igazoljuk, hogy ha az $\{a_n\}$ sorozat két részsorozatának különböző határértékei vannak, $L_1 \neq L_2$, akkor az $\{a_n\}$ sorozat divergens!

119. Jelöljük az $\{a_n\}$ sorozat páros indexű tagjainak sorozatát $\{a_{2k}\}$-val, a páratlan indexű tagok sorozatát pedig a_{2k+1}-gyel. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_{2k} \to L$ és $a_{2k+1} \to L$ egyaránt fennáll, akkor $a_n \to L$ is!

120. Bizonyítsuk be, hogy egy $\{a_n\}$ sorozat pontosan akkor tart 0-hoz, ha a sorozat tagjainak abszolútértékeiből álló $\{|a_n|\}$ sorozat is 0-hoz tart!

Határértékek meghatározása számítógéppel

A 121–124. feladatokban számítógép segítségével keressünk olyan N számot, amelyre fennáll, hogy a megadott egyenlőtlenség minden $n > N$ esetén fennáll. Feltéve, hogy az egyenlőtlenségek a sorozat határértékének definíciójának felelnek meg, melyik sorozatokról van szó, és mennyi a határérték?

121. $|\sqrt[n]{0{,}5} - 1| < 10^{-3}$ **122.** $|\sqrt[n]{n} - 1| < 10^{-3}$

123. $0{,}9^n < 10^{-3}$ **124.** $2^n/n! < 10^{-3}$

125. Newton-módszerrel generált sorozatok: Newton módszerét egy $f(x)$ differenciálható függvényre való alkalmazásakor, egy x_0 kezdőérték alapján definiálunk egy $\{x_n\}$ sorozatot, amely – bizonyos feltételek teljesülése mellett – a függvény egyik zérushelyéhez konvergál. A sorozatot megadó rekurziós képlet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

(a) Igazoljuk, hogy az $f(x) = x^2 - a$ $(a > 0)$ függvény esetében a rekurziós képlet $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$ alakban írható fel!

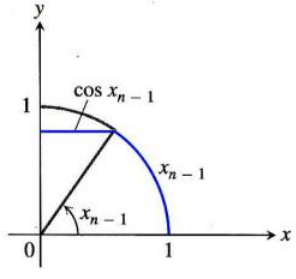
(b) Számítsuk ki és ábrázoljuk a sorozat első néhány tagját az $x_0 = 0$ és $a = 3$ értékek esetén! Melyik szám egyre pontosabb közelítését kapjuk így meg? Válaszunkat indokoljuk!

126. (*Az előző feladat folytatása.*) Ismételjük meg a 125. feladat (b) részét $a = 2$-vel.

127. Rekurziós képlet $\pi/2$-re: Az $x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} + \cos x_{n-1}$ rekurziós összefüggésekkel adott sorozat gyorsan konvergál $\pi/2$-höz.

(a) Próbáljuk ki!

(b) Az ábra alapján magyarázzuk meg, miért olyan gyors a konvergencia!



128. A Wall Street Journal 1992. december 15-i számának címlapján olvashatjuk a következőket: a Ford Motor Co. gyáraiban egy átlagos jármű karosszériája $7\frac{1}{4}$ óra alatt készült el; 1980-ban a Fordnak ugyanehhez 15 órára, a japán autógyártóknak – 1992-ben – mindössze $3\frac{1}{2}$ órára volt szükségük.

A Ford 1980 óta évente átlagosan 6 százalékkal csökkentette a szóban forgó munkaidőt. Ugyanebben az ütemben fejlődve 1992 után n évvel a Ford

$$S_n = 7{,}25 \cdot (0{,}94)^n$$

óra alatt készít el egy karosszériát. Ha a japánok nem javítanak, hány évbe telik, amíg a Ford beéri távol-keleti riválisait? Kövessünk két gondolatmenetet!

(a) Határozzuk meg azt az n indexet, amelytől kezdve az S_n sorozat tagjai nem nagyobbak, mint 3,5!

(b) Ábrázoljuk az $f(x) = 7{,}25 \cdot (0{,}94)^x$ függvényt; a programunk segítségével állapítsuk meg, hogy hol metszi az f függvény grafikonja az $y = 3{,}5$ egyenletű egyenest!

Számítógépes vizsgálatok

A 129–140. feladatokban számítógép alkalmazásával hajtsuk végre a következő lépéseket:

(a) Számítsuk ki és ábrázoljuk a sorozatok első 25 tagját! Mire következtethetünk ebből: korlátos-e a sorozat alulról vagy felülről? Konvergens-e a sorozat, és ha igen, mi lehet az L határértéke?

(b) Ha a sorozat konvergens, keressünk olyan N pozitív egész számot, amelyre teljesül, hogy minden $n \geq N$ esetén $|a_n - L| \leq 0{,}01$! A sorozat hányadik tagjától kezdve kerülünk L-hez 0,0001-nél kisebb távolságra?

129. $a_n = \sqrt[n]{n}$

130. $a_n = \left(1 + \dfrac{0{,}5}{n}\right)^n$

131. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{5^n}$

132. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + (-2)^n$

133. $a_n = \sin n$

134. $a_n = n \sin \dfrac{1}{n}$

135. $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$

136. $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$

137. $a_n = (0{,}9999)^n$

138. $a_n = 123456^{1/n}$

139. $a_n = \dfrac{8^n}{n!}$

140. $a_n = \dfrac{n^{41}}{19^n}$

141. Kamatos kamat, betét, kivét: Ha fix r kamatra, évente m jóváírással elhelyezünk a bankban egy A_0 összeget, és betétünk minden év végén egy konstans b összeggel növekszik (vagy csökken, amennyiben $b < 0$), akkor $n+1$ év után a betétünk

$$A_{n+1} = \left(1 + \frac{r}{m}\right) A_n + b. \qquad (1)$$

(a) Számítsuk ki az első száz (n, A_n) pontot, amennyiben $A_0 = 1000$, $r = 0{,}02015$, $m = 12$ és $b = 50$. Mennyi pénz van a számlánkon az ötödik év végén? Vizsgáljuk meg az $\{A_n\}$ sorozatot konvergencia és korlátosság szempontjából!

(b) Ismételjük meg a feladat (a) részét az $A_0 = 5000$, $r = 0{,}0589$, $m = 12$ és $b = -50$ adatokkal!

(c) Ha 5000 dollárt helyezünk el évi 4,5 százalékos kamatra, negyedévenkénti jóváírással, akkor közelítőleg hány év múlva lesz a számlánkon 20 000 dollár? És ha a kamat 6,5 százalék?

(d) Belátható, hogy tetszőleges $k \geq 0$ esetén az (1) rekurzív definícióval definiált sorozatra teljesül az

$$A_k = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^k \left(A_0 + \frac{mb}{r}\right) - \frac{mb}{r} \qquad (2)$$

összefüggés. Ellenőrizzük, hogy a feladat (a) részében kiszámított ötven tag rendre az, amit a (2) egyenlet alapján kapunk!

142. Logisztikus differenciaegyenlet: Az

$$a_{n+1} = r a_n (1 - a_n)$$

rekurziós összefüggést logisztikus differenciaegyenletnek nevezzük; ha megadjuk az a_1 első tagot, akkor az egyenlet az $\{a_n\}$ logisztikus sorozatot definiálja. A feladatban mindvégig feltesszük, hogy $0 < a_1 < 1$, például $a_1 = 0{,}3$.

(a) Legyen $r = 3/4$. Számítsuk ki a sorozat első 100 tagját és ábrázoljuk a megfelelő (n, a_n) pontokat! Konvergensnek tűnik a sorozat? Mi lehet a határérték? Függ-e a határérték az a_0 választásától?

(b) Válasszunk néhány r számot az $(1,3)$ intervallumból és ismételjük meg az iménti eljárást! Válasszunk olyan pontokat is, amelyek közel esnek az intervallum végpontjaihoz! Mit tapasztalunk?

(c) Ezután vizsgáljuk meg, mi történik, ha a $(3;3{,}45)$ intervallum végpontjaihoz közel eső r számokat választunk. Az $r = 3$ számot bifurkációs értéknek nevezzük, és azt mondjuk, hogy a sorozat az új intervallumban vonzó 2-ciklust ír le.

(d) Folytassuk a vizsgálódást a $(3{,}45;3{,}54)$, valamint a $(3{,}54;3{,}55)$ intervallum végpontjaihoz közelítő értékekkel. Ábrázoljuk a sorozatok első 200 tagját! Fogalmazzuk meg, mit tapasztalunk! Hány érték között oszcillálnak a sorozatok tagjai az egyes intervallumokban? A két tizedesre kerekített $r = 3{,}45$ és az $r = 3{,}54$ számokat szintén bifurkációs értékeknek nevezzük.

(e) A dolog ezután egyre érdekesebb lesz. Létezik a bifurkációs értékek egy növekvő $3 < 3{,}45 < 3{,}54 < \ldots < c_n < c_{n+1}$ sorozata, amelyre teljesül, hogy a $c_n < r < c_{n+1}$ egyenlőtlenségeket kielégítő r-ek esetén az $\{a_n\}$ logisztikus sorozat tagjai 2^n különböző érték között váltakoznak (ezt nevezzük 2^n-ciklusnak). A bifurkációs értékek $\{c_n\}$ sorozatának 3,57 felső korlátja, a sorozat tehát konvergens. Egy $r < 3{,}57$ számot választva így egy 2^n-ciklus tagjait kapjuk. Próbáljuk ki például az $r = 3{,}5695$ számot, és számítsuk ki a sorozat első háromszáz tagját!

(f) Vizsgáljuk meg mi történik, ha $r > 3{,}57$. Válasszuk az $r = 3{,}65$ számot, és számítsuk ki az $\{a_n\}$ sorozat első 300 tagját! Figyeljük meg, ahogy a tagok össze-vissza változnak. Az előző tagok ismeretében a sorozat egyetlen a_{n+1} tagját sem tudjuk előrejelezni.

(g) Az $r = 3{,}65$ esetben válasszunk két egymáshoz közel eső a_0 értéket, például a 0,3 és a 0,301 számokat. Mindkét kezdőérték esetén számítsuk ki a sorozat első 300 tagját, és vessük össze a két sorozat viselkedését. Hányadik tagtól kezdve térnek el egymástól? Ismételjük meg ugyanezt az $r = 3{,}75$ esetben. Látjuk-e, hogy a sorozat egészen más képet mutat? Azt mondjuk, hogy a logisztikus sorozat *érzékeny az a_0 kezdeti feltételre.*

11.2. Végtelen sorok

Végtelen sornak nevezzük a végtelen sok tagból álló,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

alakú összegeket. Ebben az alfejezetben azt vizsgáljuk meg, hogyan lehet értelmet adni egy végtelen összegnek, és hogy miként lehet kiszámítani. Mivel végtelen sok tag van, nem lehet az összeadásokat elvégezni, hogy lássuk, mi az eredmény. Ehelyett megnézzük, mit kapunk, ha összeadjuk az első n tagot, és megnézzük, tudunk-e mondani valamit ennek az összegnek a viselkedéséről, ha n tart a végtelenbe. Az első n tag

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

összege – a sorozat n-edik részletösszege – a szokásos módon kiszámítható. Ha a végtelen összeghez valamilyen értéket tudunk rendelni, akkor azt várjuk, hogy a részletösszegek egyre közelebb kerülnek ehhez az értékhez, ahogy n növekszik, azaz a részletösszegek sorozatának van határértéke.

Tekintsük példaként az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

végtelen sort. Vizsgáljuk meg, felismerhető-e valamilyen szabályosság a részletösszegek sorozatában. (A mértani sorozat összegének középiskolából ismert képletének egy átalakítását alkalmazzuk. A képletet az 1. példa előtt újra le is vezetjük.)

Részletösszeg		**képlete**	**értéke**
első:	$s_1 = 1$	$2-1$	1
második:	$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$	$2 - \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
harmadik:	$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$2 - \frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-edik:	$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$	$2 - \frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$

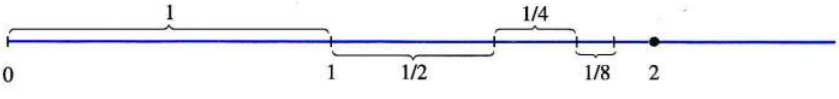
A szabályosság szembeötlő. A részletösszegek sorozatának n-edik tagja:

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

A részletösszeg-sorozat 2-höz tart, elvégre $\lim\limits_{n\to\infty} (1/2^n) = 0$. Ekkor azt mondjuk, hogy

„az $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$ végtelen sor összege 2".

Megkaphatjuk-e a 2-t úgy, hogy csupán véges számú tagot adunk össze? Nem. Össze tudunk adni végtelen sok számot? Nem. Mégis definiálható az összeg: mint a részletösszegek sorozatának határértéke az $n \to \infty$ esetben (11.5. ábra). A sorozatok határértékének ismeretében megszabadulhatunk a végesség korlátaitól.



11.5. ÁBRA: Amint az $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ számokat összadjuk, az összeg egyre közelebb kerül 2-höz.

DEFINÍCIÓK: **Végtelen sor, n-edik tag, részletösszeg, konvergencia, összeg**

Ha adott az $\{a_n\}$ számsorozat, akkor az

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

alakú kifejezést **végtelen sornak** nevezzük. Az a_n szám a végtelen sor ***n*-edik tagja**. Azt az $\{s_n\}$ sorozatot, amelynek tagjai

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \end{aligned}$$

a végtelen sor részletösszegeinek nevezzük; s_n a sor ***n*-edik részletösszege**. Ha a részletösszegek sorozata az L számhoz konvergál, akkor azt mondjuk, hogy a végtelen sor **konvergens**, és az **összege** L. Jelölés:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = L.$$

Ha a részletösszegek sorozata nem konvergens, akkor a végtelen sort divergensnek nevezzük.

Amikor egy $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ végtelen sort vizsgálni kezdünk, nem tudjuk rögtön, hogy a sor konvergens-e vagy sem. Mindkét esetben használhatjuk a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ vagy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jelölést. Ha egyértelmű, hogy az összegzést 1-től ∞-ig kell elvégeznünk, akkor az egyszerűbb $\sum a_n$ rövidítéssel is élhetünk.

Mértani sorok

Mértani sornak nevezzük az

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

alakú végtelen sorokat, amelyekben a és r valós számok, és $a \neq 0$. Az ilyen sort alkalmanként így írjuk fel: $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$. Az r **hányados** lehet pozitív is, miként az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots$$

sor esetében, vagy negatív, miként az

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \ldots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \ldots$$

sorban. Ha $r = 1$, akkor a mértani sor n-edik részletösszege:

$$s_n = a + a \cdot 1 + a \cdot 1^2 + \ldots + a \cdot 1^{n-1} = na;$$

a sorozat divergens, mivel $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ az a szám előjelétől függően. A mértani sor az $r = -1$ esetben is divergens, akkor ugyanis az n-edik részletösszegek értéke váltakozva a és 0. Ha $|r| \neq 1$, akkor az alábbi levezetés alapján könnyen eldönthetjük, hogy a sor mikor konvergens.

$$
\begin{aligned}
s_n &= a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} \\
rs_n &= ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n && \text{szoroztunk } r\text{-rel} \\
s_n - rs_n &= a - ar^n && s_n\text{-ből kivontuk } rs_n\text{-t} \\
s_n(1-r) &= a(1-r^n) && \text{kiemelés} \\
s_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad r \neq 0 && \text{ha } r \neq 0, \text{ akkor } s_n \text{ kifejezhető}
\end{aligned}
$$

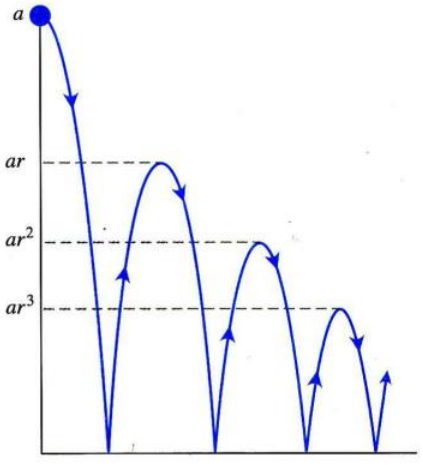
Ha $|r| < 1$, akkor $r^n \to 0$, amint $n \to \infty$ (amint az előző alfejezetben már beláttuk), és így $s_n \to a/(1-r)$. Ha $|r| > 1$, akkor $|r^n| \to \infty$, és a sor divergál.

Ha $|r| < 1$, akkor az $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ mértani sor az $a/(1-r)$ számhoz konvergál:

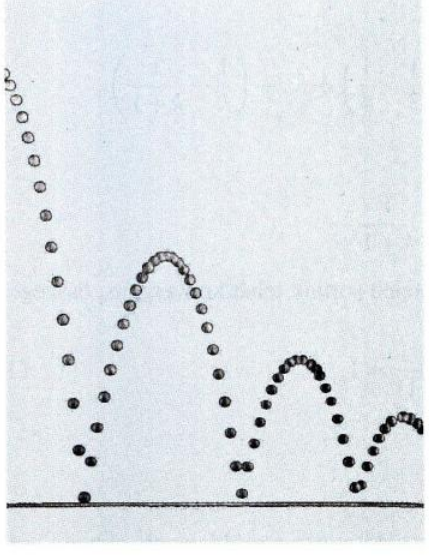
$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1.$$

Ha $|r| \geq 1$, akkor a sor divergál.

Meghatároztuk tehát, hogy egy mértani sor mikor konvergál, és ha igen, melyik számhoz. Gyakran előfordul – a következő alfejezetekben látunk majd erre példákat –, hogy egy végtelen sorról tudjuk, hogy konvergens, de az összegét nem ismerjük. A mértani sor összegét megadó $a/(1-r)$ képletnél ügyeljünk arra, hogy a az első tagja az összegnek, r pedig az 1-nél kisebb abszolútértékű hányados. Erre akkor kell gondosan ügyelni, ha az összegzésben r kitevője nem nullával indul.



(a)



(b)

11.6. ÁBRA: (a) A 3. példában egy mértani sor alapján számoltuk ki, mekkora egy pattogó labda által függőleges irányban megtett út, ha a labda minden alkalommal az eredeti magasság r-szereséig pattan vissza ($0 < r < 1$). (b) A pattogó labda stroboszkópos képe.

1. PÉLDA: **1-gyel induló összegzés**

Ha a mértani sorban $a = 1/9$ és $r = 1/3$, akkor

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1/9}{1-1/3} = \frac{1}{6}. \qquad \square$$

2. PÉLDA: **0-val induló összegzés**

A

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{4^n} = 5 - \frac{5}{4} + \frac{5}{16} - \frac{5}{64} + \ldots$$

mértani sorban $a = 5$ és $r = -1/4$. A sor összege:

$$\frac{a}{1-r} = \frac{5}{1+(1/4)} = 4. \qquad \square$$

3. PÉLDA: **Pattogó labda**

Egy labdát a méter magasból a földre ejtünk. Tudjuk, hogy ha a labdát h magasságból ejtjük le, akkor rh magasságig pattan vissza, ahol r 1-nél kisebb, pozitív állandó. Határozzuk meg a labda által megtett teljes függőleges irányú távolságot (11.6. ábra).

Megoldás: A teljes távolság:

$$s = a + \underbrace{2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \ldots}_{\text{ez az összeg: } 2ar/(1-r)} = a + \frac{2ar}{1-r} = a\frac{1+r}{1-r}.$$

Ha például $a = 6$ és $r = \frac{2}{3}$, akkor

$$s = 6\frac{1+(2/3)}{1-(2/3)} = 6\left(\frac{5/3}{1/3}\right) = 30 \text{ m}. \qquad \square$$

4. PÉLDA: **Végtelen szakaszos tizedes tört**

Írjuk fel az 5,232323... végtelen tizedes törtet két egész szám hányadosaként!

Megoldás:

$$5{,}232323 = 5+\frac{23}{100}+\frac{23}{(100)^2}+\frac{23}{(100)^3}+\ldots =$$

$$=5+\frac{23}{100}\underbrace{\left[1+\frac{1}{100}+\left(\frac{1}{100}\right)^2+\ldots\right]}_{1/(1-0{,}01)} = \qquad a=1,\ r=1/100$$

$$=5+\frac{23}{100}\left(\frac{1}{0{,}99}\right)=5+\frac{23}{99}=\frac{518}{99}. \qquad \square$$

Sajnos viszonylag ritkán fordul elő, hogy egy végtelen sor összegét úgy tudjuk kifejezni, mint a konvergens mértani sorok esetében. Gyakran meg kell elégednünk azzal, hogy a sor összegére egy becslést adunk (erről később bővebben is szót ejtünk). A következő példában mindazonáltal sikerrel járunk.

5. PÉLDA: **Egy más típusú konvergens sor**

Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ végtelen sor összegét!

Megoldás: A sor nem mértani ugyan, de átalakíthatjuk úgy, hogy az s_k részletösszegeket ki tudjuk fejezni. A döntő megfigyelés a következő:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

az s_k részletösszeg ennélfogva:

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right).$$

Eszerint tehát

$$s_k=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right).$$

A véges sok tag összeadását elvégezve:

$$s_k=1-\frac{1}{k+1}.$$

Eszerint tehát $s_k \to 1$, amint $k \to \infty$. Végtelen sorunk tehát konvergens, összege pedig 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1. \qquad \square$$

Divergens sorok

Ha egy végtelen sor tagjai nem, vagy nem elég gyorsan csökkennek, akkor a sor nem konvergens.

6. PÉLDA: **Minden határon túl növekvő részösszegek**

1. A

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2=1+4+9+\ldots+n^2+\ldots$$

sor divergens, mivel részösszegeinek sorozata minden határon túl növekszik. Ha $n>1$, akkor az $s_n=1+4+9+\ldots+n^2$ részletösszeg nagyobb, mint n^2.

2. A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots + \frac{n+1}{n} + \ldots$$

végtelen sor esetében ugyanez a helyzet. Mivel a sor minden tagja nagyobb 1-nél, az n-edik részletösszeg nagyobb, mint n. □

Az n-edik tagon alapuló divergenciateszt

Vegyük észre, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergens, akkor az a_n sorozatnak 0-hoz kell tartania. Jelölje ugyanis S a sor összegét, $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ a sor n-edik összegét. Ha n elég nagy, akkor s_n és s_{n-1} egyaránt elég közel van S-hez, így a különbségük, vagyis az a_n szám, egyre közelebb kerül 0-hoz. Kissé formálisabban (a sorozatok határértékére vonatkozó különbségszabályt alkalmazzuk):

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to S - S = 0.$$

Beláttuk tehát a következő tételt:

7. TÉTEL:

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $a_n \to 0$.

Figyelem!

A 7. Tétel nem állítja, hogy ha $a_n \to 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergens. A sor akkor is divergálhat, ha $a_n \to 0$.

A 7. Tételből kapjuk a következő feltételt egy végtelen sor divergenciájára:

Az n-edik tagon alapuló divergenciateszt

Ha a $\lim_{n\to\infty} a_n$ határérték nem létezik, vagy 0-tól különbözik, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor divergens.

7. PÉLDA: A teszt alkalmazása

(a) A $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ végtelen sor divergens, mivel $n^2 \to \infty$;

(b) a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ végtelen sor divergens, mivel $\frac{n+1}{n} \to 1$;

(c) a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ végtelen sor divergens, mivel $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ nem létezik;

(d) a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+5}$ végtelen sor divergens, mivel $\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+5} = -\frac{1}{2} \neq 0$. □

8. PÉLDA: $a_n \to 0$, de a sor divergens

Az

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{2 \text{ tag}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{4 \text{ tag}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n}}_{2^n \text{ tag}} + \ldots$$

végtelen sor divergens, mivel az egyenlő tagokat összeadva mindig 1-et kapunk, így a részletösszegek minden határon túl nőnek. A tagokból álló sorozat viszont a 0-hoz tart. A következő alfejezet 1. példája szerint ilyen a harmonikus sor is. □

Műveletek sorokkal

Két konvergens sor – tagonként vett – összege és különbsége is konvergens, egy konvergens sor konstansszorosa is konvergens.

8. TÉTEL:

Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergens sorok, továbbá $\sum a_n = A$ és $\sum b_n = B$, akkor

1. $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A + B$ (*összegszabály*);

2. $\sum(a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n = A - B$ (*különbségszabály*);

3. $\sum ka_n = k\sum a_n = kA$, k tetszőleges állandó (*konstansszoros-szabály*).

Bizonyítás: A szabályok a sorozatokra vonatkozó, az előző alfejezetből ismert analóg szabályokból következnek. Az összegszabály bizonyításához legyen

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \text{ és } B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

A $\sum(a_n + b_n)$ sor n-edik részösszege:

$$\begin{aligned} s_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) = \\ &= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = \\ &= A_n + B_n. \end{aligned}$$

Mivel $A_n \to A$ és $B_n \to B$, ezért a sorozatokra vonatkozó összegszabály szerint $s_n \to A + B$. A különbségszabály bizonyítása hasonlóan megy.

A konstansszoros-szabály bizonyításához elegendő észrevenni, hogy a $\sum ka_n$ sor n-edik részletösszege:

$$s_n = ka_1 + ka_2 + \ldots + ka_n = k(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = kA_n,$$

a részletösszegek sorozata tehát a sorozatokra vonatkozó konstansszoros-szabály szerint kA-hoz tart. □

A 8. Tétel következményei közül – bizonyítás nélkül – kettőt említünk:

1. Divergens sorozat minden nemnulla konstansszorosa is divergens.

2. Ha $\sum a_n$ konvergens és $\sum b_n$ divergens, akkor divergens $\sum(a_n + b_n)$ és $\sum(a_n - b_n)$ is.

FIGYELEM! A $\sum(a_n + b_n)$ sor úgy is lehet konvergens, hogy mind $\sum a_n$, mind $\sum b_n$ divergens. A $\sum a_n = 1 + 1 + 1 + \ldots$ és $\sum b_n = -1 - 1 - 1 - \ldots$ sorok például divergensek, de $\sum(a_n + b_n) = 0 + 0 + 0 + \ldots$ konvergens, összege 0.

9. PÉLDA: A szabályok alkalmazása

(a)
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 1}{6^{n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}} = && \text{különbségszabály} \\ &= \frac{1}{1 - (1/2)} - \frac{1}{1 - (1/6)} = && \text{mértani sor; } a = 1, \\ & && r = 1/2, \text{ illetve } 1/6 \\ &= 2 - \frac{6}{5} = \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = && \text{konstansszoros-szabály} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{1 - (1/2)} = && \text{mértani sor; } a = 1, r = 1/2 \\ &= 8. \end{aligned}$$

□

Tagok elhagyása és hozzáadása

Ha egy végtelen sor véges számú tagját elhagyjuk vagy a sorhoz véges számú tagot hozzáadunk, azzal a sor konvergenciáját vagy divergenciáját nem változtatjuk meg, bár amennyiben a sor konvergens, az összege természetesen megváltozik. Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergens, akkor minden $k > 1$ esetén konvergens a $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ sor is, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

Megfordítva: ha $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ minden $k > 1$ esetén konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is az. Egy példa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n},$$

és

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\right) - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125}.$$

Végtelen sor átindexelése

Ha egy végtelen sor tagjainak sorrendjén nem változtatunk, akkor a sort nyugodtan újraindexelhetjük. Ha az index induló értékét h-val meg akarjuk növelni, elegendő, ha az a_n tag n indexe helyett $n-h$-t írunk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Ha az index induló értékét h-val csökkenteni akarjuk, elegendő, ha az a_n tag n indexe helyett $n+h$-t írunk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Az átindexelés afféle vízszintes eltolásként hat. Ezt már láttuk a mértani sorok esetében, ezeket ugyanis néha 0-val, néha 1-gyel indítottuk. Az első index persze bármi lehet. Általában úgy választjuk meg, hogy a sor képlete a lehető legegyszerűbb legyen.

10. PÉLDA: **Mértani sor átindexelése**
A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ mértani sort írhatjuk $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}}$, de akár $\sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}}$ alakba is, a részletösszegek ugyanazok maradnak. □

11.2. Feladatok

Részletösszegek

Írjuk fel a megadott végtelen sor n-edik részletösszegének képletét; a konvergens sorok esetében határozzuk meg az összegüket is (1–6. feladatok)!

1. $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \ldots + \frac{2}{3^{n-1}} + \ldots$

2. $\frac{9}{100} + \frac{9}{100^2} + \frac{9}{100^3} + \ldots + \frac{9}{100^n} + \ldots$

3. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$

4. $1 - 2 + 4 - 8 + \ldots + (-1)^{n-1}2^n + \ldots$

5. $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots$

6. $\frac{5}{1\cdot 2} + \frac{5}{2\cdot 3} + \frac{5}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{5}{n(n+1)} + \ldots$

Mértani sorok

Írjuk fel a megadott sorok első néhány tagját, majd állapítsuk meg az összegüket (7–14. feladatok)!

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$

8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4^n}$ **10.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{4^n}$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$ **12.** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n}\right)$ **14.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n}$

Részletösszegek vizsgálata

A részletösszegek egyszerűsítésével határozzuk meg a sorok összegét (15–22. feladatok)!

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$ **16.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ **18.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)$ **20.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{1/n}} - \frac{1}{2^{1/(n+1)}}\right)$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right)$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}(n) - \operatorname{arctg}(n+1)\right)$

Konvergencia és divergencia

A 23–45. feladatokbeli sorok közül melyek konvergensek és melyek divergensek? Válaszunkat indokoljuk! A konvergens sorok esetében adjuk meg az összegüket is!

23. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ **24.** $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^n$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{2^n}$ **26.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n$

27. $\sum_{n=0}^{\infty} \cos \pi n$ **28.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{5^n}$

29. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n}$ **30.** $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1}{n}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^n}$ **32.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$, $|x| > 1$

33. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n}$ **34.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

35. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}$ **36.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1}\right)$ **38.** $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{2n+1}\right)$

39. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$ **40.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\pi n}}{\pi^{ne}}$

Mértani sorok

Írjuk fel a megadott sorok első néhány tagját, határozzuk meg a és r értékét, majd a sor összegét! Ezután írjuk fel az $|r| < 1$ egyenlőtlenséget, és állapítsuk meg, hogy a sor mely x értékek esetén konvergens (41–44. feladatok)!

41. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ **42.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

43. $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$ **44.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{3+\sin x}\right)^n$

Állapítsuk meg, hogy a megadott mértani sorok mely x értékek esetén konvergensek; adjuk meg a sorok összegét x függvényében (45–50. feladatok)!

45. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ **46.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{-2n}$

47. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n$ **48.** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n$

49. $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^n x$ **50.** $\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

Végtelen szakaszos tizedes törtek

Írjuk fel a megadott végtelen tizedes törteket két egész szám hányadosaként (51–58. feladatok)!

51. $0,\overline{23} = 0,23\,23\,23\ldots$

52. $0,\overline{234} = 0,234\,234\,234\ldots$

53. $0,\overline{7} = 0,777\ldots$

54. $0,\overline{d} = 0,ddd\ldots$ (valamely d számjeggyel)

55. $0,0\overline{6} = 0,0666\ldots$

56. $1,\overline{414} = 1,414\,414\,414\ldots$

57. $1,24\overline{123} = 1,24123\,123\,123\ldots$

58. $3,\overline{142857} = 3,142857\,142857\ldots$

További példák és feladatok

59. Az 5. feladatbeli sort felírhatjuk

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \text{ vagy } \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

alakban is. Írjuk fel a sort úgy, hogy a kezdőindex **(a)** $n = -2$, **(b)** $n = 0$, **(c)** $n = 5$ legyen!

60. A 6. feladatbeli sort felírhatjuk

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} \text{ vagy } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(n+1)(n+2)}$$

alakban is. Írjuk fel a sort úgy, hogy a kezdőindex **(a)** $n = -1$, **(b)** $n = 3$, **(c)** $n = 20$ legyen!

61. Adjunk meg olyan, csupa nemnulla tagból álló végtelen sort, amelynek összege **(a)** 1, **(b)** -3, **(c)** 0!

62. *(Az előző feladat folytatása.)* Fel tudunk-e írni tetszőleges előre megadott szám esetén oda konvergáló végtelen sort? Válaszunkat indokoljuk!

63. Igazoljuk, hogy a $\sum(a_n/b_n)$ sor úgy is lehet divergens, hogy mind $\sum a_n$, mind $\sum b_n$ konvergál, és egyetlen b_n sem nulla!

64. Megfelelő $A = \sum a_n$ és $B = \sum b_n$ sorozatok megadásával illusztráljuk, hogy a $\sum a_n b_n$ sor, mégha konvergens is, az összege általában különbözik AB-től! (Ami nem meglepő, tekintve a triviális tényt, hogy összegek szorzata nem a tagonként vett szorzatok összege).

65. Adjunk példát arra, hogy a $\sum(a_n/b_n)$ sor összege általában akkor is különbözik A/B-től, ha $A = \sum a_n$, $B = \sum b_n \neq 0$, továbbá

egyetlen b_n szám sem 0! (Ami nem meglepő, tekintve a triviális tényt, hogy összegek hányadosa nem egyenlő a tagonként vett hányadosok összegével.)

66. Tegyük fel, hogy $\sum a_n$ konvergens, és hogy minden n-re $a_n > 0$. Mondhatunk-e ekkor valamit a $\sum(1/a_n)$ sorról? Indokoljuk válaszunkat!

67. Mi történik, ha egy divergens sorhoz véges sok tagot hozzáadunk, illetve ha véges sok tagot elhagyunk belőle? Válaszunkat indokoljuk!

68. Mondhatunk-e valamit a $\sum(a_n+b_n)$ összegsorról, ha a $\sum a_n$ sor konvergens, $\sum b_n$ pedig divergens? Válaszunkat indokoljuk!

69. Írjunk fel olyan 5-höz konvergáló $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ mértani sort, amelyre **(a)** $a=2$, illetve **(b)** $a=13/2$.

70. Mennyi a b, ha

$$1+e^b+e^{2b}+e^{3b}+\ldots=9?$$

71. Mely r számok esetén lesz konvergens az

$$1+2r+r^2+2r^3+r^4+2r^5+r^6+\ldots$$

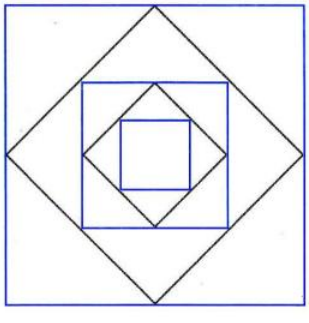
végtelen sor?

72. Igazoljuk, hogy a hiba, amit akkor követünk el, ha egy konvergens mértani sor összege helyett az s_n részösszeget használjuk, éppen $ar^n/(1-r)$.

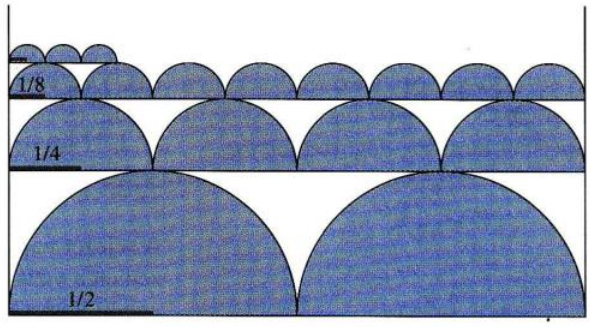
73. Négy méter magasból leejtünk egy labdát. Minden alkalommal, amikor a labda h magasságból indul, $0{,}75h$ magasságig pattan vissza. Adjuk meg a labda által függőleges irányban megtett út teljes hosszát!

74. (*A 73. feladat folytatása.*): Mennyi ideig pattog az előző feladatbeli labda? (*Útmutatás*: az $s=4{,}9t^2$ képlet alapján $t=\sqrt{s/4{,}9}$.)

75. Az ábrán egy négyzetekből álló sorozat első öt tagját tanulmányozhatjuk. A legkülső négyzet területe 4 m^2. Minden további négyzet csúcsai a tőle kívülre elhelyezkedő négyzet oldalfelező pontjaira illeszkednek. Határozzuk meg a sorozatban szereplő négyzetek területének összegét!



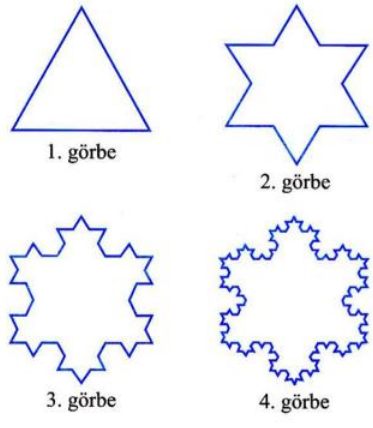
76. Az ábrán egy olyan sorozat részletét látjuk, amely sorokba rendezett félkörök soraiból áll. Az n-edik sorban 2^n darab $1/2^n$ sugarú félkör van. Határozzuk meg a félkörök területeinek összegét!



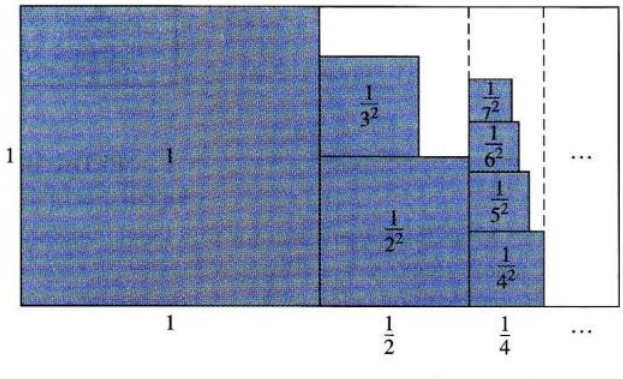
77. Helga von Koch hópehelygörbéje: Helga von Koch hópehelygörbéje egy véges területet határoló végtelen görbe. Ennek belátásához tegyük fel, hogy egy egységnyi oldalú szabályos háromszögből indulunk ki.

(a) Határozzuk meg az n-edik görbe L_n hosszát, és mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} L_n=\infty$!

(b) Határozzuk meg az L_n görbe által határolt terület A_n nagyságát, és adjuk meg a $\lim_{n\to\infty} A_n$ határértéket!



78. Az ábra informális bizonyítás arra, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ kisebb, mint 2. Magyarázzuk meg, „hogyan működik" a bizonyítás! [P. J. Ribbon: Convergence with Pictures, *Am. Math. Monthly*, Vol. 93., No. 6. (1986) pp. 476–478.]



11.3. Az integrálkritérium

Egy $\sum a_n$ végtelen sor esetében két kérdés merül fel:

1. Konvergens-e a sor?
2. Ha konvergens, mi az összege?

A fejezet nagy részét az első kérdés vizsgálatának szenteljük. Ebben az alfejezetben a választ az $\int_1^\infty f(x)dx$ improprius integrállal való összehasonlítás révén adjuk meg. Gyakorlati szempontból persze a második kérdés is fontos, utóbb erre is vissza fogunk térni.

Ebben és a következő két fejezetben kizárólag olyan sorokkal foglalkozunk, amelyeknek egy tagja sem negatív. A megszorítás értelme az, hogy ekkor a részletösszegek sorozata növekvő, és tudjuk, hogy minden korlátos növekvő sorozat konvergens (11.1. alfejezet, 6. Tétel). Annak igazolásához tehát, hogy egy nemnegatív tagokból álló végtelen sor konvergens, elegendő azt megmutatni, hogy a részletösszegek sorozata felülről korlátos.

Elsőre visszalépésnek tűnhet, hogy egy sor konvergenciáját anélkül állapítjuk meg, hogy meghatároznánk az összegét. Minden bizonnyal jobb lenne, ha a sorok összegét a részletösszegekre vonatkozó képletek alapján, közvetlenül meghatározhatnánk. A legtöbb esetben azonban ilyen képlet nem áll rendelkezésünkre, így inkább a kétlépéses eljárást követjük: előbb megállapítjuk, konvergens-e a sorozat, majd megbecsüljük az összegét.

Növekvő részletösszegek

Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ olyan végtelen sor, amelyben minden n esetén $a_n \geq 0$. Mivel $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$, ilyenkor egyetlen részletösszeg sem lehet kisebb az őt közvetlenül megelőzőnél:

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \ldots.$$

Mivel a részletösszegek sorozata növekvő, Weierstrass tétele szerint a sor pontosan akkor konvergens, ha a részletösszegek sorozata felülről korlátos.

Weierstrass tételének következménye

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$ végtelen sor pontosan akkor konvergens, ha a részletösszegek sorozata felülről korlátos.

1. PÉLDA: **A harmonikus sor**

A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

végtelen sort **harmonikus sornak** nevezzük. A harmonikus sor divergens, ez azonban nem következik az n-edik tagra vonatkozó kritériumból. Az n-edik tagok $1/n$ sorozata nullához tart, maga a sor azonban divergál. Ezt úgy láthatjuk be, hogy megmutatjuk: a részletösszegek sorozatának nincs felső korlátja. Ehhez a tagokat a következőképpen csoportosítjuk:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16}\right)}_{>\frac{8}{16}=\frac{1}{2}} + \ldots.$$

Az első két tag összege 1,5. A következő két tag összege $1/3+1/4$, ami nagyobb, mint $1/4+1/4=1/2$. A következő négy tag összege $1/5+1/6+$ $+1/7+1/8$, ami nagyobb, mint $1/8+1/8+1/8+1/8=1/2$; a következő nyolc tag összegé pedig $1/9+1/10+1/11+1/12+1/13+1/14+1/15+1/16$, ami nagyobb, mint $8/16=1/2$. Hasonlóan: a következő 16 tag összege nagyobb, mint $16/32=1/2$, és általában: az $1/2^{n+1}$-nel végződő 2^n darab tag összege nagyobb, mint $2^n/2^{n+1}=1/2$. A részletösszegek sorozata tehát nem korlátos: ha $n=2^k$, akkor az s_n részletösszeg nagyobb, mint $k/2$. □

Az integrálkritérium

Az integrálkritériumot azzal a végtelen sorral vezetjük be, amely emlékeztet ugyan a harmonikus sorra, n-edik tagja azonban nem $1/n$, hanem $1/n^2$.

2. PÉLDA:

Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

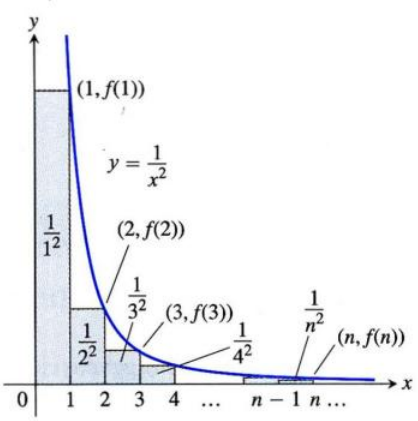
végtelen sor?

Megoldás: Azt, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ sor konvergens-e, eldönthetjük az $\int_1^{\infty}(1/x^2)dx$ integrállal való összehasonlítás alapján is. A végtelen sor tagjaira, mint az $f(x)=$ $=1/x^2$ függvény értékeire, és mint az $y=1/x^2$ egyenletű görbe alá rajzolt téglalapok területére gondolunk. A 11.7. ábra szerint

$$\begin{aligned}s_n&=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}=\\&=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)<\\&<f(1)+\int_1^n\frac{1}{x^2}dx<\\&<1+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx<\\&<1+1=2.\end{aligned}$$

$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=1$ (8.8. alfejezet, 3. példa)

A $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ végtelen sor részletösszegeinek sorozata tehát felülről korlátos, a sor ennélfogva konvergens. A sor összege $\pi^2/6\approx 1{,}64493$ (11.11. alfejezet, 16. feladat). □



11.7. ÁBRA: Az $f(x)=1/x^2$ függvény grafikonja alatti terület nagyobb, mint a grafikon alá rajzolt téglalapok területének összege (2. példa).

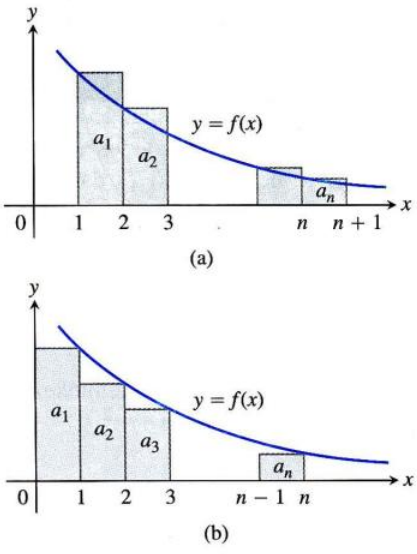
Figyelem!
A végtelen sor összege és az integrál értéke általában nem egyezik meg (amennyiben mindkettő konvergens). A 2. példában $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\pi^2/6$, de $\int_1^{\infty}(1/x^2)dx=1$.

9. TÉTEL: Az integrálkritérium

Legyen $\{a_n\}$ csupa pozitív tagból álló sorozat. Tegyük fel, hogy minden n-re $a_n=f(n)$, és hogy $x\geq N$ (ahol N pozitív egész szám) esetén f kizárólag pozitív értékeket felvevő, folytonos és csökkenő függvény. Ekkor a $\sum_{n=N}^{\infty}a_n$ végtelen sor és az $\int_N^{\infty}f(x)dx$ integrál egyszerre konvergens, vagy nem.

Bizonyítás: Az $N=1$ esetre szorítkozunk (az általános eset bizonyítása hasonlóan megy).

Induljunk ki abból, hogy f csökkenő függvény, amelyre teljesül, hogy minden n-re $a_n=f(n)$. A 11.8. ábra (a) részén látható téglalapok együttes területe



11.8. ÁBRA: Az integrálkritérium szerint a $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ végtelen sor és az $\int_N^{\infty} f(x)dx$ integrál egyszerre konvergens vagy divergens.

– az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok összege – nagyobb, mint az $y = f(x)$ egyenletű görbe alatti területnek az $x = 1$ és az $x = n+1$ egyenesek közé eső része:

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \le a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

A 11.8. ábra (b) részén a téglalapoknak nem a bal felső, hanem a jobb felső sarka illeszkedik az $y = f(x)$ egyenletű görbére. Ha eltekintünk az első, a_1 területű téglalaptól, akkor világos, hogy

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_n \le \int_1^n f(x)dx.$$

Ha az a_1 tagot is figyelembe vesszük, akkor az

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \le a_1 + \int_1^n f(x)dx.$$

Egyenlőtlenségeinket együtt is felírhatjuk:

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \le a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \le a_1 + \int_1^n f(x)dx.$$

Ezek az egyenlőtlenségek minden n-re, és így az $n \to \infty$ esetben is érvényben maradnak.

Ha $\int_1^{\infty} f(x)dx$ véges, akkor a jobb oldali egyenlőtlenség alapján $\sum a_n$ is véges. Ha viszont $\int_1^{\infty} f(x)dx$ végtelen, akkor a bal oldali egyenlőtlenség szerint $\sum a_n$ is végtelen. A végtelen sor és az integrál tehát egyszerre véges vagy végtelen. □

3. PÉLDA: **A p-sorok**

Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

p-sorozat konvergens, ha $p > 1$, és divergens, ha $p \le 1$!

Megoldás: Ha $p > 1$, akkor $f(x) = 1/x^p$ az x változó csökkenő függvénye. Az

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \int_1^{\infty} x^{-p}dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b =$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{1-p}(0-1) = \frac{1}{p-1}$$

egyenlőségek és az integrálkritérium alapján a végtelen sor konvergens. Hangsúlyozzuk, hogy a p-sor összege *nem* $1/(p-1)$. A sor konvergens, de az összegét nem ismerjük pontosan.

Ha $p < 1$, akkor $1 - p > 0$, és így

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} \left(b^{1-p} - 1\right) = \infty.$$

Az integrálkritérium szerint a sor divergens.

Ha $p = 1$, akkor a p-sor az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

harmonikus sor. Összefoglalva: ha $p > 1$, akkor a sor konvergens, minden más p értékre divergens. □

A $p = 1$ esetben a p-sor az 1. példából ismert harmonikus sor. A p-sorokon alapuló kritérium szerint a harmonikus sor *éppen* divergál: a $p = 1{,}000\,000\,001$ esetben a sor már konvergens!

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a harmonikus sor részletösszegei milyen lassan tartanak a végtelenhez. Nem kevesebb, mint 272 400 600 tagot kell például összeadnunk, hogy az összeg meghaladja a 20-at! A számológépünkkel egy ilyen összeg kiszámítása több, mint 8 és fél évig tartana, ha másodpercenként adnánk egy újabb tagot az összeghez, éjjel-nappal (lásd ehhez a 33. feladat (b) részét is).

4. PÉLDA: **Egy konvergens sor**

A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

sorozat az integrálkritérium szerint konvergens. Az $f(x) = 1/(x^2+1)$ függvény ugyanis kizárólag pozitív értékeket vesz fel, ezen felül folytonos, $x \geq 1$ esetén csökkenő, továbbá

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_1^b =$$
$$= \lim_{b\to\infty} \big[\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1\big] =$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Újfent hangsúlyozzuk, hogy $\pi/4$ nem a sor összege. A sor konvergens, de a fentiek alapján az összegét nem tudjuk megmondani. □

A példabeli sor konvergenciája egyszerűbben, a $\sum 1/n^2$ sorral való összehasonlítással is igazolható. A következő alfejezetben az összehasonlító kritériumokról lesz szó.

11.3. Feladatok

Konvergens és divergens sorok

Állapítsuk meg, hogy az 1–30. feladatokban szereplő sorok közül melyek konvergensek, és melyek divergensek! Válaszunkat indokoljuk! (A válasz ellenőrzéséhez hasznos, ha szem előtt tartjuk azt, hogy egy sor konvergenciája többféle módon vizsgálható.)

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ **2.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ **3.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+1}$ **5.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$ **6.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\sqrt{n}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{8^n}$ **8.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{n}$ **9.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

10. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ **11.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ **12.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n+3}$

13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{n+1}$ **14.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ **15.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$ **17.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ **19.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 3)^n}$ **21.** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1/n}{(\ln n)\sqrt{\ln^2 n - 1}}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$ **23.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{1}{n}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$ **25.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+e^n}$ **27.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ **29.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech} n$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech}^2 n$

További példák és feladatok

Mely a értékek esetén konvergensek a megadott sorok? (31–32. feladatok.)

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n+2} - \frac{1}{n+4}\right)$ **32.** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2a}{n+1}\right)$

33. **(a)** A 11.7. és a 11.8. ábrák mintájára igazoljuk grafikusan, hogy a harmonikus sor részletösszegei kielégítik az alábbi

egyenlőtlenségeket.

$$\ln(n+1)=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx\le 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\le$$

$$\le 1+\int_1^{n}\frac{1}{x}dx=1+\ln n.$$

(b) Tudjuk ugyan, hogy a harmonikus sor nem konvergens, ezt azonban semmiféle empirikus megfigyelés nem támasztja alá, mivel a részletösszegek sorozata túlságosan lassan növekszik. Ezt illusztrálja a következő gondolatkísérlet. Képzeljük el, hogy a 13 milliárd évvel ezelőtti ősrobbanás pillanata óta minden *másodpercben* hozzáadtunk egy újabb tagot. Körülbelül mekkora részletösszegnél tartunk napjainkban?

34. Van-e olyan x, amellyel a $\sum_{n=1}^{\infty}(1/(nx))$ végtelen sor konvergens? Válaszunkat indokoljuk!

35. Igaz-e, hogy tetszőleges csupa pozitív tagú $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ divergens sorhoz található olyan, szintén csupa pozitív tagból álló és divergens $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ sor, amelyre teljesül, hogy minden n-re $b_n<a_n$? Létezik-e a divergens sorok „legkisebbike"? Válaszunkat indokoljuk!

36. *Az előző feladat folytatása.* Van-e „legnagyobb" a konvergens sorok között? Válaszunkat indokoljuk!

37. A Cauchy-féle kondenzációs kritérium: A Cauchy-féle kondenzációs kritérium a következő: legyen $\{a_n\}$ nullához tartó nemnövekvő sorozat (azaz minden n-re $a_n\ge a_{n+1}$). Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ sor pontosan akkor konvergens, ha a $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot a_{2^n}$ is az. A $\sum(1/n)$ sor például divergens, elvégre $\sum 2^n\cdot(1/2^n)=\sum 1$ sor divergens. Magyarázzuk meg, miért alkalmazható a kritérium!

38. A Cauchy-féle kondenzációs kritérium (előző feladat) alapján igazoljuk, hogy

(a) a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ sor divergens,

(b) a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ sor pedig konvergens, ha $p>1$, és divergens, ha $p\le 1$.

39. Logaritmikus p-sorok:

(a) Legyen p pozitív állandó. Igazoljuk, hogy

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$$

pontosan akkor konvergens, ha $p>1$!

(b) Milyen következtetést vonhatunk le a feladat (a) része alapján a

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$$

sorra vonatkozóan? Válaszunkat indokoljuk!

40. *A 39. feladat folytatása.* A 39. feladat eredményét felhasználva döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek! Válaszunkat minden esetben indokoljuk!

(a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)}$ **(b)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{1.01}}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n^3)}$ **(d)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^3}$

41. Az Euler-konstans: A 11.8. ábrához hasonló grafikonok szerint az

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

összeg és az

$$\ln n=\int_1^{n}\frac{1}{x}dx$$

integrál közötti különbség igen kicsi. Ezt támasztják alá az alábbiak.

(a) A 9. Tétel bizonyításának gondolatmenetét az $f(x)=1/x$ függvényre alkalmazva igazoljuk, hogy

$$\ln(n+1)\le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\le 1+\ln n,$$

azaz, hogy

$$0<\ln(n+1)-\ln n\le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\le 1.$$

Eszerint tehát az

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$$

sorozat alulról és felülről is korlátos.

(b) Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{n+1}<\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1)-\ln n,$$

és ezt felhasználva mutassuk meg, hogy az iménti $\{a_n\}$ sorozat csökkenő!

Minden alulról korlátos, csökkenő sorozat konvergens (11.1. alfejezet 107. feladat), így ilyen a feladat (a) részében definiált $\{a_n\}$ sorozat is:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\to\gamma.$$

A $\gamma\approx 0{,}5772$ számot Euler-konstansnak nevezzük. Az e és a π számtól eltérően γ értékének kiszámítására nem ismerünk egyszerű és könnyen használható képletet.

42. Az integrálkritérium alapján igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n^2}$$

végtelen sor konvergens!

11.4. Összehasonlító kritériumok

A mértani sorok, a p-sorok és néhány más végtelen sor konvergenciáját már igazoltuk. Sok más sorról is úgy dönthetjük el legkönnyebben, hogy konvergens-e vagy sem, ha összevetjük őket olyan sorokkal, amelyekről már tudjuk, hogy konvergensek-e vagy sem.

10. TÉTEL: Összehasonlító kritériumok

Legyen $\sum a_n$ olyan végtelen sor, amelynek egyetlen negatív tagja sincs.

(a) Ha van olyan konvergens $\sum c_n$ sor és N pozitív egész szám, hogy minden $n > N$ esetén $a_n \leq c_n$, akkor a $\sum a_n$ sor konvergens.

(b) Ha van csupa nemnegatív tagból álló divergens $\sum d_n$ sor és N pozitív egész szám, hogy minden $n > N$ esetén $a_n \geq d_n$, akkor a $\sum a_n$ sor divergens.

Az első összehasonlító kritériumot *majoránskritériumnak* is nevezzük.

Bizonyítás: **(a)** A $\sum a_n$ sor részletösszegei sorozatának az

$$M = a_1 + a_2 + \ldots + a_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n$$

szám felső korlátja. A részletösszegek sorozata tehát növekvő és korlátos, Weierstrass tétele szerint ennélfogva konvergens, határértéke pedig $L \leq M$.

(b) A $\sum a_n$ sor részletösszegei sorozatának nincs felső korlátja: ha ugyanis lenne ilyen korlát, akkor a $\sum d_n$ sor részletösszegei sorozatának

$$M^* = d_1 + d_2 + \ldots + d_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

felső korlátja lenne, így $\sum d_n$ konvergens kellene hogy legyen. □

1. PÉLDA: Az összehasonlító kritériumok alkalmazása

(a) A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$$

sor divergens, mivel n-edik tagja nagyobb, mint a divergens harmonikus sor n-edik tagja:

$$\frac{5}{5n-1} = \frac{1}{n-\frac{1}{5}} > \frac{1}{n}.$$

(b) A csupa pozitív tagból álló

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

sor konvergens, hiszen tagjai nem nagyobbak az

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots$$

sor megfelelő tagjainál, az utóbbi sor pedig konvergens, elvégre

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1-(1/2)} = 3.$$

Tehát 3 egy felső korlátja $\sum 1/n!$ sornak. A 11.9 alfejezetben látni fogjuk, hogy a sor összege e.

(c) Az

$$5+\frac{2}{5}+\frac{1}{7}+1+\frac{1}{2+\sqrt{1}}+\frac{1}{4+\sqrt{2}}+\frac{1}{8+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{2^n+\sqrt{n}}+\ldots$$

sor viszont konvergens. Ennek belátásához feledkezzünk meg az első három tagról, a többi tagot pedig hasonlítsuk a $\sum_{n=0}^{\infty}(1/2^n)$ konvergens mértani sorhoz. $1/(2^n+\sqrt{n})$ kisebb, mint $1/2^n$, ezért

$$1+\frac{1}{2+\sqrt{1}}+\frac{1}{4+\sqrt{2}}+\frac{1}{8+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{2^n+\sqrt{n}}+\ldots\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots.$$

Az első három tag elhagyásával kapott sor tehát az összehasonlító kritérium szerint konvergens. □

Határértékeket is használó összehasonlító kritériumok

A következő kritériumok azokban az esetekben a leghasznosabbak, amikor a vizsgált sor a_n tagjait az n szám racionális függvényeként kapjuk meg.

11. TÉTEL: „Limeszes" összehasonlító kritériumok

Legyen N pozitív egész szám. Tegyük fel, hogy valamely pozitív egész N-re igaz, hogy minden $n > N$ esetén $a_n > 0$ és $b_n > 0$. Ekkor:

1. ha $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = c > 0$, akkor $\sum a_n$ és $\sum b_n$ egyszerre konvergensek, vagy egyszerre divergensek;
2. ha $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$ és $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is az;
3. ha $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \infty$ és $\sum b_n$ divergens, akkor $\sum a_n$ is divergens.

Bizonyítás: Az 1. állítást bizonyítjuk, a 2. és 3. állítás bizonyítását a 37. feladat (a) és (b) részében tűzzük ki. Mivel $a_n/b_n \to c$, a $c/2 > 0$ számhoz van olyan N pozitív egész szám, hogy minden n-re

$$n > N \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < \frac{c}{2}.$$

Így ha $n > N$, akkor

$$-\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} - c < \frac{c}{2},$$

$$\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2} \quad \text{és}$$

$$\left(\frac{c}{2}\right)b_n < a_n < \left(\frac{3c}{2}\right)b_n.$$

Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum(3c/2)b_n$ és – az összehasonlító kritérium szerint – a $\sum a_n$ sor is az. Ha $\sum b_n$ divergens, akkor $\sum(c/2)b_n$ és – az összehasonlító kritérium szerint – a $\sum a_n$ sor is az. □

2. PÉLDA: A „limeszes" összehasonlító kritérium alkalmazása

Melyik konvergens, és melyik divergens a megadott sorok közül?

(a) $$\frac{3}{5}+\frac{5}{9}+\frac{7}{16}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+2n+1)}$$

(b) $$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$$

(c) $\dfrac{1+2\ln 2}{9}+\dfrac{1+3\ln 3}{14}+\dfrac{1+4\ln 4}{21}+\ldots=\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1+n\ln n}{n^2+5}$

Megoldás:

(a) Legyen $a_n=(2n+1)/(n^2+2n+1)$. Elég nagy n esetén azt várjuk, hogy az a_n-ek úgy viselkednek majd, mint $2n/n^2=2/n$. Legyen tehát $b_n=$ $=1/n$. Mivel a

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

sor divergens és

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+2n+1}=2,$$

a $\sum a_n$ sor a kritérium 1. pontja szerint divergens. (Választhattuk volna a $b=2/n$ sorozatot is, $1/n$ mellett az egyszerűség szólt.)

(b) Legyen $a_n=1/(2^n-1)$. Nagy n-ekre a sorozat tagjait az $1/2^n$ számok egyre jobban közelítik, választásunk ezért $b_n=1/2^n$. Mivel a

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

sor konvergens és

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-(1/2^n)}=1,$$

a $\sum a_n$ sor kritériumunk 1. pontja szerint konvergens.

(c) Legyen $a_n=(1+n\ln n)/(n^2+5)$. Nagy n-ekre az $(n\ln n)/n^2=(\ln n)/n$ jól közelíti az a_n-eket, előbbiek az $n\geq 3$ indexek esetén nagyobbak, mint az $1/n$ számok. Mindez a $b_n=1/n$ választást sugallja. Mivel a

$$\sum_{n=2}^{\infty}b_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

sor divergens és

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2\ln n}{n^2+5}=\infty,$$

a $\sum a_n$ sor a kritérium 3. pontja szerint divergens. □

3. PÉLDA:

Konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{3/2}}$ végtelen sor?

Megoldás: Mivel $\ln n$ lassabban növekszik, mint az n^c sorozatok ($c>0$) bármelyike (11.1. alfejezet, 91. feladat), azt várjuk, hogy elég nagy n-ek esetén

$$\frac{\ln n}{n^{3/2}}<\frac{n^{1/4}}{n^{3/2}}=\frac{1}{n^{5/4}}.$$

Valóban, az $a_n=(\ln n)/n^{3/2}$ és $b_n=1/n^{5/4}$ választással:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{1/4}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{(1/4)n^{-3/4}}= \qquad \text{L'Hospital-szabály}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^{1/4}}=0.$$

Mivel a $\sum b_n$ sor konvergens (olyan p-sor, amelyben $p>1$), azért $\sum a_n$ is konvergens a „limeszes" összehasonlító kritérium 2. pontja szerint. □

11.4. Feladatok

Konvergens és divergens sorok

Az 1–36. feladatokban megadott végtelen sorok közül melyek konvergensek, és melyek divergensek? Válaszunkat indokoljuk!

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n+\sqrt{n}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n-1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2\sqrt{n}}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$
9. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$
10. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n^3}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln n}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\ln n)^2}$
17. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln^2 n}$
19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n2^n}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^n}{n^2 2^n}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}+1}$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}+1}{3^n}$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n}$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)}$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3-3n}{n^2(n-2)(n^2+5)}$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^{1,1}}$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arcsec} n}{n^{1,3}}$
31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} n}{n^2}$
32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} n}{n^2}$
33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$
34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$
35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\ldots+n}$
36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}$

További példák és feladatok

37. Bizonyítsuk be az összehasonlítási kritérium **(a)** második, **(b)** harmadik állítását!

38. Mondhatunk-e valamit a $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/n)$ végtelen sorról, ha tudjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ csupa pozitív tagból álló konvergens sor? Válaszunkat indokoljuk.

39. Tegyük fel, hogy minden $n > N$ esetén (N pozitív egész szám) $a_n > 0$ és $b_n > 0$ egyaránt fennáll. Mondhatunk-e valamit a $\sum b_n$ sorról, ha tudjuk, hogy $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = \infty$ és $\sum a_n$ konvergens?

40. Igazoljuk, hogy ha a csupa pozitív tagból álló $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ is az.

Számítógépes vizsgálatok

41. Nem ismert, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$$

végtelen sor konvergens-e vagy sem. Vizsgáljuk meg számítógép segítségével, hogyan viselkedik ez a sor.

(a) Tekintsük az

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$$

részletösszegeket. Mi történik, ha megpróbáljuk megtalálni az s_k sorozat határértékét, amint $k \to \infty$?

(b) Ábrázoljuk az első száz (k, s_k) pontot. Konvergensnek tűnik a sorozat? Mit gondolunk, hova tart?

(c) Most ábrázoljuk az első kétszáz (k, s_k) pontot. Mit tapasztalunk?

(d) Ábrázoljuk az első négyszáz (k, s_k) pontot. Mi történik a $k = 355$ esetben? Számítsuk ki a $355/113$ tört értékét. A számítás eredménye alapján magyarázzuk meg, mi történik a $k = 355$ esetben. Tippeljük meg, milyen k értékeknél találkozunk újra hasonló jelenséggel.

Ezt a végtelen sort érdekfeszítően tárgyalja Clifford A. Pickover, *Mazes for the Mind* (St. Martin's Press, New York, 1992) c. könyvének 72. fejezetében.

11.5. A hányados- és a gyökkritérium

A hányadoskritérium egy $\sum a_n$ végtelen sor növekedéséről (illetve csökkenéséről) az a_{n+1}/a_n hányados értéke alapján ad információt. A $\sum ar^n$ mértani sorok esetében ez az érték állandó ($(ar^{n+1})/(ar^n) = r$), és már tudjuk: a sor pontosan akkor konvergens, ha a szóban forgó hányados abszolút értéke kisebb, mint 1. A hányadoskritérium ennek a ténynek az általánosítása, a bizonyítás az összehasonlítási kritériumon alapul.

12. TÉTEL: Hányadoskritérium

Legyen $\sum a_n$ csupa pozitív tagból álló végtelen sor. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho.$$

Ekkor

1. ha $\rho < 1$, akkor a sor konvergens;
2. ha $\rho > 1$ vagy végtelen, akkor a sor divergens;
3. ha $\rho = 1$, akkor a kritérium nem alkalmazható.[a]

[a] Ha a tételben szereplő határérték nem létezik, de van olyan N, hogy $n > N$ esetén $(a_{n+1}/a_n) \leq q < 1$, akkor a sor konvergens, ha $(a_{n+1}/a_n) \geq q > 1$, akkor divergens.

Bizonyítás:

(a) $\rho < 1$ Legyen r egy ρ-nál nagyobb, de 1-nél kisebb szám. Ekkor $\varepsilon = r - \rho > 0$. Mivel

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \rho,$$

az a_{n+1}/a_n számok r-től való eltérése elegendő nagy – mondjuk N-nél nagyobb – n-ek esetén kisebb, mint ε. Ekkor minden $n \geq N$ esetén fennáll

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \varepsilon = r$$

is, azaz

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< ra_N \\ a_{N+2} &< ra_{N+1} < r^2 a_N \\ a_{N+3} &< ra_{N+2} < r^3 a_N \\ &\vdots \\ a_{N+m} &< ra_{N+m-1} < r^m a_N. \end{aligned}$$

Egyenlőtlenségeink szerint az N-edik tagtól kezdve a sor tagjai gyorsabban közelítenek a 0-hoz, mint egy 1-nél kisebb hányadosú geometriai sor tagjai. Pontosabban a következőről van szó. Tekintsük azt a $\sum c_n$ sort, amelynek tagjai: $c_n = a_n$, ha $n = 1,2,\ldots,N$, és $c_{N+1} = ra_N$, $c_{N+2} = r^2 a_N, \ldots, c_{N+m} = r^m a_N \ldots$ Ekkor minden n-re $a_n \leq c_n$, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1} + a_N + ra_N + r^2 a_N + \ldots =$$
$$= a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1} + a_N(1 + r + r^2 + \ldots).$$

Az $1 + r + r^2 + \ldots$ mértani sor konvergens (mivel $|r| < 1$), így $0 < a_n \leq c_n$ miatt $\sum a_n$ is az.

(b) $1 < \rho \leq \infty$ Ekkor valamely M indextől kezdve

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

amiből

$$a_M < a_{M+1} < a_{M+2} < \ldots.$$

A sor tagjai nem tartanak 0-hoz, amint $n \to \infty$, a sor ennélfogva (az n-edik tagra vonatkozó kritérium szerint) divergens.

(c) $\rho = 1$ Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sorokat. Az első esetében

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \to 1,$$

a másodiknál pedig:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1.$$

Mindkét esetben fennáll tehát $\rho = 1$, holott az első sor divergens, a második viszont konvergens. □

A hányadoskritérium gyakran alkalmazható azokban az esetekben, amikor a sor tagjait faktoriálisokkal vagy olyan hatványokkal adjuk meg, amelyek kitevőjében n is szerepel.

1. PÉLDA: **A hányadoskritérium alkalmazása**

Konvergensek-e az alábbi sorok?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!n!}{(2n)!}$

Megoldás:

(a) Ha $a_n = \frac{2^n+5}{3^n}$, akkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2^{n+1}+5)/3^{n+1}}{(2^n+5)/3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{n+1}+5}{2^n+5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2+5\cdot 2^{-n}}{1+5\cdot 2^{-n}} \to \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}.$$

Mivel $\rho = 2/3 < 1$, a sor konvergens. A sor összege:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \frac{1}{1-(2/3)} + \frac{5}{1-(1/3)} = \frac{21}{2}.$$

(b) Ha $a_n = \frac{(2n)!}{n!n!}$, akkor $a_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}$ és

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!n!(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!} = \\ = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+1} \to 4.$$

A sor divergens, mivel most $\rho = 4 > 1$.

(c) Ha $a_n = \frac{4^n n!n!}{(2n)!}$, akkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n n!n!} = \\ = \frac{4(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+1} \to 1.$$

Mivel ezúttal $\rho = 1$, a hányadoskritérium nem alkalmazható. Ha azonban figyelembe vesszük, hogy $a_{n+1}/a_n = (2n+2)/(2n+1) > 1$ miatt a_{n+1} mindig nagyobb, mint a_n, akkor azonnal beláthatjuk, hogy a sor egyetlen tagja sem kisebb $a_1 = 2$-nél, az n-edik tagokból álló sorozat ennélfogva nem tart nullához, minek következtében maga a sor divergens. □

A gyökkritérium

A hányadoskritériumot ezidáig olyan $\sum a_n$ sorokra alkalmaztuk, amelyeknél a_n képlete nem volt különösképpen bonyolult. A helyzet nem mindig ilyen egyszerű, ezt mutatja a

2. PÉLDA:

Legyen

$$a_n = \begin{cases} n/2^n, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ 1/2^n, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Konvergens-e a $\sum a_n$ sor?

Megoldás: Írjuk fel a sor első néhány tagját:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{7}{2^7} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{5}{32} + \frac{1}{64} + \frac{7}{128} + \ldots$$

Ez nyilván nem mértani sor. Az n-edik tagok sorozata nullához tart, a sor tehát nem feltétlenül divergens. Az integrálkritérium alkalmazása nem tűnik célravezetőnek, a hányadoskritérium alapján pedig a következőt kapjuk:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ \dfrac{n+1}{2}, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

A hányadossorozat nem konvergens, hiszen páros n-ek esetén egyre kisebb, páratlan n-ek esetén viszont minden határon túl növekszik.

A probléma mindazonáltal megoldható (a válasz: a sor konvergens), de ehhez egy újabb kritériumra lesz szükségünk. □

13. TÉTEL: Gyökkritérium

Legyen $\sum a_n$ olyan végtelen sor, amelyre valamely $n \geq N$ (N pozitív egész) esetén $a_n \geq 0$. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho.$$

Ekkor

1. ha $\rho < 1$, akkor a sor konvergens;
2. ha $\rho > 1$ vagy végtelen, akkor a sor divergens;
3. ha $\rho = 1$, akkor a kritérium nem alkalmazható.[a]

[a] Ha a tételbeli határérték nem létezik, de van olyan N, hogy $n > N$ esetén $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, akkor a sor konvergens, ha $\sqrt[n]{a_n} \geq q > 1$, akkor a sor divergens.

Bizonyítás:

1. $\rho < 1$ legyen ε olyan kicsi pozitív szám, amellyel $\rho + \varepsilon < 1$. Mivel $\sqrt[n]{a_n} \to \rho$, van olyan M index, hogy $n \geq M$ esetén az $\sqrt[n]{a_n}$ számok ρ-tól való távolsága kisebb, mint ε, azaz

$$n \geq M \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < \rho + \varepsilon.$$

Ekkor fennáll

$$n \geq M \Rightarrow a_n < (\rho + \varepsilon)^n$$

is. Vegyük azonban észre, hogy $\sum_{n=M}^{\infty}(\rho+\varepsilon)^n$ konvergens mértani sor (hiszen választásunk értelmében $\rho+\varepsilon<1$), így – az összehasonlító kritérium szerint – konvergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \ldots + a_{M-1} + \sum_{n=M}^{\infty} a_n$$

végtelen sor is.

2. $1<\rho\leq\infty$ Van olyan M pozitív egész szám, hogy minden $n>M$ esetén $\sqrt[n]{a_n}>1$, ekkor azonban minden $n>M$ indexre $a_n>1$, az n-edik tagokból álló sorozat tehát divergens, minek következtében a sor is az.

3. $\rho=1$ Tekintsük újfent a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ sorokat. Mindkét esetben $\sqrt[n]{a_n}=1$, de az első sor divergens, a második pedig konvergens. □

3. PÉLDA: **A gyökkritérium alkalmazása**

Konvergensek-e az alábbi sorok?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+n}\right)^n$

Megoldás:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ konvergens, mivel $\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}}=\frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2}\to\frac{1}{2}<1.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$ divergens, mivel $\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}}=\frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2}\to\frac{2}{1}>1.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+n}\right)^n$ konvergens, mivel $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+n}\right)}=\frac{1}{1+n}\to 0<1.$ □

Térjünk vissza a 2. példához. A kérdés a következő volt: konvergens-e az a $\sum a_n$ sor, amelynek tagjai

$$a_n=\begin{cases} n/2^n, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ 1/2^n, & \text{ha } n \text{ páros.}\end{cases}$$

Megoldás: A gyökkritériumot alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\sqrt[n]{a_n}=\begin{cases} \sqrt[n]{n}/2, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ 1/2, & \text{ha } n \text{ páros.}\end{cases}$$

Ennek alapján

$$\frac{1}{2}\leq\sqrt[n]{a_n}\leq\frac{\sqrt[n]{n}}{2}.$$

Mivel $\sqrt[n]{n}\to 1$ (11.1. alfejezet, 5. Tétel), a szendvicstétel szerint $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1/2$. A határérték tehát kisebb, mint 1, alkalmazható tehát a gyökkritérium: a sor konvergens. □

11.5. Feladatok

Konvergens és divergens sorok

Az 1–26. feladatokban megadott végtelen sorok közül melyek a konvergensek, és melyek a divergensek? Válaszunkat indokoljuk! (A válasz ellenőrzésekor hasznos, ha mindig szem előtt tartjuk: egy sor konvergens vagy divergens voltának eldöntésére több módszer is rendelkezésünkre áll.)

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}n!e^{-n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{10^n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^n$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{1{,}25^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ **12.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$ **14.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ **16.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{2^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ **18.** $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}(n^3)$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$ **20.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n(n+1)!}{3^n n!}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$ **22.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$ **24.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^{(n/2)}}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \ln n}{n(n+2)!}$ **26.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n}$

A 27–38. feladatokban megadott $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorok közül melyek konvergensek, és melyek divergensek? Válaszunkat indokoljuk!

27. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1+\sin n}{n} a_n$

28. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1+\operatorname{arctg} n}{n} a_n$

29. $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{3n-1}{2n+5} a_n$

30. $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$

31. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2}{n} a_n$ **32.** $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$

33. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1+\ln n}{n} a_n$

34. $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{n+\ln n}{n+10} a_n$

35. $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n}$ **36.** $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = (a_n)^{n+1}$

37. $a_n = \frac{2^n n!}{(2n)!}$ **38.** $a_n = \frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$

A 39–44. feladatokban megadott $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorok közül melyek konvergensek, és melyek divergensek? Válaszunkat indokoljuk!

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$ **40.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{n^2}}$ **42.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2^n)^2}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{4^n 2^n n!}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{[2 \cdot 4 \cdots (2n)](3^n+1)}$

További példák és feladatok

45. A p-sorokról sem a hányados-, sem a gyökkritérium alapján nem mondhatunk semmit. Próbáljuk ki! Vizsgáljuk meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

végtelen sort, és mutassuk meg, hogy egyik kritérium sem alkalmazható!

46. Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$$

sor (ahol p állandó) esetében sem a hányados-, sem a gyökkritérium nem alkalmazható a konvergencia eldöntésére!

47. Tekintsük az

$$a_n = \begin{cases} n/2^n, & \text{ha } n \text{ prímszám,} \\ 1/2^n, & \text{különben} \end{cases}$$

sorozatot. Konvergens-e a $\sum a_n$ sor? Válaszunkat indokoljuk!

11.6. Alternáló sorok, abszolút és feltételes konvergencia

Alternálónak azokat a végtelen sorokat nevezzük, amelyeknek a tagjai felváltva pozitívak és negatívak. Ilyenek például a következők:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots \tag{11.1}$$

$$-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2^n} + \ldots \tag{11.2}$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + (-1)^{n+1} n \tag{11.3}$$

A (11.1) sor – az alternáló harmonikus sor – konvergens, mint azt hamarosan látni fogjuk. A (11.2) sor egy $-1/2$ hányadosú mértani sor, amelynek összege $-2/[1+(1/2)] = -4/3$. A (11.3) sor divergens, mivel a tagjaiból álló sorozat nem tart 0-hoz.

Az, hogy az alternáló harmonikus sor konvergens, a következő tételből következik.

14. TÉTEL: Az alternáló sorokra vonatkozó Leibniz-tétel

A

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$$

végtelen sor konvergens, amennyiben az alábbi feltételek mindegyike teljesül:

1. Valamennyi u_n szám pozitív.
2. Van olyan N egész szám, hogy minden $n \geq N$ esetén $u_n \geq u_{n+1}$.
3. $u_n \to 0$.

Bizonyítás: Ha $n = 2m$ páros egész szám, akkor az első n tag összege:

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}) =$$
$$= u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

Az első egyenlőség szerint az s_{2m} összeg m nemnegatív tagból áll, mivel a zárójelekben szereplő kifejezések mindegyike legalább nulla. Eszerint tehát $s_{2m+2} \geq s_{2m}$, vagyis az s_{2m} sorozat nemcsökkenő. A második egyenlőség szerint $s_{2m} \leq u_1$. Az s_{2m} sorozat tehát nemcsökkenő és felülről korlátos, Weierstrass tétele szerint így konvergens:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2m} = L. \tag{11.4}$$

Ha $n = 2m+1$ páratlan, akkor az első n tag összege $s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}$. Mivel $u_n \to 0$, fennáll

$$\lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$$

is, így amint $m \to \infty$,

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1} \to L + 0 = L. \tag{11.5}$$

A (11.4) és (11.5) egyenlőségeket összevetve: $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ (11.1. alfejezet 119. feladat). □

1. PÉLDA:

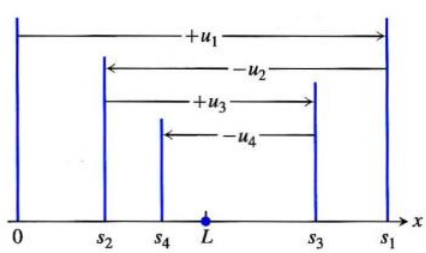
A

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$$

alternáló harmonikus sor a tétel mindhárom feltételének eleget tesz ($N = 1$-gyel), így valóban konvergens. □

A 11.9. ábrán az alternáló harmonikus sor részletösszegeinek változását tanulmányozhatjuk. (A sor Leibniz tételének mindhárom feltételét kielégíti $N = 1$-gyel; az $N > 1$ esetekről a 63. feladatban lesz szó.) A részletösszegeket az origóból kiindulva az x-tengely mentén ábrázoljuk. Az első részletösszeg $s_1 = u_1$ pozitív, tehát az origótól jobbra helyezkedik el. Az $s_2 = u_1 - u_2$ részletösszegnek megfelelő pontot úgy kapjuk, hogy s_1-ből u_2 távolsággal visszalépünk. Mivel $u_2 \leq u_1$, ezzel nem kerülhetünk távolabb az origótól, mint amennyire az s_1-nek megfelelő pont volt. Az eljárást folytatjuk: az újabb és újabb tagokat előre és hátra lépegetve adjuk hozzá az összeghez. Mivel azonban minden $n \geq N$ esetén $u_{n+1} \leq u_n$, az n-edik lépés (akár előre, akár hátra lépünk) rövidebb vagy legfeljebb ugyanakkora, mint az őt közvetlenül megelőző lépés. Figyelembe véve továbbá, hogy $u_n \to 0$, a lépések hossza egyre kisebb lesz. A részletösszegek végeredményben a sor összege körül oszcillálnak: az L szám bármely n esetén s_n és s_{n+1} közé esik, s_n-től való eltérése tehát minden esetben kisebb, mint u_{n+1}. Az

$$|L - s_n| < u_{n+1}$$



11.9. ÁBRA: A Leibniz-tétel feltételeit ($N = 1$-gyel) kielégítő alternáló harmonikus sor részletösszegei a sor összege körül oszcillálnak.

egyenlőtlenség alapján (amely minden $n \geq N$ esetén teljesül) az alternáló harmonikus sor részletösszegeire jó közelítéseket adhatunk.

15. TÉTEL: Konvergens alternáló sor összegének becslése

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ alternáló sor a Leibniz-tétel mindhárom feltételének eleget tesz, akkor minden $n \geq N$ esetén az

$$s_n = u_1 - u_2 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n$$

összeg a sor összegét u_{n+1}-nél (az első fel nem használt tagnál) kisebb abszolút értékű hibával közelíti. Az $L - s_n$ maradék előjele megegyezik u_{n+1} előjelével.

A bizonyítást az 53. feladatban tűzzük ki.

2. PÉLDA:

Alkalmazzuk a tételt egy ismert összegű alternáló sorra:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \frac{1}{256} - \ldots.$$

A tétel szerint ha csupán az első nyolc tagot adjuk össze, akkor a figyelmen kívül hagyott tagok összege pozitív, és kisebb, mint $1/256$. Az első nyolc tag összege 0,6640625, a soré pedig

$$\frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}.$$

Valóban: a $(2/3) - 0{,}6640625 = 0{,}0026041666\ldots$ különbség pozitív, és kisebb, mint $1/256 = 0{,}00390625$. □

Abszolút és feltételes konvergencia

DEFINÍCIÓ: Abszolút konvergencia

A $\sum a_n$ végtelen sor **abszolút konvergens**, ha a tagjainak abszolút értékeiből álló $\sum |a_n|$ sor konvergens.

Az

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$$

mértani sor abszolút konvergens, elvégre a tagok abszolút értékeiből álló

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

sor is az. Az alternáló harmonikus sor nem abszolút konvergens: a tagok abszolútértékeiből álló sor a (divergens) harmonikus sor.

DEFINÍCIÓ: Feltételes konvergencia

A konvergens, de nem abszolút konvergens sorokat **feltételesen konvergens** soroknak nevezzük.

Az alternáló harmonikus sor feltételesen konvergens.

Az abszolút konvergencia két szempontból is fontos. Először, a csupa pozitív tagból álló sorokra vonatkozóan rendelkezünk jól használható konvergenciakritériumokkal. Másodszor, ha egy sor abszolút konvergens, akkor konvergens – ezt egy tételben is rögzítjük:

16. TÉTEL:
Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is az.

Bizonyítás: Minden n-re

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n|, \text{ így } 0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|.$$

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ is, és az összehasonlító kritérium szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ sor is az. Az $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$ egyenlőség alapján a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor két konvergens sor különbségeként áll elő:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + |a_n|) - |a_n|] = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor tehát valóban konvergens. □

FIGYELEM! Tételünket egy újabb konvergenciakritériumnak is tekinthetjük, amely szerint minden abszolút konvergens sor konvergens. Az állítás megfordítása azonban nem igaz: sok olyan konvergens sor van – mint például az 1. példában szereplő alternáló harmonikus sor –, amely konvergens ugyan, de nem abszolút konvergens.

3. PÉLDA: **Az abszolút konvergenciára vonatkozó kritérium alkalmazása**

(a) A $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots$ sor tagjainak abszolútértékét véve a konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

sort kapjuk. Az eredeti sor konvergens, mivel abszolút konvergens.

(b) A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} = \frac{\sin 1}{1} + \frac{\sin 2}{4} + \frac{\sin 3}{9} + \frac{\sin 4}{16} + \ldots$ sornak megfelelő sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| = \frac{|\sin 1|}{1} + \frac{|\sin 2|}{4} + \frac{|\sin 3|}{9} + \frac{|\sin 4|}{16} + \ldots.$$

Ez a sor a majoránskritérium alapján konvergens, mivel minden n-re fennáll $|\sin n| \le 1$, a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor pedig konvergens. □

4. PÉLDA: **Alternáló p-sorok**

Tetszőleges pozitív p állandó esetén $\{1/n^p\}$ nullához konvergáló csökkenő sorozat, minek következtében a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{3}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \ldots$$

alternáló p-sor (ahol p továbbra is pozitív állandó) is konvergens.

Ha $p > 1$, akkor a sor abszolút, ha viszont $0 < p \le 1$, akkor csak feltételesen konvergens. Az

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

sor tehát feltételesen konvergens, az

$$1 - \frac{1}{2^{(3/2)}} + \frac{1}{3^{(3/2)}} - \frac{1}{4^{(3/2)}} + \ldots$$

sor pedig abszolút konvergens. □

Végtelen sor tagjainak átrendezése

17. TÉTEL: Átrendezési tétel

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sorozat pedig az $\{a_n\}$ sorozat tetszőleges átrendezése, akkor a $\sum b_n$ sor is abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(A bizonyítás vázlatát lásd a 60. feladatban.)

5. PÉLDA: Az átrendezési tétel alkalmazása

Amint a 3. példában már láttuk, az

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \ldots$$

sor abszolút konvergens. A tagok egy lehetséges átrendezése például a következő: kezdjük a sort egy pozitív taggal, folytassuk két negatívval, ezeket kövesse három pozitív, majd négy negatív, és így tovább: k darab azonos előjelű tag után $k+1$ darab ellentétes előjelű tag következik. Az első tíz tag ezek szerint:

$$1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} - \frac{1}{36} - \frac{1}{64} - \frac{1}{100} - \frac{1}{144} + \ldots.$$

Az átrendezési tétel szerint a két sor összege egyenlő. Ha mondjuk a második sorral szembesülünk, feltehetően örömmel konstatáljuk, hogy átrendezéssel az elsőt is megkaphatjuk belőle. De ez még nem minden. A 61. feladatból kiderül, hogy mindkét sor összege felírható a következőképpen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}.$$ □

Egy feltételesen konvergens sor végtelen sok tagjának átrendezésével az eredetitől meglehetősen eltérő összegű sort is kaphatunk.

6. PÉLDA: Az alternáló harmonikus sor átrendezése

Az

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \ldots$$

alternáló harmonikus sor divergenssé is tehető, de elérhető az is, hogy az összege tetszőleges, előre megadott szám legyen.

(a) *A $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ sor divergens sorrá rendezhető.* A $\sum[1/(2n-1)]$ sor végtelenhez, a $\sum(-1/2n)$ sor pedig $-\infty$-hez tart. Emiatt akárhány páratlan indexű tag szerepel a sorozatban, mindig összeadhatunk a maradék tagokból annyit, hogy tetszőlegesen nagy összeget kapjunk. A negatív tagok esetében a helyzet hasonló: bármennyit használtunk is fel, a maradékból tetszőleges nagy abszolút értékű negatív szám megkapható. Megtehetjük például, hogy elkezdjük összeadni a páratlan indexű tagokat, amíg az összeg nagyobb nem lesz, mint 3, aztán annyi negatív taggal folytassuk, hogy a részletösszeg kisebb legyen, mint -4. Ezután a maradék pozitív tagokból veszünk annyit, hogy a részletösszeg meghaladja az 5-öt, majd folytatjuk negatív tagokkal, amíg a részletösszeg -6 alá nem csökken stb. Ennek eredményeként az ingások idővel tetszőlegesen nagyok lesznek, a sor pedig divergens.

(b) *A $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ sor átrendezése úgy, hogy összege 1 legyen.* Tegyük fel tehát, hogy 1-hez konvergáló sort akarunk rendezni. Kezdjük az első taggal $(1/1)$, vonjunk ki $1/2$-et, majd adjunk hozzá $1/3$-ot és $1/5$-öt, aminek eredményeként a részletösszeg újra 1 fölé emelkedik. Ezután vegyünk

annyi negatív tagot, hogy a részletösszeg 1 alá csökkenjen, és folytassuk így: amikor az összeg kisebb, mint 1, akkor adjunk hozzá annyi pozitív tagot, amennyivel éppen 1 fölé emelkedünk, majd negatív tagokkal csökkentsük az összeget 1 alá. Az eljárás a végtelenségig folytatható. Mivel az eredeti sorozat páros és páratlan indexű tagjaiból alkotott sorozatok határértéke egyaránt nulla, a részletösszegek 1-től való eltérése ugyancsak nullához fog tartani, az átrendezett sor összege tehát valóban 1. Az átrendezett sor első néhány tagja:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{10}+$$

$$+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\frac{1}{12}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}-\frac{1}{14}+\frac{1}{27}-\frac{1}{16}+\ldots$$

□

A példa tipikus: az eljárás tetszőleges feltételesen konvergens sorral és előre megadott „célösszeggel" megismételhető.

A végtelen sorok konvergenciájának, illetve divergenciájának eldöntésére szolgáló, eddig megismert kritériumokat foglaljuk össze az alábbi táblázatban:

1. **Az n-edik tagra vonatkozó kritérium:** ha $a_n \to 0$ nem teljesül, a sor divergens.
2. **Mértani sorok:** $\sum ar^n$, $a \neq 0$ konvergens, ha $|r| < 1$, egyébként divergens.
3. **p-sorok:** $\sum 1/n^p$ konvergens, ha $p > 1$, egyébként divergens.
4. **Nemnegatív tagú sorok:** Kipróbálhatjuk az integrál-, a hányados- és gyökkritériumot; összehasonlíthatjuk a sort már ismert összegű sorral.
5. **Ha vannak negatív tagok is:** konvergens-e a $\sum |a_n|$ sor? Ha igen, akkor a $\sum a_n$ sor is az (mivel minden abszolút konvergens sor konvergens).
6. **Alternáló sorok:** a $\sum a_n$ alternáló sor konvergens, amennyiben teljesíti a Leibniz-tétel feltételeit.

11.6. Feladatok

Alternáló sorok

Az 1–10. feladatokban megadott alternáló sorok közül melyek konvergensek, és melyek divergensek? Válaszunkat indokoljuk!

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{3/2}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{10}\right)^n$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{10^n}{n^{10}}$
5. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{\ln n^2}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$

Abszolút konvergencia

A 11–44. feladatokbeli sorok közül melyek az abszolút konvergensek, a konvergensek, illetve divergensek?

11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}0{,}1^n$
12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{0{,}1^n}{n}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{1+\sqrt{n}}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^3+3}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^n}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n+3}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin n}{n^2}$
19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3+n}{5+n}$
20. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln(n^3)}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+n}{n^2}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}n^2(2/3)^n$
24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt[n]{10}\right)$
25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$
26. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\ln n}$
27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n+1}$
28. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{n-\ln n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-100)^n}{n!}$ **30.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-5)^{-n}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2n+1}$ **32.** $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\ln n}{\ln n^2}\right)^n$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$ **34.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)^n}{(2n)^n}$ **36.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n!)^2}{(2n)!}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n! n}$ **38.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ **40.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}\right)$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$ **42.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sech} n$ **44.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{csch} n$

Hibabecslés

Becsüljük meg, mekkora a hiba, ha a sor összegét az első négy taggal közelítjük (45–48. feladatok)!

45. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ (Belátható, hogy a sor összege $\ln 2$.)

46. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{10^n}$

47. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{0{,}01^n}{n}$ (Amint a 11.7. alfejezetben látni fogjuk, a sor összege $\ln 1{,}01$.)

48. $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad 0 < t < 1$

T Adjunk $5 \cdot 10^{-6}$-nál pontosabb becslést a sorok összegére (49–50. feladatok)!

49. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}$ (Amint a 11.9. alfejezetben látni fogjuk, a sor összege $\cos 1$.)

50. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$ (Amint a 11.9. alfejezetben látni fogjuk, a sor összege e^{-1}.)

További példák és feladatok

51. **(a)** Az

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{27}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{2^n}+\ldots$$

sor nem teljesíti a Leibniz-tétel egyik feltételét. Melyiket?

(b) Határozzuk meg a feladat (a) részében szereplő sor összegét!

T **52.** A Leibniz-tétel feltételeit teljesítő alternáló sorok összege eleme bármely két egymást követő részletösszeg által meghatározott intervallumnak. Eszerint az összeg az

$$\frac{s_n+s_{n+1}}{2} = s_n + \frac{1}{2}(-1)^{n+2} a_{n+1}$$

átlaggal közelíthető. Határozzuk meg az $s_{20} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{21}$ értéket az alternáló harmonikus sor esetén (amelynek összege $\ln 2 = 0{,}6931\ldots$)!

53. A Leibniz-tétel feltételeit kielégítő sorozat „maradékának" előjele: Bizonyítsuk be a 15. Tételt! (*Útmutatás*: tekintsük az egymás után következő maradék tagokból alkotott párokat.)

54. Igazoljuk, hogy az

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$$

sor első $2n$ tagjának összege megegyezik az

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots$$

sor első n tagjának összegével! Konvergens-e ez a sor? Mennyi az első sor első $2n+1$ tagjának összege? Ha a sorok konvergensek, mennyi az összegük?

55. Igazoljuk, hogy ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ is az!

56. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, akkor

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

57. Igazoljuk, hogy ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ egyaránt abszolút konvergens sorok, akkor abszolút konvergensek a

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$, **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-b_n)$,

(c) tetszőleges k szám esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$

sorok is!

58. Egy példa segítségével igazoljuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ sor akkor is lehet divergens, ha mind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, mind $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens!

T **59.** Tegyük fel, hogy a 6. példában szereplő sort úgy kell átrendeznünk, hogy az átrendezett sor összege $-1/2$ legyen. Legyen az új sor első tagja az első negatív tag, azaz $-1/2$. Ezután, ha az összeg $-1/2$ alá csökken, vegyünk hozzá annyi pozitív tagot, hogy meghaladja, majd adjunk hozzá negatív tagokat, hogy újra $-1/2$ alá csökkenjen (esetleg egyenlővé váljon). Folytassuk az eljárást addig, amíg a részletösszegek legalább három alkalommal a „célösszeg" fölé emelkednek! Ábrázoljuk számítógéppel az (n, s_n) pontokat, ahol s_n az átrendezett sor első n tagjának összege!

60. Az átrendezési tétel bizonyításának vázlata:

(a) Legyen ε pozitív valós szám, $L = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. Bizonyítsuk be, hogy vannak olyan N_1 és $N_2 \ge N_1$ indexek, amelyekre

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{és} \quad |s_{N_2} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

egyaránt teljesül! Mivel az $a_1, a_2, \ldots, a_{N_2}$ tagok mindegyike szerepel valahol a $\{b_n\}$ sorozatban is, van olyan $N_3 \ge N_2$ index, hogy minden $n \ge N_3$ esetén $\sum_{k=1}^{n} b_k - s_n$ legfeljebb olyan a_m tagok összege, amelyekre $m \ge N_1$. Így ha $n \ge N_3$, akkor

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k - L\right| \le \left|\sum_{k=1}^{n} b_k - s_{N_2}\right| + |s_{N_2} - L| \le$$

$$\le \sum_{k=N_1}^{\infty} |a_k| + |s_{N_2} - L| < \varepsilon.$$

(b) Az (a)-beli gondolatmenet szerint, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Ezután lássuk be: abból, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergens, az következik, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ számhoz konvergál.

61. Abszolút konvergens sor pozitív, illetve negatív tagjaiból álló sor:

(a) Igazoljuk, hogy ha $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergens, továbbá

$$b_n = \begin{cases} a_n, & \text{ha } a_n \ge 0 \\ 0, & \text{ha } a_n < 0, \end{cases}$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens!

(b) A feladat (a) része alapján bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$sor konvergens, továbbá

$$c_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } a_n \ge 0 \\ a_n, & \text{ha } a_n < 0, \end{cases}$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sor konvergens!

Ha tehát egy sor abszolút konvergens, akkor pozitív és negatív tagjai egy-egy konvergens sort alkotnak. Ezen felül fennáll

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

is, elvégre $b_n = (a_n + |a_n|)/2$ és $c_n = (a_n - |a_n|)/2$.

62. Mi a hiba a következő gondolatmenetben? Szorozzuk meg az

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} +$$
$$+ \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots$$

alternáló harmonikus sor mindkét oldalát 2-vel:

$$2S = 2 - 1 +$$
$$+ \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \frac{2}{11} - \frac{1}{6} + \dots.$$

Most gyűjtsük össze az azonos nevezőjű tagokat, $2 - 1 = 1$, $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ stb.). Így a következő egyenlőséget kapjuk:

$$2S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Az egyenlőség jobb oldalán az a sor szerepel, amelyből kiindultunk. Eszerint tehát $2S = S$, amiből azt kapjuk, hogy $2 = 1$. (Forrás: Stewart Galanor, „Riemann's Rearrangement Theorem", Mathematics Teacher, Vol. 80, No. 8 (1997) pp. 675–681.)

63. Illusztráljuk a 11.9. ábrához hasonlóan a 14. Tételben szereplő sorozat konvergenciáját az $N > 1$ esetben.

11.7. Hatványsorok

Miután megismerkedtünk a végtelen sorokra vonatkozó konvergenciakritériumokkal, hozzáláthatunk a fejezet bevezetőjében említett hatványsorok tanulmányozásához. A hatványsorok egy – esetünkben x-szel jelölt – változó hatványaiból álló végtelen sorok. A polinomokhoz hasonlóan a hatványsorok is összeadhatók, kivonhatók, szorozhatók, deriválhatók és integrálhatók – a műveletek eredménye ugyancsak egy-egy hatványsor.

Hatványsorok, konvergencia

Kezdjük a formális definíciókkal.

DEFINÍCIÓ:

Az $x = 0$ hely körüli **hatványsornak** nevezzük a

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \qquad (11.6)$$

alakú végtelen sorokat; $x = a$ körüli hatványsornak pedig a

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots + c_n (x-a)^n + \dots \qquad (11.7)$$

alakú sorokat. Az utóbbiban az a számot a **hatványsor középpontjának** nevezzük, a $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ állandók a sor **együtthatói**.

A (11.6) egyenlet a (11.7) speciális esete, amennyiben $a = 0$.

1. PÉLDA: **Mértani sor**

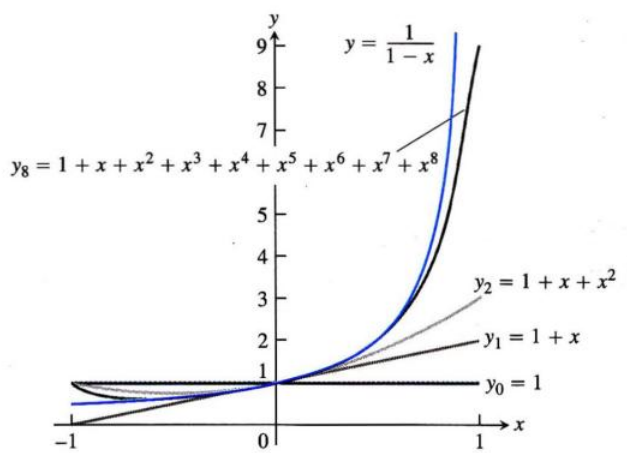
Ha a (11.6) egyenletben minden együttható 1, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

hatványsort kapjuk. A sor régi ismerősünk: olyan mértani sor, amelynek első tagja 1, hányadosa pedig x. Amennyiben $|x|<1$, akkor összege $1/(1-x)$:

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots, \quad -1<x<1. \tag{11.8}$$

Ezidáig a (11.8) összefüggést a jobb oldalon szereplő sor összegének kifejezésére használtuk. Most nézőpontot változtatunk: a jobb oldalon álló sor részletösszegeit a bal oldalon szereplő függvényhez közelítő $P_n(x)$ polinomoknak tekintjük. Nullához közeli x-ek esetén a sor első néhány tagja is jó közelítést ad. Ha azonban x-szel 1-hez vagy -1-hez közeledünk, több tagot kell figyelembe vennünk. A 11.10. ábrán az $f(x)=1/(1-x)$ függvény és az ehhez közelítő $y_n=P_n(x)$ polinomok grafikonját tanulmányozhatjuk az $n=0,1,2$ és 8 esetben. Az $f(x)=1/(1-x)$ függvény az 1-et tartalmazó intervallumokon nem folytonos (az $x=1$ helyen függőleges aszimptotája van). A közelítés $x\geq 1$ értékekre nem alkalmazható. □



11.10. ÁBRA: Az $f(x)=1/(1-x)$ függvény és három polinomiális közelítése (1. példa).

2. PÉLDA: **Még egy mértani sor**

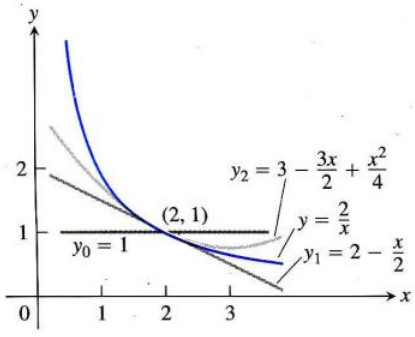
Az

$$1-\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{4}(x-2)^2+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x-3)^n+\ldots \tag{11.9}$$

hatványsorban $a=2$, $c_0=1$, $c_1=-1/2$, $c_2=1/4,\ldots,c_n=(-1/2)^n$. Újra egy mértani sort kaptunk, amelynek első tagja 1, hányadosa pedig $r=-\dfrac{x-2}{2}$. A sor konvergens, amennyiben $\left|\dfrac{x-2}{2}\right|<1$, azaz ha $0<x<4$. A sor összege:

$$\frac{1}{1-r}=\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}=\frac{2}{x},$$

így tehát



11.11. ÁBRA: Az $f(x) = 2/x$ függvény és első három polinomiális közelítése (2. példa).

$$\frac{2}{x} = 1 - \frac{(x-2)}{2} + \frac{(x-2)^2}{4} - \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \ldots, \quad 0 < x < 4.$$

A (11.9) sor az $f(x) = 2/x$ függvény hasznos polinomközelítését adja 2-höz közeli x-ekre:

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2) = 2 - \frac{x}{2},$$
$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 = 3 - \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{4},$$

és így tovább (11.11. ábra). □

3. PÉLDA: **Hatványsorok konvergenciája a hányadoskritérium alapján**

Mely x-ek esetén konvergensek az alábbi hatványsorok?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$

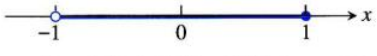
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots$

Megoldás: Alkalmazzuk a hányadoskritériumot arra a $\sum |u_n|$ végtelen sorra, amelyben u_n a szóban forgó sor n-edik tagja.

(a) $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n}{n+1}|x| \to |x|.$

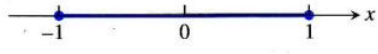
A sor abszolút konvergens, ha $|x| < 1$. Ha $|x| > 1$, akkor az n-edik tagok sorozata nem tart nullához, így a sor divergens.



Az $x = 1$ esetben az $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots$ alternáló harmonikus sort kapjuk, amelyről tudjuk, hogy konvergens. Az $x = -1$ esetben a $-1 - 1/2 - 1/3 - 1/4 - \ldots$ negatív harmonikus sort kapjuk, amely – csakúgy, mint az ellentettje – divergens. Összefoglalva: a sor $-1 < x \leq 1$ esetén konvergens, minden más x-re divergens.

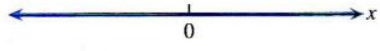
(b) $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{2n-1}{2n+1}x^2 \to x^2.$

A sor konvergens, ha $x^2 < 1$ és divergens, ha $x^2 > 1$ (az utóbbi esetben az n-edik tagokból álló sorozat nem tart nullához). Az $x = 1$ esetben az $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots$ alternáló sort kapjuk, amely Leibniz tétele szerint konvergens. Az $x = -1$ esetben szintén alternáló sort kapunk, amely ugyancsak kielégíti a tétel feltételeit. Összefoglalva: a sor $-1 \leq x \leq 1$ esetén konvergens, minden más x-re divergens.



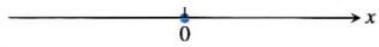
(c) $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0$ minden x-re.

A sor minden x esetén abszolút konvergens.



(d) $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = (n+1)|x| \to \infty$, kivéve, ha $x = 0$.

A sor a 0 kivételével minden x esetén divergens.



□

A hatványsorok konvergenciáját általában a hányadoskritérium alapján vizsgáljuk, a példa ezen felül a lehetséges eredményeket is jól illusztrálja.

18. TÉTEL: Hatványsorok konvergenciatétele

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ sor valamely $x = c \neq 0$ szám esetén konvergens, akkor abszolút konvergens minden $|x| < |c|$ esetén. Ha a sor valamely $x = d$ esetén divergens, akkor minden $|x| > |d|$ esetén az.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c^n$ sor konvergens. Ekkor $\lim_{n\to\infty} a_n c^n = 0$, van tehát olyan N egész szám, hogy minden $n \geq N$ esetén $|a_n c^n| < 1$, vagy ami ugyanaz, minden $n \geq N$ esetén

$$|a_n| < \frac{1}{|c|^n}. \tag{11.10}$$

Legyen most x olyan szám, amelyre fennáll $|x| < |c|$, és tekintsük az

$$|a_0| + |a_1 x| + \ldots + |a_{N-1} x^{N-1}| + |a_N x^N| + |a_{N+1} x^{N+1}| + \ldots$$

összeget. Ebben $|a_N x^N|$ előtt csak véges sok tag szerepel, ezeknek az összege pedig nyilván véges. Az $|a_N x^N|$ taggal kezdődő összeg (11.10) szerint kisebb, mint

$$\left|\frac{x}{c}\right|^N + \left|\frac{x}{c}\right|^{N+1} + \left|\frac{x}{c}\right|^{N+2} + \ldots. \tag{11.11}$$

Mértani sort kaptunk, amelynek hányadosa $r = |x/c| < 1$, elvégre feltételünk szerint $|x| < |c|$. A sor emiatt konvergens, az eredeti sor tehát abszolút konvergens. Ezzel a tétel első részét bebizonyítottuk.

A tétel második állítása az elsőből következik. Ha ugyanis a sor $x = d$ esetén divergens, de valamely $|x_0| > |d|$ esetén konvergens lenne, akkor az első állításból (például a $c = x_0$ választással) arra a következtetésre jutunk, hogy a sornak d-nél abszolút konvergensnek kellene lennie. Egyetlen sor sem lehet azonban egyszerre abszolút konvergens és divergens. Ha tehát sorunk d-nél divergens, akkor divergens minden $|x| > |d|$ esetén. □

Az egyszerűbb jelölés érdekében a tételben csak a $\sum a_n x^n$ alakú sorokkal foglalkoztunk. A $\sum a_n (x-a)^n$ alakú sorok esetében $x - a$ helyett x'-t írhatunk, aminek eredményeként a sor az egyszerű $\sum a_n (x')^n$ alakot ölti.

Hatványsor konvergenciasugara

Az imént bizonyított tétel és a megvizsgált példák alapján arra a következtetésre juthatunk, hogy a $\sum c_n (x-a)^n$ sor háromféleképpen viselkedhet. Előfordulhat, hogy kizárólag az $x = a$ esetben konvergens, megesik, hogy mindenütt konvergens, vagy csupán egy a középpontú R sugarú intervallum pontjaiban.

A 18. Tétel következménye

A $\sum c_n(x-a)^n$ sor – a konvergencia tekintetében – háromféleképpen viselkedhet

1. Létezik egy pozitív R szám, hogy a sor minden olyan x esetén divergens, amelyre $|x-a|>R$, és minden olyan x-re abszolút konvergens, amelyre $|x-a|<R$. Az $x=a-R$ és az $x=a+R$ végpontokban a sor konvergens és divergens is lehet.
2. A sor minden valós x esetén konvergens (ekkor $R=\infty$).
3. A sor az $x=a$ esetben konvergens, minden más esetben divergens ($R=0$).

Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy $a=0$, a vizsgálandó hatványsor középpontja ekkor 0. Ha a sor mindenütt konvergens, akkor a 2. esetet kapjuk. Ha a sor kizárólag $x=0$ esetén konvergens, akkor a 3. esetet kapjuk. Minden más esetben van olyan $d\neq 0$ szám, amelyre $\sum c_n d^n$ divergens. Az x azon értékeinek S halmaza, amelyekre a $\sum c_n x^n$ sor konvergens, nem üres: eleme egyrészt a 0, ezen kívül elemei között van legalább egy pozitív p szám is. A 18. Tétel szerint a sor minden olyan x esetén divergens, amelyre $|x|>|d|$, amiből az S halmaz minden x elemére $|x|\leq|d|$, az S halmaz tehát felülről korlátos. A valós számok teljességi tulajdonsága értelmében S-nek van legkisebb felső korlátja, jelölje ezt R. (Az S halmaz legkisebb felső korlátja a legkisebb olyan szám, amelynél S egyetlen eleme sem nagyobb.) Ha $|x|>R\geq p$, akkor $x\notin S$, azaz ekkor a $\sum c_n x^n$ sor divergens. Ha $|x|<R$, akkor x – mivel kisebb a legkisebb a felső korlátnál – nem felső korlátja S-nek, van tehát olyan $b\in S$ szám, hogy $b>|x|$. Mivel $b\in S$, a $\sum c_n b^n$ sor konvergens, a 18. Tétel alapján így konvergens a $\sum c_n|x^n|$ sor is. Ezzel az állítást az $a=0$ középpontú hatványsorokra beláttuk.

Ha hatványsorunk középpontja $a\neq 0$, akkor vezessük be az $x'=(x-a)$ új változót, és ismételjük meg az előző gondolatmenetet x'-vel. Mivel $x'=0$ pontosan akkor, ha $x=a$, az $x'=0$ középpontú $\sum c_n(x')^n$ sor R konvergenciasugara ugyanaz, mint az $x=a$ középpontú $\sum c_n(x-a)^n$ sor konvergenciasugara. Ezzel az állítást az általános esetre is bebizonyítottuk. □

A tételben szereplő R számot a hatványsor konvergenciasugarának, az $x=a$ középpontú, $2R$ hosszúságú intervallumot a sor konvergenciaintervallumának nevezzük. A konvergenciaintervallum a vizsgált sortól függően lehet nyílt, zárt vagy félig nyílt. A sor abszolút konvergens minden olyan x pontban, amelyre teljesül $|x-a|<R$. Ha a sor minden x esetén konvergens, akkor azt mondjuk, hogy végtelen a konvergenciasugara; ha pedig csupán az $x=a$ helyen konvergens, akkor a konvergenciasugara nulla.

Hogyan vizsgáljuk a hatványsorok konvergenciáját

1. A hányadoskritérium (vagy a gyökkritérium) segítségével határozzuk meg azt az intervallumot, amelyen a sor abszolút konvergens. Általában egy nyílt intervallumot kapunk:

$$|x-a|<R \text{ vagy } a-R<x<a+R.$$

2. Ha az így kapott intervallum véges, akkor vizsgáljuk meg a végpontjait, ahogy a 3. példa (a) és (b) részében tettük. Használjuk az összehasonlító kritériumokat, az integrálkritériumot vagy Leibniz tételét.
3. Ha az abszolútkonvergencia-intervallum $a-R<x<a+R$, akkor a sor minden olyan x esetén divergens (és még feltételesen sem konvergens), amelyre $|x-a|>R$, ilyenkor ugyanis az n-edik tagok sorozata nem tart nullához.

Tagonkénti differenciálás

A következő – a felsőbb szintű analízis kurzusokon szereplő – tétel szerint a hatványsorok konvergenciaintervallumuk belső pontjaiban tagonként differenciálhatók.

19. TÉTEL: Hatványsor tagonkénti differenciálása

Ha a $\sum c_n(x-a)^n$ hatványsor az $a-R<x<a+R$ egyenlőtlenségeknek eleget tevő x-ek esetén konvergens, akkor meghatároz egy, az $(a-R,a+R)$ intervallumon értelmezett

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

függvényt. Ennek az f függvénynek minden n-re létezik az n-edik deriváltja, amelyeket az eredeti sor tagonkénti deriválásával kapunk meg:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}.$$

Az így kapott sorok mindegyike konvergens az eredeti sor konvergenciaintervallumának valamennyi belső pontjában.

4. PÉLDA: Tagonkénti deriválás

Adjuk meg az $f'(x)$ és az $f''(x)$ függvényeket, ha

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} x^n,\quad -1<x<1!$$

Megoldás:

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\ldots+nx^{n-1}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},\quad -1<x<1;$$

$$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}=2+6x+12x^2+\ldots+n(n-1)x^{n-2}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-2},\quad -1<x<1.$$ □

FIGYELEM! A tagonkénti differenciálás nem alkalmazható minden típusú végtelen sor esetében. A

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n!x)}{n^2}$$

sor például minden x esetén konvergens, a sor tagjait deriválva azonban a mindenütt divergens

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cos(n!x)}{n^2}$$

sort kapjuk. Persze egyik sor sem hatványsor.

Tagonkénti integrálás

A felsőbb analízis egy másik tétele szerint a hatványsorok konvergenciaintervallumukon tagonként integrálhatók.

20. TÉTEL: Hatványsor tagonkénti integrálása

Tegyük fel, hogy az

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

sor az $(a-R, a+R)$ intervallum minden pontjában konvergens. Ekkor ugyanezekben a pontokban konvergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

sor is, továbbá minden, az $a-R < x < a+R$ egyenlőtlenségeknek eleget tevő x esetén

$$\int f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C.$$

5. PÉLDA: **Az** arctg **függvény hatványsora**

Azonosítsuk a $[-1,1]$ zárt intervallumon értelmezett

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

függvényt!

Megoldás: A függvényt megadó sort tagonként deriválva az

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots, \quad -1 < x < 1$$

mértani sort kapjuk, amelynek első tagja 1, hányadosa pedig $-x^2$. Eszerint

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Az $f'(x)$ függvényt integrálva a következőt kapjuk:

$$\int f'(x)dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

Amikor $x = 0$, akkor $f(x) = 0$, így $C = 0$. Eszerint

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \operatorname{arctg} x, \qquad -1 < x < 1.$$

A 11.10. alfejezetben belátjuk majd, hogy a sor az $x = \pm 1$ pontokban is $\operatorname{arctg} x$-hez tart. □

Figyeljünk fel arra, hogy az 5. példa eredeti sora a konvergenciaintervallum végpontjaiban is konvergens, a 20. Tétel azonban csupán a szóban forgó intervallum belső pontjaiban garantálja a tagonkénti deriválással kapott sor konvergenciáját.

6. PÉLDA: **Sor az** $\ln(1+x)$ **függvényhez**

Az

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots$$

sor a $-1 < t < 1$ nyílt intervallum minden pontjában konvergens, így (a 20. Tételt is felhasználva):

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots\right]_0^x =$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \quad -1 < x < 1.$$

Belátható az is, hogy a sor $x = 1$ esetben is konvergens (méghozzá az $\ln 2$ számhoz tart) – de ez nem a tétel következménye. □

Számítógépes vizsgálatok

A végtelen sorok több tekintetben emlékeztetnek az integrálokra. Ahogy az integrálható függvények körében viszonylag kevesen vannak azok, amelyeknek az integrálja elemi függvények segítségével kifejezhető, úgy azok a hatványsorok, amelyeknek összege egy intervallumon elemi függvényekkel kifejezhető, elenyésző számban vannak azok között, amelyek konvergensek az adott intervallumon. A grafikai programok az ilyen sorok vizsgálatában legalább akkora segítséget jelentenek, mint a numerikus módszerek a határozott integrálok kiszámításában. A hatványsorok vizsgálata a legtöbb CAS-nek beépített képessége.

Ha egy sor elég gyorsan konvergál, akkor a számítógépes program segítségével a sor összege megbecsülhető. Vizsgáljuk például a 11.4. alfejezet 2. példájának (b) részében szereplő $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2^k - 1)$ sor első néhány S_n részletösszegét. A MAPLE a $31 \le n \le 200$ esetben egyaránt az $S_n = 1{,}606\,695\,152$ számot adja. Ez azt sugallja, hogy a sor összege 10 értékes jegy pontossággal: 1 606 695 152. Valóban ez a helyzet:

$$\sum_{k=201}^{\infty} \frac{1}{2^k - 1} = \sum_{k=201}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}(2 - (1/2^{k-1}))} < \sum_{k=201}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{199}} < 1{,}25 \cdot 10^{-60}.$$

A 200-adik után következő tagok összege elhanyagolható.

A számítógépes program mindazonáltal nehezen alkalmazható, ha a sor túlságosan lassan konvergál, ilyenkor a technika csúnyán meg is tréfálhat bennünket. A $\sum[1/(10^{10}k)]$ sor esetében például az első részletösszegek igen kicsik, amiből arra következtethetnénk, hogy a sor konvergens. Ez azonban tévedés: a sor divergens, amint az könnyen látható, ha a sort $(1/10^{10})\sum_{k=0}^{\infty}(1/k)$ alakba írjuk, ez ugyanis a harmonikus sor konstansszorosa.

A numerikus számítások eredményeinek értelmezésében előrébb jutunk, miután a 11.9. alfejezetben megismerkedünk néhány hibabecslési módszerrel.

Hatványsorok szorzata

Bizonyítás nélkül közöljük azt a tételt is, amely szerint az abszolút konvergens hatványsorok a polinomok mintájára szorozhatók össze.

21. TÉTEL:

Tegyük fel, hogy az $A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ és $B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hatványsorok minden $|x| < R$ esetén abszolút konvergensek. Értelmezzük a $\{c_n\}$ sorozatot a következőképpen:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots a_{n-1} b_1 + a_n b_0 =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ sor minden $|x| < R$ esetén abszolút konvergens, összege pedig $A(x)B(x)$:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n.$$

7. PÉLDA:

Szorozzuk meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1$$

mértani sort önmagával, így megkapjuk az $1/(1-x)^2$ függvény hatványsorát.

Megoldás: Legyen tehát

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots = \frac{1}{1-x}$$
$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots = \frac{1}{1-x}$$

ekkor

$$c_n = \underbrace{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_kb_{n-k} + \ldots a_nb_0}_{n+1 \text{ tag}} =$$
$$= \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n+1 \text{ darab 1-es}} = n+1.$$

A végtelen sorok szorzására vonatkozó tétel szerint így

$$A(x)\cdot B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^2 =$$
$$= 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n+1)x^n+\ldots$$

az $1/(1-x)^2$ függvény hatványsora, amely minden $|x|<1$ esetén abszolút konvergens.

Vegyük észre, hogy a 4. példa alapján ugyanezt az eredményt kapjuk, hiszen

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$ □

11.7. Feladatok

Konvergenciaintervallumok

Adjuk meg az 1–32. feladatokban szereplő sorok **(a)** konvergenciasugarát és konvergenciaintervallumát! Állapítsuk meg, hogy a sorok **(b)** mely x értékek esetén abszolút konvergensek, és **(c)** mely x értékek esetén feltételesen konvergensek?

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(4x+1)^n$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+2)^n}{n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}3^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^{2n+1}}{n!}$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}$

18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n(n^2+1)}$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}x^n}{3^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}(2x+5)^n$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)x^n$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

24. $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-4)^n$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+2)^n}{n2^n}$

26. $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n(n+1)(x-1)^n$

27. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}$ [Használjuk fel a 11.3. alfejezet 39. feladatát!]

28. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n\ln n}$ [Használjuk fel a 11.3. alfejezet 39. feladatát!]

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^{n+1}}{2n+2}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+\pi)^n}{\sqrt{n}}$ **32.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-\sqrt{2})^{2n+1}}{2^n}$

Határozzuk meg a sorok konvergenciaintervallumát, és azt az – ezen az intervallumon értelmezett – függvényt, amely a sor összegét adja meg (a 33–38. feladatok)!

33. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4n}$ **34.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{9^n}$

35. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2}-1\right)^n$ **36.** $\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

37. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n$ **38.** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n$

További példák és feladatok

39. Mely x-ek esetén konvergens az

$$1-\frac{1}{2}(x-3)+\frac{1}{4}(x-3)^2+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)(x-3)^n+\ldots$$

végtelen sor? Mi a sor összege? Melyik sort kapjuk tagonkénti deriválással? Mely x-ek esetén konvergens az új sor? Ahol konvergens, mennyi az összege?

40. Melyik sort kapjuk a 39. feladatbeli végtelen sor tagonkénti integrálásával? Mely x-ekre konvergens azt így kapott sor? Ismerjük-e az összegfüggvényt?

41. A

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\ldots$$

hatványsor minden x esetén konvergens.

(a) Adjuk meg a cos függvény sorának első hat tagját! Mely x-ek esetén konvergens ez a sor?

(b) A $\sin x$ sorában x helyébe $2x$-et írva adjuk meg a $\sin 2x$ függvény – minden x esetén konvergens – hatványsorát!

(c) A feladat (a) részének eredményét felhasználva számítsuk ki a $2\sin x\cos x$ függvény hatványsorának első hat tagját! Vessük ezt össze a feladat (b) részére adott válaszunkkal!

42. Az

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

sor minden x esetén konvergens.

(a) Adjuk meg a $(d/dx)e^x$ függvény hatványsorát! Valóban az e^x függvény hatványsorát kaptuk? Válaszunkat indokoljuk!

(b) Adjuk meg az $\int e^x$ függvény hatványsorát! Valóban az e^x függvény hatványsorát kaptuk? Válaszunkat indokoljuk!

(c) Helyettesítsünk a sorban x helyébe $-x$-et, így olyan sort kapunk, amely minden x esetén e^{-x}-hez konvergál. Ezután a két sort összeszorozva határozzuk meg $e^x \cdot e^{-x}$ hatványsorának első hat tagját!

43. A

$$\operatorname{tg} x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\frac{62x^9}{2835}+\ldots$$

sor minden $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ esetén konvergens.

(a) Adjuk meg az $\ln|\sec x|$ függvény hatványsorának első hat tagját! Mely x-ek esetén konvergens ez a sor?

(b) Adjuk meg a $\sec^2 x$ függvény hatványsorát! Mely x-ek esetén konvergens ez a sor?

(c) Ellenőrizzük a feladat (b) részére adott válaszunkat a $\sec x$-re a 44. feladatban megadott sor négyzetre emelésével!

44. A

$$\sec x = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\frac{277}{8064}x^8+\ldots$$

hatványsor minden, a $(-\pi/2, \pi/2)$ nyílt intervallumba eső x esetén konvergens.

(a) Adjuk meg az $\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|$ függvény hatványsorának első négy tagját! Mely x-ek esetén konvergens ez a sor?

(b) Adjuk meg a $\sec x \cdot \operatorname{tg} x$ függvény hatványsorának első négy tagját! Mely x-ek esetén konvergens ez a sor?

(c) Ellenőrizzük a feladat (b) részére adott megoldásunkat: szorozzuk össze a $\sec x$ sorát a $\operatorname{tg} x$ függvényre az előző feladatban megadott sorral!

45. A hatványsor egyértelműsége:

(a) Igazoljuk, hogy ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ hatványsor egyaránt konvergens, és összegük egy $(-c,c)$ intervallum minden pontjában megegyezik, akkor minden n-re $a_n = b_n$! (*Útmutatás*: legyen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Deriváljunk tagonként, és mutassuk meg, hogy $a_n = b_n = f^{(n)}(0)/(n!)$.)

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ egy $(-c,c)$ intervallum minden x pontjában, akkor minden n-re $a_n = 0$!

46. A $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2/2^n)$ sor összege: Írjuk fel $1/(1-x)$-et mértani sorként, deriváljuk az egyenlőség mindkét oldalát x szerint, majd szorozzuk meg mindkét oldalt x-szel, és deriváljunk újra! Ezután megint szorozzunk x-szel, és írjunk x helyébe $1/2$-et! Mit kapunk? [Forrás: David E. Dobbs levele a szerkesztőhöz: *Illinois Mathematics Teacher,* Vol. 33. Issue 4. (1982), p. 27.]

47. Konvergencia a végpontokban: Példákkal igazoljuk, hogy egy hatványsor a konvergenciaintervallumának végpontjaiban abszolút konvergens és feltételesen konvergens is lehet!

48. Írjunk fel hatványsort, amelynek konvergenciaintervalluma **(a)** $(-3,3)$, **(b)** $(-2,0)$, **(c)** $(1,5)$!

11.8. Taylor- és Maclaurin-sorok

Ebben a fejezetben a végtelen sokszor differenciálható függvények által meghatározott hatványsorokról, a Taylor-sorokról lesz szó. Ezek a hatványsorok számos esetben jól használható közelítést adnak a vizsgált függvényekhez.

Függvény hatványsora

A 19. Tétel szerint egy hatványsor összege a sor konvergenciaintervallumában végtelen sokszor deriválható függvény. Igaz-e vajon ennek a megfordítása: kifejezhető-e hatványsorral minden olyan $f(x)$ függvény, amely egy I intervallumon végtelen sokszor differenciálható? Ha igen, mik lesznek a hatványsor együtthatói?

Az utolsó kérdésre azonnal válaszolhatunk, ha feltesszük, hogy az $f(x)$ függvényértékeket egy

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots$$

hatványsor összege adja meg, a hatványsor konvergenciasugara pedig pozitív, akkor tagonkénti deriválással azt kapjuk, hogy az I konvergenciaintervallum minden x elemére:

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+\ldots+na_n(x-a)^{n-1}+\ldots$$
$$f''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3(x-a)+3\cdot 4a_4(x-a)^2+\ldots$$
$$f'''(x)=a_1\cdot 2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_5(x-a)^2+\ldots,$$

az n-edik derivált pedig minden n-re ilyen:

$f^{(n)}(x)=n!a_n+$ egy összeg, minden tagjában az $(x-a)$ tényezővel.

Mivel az egyenlőségek $x=a$-ra is fennállnak, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f'(a) &= a_1,\\ f''(a) &= 1\cdot 2a_2,\\ f'''(a) &= 1\cdot 2\cdot 3a_3, \end{aligned}$$

az általános esetben pedig:

$$f^{(n)}(a)=n!\cdot a_n.$$

Ezek a képletek tetszőleges olyan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ hatványsorra érvényesek, amelyek egy I intervallumon konvergensek, és összegüket ezen az intervallumon egy $f(x)$ függvény adja meg (ilyenkor azt mondjuk, hogy f-et a sorral reprezentáljuk). Amennyiben egyáltalán *létezik* ilyen sor, akkor egyértelmű, és n-edik együtthatóját az

$$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

képlet adja meg. Ha tehát f reprezentálható hatványsorral, akkor az csak ilyen lehet:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+ \\ +\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots. \tag{11.12}$$

De vajon mi a helyzet, ha egy, az $x=a$ középpontú I intervallumon végtelen sokszor differenciálható függvényből indulunk ki? Konvergens lesz-e a (11.12) képlet alapján kiszámított hatványsor az I intervallum belső pontjaiban? A válasz: talán. Vannak függvények, amelyeknél igen, de olyanok is akadnak, amelyeknél nem.

Taylor- és Maclaurin-sorok

DEFINÍCIÓK:

Legyen f olyan függvény, amely végtelen sokszor differenciálható egy olyan intervallumon, amelynek egyik belső pontja a. Az f **által generált Taylor-sor az** $x=a$ **helyen**:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+ \\ +\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots.$$

Az f függvény **Maclaurin-sora** az $x=0$-beli Taylor-sor:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(a)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots.$$

1. PÉLDA: **Taylor-sorfejtés**

Adjuk meg az $f(x)=1/x$ függvény $a=2$-beli Taylor-sorát! Mely x-ek esetén konvergál ez a sor $1/x$-hez?

Megoldás: A Taylor-sor együtthatóinak meghatározásához szükségünk van az $f(2), f'(2), f''(2)\ldots$ értékekre.

$$\begin{aligned}
f(x)&=x^{-1}, & f(2)&=2^{-1}=\frac{1}{2},\\
f'(x)&=-x^{-2}, & f'(2)&=-\frac{1}{2^2},\\
f''(x)&=2!x^{-3}, & \frac{f''(2)}{2!}&=\frac{1}{2^3},\\
f'''(x)&=-3!x^{-4}, & \frac{f'''(2)}{3!}&=-\frac{1}{2^4},\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n)}(x)&=(-1)^n n!x^{-(n+1)}, & \frac{f^{(n)}(2)}{n!}&=\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

A keresett Taylor-sor tehát:

$$f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+\cdots= \\ =\frac{1}{2}-\frac{x-2}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}-\ldots+(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}+\ldots.$$

Mértani sort kaptunk, amelynek első tagja $1/2$, hányadosa pedig $r=-(x-2)/2$. A sor abszolút konvergens az $|x-2|<2$ egyenlőtlenséget kielégítő x-ekre, az összege pedig:

$$\frac{1/2}{1+(x-2)/2}=\frac{1}{2+(x-2)}=\frac{1}{x}.$$

Az $f(x)=1/x$ függvény által az $a=2$ helyen generált Taylor-sor tehát minden $0<x<4$ esetén $1/x$-hez konvergál. □

Taylor-polinomok

Az f függvény linearizációja az a helyen az elsőfokú

$$P_1(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

polinom. A 3.8. alfejezetben a linearizációval adtuk meg az f függvény közelítő értékeit az a pont közvetlen környezetében. Ha a függvény többször is deriválható, akkor magasabb fokú polinomokkal is közelíthető: ezek a **Taylor-polinomok**.

DEFINÍCIÓ: *n*-edrendű Taylor-polinom

Legyen f olyan függvény, amelynek egy, az a számot belső pontként tartalmazó intervallumon minden $k = 1,2,\ldots,N$ esetén létezik a k-adik deriváltja. Legyen n egy 0 és N közötti egész szám. Az f függvény által generált n-edrendű Taylor-polinom az $x = a$ helyen:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Azért beszélünk *n-edrendű*, nem pedig *n-edfokú* Taylor-polinomról, mert $f^{(n)}(a)$ akár 0 is lehet, az n-edrendű Taylor-polinom tehát nem feltétlenül n-edfokú. Az $f(x) = \cos x$ függvény első két Taylor-polinomja az $x = 0$ helyen például: $P_0(x) = 1$ és $P_1(x) = 1$. Az elsőrendű Taylor-polinom tehát nulladfokú, nem elsőfokú.

2. PÉLDA: Az e^x függvény Taylor-polinomjai

Adjuk meg az $f(x) = e^x$ függvény által az $x = 0$ helyen generált Taylor-sort és a Taylor-polinomokat!

Megoldás: Mivel

$$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x, \ldots, f^{(n)}(x) = e^x, \ldots,$$

azt kapjuk, hogy

$$f(0) = e^0 = e,\ f'(0) = 1, \ldots, f^{(0)}(0) = 1, \ldots.$$

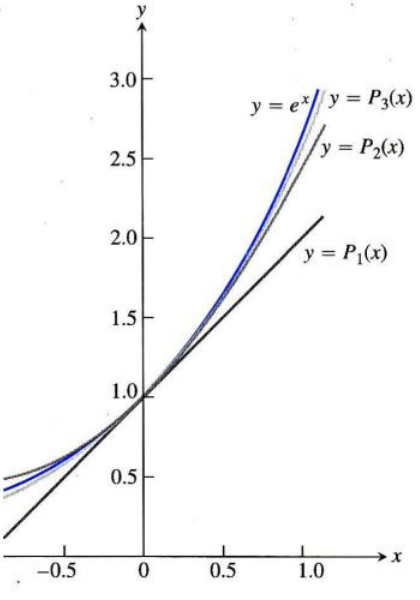
Az $x = 0$ helyen a függvény Taylor- (vagy Maclaurin-) sora:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

A 11.9. alfejezetben bebizonyítjuk, hogy ez a sor minden x-re e^x-hez konvergál. Az n-edrendű Taylor-polinom az $x = 0$ helyen:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Az első néhány Taylor-polinomot a 11.12. ábrán tanulmányozhatjuk. □



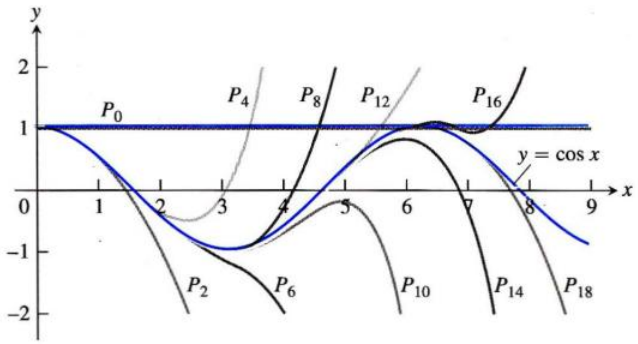
11.12. ÁBRA: Az $f(x) = e^x$ függvény és a
$P_1(x) = 1 + x$,
$P_2(x) = 1 + x + (x^2/2!)$,
$P_3(x) = 1 + x + (x^2/2!) + (x^3/3!)$
Taylor-polinomok. Figyeljünk fel arra, milyen jó a közelítés az $x = 0$ középpont környékén (2. példa).

3. PÉLDA: A $\cos x$ függvény Taylor-polinomjai

Adjuk meg az $f(x) = \cos x$ függvény által az $x = 0$ helyen generált Taylor-sort és a Taylor-polinomokat!

Megoldás: A koszinuszfüggvény deriváltjai:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, & f'(x) &= -\sin x, \\ f''(x) &= -\cos x, & f^{(3)}(x) &= \sin x, \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \cos x, & f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^{n+1} \sin x. \end{aligned}$$



11.13. ÁBRA: A $P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ polinomok sorozata $\cos x$-hez konvergál. A $\cos x$ függvény viselkedését – bármilyen távol legyünk is az origótól – egyértelműen meghatározza az $x = 0$-beli függvényérték és az x_0-beli deriváltak (3. példa).

Figyelembe véve, hogy $\cos 0 = 1$ és $\sin 0 = 0$,

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \text{ és } f^{(2n+1)}(0) = 0.$$

Mindezek alapján a 0-beli Taylor-sor:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!} + \ldots =$$
$$= 1 + 0 \cdot x - \frac{x^2}{2} + 0 \cdot x^3 + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Mivel $f^{(2n+1)}(0) = 0$, a $2n$-ed- és $2n+1$-edrendű Taylor-polinomok megegyeznek:

$$P_{2n} = P_{2n+1} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

A 11.13. ábra a cos néhány Taylor-polinomjának grafikonját mutatja az $x = 0$ hely környékén. A grafikonoknak csak a jobb oldali ágát tűntettük fel, elvégre valamennyi szimmetrikus az y-tengelyre. □

4. PÉLDA: **Olyan f függvény, amelynek Taylor-sora minden x-re konvergens, de csak az $x = 0$ helyen konvergál $f(x)$-hez**

Belátható (bár nem éppen egyszerű feladat), hogy az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \end{cases}$$

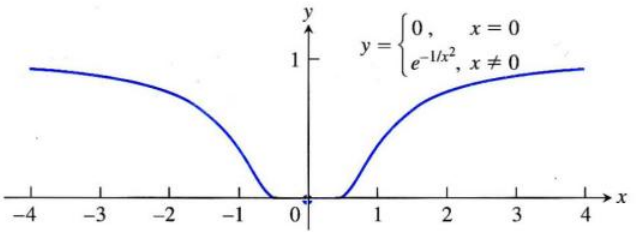
függvénynek (11.14. ábra) az $x = 0$ helyen tetszőleges n-re létezik az n-edrendű deriváltja, és minden n-re $f^{(n)}(0) = 0$. Eszerint a függvény által generált Taylor-sor az $x = 0$ helyen:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots =$$
$$= 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots + 0 \cdot x^n + \ldots = 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots.$$

A sor természetesen minden x-re konvergens (az összeg 0), de $f(x)$-hez egyedül az $x = 0$ helyen konvergál. □

Két kérdés vár még válaszra:

1. Milyen x-ek esetén számíthatunk arra, hogy egy függvény Taylor-sora a megfelelő függvényértékhez konvergál?



11.14. ÁBRA: Az $y = e^{-1/x^2}$ függvény folytonos kiterjesztése az $x = 0$ helyen olyan lapos, hogy valamennyi deriváltja 0 (4. példa).

2. Milyen pontos közelítést nyújtanak a Taylor-polinomok egy adott intervallumon?

Taylor tétele, amelyet a következő alfejezetben tárgyalunk, mindkettőre választ ad.

11.8. Feladatok

Taylor-polinomok

Írjuk fel a függvény nullad-, első-, másod-, harmad- és negyedrendű Taylor-polinomjait a megadott helyen (1–8. feladatok)!

1. $f(x) = \ln x,\ a = 1$

2. $f(x) = \ln(1+x),\ a = 0$

3. $f(x) = 1/x,\ a = 2$

4. $f(x) = 1/(x+2),\ a = 0$

5. $f(x) = \sin x,\ a = \pi/4$

6. $f(x) = \cos x,\ a = \pi/4$

7. $f(x) = \sqrt{x},\ a = 4$

8. $f(x) = \sqrt{x+4},\ a = 0$

Maclaurin-sorok

Írjuk fel a megadott függvények Maclaurin-sorát (9–20. feladatok)!

9. e^{-x}

10. $e^{x/2}$

11. $\dfrac{1}{1+x}$

12. $\dfrac{1}{1-x}$

13. $\sin 3x$

14. $\sin\dfrac{x}{2}$

15. $7\cos(-x)$

16. $5\cos \pi x$

17. $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

18. $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

19. $x^4 - 2x^3 - 5x + 4$

20. $(x+1)^2$

Taylor-sorok

Határozzuk meg az f által (a jelzett helyen) generált Taylor-sort (21–28. feladatok)!

21. $f(x) = x^3 - 2x + 4,\ a = 2$

22. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 8,\ a = 1$

23. $f(x) = x^4 + x^2 + 1,\ a = -2$

24. $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 2,\ a = -1$

25. $f(x) = 1/x^2,\ a = 1$

26. $f(x) = x/(1-x),\ a = 0$

27. $f(x) = e^x,\ a = 2$

28. $f(x) = 2^x,\ a = 1$

További példák és feladatok

29. Az e^x függvény által az $x = a$ helyen generált Taylor-sort felhasználva bizonyítsuk be, hogy

$$e^x = e^a\left[1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots\right].$$

30. ***Az előző feladat folytatása:*** Adjuk meg az e^x által generált Taylor-sort az $x = 1$ helyen! Vessük össze az eredményt az előző feladat állításával!

31. Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény az $x = a$ helyen n-szer deriválható. Mutassuk meg, hogy az n-edrendű Taylor-polinom és ennek első n deriváltja ugyanazokat az értékeket veszi fel az $x = a$ helyen, mint az f függvény, illetve f első n deriváltja!

32. A legfeljebb n-edfokú polinomok között az n-edrendű Taylor-polinom a legjobb közelítés: Tegyük fel, hogy az f függvény $(n+1)$-szer differenciálható az $x = a$ középpontú intervallumon, $g(x) = b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n$ pedig n-edfokú polinom (a $b_0, b_1, \ldots, b_n$ együtthatókkal). Legyen végül $E(x) = f(x) - g(x)$. Igazoljuk, hogy ha

(a) $E(a) = 0$ (az $x = a$ helyen a közelítés tökéletesen pontos) és

(b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{E(x)}{(x-a)^n} = 0$ (a hiba $(x-a)^n$-hez viszonyítva elhanyagolható), akkor

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

A $P_n(x)$ Taylor-polinom tehát az egyetlen n-nél nem magasabb fokú polinom, amelynek hibája az $x = a$ helyen nulla, és $(x-a)^n$-hez viszonyítva elhanyagolható.

Kvadratikus közelítés

A kétszer differenciálható $f(x)$ függvény $x = a$-beli másodrendű Taylor-polinomját az f függvény $x = a$ helyen vett **kvadratikus közelítésének** nevezzük. A 33–38. feladatokban megadott függvényeknek adjuk meg az $x = 0$-beli **(a)** linearizációját, és **(b)** a kvadratikus közelítését!

33. $f(x) = \ln(\cos x)$

34. $f(x) = e^{\sin x}$

35. $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$

36. $f(x) = \operatorname{ch} x$

37. $f(x) = \sin x$

38. $f(x) = \operatorname{tg} x$

11.9. A Taylor-sorok konvergenciája, Taylor tétele

Ebben az alfejezetben az előző alfejezet végén feltett két problémával foglalkozunk:

1. Milyen x-ek esetén számíthatunk arra, hogy egy függvény Taylor-sora a megfelelő függvényértékhez konvergál?
2. Milyen pontos közelítést nyújtanak a Taylor-polinomok egy adott intervallumon?

Taylor tétele

Taylor tétele mindkét kérdésre választ ad.

22. TÉTEL: Taylor tétele

Ha az f függvény – az $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ deriváltfüggvényekkel egyetemben – folytonos az $[a,b]$ zárt intervallumon, $f^{(n)}$ pedig differenciálható az (a,b) nyílt intervallumon, akkor van olyan a és b közötti c szám, amellyel:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Taylor tétele a Lagrange-féle középértéktétel (lásd a 39. feladatot) általánosítása. A tételt az alfejezet végén bizonyítjuk majd be.

Amikor a Taylor-tételt arra használjuk, hogy a függvény Taylor-sorának a függvénytől való eltérését becsüljük, akkor az a számot általában rögzítjük, b-t pedig változónak tekintjük. Ilyenkor célszerű, ha b helyett x-et írunk. A tétel ekkor a következő alakot ölti:

A Taylor-formula

Ha az f függvény az $a \in I$ nyílt intervallumon akárhányszor differenciálható, akkor minden n egész szám és $x \in I$ esetén

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \tag{11.13}$$

ahol

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \text{ egy } a \text{ és } x \text{ közötti } c\text{-vel.} \tag{11.14}$$

Ha a Taylor-tételt így mondjuk ki, akkor a következőt állítja: minden $x \in I$ esetén

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Az $R_n(x)$ függvényt az $f^{(n+1)}$ deriváltfüggvénynek (az a és x közé eső) c-beli értéke határozza meg. Az egyenlőség tetszőleges n-re a (11.13) képlet az f függvény n-edrendű közelítése mellett a közelítés hibáját is megadja.

A (11.13) egyenlőséget Taylor-formulának nevezzük. Az $R_n(x)$ függvény – a formula maradéktagja – az f függvény $P_n(x)$-szel való közelítésének hibája. $R_n(x)$-et **Lagrange-féle maradéktagnak** hívjuk. Ha minden $x \in I$ esetén fennáll $R_n(x) \to 0$, amint $n \to \infty$, akkor f-nek az $x = a$ helyen generált Taylor-sora az I intervallumon f-hez konvergál:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{n!}(x-a)^k,$$

és ekkor azt mondjuk, hogy f-nek az $x = a$ helyen generált Taylor-sora az I intervallumon előállítja f-et.

Az R_n szám nagysága anélkül is megbecsülhető, hogy ismernénk c pontos értékét – amint azt a következő példa mutatja.

1. PÉLDA: **Az $f(x) = e^x$ függvény Taylor-sora (újra)**

Igazoljuk, hogy az e^x függvény $x = 0$-beli Taylor-sora minden valós x esetén $f(x)$-hez konvergál!

Megoldás: A függvény az $I = (-\infty, \infty)$ intervallumon mindenütt akárhányszor deriválható. A (11.13) és a (11.14) egyenletből $f(x) = e^x$-szel és $a = 0$-val azt kapjuk, hogy

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$$

A képletbeli polinomot a 11.8. alfejezet 2. példájából már ismerjük, az $R_n(x)$ maradéktag pedig

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},$$

valamely 0 és x közötti c-vel. Mivel e^x növekvő függvény, az e^c szám e^0 és e^x közé esik. Ha x negatív, akkor c is az, $e^c < 1$. Ha $x = 0$, akkor $e^x = 1$ és $R_n(x) = 0$, ha pedig x pozitív, akkor c is pozitív és $e^c < e^x$. Mindezek alapján

$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{ha } x \le 0, \text{ és}$$

$$|R_n(x)| < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{ha } x > 0.$$

Végül, mivel (mint azt a 11.1. alfejezetben láttuk) minden x-re

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, a sor tehát minden x-re konvergens, és

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots. \tag{11.15}$$

□

A maradéktag közelítő értéke

Gyakran előfordul, hogy – az 1. példához hasonlóan – az $R_n(x)$ maradéktagjára jó közelítést adhatunk. A módszer olyan hasznos, hogy célszerű ha egy tételben rögzítjük:

23. TÉTEL:

Ha létezik olyan M konstans, amellyel az x és a közötti valamennyi t esetén (x-et és a-t is beleértve) $|f^{(n+1)}(t)| \le M$, akkor Taylor tételében szereplő $R_n(x)$ maradéktag kielégíti az

$$R_n(x) \le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

egyenlőtlenséget. Amennyiben ez a feltétel minden n-re teljesül, f pedig kielégíti Taylor tételének feltételeit, akkor a sor $f(x)$-hez konvergál.

A következőkben néhány példán illusztráljuk, miként alkalmazható Taylor tétele és a maradéktag becslésére vonatkozó tétel bizonyos, sorok konvergenciájával kapcsolatos kérdések megválaszolására. A tételek, mint látni fogjuk,

arról is felvilágosítást nyújtanak, hogy mennyire pontos egy függvény Taylor-polinommal való közelítése.

2. PÉLDA: A $\sin x$ Taylor-sora az $x = 0$ helyen

Igazoljuk, hogy a $\sin x$ függvény $x = 0$-beli Taylor-sora minden x-re $\sin x$-hez konvergál!

Megoldás: A szinuszfüggvény és deriváltjai:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f'(x) &= \cos x, \\ f''(x) &= -\sin x, & f'''(x) &= -\cos x, \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \sin x, & f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^k \cos x, \end{aligned}$$

így

$$f^{(2k)}(0) = 0 \text{ és } f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

A szinuszfüggvény Taylor-sorában tehát kizárólag páratlan kitevőjű tagok szerepelnek. $n = 2k+1$-re a Taylor-tételből a következőt kapjuk:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+1}(x).$$

A szinuszfüggvény deriváltjainak értékkészletében kizárólag 1-nél nem nagyobb abszolútértékű számok szerepelnek, így a maradéktagra vonatkozó tétel alapján $M = 1$-gyel:

$$|R_{2k+1}(x)| \le 1 \cdot \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}.$$

Mivel $(|x|^{2k+2})/((2k+2)!) \to 0$ amint $k \to \infty$ (tetszőleges x-re), $R_{2k+1}(x) \to 0$, a szinuszfüggvény Maclaurin-sora tehát minden x esetén $\sin x$-hez konvergál:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots. \tag{11.16}$$

□

3. PÉLDA: A $\cos x$ Taylor-sora az $x = 0$ helyen (újra)

Igazoljuk, hogy a $\cos x$ függvény $x = 0$-beli Taylor-sora minden x esetén $\cos x$-hez konvergál!

Megoldás: A 11.8. alfejezet 3. példájában már felírtuk a koszinuszfüggvény Taylor-polinomját, ehhez csupán az $n = 2k$-hoz tartozó maradéktagot kell hozzáadnunk, hogy megkapjuk a Taylor-formulát:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k}(x).$$

A deriváltak abszolútértéke ezúttal sem lehet 1-nél nagyobb, így $M = 1$-gyel a maradéktagra vonatkozó tételből azt kapjuk, hogy

$$|R_{2k}(x)| \le 1 \cdot \frac{|x|^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Amint $k \to \infty$, tetszőleges x esetén $R_{2k}(x) \to 0$, a sor tehát minden x esetén $\cos x$-hez konvergál:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots. \tag{11.17}$$

□

4. PÉLDA: **Taylor-sor felírása helyettesítéssel**

Határozzuk meg a $\cos 2x$ függvény Taylor-sorát az $x = 0$ helyen!

Megoldás: A keresett sort megkapjuk, ha a koszinuszfüggvény (11.17) Taylor-sorában x helyébe $2x$-et írunk:

$$\cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \ldots =$$
$$= 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} x^{2k}}{(2k)!}.$$

Mivel a (11.17) egyenlet minden $-\infty < x < \infty$ esetén érvényes, ugyanez a $-\infty < 2x < \infty$ egyenlőségnek eleget tevő x-ekre is (vagyis minden x-re) igaz. A 45. feladat megoldásából kiderül, hogy a kapott sor valóban $\cos 2x$ Taylor-sora. □

5. PÉLDA: **Taylor-sor felírása szorzással**

Határozzuk meg az $x \sin x$ függvény Taylor-sorát az $x = 0$ helyen!

Megoldás: A keresett sort megkapjuk, ha a szinuszfüggvény (11.16) Taylor-sorát x-szel megszorozzuk:

$$x \sin x = x\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) =$$
$$= x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \ldots.$$

A kapott sor minden x-re konvergens, mivel ilyen a $\sin x$ sora is. A 46. feladat megoldásából kiderül, hogy a kapott sor valóban $x \sin x$ Taylor-sora. □

Kerekítési hiba

Már tudjuk, hogy az e^x függvény $x = 0$-beli Taylor-sora minden x-re e^x-hez konvergál. Tudnunk kellene azonban azt is, hogy adott pontossághoz a sor hány tagját kell figyelembe vennünk. Ebben is a maradéktagra vonatkozó tétel nyújt információt.

6. PÉLDA:

Számítsuk ki az e számot 10^{-6} pontossággal!

Megoldás: Az 1. példa eredményét használjuk az $x = 1$ esetben:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_n(1),$$

ahol

$$R_n(1) = e^c \frac{1}{(n+1)!} \qquad \text{valamely 0 és 1 közötti } c\text{-vel.}$$

Feltehetjük, hogy $e < 3$ (1. példa). Így biztosak lehetünk abban is, hogy

$$\frac{1}{(n+1)!} < R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!},$$

elvégre $0 < c < 1$ esetén $1 < e^c < 3$.

Próbálgatással kideríthetjük, hogy $1/9! > 10^{-6}$, de $1/(10)! < 10^{-6}$. Eszerint tehát $n+1$-nek legalább 10-nek, n-nek pedig legalább 9-nek kell lennie. A kívánt, 10^{-6}-os pontossággal tehát

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{9!} \approx 2{,}718282.$$ □

7. PÉLDA:

Mely x-ek esetén helyettesíthetjük $\sin x$-et $x-(x^3/3!)$-sal, ha azt akarjuk, hogy a hiba ne legyen nagyobb $3\cdot 10^{-4}$-nél?

Megoldás: Mivel a $\sin x$ Taylor-sora minden nemnulla x esetén alternáló sor, felhasználhatjuk az alternáló sorok közelítésére vonatkozó tételt (11.6. alfejezet), amely szerint a $\sin x$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots$$

Taylor-sorának az $x^3/3!$ utáni tagjait elhagyva a közelítés hibája legfeljebb

$$\left|\frac{x^5}{5!}\right|=\frac{|x^5|}{120}.$$

A hiba tehát kisebb lesz $3\cdot 10^{-4}$-nél, ha

$$\frac{|x^5|}{120}<3\cdot 10^{-4},\ \text{azaz}\ |x|<\sqrt[5]{360\cdot 10^{-4}}\approx 0{,}514,$$

ahol a biztonság kedvéért lefelé kerekítettünk.

Az alternáló sorok közelítésére vonatkozó tételből tehát olyan információhoz jutunk, amelyről a Taylor-sor maradéktagjára vonatkozó tétel nem ad felvilágosítást: $\sin x$ függvényt pozitív x-ek esetén az $x-(x^3/3!)$ összeg *alulról* közelíti, elvégre ilyenkor $x^5/120>0$.

A 11.15. ábrán a szinuszfüggvény és a hozzá közelítő Taylor-polinomok grafikonját tanulmányozhatjuk. A $P_3(x)=x-(x^3/3!)$ polinom grafikonja $-1\le x\le 1$ esetén alig különböztethető meg a $\sin x$ grafikonjától az adott léptékkel az adott vonalvastagság mellett.

Felmerülhet a kérdés, hogy mire jutnánk a Taylor-sor maradéktagjára vonatkozó tétel alapján. Ha tehát

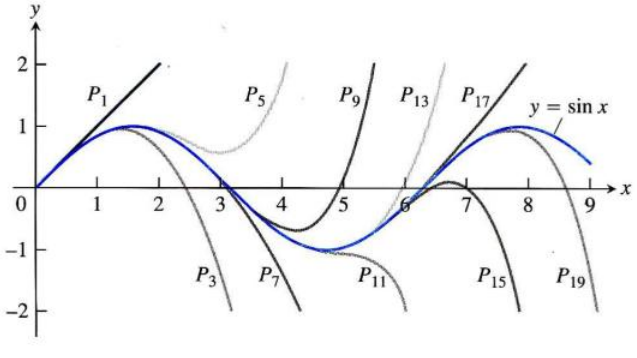
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+R_3,$$

akkor a tétel szerint

$$|R_3|\le 1\cdot\frac{|x|^4}{4!}=\frac{|x|^4}{24},$$

ez pedig kevésbé pontos az iménti becslésnél. Ha azonban észrevesszük, hogy $x-(x^3/3!)=0+x-(x^3/3!)+0\cdot x^4$ egyúttal a $\sin x$ negyedrendű Taylor-polinomja is, akkor javíthatunk:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+0+R_4,$$



11.15. ÁBRA: A $P_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ polinomok sorozata $\sin x$-hez konvergál, amint $n\to\infty$. Figyeljünk fel arra, hogy $x<1$ esetén $P_3(x)$ milyen jól közelít a szinuszgörbéhez.

így a maradéktagra vonatkozó tételből:

$$|R_4| \le 1 \cdot \frac{|x|^5}{5!} = \frac{|x|^5}{120},$$

ugyanaz tehát, mint az előbb. □

Műveletek Taylor-sorokkal

Konvergenciaintervallumaik metszetébe eső x-ek esetén a Taylor-sorok összeadhatók, kivonhatók, megszorozhatók egy konstanssal – a műveletek eredménye ugyancsak Taylor-sor lesz. Az $f(x)+g(x)$ függvény Taylor-sora f és g Taylor-sorainak összege, elvégre $f+g$ n-edik deriváltja éppen f és g n-edik deriváltjainak összege stb. Az $(1+\cos 2x)/2$ függvény Taylor-sorát tehát megkapjuk, ha $\cos 2x$ Taylor-sorához 1-et hozzáadunk, az eredményt pedig (tagonként) elosztjuk 2-vel. Hasonlóan, a $\sin x+\cos x$ Taylor-sora $\sin x$ és $\cos x$ Taylor-sorának összege.

Az Euler-képlet

Emlékeztetünk arra, hogy minden komplex szám felírható $a+bi$ alakban, ahol a és b valós számok, továbbá $i^2=-1$. (Komplex számokból alkotott sorokra is érvényes, hogy ha az abszolútértékekből alkotott sor konvergens, akkor az eredeti komplex számokból alkotott is az, és a sor összege a tagok tetszőleges átrendezésével sem változik meg.) Ha az e^x függvény Taylor-sorában x helyébe $i\theta$-t helyettesítünk (ahol θ valós szám), és az eredményt az

$$i^2=-1 \quad i^3=ii^2=-i \quad i^4=i^2i^2=1, \quad i^5=i^4i=i \quad \text{stb.}$$

egyenlőségeket alkalmazva egyszerűsítjük, akkor a következőt kapjuk:

$$e^{i\theta}=1+\frac{i\theta}{1!}+\frac{i^2\theta^2}{2!}+\frac{i^3\theta^3}{3!}+\frac{i^4\theta^4}{4!}+\frac{i^5\theta^5}{5!}+\frac{i^6\theta^6}{6!}+\ldots=$$
$$=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\ldots\right)+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\ldots\right)=\cos\theta+i\cdot\sin\theta.$$

Mindez természetesen nem bizonyítja azt, hogy $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, hiszen nem definiáltuk az e szám képzetes kitevőjű hatványait. Az összefüggés sokkal inkább azt mutatja, hogy miként kell $e^{i\theta}$-t definiálnunk ahhoz, hogy összhangban legyen mindazzal, amit eddig megtanultunk.

DEFINÍCIÓ:
Tetszőleges θ valós szám esetén $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$. (11.18)

A (11.18) összefüggést Euler-azonosságnak nevezzük, segítségével tetszőleges komplex kitevőjű hatványt értelmezhetünk: $e^{a+bi}=e^a\cdot e^{ib}$, tetszőleges $a+bi$ komplex szám esetén. Az Euler-azonosság következménye az

$$e^{i\pi}=-1$$

egyenlőség, amely $e^{i\pi}+1=0$ alakba írva a matematika legfontosabb konstansai közül öt között létesít összefüggést.

Taylor tételének bizonyítása

A tételt az $a<b$ esetre bizonyítjuk, a $b<a$ eset bizonyítása lényegében ugyanaz. A

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Taylor-polinom az $x = a$ helyen az első n derivált erejéig megegyezik f-fel. A megegyezést nem rontjuk el, ha az összeghez egy $K(x-a)^{n+1}$ alakú tagot adunk (ahol K tetszőleges konstans lehet), elvégre egy ilyen tag – az első n deriváltjával együtt – az $x = a$ helyen 0. Az új

$$\phi_n(x) = P_n(x) + K(x-a)^{n+1}$$

függvény tehát még mindig jól (az első n derivált erejéig) közelíti f-et az $x = a$ helyen.

A K állandót úgy választjuk meg, hogy az $y = \phi_n(x)$ egyenletű görbe az $x = b$ helyen megegyezzen az $y = f(x)$ görbével:

$$f(b) = P_n(b) + K(b-a)^{n+1}, \text{ amiből } K = \frac{f(b) - P_n(b)}{(b-a)^{n+1}}. \tag{11.19}$$

A (11.19) egyenlőségbeli K-val az

$$F(x) = f(x) - \phi_n(x)$$

függvény méri az eredeti f függvény és a ϕ_n közelítés eltérését az $[a,b]$ intervallumbeli x-ek esetén.

Alkalmazhatjuk Rolle tételét (4.2. alfejezet). Először, mivel $F(a) = F(b) = 0$, mind az F, mind az F' függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon, tudjuk, hogy valamely $c_1 \in (a,b)$ számmal

$$F'(c_1) = 0.$$

Másodszor, figyelembe véve, hogy $F'(a) = F'(c_1) = 0$, és hogy F' és F'' egyaránt folytonosak az $[a,c_1]$ intervallumon, van olyan $c_2 \in (a,c_1)$, amellyel

$$F''(c_2) = 0.$$

Az eljárást az $F'', F''', \ldots, F^{(n-1)}$ függvényekre alkalmazva folytathatjuk, és azt kapjuk, hogy egy

$$\begin{array}{lll} c_3 \in (a,c_2) & \text{számra} & F'''(c_3) = 0, \\ c_4 \in (a,c_3) & \text{számra} & F^{(4)}(c_4) = 0, \\ \vdots & & \vdots \\ c_n \in (a,c_{n-1}) & \text{számra} & F^{(n)}(c_n) = 0. \end{array}$$

Végül, mivel $F^{(n)}$ folytonos az $[a,c_n]$ és differenciálható az (a,c_n) intervallumon, továbbá $F^{(n)}(a) = F^{(n)}(c_n) = 0$, Rolle tétele szerint van olyan $c_{n+1} \in (a,c_n)$, amellyel

$$F^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0. \tag{11.20}$$

Deriváljuk most $F(x) = f(x) - P_n(x) - K(x-a)^{n+1}$ függvényt $n+1$-szer:

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 - (n+1)!K. \tag{11.21}$$

A (11.20) és (11.21) egyenlőségekből azt kapjuk, hogy egy $c = c_{n+1} \in (a,b)$ számmal

$$K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \tag{11.22}$$

végül (11.19) és (11.22) alapján:

$$f(b) = P_n(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

11.9. Feladatok

Taylor-sorok helyettesítéssel

A 4. példa mintájára helyettesítéssel adjuk meg a függvények Taylor-sorát az $x = 0$ helyen (1–4. és 6. feladatok)! Az 5. feladatban az $x = -1$ helyen!

1. e^{-5x} **2.** $e^{-x/2}$ **3.** $5\sin(-x)$

4. $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ **5.** $\cos\sqrt{x+1}$ **6.** $\cos\left(x^{3/2}/\sqrt{2}\right)$

További Taylor-sorok

Adjuk meg a függvények Taylor-sorát az $x = 0$ helyen (7–18. feladatok)!

7. xe^x **8.** $x^2\sin x$ **9.** $\frac{x^2}{2} - 1 + \cos x$

10. $\sin x - x + \frac{x^3}{3!}$ **11.** $x\cos \pi x$ **12.** $x^2\cos(x^2)$

13. $\cos^2 x$ (*Útmutatás*: $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$.)

14. $\sin^2 x$ **15.** $\frac{x^2}{1-2x}$ **16.** $x\ln(1+2x)$

17. $\frac{1}{(1-x)^2}$ **18.** $\frac{1}{(1-x)^3}$

Hibabecslés

19. Hozzávetőlegesen milyen x értékek esetén helyettesíthetjük $\sin x$-et $x - (x^3/6)$-tal, ha azt akarjuk, hogy a hiba ne legyen nagyobb $5 \cdot 10^{-4}$-nél? Válaszunkat indokoljuk!

20. Ha $\cos x$ helyett $1 - (x^2/2)$-t írunk, és a közelítést az $|x| < 0{,}5$ számokra alkalmazzuk, körülbelül mekkora hibát követhetünk el? Az $1 - (x^2/2)$ kifejezés értéke túlságosan nagy vagy túlságosan kicsi lesz? Válaszunkat indokoljuk!

21. Milyen pontos a $\sin x = x$ közelítés az $|x| < 10^{-3}$ egyenlőtlenségnek eleget tevő x-ek esetén? Mely x értékekre lesz $x < \sin x$?

22. Kicsiny x-ek esetén használjuk a $\sqrt{1+x} = 1 + (x/2)$ közelítést. Mekkora a közelítés hibája, ha $|x| < 0{,}01$?

23. Kicsiny x-ekre gyakran használjuk az $e^x = 1 + x + (x^2/2)$ közelítést. A maradéktagra vonatkozó tétel segítségével becsüljük meg a hiba nagyságát, amennyiben $|x| < 0{,}1$!

24. *(Az előző feladat folytatása.)* Nullánál kisebb x-ekre az e^x függvény Taylor-sora alternáló sor. Az alternáló sorokkal való közelítésre vonatkozó tétel segítségével becsüljük meg, mekkora a hiba, ha a $-0{,}1 < x < 0$ számokra e^x helyett $1 + x + (x^2/2)$-t írunk. Vessük össze az eredményt az előző feladatra adott válaszunkkal!

25. Becsüljük meg a $\operatorname{sh} x = x + (x^3/3!)$ közelítés hibájának nagyságát, amennyiben $|x| < 0{,}5$! (*Útmutatás*: ne R_3-at, inkább R_4-et használjuk.)

26. Igazoljuk, hogy $0 \le x \le 0{,}01$ esetén az $e^h = 1 + h$ közelítés hibája nem haladja meg a h szám 0,6%-át! (Használjuk a $e^{0{,}01} = 1{,}01$ becslést!)

27. Milyen pozitív x-ek esetén közelíthető $\ln(1+x)$ x-szel, ha azt akarjuk, hogy a hiba az x szám 1 százalékánál ne legyen nagyobb?

28. Úgy tervezzük, hogy $\pi/4$ értékét az $\operatorname{arctg} x$ függvény Maclaurin-sorába való behelyettesítéssel ($x = 1$) határozzuk meg. Becsüljük, hány tagra lesz szükségünk a két tizedesjegyes pontossághoz!

29. **(a)** A $\sin x$ Taylor-sora és az alternáló sorok közelítő összegére vonatkozó tétel alapján igazoljuk, hogy

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \neq 0!$$

(b) Ábrázoljuk számítógép segítségével az $f(x) = \sin x/x$ függvényt közös ablakban az $y = 1 - (x^2/6)$ és az $y = 1$ függvények grafikonjával együtt a $-5 \le x \le 5$ intervallumon! Mit veszünk észre?

30. **(a)** $\cos x$ Taylor-sora és az alternáló sorok közelítő összegére vonatkozó tétel alapján igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1-\cos x}{x^2} < \frac{1}{2}, \quad x \neq 0.$$

[Ez a 2.2. alfejezet 52. feladatában szereplő egyenlőtlenség.]

(b) Ábrázoljuk számítógép segítségével az $f(x) = (1 - \cos x)/x^2$ függvényt közös ablakban az $y = 1/2 - (x^2/24)$ és az $y = 1/2$ függvények grafikonjával együtt a $-9 \le x \le 9$ intervallumon!

Maclaurin-sorok

Emlékeztetünk arra, hogy a Maclaurin-sorok az $x = 0$ helyen vett Taylor-sorok. A 31–34. feladatokban egy $f(x)$ függvény Maclaurin-sorát adtuk meg valamely pontban. Melyik függvényről és melyik pontról van szó? Mi a sor összege?

31. $0{,}1 - \frac{0{,}1^3}{3!} + \frac{0{,}1^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^k 0{,}1^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots$

32. $1 - \frac{\pi^2}{4^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{4^4 \cdot 4!} - \ldots + \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{4^{2k} \cdot (2k)!} + \ldots$

33. $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi^3}{3^3 \cdot 3} + \frac{\pi^5}{3^5 \cdot 5} - \ldots + \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{3^{2k+1} \cdot (2k+1)}$

34. $\pi - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^3}{3} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{\pi^k}{k} + \ldots$

35. Szorozzuk össze az e^x és $\sin x$ függvények Maclaurin-sorát, és adjuk meg az $e^x \sin x$ függvény Maclaurin-sorának első öt nemnulla tagját!

36. Szorozzuk össze az e^x és $\cos x$ függvények Maclaurin-sorát, és adjuk meg az $e^x \cos x$ függvény Maclaurin-sorának első öt nemnulla tagját!

37. A $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ azonosság alapján adjuk meg $\sin^2 x$ Maclaurin-sorát! Deriváljuk a sort – eredményül a $2\sin x \cos x$ függvény Maclaurin-sorát kapjuk. Ellenőrizzük, hogy ez valóban a $\sin^2 x$ függvény Maclaurin-sora-e!

38. *(Az előző feladat folytatása.)* A $\cos^2 x = \cos 2x + \sin^2 x$ azonosságot felhasználva írjuk fel $\cos^2 x$ hatványsorát!

További példák és feladatok

39. A Taylor-tétel és a Lagrange-féle középértéktétel: Magyarázzuk meg, miért tekinthető a középértéktétel (4.2. alfejezet, 4. Tétel) a Taylor-tétel speciális esetének!

40. Linearizáció inflexiós pontban: Igazoljuk, hogy ha egy kétszer differenciálható függvénynek az $x = a$ helyen inflexiós pontja van, akkor az $x = a$ helyen felírt linearizációja f itteni kvadratikus közelítése is egyben! Ez a magyarázata, hogy az inflexiós pontokbeli érintők olyan jól illeszkednek a függvény grafikonjához.

41. A második deriváltkritérium: Az

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c_2)}{2}(x-a)^2$$

egyenlet alapján vezessük le a következő kritériumot.

Legyen f kétszer folytonosan is deriválható függvény, és tegyük fel, hogy $f'(a) = 0$. Ekkor

(a) f-nek lokális maximuma van a-ban, ha $f'' \leq 0$ egy olyan intervallumon, amelynek a belső pontja;

(b) f-nek lokális minimuma van a-ban, ha $f'' \geq 0$ egy olyan intervallumon, amelynek a belső pontja.

42. Harmadfokú közelítés: A Taylor-formula segítségével ($a = 0$, $n = 3$) adjuk meg az $f(x) = 1/(1-x)$ függvény harmadfokú közelítését! Adjunk felső korlátot a közelítés hibájára, amint $|x| \leq 0{,}1$!

43. **(a)** A Taylor-formula alapján (n = 2-vel) adjuk meg az $f(x) = (1+x)^k$ függvény (ahol k állandó) másodrendű közelítését az $x = 0$ pontban.

(b) A $k = 3$ esetben becsüljük meg, hogy a $[0,1]$ intervallumbeli x-ek közül melyek esetében lesz a közelítés hibája kisebb, mint $1/100$.

44. A π közelítő értékeinek pontosítása:

(a) Legyen P a π szám n tizedesjegyre pontos közelítése. Igazoljuk, hogy ekkor a $P + \sin P$ a π $3n$ tizedesre pontos közelítését adja meg! (*Útmutatás*: legyen $P = \pi + x$.)

(b) Próbáljuk ki számológéppel!

45. Az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ függvény által generált Taylor-sor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$: Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara $c > 0$, akkor a sor összegével definiált függvény Taylor-sora a $(-c, c)$ intervallum minden pontjában konvergens. Igazoljuk ezt úgy, hogy belátjuk: f Taylor-sora ebben az esetben maga az f függvény!

Az állítás közvetlen következménye, hogy egy Taylor-sor és egy x-hatvány szorzásával kapott sor – amilyen például

$$x\sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \ldots$$

vagy

$$x^2 e^x = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \ldots,$$

valamint a Taylor-sorokból tagonkénti deriválással vagy integrálással kapott hatványsorok maguk is Taylor-sorok, méghozzá az általuk reprezentált függvények által generált Taylor-sorok.

46. Páros és páratlan függvények Taylor-sora: *(A 11.7. alfejezet 45. feladatának folytatása.)* Tegyük fel, hogy az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ függvény minden $x \in (-c, c)$ esetén konvergens. Igazoljuk, hogy

(a) ha f páros, akkor $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$, azaz f Taylor-sorában csak páros kitevőjű x-hatványok szerepelnek;

(b) ha f páratlan, akkor $a_0 = a_2 = a_4 = \ldots = 0$, azaz f Taylor-sorában csak páratlan kitevőjű x-hatványok szerepelnek.

47. Periodikus függvény Taylor-sora:

(a) Igazoljuk, hogy ha az f periodikus függvény mindenütt (a $(-\infty, \infty)$ intervallumon) értelmezve van, akkor korlátos, azaz van olyan M szám, hogy minden x-re $|f(x)| \leq M$.

(b) Igazoljuk, hogy a $\cos x$ függvény pozitív egész fokszámú Taylor-polinomjai $|x|$ növelésével egyre jobban elválnak a $\cos x$ grafikonjától (mint azt a 11.13. ábrán is láthattuk). Hasonlóan viselkednek a $\sin x$ függvény Taylor-polinomjai is.

T 48. **(a)** Ábrázoljuk közös ablakban az $y = (1/3) - (x^2)/5$ és az $y = (x - \operatorname{arctg} x)/x^3$ függvény grafikonját, valamint az $y = 1/3$ egyenletű egyenest!

(b) Magyarázzuk meg a látványt egy Taylor-sorra hivatkozva! Mennyi a

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$$

határérték?

Az Euler-formula

49. A (11.18) összefüggés alapján írjuk fel az alábbi e-hatványokat $a + ib$ alakban. **(a)** $e^{-i\pi}$, **(b)** $e^{i\pi/4}$, **(c)** $e^{-i\pi/2}$.

50. A (11.18) összefüggés alapján igazoljuk, hogy

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{és} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}.$$

51. Igazoljuk az 50. feladatbeli képleteket az $e^{i\theta}$ és az $e^{-i\theta}$ Taylor-sora alapján!

52. Igazoljuk, hogy **(a)** $\operatorname{ch} i\theta = \cos\theta$, és hogy **(b)** $\operatorname{sh} i\theta = i\sin\theta$!

53. Az e^x és a $\sin x$ függvény Taylor-sorának összeszorzásával adjuk meg az $e^x \sin x$ függvény Taylor-sorát az ötödfokú tagig! Ellenőrizzük a megoldásunkat annak alapján, hogy a szóban forgó sor az

$$e^x e^{ix} = e^{(1+i)x}$$

függvény Taylor-sorának képzetes része! Mely x-ek esetén konvergens az $e^x \sin x$ függvény Taylor-sora?

54. Tetszőleges a és b valós számok esetén definiáljuk az $e^{(a+ib)x}$ hatványt a következőképpen:

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx).$$

A jobb oldal deriválásával igazoljuk, hogy

$$\frac{d}{dx} e^{(a+ib)x} = (a+bi)e^{(a+ib)x}.$$

55. Az $e^{i\theta}$ hatvány definíciója alapján igazoljuk, hogy tetszőleges, θ_1, θ_2 valós számok esetén **(a)** $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, és hogy **(b)** $e^{-i\theta} = 1/e^{i\theta}$!

56. Az $a + bi$ és a $c + di$ komplex számok egyenlőek, ha $a = c$ és $b = d$. határozzuk meg ennek alapján az

$$\int e^{ax}\cos bx dx \text{ és az } \int e^{ax}\sin bx dx$$

integrálokat az

$$\int e^{(a+bi)x}dx = \frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{(a+bi)x}+C$$

összefüggés alapján (amelyben $C = C_1 + iC_2$ tetszőleges komplex állandó)!

Linearizáció, másod- és harmadfokú közelítés (számítógéppel)

A Taylor-formula az $n = 1$ és $a = 0$ esetben a függvény $x = 0$ pontbeli linearizációját adja meg; $n = 2$-vel, illetve $n = 3$-mal a kvadratikus, illetve harmadfokú közelítést kapjuk. Ebben a feladatban ezeknek a közelítéseknek a pontosságát vizsgáljuk. Két kérdésre keressük a választ:

(a) Milyen x értékek esetén lesz a közelítés hibája 10^{-2}-nél kisebb?

(b) Mekkora a legnagyobb hiba, amely a megadott intervallumon az adott közelítést használva elkövethetünk?

Számítógép segítségével hajtsuk végre az alábbi lépéseket, így választ kaphatunk az (a) és a (b) kérdésre az 57–62. feladatokban szereplő függvényeket és intervallumokat illetően.

1. LÉPÉS Rajzoljuk fel a függvény grafikonját a megadott intervallumon!

2. LÉPÉS Írjuk fel a $P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ Taylor-polinomokat az $x = 0$ helyen!

3. LÉPÉS Határozzuk meg a Taylor-formula maradéktagjában szereplő $f^{(n+1)}$ deriváltfüggvényt, majd ábrázoljuk a megadott intervallumon, és becsüljük meg az itt felvett M maximális értékének nagyságát!

4. LÉPÉS Valamennyi Taylor-polinom esetében számítsuk ki az $R_n(x)$ maradéktagot! A 3. lépésben szereplő M-et felhasználva vázoljuk $R_n(x)$ grafikonját a megadott intervallumon! Ezután adjunk becslést az (a) kérdésre!

5. LÉPÉS Vessük össze az általunk becsült hiba nagyságát az $E_n(x) = |f(x) - P_n(x)|$ függvény ábrázolásával! A grafikon a (b) kérdés megválaszolásában is segítségünkre lesz.

6. LÉPÉS Ábrázoljuk közös ablakban a függvényt és a három Taylor-közelítést! Elemezzük a grafikonokat – különös tekintettel a 4. és az 5. lépésre!

57. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, $|x| \le \dfrac{3}{4}$

58. $f(x) = (1+x)^{3/2}$, $-\dfrac{1}{2} \le x \le 2$

59. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $|x| \le 2$

60. $f(x) = (\cos x)(\sin 2x)$, $|x| \le 2$

61. $f(x) = e^{-x}\cos 2x$, $|x| \le 1$

62. $f(x) = e^{x/3}\sin 2x$, $|x| \le 2$

11.10. Hatványsorok alkalmazása

Ebben a fejezetben megismerkedünk a binomiális sorokkal, amelyeknek a segítségével – többek között – hatványok és gyökök is közelíthetők. Megmutatjuk, hogy végtelen sorokkal bizonyos kezdetiérték-problémák is megoldhatók, kiszámíthatók nem elemi integrálok és bizonyos, határozatlan alakú határértékek. Meghatározzuk az arctg x függvény Taylor-sorát, az alfejezet végén pedig egy táblázatban összegyűjtjük a leggyakrabban használt sorokat.

Binomiális sorok hatványokhoz és gyökökhöz

Legyen m állandó. Az $f(x) = (1+x)^m$ függvény Taylor-sora:

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k + \ldots \tag{11.23}$$

Ez a sor – **binomiális sornak** nevezzük – minden $|x| < 1$ esetén abszolút konvergens. A sor levezetéséhez először lássuk a deriváltakat:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^m \\ f'(x) &= m(1+x)^{m-1} \\ f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2} \\ f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n} \end{aligned}$$

Ezután nincs más teendőnk, mint az $x = 0$ esetben a kapott eredményeket behelyettesíteni a (11.23) képletbe.

Ha m nemnegatív egész szám, akkor a sor $m+1$ tagból áll, $k = m+1$-től kezdve ugyanis valamennyi együttható nulla.

Minden más n-nel végtelen sort kapunk, amelynek konvergenciaintervalluma $(-1,1)$. Ezt a következőképpen láthatjuk be. Legyen u_k az x^k-t tartalmazó tag. A hányadoskritériumot alkalmazzuk:

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{m-k}{k+1}x\right| \to |x|, \text{ amint } k \to \infty.$$

A binomiális sort tehát az $(1+x)^m$ függvény generálja, a sor minden $|x| < 1$ esetén konvergens. A gondolatmenetből nem következik, hogy a sor valóban $(1+x)^m$-hez konvergál – de ez így van, fogadjuk el bizonyítás nélkül.

A binomiális sor

Minden $-1 < x < 1$ esetén

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k,$$

ahol

$$\binom{m}{1} = m, \quad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!} \quad \text{és} \quad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}.$$

1. PÉLDA: **A binomiális sor alkalmazása**

Ha $m = -1$, akkor

$$\binom{-1}{1} = -1, \quad \binom{-1}{2} = \frac{(-1)\cdot(-2)}{2!} = 1$$

és

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-1-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{k!}{k!} = (-1)^k.$$

Ezekkel az együtthatókkal, és x helyében $-x$-szel, a binomiális sor a jól ismert mértani sor:

$$(1+x)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^k x^k + \ldots. \qquad \square$$

2. PÉLDA: **A binomiális sor alkalmazása**

A 3.8. alfejezet 1. példájából tudjuk, hogy elegendően kicsi x-ek esetén $\sqrt{1+x} \approx$ $\approx 1 + (x/2)$. Az $m = 1/2$ esetben a binomiális sorból további – másod-, harmadfokú stb. – közelítéseket is kaphatunk. A hibát az alternáló sorok közelítésére vonatkozó tétel alapján adhatjuk meg:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 + \\ + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!}x^4 + \ldots = \\ = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \ldots$$

Helyettesítéssel további hasznos közelítéseket kapunk:

$$\sqrt{1-x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}, \qquad \text{ha } |x^2| \text{ elég kicsi}$$

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}} \approx 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2}, \qquad \text{ha } \left|\frac{1}{x}\right| \text{ kicsi, azaz ha } |x| \text{ nagy.}$$ □

Differenciálegyenletek és hatványsorok

Ha nem sikerül viszonylag egyszerű alakban felírnunk egy kezdetiérték-probléma vagy egy differenciálegyenlet megoldását, más módon is közelíthetünk a megoldáshoz. Az egyik lehetőség az, ha a megoldást megkíséreljük hatványsor alakban felírni. Ha ez járható út, akkor egyúttal a megoldásfüggvény polinomiális közelítése is rendelkezésünkre áll, márpedig az esetek jelentős részében ennél többre nincs is szükségünk. A 3. példában egy, a 9.2. alfejezetben megismert módszerrel is megoldható elsőrendű lineáris differenciálegyenlettel foglalkozunk. Kiderül, hogy hatványsorok segítségével a feladat akkor is megoldható, ha a szóban forgó módszert nem ismerjük. A 4. példa egyenlete a korábban megismert eszközökkel nem is oldható meg.

3. PÉLDA: **Kezdetiérték-probléma megoldása hatványsorral**

Oldjuk meg az

$$y' - y = x, \; y(0) = 1$$

kezdetiérték-feladatot!

Megoldás: Feltesszük, hogy a megoldás

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n + \ldots \tag{11.24}$$

alakú. A célunk az, hogy olyan a_k együtthatókat találjunk, amelyekkel a sor és annak

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots \tag{11.25}$$

deriváltja kielégíti a kitűzött egyenletet. Az $y' - y$ sort a (11.24) és a (11.25) egyenlőségek különbségeként kaphatjuk meg:

$$y' - y = (a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + (na_n - a_{n-1})x^{n-1} + \ldots. \tag{11.26}$$

Ha y kielégíti az $y' - y = x$ egyenletet, akkor a (11.26) egyenlet jobb oldalának x-szel kell egyenlőnek lennie. Mivel egy függvény hatványsor-reprezentációja egyértelmű (11.7. alfejezet, 45. feladat), azért a (11.26)-beli együtthatókra teljesülniük kell az alábbi egyenlőségeknek:

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &= 0 \\ a_2 - a_1 &= 1 \\ 3a_3 - a_2 &= 0 \\ &\vdots \\ na_n - a_{n-1} &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

A (11.24) egyenlet alapján az is nyilvánvaló, hogy az $x = 0$ esetben $y = a_0$, amiből $a_0 = 1$. Mindezek alapján:

$$a_0 = 1, \; a_1 = a_0 = 1, \qquad a_2 = \frac{1 + a_1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1,$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{3!} \ldots, \qquad a = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{2}{n!}.$$

A kiszámított együtthatókkal:

$$y = 1 + x + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots + 2 \cdot \frac{x^n}{n!} + \ldots =$$
$$= 1 + x + 2 \cdot \underbrace{\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \right)}_{\text{az } e^x - x - 1 \text{ függvény Taylor-sora}} =$$
$$= 1 + x + 2(e^x - 1 - x) = 2e^x - 1 - x.$$

A kezdetiérték-probléma megoldása az $y = 2e^x - 1 - x$.

Ellenőrizzük a megoldást:

$$y(0) = 2e^0 - 1 - 0 = 2 - 1 = 1$$

és

$$y' - y = (2e^x - 1) - (2e^x - 1 - x) = x. \qquad \square$$

4. PÉLDA: **Differenciálegyenlet megoldása**

Keressük meg az

$$y'' + x^2 y = 0 \tag{11.27}$$

differenciálegyenlet hatványsoros megoldását!

Megoldás: Újfent feltesszük, hogy a megoldás

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n + \ldots \tag{11.28}$$

alakú. Olyan a_k együtthatókat keresünk, amelyekkel a (11.28) sor és annak

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \ldots \tag{11.29}$$

kielégítse a (11.27) egyenletet. Az $x^2 y$ sor a (11.28) egyenlet jobb oldalának x^2-szerese:

$$x^2 y = a_0 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^5 + \ldots + a_n x^{n+2} + \ldots. \tag{11.30}$$

Az $y'' + x^2 y$ függvény hatványsora a (11.29)- és (11.30)-beli sorok összege:

$$y'' + x^2 y = 2a_2 + 6a_3 x + (12a_4 + a_0)x^2 + (20a_5 + a_1)x^3 + \\ + \ldots + (n(n-1)a_n + a_{n-4})x^{n-2} + \ldots. \tag{11.31}$$

Vegyük észre, hogy a (11.30) egyenletben x^{n-2} együtthatója a_{n-4}. Ha y és y'' kielégíti a (11.27) egyenletet, akkor a jobb oldalon szereplő valamennyi együttható nulla:

$$2a_2 = 0, \quad 6a_3 = 0, \quad 12a_4 + a_0 = 0, \quad 20a_5 + a_1 = 0, \tag{11.32}$$

és minden $n \geq 4$ esetén

$$n(n-1)a_n + a_{n-4} = 0. \tag{11.33}$$

A (11.28) egyenlőség alapján

$$a_0 = y(0) \text{ és } a_1 = y'(0).$$

Másszóval, a sor első két együtthatója az y, illetve az y' függvény $x = 0$ helyen felvett értéke, ha pedig a_0-t és a_1-et ismerjük, akkor a (11.32) alatti egyenletek és a (11.33) rekurziós képletek alapján valamennyi együttható kiszámítható.

A (11.32) első két egyenletéből:

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0.$$

A (11.33) egyenlet szerint tetszőleges n-re: ha $a_{n-4} = 0$, akkor $a_n = 0$, ennélfogva

$$a_6 = 0, \quad a_7 = 0, \quad a_{10} = 0, \quad a_{11} = 0.$$

Általában pedig: ha az n index $4k+2$ vagy $4k+3$ alakú, akkor $a_n = 0$. A többi együttható az

$$a_n = \frac{-a_{n-4}}{n(n-1)}$$

összefüggés alapján határozható meg, így tehát

$$a_4 = \frac{-a_0}{4\cdot 3},\quad a_8 = \frac{-a_4}{8\cdot 7} = \frac{a_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8},\quad a_{12} = \frac{-a_8}{11\cdot 12} = \frac{-a_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12}$$

és

$$a_5 = \frac{-a_1}{5\cdot 4},\quad a_9 = \frac{-a_5}{9\cdot 8} = \frac{a_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9},\quad a_{13} = \frac{-a_9}{12\cdot 13} = \frac{-a_0}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13}.$$

A megoldást legegyszerűbben két sor összegeként írhatjuk fel, az egyik minden tagját a_0-lal, a másik minden tagját a_1-gyel kell megszoroznunk:

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} - \frac{x^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12} + \ldots\right) +$$
$$+ a_1\left(x - \frac{x^5}{4\cdot 5} + \frac{x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \frac{x^{13}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13} + \ldots\right).$$

Mindkét sor abszolút konvergens, amint az a hányadoskritérium alapján könnyen belátható. □

Nemelemi integrálok kiszámítása

Taylor-sorok segítségével nemelemi integrálok értékét is meghatározhatjuk. Az $\int \sin x^2 dx$ és hasonló integrálok a fénytörés elméletében játszanak szerepet.

5. PÉLDA:

Adjuk meg az $\int \sin x^2 dx$ integrált hatványsor alakban.

Megoldás: A $\sin x$ Taylor-sorából

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} - \ldots,$$

amiből

$$\int \sin x^2 dx = C + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \frac{x^{19}}{19\cdot 9!} - \ldots.$$ □

6. PÉLDA: **Határozott integrál közelítő értéke**

Számítsuk ki az $\int_0^1 \sin x^2 dx$ integrál értékét 0,001 pontossággal.

Megoldás: Az előző példa alapján:

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \frac{1}{15\cdot 7!} + \frac{1}{19\cdot 9!} - \ldots.$$

Alternáló sort kaptunk. Némi kísérletezés után megállapíthatjuk, hogy az első, 0,001-nél kisebb tag

$$\frac{1}{11\cdot 5!} \approx 0{,}00076.$$

A keresett közelítés tehát az előző két tag összege:

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} \approx 0{,}310.$$

Ha két további tagot is figyelembe veszünk, akkor a 10^{-6} pontosságú

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx 0{,}310268$$

közelítést kapjuk, újabb két taggal pedig az

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} + \frac{1}{6894720} \approx 0{,}310268303$$

közelítést, amelynek hibája körülbelül $1{,}08 \cdot 10^{-9}$. A trapézszabály alkalmazásával ilyen pontossághoz körülbelül 8000 részintervallumot kellene figyelembe vennünk. □

Arkusztangens

A 11.7. alfejezetben az arctg függvény Taylor-sorát az $1/(1+x^2)$ függvény hatványsora alapján határoztuk meg. Mivel

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots,$$

ezért tagonkénti integrálással

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

A végtelen sorok tagonkénti integrálhatóságáról szóló tételt mindazonáltal nem bizonyítottuk be, most a sort a *véges*

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} \tag{11.34}$$

formula integrálásával állítjuk elő, amelyben az utolsó tagot annak a mértani sornak az összegeként írtuk fel, amelynek első tagja $a = (-1)^{n+1} t^{2n+2}$, hányadosa pedig $r = -t^2$. A (11.34) egyenlőség mindkét oldalát $t = 0$-tól $t = x$-ig integrálva:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x),$$

ahol

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

Az integrandus nevezője nem kisebb, mint 1, ennélfogva

$$|R_n(x)| \le \int_0^{|x|} t^{2n+2} dt = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

Ha $|x| \le 1$, akkor az egyenlőtlenség jobb oldala $n \to \infty$ esetén nullához tart, így amennyiben $|x| \le 1$, úgy $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ és

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \le 1$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \quad |x| \le 1. \tag{11.35}$$

A Taylor-sor közvetlen felírásában az arctg$x$ függvény igencsak nehezen kezelhető magasabb rendű deriváltjai okoztak volna nehézséget. A (11.35) egyenlőségbe $x = 1$-et helyettesítve a **Leibniz-formulát** kapjuk:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \ldots.$$

Mivel ez a sor meglehetősen lassan konvergál, a π pontos értékének kiszámítására nem használják. Az arctg$x$ függvény Taylor-sora 0-hoz közeli x-ek esetén konvergál gyorsan. Ha a π kiszámításához mégis ezt a sort akarjuk felhasználni, akkor célszerű, ha néhány trigonometrikus azonosságot is csatasorba állítunk.

Ha például

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \text{ és } \beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{3},$$

akkor

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{1/2+1/3}{1-1/6} = 1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4},$$

amiből

$$\frac{\pi}{4} = \alpha + \beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$$

A (11.35) egyenletből $x = 1/2$ helyettesítéssel kiszámítható arctg$(1/2)$, $x = 1/3$-dal pedig arctg$(1/3)$, π a kettő összegének négyszerese.

Határozatlan alakok kiszámítása

A Taylor-sorok gyakran a határozatlan (például $0/0$ alakú) határértékek meghatározásában is segítségünkre vannak.

7. PÉLDA: Határérték meghatározása Taylor-sorral

Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$$

határértéket!

Megoldás: Írjuk fel az $\ln x$ függvény $x = 1$-hez tartozó Taylor-sorát. Ezt közvetlenül, a deriváltak kiszámításával is megtehetjük, de megfelel az is, ha az $\ln(1+x)$ függvénynek a 11.7. alfejezet 7. példájában meghatározott Taylor-sorában x helyébe $x-1$-et helyettesítünk. Akár így járunk el, akár úgy, az eredmény:

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \ldots,$$

amiből

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \ldots\right) = 1. \qquad \square$$

8. PÉLDA: Határérték meghatározása Taylor-sorral

Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$$

határértéket!

Megoldás: A $\sin x$ és a tg$x$ Taylor-sorának első három tagja:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \quad \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots.$$

Ezekből:

$$\sin x - \operatorname{tg} x = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{8} - \ldots = x^3\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \ldots\right)$$

és

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{8}-\dots\right)=-\frac{1}{2}. \qquad \square$$

Ha a $\lim_{x\to 0}(1/\sin x-1/x)$ határértéket Taylor-sorok segítségével határozzuk meg, akkor – amúgy mellékesen – a $\csc x$-re is találunk egy remek közelítő formulát.

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots+x^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\dots+x^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \qquad |x|<1$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \qquad |x|<\infty$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |x|<\infty$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad |x|<\infty$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, \qquad -1<x\le 1$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\operatorname{arctg}x=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x|<1$$

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x|\le 1$$

Binomiális sor:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k, \qquad |x|<1, \text{ ahol}$$

$$\binom{m}{1}=m, \quad \binom{m}{2}=\frac{m(m-1)}{2!}, \quad \binom{m}{k}=\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}, \text{ ha } k\ge 3$$

11.1. TÁBLÁZAT: Gyakran előforduló Taylor-sorok
MEGJEGYZÉS: Annak érdekében, hogy a binomiális sor képlete a lehető legegyszerűbb legyen, $\binom{m}{0}$ definíció szerint 1, és $x^0=1$ még az (általában kizárt) $x=0$ esetben is, így $(1+x)^m=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k$. Ha m pozitív egész, akkor a sorban nincs m-nél nagyobb kitevőjű x-hatvány, és minden x esetén konvergens.

9. PÉLDA: **A $\csc x$ függvény közelítő képlete**

Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$$

határértéket!

Megoldás:

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)}{x\cdot\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)}=$$

$$=\frac{x^3\left(\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\ldots\right)}{x^2\left(1-\frac{x^2}{3!}+\ldots\right)}=x\cdot\frac{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\ldots}{1-\frac{x^2}{3!}+\ldots}.$$

Ennek alapján:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\ldots}{1-\frac{x^2}{3!}+\ldots}\right)=0.$$

A jobb oldali törtből azt kapjuk, hogy kicsiny abszolútértékű x-ek esetén:

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\approx x\frac{1}{3!}=\frac{x}{6},\quad\text{azaz}\quad \csc x\approx\frac{1}{x}+\frac{x}{6}.$$ □

11.10. Feladatok

Binomiális sorok

Írjuk fel a megadott függvények binomiális sorának első négy tagját (1–10. feladatok)!

1. $(1+x)^{1/2}$ **2.** $(1+x)^{1/3}$ **3.** $(1-x)^{-1/2}$

4. $(1-2x)^{1/2}$ **5.** $\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-2}$ **6.** $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2}$

7. $(1+x^3)^{-1/2}$ **8.** $(1+x^2)^{-1/3}$

9. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}$ **10.** $\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1/3}$

Írjuk fel a megadott függvények binomiális sorának első négy tagját (10–14. feladatok)!

11. $(1+x)^4$ **12.** $(1+x^2)^3$

13. $(1-2x)^3$ **14.** $\left(1-\frac{x}{2}\right)^4$

Kezdetiérték-feladatok

Hatványsorok segítségével oldjuk meg a kezdetiérték-feladatokat (15–32. feladatok)!

15. $y'+y=0,\quad y(0)=1$

16. $y'-2y=0,\quad y(0)=1$

17. $y'-y=1,\quad y(0)=0$

18. $y'+y=1,\quad y(0)=2$

19. $y'-y=x,\quad y(0)=0$

20. $y'+y=2x,\quad y(0)=-1$

21. $y'-xy=0,\quad y(0)=1$

22. $y'-x^2y=0,\quad y(0)=1$

23. $(1-x)y'-y=0,\quad y(0)=2$

24. $(1+x^2)y'+2xy=0,\quad y(0)=3$

25. $y''-y=0,\quad y'(0)=1,\quad y(0)=0$

26. $y''+y=0,\quad y'(0)=0,\quad y(0)=1$

27. $y''+y=x,\quad y'(0)=1,\quad y(0)=2$

28. $y''-y=x,\quad y'(0)=2,\quad y(0)=-1$

29. $y''-y=-x,\quad y'(2)=-2,\quad y(2)=0$

30. $y''-x^2y=0,\quad y'(0)=b,\quad y(0)=a$

31. $y''+x^2y=x,\quad y'(0)=b,\quad y(0)=a$

32. $y''-2y'+y=0,\quad y'(0)=1,\quad y(0)=0$

Közelítő értékek

Sorok segítségével adjunk 10^{-3} pontosságú becslést 33–36. feladatokban szereplő határozott integrálokra! [A megoldásokban az öt tizedesre pontos értékeket adtuk meg.]

33. $\int_0^{0,2}\sin x^2\,dx$ **34.** $\int_0^{0,2}\frac{e^{-x}-1}{x}\,dx$

35. $\int_0^{0,1}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$ **36.** $\int_0^{0,25}\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$

Sorok segítségével adjunk 10^{-8} pontosságú becslést a 37–40. feladatokban szereplő határozott integrálokra!

37. $\int_0^{0,1}\frac{\sin x}{x}\,dx$ **38.** $\int_0^{0,1}e^{-x^2}\,dx$

39. $\int_0^{0,1}\sqrt{1+x^4}\,dx$ **40.** $\int_0^{1}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$

41. Becsüljük meg, mekkora a közelítés hibája, ha $\cos t^2$ helyett $1-\frac{t^4}{2}+\frac{t^8}{4!}$-sal számolunk az $\int_0^1\cos t^2\,dt$ integrálban!

42. Becsüljük meg, mekkora a közelítés hibája, ha $\cos\sqrt{t}$ helyett $1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4!}-\frac{t^3}{6!}$-sal számolunk az $\int_0^1\cos\sqrt{t}t\,dt$ integrálban!

Keressünk olyan polinomot, amely az $F(x)$ függvényt a megadott intervallumon 10^{-3}-nál kisebb hibával közelíti (43–46. feladatok)!

43. $F(x)=\int_0^x\sin t^2\,dt,\qquad [0,1]$

44. $F(x)=\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$, $[0,1]$

45. $F(x)=\int_0^x \operatorname{arctg} t\,dt$, **(a)** $[0;0{,}5]$, **(b)** $[0,1]$

46. $F(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}dt$, **(a)** $[0;0{,}5]$, **(b)** $[0,1]$

Határértékek kiszámítása

Sorok segítségével számítsuk ki a határértékeket (47–56. feladatok)!

47. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2}$

48. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$

49. $\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t-(t^2/2)}{t^4}$

50. $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta-\theta+(\theta^3/6)}{\theta^5}$

51. $\lim_{y\to 0}\frac{y-\operatorname{arctg} y}{y^3}$

52. $\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{arctg} y-\sin y}{y^3\cos y}$

53. $\lim_{x\to\infty} x^2\left(e^{-1/x^2}-1\right)$

54. $\lim_{x\to\infty}(x+1)\sin\frac{1}{x+1}$

55. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$

56. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\ln(x-1)}$

További példák és feladatok

A továbbiakban feltesszük, hogy hacsak mást nem mondunk, akkor mindig 0 körüli hatványsort tekintünk.

57. Ha az $\ln(1+x)$ függvény Taylor-sorában x helyébe $-x$-et helyettesítünk, akkor megkapjuk az $\ln(1-x)$ Taylor-sorát. Vonjuk ki az utóbbi sort az előbbiből – ezzel igazoljuk, hogy minden $|x|<1$ esetén

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right).$$

58. Az $\ln(1+x)$ függvény Taylor-sorának hány tagját kell figyelembe vennünk $\ln 1{,}1$-nek 10^{-8} pontosságú meghatározásához? Válaszunkat indokoljuk!

59. Az alternáló sorok közelítésére vonatkozó tétel alapján mondjuk meg, hány tagot kell az $\operatorname{arctg} x$ függvény Taylor-sorából figyelembe vennünk $\pi/4$ értékének 10^{-3} pontosságú kiszámításához?

60. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x)=\operatorname{arctg} x$ függvény Taylor-sora minden $|x|>1$ esetén divergens!

T 61. **π közelítése:** Körülbelül hány tagot kell az $\operatorname{arctg} x$ függvény Taylor-sorából figyelembe vennünk ahhoz, hogy a

$$\pi=48\operatorname{arctg}\frac{1}{48}+32\operatorname{arctg}\frac{1}{57}-20\operatorname{arctg}\frac{1}{239}$$

képlet hibája 10^{-6}-nál kisebb legyen? Összehasonlításképpen: a $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ sor olyan lassan konvergál $\pi^2/6$-hez, hogy az első 50 tag is csupán két tizedesre pontos közelítést ad.

62. Adjuk meg az $\ln\sec x$ Taylor-sorának első három nemnulla tagját a $\operatorname{tg} t$ függvény Taylor-sora első három nemnulla tagjának 0-tól x-ig vett integrálja alapján!

63. **(a)** A binomiális sort és a $\frac{d}{dx}\arcsin x=(1-x^2)^{-1/2}$ összefüggést felhasználva határozzuk meg $\arcsin x$ Taylor-sorának első négy nemnulla tagját! Mi a sor konvergenciasugara?

(b) **Az arccos Taylor-sora:** A feladat (a) része alapján írjuk fel $\arccos x$ Taylor-sorának első öt nemnulla tagját!

64. **(a)** **Az arsh Taylor-sora:** Határozzuk meg az

$$\operatorname{arsh} x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

függvény Taylor-sorának első négy nemnulla tagját!

T (b) A feladat (a) részére adott megoldásunkban az első *három* tag alapján becsüljük meg $\operatorname{arsh} 0{,}25$ értékét! Adjunk felső korlátot a becslés hibájára!

65. Határozzuk meg $1/(1+x^2)$ Taylor-sorát $-1/(1+x)$ Taylor-sora alapján!

66. Az $1/(1-x^2)$ függvény Taylor-sorát felhasználva írjunk fel egy, a $2x/(1-x^2)^2$ függvényhez közelítő sort!

T 67. **π becslése:** Wallis fedezte fel a

$$\frac{\pi}{4}=\frac{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot\ldots}{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot\ldots}$$

formulát. Határozzuk meg π értékét ennek alapján, két tizedes pontossággal!

T 68. Számítsuk ki az $1,2,\ldots,10$ számok természetes alapú logaritmusát az 57. feladat képletét, valamint az $\ln 4=\ln 2+\ln 2$, $\ln 6=\ln 2+\ln 3$, $\ln 8=3\ln 2$, $\ln 9=2\ln 3$ és $\ln 10=\ln 2+\ln 5$ összefüggéseket használva! Kezdjük azzal, hogy az 57. feladat képletében x helyébe az

$$\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{9},\frac{1}{13}$$

számokat írjuk!

69. **Sor az arcsin függvényhez:** Az $(1-x^2)^{-1/2}$ binomiális sor integrálásával igazoljuk, hogy minden $|x|<1$ esetén

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

70. **Sor az $\operatorname{arctg} x$ függvényhez az $|x|>1$ esetre:** Bár semmilyen idevonatkozó tételt nem tanultunk, az

$$\frac{1}{1+t^2}=\frac{1}{t^2}\frac{1}{1+(1/t^2)}=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^6}-\frac{1}{t^8}+\ldots$$

sor integrálásával vezessük le, hogy $x>1$ esetén

$$\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\ldots,$$

ha pedig $x<-1$, akkor

$$\operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\ldots.$$

71. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}(2/n^2)$**:**

(a) A két szög különbségének tangensére vonatkozó azonosság alapján igazoljuk, hogy

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}(n-1)\right)=\frac{2}{n^2}.$$

(b) Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{n=1}^{N}\operatorname{arctg}\frac{2}{n^2}=\operatorname{arctg}(N+1)+\operatorname{arctg}N-\frac{\pi}{4}.$$

(c) Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}(2/n^2)$ összeget!

11.11. Fourier-sorok

Megismerkedtünk azzal, hogy miként lehet egy f függvényt egyszerűen számítható (csak összeadást, szorzást, osztást igénylő) függvényekkel, azaz polinomokkal közelíteni. A Taylor-polinomok egy adott $x = a$ pont környékén meglehetősen pontos közelítést adnak, attól távolodva azonban a hiba elég nagy is lehet. Egy másik, Jean Baptiste Joseph Fourier (1766–1830) francia matematikus által kidolgozott módszer a fizikailag szintén könnyen realizálható trigonometrikus függvények segítségével állít elő, ill. közelít periodikus függvényeket. Ez nagyobb intervallumokon is jó közelítést ad, ráadásul – a Taylor-módszerrel szemben – nemfolytonos függvényekre is alkalmazható. A módszer, amelynek lényege, hogy a függvényeket szinusz- és koszinuszfüggvények összegével reprezentáljuk, kiválóan alkalmas periodikus függvények – például rádiójelek, vagy váltakozó áramot leíró függvények – közelítésére, alkalmazzuk a hőterjedés elméletében és számos mérnöki probléma megoldásában is.

Tegyük fel tehát, hogy a $[0, \pi]$ zárt intervallumon értelmezett f függvényt egy szinusz- és koszinuszfüggvényekből álló összeggel kívánjuk közelíteni:

$$f_n(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 sinx) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

vagy zárt alakban:

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{11.36}$$

Az $a_1, a_1, a_2, \ldots, a_n$ és a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ konstansok megválaszthatók úgy, hogy $f_n(x)$ az $f(x)$ függvény „lehető legjobb" közelítése legyen. Mit értünk azon, hogy „lehető legjobb"? Ebben a kontextusban a következőket:

1. $f_n(x)$ és $f(x)$ határozott integráljai 0-tól 2π-ig egyenlőek;

2. minden $k = 1, \ldots, n$ esetén $f_n(x) \cos kx$ és $f(x) \cos kx$ határozott integrálja 0-tól 2π-ig egyenlő;

3. minden $k = 1, \ldots, n$ esetén $f_n(x) \sin kx$ és $f(x) \sin kx$ határozott integrálja 0-tól 2π-ig egyenlő.

Ez tehát összesen $2n + 1$ feltétel:

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx,$$

$$\int_0^{2\pi} f_n(x) \cos kx \, dx = \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$\int_0^{2\pi} f_n(x) \sin kx \, dx = \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx, \qquad k = 1, \ldots, n$$

Az egyenlőségeket kielégítő $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ és a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ konstansokat a következők szerint választjuk ki. A (11.36) egyenlet mindkét oldalát 0-tól 2π-ig integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)dx = 2\pi a_0,$$

elvégre $k \geq 0$ esetén $\cos kx$ és $\sin kx$ integrálja a $[0, 2\pi]$ intervallumon 0, f_n integráljához tehát csak a konstans tagnak lehet nemnulla hozzájárulása. A folytatás

hasonlóan megy. A (11.36) egyenlőség mindkét oldalát $\cos x$-szel megszorozva, majd 0-tól 2π-ig integrálva az

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)\cos x\,dx = \pi a_1,$$

egyenlőséget kapjuk, hiszen egyrészt

$$\int_0^{2\pi} \cos px\,\cos px\,dx = \pi,$$

másrészt

$$\int_0^{2\pi} \cos px\,\cos qx\,dx = \int_0^{2\pi} \cos px\,\sin mx\,dx = \int_0^{2\pi} \sin px\,\sin qx\,dx = 0$$

tetszőleges $p \neq q$ és m egész számok esetén (9–13. feladatok). Ha pedig az integrálás előtt (11.36) mindkét oldalát $\sin x$-szel szorozzuk meg, akkor az eredmény:

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)\sin x\,dx = \pi b_1.$$

Az eljárást a

$$\cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\cos nx,\sin nx$$

tényezőkkel folytatva, a szorzat integrálásakor egy kivétellel minden tag eltűnik. Így a következőket kapjuk:

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)\,dx = 2\pi a_0$$

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)\cos kx\,dx = \pi a_k, \quad k = 1,\ldots,n$$

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)\sin kx\,dx = \pi b_k, \quad k = 1,\ldots,n.$$

Azt akarjuk, hogy az iménti egyenlőségek f_n helyében f-fel is fennáljanak, így az $a_0, a_1 \ldots, a_n, b_1 \ldots, b_n$ együtthatók meghatározására a fenti egyenleteket használjuk fel:

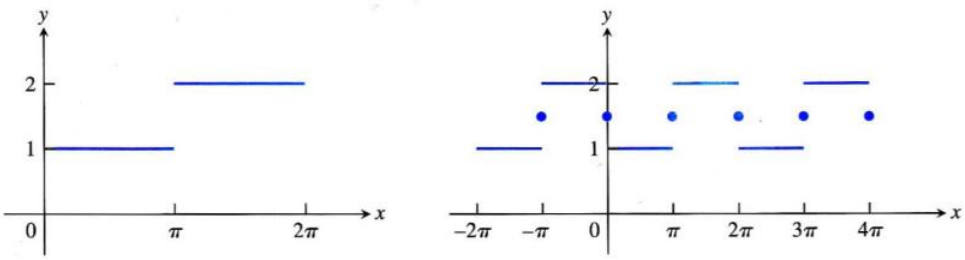
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \tag{11.37}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad k = 1,\ldots,n \tag{11.38}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad k = 1,\ldots,n. \tag{11.39}$$

Az együtthatók tehát minden olyan esetben meghatározhatók, amikor a szóban forgó integrálok léteznek. Amennyiben $n \to \infty$, akkor a módszert követve egy végtelen sort kapunk; ezt a sort nevezzük az $f(x)$ függvény Fourier-sorának:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$



11.16. ÁBRA: (a) Az

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 1 \le x \le \pi, \\ 2, & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$$

lépcsős függvény. (b) A lépcsős függvény Fourier-sora periodikus, a szakadási pontokban a függvényérték 3/2 (1. példa).

Ez az összeg, ha létezik, periodikus függvényt ad.

1. PÉLDA: **Fourier-sorfejtés**

Olyan függvényeknek is létezik Fourier-sora, amelyek Taylor-sorral nem reprezentálhatók. Ilyen például a 11.16. ábra (a) részén tanulmányozható „lépcsős függvény", amelynek hozzárendelési szabálya:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 1 \le x \le \pi, \\ 2 & \pi < x \le 2\pi. \end{cases}$$

Az f függvény Fourier-sorának együtthatóit a (11.37), (11.38) és (11.39) összefüggések alapján határozzuk meg:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2\,dx\right) = \frac{3}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \cos kx\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2\cos kx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) = 0, \qquad k \ge 1$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx =$$

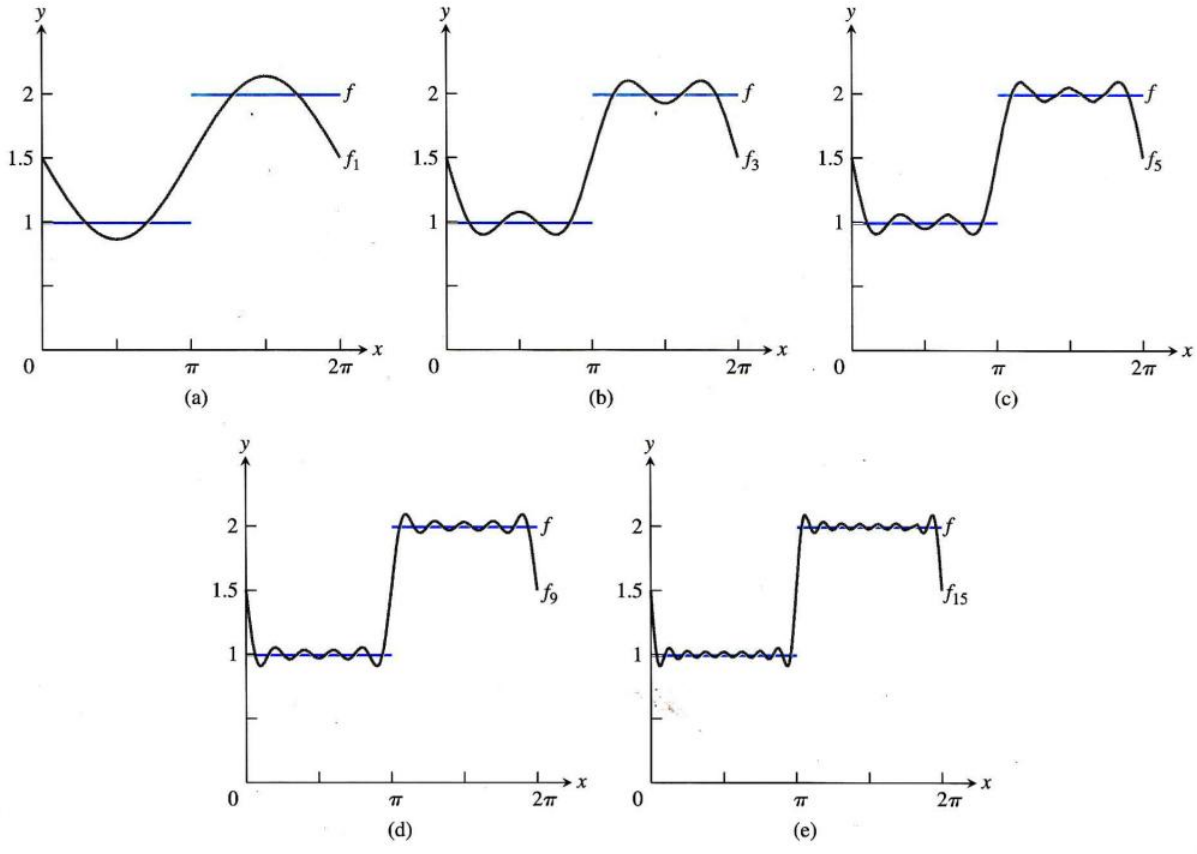
$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin kx\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2\sin kx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} + \left[-\frac{2\cos kx}{k}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{\cos k\pi - 1}{k\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{k\pi}.$$

Eszerint

$$a_0 = \frac{3}{2}, a_1 = a_2 = \ldots = 0$$



11.17. ÁBRA: Az $f(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } 0\le x\le\pi\\ 2, & \text{ha } \pi<x\le 2\pi\end{cases}$ függvény és Fourier-közelítése az f_1, f_3, f_5, f_9 és f_{15} függvényekkel.

és

$$b_1=-\frac{2}{\pi},\ b_2=0,\ b_3=-\frac{2}{3\pi},\ b_4=0,\ b_5=-\frac{2}{5\pi},\ b_6=0\ldots,$$

a keresett Fourier-sor pedig

$$\frac{3}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right).$$

Az $x=\pi$ helyen, ahol az f függvény 1-ről 2-re ugrik, a szinuszos tagok mind eltűnnek, a sor összegét itt a $3/2$ konstans tag határozza meg. Ugyanennyi a Fourier-sor összege az $x=0$ és az $x=2\pi$ helyen is. Általában, mivel a Fourier-sor minden tagja periodikus függvény (2π valamennyinek periódusa), az összeg is az, így $x+2\pi$-nél a függvényérték mindig ugyanannyi, mint x-nél. A kapott Fourier-sor tehát 2π szerint periodikus, minden valós számon értelmezett függvény. A függvény az $x=n\pi$ ($n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$) pontokban nem folytonos, ezeken a helyeken a függvényérték a bal- és jobb oldali határértékek számtani közepe. A sor első néhány részletösszegét a 11.17. ábrán tanulmányozhatjuk. □

A Fourier-sorok konvergenciája

Mivel Taylor-sorokat egy függvény, valamint a függvény deriváltjainak valamely $x=a$ pontbeli értékei alapján határoztuk meg, a módszer szakadásos függvényekre (például az 1. példa ugrásfüggvényére) nem alkalmazható. A Fourier-sor mindazonáltal ilyenkor is felírható, ez ugyanis nem a függvény egyetlen pontbeli viselkedésétől, hanem bizonyos, adott intervallumon vett *integráloktól* függ. Annak pedig, hogy egy függvény integrálható legyen, a simaság nem feltétele – akár szakadásos függvények is lehetnek integrálhatók.

A Fourier-sor együtthatóit úgy határoztuk meg, hogy az f_n és az f függvény különbsége négyzetének

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - f_n(x)]^2 \, dx$$

integrálja minimális legyen. A Taylor-sorok a függvényeket általában egy adott pont közvetlen környezetében közelítik a legjobban, a Fourier-sorok viszont egy egész intervallumon minimalizálják a hibát.

Bizonyítás nélkül közöljük a Fourier-sorok konvergenciájára vonatkozó tételt. A tételben szereplő **szakaszos folytonosság** definíciója a következő: az f függvény az I intervallumon szakaszosan folytonos, ha I-n csak véges sok szakadási pontja van, és ezek mindegyikében mind a jobb, mind a bal oldali határérték létezik (lásd 5. fejezet végén szereplő, az anyag alaposabb elsajátítását segítő 11–18. feladatokat).

24. TÉTEL:

Tegyük fel, hogy mind az f, mind az f' függvény szakaszosan folytonos a $[0, 2\pi]$ intervallumon. Ekkor minden olyan x pontban, amelyben f folytonos, $f(x)$ a Fourier-sor összegével egyenlő. Ha c szakadási pont, akkor a Fourier-sor c-nél az $f(c^+)$ jobb oldali és az $f(c^-)$ bal oldali határérték

$$\frac{f(c^+) + f(c^-)}{2}$$

számtani közepéhez konvergál.

11.11. Feladatok

Fourier-sorok

Írjuk fel a megadott függvények Fourier-sorát! Vázoljuk a függvények grafikonját is (1–8. feladatok)!

1. $f(x) = 1, \ 0 \le x \le 2\pi$

2. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi, \\ -1, & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

3. $f(x) = x \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi, \\ x - 2\pi, & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

5. $f(x) = e^x, \ 0 \le x \le 2\pi$

6. $f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le \pi, \\ -x, & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

További példák és feladatok

Igazoljuk az összefüggéseket (9–13. feladatok; p és q pozitív egészek)!

9. $\int_0^{2\pi} \cos px \, dx = 0$ minden p-re.

10. $\int_0^{2\pi} \sin px \, dx = 0$ minden p-re.

11. $\int_0^{2\pi} \cos px \cos qx \, dx = \begin{cases} 0, \text{ha } p \ne q \\ \pi, \text{ha } p = q \end{cases}$

(*Útmutatás:* használjuk fel a $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(A - B)]$ azonosságot.)

12. $\int_0^{2\pi} \sin px \sin qx \, dx = \begin{cases} 0, \text{ha } p \ne q \\ \pi, \text{ha } p = q \end{cases}$

(*Útmutatás:* használjuk fel a $\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$ azonosságot.)

13. $\int_0^{2\pi} \sin px \cos qx = 0$ minden p és q esetén.

(*Útmutatás:* használjuk fel a $\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A + B) + \sin(A - B)]$ azonosságot.)

14. Két függvény összegének Fourier-sora: Igaz-e, hogy ha f és g egyaránt teljesítik a 24. Tétel feltételeit, akkor az $f + g$ függvény Fourier-sora a tagok Fourier-sorainak összege? Válaszunkat indokoljuk!

15. Fourier-sor tagonkénti deriválása:

(a) A 24. Tétel alapján bizonyítsuk be, hogy a 3. feladatbeli $f(x)$ függvény Fourier-sora minden $0 < x < \pi$ esetén $f(x)$-hez konvergál!

(b) Mutassuk meg, hogy a sor tagonkénti deriválásával kapott sor divergens (annak ellenére, hogy az eredeti f függvény deriválható, és deriváltja mindenütt 1)!

16. A 24. Tétel alapján adjuk meg a 4. feladatbeli Fourier-sor összegét, és igazoljuk, hogy $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

11. fejezet Áttekintő kérdések

1. Mit nevezünk sorozatnak? Mit jelent az, hogy egy sorozat konvergens, illetve divergens? Adjunk példákat!

2. Mikor nevezünk egy sorozatot növekvőnek? Milyen feltételek mellett van egy növekvő sorozatnak határértéke? Adjunk példákat!

3. Milyen tételek vannak segítségünkre a sorozatok határértékének kiszámításakor? Válaszunkat példákkal illusztráljuk!

4. Melyik tétel alapján használhatjuk a L'Hospital-szabályt sorozatok határértékének kiszámítására? Mondjunk példákat!

5. Soroljunk fel hat nevezetes határértéket!

6. Hogyan adunk meg egy végtelen sort? Mikor nevezünk egy végtelen sort konvergensnek, illetve divergensnek? Mondjunk példákat!

7. Milyen sorokat nevezünk mértani sornak, mikor konvergens, illetve divergens egy mértani sor? Amikor konvergens, mi az összege? Válaszunkat példákkal is illusztráljuk!

8. A mértani sorokon kívül milyen konvergens, illetve divergens sorokat ismertünk meg?

9. A tagjai alapján egy végtelen sor konvergenciájának milyen szükséges feltételét fogalmaztuk meg? Mi a kritérium alapgondolata?

10. Mit mondhatunk konvergens sorok tagonkénti összegéről, illetve konvergens/divergens sorok konstansszorosáról?

11. Mi történik, ha konvergens, illetve divergens sorhoz véges számú további tagot adunk? Mi történik, ha konvergens, illetve divergens sorból véges számú tagot törlünk?

12. Hogyan indexelhetünk át egy végtelen sort? Miért lehet szükség átindexelésre?

13. Milyen feltételek mellett konvergens/divergens egy csupa nemnegatív tagból álló végtelen sor? Miért foglalkozunk külön a nemnegatív tagú sorokkal?

14. Mi az integrálkritérium, és milyen megfontoláson alapul? Adjunk példákat a kritérium alkalmazására!

15. Mikor konvergens/divergens egy p-sor? Miért? Mondjunk példát konvergens, illetve divergens p-sorra!

16. Ismertessük a közvetlen, illetve a limeszes összehasonlító kritériumokat! Min alapulnak? Alkalmazásukat illusztráljuk néhány példával!

17. Mi a hányados- és a gyökkritérium? Alkalmazhatók-e minden esetben? Mondjunk példákat!

18. Mikor nevezünk egy végtelen sort alternálónak? Milyen tételt ismerünk arra vonatkozóan, hogy mikor konvergens egy alternáló sor?

19. Hogyan becsülhetjük meg a hibát, amit akkor követünk el, ha egy alternáló sor összegét a sor egy részletösszegével közelítjük? Milyen gondolatmenet támasztja ezt alá?

20. Mikor nevezünk egy végtelen sort abszolút/feltételesen konvergensnek? Hogyan viszonyul egymáshoz a két fogalom?

21. Mi történik, ha egy abszolút konvergens, illetve ha egy feltételesen konvergens sor tagjait átrendezzük? Válaszunkat példákkal illusztráljuk!

22. Mit nevezünk hatványsornak? Hogyan döntjük el, hogy egy hatványsor konvergens-e vagy sem?

23. Ismertessük az alapvető tényeket a hatványsorok

(a) tagonkénti deriválására,

(b) tagonkénti integrálására, illetve

(c) két hatványsor szorzatára vonatkozóan.!

24. Mit nevezünk egy f függvény által az $x = a$ helyen generált Taylor-sornak? Milyen információkra van szükségünk a Taylor-sor felírásához? Adjunk példákat!

25. Mit nevezünk Maclaurin-sornak?

26. Igaz-e, hogy egy Taylor-sor mindenütt az őt generáló függvényhez konvergál? Válaszunkat indokoljuk!

27. Mik a Taylor-polinomok? Mire használjuk őket?

28. Ismertessük a Taylor-formulát! Mit mond a Taylor-formula a Taylor-polinomokkal való közelítés hibájáról? Speciálisan: mi a hibája a linearizációnak, illetve a négyzetes közelítésnek a Taylor-formula szerint?

29. Mit nevezünk binomiális sornak? Mely intervallumon konvergens? Hogyan használjuk?

30. Adjunk példát arra, hogy miként használhatók Taylor-sorok kezdetiérték-feladatok megoldásakor?

31. Adjunk példát arra, hogy miként használhatók Taylor-sorok integrálok kiszámítására?

32. Mi az $1/(1-x)$, $1/(1+x)$, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\ln[(1+x)/(1-x)]$ és $\operatorname{arctg} x$ függvények Taylor-sora?

33. Milyen sort nevezünk Fourier-sornak? Hogyan határozzuk meg egy $[0,\pi]$ intervallumon értelmezett f függvény Fourier-sorában szereplő $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1 \ldots, b_n$ együtthatókat?

34. Mondjuk ki a $[0,\pi]$ intervallumon szakaszosan folytonos és szakaszosan folytonosan deriválható függvények Fourier-sorának konvergenciájára vonatkozó tételt!

11. fejezet Gyakorló feladatok

Konvergens és divergens sorozatok

Melyek a konvergens, és melyek a divergens sorozatok azok között, amelyeknek n-edik tagját az 1–18. feladatokban adtuk meg? A konvergens sorozatok határértékét is számítsuk ki!

1. $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

2. $a_n = \dfrac{1-(-1)^n}{\sqrt{n}}$

3. $a_n = \dfrac{1-2^n}{2^n}$

4. $a_n = 1 + 0{,}9^n$

5. $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$

6. $a_n = \sin n\pi$

7. $a_n = \dfrac{\ln(n^2)}{n}$

8. $a_n = \dfrac{\ln(2n+1)}{n}$

9. $a_n = \dfrac{n+\ln n}{n}$

10. $a_n = \dfrac{\ln(2n^3+1)}{n}$

11. $a_n = \left(\dfrac{n-5}{n}\right)^n$

12. $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$

13. $a_n = \sqrt[n]{\left(\dfrac{3^n}{n}\right)}$

14. $a_n = \left(\dfrac{3}{n}\right)^{1/n}$

15. $a_n = n\left(2^{1/n}-1\right)$

16. $a_n = \sqrt[n]{2n+1}$

17. $a_n = \dfrac{(n+1)!}{n!}$

18. $a_n = \dfrac{(-4)^n}{n!}$

Konvergens sorok

Határozzuk meg a sorok összegét (a 19–24. feladatok)!

19. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)(2n-1)}$

20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2}{n(n+1)}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{(3n-1)(3n+2)}$

22. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{-8}{(4n-3)(4n+1)}$

23. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{4^n}$

Konvergens vagy divergens?

A 25–40. feladatokban megadott végtelen sorok közül melyek az abszolút konvergensek, a feltételesen konvergensek, illetve a divergensek? Válaszunkat indokoljuk!

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-5}{n}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

30. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\ln(\ln n)}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n^2}{n^3+1}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2+1)}{2n^2+n-1}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n 3^n}{n^n}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

40. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

Hatványsorok

A 41–50. feladatokban **(a)** állapítsuk meg a hatványsor konvergenciaintervallumát és -sugarát! Ezután határozzuk meg, mely x-ek esetén konvergál a sor **(b)** abszolút, illetve **(c)** feltételesen?

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n3^n}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n-2}}{(2n-1)!}$

43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(3x-1)^n}{n^2}$

44. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(2x+1)^n}{(2n+1)2^n}$

45. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

46. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^{2n-1}}{3^n}$

48. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^{2n+1}}{2n+1}$

49. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} n} x^n$

50. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{cth} n) x^n$

Maclaurin-sorok

Az 51–56. feladatokban megadott sorok mindegyike egy f függvény $x = 0$-beli Taylor-sorának egy adott pontbeli értéke. Melyik függvényről és melyik pontról van szó? Mennyi a sor összege?

51. $1 - \dfrac{1}{4} + \ldots + (-1)^n \dfrac{1}{4^n} + \ldots$

52. $\dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{18} + \dfrac{8}{81} - \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{2^n}{n3^n} + \ldots$

53. $\pi - \dfrac{\pi^3}{3!} + \dfrac{\pi^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$

54. $1 - \dfrac{\pi^2}{9\cdot 2!} + \dfrac{\pi^4}{81\cdot 4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{\pi^{2n}}{3^{2n}(2n)!} + \ldots$

55. $1 + \ln 2 + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!} + \ldots + \dfrac{(\ln 2)^n}{n!} + \ldots$

56. $\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{9\sqrt{3}} + \dfrac{1}{45\sqrt{3}} - \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{1}{(2n-1)(\sqrt{3})^{2n-1}}$

Adjuk meg a függvény $x = 0$-beli Taylor-sorát (57–64. feladatok)!

57. $\dfrac{1}{1-2x}$

58. $\dfrac{1}{1+x^3}$

59. $\sin \pi x$

60. $\sin\dfrac{2x}{3}$

61. $\cos\left(x^{5/2}\right)$

62. $\cos\sqrt{5x}$

63. $e^{(\pi x/2)}$

64. e^{-x^2}

Taylor-sorok

Adjuk meg az f által az $x = a$ helyen generált Taylor-sor első négy nemnulla tagját (65–68. feladatok)!

65. $f(x) = \sqrt{3+x^2}, \quad x = -1$

66. $f(x) = 1/(1-x), \quad x = 2$

67. $f(x) = 1/(x+1), \quad x = 3$

68. $f(x) = 1/x, \quad x = a > 0$

Kezdetiérték-feladatok

Hatványsorok segítségével oldjuk meg a kezdetiérték-feladatokat (69–76. feladatok)!

69. $y'+y=0,\ y(0)=-1$ **70.** $y'-y=0,\ y(0)=-3$

71. $y'+2y=0,\ y(0)=3$ **72.** $y'+y=1,\ y(0)=0$

73. $y'-y=3x,\ y(0)=-1$ **74.** $y'+y=x,\ y(0)=0$

75. $y'-y=x,\ y(0)=1$ **76.** $y'-y=-x,\ y(0)=2$

Elemi függvényekkel nem kifejezhető integrálok

Sorok segítségével határozzuk meg az integrálok értékét 10^{-8} pontossággal (77–80. feladatok)! [A megoldásokban 10^{-10} pontosságú eredményeket adtunk meg.]

77. $\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx$ **78.** $\int_0^{1} x\sin(x^3)\,dx$

79. $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$ **80.** $\int_0^{1/64} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}\,dx$

Határértékek

A 81–86. feladatokban

(a) a megadott határértéket hatványsorok segítségével számítsuk ki, majd

(T) (b) a függvény grafikonját számítógép segítségével ábrázolva ellenőrizzük a megoldásunkat!

81. $\lim_{x\to 0} \frac{7\sin x}{e^{2x}-1}$ **82.** $\lim_{\theta\to 0} \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}-2\theta}{\theta-\sin\theta}$

83. $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2-2\cos t}-\frac{1}{t^2}\right)$ **84.** $\lim_{h\to 0} \frac{(\sin h)/h-\cos h}{h^2}$

85. $\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos^2 z}{\ln(1-z)+\sin z}$ **86.** $\lim_{y\to 0} \frac{y^2}{\cos y-\operatorname{ch} y}$

87. A $\sin 3x$ Taylor-sorát felhasználva keressünk olyan r és s számokat, amelyekkel

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{r}{x^2}+s\right)=0.$$

88. **(a)** Mutassuk meg, hogy a $\csc x$-re 11.10. alfejezet 9. példájában megadott $\csc x \approx 1/x+x/6$ közelítésből $\sin x$-re a $\sin x \approx 6x/(6+x^2)$ közelítést kapjuk!

(T) (b) Vessük össze a $\sin x$-re ismert két közelítés – a $\sin x \approx x$ és a $\sin x \approx 6x/(6+x^2)$ – pontosságát az $f(x)=\sin x - x$ és a $g(x)=\sin x-(6x/(6+x^2))$ függvény grafikonjának ábrázolásával! Magyarázzuk meg, mit mutatnak az ábráink!

További példák és feladatok

89. **(a)** Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{2n}-\sin\frac{1}{2n+1}\right)$$

végtelen sor konvergens!

(T) (b) Becsüljük meg annak a hibának a nagyságát, amit akkor követünk el, ha az iménti sorban csak $n=20$-ig vesszük figyelembe a tagokat! Felső a becslésünk, vagy alsó? Válaszunkat indokoljuk!

90. **(a)** Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2n}-\operatorname{tg}\frac{1}{2n+1}\right)$$

végtelen sor konvergens!

(T) (b) Becsüljük meg annak a hibának a nagyságát, amit akkor követünk el, ha az iménti sorban csak $-\operatorname{tg}(1/41)$-ig vesszük figyelembe a tagokat! Felső a becslésünk, vagy alsó? Válaszunkat indokoljuk!

91. Adjuk meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^n$$

sor konvergenciasugarát!

92. Adjuk meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{4\cdot 9\cdot 14\cdots(5n-1)}(x-1)^n$$

sor konvergenciasugarát!

93. Írjuk fel zárt formulával a $\sum_{n=2}^{\infty}\ln(1-(1/n^2))$ sor n-edik részletösszegét, és ennek alapján döntsük el, konvergens-e a sor vagy sem!

94. Az n-edik részletösszegek sorozatának határértéke alapján számítsuk ki a $\sum_{n=2}^{\infty}(1/(k^2-1))$ sor összegét!

95. **(a)** Adjuk meg az

$$y=1+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{180}x^6+\ldots+\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{(3n)!}x^{3n}+\ldots$$

sor konvergenciaintervallumát!

(b) Igazoljuk, hogy az (a)-beli sor által meghatározott függvény kielégít egy

$$\frac{d^2y}{dx^2}y=x^a+b$$

alakú differenciálegyenletet! Adjuk meg a és b értékét!

96. **(a)** Írjuk fel az $x^2/(1+x)$ függvény Maclaurin-sorát!

(b) Konvergens-e ez a sor az $x=1$ helyen? Válaszunkat indokoljuk!

97. Mondhatunk-e valamit a $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ végtelen sorról, ha tudjuk, hogy mind $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, mind $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konvergens sorok, amelyeknek egyetlen tagja sem negatív? Válaszunkat indokoljuk!

98. Mondhatunk-e valamit a $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ végtelen sorról, ha tudjuk, hogy mind $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, mind $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ divergens sorok, amelyeknek egyetlen tagja sem negatív? Válaszunkat indokoljuk!

99. Igazoljuk, hogy az $\{x_n\}$ sorozat és a $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{k+1}-x_k)$ sor egyszerre konvergens vagy egyszerre divergens!

100. Bizonyítsuk be, hogy ha minden n-re $a_n>0$ és a $\sum a_n$ sor konvergens, akkor konvergens $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/(1+a_n))$ is!

101. Aki megoldotta a 4.7. alfejezet 27. feladatát, láthatta, hogy a Newton-módszer a gyakorlatban az $f(x) = (x-1)^{40}$ függvény gyöke előtt túlságosan hamar megállt ahhoz, hogy az $x = 1$-re használható becslést adhatott volna. Mutassuk meg mindennek ellenére, hogy a Newton-módszerrel kapott közelítések $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sorozata tetszőleges $x_0 \neq 1$ kezdőérték esetén 1-hez konvergál!

102. Tegyük fel, hogy az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ pozitív számok kielégítik a következő feltételeket: (i) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n$ és (ii) az $a_1 + a_4 + a_8 + a_{16} + \ldots$ végtelen sor divergens. Igazoljuk, hogy ekkor divergens az

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots$$

végtelen sor is!

103. A 102. feladat eredményét felhasználva igazoljuk, hogy az

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

végtelen sor divergens!

104. Tegyük fel, hogy az $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$ integrál értékét kell megbecsülnünk. Többféleképpen is eljárhatunk.

(a) Használjuk a trapézszabályt az $n = 2$ esetben!

(b) Írjuk fel az $x^2 e^x$ függvény $x = 0$-beli Taylor-sorának első négy tagját, és ezzel – a negyedik Taylor-polinommal – helyettesítsük a függvényt!

(c) Az $f(x) = x^2 e^x$ függvény második deriváltja pozitív. Magyarázzuk meg, miért következik ebből, hogy az (a)-beli közelítés túl nagy! (*Útmutatás*: mit árul el a második deriváltról a függvény grafikonjáról? Hogyan viszonyul ez a függvénygörbe alatti területnek a trapézszabállyal való közelítéséhez?)

(d) Az $f(x) = x^2 e^x$ függvény valamennyi deriváltja pozitív, amennyiben $x > 0$. Magyarázzuk meg, miért következik ebből, hogy a Maclaurin-soron alapuló becslés a $[0,1]$ zárt intervallumon túl kicsi! (*Útmutatás*: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.)

(e) Számítsuk ki az $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$ integrált a parciális integrálás módszerével!

Fourier-sorok

Írjuk fel a megadott függvény Fourier-sorát, és vázoljuk a függvény grafikonját (105–108. feladatok)!

105. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ 1, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

106. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 1, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

107. $f(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 \leq x \leq \pi \\ x - 2\pi, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

108. $f(x) = |\sin x|, \ 0 \leq x \leq 2\pi$

11. fejezet Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

Konvergencia vagy divergencia?

Melyek konvergensek, és melyek divergensek az 1–4. feladatokban megadott sorok közül? Válaszunkat indokoljuk!

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)^{n+(1/2)}}$ **2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{arctg} n)^2}{n^2+1}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{th} n$ **4.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log_n(n!)}{n^3}$

Melyek konvergensek, és melyek divergensek az 5–8. feladatokban megadott sorok közül? Válaszunkat indokoljuk!

5. $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)} a_n$, ha $n \geq 2$.

(*Útmutatás*: írjuk fel az első néhány tagot, és figyeljük meg, melyek ejtik ki egymást.)

6. $a_1 = a_2 = 7, a_{n+1} = \frac{n}{(n-1)(n+1)} a_n$, ha $n \geq 2$

7. $a_1 = a_2 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, ha $n \geq 2$

8. $a_n = 1/3^n$, ha n páratlan, $a_n = n/3^n$, ha n páros

Taylor-sorok középpontjának megválasztása

Az

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

Taylor-formula az $f(x)$ függvényértéket az f függvény és deriváltjainak $x = a$-beli értékei alapján közelíti. A numerikus számításokban éppen ezért olyan a-kra van szükségünk, amelyekben ismerjük a függvény deriváltjainak értékét. A másik fontos szempont, hogy az az x hely, amelynél felvett függvényértékre kíváncsiak vagyunk, elég közel essen a-hoz: így az $(x-a)^{n+1}$ elegendően kicsiny, és a maradéktagtól eltekinthetünk.

A 9–14. feladatokban megadott függvény, illetve hely esetén milyen Taylor-sorral lenne célszerű számolni? (Több jó válasz is lehetséges.) Írjuk fel az általunk választott sor első négy nemnulla tagját!

9. $\cos x$ az $x = 1$ közelében **10.** $\sin x$ az $x = 6{,}3$ közelében

11. e^x az $x = 0{,}4$ közelében **12.** $\ln x$ az $x = 1{,}3$ közelében

13. $\cos x$ az $x = 69$ közelében **14.** $\operatorname{arctg} x$ az $x = 2$ közelében

További példák és feladatok

15. Konvergens-e az $\{(a^n+b^n)^{1/n}\}$ sorozat, ha a és b olyan állandók, amelyekre $0<a<b$? Ha a sorozat konvergens, mi a határértéke?

16. Határozzuk meg az

$$1+\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\frac{2}{10^4}+\frac{3}{10^5}+\frac{7}{10^6}+\frac{2}{10^7}+\frac{3}{10^8}+\frac{7}{10^9}+\dots$$

sor összegét!

17. Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

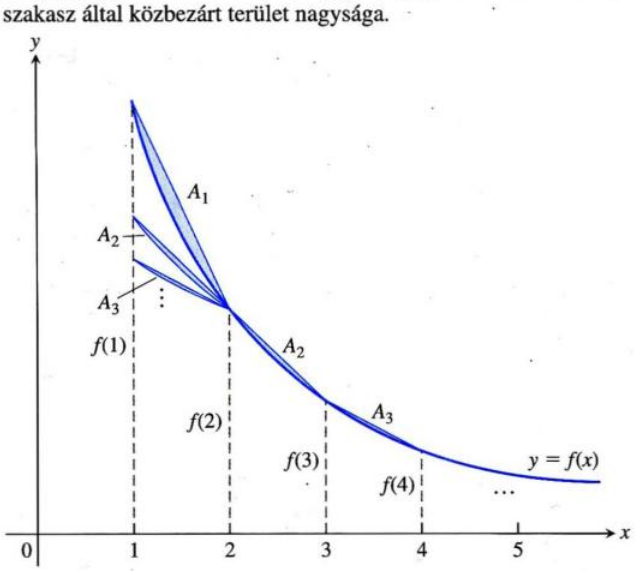
sor értékét!

18. Milyen x-ek esetén lesz a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(n+1)(2x+1)^n}$$

sor abszolút konvergens?

19. Az Euler-állandó általánosítása: Az ábrán egy csupa pozitív értéket felvevő, kétszer differenciálható f függvény grafikonját tanulmányozhatjuk. f második deriváltja a $(0,\infty)$ intervallumon mindenütt pozitív. Tetszőleges n esetén A_n a görbe és az $(n,f(n))$, valamint az $(n+1,f(n+1))$ pontokat összekötő szakasz által közbezárt terület nagysága.



(a) Az ábra segítségével igazoljuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n<\frac{1}{2}\big(f(1)-f(2)\big).$$

(b) Ezután mutassuk meg, hogy létezik a

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}f(k)<\frac{1}{2}\big(f(1)+f(n)\big)-\int_{1}^{n}f(x)dx\right]$$

határérték!

(c) Végül bizonyítsuk be, hogy létezik a

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_{1}^{n}f(x)dx\right]$$

határérték!

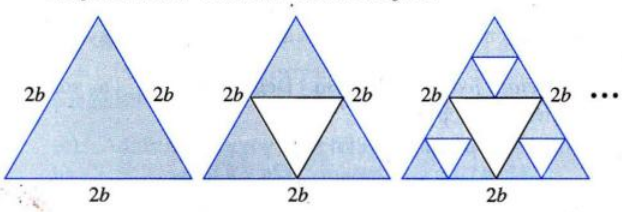
Ha $f(x)=1/x$, akkor a feladat (c) részében szereplő határérték éppen az Euler-állandó (11.3. alfejezet, 41. feladat). [P. J. Rippon: „Convergence with Pictures", *Am. Math. Monthly,* Vol. 93. No. 6. (1986) pp. 476–478.]

20. Egy csúcsával felfelé álló $2b$ oldalú szabályos háromszöget négy egybevágó b oldalú szabályos háromszögre osztunk fel, és kivágjuk belőle a középső, csúcsával lefelé álló háromszöget (lásd az ábrát). Ugyanezt a megmaradt három háromszöggel, majd az azokból megmaradó három-három háromszöggel is megismételjük, és így tovább. Az eredeti háromszögből kivont háromszögek területének összegét egy végtelen sor adja meg.

(a) Írjuk fel ezt a végtelen sort!

(b) Számítsuk ki a sor összegét!

(c) Van-e olyan pontja az eredeti háromszögnek, amely a helyén marad? Válaszunkat indokoljuk!



21. **(a)** Néhány a érték behelyettesítésével és nagyobb n-ekre való számítással próbáljunk következtetni, függ-e a

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\cos(a/n)}{n}\right)^n$$

határérték az a állandó értékétől? Ha igen, miként?

(b) Néhány b érték behelyettesítésével és nagyobb n-ekre való számítással próbáljunk következtetni, függ-e a

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\cos(a/n)}{bn}\right)^n$$

határérték a b állandó értékétől ($b\neq 0$ és a továbbra is állandó)? Ha igen, miként?

(c) A sorozatokra tanult L'Hospital szabály használatával győződjünk meg következtetéseink helyességéről, mondjuk meg a határértékeket!

22. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ sor konvergens, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\sin(a_n)}{2}\right)^n$$

sor is az!

23. Adjuk meg a b állandó értékét úgy, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^nx^n}{\ln n}$$

hatványsor konvergenciasugara 5 legyen!

24. Honnan tudjuk, hogy a $\sin x$, e^x és $\ln x$ függvények nem polinomfüggvények? Válaszunkat indokoljuk!

25. Adjuk meg az a állandó azon értékét, amellyel a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)-\sin x-x}{x^3}$$

határérték véges. Számítsuk is ki a szóban forgó határértéket!

26. Mely a és b értékek esetén lesz

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax)-b}{2x^2}=-1?$$

27. A Raabe- (vagy Gauss-) kritérium: A következő kritérium, amelyet bizonyítás nélkül mondunk ki, a hányadoskritérium általánosítása.

Ha $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ csupa pozitív tagból álló sor, és vannak olyan C, K és N állandók, amelyekkel

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=1+\frac{C}{n}+\frac{f(n)}{n^2},$$

ahol $|f(n)|<K$ minden $n\geq N$ esetén, akkor $C>1$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ konvergens, $C\leq 1$ esetén viszont divergens.

Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ és a $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ sorokra vonatkozóan a Raabe-kritérium is a jól ismert eredményt adja!

28. (*Az előző feladat folytatása.*) Definiáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ sor tagjait a következőképpen:

$$u_1=1,\quad u_{n+1}=\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}u_n.$$

A Raabe-kritérium alapján döntsük el, konvergens-e ez a sor!

29. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ sor konvergens, és minden n-re $0<a_n\neq 1$, akkor

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ is konvergens.

(b) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty}a_n/(1-a_n)$ sor? Válaszunkat indokoljuk!

30. (*A 29. feladat folytatása.*) Bizonyítsuk be, hogy ha $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergens és minden n-re $1>a_n>0$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-a_n)$ sor is konvergens! (*Útmutatás*: előbb lássuk be, hogy $|\ln(1-a_n)|\leq \leq a_n/(1-a_n)$.)

31. Nicole Oresme tétele: Bizonyítsuk be Oresme tételét, amely szerint

$$1+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 3+\ldots+\frac{n}{2^{n-1}}+\ldots=4.$$

(*Útmutatás*: deriváljuk az $1/(1-x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ egyenletet.)

32. (a) Bizonyítsuk be, hogy $|x|>1$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{x^n}=\frac{2x^2}{(x-1)^3}.$$

(*Útmutatás:* Deriváljuk kétszer a

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x}$$

egyenlőség mindkét oldalát, szorozzunk x-szel, a kapott képletben pedig írjunk x helyébe $1/x$-et!)

(b) A feladat (a) része alapján adjuk meg az

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{x^n}$$

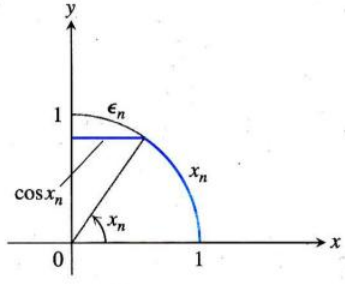
egyenlet egy 1-nél nagyobb megoldását!

33. Gyorsbecslés $\pi/2$-re: Aki megoldotta a 11.1. alfejezet 127. feladatát, tudja, hogy az $x_0=1$, $x_{n+1}=x_n+\cos x_n$ rekurzióval megadott sorozat gyorsan közelít $\pi/2$-höz. A konvergencia gyorsaságát a következőképpen érzékeltethetjük. Legyen például $\varepsilon_n=(\pi/2)-x_n$ (lásd az ábrát). Ekkor:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1}&=\frac{\pi}{2}-x_n-\cos x_n=\\&=\varepsilon_n-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon_n\right)=\\&=\varepsilon_n-\sin\varepsilon_n=\\&=\frac{1}{3!}(\varepsilon_n)^3-\frac{1}{5!}(\varepsilon_n)^5+\ldots.\end{aligned}$$

Az egyenlőséget felhasználva bizonyítsuk be, hogy

$$0<\varepsilon_{n+1}<\frac{1}{6}(\varepsilon_n)^3.$$



34. Mondhatunk-e bármit is a $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ sor konvergenciájáról, ha tudjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ csupa pozitív tagból álló konvergens sor? Válaszunkat indokoljuk!

Valószínűségekkel súlyozott értékek

A 35-36. feladatokban olyan fogalmakról lesz szó, amelyekkel csak a valószínűségszámítási kurzusokon fogunk megismerkedni, de az alább pontosan megadott számításokat már most is el tudjuk végezni.

35. Minőségellenőrzés:

(a) Az

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots$$

egyenlőség mindkét oldalát deriválva írjuk fel az $1/(1-x^2)$ függvény egy hatványsorát!

(b) Ha két kockával dobunk egyszerre, akkor $1/6$ a valószínűsége annak, hogy a két szám összege 7. Ha a dobásokat megismételjük, akkor annak valószínűsége, hogy az n-edik kísérletre dobunk 7-et, $q^{n-1}p$, ahol $q=1-p=5/6$. Az első 7-es dobás várhatóan a $\sum_{n=1}^{\infty}np^{n-1}q$ kísérletre sikerül (ez a dobásszám valószínűségekkel súlyozott átlaga). Határozzuk meg a sor összegét!

(c) Egy ipari folyamatot ellenőrző mérnökként véletlenszerű mintákat veszünk a futószalagról. A minta vagy „jó", vagy „rossz"; ha p valószínűséggel jó és $q=1-p$ valószínűséggel rossz, akkor annak valószínűsége, hogy az első rossz az n-edik mintában kerül elő, $p^{n-1}q$. Az első rossz megtalálásig tehát átlagosan $\sum_{n=1}^{\infty}np^{n-1}q$ mintát kell vennünk (ami a mintavételszám valószínűségekkel súlyozott átlaga). Számítsuk ki a sor összegét (feltéve, hogy $0<p<1$)!

36. Várható érték: Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó[1] az $1,2,3,\ldots$ értékeket rendre $p_1, p_2, p_3, \ldots$ valószínűséggel veszi fel, p_k tehát annak a valószínűsége, hogy $X = k$ ($k = 1,2,3,\ldots$). Tegyük fel továbbá, hogy minden k-ra $p_k \geq 0$, és hogy $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. Az X **várható értéke** ekkor az $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k$ összeg, amennyiben létezik. Igazoljuk, hogy a megadott esetekben $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$, és adjuk meg $E(X)$ értékét, ha létezik!

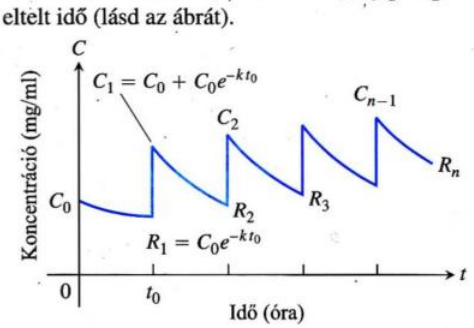
(a) $p_k = 2^{-k}$ **(b)** $p_k = \dfrac{5^{k-1}}{6^k}$

(c) $p_k = \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

37. Biztonságos és hatékony gyógyszeradagolás: Egyetlen dózis beadása után a hatóanyag koncentrációja a vérben általában folyamatosan csökken. A dózisokat rendszeres időközönként ismételni kell ahhoz, hogy a koncentráció ne süllyedjen egy meghatározott szint alá. Az egyik lehetséges modell szerint a hatóanyag koncentrációja az $(n+1)$-edik adag beadása után

$$R_n = C_0 e^{-kt_0} + C_0 e^{-k2t_0} + \ldots + C_0 e^{-nkt_0},$$

ahol C_0 az egy adag által elérhető koncentráció (például mg/ml-ben), k a kiürülési állandó (1/óra $= h^{-1}$), t_0 pedig az adagok között eltelt idő (lásd az ábrát).



(a) Írjuk fel R_n-t zárt alakban, és határozzuk meg $R = \lim_{n\to\infty} R_n$ értékét!

(b) Mennyi R_1 és R_{10}, ha $C_0 = 1$ mg/ml, $k = 0{,}1\,\mathrm{h}^{-1}$ és $t_0 = 10$ h? Mennyire jó közelítése R_{10} értéke R-ének?

(c) Adjuk meg a legkisebb olyan n-t, amelyre $R_n > \frac{1}{2}R$, ha $k = 0{,}01\,\mathrm{h}^{-1}$ és $t_0 = 10$ h!

[B. Horelick, S. Koont: *Prescribing Safe and Effective Dosage,* COMAP, In., Lexington, MA.]

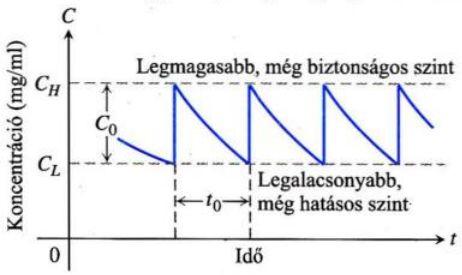
38. A gyógyszeradagolás gyakorisága: *(Az előző feladat folytatása.)* Ha egy gyógyszer a C_L koncentráció alatt nem hatásos, a C_H koncentráció túllépése esetén viszont káros, akkor C_0-t és t_0-t úgy kell megválasztanunk, hogy a koncentráció mindvégig biztonságos és hatásos szinten (azaz C_L és C_H között) maradjon (lásd az ábrát). Megfelelő C_0 és t_0 esetén tehát

$$R = C_L \quad \text{és} \quad C_0 + R = C_H,$$

azaz $C_0 = C_H - C_L$. Az előző feladat (a) részében kapott képletbe ezeket behelyettesítve egyenletünk a

$$t_0 = \frac{1}{k} \ln \frac{C_H}{C_L}$$

alakra egyszerűsödik. Ahhoz, hogy a hatásos szintet a lehető leggyorsabban elérjük, előírhatunk egy akkora dózist, amelynek eredményeként a hatóanyag koncentrációja a vérben C_H mg/ml-re ugrik. Ezután t_0 időközönként olyan dózisra van szükség, amely a koncentrációt éppen $C_0 = C_h - C_L$ mg/ml-rel növeli meg.



(a) Igazoljuk a t_0-ra megadott összefüggést!

(b) Milyen időközönként kell a gyógyszert adagolni, ha $k = 0{,}05\,\mathrm{h}^{-1}$, és a legmagasabb biztonságos koncentráció a legalacsonyabb hatékony koncentráció e-szerese?

(c) Adjuk meg a gyógyszer felírását meghatározó modellt, ha $C_H = 2$ mg/ml, $C_L = 0{,}5$ mg/ml, $k = 0{,}02\,\mathrm{h}^{-1}$!

(d) Tegyük fel, hogy $k = 0{,}2\,\mathrm{h}^{-1}$ és $C_L = 0{,}03$ mg/ml. Az orvos egyetlen dózist írt elő, amely 0,1 mg/ml koncentrációt idéz elő. Körülbelül mennyi ideig hatásos ez az adag?

39. Egy végtelen szorzat: A

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n) = (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots$$

végtelen szorzatot konvergensnek nevezzük, ha a tagonkénti logaritmálással kapott

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$$

sor konvergens. Bizonyítsuk be, hogy ha minden n-re $a_n > -1$, a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor pedig konvergens, akkor a szorzat is konvergens! *Útmutatás*: bizonyítsuk be először, hogy

$$|\ln(1+a_n)| \leq \frac{|a_n|}{1-|a_n|} \leq 2|a_n|, \quad \text{ha } |a_n| < \frac{1}{2}.$$

40. Legyen p állandó. Igazoljuk, hogy az

$$1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot [\ln(\ln n)]^p}$$

sor **(a)** $p > 1$ esetén konvergens, **(b)** $p \leq 1$ esetén pedig divergens! Általában: ha $n = 1,2,3,\ldots$ esetén $f_1(x) = x$ és $f_{n+1}(x) = \ln(f_n(x))$, akkor amennyiben $f_n(a) > 1$, úgy az

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots (f_n(x))^p}$$

improprius integrál $p > 1$ esetén konvergens, $p \leq 1$ esetén pedig divergens.

[1] A valószínűségi változó egy olyan valós értékű függvény, amely a lehetséges értékeit bizonyos valószínűségekkel veszi fel. Pl. az a függvény, amelynek értéke kockadobáskor a felülre került pöttyök száma, vagy egy adott áruházba érkező vevők száma egy adott órában stb. Az ilyen függvénynek az átlagát hívjuk a változó várható értékének. A várható érték tehát egy átlag, amely olykor egyetlen lehetséges értékkel sem egyezik meg, pl. kockadobáskor ez 3,5.

41. **(a)** Bizonyítsuk be a következő tételt: *ha* $\{c_n\}$ *olyan sorozat, hogy a* $t_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$ *összegek sorozata felülről korlátos, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n/n$ *sor konvergens, és az összege* $\sum_{n=1}^{\infty} t_n/(n(n-1))$.

A bizonyítás vázlata: Írjunk c_1 helyébe t_1-et, $n \geq 2$ esetén pedig c_n helyébe $t_n - t_{n-1}$-et. Legyen ezután $s_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} c_k/k$. Igazoljuk, hogy

$$s_{2n+1} = t_1\left(1-\frac{1}{2}\right)+t_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+t_{2n}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{t_{2n+1}}{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{t_k}{k(k+1)}+\frac{t_{2n+1}}{2n+1}.$$

Mivel létezik olyan M állandó, hogy minden k-ra $t_k < M$, a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t_k}{k(k+1)}$$

sor abszolút konvergens, az s_{2n+1} sorozat pedig konvergens. Végül ha $s_{2k} = \sum_{k=1}^{2n} c_k/k$, akkor $n \to \infty$ esetén

$$s_{2n+1} - s_{2n} = c_{2n+1}/(2n+1)$$

nullához tart (mivel $|c_{2n+1}| = |t_{2n+1} - t_{2n}| < 2M$). A $\sum c_k/k$ sor részösszegeinek sorozata tehát konvergens, határértéke pedig $\sum_{n=1}^{\infty} t_n/(n(n+1))$.

(b) Mutassuk meg, miként alkalmazható a tétel az

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$$

alternáló harmonikus sorra!

(c) Igazoljuk, hogy az

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\ldots$$

végtelen sor konvergens! (Az első tag után kettesével felváltva negatív, illetve pozitív előjelű tagok.)

42. **A** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n/n$ **sor összege minden** $-1 < x \leq 1$ **esetén** $\ln(1+x)$**:**

(a) Igazoljuk (osztással vagy másképpen), hogy

$$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2-t^3+\ldots+(-1)^n t^n+\frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}!$$

(b) Az (a)-beli összefüggés mindkét oldalát 0-tól x-ig integrálva igazoljuk, hogy

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+R_{n+1},$$

ahol

$$R_{n+1} = (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt!$$

(c) Bizonyítsuk be, hogy $x \geq 0$ esetén

$$|R_{n+1}| \leq \int_0^x t^{n+1}\,dt = \frac{x^{n+2}}{n+2}!$$

(*Útmutatás*: amint t 0-tól x-ig változik,

$$1+t \geq 1 \quad \text{és} \quad t^{n+1}/(1+t) \leq t^{n+1},$$

továbbá

$$\left|\int_0^x f(t)dt\right| \leq \int_0^x |f(t)|dt.)$$

(d) Igazoljuk, hogy ha $-1 < x < 0$, akkor

$$|R_{n+1}| \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-|x|}\,dt = \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)(1-|x|)}.$$

(*Útmutatás*: amint t értéke 0-tól x-ig változik, $|1+t| \geq 1-|x|$ és

$$\left|\frac{t^{n+1}}{1+t}\right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{1-|x|}.)$$

(e) A kapott eredményeket felhasználva igazoljuk, hogy az

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

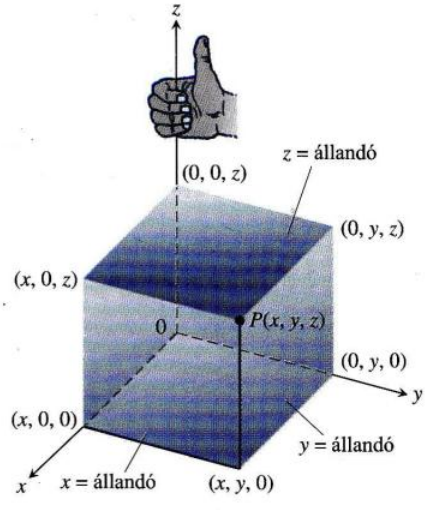
végtelen sor összege minden $-1 < x \leq 1$ esetén $\ln(1+x)$.

12. fejezet

Vektorok és a tér geometriája

ÁTTEKINTÉS: A kalkulus gyakorlati és magasabb szintű matematikai alkalmazásához szükség van a háromdimenziós tér matematikai leírására. Ebben a fejezetben a háromdimenziós koordináta-rendszerekkel és a vektorokkal fogunk megismerkedni. A síkbeli koordinátákra vonatkozó ismereteink alapján a térbeli koordináta-rendszert úgy fogjuk megalkotni, hogy a síkbeli koordinátatengelyekhez hozzávesszünk egy harmadik koordinátatengelyt, amely az xy-síktól való távolságot méri. A tér analitikus geometriájában alkalmazott vektorokkal írhatjuk le legegyszerűbben a térbeli egyeneseket, síkokat, felületeket és görbéket. Ezeket a geometriai fogalmakat használjuk fel a könyv további részében a térbeli mozgás és a többváltozós függvények, valamint tudományos, mérnöki, közgazdasági és magasabb matematikai alkalmazásaik tanulmányozására.

12.1. Háromdimenziós koordináta-rendszerek

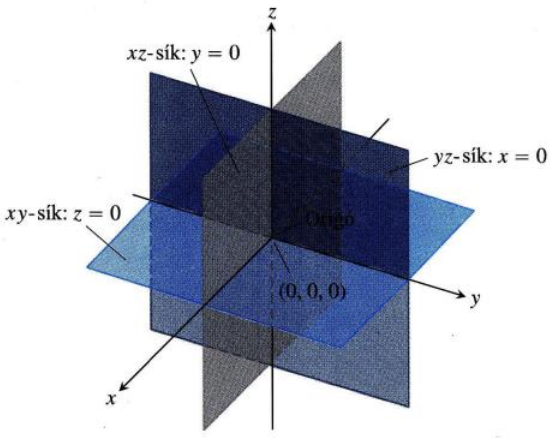


12.1. ÁBRA: A Descartes-koordináta-rendszer jobbsodrású.

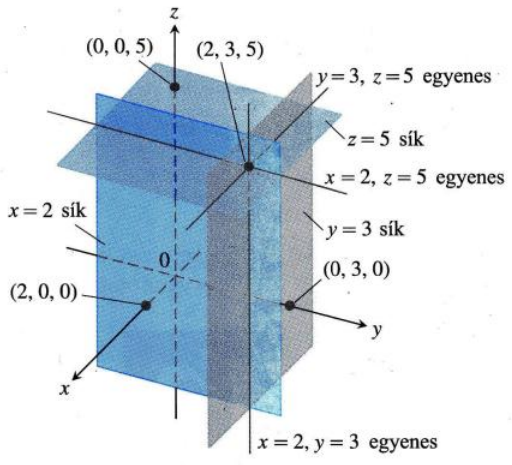
Egy térbeli pont helyzetét úgy tudjuk megadni, hogy a 12.1. ábrán látható módon felveszünk a térben három, egymásra merőleges koordinátatengelyt. Az ábrán látható koordinátatengelyek úgynevezett **jobbsodrású** rendszert alkotnak. Ha jobb kezünket úgy tartjuk, hogy behajlított ujjaink a pozitív x-féltengelytől a pozitív y-féltengely irányába mutassanak, akkor hüvelykujjunk a z-tengely pozitív irányába fog mutatni. Vagyis ha a pozitív z-féltengely irányából nézünk az xy-síkra, akkor a síkon, a szokásos módon, az óramutató járásával ellentétes irányú szögek lesznek a pozitív szögek. (**Balsodrású** rendszerben a 12.1. ábrán a z-tengely lefelé mutatna, s az óramutató járásával megegyező szögek lennének a pozitív szögek. Az xy-sík szögeire nem ezt a konvenciót szokás használni. A jobb- és a balsodrású rendszerek egymással nem ekvivalensek.)

A tér valamely P pontjának (x, y, z) koordinátái valós számok, azok az értékek, ahol a P-n átmenő, a koordinátatengelyre merőleges sík metszi az adott koordinátatengelyt. A Descartes-koordinátákat **derékszögű koordinátáknak** is nevezzük, mert a koordinátákat definiáló tengelyek derékszöget zárnak be egymással. Az x-tengely pontjainak y- és z-koordinátája nulla, azaz koordinátái $(x, 0, 0)$ alakú számhármasok. Hasonlóan, az y-tengely pontjainak koordinátái $(0, y, 0)$ alakúak, a z-tengely pontjaié $(0, 0, z)$ alakúak. A koordinátatengelyek három síkot határoznak meg: a $z = 0$ egyenletű ***xy*-síkot**, az $x = 0$ egyenletű ***yz*-síkot** és az $y = 0$ egyenletű ***xz*-síkot**. A koordinátatengelyek az origóban metszik egymást, melynek koordinátája $(0, 0, 0)$ (12.2. ábra). Az origót egyszerűen 0-val, vagy az O betűvel jelöljük.

Az $x = 0$, $y = 0$ és $z = 0$ síkok nyolc, oktánsnak nevezett tartományra osztják a teret. **Első oktánsnak**, vagy **első térnyolcadnak** nevezzük azt az oktánst, ahol a pontok összes koordinátája pozitív. A többi oktánsnak nincs bevett számozása.



12.2. ÁBRA: Az $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ síkok nyolc tartományra osztják a teret.



12.3. ÁBRA: Az $x = 2$, $y = 3$, $z = 5$ síkok három, a $(2,3,5)$ ponton átmenő egyenest határoznak meg.

Az x-tengelyre merőleges sík pontjainak x-koordinátája megegyezik, az az x-érték, ahol a sík metszi az x-tengelyt. Az y- és a z-koordináta bármilyen szám lehet. Hasonló igaz az y-, illetve a z-tengelyre merőleges síkok pontjaira is: y-, illetve z-koordinátájuk megegyezik. E síkok egyenletét úgy írhatjuk fel, hogy vesszük ezt a közös koordinátaértéket: $x = 2$ az x-tengelyre merőleges, azt az $x = 2$ pontban metsző sík egyenlete. Az $y = 3$ sík az y tengelyre az $y = 3$ pontban állított merőleges sík. A $z = 5$ sík az a sík, amely a z-tengelyt merőlegesen metszi a $z = 5$ pontban. A 12.3. ábra az $x = 2$, $y = 3$, $z = 5$ síkokat, valamint $(2,3,5)$ metszéspontjukat mutatja.

A 12.3. ábrán látható, hogy az $x = 2$, $y = 3$ síkok metszésvonala a z-tengellyel párhuzamos. Ezt az egyenest az $x = 2$, $y = 3$ egyenletpárral lehet leírni. Az (x,y,z) pont akkor és csak akkor van rajta ezen az egyenesen, ha $x = 2$ és $y = 3$. Hasonlóképpen, az $y = 3$ és $z = 5$ síkok metszésvonalát meghatározza az $y = 3$, $z = 5$ egyenletpár. Ez az egyenes párhuzamos az x-tengellyel. Végül az $x = 2$ és $z = 5$ síkok y-tengellyel párhuzamos metszésvonalát felírhatjuk az $x = 2$, $z = 5$ egyenletpárral.

A következő példákban koordináta-egyenleteket és -egyenlőtlenségeket fogunk összepárosítani az általuk definiált ponthalmazokkal.

1. PÉLDA: Egyenletek és egyenlőtlenségek geometriai interpretációja

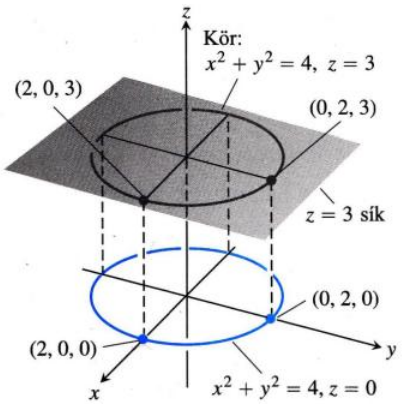
(a) $z \geq 0$	Az xy-síkot és a fölötte lévő pontokat magában foglaló féltér.
(b) $x = -3$	Az $x = -3$ pontban az x-tengelyre merőlegesen állított sík. Ez a sík párhuzamos az yz-síkkal, s három egységgel mögötte húzódik.
(c) $z = 0, x \leq 0, y \geq 0$	Az xy-sík második negyede.
(d) $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$	Az első oktáns.
(e) $-1 \leq y \leq 1$	Az $y = -1$ és $y = 1$ síkok közötti sáv (beleértve a síkokat is).
(f) $y = -2, z = 2$	Az $y = -2$ és $z = 2$ síkok metszésvonala. Másként megfogalmazva a $(0,-2,2)$ ponton átmenő, x-tengellyel párhuzamos egyenes. □

2. PÉLDA: Egyenletek ábrázolása

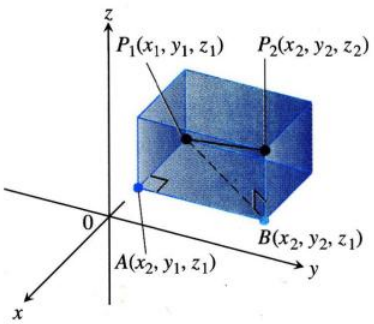
Mely $P(x,y,z)$ pontok elégítik ki az

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{és} \quad z = 3$$

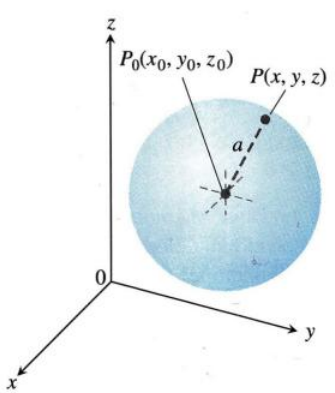
egyenleteket?



12.4. ÁBRA: Az $x^2+y^2=4$ kör a $z=3$ síkon (2. példa).



12.5. ÁBRA: A P_1 és P_2 pontok távolságát úgy kapjuk meg, hogy a P_1BP_2 és P_1AB háromszögekre alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt.



12.6. ÁBRA: Az (x_0,y_0,z_0) középpontú, a sugarú gömb sztenderd egyenlete: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$.

Megoldás: Ezek a pontok a $z=3$ vízszintes síkon vannak rajta, s ezen a síkon az $x^2+y^2=4$ kört rajzolják ki. Ezt a ponthalmazt „a $z=3$ sík $x^2+y^2=4$ körének", vagy egyszerűen csak az „$x^2+y^2=4$, $z=3$ körnek" nevezzük (12.4. ábra). □

Távolságok és gömbök a térben

Az xy-sík két pontjának távolságára megismert képletet a térbeli pontokra is kiterjeszthetjük.

A $P_1(x_1,y_1,z_1)$ és $P_2(x_2,y_2,z_2)$ pontok távolsága:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Bizonyítás: Készítsünk egy olyan téglatestet, amelynek két átellenes csúcsa P_1 és P_2, oldallapjai pedig párhuzamosak a koordinátasíkokkal (12.5. ábra). Ha $A(x_2,y_1,z_1)$ és $B(x_2,y_2,z_1)$ a téglatestnek az ábrán jelzett csúcsai, akkor a P_1A, AB és BP_2 oldalélek hossza:

$$|P_1A| = |x_2-x_1|, \qquad |AB| = |y_2-y_1|, \qquad |BP_2| = |z_2-z_1|.$$

Mivel a P_1BP_2 és P_1AB háromszögek derékszögű háromszögek, a Pitagorasz-tétel alapján

$$|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2+|BP_2|^2 \quad \text{és} \quad |P_1B|^2 = |P_1A|^2+|AB|^2$$

(lásd a 12.5. ábrát).

Így

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= |P_1B|^2+|BP_2|^2 \\ &= |P_1A|^2+|AB|^2+|BP_2|^2 \\ &= |x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2+|z_2-z_1|^2 \\ &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2. \end{aligned}$$

Ezért

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

□

3. PÉLDA: **Két pont távolságának meghatározása**

A $P_1(2,1,5)$ és a $P_2(-2,3,0)$ pontok távolsága:

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= \sqrt{(-2-2)^2+(3-1)^2+(0-5)^2} \\ &= \sqrt{16+4+25} \\ &= \sqrt{45} \approx 6{,}708. \end{aligned}$$

□

A távolságképlet alapján a gömb egyenletét is felírhatjuk (12.6. ábra). A $P(x,y,z)$ pont pontosan akkor van rajta a $P_0(x_0,y_0,z_0)$ középpontú, a sugarú gömbön, ha $|P_0P|=a$ vagyis

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = a^2.$$

Az (x_0,y_0,z_0) középpontú, a sugarú gömb egyenlete Descartes-féle koordináta-rendszerben:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = a^2.$$

4. PÉLDA: **Gömb középpontjának és sugarának meghatározása**

Határozzuk meg az

$$x^2+y^2+z^2+3x-4z+1=0$$

egyenletű kör sugarát és középpontját!

Megoldás: A gömb sugarát és középpontját úgy határozzuk meg, mint a kör sugarát és középpontját: az x-es, y-os és z-s tagokat teljes négyzetté egészítjük ki. Ebből az alakból már ki lehet olvasni a középpont koordinátáit és a sugár nagyságát. Esetünkben

$$x^2+y^2+z^2+3x-4z+1=0$$
$$(x^2+3x)+y^2+(z^2-4z)=-1$$
$$\left(x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)+y^2+\left(z^2-4z+\left(\frac{-4}{2}\right)^2\right)=-1+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{-4}{2}\right)^2$$
$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=-1+\frac{9}{4}+4=\frac{21}{4}.$$

Ebből az alakból kiolvashatjuk, hogy $x_0=-3/2$, $y_0=0$, $z_0=2$ és $a=\sqrt{21}/2$. A gömb középpontjának koordinátái $(-3/2,0,2)$, sugara $\sqrt{21}/2$. □

5. PÉLDA: **Egyenletek és egyenlőtlenségek értelmezése**

(a) $x^2+y^2+z^2<4$ — Az $x^2+y^2+z^2=4$ gömb belseje.

(b) $x^2+y^2+z^2\le 4$ — Az $x^2+y^2+z^2=4$ gömb által határolt szilárd test. Másképpen az $x^2+y^2+z^2=4$ gömbtest a határával együtt.

(c) $x^2+y^2+z^2>4$ — Az $x^2+y^2+z^2=4$ gömb külseje.

(d) $x^2+y^2+z^2=4$, $z\le 0$ — Egy félgömb (az „alsó"), amelyet az $x^2+y^2+z^2=4$ gömbből az xy-sík (a $z=0$ sík) vág ki. □

Mint ahogy az xy-síkon is meg lehetett adni egy pont helyzetét polárkoordinátákkal (10.5. alfejezet), úgy a háromdimenziós térnek is léteznek az előbb bemutatott Descartes-koordináta-rendszertől eltérő, alternatív koordináta-rendszerei. Két ilyet be fogunk mutatni a 15.6. alfejezetben.

12.1. Feladatok

Halmazok, egyenletek és egyenlőtlenségek

Az 1–12. feladatban írjuk le geometriailag azokat a térbeli ponthalmazokat, amelyek kielégítik a feladatban megadott egyenletpárokat!

1. $x=2, y=3$

2. $x=-1, z=0$

3. $y=0, z=0$

4. $x=1, y=0$

5. $x^2+y^2=4, z=0$

6. $x^2+y^2=4, z=-2$

7. $x^2+z^2=4, y=0$

8. $x^2+z^2=1, x=0$

9. $x^2+y^2+z^2=1, x=0$

10. $x^2+y^2+z^2=25, y=-4$

11. $x^2+y^2+(z+3)^2=25, z=0$

12. $x^2+(y-1)^2+z^2=4, y=0$

Írjuk le azokat a ponthalmazokat, amelyek kielégítik a 13–18. feladatokban megadott egyenlőtlenségeket, illetve egyenlet–egyenlőtlenség párokat!

13. **(a)** $x\ge 0, y\ge 0, z=0$ **(b)** $x\ge 0, y\le 0, z=0$

14. **(a)** $0\le x\le 1$

(b) $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$

(c) $0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$

15. **(a)** $x^2+y^2+z^2\le 1$ **(b)** $x^2+y^2+z^2>1$

16. **(a)** $x^2+y^2\le 1, z=0$ **(b)** $x^2+y^2\le 1, z=3$

(c) $x^2+y^2\le 1$, z-re nincs megkötés

17. **(a)** $x^2+y^2+z^2=1, z\ge 0$

(b) $x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge 0$

18. **(a)** $x=y, z=0$

(b) $x=y$, z-re nincs megkötés

Írjuk fel egyetlen egyenlettel vagy egyenlőség-párral a 19–28. feladatokban megadott ponthalmazokat!

19. Az a sík, amely merőleges a(z)

(a) x-tengelyre és azt a $(3,0,0)$ pontban metszi,

(b) y-tengelyre és azt a $(0,-1,0)$ pontban metszi,

(c) z-tengelyre és azt a $(0,0,-2)$ pontban metszi.

20. Az a $(3,-1,2)$ ponton átmenő sík, amely merőleges az
(a) x-tengelyre, **(b)** y-tengelyre,
(c) z-tengelyre.

21. Az a $(3,-1,1)$ ponton átmenő sík, amely párhuzamos az
(a) xy-síkkal, **(b)** yz-síkkal,
(c) xz-síkkal.

22. Az a 2 sugarú, $(0,0,0)$ középpontú kör, amely az
(a) xy-síkban, **(b)** yz-síkban,
(c) xz-síkban
fekszik.

23. Az a 2 sugarú, $(0,2,0)$ középpontú kör, amely az
(a) xy-síkban, **(b)** yz-síkban,
(c) $y=2$ síkban
fekszik.

24. Az az 1 sugarú $(-3,4,1)$ középpontú kör, amely az
(a) xy-síkkal, **(b)** yz-síkkal,
(c) xz-síkkal
párhuzamos síkban fekszik.

25. Az a $(3,-1,2)$ ponton átmenő egyenes, amely párhuzamos az
(a) x-tengellyel, **(b)** y-tengellyel,
(c) z-tengellyel.

26. Azoknak a pontoknak a halmaza a térben, amelyek egyenlő távolságra vannak az origótól és a $(0,2,0)$ ponttól.

27. Az a kör, amelyben az $(1,1,3)$ ponton átmenő, a z-tengelyre merőleges sík metszi az origó középpontú 5 egység sugarú gömböt.

28. Azoknak a pontoknak a halmaza a térben, amelyek 2 egységnyi távolságra vannak a $(0,0,1)$ ponttól, ugyanakkor 2 egység távolságra vannak a $(0,0,-1)$ ponttól is.

Írjunk fel egyenlőtlenséget a 29–34. feladatokban megadott ponthalmazokra!

29. A $z=0$ és $z=1$ síkok által határolt sáv (a határoló síkokat is beleértve).

30. Az az első oktánsbeli tömör kocka, amelyet a koordinátasíkok, valamint az $x=2$, $y=2$ és $z=1$ síkok határolnak.

31. Az a féltér, amely az xy-sík pontjaiból és e sík alatt lévő pontokból áll.

32. Az origó középpontú, 1 sugarú gömb felső félgömbje.

33. Az 1 sugarú, $(1,1,1)$ középpontú gömb **(a)** belseje, **(b)** külseje.

34. Az a zárt tartomány, amelyet az origó középpontú 1, illetve 2 sugarú gömbök határolnak. (A *zárt* szó azt jelenti, hogy a gömbfelületeket is a tartományhoz tartozónak tekintjük. Ha a gömbfelületeket nem akarjuk a tartományhoz sorolni, akkor a gömbfelületek által határolt *nyílt* tartományról beszélünk. Analóg ez a definíció az intervallumoknál szokásossal: *zárt* intervallumról beszélünk, ha a végpontokat is hozzászámítjuk, és *nyílt* intervallumról, ha a végpontoktól eltekintünk.)

Távolság

A 35–40. gyakorlatokban a P_1 és P_2 pontok távolságát kell meghatározni.

35. $P_1(1,1,1)$, $P_2(3,3,0)$

36. $P_1(-1,1,5)$, $P_2(2,5,0)$

37. $P_1(1,4,5)$, $P_2(4,-2,7)$

38. $P_1(3,4,5)$, $P_2(2,3,4)$

39. $P_1(0,0,0)$, $P_2(2,-2,-2)$

40. $P_1(5,3,-2)$, $P_2(0,0,0)$

Gömbök

A következő négy feladatban adjuk meg a középpontot és a sugarat.

41. $(x+2)^2+y^2+(z-2)^2=8$

42. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{21}{4}$

43. $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2+(z+\sqrt{2})^2=2$

44. $x^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{29}{9}$

A 45–48. gyakorlatokban megadtuk a gömb középpontját és sugarát. Írjuk fel az egyenletét!

45. $(1,2,3)$, $\sqrt{14}$

46. $(0,-1,5)$, 2

47. $(-2,0,0)$, $\sqrt{3}$

48. $(0,-7,0)$, 7

A 49–52. gyakorlatokban megadtuk a gömb egyenletét! Mekkora a sugara és hol van a középpontja?

49. $x^2+y^2+z^2+4x-4z=0$

50. $x^2+y^2+z^2-6y+8z=0$

51. $2x^2+2y^2+2z^2+x+y+z=9$

52. $3x^2+3y^2+3z^2+2y-2z=9$

Elmélet példákkal

53. Keressünk képletet a $P(x,y,z)$ pont és az
(a) x-tengely, **(b)** y-tengely,
(c) z-tengely
távolságára!

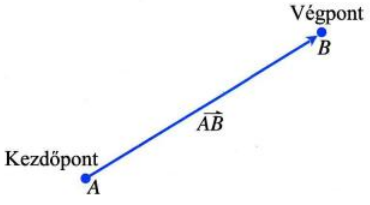
54. Keressünk képletet a $P(x,y,z)$ pont és az
(a) xy-sík, **(b)** yz-sík,
(c) xz-sík
távolságára!

55. Határozzuk meg annak a háromszögnek a kerületét, amelynek csúcspontjai az $A(-1,2,1)$, $B(1,-1,3)$, $C(3,4,5)$ pontok!

56. Mutassuk meg, hogy a $P(3,1,2)$ pont azonos távolságra van az $A(2,-1,3)$ és a $B(4,3,1)$ ponttól!

12.2. Vektorok

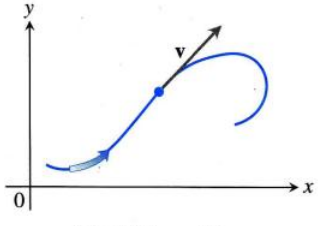
Vannak olyan mennyiségek, amelyeket egyszerűen csak a nagyságuk determinál. Például a tömeg, az idő, a hosszúság megadásához elegendő egy szám és egy alkalmasan választott mértékegység. Az erő, az elmozdulás vagy a sebesség megadásához azonban több információra van szükség. Ha egy test elmozdulását szeretnénk leírni, akkor meg kell mondanunk azt is, hogy milyen irányban mozdult el a test, és azt is, hogy mekkora távolságra. Valamely test sebességének megadásához tudnunk kell merre mozog a test és azt is, hogy milyen sebességgel.



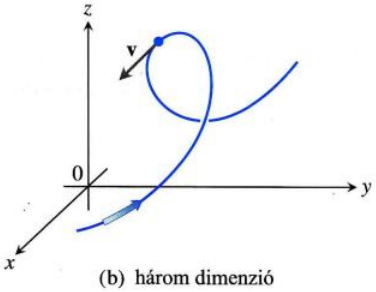
12.7. ÁBRA: Az $\vec{AB}$ irányított szakasz.

Vektorok koordinátái

Az erőhöz, az elmozduláshoz és a sebességhez hasonló mennyiségeket *vektoroknak* nevezzük és irányított szakaszként ábrázoljuk őket (12.7. ábra). A nyíl a hatás irányába mutat, hossza pedig megadja a hatás nagyságát egy alkalmasan megválasztott egységben. Például az erő vektora abba az irányba mutat, amelyben az erő hat, a vektor hossza pedig az erő „erősségének" mértéke; a sebességvektor a mozgás irányába mutat, hossza pedig a mozgó test sebességének a nagysága. A 12.8. ábrán a síkban vagy a térben mozgó részecske **v** sebességvektorát rajzoltuk meg a részecske pályájának egy pontjában. (A vektorfogalomnak ezt az alkalmazását tárgyaljuk majd a 13. fejezetben.)



(a) két dimenzió



(b) három dimenzió

12.8. ÁBRA: (a) Síkban vagy (b) térben mozgó részecske **v** sebességvektora. A nyíl hegye a mozgás irányába mutat.

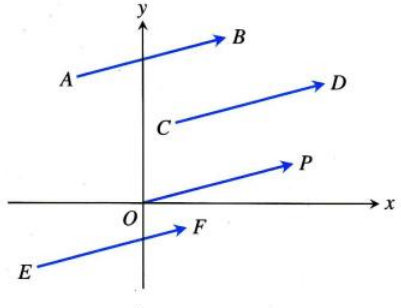
DEFINÍCIÓ: Vektor, kezdő- és végpont, hossz

A síkbeli **vektor** egy irányított szakasz. Az $\vec{AB}$ irányított szakasz **kezdőpontja** az A pont, **végpontja** a B pont; **hosszát** $|\vec{AB}|$-vel jelöljük. Két vektor **egyenlő**, ha a hosszuk és az irányuk is megegyezik.

A vektorábrázolásra szolgáló nyilak kezdőpontjuk helyzetétől függetlenül ugyanazt a vektort jelentik, ha ugyanakkora a hosszuk és ugyanabba az irányba mutatnak (12.9. ábra).

A tankönyvek gyakran félkövér kisbetűvel jelölik a vektorokat, például **u**-val, **v**-vel, **w**-vel. Néha félkövér nagybetűt is használunk, például az erőnek **F** a szokásos jelölése. Kéziratban találkozhatunk a betű fölé rajzolt pici nyíllal is: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{F}$. A vektorok algebrai reprezentációjára is szükségünk van, s az többet mond majd el a vektor irányáról.

Legyen $\mathbf{v} = \vec{PQ}$. Létezik egy olyan irányított szakasz, amely egyenlő $\vec{PQ}$-val és kezdőpontja az origó (12.10. ábra). Ez a **v** vektor **alaphelyzete**, s **v**-t általában ezzel a vektorral reprezentáljuk. Amennyiben **v** alaphelyzetben van, úgy megadhatjuk egyetlen ponttal, a végpontjával. A végpontot pedig annak (v_1, v_2, v_3) koordinátáival adjuk meg. Ha **v** síkbeli vektor, úgy a végpontnak csak két koordinátája van: (v_1, v_2).



12.9. ÁBRA: Ennek az egy síkban fekvő négy nyílnak (irányított szakasznak) ugyanakkora a hossza és az irányuk is megegyezik. Ezért ugyanazt a vektort reprezentálják, s így $\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{OP} = \vec{EF}$.

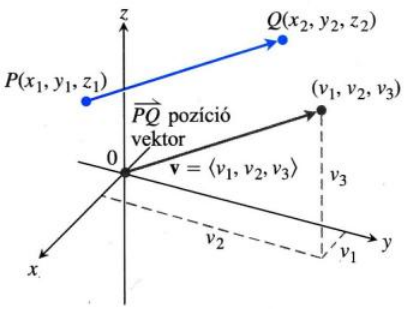
DEFINÍCIÓ: Koordinátás alak

Ha a sík **kétdimenziós v vektor**a egyenlő azzal a vektorral, amelynek kezdőpontja az origóban van, végpontjának koordinátái pedig a derékszögű koordináta-rendszerben (v_1, v_2), akkor **v** koordinátás alakja:

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Ha a **háromdimenziós v vektor** egyenlő azzal a vektorral, amelynek kezdőpontja az origóban van, végpontjának koordinátái pedig a derékszögű koordináta-rendszerben (v_1, v_2, v_3), akkor **v** koordinátás alakja:

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle.$$



12.10. ÁBRA: Alaphelyzetben a $\vec{PQ}$ vektor kezdőpontja az origóba esik. A $\vec{PQ}$ irányított szakasz és **v** párhuzamosak és egyenlő hosszúak.

Tehát a kétdimenziós vektor valós számokból álló rendezett pár: $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$, a háromdimenziós vektor pedig valós, rendezett számhármas: $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. v_1, v_2 és v_3 a **v** komponensei vagy koordinátái.

Vegyük észre, hogy ha a $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vektor a $\vec{PQ}$ irányított szakaszt reprezentálja, amelynek a $P(x_1, y_1, z_1)$ pont a kezdőpontja és a $Q(x_2, y_2, z_2)$ pont a végpontja, akkor $x_1 + v_1 = x_2$, $y_1 + v_2 = y_2$ és $z_1 + v_3 = z_2$ (12.10. ábra). Tehát $v_1 = x_2 - x_1$, $v_2 = y_2 - y_1$ és $v_3 = z_2 - z_1$ a $\vec{PQ}$ vektor komponensei.

Összegezve, ha adva vannak a $P(x_1, y_1, z_1)$ és a $Q(x_2, y_2, z_2)$ pontok valamint az alaphelyzetű $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vektor, amely egyenlő $\vec{PQ}$-val, akkor

$$\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle.$$

Ha **v** kétdimenziós, $P(x_1, y_1)$ és a $Q(x_2, y_2)$ pedig **v** síkjának pontjai, akkor $\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$. A síkbeli vektoroknak nincs harmadik összetevőjük. Ezzel a megállapodással elég felépítenünk a háromdimenziós vektorok algebráját: ha a vektor kétdimenziós (síkvektor), akkor a harmadik komponenst egyszerűen elhagyjuk.

Két vektor akkor és csak akkor egyenlő, ha alaphelyzetben ugyanaz a végpontjuk. Tehát $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ és $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ akkor és csak akkor egyenlő, ha $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ és $u_3 = v_3$.

A $\vec{PQ}$ vektor **nagysága** vagy **hossza** bármely vele ekvivalens irányított szakasz reprezentációjának a hossza. Nevezetesen, ha $\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$ a $\vec{PQ}$ vektornak megfelelő alaphelyzetű vektor, akkor a **v** vektor $|\mathbf{v}|$-vel vagy $||\mathbf{v}||$-vel jelölt hosszát a távolságképletből kapjuk meg.

A $\mathbf{v} = \vec{PQ}$ vektor **nagysága** vagy **hossza** a nemnegatív

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

szám (12.10. ábra).

A vektor hosszát a vektor **abszolút értékének** is szoktuk nevezni. Csak a $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$ vagy $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$ alakú **nullvektornak** nulla a hossza. Ez egyben az az egyetlen olyan vektor is, amelynek nincs meghatározott iránya.

1. PÉLDA: A vektor koordinátái és a vektor hossza

Határozzuk meg a $P(-3, 4, 1)$ kezdő- és $Q(-5, 2, 2)$ végpontú vektor **(a)** koordinátáit és **(b)** hosszát!

Megoldás:

1. A $\vec{PQ}$ vektort reprezentáló **v** vektor komponensei:

$$v_1 = x_2 - x_1 = -5 - (-3) = -2, \quad v_2 = y_2 - y_1 = 2 - 4 = -2$$

és

$$v_3 = z_2 - z_1 = 2 - 1 = 1.$$

A $\vec{PQ}$ vektor koordinátás alakja:

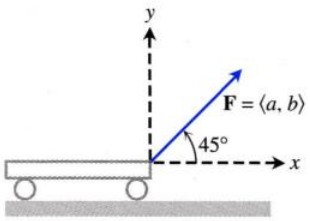
$$\mathbf{v} = \langle -2, -2, 1 \rangle.$$

2. A $\mathbf{v} = \vec{PQ}$ vektor nagysága:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{9} = 3. \qquad \square$$

2. PÉLDA: A kocsit mozgató erő

Egy kiskocsit sima vízszintes felületen 20 N nagyságú erővel húzunk. Az erő iránya 45°-os szöget zár be a talajjal (12.11. ábra). Mekkora *effektív* erő mozgatja a kocsit?



12.11. ÁBRA: A kocsit mozgató erőt a 20 (N) nagyságú, a vízszintessel (az x-tengely pozitív felével) 45°-os szöget bezáró $\mathbf{F}$ vektorként ábrázoljuk. (2. példa).

Megoldás: A feladatban szereplő elmozdulás és a vektorok egy síkban is szemléltethetők. Fizikából tudjuk, hogy effektív erő az $\mathbf{F} = \langle a, b \rangle$ erő vízszintes komponense:

$$a = |\mathbf{F}| \cos 45^\circ = 20 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx 14{,}14 \text{ N}.$$

Vegyük észre, hogy $\mathbf{F}$ kétdimenziós vektor. □

Vektoralgebrai műveletek

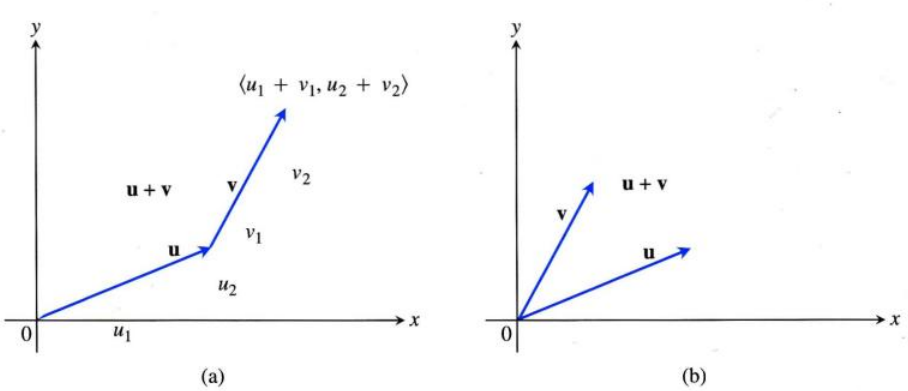
A két legfontosabb vektorművelet a *vektorok összeadása* és a *vektor skalárral való szorzása*. A **skalár** egyszerűen csak egy valós szám, s azért hívjuk így, mert ezzel is nyomatékosítani akarjuk, hogy nem vektorról van szó.

> DEFINÍCIÓ: **Vektorok összeadása és vektor skalárral való szorzása**
>
> Legyenek $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ és $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vektorok, k pedig valamilyen skalár.
> **Összeadás:** $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3 \rangle$
> **Skalárral való szorzás:** $k\mathbf{u} = \langle ku_1, ku_2, ku_3 \rangle$
> A $k\mathbf{u} + h\mathbf{v}$ kifejezés az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok **lineáris kombinációja**.

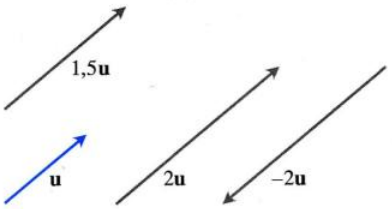
Koordinátákkal adott vektorokat úgy adunk össze, hogy összeadjuk a koordinátáikat. Skalárral úgy szorzunk vektort, hogy a vektor minden komponensét megszorozzuk vele. Kétdimenziós vektorokra a definíciót annak figyelembe vételével kell alkalmazni, hogy a kétdimenziós vektornak csak két komponense van.

Az összeadási szabályt síkbeli vektorokra a 12.12a ábra szemlélteti, ahol az egyik vektor kezdőpontját a másik vektor végpontjába helyeztük. A vektorösszeadás másik (**paralelogramma-szabály**nak nevezett) interpretációját mutatja a 12.12b ábra, ahol a két vektor összege, amit **eredőnek** is nevezünk, a paralelogramma átlója lesz. A fizikában az erőt, a sebességet, a gyorsulást és még sok más mennyiséget vektorként kell összeadni. Így ha például egy részecskére elektromos és gravitációs erő is hat, akkor a részecskére ható erők eredőjét a két erővektor összegezésével kell kiszámolni.

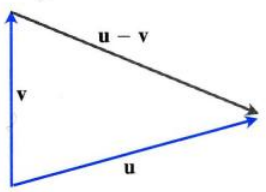
A 12.13. ábra mutatja a k skalár és a $\mathbf{u}$ vektor szorzatának geometria jelentését. Ha $k > 0$, akkor $k\mathbf{u}$ iránya megegyezik $\mathbf{u}$ irányával; ha $k < 0$, akkor $k\mathbf{u}$ iránya ellentétes $\mathbf{u}$ irányával. Az $\mathbf{u}$ és a $k\mathbf{u}$ hosszát összevetve:



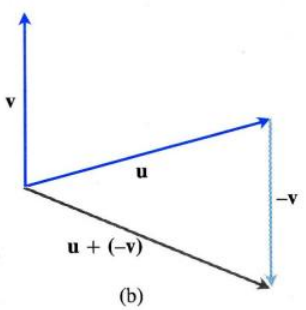
12.12. ÁBRA: (a) A vektorösszeadás geometriai értelmezése. (b) A paralelogramma-szabály.



12.13. ÁBRA: Az **u** vektor néhány skalárral való szorzata.



(a)



(b)

12.14. ÁBRA: Ha az $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ vektorhoz hozzáadjuk **v**-t, **u**-t kapjuk.

$$|k\mathbf{u}| = \sqrt{(ku_1)^2+(ku_2)^2+(ku_3)^2} = \sqrt{k^2(u_1^2+u_2^2+u_3^2)}$$
$$= \sqrt{k^2}\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2} = |k||\mathbf{u}|,$$

tehát a $k\mathbf{u}$ hossza a k skalár abszolút értékének és **u** hosszának a szorzata. A $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ vektornak a hossza megegyezik **u** hosszával, csak az iránya ellentétes.

Két vektor $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ különbségén az

$$\mathbf{u}-\mathbf{v} = \mathbf{u}+(-\mathbf{v})$$

vektort értjük. Ha $\mathbf{u} = \langle u_1,u_2,u_3\rangle$ és $\mathbf{v} = \langle v_1,v_2,v_3\rangle$, akkor

$$\mathbf{u}-\mathbf{v} = \langle u_1-v_1, u_2-v_2, u_3-v_3\rangle.$$

Vegyük észre, hogy $(\mathbf{u}-\mathbf{v})+\mathbf{v} = \mathbf{u}$, azaz $(\mathbf{u}-\mathbf{v})$ és **v** összeadása **u**-t eredményez (12.14a ábra).

A 12.14b ábra az $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ különbséget mutatja, mint a $\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$ összeget.

3. PÉLDA: **Műveletek vektorokkal**

Legyen $\mathbf{u} = (-1,3,1)$ és $\mathbf{v} = (4,7,0)$. Határozzuk meg a következő kifejezések értékét:

(a) $2\mathbf{u}+3\mathbf{v}$ **(b)** $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ **(c)** $|\frac{1}{2}\mathbf{u}|$!

Megoldás: **(a)** $2\mathbf{u}+3\mathbf{v} = 2\langle -1,3,1\rangle + 3\langle 4,7,0\rangle = \langle -2,6,2\rangle + \langle 12,21,0\rangle =$
$= \langle 10,27,2\rangle$

(b) $\mathbf{u}-\mathbf{v} = \langle -1,3,1\rangle - \langle 4,7,0\rangle = \langle -1-4,3-7,1-0\rangle = \langle -5,-4,1\rangle$

(c) $|\frac{1}{2}\mathbf{u}| = |\langle -\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{3}{2})^2+(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{11}.$ □

A vektorműveletek a közönséges aritmetikai műveletek számos tulajdonságát megőrzik. Ezeket a tulajdonságokat könnyen ellenőrizhetjük közvetlenül a vektorösszeadás és a számmal való szorzás definíciója alapján.

Vektorműveletek tulajdonságai

Legyenek **u**, **v**, **w** vektorok, a, b pedig skalárok.

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$	**2.** $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$
3. $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$	**4.** $\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
5. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$	**6.** $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
7. $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$	**8.** $a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$
9. $(a+b)\mathbf{u} = a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$	

A vektorok egyik fontos alkalmazási területe a navigáció.

4. PÉLDA: **A talajhoz viszonyított sebesség és irány meghatározása**

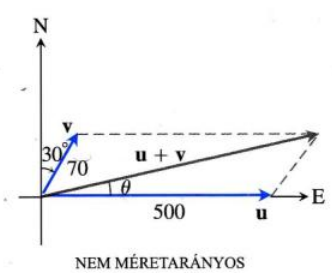
Egy Boeing-767-es nyugodt légköri viszonyok mellett 800 km/h sebességgel keleti irányba repül. Egyszercsak 110 km/h erősségű délkeleti szél támad, amelynek iránya a repülési iránnyal 60°-os szöget zár be. A repülő a tájolót továbbra is a keleti irányon tartja, de a szél miatt repülési iránya és sebessége mégis megváltozik. Mi lesz az új irány és az új sebesség?

Megoldás: Ha **u** egyedül a gép sebességét jelöli, **v** pedig a szél sebességét, akkor $|\mathbf{u}| = 800$ és $|\mathbf{v}| = 110$ (12.15. ábra). A repülőgép talajhoz viszonyított sebessége az $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ *eredővektorral* lesz egyenlő. Ha az x-tengely keleti irányba mutat, az y-tengely pedig északra, akkor **u** és **v** komponensei:

$$\mathbf{u} = \langle 800,0\rangle \quad \text{és} \quad \mathbf{v} = \langle 110\cos 60°, 110\sin 60°\rangle = \langle 55, 55\sqrt{3}\rangle.$$

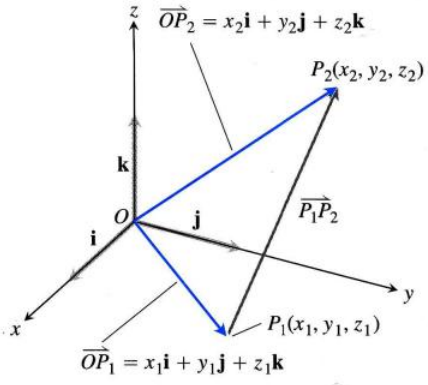
Ezért

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \langle 855, 55\sqrt{3}\rangle$$
$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}| = \sqrt{855^2+(55\sqrt{3})^2} \approx 860{,}3$$



NEM MÉRETARÁNYOS

12.15. ÁBRA: A repülőgép sebességét, illetve a szél sebességét reprezentáló vektorok a 4. példában.



12.16. ÁBRA: A P_1 pontból a P_2 pontba mutató $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+$ $+(z_2-z_1)\mathbf{k}$.

és

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\frac{55\sqrt{3}}{855} \approx 6{,}5°. \qquad \text{12.15. ábra}$$

A repülőgép talajhoz viszonyított sebessége hozzávetőleg 860,3 km/h, iránya pedig a keleti iránytól 6,5°-kal tér el északra. □

Egységvektorok

Az 1 hosszúságú vektort egységvektornak nevezzük. A koordinátatengelyek pozitív irányába mutató egységvektorok az

$$\mathbf{i} = \langle 1,0,0\rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0,1,0\rangle \quad \text{és} \quad \mathbf{k} = \langle 0,0,1\rangle$$

vektorok. Bármely $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ vektort felírhatunk ezeknek az egységvektoroknak *lineáris kombinációjaként* a következő módon:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle v_1, 0, 0\rangle + \langle 0, v_2, 0\rangle + \langle 0, 0, v_3\rangle \\ &= v_1\langle 1,0,0\rangle + v_2\langle 0,1,0\rangle + v_3\langle 0,0,1\rangle \\ &= v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}.\end{aligned}$$

A v_1 skalárt (számot) a $\mathbf{v}$ vektor **i-komponensének**, v_2-t **j-komponensének**, v_3-at **k-komponensének** nevezzük. A $P_1(x_1,y_1,z_1)$ pontból a $P_2(x_2,y_2,z_2)$ pontba mutató vektor koordinátásan tehát:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\mathbf{k}$$

(12.16. ábra)[1].

Amennyiben $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $|\mathbf{v}|$ hossza sem nulla és

$$\left|\frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}\right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|}|\mathbf{v}| = 1.$$

Azaz $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ egy $\mathbf{v}$ irányú egységvektor, a nemnulla $\mathbf{v}$ vektor **irányvektora**.

5. PÉLDA: Az irányvektor meghatározása

Határozzuk meg a $P_1(1,0,1)$ pontból a $P_2(3,2,0)$ pontba mutató vektorral azonos irányú $\mathbf{u}$ egységvektort!

Megoldás:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} &= (3-1)\mathbf{i}+(2-0)\mathbf{j}+(0-1)\mathbf{k} = 2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k} \\ |\overrightarrow{P_1P_2}| &= \sqrt{(2)^2+(2)^2+(-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3 \\ \mathbf{u} &= \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} = \frac{2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}}{3} = \frac{2}{3}\mathbf{i}+\frac{2}{3}\mathbf{j}-\frac{1}{3}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Az $\mathbf{u}$ vektor a $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektor irányvektora. □

6. PÉLDA: A sebesség kifejezése a sebesség abszolút értékének és a sebesség irányvektorának szorzataként

Fejezzük ki a $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ sebességvektort abszolút értékének és a mozgásirányába eső egységvektornak a szorzataként!

[1] Fontos kiegészítés: Egy vektor **i**-, **j**-, **k**-komponensei egyértelműen meg vannak határozva, azaz ugyanazt a vektort más számszorzókkal az **i**, **j**, **k** lineáris kombinációjaként nem lehet előállítani. Ha az előállításnál kiírjuk a teljes lineáris kombinációt, azaz az **i**, **j**, **k** vektorokat számszorzóikkal együtt, akkor ezek sorrendje tetszőleges, hiszen a vektorösszeadás kommutatív. Ha csak a komponenseket írjuk ki, akkor ezek sorrendje a szokásos módon kötött.

Megoldás: A $\mathbf{v}$ vektor abszolút értéke:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

A $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ vektor ugyanabba az irányba mutat, mint $\mathbf{v}$:

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{3\mathbf{i}-4\mathbf{j}}{5} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}. \qquad \square$$

Így

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = 5\left(\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}\right).$$

Összegezve, bármely nem nulla $\mathbf{v}$ vektort kifejezhetünk két fontos jellemző, a hosszúság és az irány szorzataként: $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

Ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, akkor
1. $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ a $\mathbf{v}$ irányú egységvektor;
2. A $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ egyenlőség $\mathbf{v}$-t hosszúságának és irányának szorzataként állítja elő.

7. PÉLDA: **Erővektor**

6 Newton nagyságú erő hat a $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ vektor irányában. Fejezzük ki $\mathbf{F}$-et nagyságának és irányának szorzataként!

Megoldás: Az erővektor hossza 6, iránya pedig $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, ezért

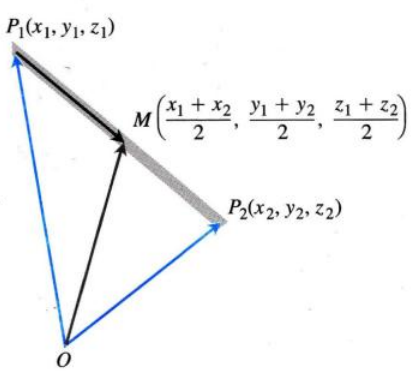
$$\mathbf{F} = 6\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = 6\frac{2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = 6\frac{2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}}{3} = 6\left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}\right). \qquad \square$$

Szakasz felezőpontja

A vektorok hasznosak a geometriában. Például egy szakasz felezőpontjának koordinátáit ki lehet számolni átlagolással.

A $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és $P_2(x_1, y_2, z_2)$ pontokat összekötő szakasz M **felezőpontjának** koordinátái:

$$\cdot\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$



12.17. ÁBRA: A felezőpont koordinátái P_1 és P_2 koordinátáinak számtani közepei.

Vegyük észre ugyanis (12.17. ábra), hogy

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= \vec{OP_1} + \frac{1}{2}(\vec{P_1P_2}) = \vec{OP_1} + \frac{1}{2}(\vec{OP_2} - \vec{OP_1}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{OP_1} + \vec{OP_2}) \\ &= \frac{x_1+x_2}{2}\mathbf{i} + \frac{y_1+y_2}{2}\mathbf{j} + \frac{z_1+z_2}{2}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

8. PÉLDA: **A felezőpont kiszámítása**

A $P_1(3,-2,0)$ és $P_2(7,4,4)$ pontokat összekötő szakasz felezőpontjának koordinátái:

$$\left(\frac{3+7}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (5,1,2). \qquad \square$$

12.2. Feladatok

Vektorok a síkban

Az 1–8. feladatokban legyen $\mathbf{u} = \langle 3,-2\rangle$ és $\mathbf{v} = \langle -2,5\rangle$. Határozzuk meg a megadott vektorok komponenseit és nagyságát (hosszát)!

1. $3\mathbf{u}$ **2.** $-2\mathbf{v}$ **3.** $\mathbf{u}+\mathbf{v}$

4. $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ **5.** $2\mathbf{u}-3\mathbf{v}$ **6.** $-2\mathbf{u}+5\mathbf{v}$

7. $\frac{3}{5}\mathbf{u}+\frac{4}{5}\mathbf{v}$ **8.** $-\frac{5}{13}\mathbf{u}+\frac{12}{13}\mathbf{v}$

A 9–16. feladatokban a vektor komponenseit kell meghatároznunk.

9. A vektor a $\vec{PQ}$ vektor, ahol $P = (1,3)$ és $Q = (2,-1)$.

10. A vektor az $\vec{OP}$ vektor, ahol O az origó, P pedig az RS szakasz felezőpontja, $R = (2,-1)$ és $S = (-4,3)$.

11. Az $A = (2,3)$ pontból az origóba mutató vektor.

12. $\vec{AB}$ és $\vec{CD}$ összege, ahol $A = (1,-1)$, $B = (2,0)$, $C = (-1,3)$ és $D = (-2,2)$.

13. Az x-tengely pozitív felével $\theta = 2\pi/3$ szöget bezáró egységvektor.

14. Az x-tengely pozitív felével $\theta = -3\pi/4$ szöget bezáró egységvektor.

15. A $\langle 0,1\rangle$ egységvektor origó körüli, az óramutató járásával megegyező irányú, 120°-os elforgatásával előálló egységvektor.

16. A $\langle 1,0\rangle$ egységvektor origó körüli, az óramutató járásával megegyező irányú, 135°-os elforgatásával előálló egységvektor.

Vektorok a térben

A 17–22. feladatokban fejezzük ki a megadott vektort $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ alakban!

17. $\vec{P_1P_2}$, ahol P_1 az $(5,7,-1)$ pont, P_2 pedig a $(2,9,-2)$ pont.

18. $\vec{P_1P_2}$, ahol P_1 az $(1,2,0)$ pont, P_2 pedig a $(-3,0,5)$ pont.

19. $\vec{AB}$, ahol A a $(-7,-8,1)$ pont, B pedig a $(-10,8,1)$ pont.

20. $\vec{AB}$, ahol A az $(1,0,3)$ pont, B pedig a $(-1,4,5)$ pont.

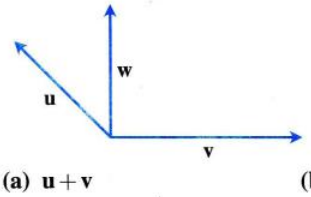
21. $5\mathbf{u}-\mathbf{v}$, ha $\mathbf{u} = \langle 1,1,-1\rangle$ és $\mathbf{v} = \langle 2,0,3\rangle$.

22. $-2\mathbf{u}+3\mathbf{v}$, ha $\mathbf{u} = \langle -1,0,2\rangle$ és $\mathbf{v} = \langle 1,1,1\rangle$.

Szerkesztés

A 23. és 24. feladatban másoljuk át egy papírlapra az $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorokat, majd szerkesszük meg a keresett vektorokat!

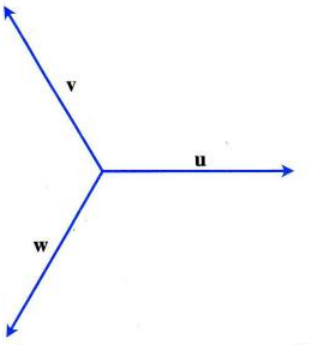
23.



(a) $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ **(b)** $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$

(c) $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ **(d)** $\mathbf{u}-\mathbf{w}$

24.



(a) $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ **(b)** $\mathbf{u}-\mathbf{v}+\mathbf{w}$

(c) $2\mathbf{u}-\mathbf{v}$ **(d)** $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$

Hossz és irány

A 25–30. feladatokban fejezzük ki a megadott vektort hosszának és irányvektorának szorzataként!

25. $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ **26.** $9\mathbf{i}-2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$

27. $5\mathbf{k}$ **28.** $\frac{3}{5}\mathbf{i}+\frac{4}{5}\mathbf{k}$

29. $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i}-\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$ **30.** $\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{3}}+\frac{\mathbf{j}}{\sqrt{3}}+\frac{\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$

31. Alább megadtuk a vektor hosszát és irányát. Írásos számítgatások nélkül adjuk meg magát a vektort!

Hossz	Irány
(a) 2	$\mathbf{u}$
(b) $\sqrt{3}$	$-\mathbf{k}$
(c) $\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}\mathbf{j}+\frac{4}{5}\mathbf{k}$
(d) 7	$\frac{6}{7}\mathbf{i}-\frac{2}{7}\mathbf{j}+\frac{3}{7}\mathbf{k}$

32. Alább megadtuk a vektor hosszát és irányát. Írásos számítgatások nélkül adjuk meg magát a vektort!

Hossz	Irány
(a) 7	$-\mathbf{j}$
(b) $\sqrt{2}$	$-\frac{3}{5}\mathbf{i}-\frac{4}{5}\mathbf{k}$
(c) $\frac{13}{12}$	$\frac{3}{13}\mathbf{i}-\frac{4}{13}\mathbf{j}-\frac{12}{13}\mathbf{k}$
(d) $a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$

33. Adjunk meg egy 7 egység hosszú, $\mathbf{v} = 12\mathbf{i}-5\mathbf{k}$ irányú vektort!

34. Adjunk meg egy olyan 3 egység hosszú vektort, amelynek iránya ellentétes a $\mathbf{v} = (1/2)\mathbf{i}-(1/2)\mathbf{j}-(1/2)\mathbf{k}$ vektorral!

Pontokkal megadott vektor, felezőpont

A 35–38. feladatokban keressük meg

(a) $\vec{P_1P_2}$ irányvektorát,

(b) a P_1P_2 szakasz felezőpontját!

35. $P_1(-1,1,5)$ $P_2(2,5,0)$

36. $P_1(1,4,5)$ $P_2(4,-2,7)$

37. $P_1(3,4,5)$ $P_2(2,3,4)$

38. $P_1(0,0,0)$ $P_2(2,-2,-2)$

39. Mi lesz az A pont, ha $\vec{AB} = \mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ és a B pont az $(5,1,3)$ pont?

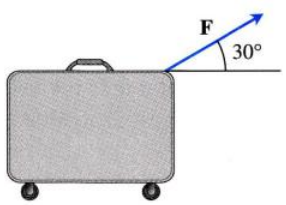
40. Mi lesz az A pont, ha $\vec{AB} = -7\mathbf{i}+3\mathbf{j}+82\mathbf{k}$ és a B pont a $(-2,-3,6)$ pont?

Elmélet példákkal

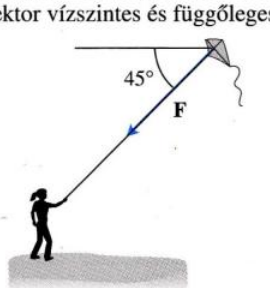
41. Lineáris kombináció: Legyen $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i}+\mathbf{j}$ és $\mathbf{w} = \mathbf{i}-\mathbf{j}$. Milyen a,b skalárok esetén lesz igaz, hogy $\mathbf{u} = a\mathbf{v}+b\mathbf{w}$?

42. Lineáris kombináció: Legyen $\mathbf{u} = \mathbf{i}-2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ és $\mathbf{w} = \mathbf{i}+\mathbf{j}$. Írjuk fel az $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2$ vektort, ahol $\mathbf{u}_1$ a $\mathbf{v}$-vel, $\mathbf{u}_2$ a $\mathbf{w}$-vel párhuzamos vektorok (lásd a 41. feladatot)!

43. Erővektor: Az alábbi ábrán látható bőröndöt $\mathbf{F}$ erővel húzzuk, ahol $|\mathbf{F}| = 10$ N. Keressük meg az $\mathbf{F}$ vektor $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ irányú összetevőit!



44. Erővektor: A papírsárkány zsinegjét 12 N erővel tarjuk ($|\mathbf{F}| = 10$ N). A zsineg 45°-os szöget zár be a vízszintessel. Keressük meg az $\mathbf{F}$ vektor vízszintes és függőleges összetevőit!



45. Sebesség: Egy repülőgép 800 km/h sebességgel északnyugati irányba repül, útvonala az északi iránnyal 25°-os szöget zár be. Írjuk fel a gép sebességét összetevőalakban úgy, hogy az x-tengely a keleti, az y-tengely pedig az északi irányba mutasson!

46. Sebesség: Egy repülőgép 600 km/h sebességgel délkeleti irányba repül, pályája a déli iránnyal 10°-os szöget zár be. Írjuk fel a gép sebességét összetevőalakban úgy, hogy az x-tengely a keleti, az y-tengely pedig az északi irányba mutasson!

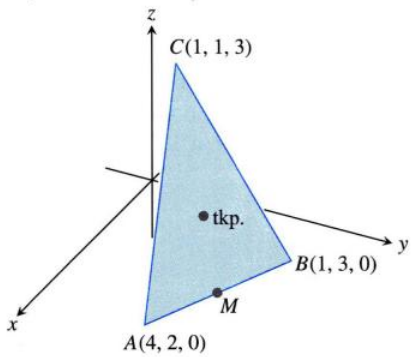
47. Helymeghatározás: Egy madár felrepül fészkéről és 5 km-t halad északkeleti irányba, kelettől 60°-kal északra, amikor is megpihen egy fán. Útját délkelet felé folytatja, 10 km megtétele után leszáll egy telefonpóznára. Vegyük fel a koordinátarendszert úgy, hogy az origó legyen a fészek, az x-tengely a keleti, az y-tengely pedig az északi irányba mutasson!

(a) Mik lesznek a fa koordinátái?

(b) Melyik pontban van a telefonpózna?

48. Hasonló háromszögek segítségével írjuk fel annak a Q pontnak a koordinátáit, amely a $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ pontokat összekötő szakaszt $p/q = r$ arányban osztja!

49. Háromszög súlyvonalai: Egy vékony, egyenletes sűrűségű, háromszög alakú lemez csúcsai legyenek az A, B, C pontok (lásd az ábrát).



(a) Írjuk fel a C pontból az AB oldal M felezőpontjába mutató vektort!

(b) Írjuk fel a C pontból az CM szakasz kétharmadába mutató vektort!

(c) Határozzuk meg a súlyvonalak metszéspontjának koordinátáit! Ez a pont lesz a lemez tömegközéppontja (tkp).

50. Írjuk fel az origóból annak a háromszögnek a súlypontjához vezető vektort, amelynek csúcsai

$$A(1,-1,2), \quad B(2,1,3) \quad \text{és} \quad C(-1,2,-1).$$

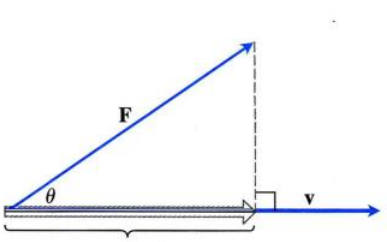
51. Legyen A,B,C,D tetszőleges négy pont a térben. Mutassuk meg, hogy az $ABCD$ (nem feltétlenül síkbeli négyszög) szemközti oldalainak felezőpontjait összekötő szakaszok metszik egymást! (*Útmutató:* Mutassuk meg, hogy a két szakasznak ugyanaz a pont a felezőpontja!)

52. Egy n oldalú szabályos sokszög középpontjaiból a csúcsokhoz vezető vektorokat rajzolunk. Mutassuk meg, hogy e vektorok összege a nullvektor! (*Útmutató:* Változik-e a vektorok összege, ha a sokszöget a középpontja körül forgatjuk?)

53. Legyenek A,B,C egy háromszög csúcsai, a, b és c rendre a csúcsokkal szemközti oldal felezőpontjai. Mutassuk meg, hogy $\vec{Aa}+\vec{Bb}+\vec{Cc} = 0$!

54. Egységvektorok a síkon: Mutassuk meg, hogy a sík egy egységvektorát kifejezhetjük $\mathbf{u} = (\cos\theta)\mathbf{i}+(\sin\theta)\mathbf{j}$ alakban, s ez az $\mathbf{u}$ vektor úgy áll elő, hogy az $\mathbf{i}$ egységvektort az óramutató járásával ellentétes irányban θ szöggel elforgatjuk. Miért igaz ez az állítás a sík *bármely* egységvektorára?

12.3. Skalárszorzat



12.18. ÁBRA: Az **F** erő **v** vektor irányú összetevőjének, azaz **F** **v**-re eső vetületének a nagysága $|\mathbf{F}|\cos\theta$.

Gyakran szükség van arra, hogy ismerjük egy testre ható **F** erőnek a mozgás irányába eső összetevőjét. Ha **v** az **F** erő támadáspontjában a mozgás pályájához húzott érintővel párhuzamos vektor, akkor a problémát úgy fogalmazhatjuk meg, hogy szeretnénk megtudni **F** **v** irányú összetevőjét. A 12.18. ábrán látható, hogy a keresett skaláris mennyiség $|\mathbf{F}|\cos\theta$, ahol θ a **F** és **v** vektorok által közbezárt szög.

Ebben a paragrafusban meg fogjuk látni, hogyan lehet egyszerűen kiszámítani két vektor által közbezárt szöget a vektorok komponenseivel. A számítás kulcsa a *skalárszorzatnak* nevezett kifejezés, *amit belső szorzatként, skaláris szorzatként* is emlegetnek. Azért beszélünk skalárszorzatról, mert az eredmény skalár, nem vektor. Miután megismerkedtünk a skalárszorzattal, segítségével fogjuk kiszámítani egy vektor másik vektorra vetett vetületét (2.18. ábra) és valamely állandó erő által végzett munkát.

Vektorok által közbezárt szög

Ha az **u** és **v** vektorok kezdőpontja egybeesik, akkor valamilyen $0 \le \theta \le \pi$ szöget zárnak be egymással (12.19. ábra). Ha a két vektor nem esik egy egyenesbe, akkor a θ szöget a vektorokat tartalmazó síkon mérjük. Ha egy egyenesbe esnek, akkor az általuk bezárt szög 0 abban az esetben, ha a két vektor egy irányba mutat és π ha egymással ellentétesek. A θ szöget a **u** és a **v** **vektorok által bezárt szög**nek nevezzük. Az 1. tétel egy összefüggést szolgáltat ennek a szögnek a meghatározásához.

1. TÉTEL: Két vektor által közbezárt szög

A nemnulla $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vektorok által közbezárt θ szögre

$$\theta = \arccos\left(\frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right).$$



12.19. ÁBRA: Az **u** és a **v** vektorok szöge.

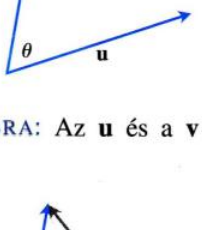
Még mielőtt bebizonyítanánk az 1. tételt (mely a koszinusztétel következménye), fordítsuk figyelmünket a θ szög kiszámítására szolgáló képletben felbukkanó $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ kifejezésre.

DEFINÍCIÓ: Skalárszorzat

Az $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vektorok **uv skalárszorzatának** nevezzük az

$$\mathbf{uv} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

mennyiséget.



12.20. ÁBRA: A paralelogramma-szabály alapján: $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$.

1. PÉLDA: A skalárszorzat kiszámítása

(a) $\langle 1, -2, -1 \rangle \cdot \langle -6, 2, -3 \rangle = 1 \cdot -6 + -2 \cdot 2 + -1 \cdot -3 = -6 - 4 + 3 = -7$

(b) $\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) \cdot (4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \cdot 4 + 3 \cdot -1 + 1 \cdot 2 = 1$ □

Az 1. tétel bizonyítása: A koszinusztételt a 12.20. ábra háromszögére alkalmazva kapjuk, hogy

$$|\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$$
$$2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{w}|^2.$$

Mivel $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ komponensei: $\langle u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3 \rangle$. Így

$$|\mathbf{u}|^2 = \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\right)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

$$|\mathbf{v}|^2 = \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\right)^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

$$|\mathbf{w}|^2 = \left(\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}\right)^2$$

$$= (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2$$

$$= u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2 + u_3^2 - 2u_3v_3 + v_3^2 \text{ és}$$

$$|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{w}|^2 = 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3).$$

Ezért

$$2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{w}|^2 = 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$$

$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

$$\cos\theta = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}.$$

Így

$$\theta = \arccos\left(\frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right). \qquad \square$$

A skalárszorzat definícióját felhasználva θ előző kifejezését átírhatjuk

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)$$

alakba.

2. PÉLDA: **Két térbeli vektor szögének meghatározása**

Mekkora szöget zárnak be egymással az $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ és $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ vektorok?

Megoldás: Használjuk a fenti képletet:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(6) + (-2)(3) + (-2)(2) = 6 - 6 - 4 = -4$$

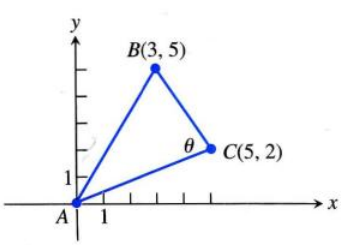
$$|\mathbf{u}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(6)^2 + (3)^2 + (2)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{-4}{(3)(7)}\right) \approx 1{,}76 \text{ radián.} \qquad \square$$

A szögösszefüggést kétdimenziós vektorokra is alkalmazhatjuk.



12.21. ÁBRA: A 3. példában leírt háromszög.

3. PÉLDA: **Háromszög szögének meghatározása**

Számítsuk ki az $A = (0,0)$, $B = (3,5)$ és $C(5,2)$ pontok által alkotott ABC háromszög θ szögét (12.21. ábra)!

Megoldás: θ a $\vec{CA}$ és $\vec{CB}$ vektorok által közbezárt szög. Írjuk fel komponensalakban ezeket a vektorokat:

$$\vec{CA} = \langle -5, -2 \rangle \quad \text{és} \quad \vec{CB} = \langle -2, 3 \rangle.$$

Először is számítsuk ki e vektorok skalárszorzatát és abszolút értékét:

$$\vec{CA}\cdot\vec{CB} = (-5)(-2)+(-2)(3) = 4$$
$$|\vec{CA}| = \sqrt{(-5)^2+(-2)^2} = \sqrt{29}$$
$$|\vec{CB}| = \sqrt{(-2)^2+(3)^2} = \sqrt{13}.$$

Ezután a szögképletet alkalmazva kapjuk, hogy

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{CA}\cdot\vec{CB}}{|\vec{CA}|\,|\vec{CB}|}\right)$$
$$= \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{29}\sqrt{13}}\right)$$
$$\approx 78{,}1^\circ \quad \text{vagy} \quad 1{,}36 \text{ radián.}$$

□

Merőleges (ortogonális) vektorok

A nemnulla $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektorokat **ortogonálisnak** (vagy merőlegesnek) mondjuk, ha az általuk közbezárt szög $\pi/2$. Az ilyen vektorokra $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, ugyanis $\cos(\pi/2) = 0$. Az állítás megfordítása is igaz. Ha a nemnulla $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektorokra $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta = 0$, akkor $\cos\theta = 0$ és $\theta = \arccos\theta = \pi/2$.

DEFINÍCIÓ: Ortogonális vektorok

A nemnulla $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok akkor és csak akkor **ortogonálisak**, ha

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0.$$

A nullvektor, határozatlan iránya miatt, minden irányra merőlegesnek tekinthető, és ez az egyetlen ilyen tulajdonságú vektor.

4. PÉLDA: **Az ortogonalitás definíciójának alkalmazása**

1. Az $\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle$ és $\mathbf{v} = \langle 4, 6\rangle$ vektorok ortogonálisak, mert
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (3)(4)+(-2)(6) = 0.$$
2. Az $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ és $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ vektorok ortogonálisak, mert
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (3)(0)+(-2)(2)+(1)(4) = 0.$$
3. $\mathbf{0}$ bármelyik $\mathbf{u}$ vektorral ortogonális, mert
$$\mathbf{0}\cdot\mathbf{u} = \langle 0,0,0\rangle\cdot\langle u_1, u_2, u_3\rangle$$
$$= (0)(u_1)+(0)(u_2)+(0)(u_3)$$
$$= 0.$$

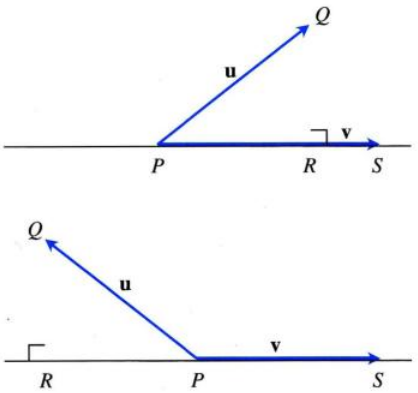
□

A skalárszorzat tulajdonságai és a vektorok merőleges vetítése

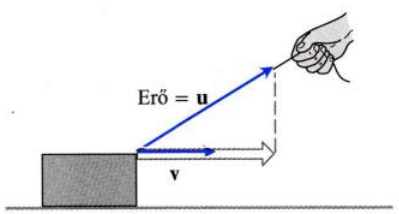
A skalárszorzatra is igaz a valós számok (skalárok) szorzásának számos tulajdonsága.

A skaláris szorzás tulajdonságai

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$
2. $(c\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$
3. $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$
4. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$
5. $\mathbf{0}\cdot\mathbf{u} = 0$



12.22. ÁBRA: Az **u** vektor merőleges vetítése a **v** vektorra.



12.23. ÁBRA: Ha a dobozt **u** erővel húzzuk, akkor a **v** irányban mozgató erőt **u** **v**-re vetett vetületeként kaphatjuk meg.

Az 1. és 3. tulajdonság bizonyítása: A skaláris szorzás tulajdonságait a definícióra támaszkodva bizonyíthatjuk. Megmutatjuk például az 1. és a 3. tulajdonság bizonyítását.

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}.$

3.
$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \langle u_1,u_2,u_3\rangle\cdot\langle v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3\rangle\\ &= u_1(v_1+w_1)+u_2(v_2+w_2)+u_3(v_3+w_3)\\ &= u_1v_1+u_1w_1+u_2v_2+u_2w_2+u_3v_3+u_3w_3\\ &= (u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)+(u_1w_1+u_2w_2+u_3w_3)\\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}.\end{aligned}$$
□

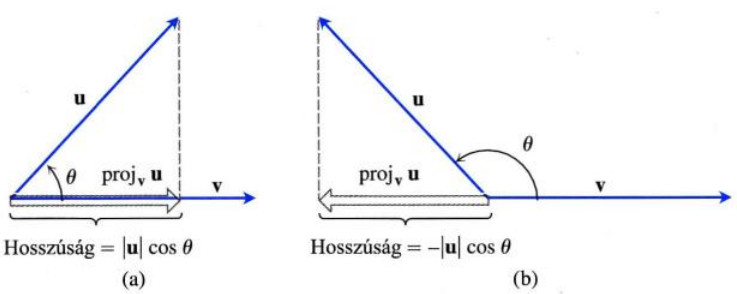
Térjünk most vissza a vektorok merőleges vetítésének, vagy más szóval projekciójának a szakasz elején felvetett problémájára. Az $\mathbf{u} = \vec{PQ}$ vektor merőleges vetülete a nemnulla $\mathbf{v} = \vec{PS}$ vektorra az a $\vec{PR}$ vektor, amelyet úgy kapunk, hogy Q-ból merőlegest bocsátunk a PS egyenesre (12.22. ábra). Ezt a vektort

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}\text{-val} \qquad \text{„}\mathbf{u}\text{ projekciója }\mathbf{v}\text{-re”}$$

jelöljük. Ha **u** valamilyen erőt reprezentál, akkor $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ az erő **v** irányú összetevője (12.23. ábra).

Ha **u** és **v** hegyesszöget zár be egymással, akkor $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ hossza $|\mathbf{u}|\cos\theta$, iránya pedig $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ lesz (12.24. ábra). Ha θ tompaszög, akkor $\cos\theta < 0$, $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ hossza $-|\mathbf{u}|\cos\theta$, iránya pedig $-\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. Mindkét esetben:

$$\begin{aligned}\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} &= (|\mathbf{u}|\cos\theta)\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\\ &= \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \qquad |\mathbf{u}|\cos\theta = \frac{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\\ &= \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}.\end{aligned}$$



12.24. ÁBRA: A $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ hossza (a) $|\mathbf{u}|\cos\theta$, ha $\cos\theta \geq 0$ és (b) $-|\mathbf{u}|\cos\theta$, ha $\cos\theta \leq 0$.

Az $|\mathbf{u}|\cos\theta$ számot **u v irányú skaláris komponensének** vagy **v irányú skaláris összetevőjének** nevezzük. Összegezve:

Az **u** vektor merőleges vetülete a **v** vektorra, vagy más szóval **u**-nak **v** irányú összetevője:

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}. \tag{12.1}$$

Az **u** vektor **v** irányú skaláris komponense:

$$|\mathbf{u}|\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \mathbf{u}\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}. \tag{12.2}$$

Vegyük észre, hogy az **u** vektor **v**-re vetett vetülete, és a vetület skaláris összetevője is csak **v** irányától függ, nem függ **v** hosszától (mivel **u**-t $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$-vel szorozzuk, ami **v** irányvektora).

5. PÉLDA: **A vetület kiszámítása**

Határozzuk meg az $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ vektor $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ vektorra vetett vetületét és $\mathbf{u}$ $\mathbf{v}$ irányú skaláris komponensét!

Megoldás: A (12.1) képlet alapján számítsuk ki $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$-t:

$$\begin{aligned}\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} &= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v} = \frac{6-6-4}{1+4+4}(\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}) \\ &= -\frac{4}{9}(\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}) = -\frac{4}{9}\mathbf{i}+\frac{8}{9}\mathbf{j}+\frac{8}{9}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

$\mathbf{u}$-nak $\mathbf{v}$ irányú skaláris összetevőjét a (12.2) képlettel számoljuk ki:

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}|\cos\theta = \mathbf{u}\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} &= (6\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k})\cdot\left(\frac{1}{3}\mathbf{i}-\frac{2}{3}\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}\right) \\ 2-2-\frac{4}{3} &= -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

□

A (12.1) és a (12.2) képletek kétdimenziós vektorokra is használhatók.

6. PÉLDA: **A vetület és a skaláris összetevő meghatározása**

Határozzuk meg az $\mathbf{F} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ vektor $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ vektorra vetett vetületét és a vetületvektor skaláris komponensét!

Megoldás: A vetület:

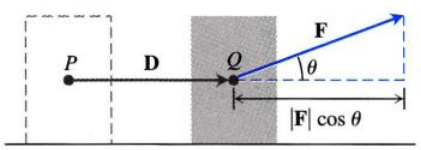
$$\begin{aligned}\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{F} &= \left(\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v} \\ &= \frac{5-6}{1+9}(\mathbf{i}-3\mathbf{j}) = -\frac{1}{10}(\mathbf{i}-3\mathbf{j}) \\ &= -\frac{1}{10}\mathbf{i}+\frac{3}{10}\mathbf{j}.\end{aligned}$$

A $\mathbf{v}$ irányú skaláris összetevő:

$$|\mathbf{F}|\cos\theta = \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{5-6}{\sqrt{1+9}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

□

Munka



12.25. ÁBRA: Az állandó $\mathbf{F}$ erő által $\mathbf{D}$ elmozdulás során végzett munka $(|\mathbf{F}|\cos\theta)|\mathbf{D}|$.

A 6. fejezetben úgy számítottuk ki az állandó nagyságú F erő által valamely d távolságon végzett munkát, mint a $W = Fd$ szorzatot. Ez az összefüggés csak abban az esetben érvényes, ha az erő iránya a mozgás irányába esik. Ha egy tárgyat az $\mathbf{F}$ erő valamilyen más, $\mathbf{D} = \vec{PQ}$ irányban és távolságra mozdít el, akkor az $\mathbf{F}$ erő $\mathbf{D}$ irányú komponensével kell számolnunk. Ha $\mathbf{F}$ és $\mathbf{D}$ θ szöget zár be egymással, (12.25. ábra), akkor

$$\begin{aligned}\text{Munka} &= \left(\begin{array}{c}\text{az } \mathbf{F}\ \mathbf{D} \text{ irányú} \\ \text{skaláris összetevője}\end{array}\right)(\text{a } \mathbf{D} \text{ hossza}) \\ &= (|\mathbf{F}|\cos\theta)|\mathbf{D}| \\ &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{D}.\end{aligned}$$

DEFINÍCIÓ: **Állandó erő munkája**

Az $\mathbf{F}$ erő által $\mathbf{D} = \vec{PQ}$ elmozdulás során végzett munka

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D} = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{D}|\cos\theta,$$

ahol θ az $\mathbf{F}$ és a $\mathbf{D}$ közötti szög.

7. PÉLDA: **A munka definíciójának alkalmazása**

Ha $|\mathbf{F}| = 40$ N (newton), $|\mathbf{D}| = 3$ m és $\theta = 60°$, akkor az $\mathbf{F}$ erő által a PQ szakaszon végzett munka:

$$\begin{aligned}\text{munka} &= |\mathbf{F}|\,|\mathbf{D}|\cos\theta \\ &= (40)(3)\cos 60° \\ &= (120)(1/2) \\ &= 60 \text{ J (joule)}.\end{aligned}$$

□

Nehezebb munkaszámítási feladatokkal a 16. fejezetben lesz majd dolgunk, amikor már megtanultuk, hogyan kell kiszámítani változó erő tetszőleges görbe mentén végzett munkáját.

Vektor felírása ortogonális vektorok összegeként

Egyféleképpen már most is fel tudjuk írni az $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$ vagy az $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ vektort merőleges vektorok összegeként:

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} \quad \text{vagy} \quad \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$

(mivel $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$).

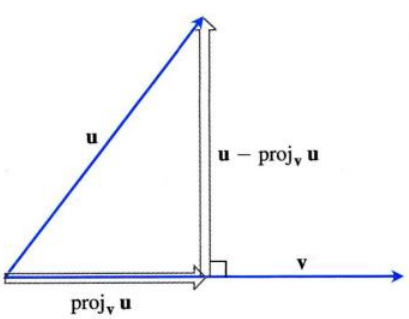
Néha azonban érdemesebb az $\mathbf{u}$ vektort más vektorok összegeként kifejezni. A mechanikában gyakran van szükség arra, hogy az $\mathbf{u}$ vektort egy adott $\mathbf{v}$ vektorral párhuzamos, illetve arra merőleges vektor összegeként fejezzük ki. Például amikor egy részecske pályáját tanulmányozzuk valamely sík- vagy térgörbe mentén, szükségünk van a gyorsulás érintőirányú, illetve normálirányú összetevőjére. (A gyorsulás érintő-, illetve normálirányú összetevőjéről bővebben a 13.4. alfejezetben lesz szó.) A gyorsulásvektort kifejezhetjük érintőirányú és normálirányú komponensének összegeként. (A normálirányú komponens fontos geometriai tulajdonságokat árul el magáról a görbéről, például annak *görbületéről*.) A sebesség- és gyorsulásvektort a következő fejezetben fogjuk tanulmányozni.

Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorokra általánosan igaz, mint az a 12.26. ábráról könnyen belátható, hogy az

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$$

vektor ortogonális a $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ vetületi vektorra (mely $\mathbf{v}$-vel azonos irányú). Ezt a megfigyelést a következő számítással támaszthatjuk alá:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u})\cdot\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} &= \left(\mathbf{u} - \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}\right)\cdot\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v} \\ &\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) - \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)^2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) \\ &= \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2}{|\mathbf{v}|^2} - \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2}{|\mathbf{v}|^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$



12.26. ÁBRA: Az $\mathbf{u}$ vektor mint a $\mathbf{v}$ vektorral párhuzamos és ortogonális komponenseinek összege.

Így az

$$\mathbf{u} = \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} + (\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u})$$

egyenlőség $\mathbf{u}$-t ortogonális vektorok összegeként állítja elő.

u felbontása v-vel párhuzamos és v-re merőleges vektorokra

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} + (\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}) \\ &= \underbrace{\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}}_{\mathbf{v}\text{-vel párhuzamos}} + \underbrace{\left(\mathbf{u} - \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}\right)}_{\mathbf{v}\text{-re merőleges}}\end{aligned}$$

8. PÉLDA: **Egy űrhajóra ható erő**

Egy űrhajó sebességvektora a $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$, s az űrhajóra az $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ erő hat. Fejezzük ki $\mathbf{F}$-et $\mathbf{v}$-vel párhuzamos és $\mathbf{v}$-re ortogonális vektorok összegeként.

Megoldás:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{F} + (\mathbf{F} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{F}) \\ &= \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v} + \left(\mathbf{F} - \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}\right) \\ &= \left(\frac{6-1}{9+1}\right)\mathbf{v} + \left(\mathbf{F} - \left(\frac{6-1}{9+1}\right)\mathbf{v}\right) \\ &= \frac{5}{10}(3\mathbf{i} - \mathbf{j}) + \left(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k} - \frac{5}{10}(3\mathbf{i} - \mathbf{j})\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) + \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\right).\end{aligned}$$

A $\mathbf{v}$ vektorral párhuzamos $\frac{3}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$ erő az úgynevezett effektív erő. Az $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ erő merőleges $\mathbf{v}$-re. Ezt ellenőrizendő számítsuk ki a $\mathbf{v}$ és $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ skalárszorzatát:

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\right)\cdot(3\mathbf{i} - \mathbf{j}) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 0 = 0. \qquad \square$$

12.3. Feladatok

Skalárszorzat és vetület

Az 1–8. feladatokban határozzuk meg a

(a) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$, $|\mathbf{v}|$, $|\mathbf{u}|$ értékeket;

(b) $\mathbf{v}$ és $\mathbf{u}$ szögének koszinuszát;

(c) $\mathbf{u}$-nak $\mathbf{v}$ irányú skaláris komponensét;

(d) $\mathbf{u}$-nak $\mathbf{v}$ irányú összetevőjét.

1. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \sqrt{5}\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \sqrt{5}\mathbf{k}$
2. $\mathbf{v} = (3/5)\mathbf{i} + (4/5)\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$
3. $\mathbf{v} = 10\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
4. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
5. $\mathbf{v} = 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
6. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{u} = \sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
7. $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \sqrt{17}\mathbf{j}$
8. $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$

T Vektorok szöge

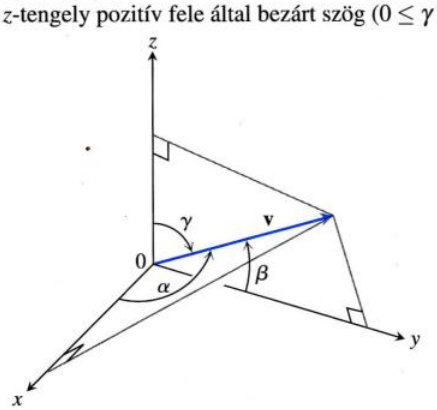
Határozzuk meg radiánban, század pontossággal a 9–12. feladatokban megadott vektorok szögét!

9. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
10. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$
11. $\mathbf{u} = \sqrt{3}\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
12. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

13. Háromszög: Határozzuk meg annak a háromszögnek a szögeit, amelynek csúcsai $A = (-1,0)$, $B = (2,1)$ és $C = (1,-2)$.

14. Téglalap: Mekkora szöget zárnak be az $A = (1,0)$, $B = (0,3)$, $C = (3,4)$ és $D = (4,1)$ csúcsú téglalap átlói?

15. Irányszögek és iránykoszinuszok: A $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ vektor α, β, γ irányszögeit a következőképpen értelmezzük:
α a $\mathbf{v}$ és az x-tengely pozitív fele által bezárt szög ($0 \le \alpha \le \pi$);
β a $\mathbf{v}$ és az y-tengely pozitív fele által bezárt szög ($0 \le \beta \le \pi$);
γ a $\mathbf{v}$ és a z-tengely pozitív fele által bezárt szög ($0 \le \gamma \le \pi$);



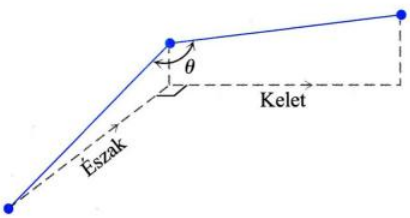
(a) Mutassuk meg, hogy

$$\cos\alpha = \frac{a}{|\mathbf{v}|}, \quad \cos\beta = \frac{b}{|\mathbf{v}|}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{|\mathbf{v}|},$$

és $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Ezeket a koszinuszokat nevezzük $\mathbf{v}$ iránykoszinuszainak.

(b) Az irányvektorok az iránykoszinuszokból épülnek fel: Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ egységvektor, akkor a, b és c a $\mathbf{v}$ iránykoszinuszai.

16. Főnyomócső szerkesztése: Egy főnyomócsövet kell megszerkesztenünk, amelynek 20%-os az emelkedése északi irányban és 10%-os keleti irányban. Határozzuk meg azt a θ szöget, amellyel a főnyomócső északról kelet felé fordul (lásd az ábrát).



Vektorok felbontása

A 17–19. feladatokban írjuk fel az **u** vektort **v**-vel párhuzamos és **v**-re merőleges vektorok összegeként.

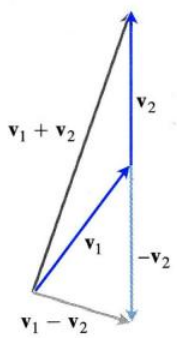
17. $\mathbf{u} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ **18.** $\mathbf{u} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

19. $\mathbf{u} = 8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

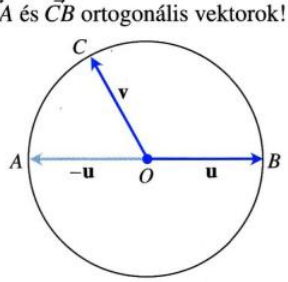
20. Vektorok összege: Az $\mathbf{u} = \mathbf{i} + (\mathbf{j} + \mathbf{k})$ vektor mindig felírható egy **i**-re merőleges és egy **i**-vel párhuzamos vektor összegeként. Ha az $\mathbf{u} = \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} + (\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u})$ összefüggésben **v** helyére **i**-t írunk, akkor azt kapjuk, hogy $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \mathbf{i}$ és $(\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Ellenőrizzük!

Geometria példákkal

21. Összeg és különbség: Az alábbi ábrán úgy látszik, hogy a $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ vektorok ortogonálisak. Csupán véletlen ez, vagy biztosra vehetjük, hogy két vektor összege és különbsége mindig merőleges egymásra? Válaszunkat indokoljuk!



22. Merőlegesek a körön (Thales tétel): Legyen AB az O középpontú kör egy átmérője, C pedig a kör egy pontja. Mutassuk meg, hogy $\vec{CA}$ és $\vec{CB}$ ortogonális vektorok!

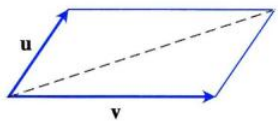


23. A rombusz átlói: Mutassuk meg, hogy a rombusz (egyenlő oldalú paralelogramma) átlói merőlegesek egymásra!

24. Merőleges átlók: Mutassuk meg, hogy a négyzet az egyetlen olyan téglalap, amelynek átlói merőlegesek egymásra!

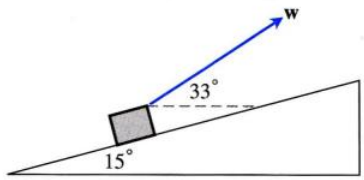
25. Amikor a paralelogramma téglalap: Bizonyítsuk be, hogy egy paralelogramma akkor és csak akkor téglalap, ha átlói egyenlő hosszúságúak (ezt a tulajdonságot gyakran használják az ácsok)!

26. A paralelogramma átlója: Mutassuk meg, hogy az **u** és **v** vektorok által kifeszített paralelogramma átlója a vektorok által közbezárt szöget akkor és csak akkor felezi, ha $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$.



27. Hajítás: A 400 m/s torkolati sebességű fegyvert úgy sütjük el, hogy csöve 8°-os szöget zár be a vízszintessel. Írjuk fel a sebesség vízszintes és függőleges összetevőjét!

28. Lejtő: Egy dobozt húzunk felfelé a lejtőn, az ábrán látható módon. Mekkorának kell lennie a **w** erőnek ahhoz, hogy a lejtővel párhuzamos összetevője 25 N legyen?



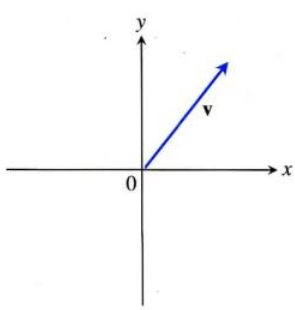
Elmélet példákkal

29. Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenség:

(a) Az $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta$ összefüggés alkalmazásával mutassuk meg, hogy bármely két **u** és **v** vektorra fennáll a $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$ egyenlőtlenség!

(b) Mikor teljesül, ha teljesül egyáltalán, hogy $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$. A választ indokoljuk!

30. Másoljuk le egy papírra az alábbi ábrát, majd satírozzuk be azt a tartományt, amelynek (x, y) pontjaira $(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot \mathbf{v} \leq 0$ teljesül!



31. Ortogonális egységvektorok: Legyenek $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ ortogonális egységvektorok, továbbá legyen $\mathbf{v} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$. Számítsuk ki a $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1$ skalárszorzatot!

32. Egyszerűsítés a skalárszorzatban: A valós számok szorzásakor, ha $uv_1 = uv_2$ és $u \neq 0$, egyszerűsíthetünk u-val és felírhatjuk a $v_1 = v_2$ egyenlőséget. Igaz-e ez a szabály a vektorok skalárszorzatára? Ha $\mathbf{u}\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{u} \neq 0$, következik-e ebből, hogy $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$? Indokoljunk!

Egyenes egyenlete

33. Vektorra merőleges egyenes: Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ vektor merőleges az $ax + by = c$ egyenesre. Gondoljunk arra, hogy **v** meredeksége negatív reciproka az egyenes meredekségének.

34. Vektorral párhuzamos egyenes: Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ vektor párhuzamos a $bx - ay = c$ egyenessel. Gondoljunk arra, hogy $\mathbf{v}$ meredeksége azonos az egyenes meredekségével.

A 33. feladat eredményére támaszkodva A 35–38. feladatokban írjuk fel a P ponton átmenő, $\mathbf{v}$-re merőleges egyenes egyenletét. Ábrázoljuk az egyenest! Ábrázoljuk a $\mathbf{v}$ vektort is *origó kezdőpontú vektorként*!

35. $P(2,1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **36.** $P(-1,2)$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

37. $P(2,-7)$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ **38.** $P(11,10)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

A 34. feladat eredményére támaszkodva A 39–42. feladatokban írjuk fel a P ponton átmenő, $\mathbf{v}$-vel párhuzamos egyenes egyenletét. Ábrázoljuk az egyenest! Ábrázoljuk a $\mathbf{v}$ vektort is *origó kezdőpontú vektorként*!

39. $P(-2,1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ **40.** $P(0,-2)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

41. $P(1,2)$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ **42.** $P(1,3)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

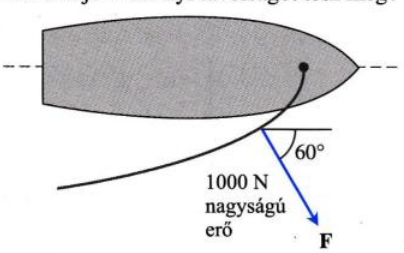
Munka

43. Egyenes menti munka: Mekkora munkát végez (az 5 N nagyságú) $\mathbf{F} = 5\mathbf{i}$ erő, miközben egy tárgyat az origóból az $(1,1)$ pontba juttat (a hosszegység a méter)?

44. Mozdony: A „Big Boy" nevű mozdony vonóereje 602 148 N. Ilyen vonóerő mellett mekkora munkát végez a mozdony, miközben a 6000 tonnás szerelvényt San Franciscóból az onnan 605 km távolságra lévő Los Angelesbe továbbítja?

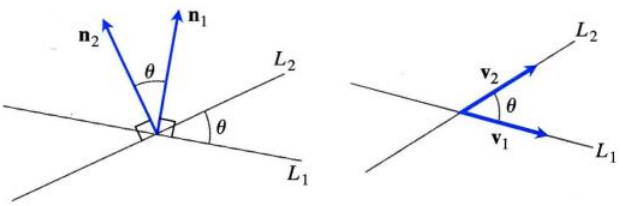
45. Lejtő: Mennyi munkát végzünk, ha a rakparton 20 m-nyire elvonszolunk egy ládát oly módon, hogy a vízszintestől 30°-kal eltérő irányban 200 N nagyságú erőt fejtünk ki rá?

46. Vitorláshajó: A hajóvitorlára a szél 1000 N nagyságú erőt fejt ki az ábrán látható módon. Mekkora munkát végez a szél, miközben a hajó 1 km-nyi távolságot tesz meg?



Síkbeli egyenesek szöge

Két metsző, de nem merőleges egyenes által közbezárt hegyesszög nagysága ugyanakkora, mint az egyenesekre merőleges vagy az egyenesekkel párhuzamos vektorok által bezárt szög.



Ezt a tényt, valamint a 33. és a 34. feladat eredményét felhasználva számítsuk ki a 47–52. feladatokban megadott egyenesek által bezárt hegyesszög értékét!

47. $3x + y = 5$, $2x - y = 4$

48. $y = \sqrt{3}x - 1$, $y = -\sqrt{3}x + 2$

49. $\sqrt{3}x - y = -2$, $x - \sqrt{3}y = 1$

50. $x + \sqrt{3}y = 1$, $(1 - \sqrt{3})x + (1 + \sqrt{3})y = 8$

51. $3x - 4y = 3$, $x - y = 7$

52. $12x + 5y = 1$, $2x - 2y = 3$

Differenciálható görbék szöge

Két egymást metsző, differenciálható görbe szögén a metszéspontbeli érintőik által bezárt szöget értjük. Az 53–56. feladatokban ezeknek a szögeknek a meghatározása a feladat.

53. $y = (3/2) - x^2$, $y = x^2$ (két metszéspont)

54. $x = (3/4) - y^2$, $x = y^2 - (3/4)$ (két metszéspont)

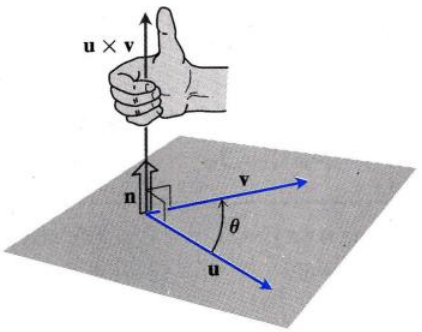
55. $y = x^3$, $x = y^2$ (két metszéspont)

56. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ (két metszéspont)

12.4. Vektoriális szorzat

Amikor síkbeli egyenesek dőlését kellett leírnunk, akkor a meredekség és a hajlásszög fogalmát használtuk. A térben egy *sík* dőlését, ferdeségét is értelmezni szeretnénk. Ezt a sík két vektorának olyan összeszorzásával tehetjük meg, amelynek eredménye egy, a síkra merőleges vektor. E harmadik vektor iránya a sík dőlését fogja jellemezni. A két síkbeli vektor összeszorzására alkalmazott eljárást *vektoriális szorzásnak* nevezzük.

A vektoriális szorzat fogalmát széleskörűen alkalmazzák az elektromosság, mágnesesség, az áramlástan és az égi mechanika jelenségeinek leírásában. Ebben az alfejezetben a vektoriális szorzásnak a tulajdonságait vesszük sorra, amelyek magyarázatot adnak arra, miért is oly hasznos ez a fogalom az említett területeken.



12.27. ÁBRA: Az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ szorzat.

Két vektor vektoriális szorzata

Tekintsük a térben a $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorokat. Ha nem párhuzamosak, akkor egy síkot határoznak meg. Ehhez a síkhoz válasszunk egy rá merőleges $\mathbf{n}$ egységvektort a **jobbkéz-szabálynak** megfelelően. Ez azt jelenti, hogy amennyiben jobb hüvelykujjunk $\mathbf{n}$ irányába mutat, akkor behajlított ujjainknak az $\mathbf{u}$ vektortól a $\mathbf{v}$ vektor felé kell mutatniuk (12.27. ábra). Ekkor az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ („$\mathbf{u}$ kereszt $\mathbf{v}$") **keresztszorzat vagy vektoriális szorzat** az alábbi módon értelmezett *vektor*:

DEFINÍCIÓ: **Vektoriális szorzat**

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \sin\theta)\,\mathbf{n}$$

A skalárszorzattól eltérően a keresztszorzat vektor. Ezért is hívják vektoriális szorzatnak. Vektoriálisan mindig csak két vektort lehet összeszorozni. Az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektor $\mathbf{u}$-val is, $\mathbf{v}$-vel is ortogonális, mert $\mathbf{n}$-nek számszorosa.

Mivel 0 és π szinusza is nulla, ezért két párhuzamos vektor vektoriális szorzatát kézenfekvő nullvektorként értelmezni. Ugyancsak nullának tekintjük a nullvektor tetszőleges vektorral való vektoriális szorzatát. Következésképpen $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok vektoriális szorzata akkor és csak akkor nulla, ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ párhuzamosak.

Párhuzamos vektorok

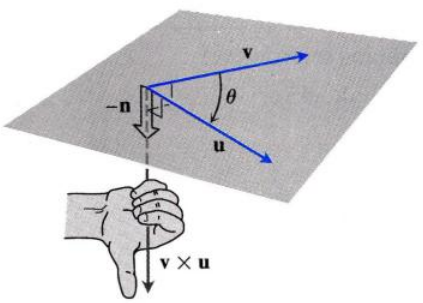
$\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ nemnulla vektorok akkor és csak akkor párhuzamosak, ha $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

A nullvektor, határozatlan iránya miatt, minden vektorral párhuzamosnak tekinthető, és ez az egyetlen ilyen tulajdonságú vektor.

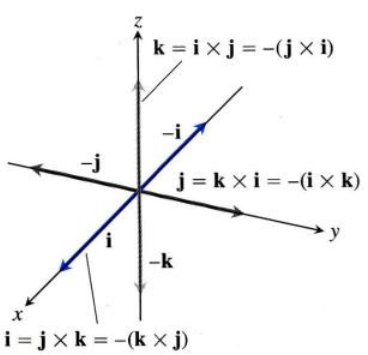
A vektoriális szorzat tulajdonságai

Tetszőleges $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorokra, valamint r, s skalárokra igaz, hogy

1. $(r\mathbf{u}) \times (s\mathbf{v}) = (rs)(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$
3. $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{w} \times \mathbf{u}$
4. $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
5. $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$



12.28. ÁBRA: Az $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ szorzat.



12.29. ÁBRA: Az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ vektorok páronként képezett vektoriális szorzatai.

Például a 4. tulajdonságot úgy szemléltethetjük, hogy ha jobb kezünk behajlított ujjai a $\mathbf{v}$ vektortól a $\mathbf{u}$ vektor felé mutatnak, akkor hüvelykujjunk az előzővel ellentétes irányba mutat, s vele együtt a $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ vektor is (12.28. ábra).

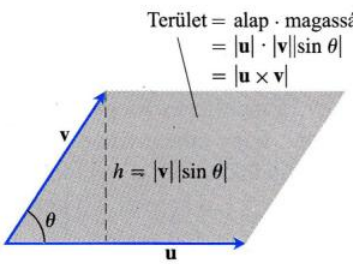
Az 1. tulajdonságot egyszerűen úgy bizonyítjuk, hogy a vektoriális szorzat definícióját alkalmazzuk az egyenlőség mindkét oldalán, s az eredményt összehasonlítjuk. A 2. tulajdonságot a 6. Függelékben bizonyítottuk be. A 3. tulajdonságot úgy bizonyíthatjuk be, hogy a 2. tulajdonságot kifejező egyenlőség mindkét oldalát megszorozzuk -1-gyel, azután pedig a 4. tulajdonság felhasználásával felcseréljük az összeszorzandó vektorok sorrendjét. Az 5. tulajdonság egyszerűen csak egy definíció. Fontos megjegyeznünk, hogy a vektoriális szorzás *nem asszociatív* művelet, azaz $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ általában nem egyenlő $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$-vel.

Ha a definíció alkalmazásával rendre kiszámítjuk az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ vektorok vektoriális szorzatát (12.29. ábra), akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) = \mathbf{k},$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i},$$
$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) = \mathbf{j},$$

valamint

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$



12.30. ÁBRA: Az **u** és **v** vektorok által kifeszített paralelogramma.

$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ egy paralelogramma területe

Mivel **n** egységvektor, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ abszolút értékét felírhatjuk

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,|\sin\theta|\,|\mathbf{n}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\sin\theta$$

alakban. A jobb oldalon álló kifejezés éppen az **u** és **v** vektorok által kifeszített paralelogramma területe, $|\mathbf{u}|$ a paralelogramma alapja, $|\mathbf{v}|\sin\theta$ pedig a magassága (12.30. ábra).

Az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektoriális szorzat determináns-alakja

Következő feladatunk az, hogy **u** és **v** Descartes-koordinátái alapján kiszámítsuk a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ keresztszorzat értékét.

Legyen

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \qquad \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}.$$

Ekkor a disztributivitási szabály, valamint a konstanssal való szorzás szabálya alapján:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \times (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) = \\ &= u_1v_1\mathbf{i} \times \mathbf{i} + u_1v_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + u_1v_3\mathbf{i} \times \mathbf{k} + \\ &\quad + u_2v_1\mathbf{j} \times \mathbf{i} + u_2v_2\mathbf{j} \times \mathbf{j} + u_2v_3\mathbf{j} \times \mathbf{k} + \\ &\quad + u_3v_1\mathbf{k} \times \mathbf{i} + u_3v_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + u_3v_3\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Az utolsó sorban álló kifejezést megkaphatjuk úgy, hogy kifejtjük a

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

determinánst. Ezzel a következő szabályhoz jutottunk el:

A keresztszorzat kiszámítása determináns segítségével

Ha $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ és $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, akkor

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Determinánsok

A 2×2-es és 3×3-as determinánsokat az alábbi módon számítjuk ki:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

PÉLDA

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (1)(-4) = 6 + 4 = 10$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

PÉLDA

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= (-5)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -5(1-3) - 3(2+4) + 1(6+4) \\ &= 10 - 18 + 10 = 2\end{aligned}$$

(További információk a http://www.aw-bc.com/thomas honlapon.)

1. PÉLDA: **A vektoriális szorzat kiszámítása determináns segítségével**

Határozzuk meg $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ és $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ értékét, ha $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ és $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

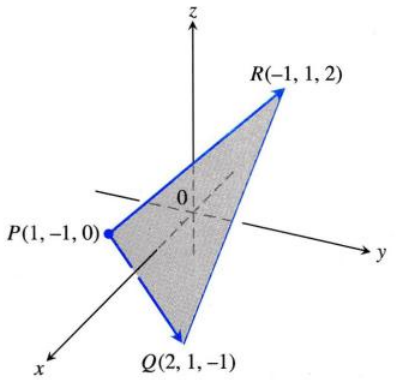
Megoldás:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\ &= -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k} \\ \mathbf{v} \times \mathbf{u} &= -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 10\mathbf{k}\end{aligned}$$

□

2. PÉLDA: **Adott síkra merőleges vektor megadása**

Keressünk olyan vektort, amely merőleges a $P(1,-1,0)$, $Q(2,1,-1)$ és $R(-1,1,2)$ pontok által meghatározott síkra (12.31. ábra).



12.31. ÁBRA: A PQR háromszög területe a $|\vec{PQ} \times \vec{PR}|$ érték fele (1. példa).

Megoldás: A $\vec{PQ} \times \vec{PR}$ vektor merőleges a síkra és merőleges mindkét vektorra. Az egymásra merőleges egységvektorokkal kifejezve:

$$\vec{PQ} = (2-1)\mathbf{i} + (1+1)\mathbf{j} + (-1-0)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$
$$\vec{PR} = (-1-1)\mathbf{i} + (1+1)\mathbf{j} + (2-0)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$
$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$
$$= 6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}. \qquad \square$$

3. PÉLDA: **Háromszög területének meghatározása**

Számítsuk ki a $P(1,-1,0)$, $Q(2,1,-1)$ és $R(-1,1,2)$ pontok által meghatározott háromszög területét (12.31. ábra).

Megoldás: A PQR pontok által meghatározott paralelogramma területe:

$$|\vec{PQ} \times \vec{PR}| = |6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}|$$
$$= \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2}.$$

A háromszög területe a paralelogramma területének a fele, azaz $3\sqrt{2}$. $\square$

4. PÉLDA: **Sík normál egységvektorának meghatározása**

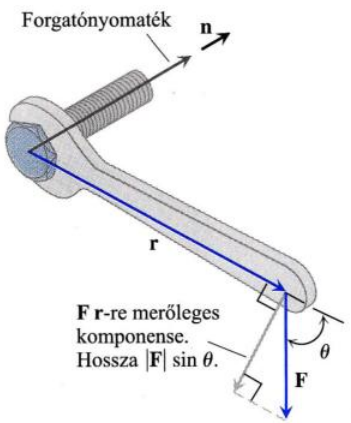
Ha egy nemnulla $\mathbf{v}$ vektor merőleges egy S síkra, akkor $\mathbf{v}$-t a sík **normálvektorának** nevezzük. Egy síknak végtelen sok normálvektora van, hiszen egy nemnulla számmal szorozva szintén normálvektort kapunk. Egységnyi hosszúságú normálvektor csak kettő van. Adjuk meg $P(1,-1,0)$, $Q(2,1,-1)$ és $R(-1,1,2)$ pontok által meghatározott sík egy normál egységvektorát!

Megoldás: Mivel $\vec{PQ} \times \vec{PR}$ merőleges a síkra, $\mathbf{n}$ irányvektora a síkra merőleges egységvektor lesz. A 3. és 4. feladatok értékeit átvéve azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{n} = \frac{\vec{PQ} \times \vec{PR}}{|\vec{PQ} \times \vec{PR}|} = \frac{6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}. \qquad \square$$

Hogy a keresztszorzat determinánsokkal való egyszerűbb kiszámítását elősegítsük, a vektorokat többnyire $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ alakban adjuk meg, kevésbé használjuk a $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ alakot.

Forgatónyomaték



12.32. ÁBRA: A forgatónyomaték-vektor azt is megmutatja, hogy a csavart befele vagy kifele hajtjuk.

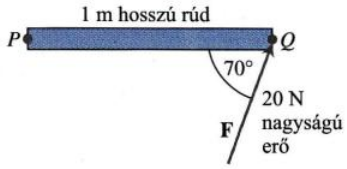
Amikor egy csavart csavarkulccsal meghúzunk, $\mathbf{F}$ erővel hatunk a kulcs nyelére (12.32. ábra). Az erő által keltett forgatónyomaték nagysága függ attól, hogy a csavartól mekkora távolságban hat az erő, illetve milyen irányú. A forgatónyomaték nagysága az $\mathbf{r}$ erőkar hosszának és az $\mathbf{F}$ erő $\mathbf{r}$-re merőleges skaláris komponensének a szorzata. A 12.32. ábra jelöléseivel:

$$\text{a forgatónyomaték-vektor nagysága} = |\mathbf{r}|\,|\mathbf{F}| \sin\theta,$$

vagyis $|\mathbf{r} \times \mathbf{F}|$. Ha $\mathbf{n}$ a forgatónyomaték irányú egységvektor, akkor a forgatónyomaték $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ vagy másképpen:

$$\text{a forgatónyomaték-vektor} = (|\mathbf{r}|\,|\mathbf{F}| \sin\theta)\mathbf{n}.$$

Emlékeztetünk arra, hogy az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ szorzat $\mathbf{0}$, ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ párhuzamosak. Ez konzisztens a forgatónyomaték értelmezésével. Ha a 12.32. ábrán $\mathbf{F}$ párhuzamos a csavarkulcs szárával, azaz ha úgy próbáljuk betekerni a csavart, hogy a kulcsot a szára irányában nyomjuk, akkor nulla forgatónyomatékot fogunk előállítani.



12.33. ÁBRA: Az **F** erő P pontra vonatkozó forgatónyomatékának nagysága körülbelül 18,8 N (5. példa).

5. PÉLDA: **A forgatónyomaték kiszámítása**

A 12.33. ábrán látható rúd a P pont körül forgatható, s rá a Q pontban **F** erő hat. A forgatónyomaték:

$$\begin{aligned} |\vec{PQ} \times \mathbf{F}| &= |\vec{PQ}|\,|\mathbf{F}| \sin 70^\circ \\ &\approx 1 \cdot 20 \cdot 0{,}94 \\ &\approx 18{,}8 \text{ N}. \end{aligned}$$

□

Vektorok vegyesszorzata

A $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ szorzatot az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vektorok **vegyesszorzatának** nevezzük (a vektorok sorrendje lényeges). Mint az a

$$|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}| = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,|\cos\theta|$$

formulából látható, a vegyes szorzat abszolút értéke az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vektorok által kifeszített paralelepipedonnak a térfogatával egyenlő (12.34. ábra). $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ a paralelepipedon alaplapját alkotó paralelogrammának a területe, $|\mathbf{w}|\,|\cos\theta|$ pedig a paralelepipedon magassága.

A vegyesszorzatban felcserélhetjük a szorzópontot és a szorzókeresztet anélkül, hogy annak értéke megváltozna.

Ha a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$, valamint a $\mathbf{w}$ és $\mathbf{u}$ vektorok síkját úgy fogjuk fel, mint az $\mathbf{u}, \mathbf{vw}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon oldallapjait, akkor azt látjuk, hogy

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}.$$

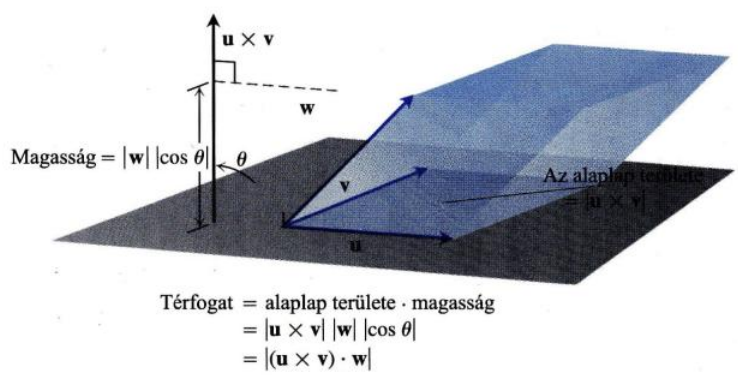
Mivel a skalárszorzat kommutatív, az is igaz, hogy

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

A vegyes szorzatot így kiszámíthatjuk determinánsok segítségével:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= \left[\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right] \cdot \mathbf{w} \\ &= w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$



Térfogat = alaplap területe · magasság
$= |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,|\cos\theta|$
$= |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$

12.34. ÁBRA: A $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$ szám egy paralelepipedon térfogatával egyenlő.

6. PÉLDA: **Paralelepipedon térfogatának kiszámítása**

Számítsuk ki az $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát!

Megoldás: Felírjuk a megfelelő determinánst és kiszámoljuk az értékét:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -23. \qquad \square$$

A térfogat $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}| = 23$ térfogategység.

12.4. Feladatok

A vektoriális szorzat kiszámítása

Az 1–8. feladatokban számítsuk ki az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ és a $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ vektor hosszát és adjuk meg irányát is (amennyiben értelmezve van)!

1. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$

2. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$

3. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

4. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

5. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{v} = -3\mathbf{j}$

6. $\mathbf{u} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} \times \mathbf{k}$

7. $\mathbf{u} = -8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

8. $\mathbf{u} = \frac{3}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

A 9–14. feladatokban először vegyük fel a koordinátatengelyeket, majd ábrázoljuk az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektorokat úgy, hogy kezdőpontjuk az origóba essen!

9. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$

10. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$

11. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

12. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

13. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

14. $\mathbf{u} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i}$

Háromszögek a térben

A 15–18. feladatokban

(a) számítsuk ki a P, Q, R pontok által meghatározott háromszögnek a területét;

(b) adjunk meg egy PQR síkra merőleges egységvektort!

15. $P(1,-1,2)$, $Q(2,0,-1)$ $R(0,2,1)$

16. $P(1,1,1)$, $Q(2,1,3)$ $R(3,-1,1)$

17. $P(2,-2,1)$, $Q(3,-1,2)$ $R(3,-1,1)$

18. $P(-2,2,0)$, $Q(0,1,-1)$ $R(-1,2,-2)$

Vegyesszorzat

A 19–22. feladatokban megadott vektorokkal ellenőrizzük az $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}$ azonosságot, majd számítsuk ki a $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát!

	$\mathbf{u}$	$\mathbf{v}$	$\mathbf{w}$
19.	$2\mathbf{i}$	$2\mathbf{j}$	$2\mathbf{k}$
20.	$\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$	$2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$	$-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
21.	$2\mathbf{i} + \mathbf{j}$	$2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$	$\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$
22.	$\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$	$2 - \mathbf{i} - \mathbf{k}$	$2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

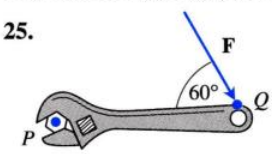
További példák és feladatok

23. Párhuzamos és merőleges vektorok: Legyen $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - -\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -15\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Mely vektorok **(a)** merőlegesek **(b)** párhuzamosak? Indokoljunk is!

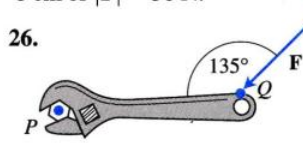
24. Párhuzamos és merőleges vektorok: Legyen $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + +2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r} = -(\pi/2)\mathbf{i} - \pi\mathbf{j} + (\pi/2)\mathbf{k}$. Mely vektorok **(a)** merőlegesek, **(b)** párhuzamosak? Indokoljunk is!

A 25. és 26. feladatban határozzuk meg a P csavarra ható forgatónyomaték nagyságát, ha $|\vec{PQ}| = 8$ cm és $|\mathbf{F}| = 30$ N.

25.



26.



27. Mi az, ami az alábbiak közül mindig igaz, és mi az, ami nem mindig? Indokoljunk is!

(a) $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$

(b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|$

(c) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(d) $\mathbf{u} \times (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

(e) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$

(f) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

(g) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$

(h) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

28. Mi az, ami az alábbiak közül mindig igaz, és mi az, ami nem mindig? Indokoljunk is!

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

(b) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

(c) $(-\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

(d) $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ (c tetszőleges szám)

(e) $c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$ (c tetszőleges szám)

(f) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

(g) $(\mathbf{u} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0$

(h) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

29. Adott $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok skaláris vagy vektoriális szorzataként írjuk fel a következőket:

(a) $\mathbf{u}$ merőleges vetítése $\mathbf{v}$-re;

(b) egy $\mathbf{u}$-ra és $\mathbf{v}$-re ortogonális vektor;

(c) egy $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$-re és $\mathbf{w}$-re ortogonális vektor;

(d) az $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata.

30. Adott $\mathbf{u},\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok skaláris vagy vektoriális szorzatával fejezzük ki a következőket:

(a) egy vektor merőleges az $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ és az $\mathbf{u}\times\mathbf{w}$ vektorokra;

(b) egy vektor merőleges az $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ és az $\mathbf{u}-\mathbf{w}$ vektorokra;

(c) $\mathbf{v}$ irányú, $|\mathbf{u}|$ hosszúságú vektor;

(d) az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe.

31. Legyenek adva a $\mathbf{u},\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok. A következő kifejezések közül melyeknek van értelme és melyeknek nincs? Indokoljuk is a feleletet!

(a) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$ **(b)** $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$

(c) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ **(d)** $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$

32. Három vektor vektoriális szorzata: Mutassuk meg, hogy az elfajult esetektől eltekintve az $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ vektor $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$, az $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ vektor pedig $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ síkjában van! Mik az elfajult esetek?

33. Egyszerűsítés a vektoriális szorzatban: Ha $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{u}\times\mathbf{w}$ és $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$, akkor igaz-e, hogy $\mathbf{v}=\mathbf{w}$? Indokoljunk!

34. Kettős egyszerűsítés: Ha $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{u}\times\mathbf{w}$ és $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=$ $=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$, akkor igaz-e, hogy $\mathbf{v}=\mathbf{w}$? Indokoljunk!

Terület

Számítsuk ki a 35–38. feladatokban megadott csúcspontú paralelogrammák területét!

35. $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$

36. $A(0,0)$, $B(7,3)$, $C(9,8)$, $D(2,5)$

37. $A(-1,2)$, $B(2,0)$, $C(7,1)$, $D(4,3)$

38. $A(-6,0)$, $B(1,-4)$, $C(3,1)$, $D(-4,5)$

Számítsuk ki a 39–42. feladatokban megadott csúcspontú háromszögek területét!

39. $A(0,0)$, $B(-2,3)$, $C(3,1)$

40. $A(-1,-1)$, $B(3,3)$, $C(2,1)$

41. $A(-5,3)$, $B(1,-2)$, $C(6,-2)$

42. $A(-6,0)$, $B(10,-5)$, $C(-2,4)$

43. Háromszögterület: Írjunk fel képletet annak az xy-síkban fekvő háromszögnek a területére, amelynek csúcsai a $(0,0)$, (a_1,a_2) és (b_1,b_2) pontok. Indokoljunk!

44. Háromszögterület: Írjuk fel minél egyszerűbb alakban az (a_1,a_2), (b_1,b_2) és (c_1,c_2) csúcspontú háromszög területét!

12.5. Egyenesek és síkok a térben

Az egyváltozós függvénykalkulusban a síkbeli görbék vizsgálatához felhasználtuk az egyenesre vonatkozó ismereteinket. Az iránytangenseket vizsgáltuk és erősen leegyszerűsítve arra jutottunk, hogy a differenciálható görbék kis szakaszon egyenesként kezelhetők.

A következő fejezetben belefogunk az egynél több változójú függvények analízisébe, és ezeknek a függvényeknek a grafikonjait, a felületeket, kezdetben a síkokra vonatkozó ismereteinket igénybe véve fogjuk vizsgálni.

Ebben az alfejezetben bemutatjuk, hogyan használhatjuk a skaláris és a vektoriális szorzat fogalmát térbeli egyenesek, egyenes szakaszok és síkok egyenletének felírására.

Egyenesek és egyenes szakaszok a térben

A síkban az egyenest meghatározza egy pontja és a meredeksége. A térben egy pontjával és az irányát mutató *vektor*ral adhatunk meg egy egyenest.

Legyen L a $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ponton átmenő és a $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$ vektorral párhuzamos egyenes. Ekkor L azoknak a $P(x,y,z)$ pontoknak a halmaza, amelyekre $\overrightarrow{P_0P}$ párhuzamos $\mathbf{v}$-vel (12.35. ábra). Ez azt jelenti, hogy $\overrightarrow{P_0P}=t\mathbf{v}$ valamely t skalár paraméterrel. t értéke függ a P pontnak az L egyenesen elfoglalt helyétől, és a $(-\infty,\infty)$ intervallumból veheti fel értékét. A $\overrightarrow{P_0P}=t\mathbf{v}$ egyenletet kifejtve:

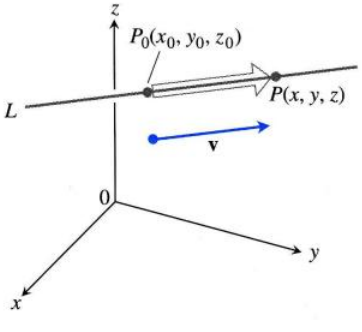
$$(x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k}=t(v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}),$$

amit az

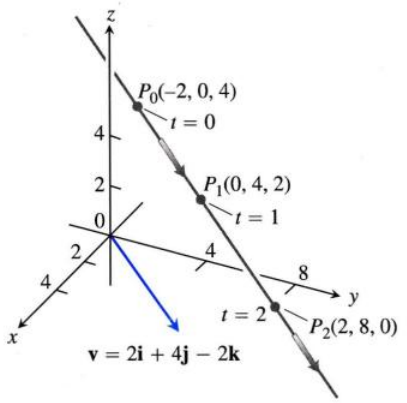
$$x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k}+t(v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}) \qquad (12.3)$$

alakban is felírhatunk.

Ha $\mathbf{r}(t)$ a $P(x,y,z)$ pont helyvektora, $\mathbf{r}_0$ pedig a $P_0(x_0,y_0,z_0)$ pont helyvektora, akkor a (12.3) egyenlőség a térbeli egyenes egyenletének vektoriális alakja.



12.35. ÁBRA: A P pont akkor és csak akkor van rajta a P_0 ponton átmenő, $\mathbf{v}$-vel párhuzamos egyenesen, ha $\overrightarrow{P_0P}$ előáll $\mathbf{v}$ számszorosaként.



12.36. ÁBRA: Az $x = -2 + 2t$, $y = 4t$, $z = 4 - 2t$ egyenletrendszerű egyenes kiválasztott pontjai és a hozzájuk tartozó paraméterértékek.

Az egyenes vektoregyenlete

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő, v-vel párhuzamos L egyenes vektoregyenlete:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \qquad -\infty < t < \infty, \tag{12.4}$$

ahol $\mathbf{r}$ az L egyenes $P(x, y, z)$ pontjához tartozó helyvektor, $\mathbf{r}_0$ pedig a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponthoz tartozó helyvektor. A $\mathbf{v}$ vektort az egyenes irányvektorának nevezzük. $\mathbf{v}$ minden nemnulla számszorosa is irányvektor.

A (12.4) egyenlőségből három skaláregyenlet adódik:

$$x = x_0 + tv_1, \qquad y = y_0 + tv_2, \qquad z = z_0 + tv_3.$$

Ez az egyenes paraméteres egyenletrendszere a $-\infty < t < \infty$ paramétertartományban.

Az egyenes paraméteres egyenletrendszere

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ vektorral párhuzamos egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$x = x_0 + tv_1, \qquad y = y_0 + tv_2, \qquad z = z_0 + tv_3, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{12.5}$$

1. PÉLDA: **Adott ponton átmenő, adott vektorral párhuzamos egyenes paraméterezése**

Írjuk fel a $(-2, 0, 4)$ ponton átmenő, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ vektorral párhuzamos egyenes paraméteres egyenletrendszerét (12.36. ábra)! □

Megoldás: $P_0(x_0, y_0, z_0)$ legyen most a $(-2, 0, 4)$ pont a $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ vektor pedig $2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Ezeket az értékeket (12.5) egyenletbe behelyettesítve:

$$x = -2 + 2t, \qquad y = 4t, \qquad z = 4 - 2t. \qquad \square$$

2. PÉLDA: **Két adott ponton átmenő egyenes paraméterezése**

Írjuk fel a $P(-3, 2, -3)$ és $Q(1, -1, 4)$ pontokon átmenő egyenes paraméteres egyenletrendszerét!

Megoldás: A

$$\vec{PQ} = (1 - (-3))\mathbf{i} + (-1 - 2)\mathbf{j} + (4 - (-3))\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

párhuzamos lesz a keresett egyenessel és az $(x_0, y_0, z_0) = (-3, 2, -3)$ értéket a (12.5) egyenletbe helyettesítve:

$$x = -3 + 4t, \qquad y = 2 - 3t, \qquad z = -3 + 7t.$$

„Alappontként" a $Q(1, -1, 4)$ pontot is választhatjuk, és ekkor azt kapjuk, hogy

$$x = 1 + 4t, \qquad y = -1 - 3t, \qquad z = 4 + 7t.$$

Ez ugyanannak az egyenesnek az egyenletrendszere, csak adott paraméterértékhez az egyenesnek más pontja tartozik. □

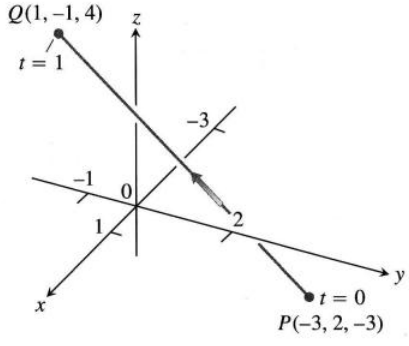
Jegyezzük meg, hogy a paraméterezés nem egyértelmű. Nem csak az „alappontot", hanem az irányvektor hosszát vagy éppen a paramétert is változtathatjuk. Az $x = -3 + 4t^3$, $y = 2 - t^3$, $z = -3 + 7t^3$ egyenlet is a feladatban szereplő egyenes egy paraméteres egyenletrendszere, hiszen ugyanazokat az (x, y, z) koordinátákat adja meg.

Két pontot összekötő egyenes szakasz paraméteres megadásához először a pontokon átmenő egyenest paraméterezzük. Azután megkeressük a szakasz végpontjaihoz tartozó t értékeket és csak e két érték által meghatározott zárt intervallumhoz tartozó t értékeket engedjük meg, mint lehetséges paraméterértékeket.

Az egyenes egyenlete és a paraméterre vonatkozó kikötés együttesen a szakasz paraméteres egyenletrendszerét adja meg.

3. PÉLDA: **Egyenes szakasz paraméterezése**

Paraméterezzük a $P(-3,2,-3)$ és $Q(1,-1,4)$ pontokat összekötő szakaszt (12.37. ábra).



12.37. ÁBRA: A 3. példában a PQ szakaszt paramétereztük. A nyíl t növekedésének irányába mutat.

Megoldás: Először felírjuk a megadott pontokon áthaladó egyenes paraméteres egyenletrendszerét, amit most egyszerűen átveszünk a 2. példából:

$$x=-3+4t, \qquad y=2-3t, \qquad z=-3+7t.$$

Vegyük észre, hogy az egyenes

$$(x,y,z)=(-3+4t,2-3t,-3+7t)$$

pontja $t=0$ esetén esik egybe a $P(-3,2,-3)$ ponttal, és $t=1$ esetén esik egybe a $Q(1,-1,4)$ ponttal. Ha az egyenes egyenletrendszerét kibővítjük a $0\le t\le 1$ feltétellel, akkor eljutunk az egyenes szakasz paraméteres egyenletrendszeréhez:

$$x=-3+4t, \qquad y=2-3t, \qquad z=-3+7t, \qquad 0\le t\le 1. \qquad \square$$

Ha valamely $P_0(x_0,y_0,z_0)$ pontból induló és $\mathbf{v}$ irányban mozgó részecske pályáját vizsgáljuk, akkor kifejezőbb az egyenletét a (12.4) vektoriális alakban felírni:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t)&=\mathbf{r}_0+t\mathbf{v}\\&=\mathbf{r}_0+t|\mathbf{v}|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.\end{aligned} \tag{12.6}$$

Másszóval a részecske t időpontbeli helyzetét úgy kapjuk meg, hogy kezdeti pozíciójához hozzáadjuk az egyenes vonalú mozgással $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ irányban megtett távolságot (sebesség $\times$ idő).

4. PÉLDA: **Helikopter által megtett távolság**

A helikopter felszállóhelyét tekintsük a koordináta-rendszer kezdőpontjának. Az $(1,1,1)$ pont irányába repül 60 m/s sebességgel. Mi lesz a pozíciója 10 másodperc elteltével?

Megoldás: Az origót a felszállóhellyel azonosítjuk. Ekkor az

$$\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$$

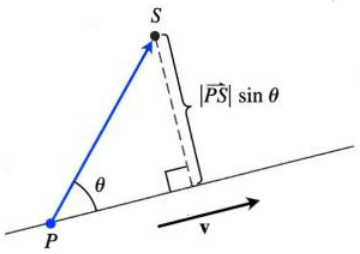
egységvektor adja meg a repülés irányát. A (12.6) egyenletből a helikopter helyzete a t időpontban:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t)&=\mathbf{r}_0+r(\text{sebesség})\mathbf{u}\\&=\mathbf{0}+r(60)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right)\\&=20\sqrt{3}t(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}).\end{aligned}$$

Ha $t=10$ s, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(10)&=200\sqrt{3}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\\&\left\langle 200\sqrt{3},200\sqrt{3},200\sqrt{3}\right\rangle.\end{aligned}$$

Az $(1,1,1)$ pont irányába repülve a $(200\sqrt{3},200\sqrt{3},200\sqrt{3})$ pontban lesz 10 másodperc múlva a helikopter. Az általa megtett távolság $(60\text{ m/s})(10\text{ m/s})=$ $=600$ m, ami éppen az $\mathbf{r}(10)$ vektor hossza. $\square$



12.38. ÁBRA: Az S pont és a P ponton áthaladó, $\mathbf{v}$-vel párhuzamos egyenes távolsága $|\vec{PS}|\sin\theta$, ahol θ a $\vec{PS}$ és a $\mathbf{v}$ által bezárt szög.

Pont és egyenes távolsága

Ha az S pont és a P ponton áthaladó, $\mathbf{v}$ irányú egyenes távolságát szeretnénk meghatározni, akkor valójában a $\vec{PS}$ vektor $\mathbf{v}$-re merőleges összetevőjének a nagyságát kell megadnunk (12.38. ábra). Az ábra jelöléseivel ennek az összetevőnek a nagysága $|\vec{PS}|\sin\theta$, azaz $\dfrac{|\vec{PS}\times\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$.

Az S pont és a P ponton áthaladó, $\mathbf{v}$-vel párhuzamos egyenes távolsága

$$d=\frac{|\vec{PS}\times\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}. \tag{12.7}$$

5. PÉLDA: **Pont és egyenes távolságának meghatározása**

Határozzuk meg az $S(1,1,5)$ pont és az

$$L: \qquad x=1+t, \quad y=3-t, \quad z=2t$$

egyenes távolságát!

Megoldás: L egyenletéből látszik, hogy átmegy a $P(1,3,0)$ ponton és párhuzamos a $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ vektorral. Mivel

$$\vec{PS}=(1-1)\mathbf{i}+(1-3)\mathbf{j}+(5-0)\mathbf{k}=-2\mathbf{j}+5\mathbf{k}$$

és

$$\vec{PS}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\0&-2&5\\1&-1&2\end{vmatrix}=\mathbf{i}+5\mathbf{j}+2\mathbf{k},$$

a (12.7) egyenlet azt adja, hogy

$$d=\frac{|\vec{PS}\times\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}=\frac{\sqrt{1+25+4}}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}=\sqrt{5}. \qquad \square$$

Egy sík egyenlete

A tér egy síkját úgy adhatjuk meg, hogy megadjuk valamely pontját és megadjuk a „dőlését" vagy irányát. Ezt a „dőlést" a síkra merőleges vektorral, másszóval a **normálissal** definiáljuk. A 4. példában már említettük, hogy egy normálisnak minden nemnulla számszorosa is normális.

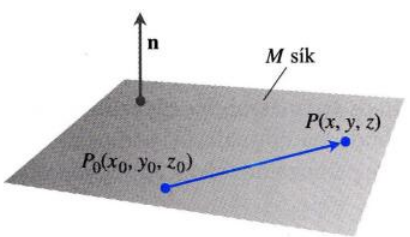
Tegyük fel, hogy az M sík átmegy a $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ponton és merőleges a nemnulla $\mathbf{n}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ vektorra. Akkor M azoknak a $P(x,y,z)$ pontoknak a halmaza, amelyekre $\vec{P_0P}$ ortogonális $\mathbf{n}$-nel (12.39. ábra). Ebben az esetben tehát a skaláris szorzatra $\mathbf{n}\cdot\vec{P_0P}=0$. Ezzel az egyenlettel ekvivalensek a

$$(A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k})\cdot[(x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k}]=0$$

és az

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

egyenletek.



12.39. ÁBRA: A sík egyenletét a normálvektorával definiáljuk. A P pont akkor és csak akkor van rajta a P_0 pontra illeszkedő síkon, ha $\mathbf{n}\cdot\vec{P_0P}=0$.

A sík egyenlete

A $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ponton átmenő és $\mathbf{n}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ normálvektorú sík

vektoregyenlete:	$\mathbf{n}\cdot\vec{P_0P}=0$
komponensegyenlete:	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
egyszerűsített komponensegyenlete:	$Ax+By+Cz=D$, ahol $D=Ax_0+By_0+Cz_0$.

Nyilvánvaló, hogy egy adott $\mathbf{n}$-nek bármilyen nemnulla számszorosát írva az egyenletbe, ugyanannak az egyenletnek nemnulla számszorosát kapjuk, tehát ugyanazt az egyenletet.

6. PÉLDA: **Sík egyenletének meghatározása**

Írjuk fel a $P_0(-3,0,7)$ ponton átmenő, az $\mathbf{n} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 1\mathbf{k}$ vektorra merőleges sík egyenletét!

Megoldás: A komponensegyenlet

$$5(x-(-3)) + 2(y-0) + (-1)(z-7) = 0.$$

Egyszerűsítve kapjuk, hogy

$$5x + 15 + 2y - z + 7 = 0$$
$$5x + 2y - z = -22. \qquad \square$$

Vegyük észre, hogy az $\mathbf{n} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 1\mathbf{k}$ vektor komponensei és az $5x + 2y - z = -22$ egyenletben x, y és z együtthatói megegyeznek. Az $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ vektor az $Ax + By + Cz = D$ síknak normálvektora.

7. PÉLDA: **Három megadott ponton átmenő sík egyenletének meghatározása**

Írjuk fel az $A(0,0,1)$, $B(2,0,0)$ és $C(0,3,0)$ pontokon átmenő sík egyenletét!

Megoldás: Keressük meg a sík normálvektorát és azután, (bármelyik) megadott pontot kiszemelve írjuk fel a sík egyenletét.

Az

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

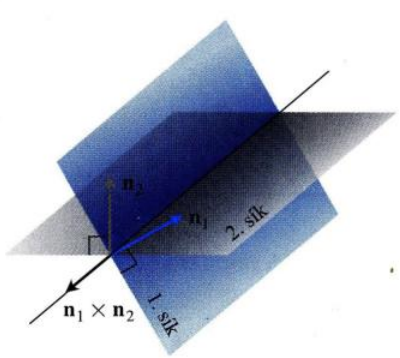
vektor a síknak egy normálvektora. Helyettesítsük be ennek komponenseit valamint az $A(0,0,1)$ pont koordinátáit a sík általános egyenletébe:

$$3(x-0) + 2(y-0) + 6(z-1) = 0$$
$$3x + 2y + 6x = 6. \qquad \square$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a B vagy a C pontot választva ugyanerre az egyenletre jutunk.

Síkok metszésvonala

Két egyenes akkor és csak akkor párhuzamos egymással, ha egyező irányúak, két sík pedig akkor és csak akkor párhuzamos, ha normálisaik párhuzamosak, vagyis $\mathbf{n}_1 = k\mathbf{n}_2$ valamilyen k skalárra. A nem párhuzamos síkok egy egyenesben metszik egymást.



12.40. ÁBRA: Két sík metszésvonalának és normálvektorának a viszonya (8. példa).

8. PÉLDA: **Két sík metszésvonalával párhuzamos vektor**

Adjunk meg egy olyan vektort, amely párhuzamos a $3x - 6y - 2z = 15$ és $2x + y - 2z = 5$ síkok metszésvonalával.

Megoldás: Két sík metszésvonala mind a két sík normálvektorára $\mathbf{n}_1$-re és $\mathbf{n}_2$-re is merőleges (12.40. ábra), ezért párhuzamos az $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ vektorral. Esetünkben

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 14\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 15\mathbf{k}.$$

$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ bármely (nem nulla) skalárszorosa is eleget tesz a feladat feltételeinek. $\square$

9. PÉLDA: **Két sík metszésvonalának paraméterezése**

Írjunk fel paraméteres egyenletrendszert a $3x-6y-2z=15$ és $2x+y-2z=5$ síkok metszésvonalára.

Megoldás: Meg kell adnunk egy, a metszésvonallal párhuzamos vektort, valamint a metszésvonalnak egy pontját, s azután alkalmazhatjuk a (12.5) összefüggést.

A 8. példában már felírtuk a $\mathbf{v}=14\mathbf{i}+2\mathbf{j}+15\mathbf{k}$ vektort, mint a metszésvonallal párhuzamos vektort. A metszésvonal pontjai egyben a két síknak közös pontjai is. Mivel az irányvektor harmadik koordinátája nem nulla, az egyenes nem párhuzamos az xy-síkkal, így pontjainak harmadik koordinátája minden értéket felvesz, választhatjuk tehát 0-nak. A síkok egyenletébe $z=0$-t helyettesítve, s aztán az egyenletrendszert x-re és y-ra megoldva közös pontnak adódik például a $(3,-1,0)$ pont. Az egyenes egyenlete:

$$x=3+14t, \qquad y=-1+2t, \qquad z=15t.$$

A $z=0$ választás önkényes, ugyanígy választhattuk volna a $z=1$ vagy a $z=-1$ értékeket is. Vagy feltehettük volna azt is, hogy $x=0$ és ekkor y-ra és z-re oldottuk volna meg az egyenletrendszert. Ettől csupán az egyenes paraméterezése változott volna meg, de minden esetben ugyanazt az egyenest kapjuk megoldásként. □

Néha egy egyenes és egy sík metszetére is kíváncsiak vagyunk. Például, ha egy sík lemezt átdöfünk egy egyenes szakasszal (pálcával), érdekes lehet tudni, hogy annak mekkora darabját fedi el a lemez. Ennek a problémának például számítógépes grafikai alkalmazásai vannak (73. feladat).

10. PÉLDA: **Egyenes és sík metszetének meghatározása**

Mely pontban metszi az

$$x=\frac{8}{3}+2t, \qquad y=-2t, \qquad z=1+t$$

egyenes a $3x+2y+6z=6$ síkot?

Megoldás: A

$$\left(\frac{8}{3}+2t,-2t,1+t\right)$$

pont akkor van rajta a síkon, ha koordinátái kielégítik a sík egyenletét, azaz ha

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{8}{3}+2t\right)+2(-2t)+6(1+t)&=6\\ 8+6t-4t+6t&=6\\ 8t&=-8\\ t&=-1. \end{aligned}$$

A metszéspont:

$$(x,y,z)|_{t=-1}=\left(\frac{8}{3}-2,2,1-1\right)=\left(\frac{2}{3},2,0\right). \qquad \square$$

Pont és sík távolsága

Ha P az $\mathbf{n}$ normálisú sík egy pontja, akkor tetszőleges S pontnak a síktól való távolsága a $\vec{PS}$ vektor $\mathbf{n}$-re eső vetületének a hossza. Azaz S és a sík távolsága:

$$d=\left|\vec{PS}\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right|, \tag{12.8}$$

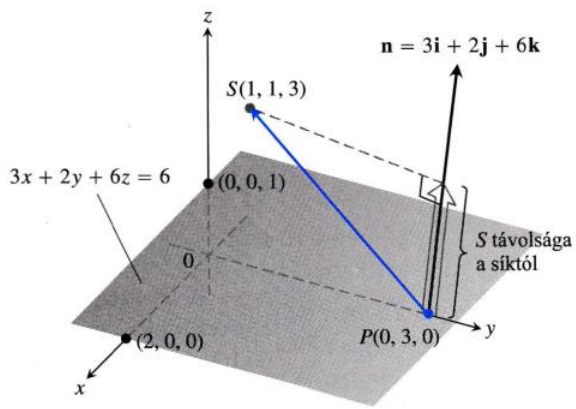
ahol $\mathbf{n}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ a sík normálvektora.

11. PÉLDA: **Pont és sík távolságának meghatározása**

Határozzuk meg az $S(1,1,3)$ pont távolságát a $3x+2y+6z=6$ síktól!

Megoldás: Jelöljünk ki egy P pontot a síkon, és számítsuk ki a $\vec{PS}$ vektornak a sík $\mathbf{n}$ normálisára eső vetületének a hosszát (12.41. ábra). A $3x+2y+6z=6$ egyenlet együtthatóival

$$\mathbf{n} = 3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+6\mathbf{k}.$$



12.41. ÁBRA: Az S síktól való távolsága a $\vec{PS}$ vektor $\mathbf{n}$-re vetített vetületének a hossza (11. példa).

A sík egy pontját legegyszerűbben úgy kapjuk meg, ha a koordinátatengelyekkel vett metszéspontjait tekintjük. Ha a sík y-tengellyel való metszéspontját, azaz a $(0,3,0)$ pontot tekintjük a P pontnak, akkor

$$\vec{PS} = (1-0)\mathbf{i}+(1-3)\mathbf{j}+(3-0)\mathbf{k} = \mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k},$$
$$|\mathbf{n}| = \sqrt{3^2+2^2+6^2} = \sqrt{49} = 7.$$

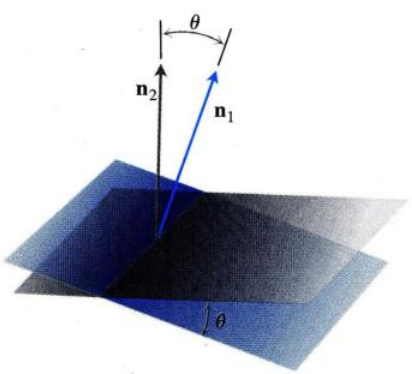
S távolsága a síktól:

$$d = \left|\vec{PS}\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right| = \left|(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k})\cdot\left(\frac{3}{7}\mathbf{i}+\frac{2}{7}\mathbf{j}+\frac{6}{7}\mathbf{k}\right)\right| =$$
$$= \left|\frac{3}{7}-\frac{4}{7}+\frac{18}{7}\right| = \frac{17}{7}.$$

□

Síkok által közbezárt szög

Két egymást metsző sík **hajlásszögét** olyan normálvektoraik hajlásszögeként értelmezzük, amelyek egymással $\pi/2$-nél nem nagyobb szöget zárnak be. (12.42. ábra).



12.42. ÁBRA: Két sík szögét normálisaik szögéből kaphatjuk meg.

12. PÉLDA:

Számítsuk ki a $3x-6y-2z=15$ és $2x+y-2z=5$ síkok által bezárt szöget!

Megoldás: A

$$\mathbf{n}_1 = 3\mathbf{i}-6\mathbf{j}-2\mathbf{k}, \qquad n_2 = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$$

vektorok a síkok normálisai. Az általuk bezárt szög:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}\right)$$
$$= \arccos\left(\frac{4}{21}\right)$$
$$\approx 1{,}38 \text{ radián, azaz kb. } 79 \text{ fok.}$$

□

12.5. Feladatok

Egyenesek és egyenes szakaszok

Az 1–12. feladatokban írjuk fel az egyenesek paraméteres egyenletrendszerét!

1. A $P(3,-4,-2)$ ponton átmenő, az $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ vektorral párhuzamos egyenes.

2. A $P(1,2,-1)$ és $Q(-1,0,1)$ pontokon átmenő egyenes.

3. A $P(-2,0,3)$ és $Q(3,5,-2)$ pontokon átmenő egyenes.

4. A $P(1,2,0)$ és $Q(1,1,-1)$ pontokon átmenő egyenes.

5. Az origón átmenő, a $2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ vektorral párhuzamos egyenes.

6. A $P(3,-2,-1)$ ponton átmenő, az $x=1+2t$, $y=2-t$, $z=3t$ egyenessel párhuzamos egyenes.

7. Az $(1,1,1)$ ponton átmenő, a z-tengellyel párhuzamos egyenes.

8. Az $(2,4,5)$ ponton átmenő, a $3x+7y-5z=21$ síkra merőleges egyenes.

9. Az $(0,-7,0)$ ponton átmenő, az $x+2y+2z=13$ síkra merőleges egyenes.

10. A $(2,3,0)$ ponton átmenő, az $\mathbf{u}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ és $\mathbf{v}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ vektorokra merőleges egyenes.

11. Az x-tengely.

12. A z-tengely.

Paraméterezzük a 13–20. feladatokban megadott pontokat összekötő egyenes szakaszokat. Vegyük fel a koordinátatengelyeket, ábrázoljuk a szakaszt és az ábrán a paraméterértékek növekedésének irányát is jelezzük!

13. $(0,0,0)$, $(1,1,3/2)$

14. $(0,0,0)$, $(1,0,0)$

15. $(1,0,0)$, $(1,1,0)$

16. $(1,1,0)$, $(1,1,1)$

17. $(0,1,1)$, $(0,-1,1)$

18. $(0,2,0)$, $(3,0,0)$

19. $(2,0,2)$, $(0,2,0)$

20. $(1,0,-1)$, $(0,3,0)$

Síkok

A 21–26. feladatokban írjuk fel a sík egyenletét!

21. A $P_0(0,2,-1)$ ponton átmenő és az $\mathbf{n}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ vektorra merőleges sík.

22. Az $(1,-1,3)$ ponton átmenő és a

$$3x+y+z=7$$

síkkal párhuzamos sík.

23. Az $(1,1,-1)$, $(2,0,2)$, $(0,-2,1)$ pontokon átfektetett sík.

24. A $(2,4,5)$, $(1,5,7)$, $(-1,6,8)$ pontokon átfektetett sík.

25. A $P_0(2,4,5)$ ponton átmenő és az

$$x=5+t, \quad y=1+3t, \quad z=4t$$

egyenesre merőleges sík.

26. Az $A(1,-2,1)$ ponton átmenő, az origóból az A pontba mutató vektorra merőleges sík.

27. Keressük meg az $x=2t+1$, $y=3t+2$, $z=4t+3$, valamint az $x=s+2$, $y=2s+4$, $z=-4s-1$ egyenesek metszéspontját, majd írjuk fel az egyenesek által meghatározott sík egyenletét!

28. Keressük meg az $x=t$, $y=-t+2$, $z=t+1$, valamint az $x=2s+2$, $y=s+3$, $z=5s+6$ egyenesek metszéspontját, majd írjuk fel az egyenesek által meghatározott sík egyenletét!

A 29. és 30. feladatban írjuk fel a megadott, egymást metsző egyenesek síkjának egyenletét!

29. $L1:\ x=-1+t,\ y=2+t,\ z=1-t;\ -\infty<t<\infty$
$L2:\ x=1-4s,\ y=1+2s,\ z=2-2s;\ -\infty<s<\infty$

30. $L1:\ x=t,\ y=3-3t,\ z=-2-t;\ -\infty<t<\infty$
$L2:\ x=1+s,\ y=4+s,\ z=-1+s;\ -\infty<s<\infty$

31. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P_0(2,1,-1)$ ponton és merőleges a $2x+y-z=3$, $x+2y+z=2$ síkok metszésvonalára.

32. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P_1(1,2,3)$ és $P_2(3,2,1)$ pontokon és merőleges a $4x-y+2z=7$ síkra.

Távolság

A 33–38. feladatokban pont és egyenes távolságát kell meghatároznunk.

33. $(0,0,12)$; $x=4t$, $y=-2t$, $z=2t$

34. $(0,0,0)$; $x=5+3t$, $y=5+4t$, $z=-3-5t$

35. $(2,1,3)$; $x=2+2t$, $y=1+6t$, $z=3$

36. $(2,1,-1)$; $x=2t$, $y=1+2t$, $z=2t$

37. $(3,-1,4)$; $x=4-t$, $y=3+2t$, $z=-5+3t$

38. $(-1,4,3)$; $x=10+4t$, $y=-3$, $z=4t$

A 39–44. feladatokban pont és sík távolságának meghatározása a feladat.

39. $(2,-3,4)$, $x+2y+2z=13$

40. $(0,0,0)$, $3x+2y+6z=6$

41. $(0,1,1)$, $4y+3z=-12$

42. $(2,2,3)$, $2x+y+2z=4$

43. $(0,-1,0)$, $2x+y+2z=4$

44. $(1,0,-1)$, $-4x+y+z=4$

45. Számítsuk ki az $x+2y+6z=1$ és az $x+2y+6z=10$ síkok távolságát!

46. Számítsuk ki az $x=2+t$, $y=1+t$, $z=-(1/2)-(1/2)t$ egyenes és az $x+2y+6z=10$ sík távolságát!

Szögek

A 47. és 48. feladatban a megadott síkok szögét kell meghatározni.

47. $x+y=1$, $2x+y-2z=2$

48. $5x+y-z=10$, $x-2y+3z=-1$

T A 49–52. feladatokban megadott síkok által bezárt hegyesszög meghatározásához használjunk számológépet! Kerekítsünk század radiánra!

49. $2x+2z+2y=3$, $2x-2y-z=5$

50. $x+y+z=1$, $z=0$ (az xy-sík)

51. $2x+2y-z=3$, $x+2y+z=2$

52. $4y+3z=-12$, $3x+2y+6z=6$

Metsző egyenesek és síkok

Az 53–56. feladatokban egyenes és sík döféspontját kell meghatározni.

53. $x = 1 - t,\quad y = 3t,\quad z = 1 + t;\quad 2x - y + 3z = 6$

54. $x = 2,\quad y = 3 + 2t,\quad z = -2 - 2t;\quad 6x + 3y - 4z = -12$

55. $x = 1 + 2t,\quad y = 1 + 5t,\quad z = 3t;\quad x + y + z = 2$

56. $x = -1 + 3t,\quad y = -2,\quad z = 5t;\quad 2x - 3z = 7$

Írjuk fel az 57–60. feladatokban megadott síkok metszésvonalának paraméteres egyenletrendszerét!

57. $x + y + z = 1,\quad x + y = 2$

58. $3x - 6y - 2z = 3,\quad 2x + y - 2z = 2$

59. $x - 2y + 4z = 2,\quad x + y - 2z = 5$

60. $5x - 2y = 11,\quad 4y - 5z = -17$

Két térbeli egyenes vagy metszi egymást, vagy párhuzamosak vagy kitérők (képzeljük el például két repülőgép pályáját). A 61. és a 62. feladatban 3–3 egyenest adtunk meg. Vizsgáljuk meg őket páronként, hogy metszők, párhuzamosak vagy kitérők-e! Ha metszik egymást, akkor a metszéspontjukat is adjuk meg!

61. $L1: x = 3 + 2t,\ y = -1 + 4t,\ z = 2 - t;\ -\infty < t < \infty$
$L2: x = 1 + 4s,\ y = 1 + 2s,\ z = -3 + 4s;\ -\infty < s < \infty$
$L3: x = 3 + 2r,\ y = 2 + r,\ z = -2 + 2r;\ -\infty < r < \infty$

62. $L1: x = 1 + 2t,\ y = -1 - t,\ z = 3t;\ -\infty < t < \infty$
$L2: x = 2 - s,\ y = 3s,\ z = 1 + s;\ -\infty < s < \infty$
$L3: x = 5 + 2r,\ y = 1 - r,\ z = 8 + 3r;\ -\infty < r < \infty$

Elmélet példákkal

63. A (12.5) egyenlőség felhasználásával állítsuk elő a $P_1(2,-4,7)$ ponton átmenő és a $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ vektorral párhuzamos egyenes egy parametrizációját. Azután a $P_2(-2,-2,1)$ ponttal és a $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{i} + (1/2)\mathbf{j} - (3/2)\mathbf{k}$ vektorral készítsünk egy másik parametrizációt!

64. A komponens-formula alkalmazásával adjuk meg a $P_1(4,1,5)$ ponton átmenő, $\mathbf{n}_1 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektorral merőleges sík egyenletét. Azután írjunk fel egy másik egyenletet ugyanerre a síkra a $P_2(3,-2,0)$ pont és az $\mathbf{n}_2 = -\sqrt{2}\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{k}$ vektor alkalmazásával.

65. Határozzuk meg az $x = 1 + 2t,\ y = -1 - t,\ z = 3t$ egyenesnek a koordinátatengelyekkel való metszéspontjait. A megoldás hátterét is fejtsük ki!

66. Írjuk fel annak a $z = 3$ síkban fekvő egyenesnek az egyenletét, amely $\pi/6$ radián szöget zár be az $\mathbf{i}$ vektorral és $\pi/3$ szöget a $\mathbf{j}$ vektorral! A megoldás hátterét is fejtsük ki!

67. Párhuzamos-e az $x = 1 - 2t,\ y = 2 + 5t,\ z = -3t$ egyenes a $2x + y - z = 8$ síkkal? Indokoljuk a választ!

68. Miben mutatkozik meg az, ha az $A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ és $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ síkok párhuzamosak egymással? És ha merőlegesek? Indokoljuk a feleletet!

69. Keressünk két olyan síkot, amelyek metszésvonala az $x = 1 + t,\ y = 2 - t,\ z = 3 + 2t$ egyenes. Mind a két sík egyenletét írjuk fel $Ax + By + Cz = D$ alakban!

70. Adjunk meg egy síkot, amely átmegy az origón és derékszögben metszi az $M: 2x + 3y + z = 12$ síkot! Honnan tudjuk, hogy a síkunk valóban merőleges az M-re?

71. Az a,b,c nemnulla számokkal $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ grafikonja egy sík. Mely síkoknak ilyen alakú az egyenletük?

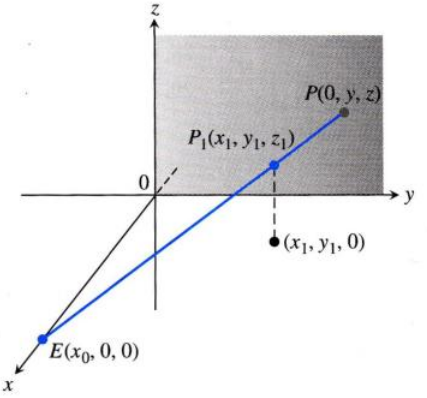
72. Legyenek L_1 és L_2 nem metsző, nem párhuzamos egyenesek. Van-e olyan nemnulla vektor, amely mindkét egyenesre merőleges? Indokoljunk!

Számítógépes grafika

73. Perspektíva a számítógépes grafikákban: A számítógépes grafikáknál és a perspektivikus ábrázolásnál is az a feladat, hogy a szemünkkel a háromdimenziós térben látott objektumokat két dimenzióban, azaz egy síkon kell ábrázolni. Legyen a szemünk, az alábbi ábra $E(x_0,0,0)$ pontjában és tegyük fel, hogy a $P_1(x_1,y_1,z_1)$ pontot szeretnénk az yz-síkon ábrázolni. Ezt úgy tesszük meg, hogy a P_1 pontot az E pontból induló vetítősugárral a síkra vetítjük. A P_1 pont képe a $P(0,y,z)$ pont lesz. Mint grafikai tervezőnek az a feladatunk, hogy adott E és P_1 pontok esetén kiszámítsuk az y és z koordinátákat.

(a) Írjunk fel vektoregyenletet az $\vec{EP}$ és $\vec{EP_1}$ szakaszokra. Ezekből fejezzük ki y-t és z-t, mint x_0, x_1, y_1 és z_1 függvényét.

(b) Teszteljük a feladat (a) részében előállított képletünket az $x_1 = 0$ és $x_1 = x_0$ esetre és vizsgáljuk meg, mi történik akkor, ha $x_0 \to \infty$. Mire jutottunk?



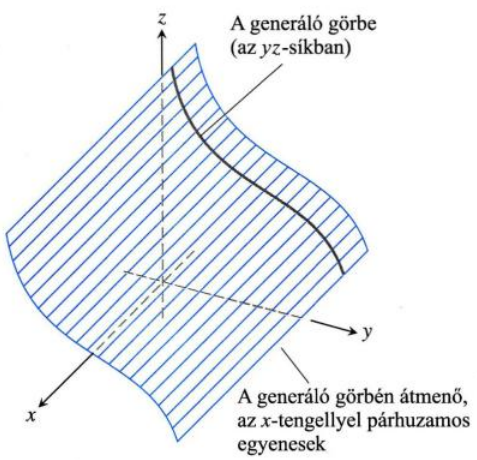
74. Rejtett vonalak: Beszéljünk még a számítógépes grafikák elkészítésének egy további tipikus problémájáról. Legyen a szemünk a $(4,0,0)$ pontban és nézzük azt a háromszög alakú lemezt, amelynek csúcspontjai az $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ és $(-2,2,2)$ pontok. Az $(1,0,0)$, $(0,2,2)$ végpontú egyenes szakasz átdöfi ezt a lemezt. A szakasznak mekkora darabját rejti el szemünk elől a lemez?

12.6. Hengerek és másodrendű felületek

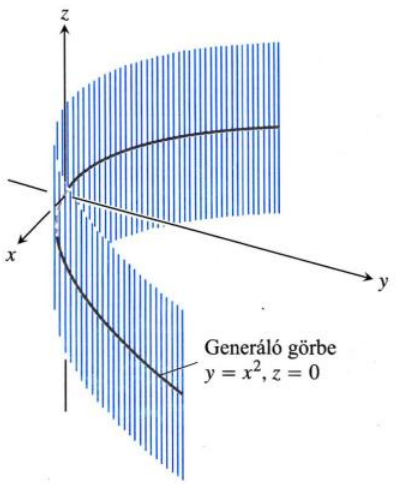
Eddig két speciális felülettípust tanulmányoztunk: a gömböt és a síkot. Ebben a fejezetben különféle hengerekkel és másodrendű felületekkel fogjuk bővíteni a listát. A másodrendű felületek olyan felületek, amelyek egyenletében x, y vagy z második hatványon szerepel.

Hengerek

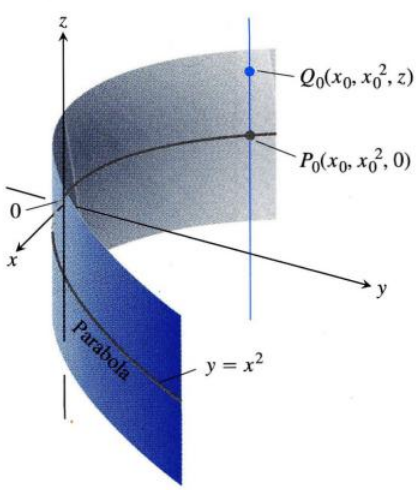
Hengert úgy állíthatunk elő, hogy egy egyenest egy adott síkgörbe mentén mozgatunk oly módon, hogy közben az egyenes mindvégig párhuzamos legyen egy adott, rögzített egyenessel. A görbét a henger **generáló görbéjének**, a párhuzamos egyeneseket a henger **alkotóinak** nevezzük (12.43. ábra). A térmértanban, ahol *hengeren körhengert* értenek, a generáló görbe kör, de mi most más generáló görbét is megengedünk. Első példánk hengerét egy parabola generálja.



12.43. ÁBRA: A henger és generáló görbéje



12.44. ÁBRA: Az xy-sík $y = x^2$ egyenletű paraboláján végigfutó, a z-tengellyel párhuzamos egyenesek által alkotott hengerfelület (1. példa).



12.45. ÁBRA: A 12.44. ábrán látható hengerfelület minden pontjának koordinátája (x_0, x_0^2, z) alakú. Ezért „$y = x^2$ hengernek" hívjuk.

Ha kézzel megrajzolunk egy henger- vagy más felületet, vagy a számítógépünkkel előállított felületeket vizsgáljuk, jobban feltűnnek azok a görbék, amelyek a felületeknek a koordinátasíkokkal vagy velük párhuzamos síkokkal alkotott síkmetszetei. Ezeket a görbéket **metszetgörbének** vagy **nyomvonalnak** is nevezzük.

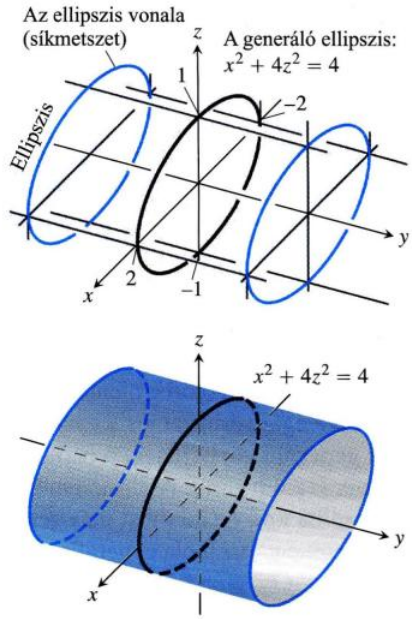
1. PÉLDA: Az $y = x^2$ parabolikus henger

Írjuk fel annak a hengernek az egyenletét, amely úgy áll elő, hogy egy, a z-tengellyel párhuzamos egyenest végigfuttatunk az $y = x^2$, $z = 0$ parabolán (12.44. ábra)!

Megoldás: Legyen a $P_0(x_0, x_0^2, 0)$ pont az $y = x^2$ parabola egy pontja. Ekkor a $Q(x_0, x_0^2, z)$ pont tetszőleges z érték mellett a hengerfelület pontja lesz, ugyanis rajta van a z-tengellyel párhuzamos $x = x_0$, $y = x_0^2$ egyenesen (12.45. ábra).

Tehát z értékétől függetlenül mindazok a pontok rajta lesznek a hengerfelületen, amelyek koordinátái kielégítik az $y = x^2$ egyenletet. Ezért a henger egyenlete $y = x^2$, és a hengert „$y = x^2$ hengernek" hívjuk. □

Hasonlóképpen az xz-sík bármely $g(x, z) = c$ görbéje definiál egy, az y-tengellyel párhuzamos alkotókból álló hengert, amelynek szintén $g(x, z) = c$ lesz az egyenlete (12.46. ábra). Bármely $h(y, z) = c$ görbe egy olyan hengert definiál,



12.46. ÁBRA: Az $x^2 + 4z^2 = 4$ elliptikus hengert az y-tengellyel párhuzamos egyenesek alkotják, amelyek az xz-sík $x^2 + 4z^2 = 4$ egyenletű ellipszisén futnak végig. A henger y-tengelyre merőleges síkokkal alkotott síkmetszetei a generáló ellipszissel egybevágó ellipszisek.

amely az x-tengellyel párhuzamos alkotókból áll, és amelynek egyenlete ugyancsak $h(y,z) = c$ (12.47. ábra). Általában persze a hengernek nem feltétlenül kell párhuzamosnak lennie valamelyik koordinátatengellyel.

Másodrendű felületek

A következő felülettípus, amit vizsgálni fogunk, a *másodrendű* felületek. Ezek a felületek az ellipszisek, a parabolák és a hiperbolák analogonjai.

A **másodrendű felület** egy x-ben, y-ban és z-ben másodfokú egyenlet grafikonja. Általános alakja:

$$Ax^2 + By^2 + Cy^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0,$$

ahol A, B, C stb. valamilyen állandók. Ezt az egyenletet, akárcsak a kétdimenziós esetben, eltolással és elforgatással egyszerűbb alakra lehet hozni. Mi csak egyszerűbb egyenleteket fogunk vizsgálni. Bár más módon definiáltuk őket, a 12.45. 12.46. és 12.47. ábrán látható felületek másodrendű felületek. A legegyszerűbb másodrendű felületek az **ellipszoidok, paraboloidok, elliptikus kúpok** és a **hiperboloidok**. (A gömböt speciális ellipszoidnak tekintjük.)

2. PÉLDA: **Ellipszoid**

Az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{12.9}$$

ellipszoid a koordinátatengelyeket a $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ és $(0, 0, \pm c)$ pontokban metszi. Az $|x| \le a$, $|y| \le b$, $|z| \le c$ egyenlőtlenségekkel definiált téglatest belsejében fekszik. A felület valamennyi koordinátasíkra nézve szimmetrikus, mivel egyenletében valamennyi változó a második hatványon szerepel.

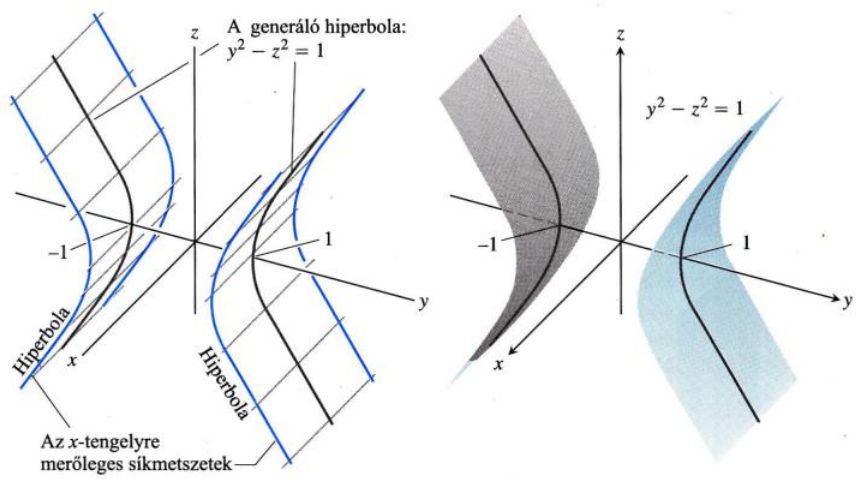
A három koordinátasík ezt a felületet ellipszisben metszi. Például

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{ha} \quad z = 0.$$

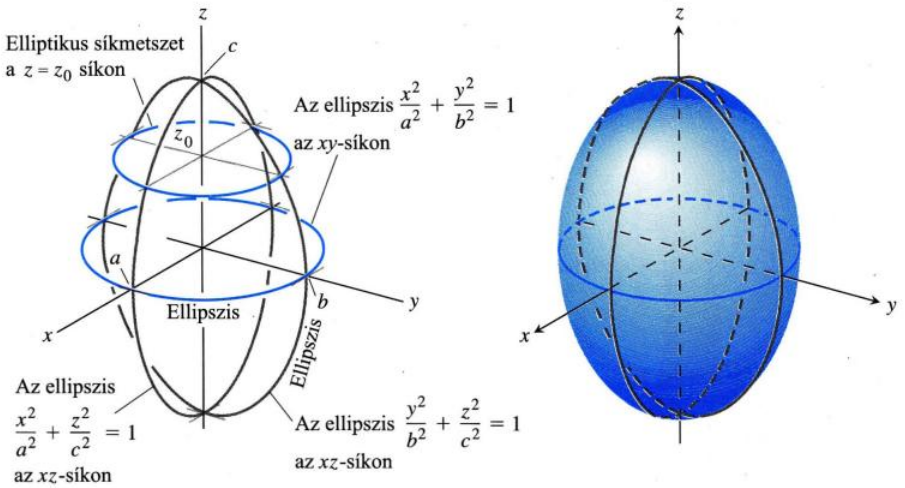
A $z = z_0$, $|z_0| < c$ sík ebből a görbéből az

$$\frac{x^2}{a^2(1 - (z_0/c)^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 - (z_0/c)^2)} = 1$$

ellipszist vágja ki.



12.47. ÁBRA: Az $y^2 - z^2 = 1$ hiperbolikus hengert az yz-sík $y^2 - z^2 = 1$ hiperbolájának ágain végigfutó és az x-tengellyel párhuzamos egyenesek rajzolják ki. A henger x-tengelyre merőleges síkokkal alkotott síkmetszetei a generáló hiperbolával egybevágó hiperbolák.



12.48. ÁBRA: A 2. példában szereplő $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipszis mindhárom koordinátasíkkal alkotott síkmetszete ellipszis.

Ha az a, b és c féltengelyek közül bármelyik kettő egyenlő, akkor a felület **forgásellipszoid**. Ha mindhárom féltengely ugyanakkora, akkor a felület egy gömb. □

3. PÉLDA: **Paraboloid**

Az

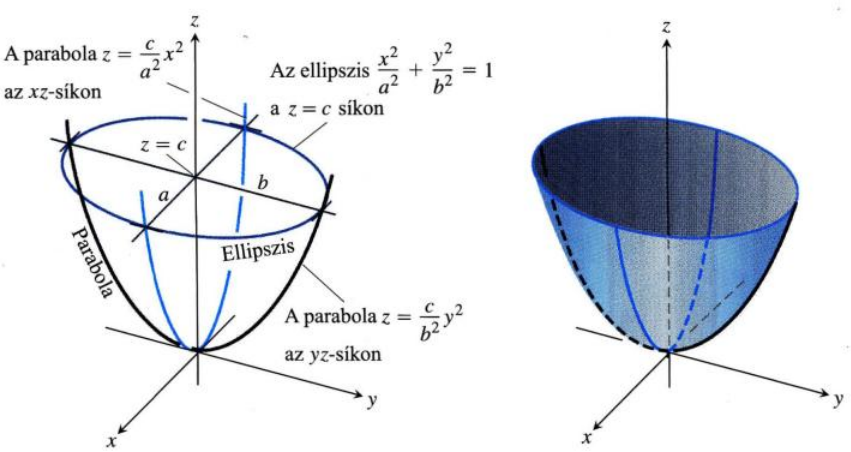
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \tag{12.10}$$

elliptikus paraboloid szimmetrikus az $x = 0$, valamint az $y = 0$ síkra (12.49. ábra). A tengelyeket csupán az origóban metszi. E pontja kivételével a felület c előjelétől függően teljes egészében az xy-sík fölött ($c > 0$), vagy alatta ($c < 0$) helyezkedik el. A koordinátasíkokkal alkotott síkmetszetei:

$x = 0$: a $z = \frac{c}{b^2} y^2$ parabola

$y = 0$: a $z = \frac{c}{a^2} x^2$ parabola

$z = 0$: a $(0,0,0)$ pont.



12.49. ÁBRA: A 3. példában szereplő $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = z/c$ elliptikus paraboloidot mutatja az ábra a $c > 0$ esetben. A felületet a z-tengelyre merőleges és az xy-sík fölött elhelyezkedő síkok ellipszisben metszik. A z-tengelyt tartalmazó síkok viszont parabolában metszik a felületet.

Bármely az xy-sík fölött elhelyezkedő $z = z_0$ sík a felületet az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0}{c}$ ellipszisben metszi, ha z_0 előjele megegyezik c előjelével. □

4. PÉLDA: **Kúp**

Az

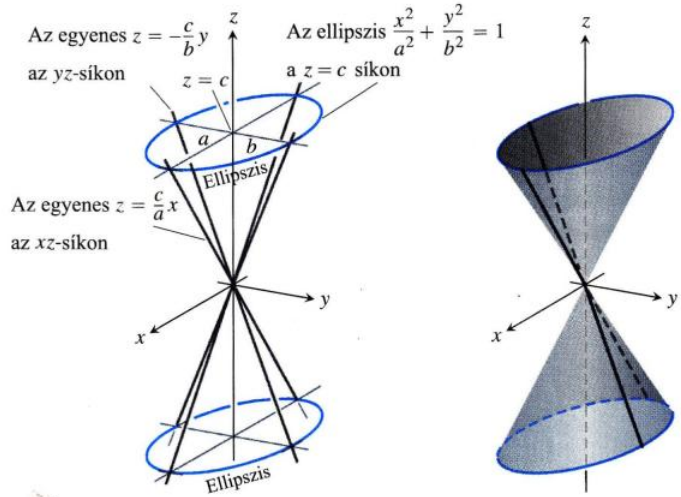
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \tag{12.11}$$

elliptikus kúp szimmetrikus mindhárom koordinátatengelyre nézve (12.50. ábra). A koordinátasíkokkal alkotott síkmetszetei:

$$x = 0: \quad \text{a} \quad z = \pm\frac{c}{b}y \text{ egyenesek}$$
$$y = 0: \quad \text{a} \quad z = \pm\frac{c}{a}x \text{ egyenesek}$$
$$z = 0: \quad \text{a} \quad (0,0,0) \text{ pont.}$$

A felület $z = z_0$ síkkal való metszete olyan ellipszis, amelynek középpontja a z-tengelyen van, csúcsai pedig a fenti egyeneseken.

Ha $a = b$, akkor a kúp egyenes körkúp. □



12.50. ÁBRA: A 4. példában szereplő $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = (z^2/c^2)$ elliptikus kúp. A felületet a z-tengellyel párhuzamos síkok ellipszisben metszik. A z-tengelyt tartalmazó függőleges síkokkal alkotott síkmetszete egy metsző egyenespár.

5. PÉLDA: **Hiperboloid**

Az

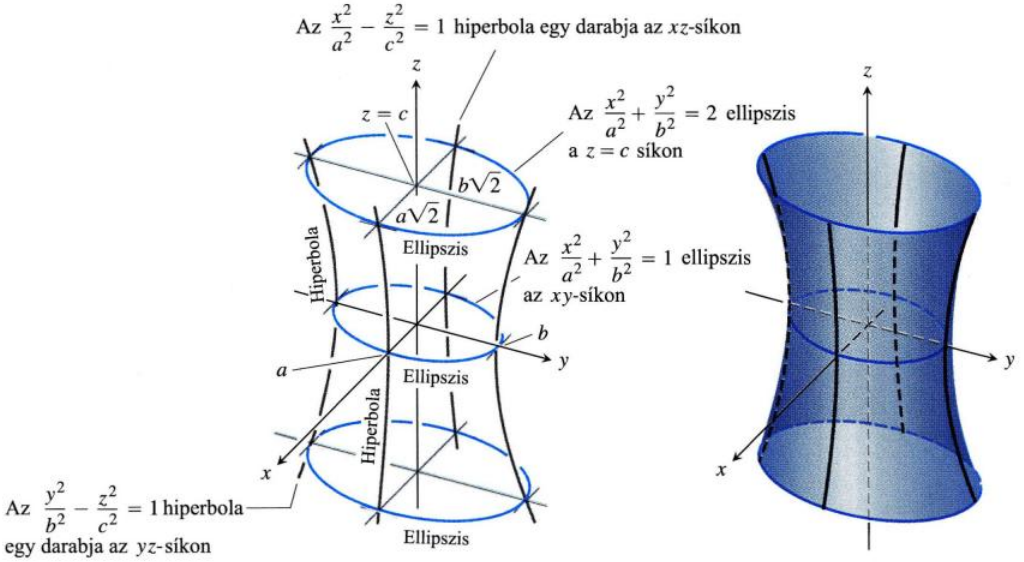
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{12.12}$$

egyköpenyű hiperboloid szimmetrikus mindhárom koordinátasíkra (12.51. ábra).

A koordinátasíkokkal alkotott síkmetszetei:

$$x = 0: \quad \text{a} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ hiperbola}$$
$$y = 0: \quad \text{a} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ hiperbola}$$
$$z = 0: \quad \text{a} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ellipszis.}$$

A $z = z_0$ sík olyan ellipszisben metszi a felületet, amelynek középpontja a z-tengelyen van, csúcsai pedig a fenti hiperbolametszetek valamelyikén.



12.51. ÁBRA: Az 5. példában szereplő $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) - (z^2/c^2) = 1$ hiperboloid. A z-tengelyre merőleges síkok a felületet ellipszisben metszik. A z-tengelyt tartalmazó síkokkal alkotott síkmetszete hiperbola.

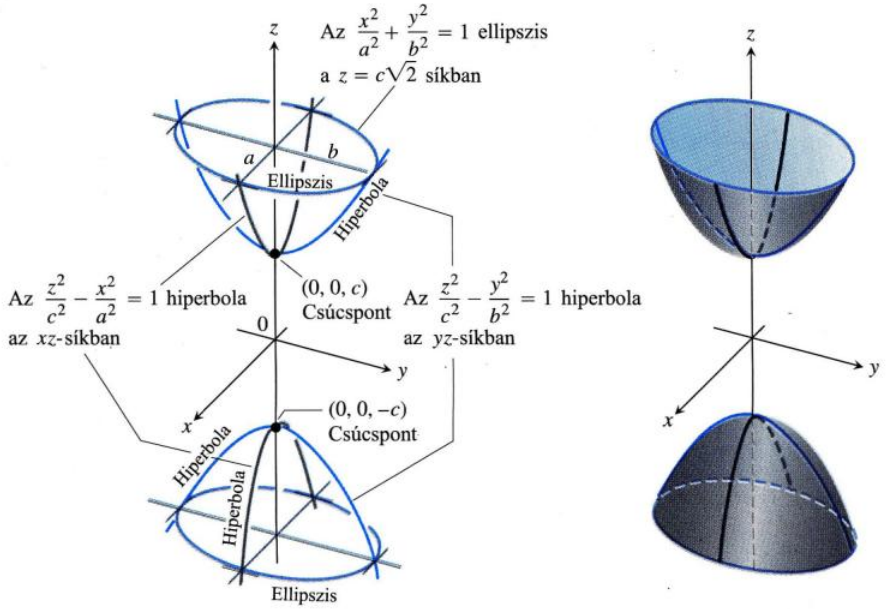
A felület összefüggő abban az értelemben, hogy bármely pontjából bármely pontjába eljuthatunk a felület mentén. Emiatt mondjuk ezt a hiperboloidot *egyköpenyűnek*, ellentétben a következő példa hiperboloidjával, amelynek két köpenye van.

Ha $a = b$, akkor a hiperboloid forgásfelület. □

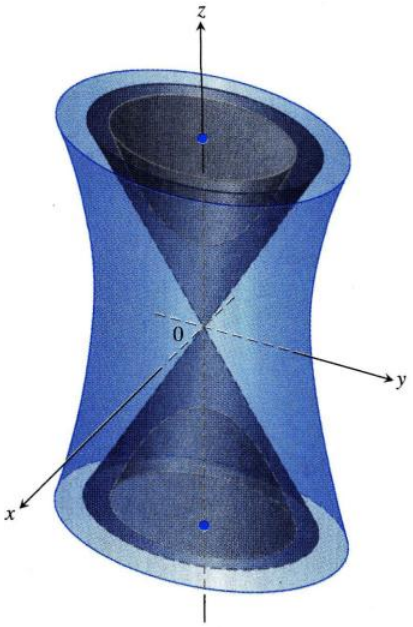
6. PÉLDA: **Hiperboloid**

A

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \tag{12.13}$$



12.52. ÁBRA: A 6. példában szereplő $(z^2/c^2) - (y^2/b^2) - (x^2/a^2) = 1$ hiperboloid. A z-tengelyre merőleges síkok a felületet ellipszisben metszik, amennyiben a hiperboloid csúcsai alatt vagy felett haladnak. A z-tengelyt tartalmazó síkokkal alkotott síkmetszete hiperbola.



12.53. ÁBRA: Mind a két típusú hiperboloid aszimptotikus a kúphoz (6. példa).

kétköpenyű hiperboloid szimmetrikus mindhárom koordinátasíkra (12.52. ábra). A $z = 0$ sík nem metszi a felületet. Egy vízszintes síkkal csak akkor van közös pontja, ha $|z| \geq c$. A koordinátasíkokkal való

$$x = 0: \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$y = 0: \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

hiperbolikus síkmetszeteinek csúcsai és fókuszai a z-tengelyen vannak. A felületnek két különálló darabja van, az egyik közvetlenül a $z = c$ sík fölött, a másik pedig a $z = -c$ sík alatt. Erről kapta a nevét.

A (12.12) és a (12.13) egyenletek jobboldala 1, csak a negatív előjelű tényezők számában különböznek egymástól. A negatív előjelű tényezők száma és a hiperboloid köpenyeinek száma megegyezik egymással. Akár (12.12) egyenletben, akár (12.13) képletben 1 helyett nullát írva az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

egyenletet kapjuk, ami az elliptikus kúp egyenletével, (12.11)-gyel azonos. A hiperboloid és ez a kúp (12.53. ábra) aszimptotikusan viselkednek, akárcsak az xy-sík

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

hiperbolái és

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

egyenesei. □

7. PÉLDA: **Nyeregpont**

Az

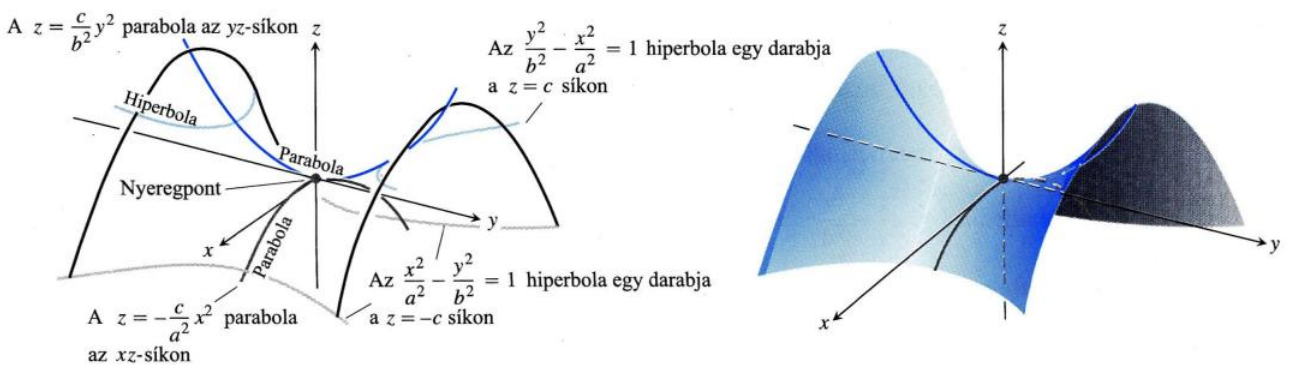
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c} \qquad c > 0 \tag{12.14}$$

hiperbolikus paraboloid az $x = 0$ és $y = 0$ síkra szimmetrikus (12.54. ábra). E síkokkal vett síkmetszetei:

$$x = 0: \quad \text{a} \quad z = \frac{c}{b^2} y^2 \text{ parabola}, \tag{12.15}$$
$$y = 0: \quad \text{a} \quad z = -\frac{c}{a^2} x^2 \text{ parabola}. \tag{12.16}$$

□

Az $x = 0$ síkon a parabola szárai felfelé nyitottak, az $y = 0$ síkon lefelé nyitottak.



12.54. ÁBRA: Az $(y^2/b^2) - (x^2/a^2) = (z/c)$, $c > 0$ hiperbolikus paraboloid. A z-tengelyre merőleges és az xy-sík felett elhelyezkedő síkok a felületet hiperbolában metszik. A másik két koordinátatengelyre merőleges síkmetszetei parabolák.

Ha a felületet a $z = z_0 > 0$ síkkal metsszük el, a síkmetszet az

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z_0}{c}$$

hiperbola lesz, amelynek tengelye párhuzamos az y-tengellyel, csúcsai pedig a (12.15) egyenletű parabolán helyezkednek el. Amennyiben z_0 negatív, úgy a hiperbola fokális tengelye az x-tengellyel lesz párhuzamos, csúcsai pedig a (12.16) egyenletű parabolán lesznek.

Az origó közelében a felület nyeregre emlékeztet. Az yz-síkon haladó vándor lokális minimumként érzékeli ezt a pontot. Az xz-síkon haladva ugyanez a pont lokális maximumként jelentkezik. Az ilyen pontot nevezik nyeregpontnak, a felületet pedig nyeregfelületnek.

Műszaki alkalmazás – A tér megjelenítése

A számítógépek grafikai programjaival láttatni tudjuk a térbeli felületeket. Különféle síkokon elhelyezkedő pályagörbéket rajzolhatunk ki, sok program az ábra forgatására is alkalmas, így egy-egy fizikai modell alakját úgy is megfigyelhetjük, hogy saját magunk forgatjuk a tér különböző irányaiba. A láthatatlan vonalakra kidolgozott algoritmus (lásd a 12.5. alfejezet, 74. gyakorlatát) blokkolja azoknak a felületdaraboknak a megjelenítését, amelyek az adott nézőpontból nem láthatók. A rendszer a felület 16.6. fejezetben tárgyalt paraméteres megadását is megkívánhatja. Egyes programoknál állítani lehet a nagyítást, így a felület legapróbb részleteit is szemügyre vehetjük.

12.6. Feladatok

Egyenletek és felületek összepárosítása

Az 1–12. feladatban megadott egyenleteket állítsuk párba a nekik megfelelő felületekkel. Állapítsuk meg tehát a felület típusát (paraboloid, ellipszoid stb.).

1. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$

2. $z^2 + 4y^2 - 4x^2 = 4$

3. $9y^2 + z^2 = 16$

4. $y^2 + z^2 = x^2$

5. $x = y^2 - z^2$

6. $x = -y^2 - z^2$

7. $x^2 + 2z^2 = 8$

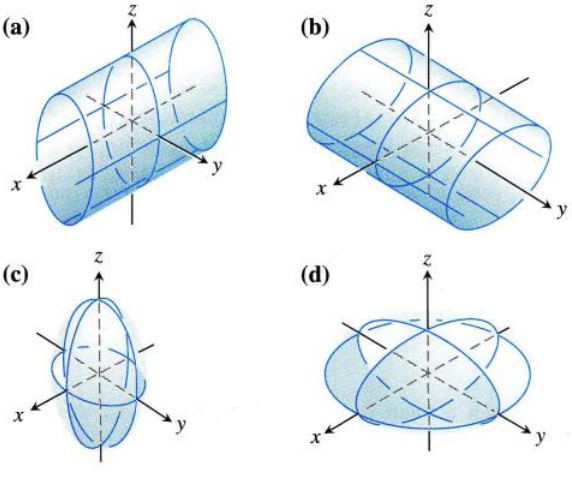
8. $z^2 + x^2 - y^2 = 1$

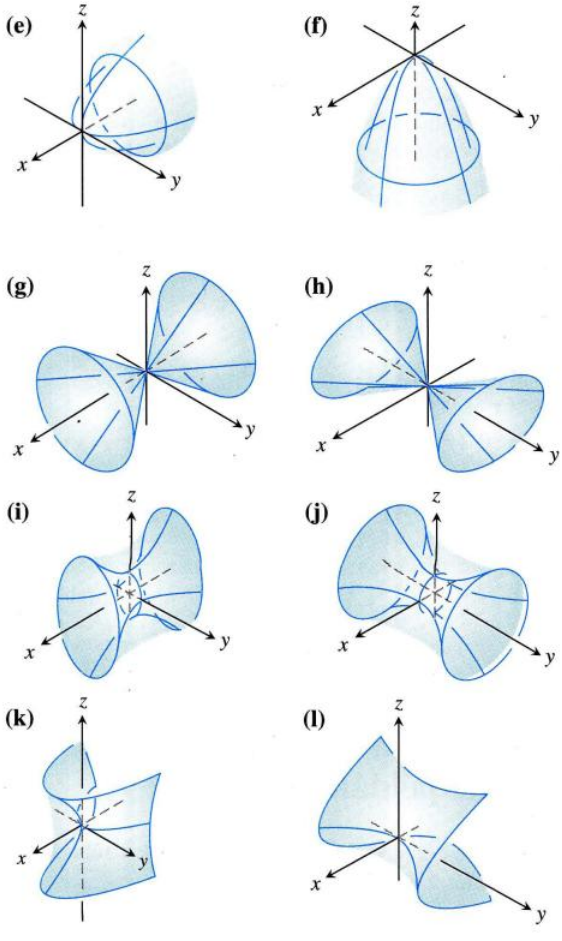
9. $x = z^2 - y^2$

10. $z = -4x^2 - y^2$

11. $x^2 + 4z^2 = y^2$

12. $9x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 36$





Ábrázolás

Ábrázoljuk a 13–76. feladatokban megadott felületeket!

HENGEREK

13. $x^2+y^2=4$ **14.** $x^2+z^2=4$

15. $z=y^2-1$ **16.** $x=y^2$

17. $x^2+4z^2=16$ **18.** $4x^2+y^2=36$

19. $z^2-y^2=1$ **20.** $yz=1$

ELLIPSZOIDOK

21. $9x^2+y^2+z^2=9$ **22.** $4x^2+4y^2+z^2=16$

23. $4x^2+9y^2+4z^2=36$ **24.** $9x^2+4y^2+36z^2=36$

PARABOLOIDOK

25. $z=x^2+4y^2$ **26.** $z=x^2+9y^2$

27. $z=8-x^2-y^2$ **28.** $z=18-x^2-9y^2$

29. $x=4-4y^2-z^2$ **30.** $y=1-x^2-z^2$

KÚPOK

31. $x^2+y^2=z^2$ **32.** $y^2+z^2=x^2$

33. $4x^2+9z^2=9y^2$ **34.** $9x^2+4y^2=36z^2$

HIPERBOLOIDOK

35. $x^2+y^2-z^2=1$ **36.** $y^2+z^2-x^2=1$

37. $(y^2/4)+(z^2/9)-(x^2/4)=1$

38. $(x^2/4)+(y^2/4)-(z^2/9)=1$

39. $z^2-x^2-y^2=1$ **40.** $(y^2/4)-(x^2/4)-z^2=1$

41. $x^2-y^2-(z^2/4)=1$ **42.** $(x^2/4)-y^2-(z^2/4)=1$

HIPERBOLIKUS PARABOLOIDOK

43. $y^2-x^2=z$ **44.** $x^2-y^2=z$

VEGYESEN

45. $x^2+y^2+z^2=4$ **46.** $4x^2+4y^2=z^2$

47. $z=1+y^2-x^2$ **48.** $y^2-z^2=4$

49. $y=-(x^2+z^2)$ **50.** $z^2-4x^2-4y^2=4$

51. $16x^2+4y^2=1$ **52.** $z=x^2+y^2+1$

53. $x^2+y^2-z^2=4$ **54.** $x=4-y^2$

55. $x^2+z^2=y$ **56.** $z^2-(x^2/4)-y^2=1$

57. $x^2+z^2=1$ **58.** $4x^2+4y^2+z^2=4$

59. $16y^2+9z^2=4x^2$ **60.** $z=x^2-y^2-1$

61. $9x^2+4y^2+z^2=36$ **62.** $4x^2+9z^2=y^2$

63. $x^2+y^2-16z^2=16$ **64.** $z^2+4y^2=9$

65. $z=-(x^2+y^2)$ **66.** $y^2-x^2-z^2=1$

67. $x^2-4y^2=1$ **68.** $z=4x^2+y^2-4$

69. $4y^2+z^2-4x^2=4$ **70.** $z=1-x^2$

71. $x^2+y^2=z$ **72.** $(x^2/4)+y^2-z^2=1$

73. $yz=1$ **74.** $36x^2+9y^2+4z^2=36$

75. $9x^2+16y^2=4z^2$ **76.** $4z^2-x^2-y^2=4$

Elmélet példákkal

77. **(a)** Fejezzük ki c függvényeként annak a síkmetszetnek a területét, amelyet a $z=c$ sík vág ki az

$$x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$$

ellipszoidból. (Az a,b féltengelyű ellipszis területe πab.)

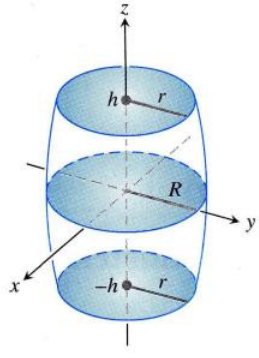
(b) A z-tengelyre merőleges szeletek segítségével számítsuk ki az (a) részben szerepelt ellipszoid térfogatát!

(c) Most határozzuk meg az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ellipszoid térfogatát! A kapott formula megadja-e $a=b=c$ esetén az a sugarú gömb térfogatát?

78. Az ábrán látható hordó olyan alakú mint egy ellipszoid, amelynek végéről a z-tengelyre merőleges síkokkal levágtak egy-egy darabot. A z-tengelyre merőleges síkmetszetei körök. A hordó magassága $2h$, középső síkmetszetének sugara R, alap és fedőlapjának sugara r. Írjuk fel a hordó térfogatképletét! Azután ellenőrizzünk két dolgot. Először is tegyük fel, hogy a hordó oldalát kiegyenesítjük, így egy R sugarú, $2h$ magasságú henger lesz belőle. Visszaadja képletünk ennek a hengernek a térfogatát? Másodszor, legyen $r=0$ és $h=R$, azaz a hordó legyen most gömb alakú. Visszaadja-e képletünk a gömb térfogatát?



79. Mutassuk meg, hogy a $z=h$ sík által az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$

paraboloidból kivágott cikkely térfogata egyenlő a cikkely alapterülete felének és a magasságnak a szorzatával. (A 12.49. ábra a $h=c$ speciális esetet mutatja.)

80. **(a)** Határozzuk meg annak a testnek a térfogatát, amelyet az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

hiperboloid, valamint a $z=0$ és $z=h$, $h>0$ síkok határolnak.

(b) A feladat (a) részében kapott térfogatképletet fejezzük ki a h magassággal, valamint a hiperboloidból a $z=0$ és $z=h$ síkok által kimetszett tartományok A_0 és A_h területével.

(c) Mutassuk meg, hogy a térfogatot a

$$V=\frac{h}{6}(A_0+4A_m+A_h)$$

képlet alapján is kiszámolhatjuk, ahol A_m a hiperboloid $z=h/2$ síkkal vett metszetének a területe.

81. Ha az $(y^2/b^2) - (x^2/a^2) = z/c$ hiperbolikus paraboloidot elmetsszük az $y = y_1$ síkkal, egy parabolát kapunk. Határozzuk meg a parabola csúcspontját és fókuszát!

82. Helyettesítsünk $z = 0$-t az

$$Ax^2 + Vy^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

egyenletbe azért, hogy egy xy-síkbeli görbét kapjunk. Milyen lesz ez a görbe? Válaszunkat indokoljuk!

83. Valahányszor egy másodrendű felület és egy, valamelyik koordinátasíkkal párhuzamos sík metszetét tekintjük, kúpszelethez jutunk. Puszta véletlen ez? Válaszunkat indokoljuk!

84. Tegyük fel, hogy a másodrendű felületet most a koordinátasíkokkal *nem* párhuzamos síkkal metszük. Milyen lesz a metszetgörbe? Indokoljunk!

Számítógépes grafikai vizsgálatok

A 85–88. feladatban ábrázolnunk kell a megadott felületeket a megadott tartományban. Ha a program alkalmas rá, forgassuk is el a felületeket, és különböző nézőpontból vegyük szemügyre őket!

85. $z = y^2, \quad -2 \le x \le 2, \quad -0{,}5 \le y \le 2$

86. $z = 1 - y^2, \quad -2 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le 2$

87. $z = x^2 + y^2, \quad -3 \le x \le 3, \quad -3 \le y \le 3$

88. $z = x^2 + 2y^2$, a

(a) $-3 \le x \le 3, \quad -3 \le y \le 3$

(b) $-1 \le x \le 1, \quad -2 \le y \le 3$

(c) $-2 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le 2$

(d) $-2 \le x \le 2, \quad -1 \le y \le 1$

intervallumon.

Számítógépes vizsgálatok

Felületek kirajzoltatása

A 89–94. feladatokhoz használjunk számítógépes grafikai programot. Grafikonja alapján azonosítsuk a másodrendű felület típusát.

89. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1 - \frac{z^2}{25}$

90. $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1 - \frac{y^2}{16}$

91. $5x^2 = z^2 - 3y^2$

92. $\frac{y^2}{16} = 1 - \frac{x^2}{9} + z$

93. $\frac{x^2}{9} - 1 = \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{2}$

94. $y - \sqrt{4 - z^2} = 0$

12. fejezet Áttekintő kérdések

1. Irányított szakaszok mely esetben reprezentálják ugyanazt a síkbeli vektort?

2. Hogyan adjuk össze és vonjuk ki a vektorokat geometriai és algebrai módszerrel?

3. Hogyan határozzuk meg egy vektor irányát és abszolút értékét?

4. Hogyan viszonyul egymáshoz a vektor és pozitív skalárszorosa? Mi van akkor, ha a skalár nulla? És ha negatív?

5. Definiáljuk két vektor skalárszorzatát! Milyen algebrai tulajdonságai vannak a skalárszorzatnak? Adjunk példákat! Két vektor skalárszorzata mikor nulla?

6. Mi a skalárszorzat geometriai interpretációja? Mondjunk példát!

7. Mit értünk az **u** vektor **v** vektorra való merőleges vetítésén? Hogyan írhatjuk fel **u**-t **v**-vel párhuzamos és **v**-re merőleges vektorok összegeként?

8. Definiáljuk két vektor vektoriális (kereszt-) szorzatát! Milyen algebrai tulajdonságai vannak a vektoriális szorzatnak? Adjunk példákat! Két vektor vektoriális szorzata mikor nulla?

9. Milyen geometria vagy fizikai interpretációt adhatunk a vektoriális szorzatnak? Adjunk példákat!

10. Mit értünk a vektoriális szorzat kiszámítására alkalmas determináns-alakon a Descartes-féle $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$-koordináta-rendszerben? Alkalmazzuk a determináns-alakot egy konkrét példára!

11. Hogyan írhatjuk fel az egyenes, egyenes szakaszok, síkok egyenletét a térben? Egy térbeli egyenest megadhatunk-e egyetlen egyenlet segítségével? Egy síkot?

12. Hogyan számítjuk ki a térben egy pont és egy egyenes távolságát? Pont és sík távolságát? Soroljunk fel példákat!

13. Mi a vegyesszorzat? Mi a jelentősége? Hogyan számítjuk ki? Mutassunk rá egy példát!

14. Hogyan adunk meg a térben egy gömböt? Mutassunk egy példát!

15. Hogyan számítjuk ki két térbeli egyenes metszéspontját? Egy egyenesét és egy síkét? Két sík metszésvonalát? Mutassunk konkrét példát!

16. Mi a henger? Írjunk fel Descartes-koordinátában néhány hengert definiáló egyenletet!

17. Mi a másodrendű felület? Mondjuk példát különféle ellipszoidokra, paraboloidokra, kúpokra és hiperboloidokra (egyenlet és rajz).

12. fejezet Gyakorló feladatok

Vektorszámítás két dimenzióban

Az 1–4. gyakorlatokban legyen $\mathbf{u} = \langle -3, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -5\rangle$. Írjuk fel (a) komponens-alakban a megadott vektorokat és (b) számítsuk ki abszolút értéküket!

1. $3\mathbf{u} - 4\mathbf{v}$ **2.** $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

3. $-2\mathbf{u}$ **4.** $5\mathbf{v}$

Az 5–8. gyakorlatokban írjuk fel komponensalakban a megadott vektorokat!

5. A $\langle 0, 1\rangle$ vektorból az origó körüli $2\pi/3$ szögű elforgatással előálló vektor.

6. Az az egységvektor, amely az x-tengely pozitív felével $\pi/6$ szöget zár be.

7. 2 egységnyi hosszú, $4\mathbf{i} - \mathbf{j}$ irányú vektor.

8. 5 egység hosszú olyan vektor, amelynek iránya ellentétes a $(3/5)\mathbf{i} + (4/5)\mathbf{j}$ vektoréval.

A 9–12. gyakorlatokban megadott vektorokat fejezzük ki abszolút értékükkel és irányukkal.

9. $\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$ **10.** $-\mathbf{i} - \mathbf{j}$

11. A $\mathbf{v} = (-2\sin t)\mathbf{i} + (2\cos t)\mathbf{j}$ sebességvektor a $t = \pi/2$ időpontban.

12. A $\mathbf{v} = (e^t \cos t - e^t \sin t)\mathbf{i} + (e^t \sin t + e^t \cos t)\mathbf{j}$ sebességvektor a $t = \ln 2$ időpontban.

Vektorszámítás három dimenzióban

A 13. és 14. gyakorlatban megadott vektorokat fejezzük ki abszolút értékükkel és irányukkal.

13. $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ **14.** $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

15. Adjuk meg a 2 egység hosszú, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ irányú vektort!

16. Adjuk meg az 5 egység hosszú vektort, amelynek iránya ellentétes a $\mathbf{v} = (3/5)\mathbf{i} + (4/5)\mathbf{k}$ vektoréval.

A 17. és 18. gyakorlatban megadott vektorokra írjuk fel a $|\mathbf{v}|$-t, $|\mathbf{u}|$-t, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$-t, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$-t, $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$-t, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$-t, $|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|$-t valamint $\mathbf{u}$ projekcióját $\mathbf{v}$-re.

17. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

18. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - \mathbf{k}$

A 19. és 20. gyakorlatban írjuk fel $\mathbf{u}$-t $\mathbf{v}$-vel párhuzamos és $\mathbf{v}$-re merőleges vektorok összegeként!

19. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

20. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

A 21. és 22. gyakorlatban először vegyük fel a koordinátatengelyeket, majd ábrázoljuk origó kezdőpontú vektorokként $\mathbf{u}$-t, $\mathbf{v}$-t és $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$-t!

21. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ **22.** $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

23. Írjuk fel $|\mathbf{v} - 2\mathbf{w}|$-t, ha $|\mathbf{v}| = 2$, $|\mathbf{w}| = 3$, az általuk közbezárt szög pedig $\pi/3$.

24. Az a milyen értékére vagy értékeire párhuzamos az $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ és a $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + a\mathbf{k}$ vektor?

A 25. és 26. gyakorlatban számítsuk ki (a) az $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét; (b) az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát!

25. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

26. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

Egyenesek, síkok, távolságok

27. Legyen $\mathbf{n}$ valamely sík normálisa, $\mathbf{v}$ pedig párhuzamos ezzel a síkkal. Hogyan állíthatunk elő egy olyan vektort, amely merőleges $\mathbf{v}$-re és párhuzamos a síkkal?

28. Adjunk meg egy olyan vektort a síkon, amely párhuzamos az $ax + by = c$ egyenessel.

A 29. és 30. gyakorlatban számítsuk ki pont és egyenes távolságát!

29. $(2,2,0)$; $x = -t$, $y = t$, $z = -1 + t$

30. $(0,4,1)$; $x = 2 + t$, $y = 2 + t$, $z = t$

31. Paraméterezzük a $P(1,2,3)$ ponton átmenő, a $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$ vektorral párhuzamos egyenest!

32. Paraméterezzük a $P(1,2,0)$ és $Q(1,3,-1)$ pontokat összekötő egyenes szakaszt!

A 33. és 34. gyakorlatban számítsuk ki pont és sík távolságát!

33. $(6,0,-6)$, $x - y = 4$

34. $(3,0,10)$, $2x + 3y + z = 2$

35. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $(3,-2,1)$ ponton és merőleges a $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektorra!

36. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $(-1,6,0)$ ponton és merőleges az $x = -1 + t$, $y = 6 - 2t$, $z = 3t$ egyenesre!

A 37. és 38. gyakorlatban írjuk fel a P, Q, R pontokra illeszkedő sík egyenletét!

37. $P(1,-1,2)$, $Q(2,1,3)$, $R(-1,2,-1)$

38. $P(1,0,0)$, $Q(0,1,0)$, $R(0,0,1)$

39. Határozzuk meg az $x = 1 + 2t$, $y = -1 - t$, $z = 3t$ egyenes koordinátasíkokkal alkotott metszéspontjait!

40. Határozzuk meg az origón átmenő, $2x - y - z = 4$ síkra merőleges egyenesnek a $3x - 5y + 2z = 6$ síkkal alkotott döféspontját!

41. Mekkora szöget zár be egymással az $x = 7$ és az $x + y + \sqrt{2}z = -3$ sík?

42. Mekkora szöget zár be egymással az $x + y = 1$ és az $y + z = 1$ sík?

43. Írjuk fel az $x + 2y + z = 1$ és $x - y + 2z = -8$ síkok metszésvonalának paraméteres egyenletrendszerét!

44. Mutassuk meg, hogy az

$$x + 2y - 2z = 5 \quad \text{és} \quad 5x - 2y - z = 0$$

síkok metszésvonala párhuzamos az

$$x = -3 + 2t, \quad y = 3t, \quad z = 1 + 4t$$

egyenessel!

45. A $3x+6z=1$ és a $2x+2y-z=3$ síkok egy egyenesben metszik egymást.

(a) Mutassuk meg, hogy a síkok ortogonálisak!

(b) Írjuk fel a metszésvonal egyenletrendszerét!

46. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az $(1,2,3)$ ponton és párhuzamos az $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ és $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ vektorokkal!

47. Hogyan viszonyul egymáshoz a $\mathbf{v}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+\mathbf{k}$ vektor és a $2x+y=5$ sík? Indokoljuk is meg a választ!

48. Az $\mathbf{n}\cdot\vec{P_0P}=0$ egyenlet a P_0 ponton átmenő, $\mathbf{n}$ normálvektorú síkot reprezentálja. Milyen halmazt reprezentálhat a $\mathbf{n}\cdot\vec{P_0P}>0$ egyenlőtlenség?

49. Számítsuk ki a $P(1,4,0)$ pont, valamint az $A(0,0,0)$, $B(2,0,-1)$, $C(2,-1,0)$ pontokra illeszkedő sík távolságát!

50. Számítsuk ki a $(2,2,3)$ pont és a $2x+3y+5z=0$ sík távolságát!

51. Adjunk meg a $2x-y-z=4$ síkkal párhuzamos, az $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ vektorral ortogonális vektort!

52. Keressünk olyan egységvektort, amely a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ vektorok által meghatározott síkban fekszik, és merőleges az $\mathbf{A}$ vektorra, ha $\mathbf{A}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{B}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ és $\mathbf{C}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$.

53. Adjunk meg olyan 2 egység hosszúságú vektort, amely párhuzamos az $x+2y+z-1=0$ és $x-y+2z+7=0$ síkok metszésvonalával!

54. Határozzuk meg az origón átmenő, a $2x-y-z=4$ síkra merőleges egyenesnek és a $3x-5y+2z=6$ síknak a metszéspontját!

55. Mely pontban metszi a $P(3,2,1)$ ponton átmenő, a $2x-y+$ $+2z=-2$ síkra merőleges egyenes ezt a síkot?

56. Mekkora szöget zár be az x-tengely pozitív felével a $2x+$ $+y-z=0$ és $x+y+2z=0$ síkok metszésvonala?

57. Az

$$L: \quad x=3+2t, \quad y=2t, \quad z=t$$

egyenes a P pontban metszi az $x+3y-z=-4$ síkot. Számítsuk ki P koordinátáit és adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely rajta van a síkon, merőleges L-re és átmegy P-n.

58. Mutassuk meg, hogy az

$$x-2y+z+3+k(2x-y-z+1)=0$$

sík k tetszőleges értéke mellett tartalmazza az

$$x-2y+z+3=0 \quad \text{és} \quad 2x-y-z+1=0$$

síkok metszésvonalát!

59. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $A(-2,0,-3)$ és $B(1,-2,1)$ pontra, és párhuzamos a $C(-2,-13/5,26/5)$ és $D(16/5,-13/5,0)$ pontokon átmenő egyenessel!

60. Van-e valamilyen kapcsolat az $x=1+2t$, $y=-2+3t$, $z=-5t$ egyenes és a $-4x-6y+10z=9$ sík között? Válaszunkat indokoljuk!

61. Az alábbi egyenletek közül melyik adja meg azt a síkot, amely illeszkedik a $P(1,1,-1)$, $Q(3,0,2)$ és $R(-2,1,0)$ pontokra?

(a) $(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+3\mathbf{k})\cdot((x+2)\mathbf{i}+(y-1)\mathbf{j}+z\mathbf{k})=0$

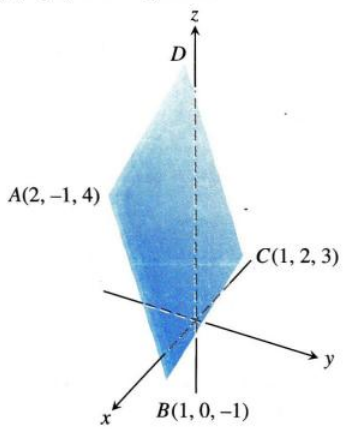
(b) $x=3-t$, $y=-11t$, $z=2-3t$

(c) $(x+2)+11(y-1)=3z$

(d) $(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+3\mathbf{k})\times((x+2)\mathbf{i}+(y-1)\mathbf{j}+z\mathbf{k})=0$

(e) $(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k})\times(-3\mathbf{i}+\mathbf{k})\cdot((x+2)\mathbf{i}+(y-1)\mathbf{j}+z\mathbf{k})=0$

62. Az ábrán látható paralelogramma csúcsai: $A(2,-1,4)$, $B(1,0,-1)$, $C(1,2,3)$ és D. Írjuk fel



(a) D koordinátáit,

(b) a B csúcsnál lévő szög koszinuszát,

(c) a $\vec{BA}$ vektor projekcióját $\vec{BC}$-re,

(d) a paralelogramma területét,

(e) a paralelogramma síkjának egyenletét,

(f) a paralelogramma koordinátasíkokra vetett vetületeinek a területét!

63. Egyenesek távolsága: Számítsuk ki az $A(1,0,-1)$ és $B(-1,1,0)$ pontokat összekötő L_1 egyenes, valamint a $C(3,1,-1)$ és $D(4,5,-2)$ pontokat összekötő L_2 egyenes távolságát! A két egyenes távolsága az őket összekötő, mindkettőjükre merőleges egyenes szakasznak a hossza. Először keressünk egy olyan $\mathbf{n}$ vektort, amely mindkét egyenesre merőleges, azután vetítsük $\vec{AC}$-t a $\mathbf{n}$ vektorra.

64. (*A 63. gyakorlat folytatása*) Számítsuk ki az $A(4,0,2)$ és $B(2,4,1)$ pontokat összekötő egyenes, valamint a $C(1,3,2)$ és $D(2,2,4)$ pontokat összekötő egyenes távolságát!

Másodrendű felületek

Határozzuk meg a következő felületek típusát és vázoljuk fel azokat!

65. $x^2+y^2+z^2=4$

66. $x^2+(y-1)^2+z^2=1$

67. $4x^2+4y^2+z^2=4$

68. $36x^2+9y^2+4z^2=36$

69. $z=-(x^2+y^2)$

70. $y=-(x^2+z^2)$

71. $x^2+y^2=z^2$

72. $x^2+z^2=y^2$

73. $x^2+y^2-z^2=4$

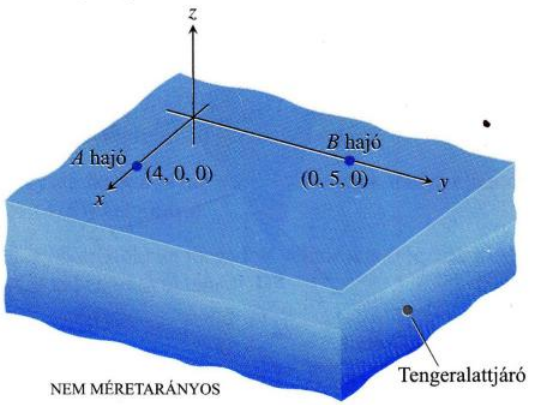
74. $4y^2+z^2-4x^2=4$

75. $y^2-x^2-z^2=1$

76. $z^2-x^2-y^2=1$

12. fejezet Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. Tengeralattjáró vadászat: A tenger felszínén haladó két hajó egy légicsapás előkészítéseként közösen megpróbálja megállapítani egy tengeralattjáró haladási irányát és sebességét. Mint az ábrán látható, az A hajó a $(4,0,0)$ koordinátájú pontban van, míg a B hajó a $(0,5,0)$ pontban. A koordináták km-ben értendők. Az A hajó a $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-(1/3)\mathbf{k}$, a B hajó a $18\mathbf{i}-6\mathbf{j}-\mathbf{k}$ irányban érzékeli a tengeralattjárót. Négy perc elteltével a tengeralattjáró a $(2,-1,-1/3)$ pontban van. A légierő 20 perc alatt képes a helyszínre érni. Feltételezve, hogy a tengeralattjáró egyenes vonalban, egyenletesen halad, milyen koordinátájú pontra kérjék a hajókról a légicsapást?

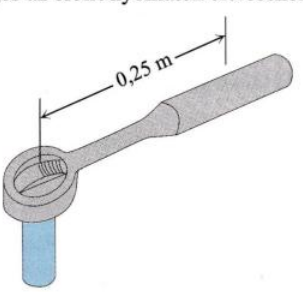


2. Helikoptermentés: Két helikopter, H_1 és H_2 kötelékben repül. A $t=0$ időpontban szétválnak és különböző irányban, de egyenes vonalban haladnak tovább:

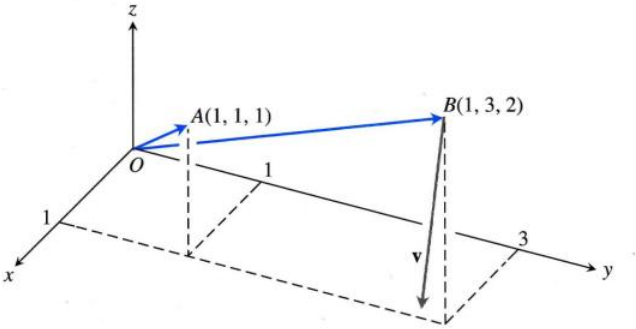
$$H_1: \quad x=6+40t, \quad y=3+10t, \quad z=-3+2t$$
$$H_2: \quad x=6+110t, \quad y=3+4t, \quad z=-3+t.$$

Az időt órában mérjük, a koordinátákat kilométerben. Műszaki hiba miatt a H_2 helikopter a $(446,13,1)$ pontban megszakítja repülését, majd elhanyagolható idő elteltével végleg le is száll a $(446,13,0)$ pontban. Két óra múlva értesül erről H_1 és elindul H_2 felé 150 km/h sebességgel. Mennyi idő alatt éri el H_2 leszállási helyét?

3. Nyomaték: A Toro fűnyírógép kézikönyve azt írja elő, hogy a gyertyát 20,4 Nm nyomatékkal kell meghúzni. Ha a gyertyakulcsra a gyertyától 25 cm távolságban fejtjük ki az erőt, mekkora erő szükséges az előírt nyomaték eléréséhez?



4. Forgó test: Az origón és az $A(1,1,1)$ ponton átfektetett egyenes a forgástengelye annak a testnek, amely 3/2 radián/s állandó szögsebességgel forog e körül a tengely körül. A forgás az óramutató járásával azonos irányú, ha az origóból nézünk az A pont irányába. Határozzuk meg a test $B(1,3,2)$ pontjának $\mathbf{v}$ sebességét!



5. Determinánsok és síkok:

(a) Mutassuk meg, hogy

$$\begin{vmatrix} x_1-x & y_1-y & z_1-z \\ x_2-x & y_2-y & z_1-z \\ x_2-x & y_3-y & z_3-z \end{vmatrix} = 0$$

a nem kollineáris $P(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$ pontokra illeszkedő sík egyenlete!

(b) Milyen térbeli halmazt ír le az

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet?

6. Determinánsok és egyenesek: Mutassuk meg, hogy az

$$x=a_1s+b_1,\ y=a_2s+b_2,\ z=a_3s+b_3,\ -\infty<s<\infty$$

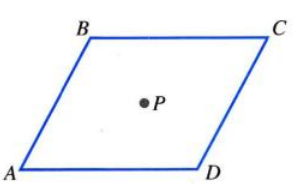
és

$$x=c_1t+d_1,\ y=c_2t+d_2,\ z=c_3t+d_3,\ -\infty<t<\infty$$

egyenesek akkor és csak akkor metszők vagy párhuzamosak, ha

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1-d_1 \\ a_2 & c_2 & b_2-d_2 \\ a_3 & c_3 & b_3-d_3 \end{vmatrix} = 0$$

7. Paralelogramma: A mellékelt ábrán az $ABCD$ paralelogramma és a paralelogramma BD átlójának P felezőpontja látható.

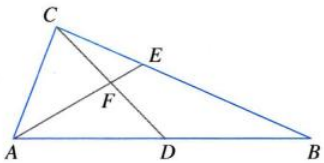


(a) Fejezzük ki $\vec{BD}$-t $\vec{AB}$ és $\vec{AD}$ segítségével!

(b) Fejezzük ki $\vec{AP}$-t $\vec{AB}$ és $\vec{AD}$ segítségével!

(c) Bizonyítsuk be, hogy P az AC átlónak is felezőpontja!

8. A mellékelt ábrán D az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja, E pedig CB harmadolópontja. Vektorok alkalmazásával bizonyítsuk be, hogy F a CD szakasz felezőpontja!



9. Vektorok alkalmazásával bizonyítsuk be, hogy a $P_1(x_1,y_1)$ pont távolsága az $ax+by=c$ egyenestől:

$$d=\frac{|ax_1+by_1-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

10. **(a)** Vektorok alkalmazásával bizonyítsuk be, hogy a $P_1(x_1,y_1,z_1)$ pont távolsága az $Ax+By+Cz=D$ síktól:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

(b) Írjuk fel annak a gömbnek az egyenletét, amelynek érintősíkjai az $x+y+z=3$ és $x+y+z=9$ síkok, amennyiben a $2x-y=0$ és $3x-z=0$ síkok átmennek a gömb középpontján.

11. **(a)** Mutassuk meg, hogy a párhuzamos $Ax+By+Cz=D_1$ és $Ax+By+Cz=D_2$ síkok távolsága:

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{|A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}|}.$$

(b) Határozzuk meg a $2x+3y-z=6$ és $2x+3y-z=12$ síkok távolságát!

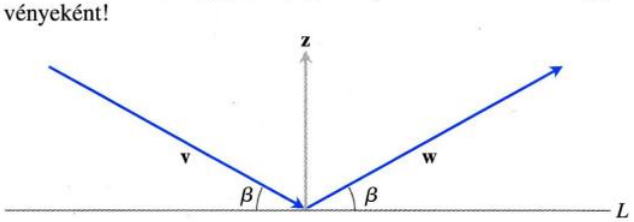
(c) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely párhuzamos a $2x-y+2z=-4$ síkkal és a $P(3,2,1)$ pont a két síktól azonos távolságra van.

(d) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely párhuzamos az $x-2y+z=3$ síkkal, és tőle 5 egység távolságra van.

12. Bizonyítsuk be, hogy az A,B,C,D pontok akkor és csak akkor vannak egy síkban, ha $\vec{AD}\cdot(\vec{AB}\times\vec{BC})=0$.

13. Vektor vetítése síkra: Legyen P egy sík a térben, $\mathbf{v}$ pedig egy vektor. A $\text{proj}_P\mathbf{v}$ vektort, azaz $\mathbf{v}$-nek P-re vetett vetületét, a következőképpen szemléltethetjük. Tegyük fel, hogy a Nap merőlegesen süt a síkra. Akkor $\text{proj}_P\mathbf{v}$ a $\mathbf{v}$ „árnyéka" P-n. Számítsuk ki $\text{proj}_P\mathbf{v}$-t, ha a sík $x+2y+6z=6$ és $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$!

14. A mellékelt ábra a nemnulla $\mathbf{v},\mathbf{w}$ és $\mathbf{z}$ vektorokat mutatja, ahol $\mathbf{z}$ ortogonális az L egyenesre és $\mathbf{v}$ is, $\mathbf{w}$ is β szöget zár be L-lel. Tegyük fel, hogy $|\mathbf{v}|=|\mathbf{w}|$, és fejezzük ki $\mathbf{w}$-t $\mathbf{v}$ és $\mathbf{z}$ függvényeként!



15. Kétszeres vektorszorzat: $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ általában nem egyenlő $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$-vel, pedig kifejtésük hasonló:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u},$$
$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}.$$

Ellenőrizzük a fenti képletek helyességét az alábbi konkrét vektorokkal:

	$\mathbf{u}$	$\mathbf{v}$	$\mathbf{w}$
(a)	$2\mathbf{i}$	$2\mathbf{j}$	$2\mathbf{k}$
(b)	$\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$	$2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$	$-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$
(c)	$2\mathbf{i}+\mathbf{j}$	$2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$	$2\mathbf{i}+2\mathbf{k}$
(d)	$\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$	$-\mathbf{i}-\mathbf{k}$	$2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

16. Skalárszorzat és vektorszorzat: Mutassuk meg, hogy bármely $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ és $\mathbf{r}$ vektorokra

(a) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})+\mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u})+\mathbf{w}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{0}$

(b) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{i})\mathbf{i}+(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{j})\mathbf{j}+(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{k})\mathbf{k}$

(c) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{r})=\begin{vmatrix}\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{r} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}\end{vmatrix}$.

17. Skalárszorzat és vektorszorzat: Igaz vagy hamis a következő összefüggés?

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}))\cdot\mathbf{w}=-|\mathbf{u}|^2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}$$

18. Két alkalmasan megválasztott vektor vektoriális szorzatából vezessük le a

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

trigonometrikus azonosságot!

19. Bizonyítsuk be vektorok segítségével, hogy tetszőleges a,b,c valós számokra teljesül az

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$$

egyenlőtlenség! (*Útmutató:* Legyen $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ és $\mathbf{v}=c\mathbf{i}+d\mathbf{j}$.)

20. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok nem párhuzamosak és $\mathbf{u}=\mathbf{w}+\mathbf{r}$, ahol $\mathbf{w}$ a $\mathbf{v}$-vel párhuzamos, $\mathbf{r}$ a $\mathbf{v}$-vel ortogonális vektor. Fejezzük ki a $\mathbf{w}$-t és a $\mathbf{r}$-et $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ segítségével!

21. Mutassuk meg, hogy tetszőlegesen választott $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorokra $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|\leq|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|$.

22. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{w}=|\mathbf{v}|\mathbf{u}+|\mathbf{u}|\mathbf{v}$ felezi az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ által bezárt szöget!

23. Mutassuk meg, hogy $|\mathbf{v}|\mathbf{u}+|\mathbf{u}|\mathbf{v}$ és $|\mathbf{v}|\mathbf{u}-|\mathbf{u}|\mathbf{v}$ ortogonális vektorok!

24. A skalárszorzat pozitív definit: Mutassuk meg, hogy a vektorok skaláris szorzása *pozitív definit*, azaz tetszőleges $\mathbf{u}$ vektorra $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\geq 0$, valamint $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0$ akkor és csak akkor igaz, ha $\mathbf{u}=\mathbf{0}$.

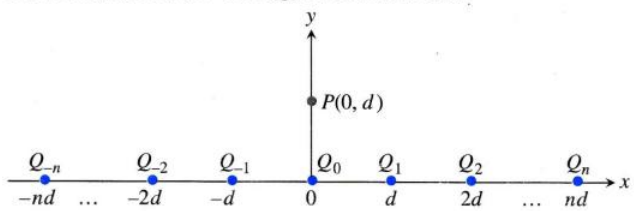
25. Tömegpontok és gravitáció: A fizikában a gravitációs törvény azt mondja ki, hogy ha P és Q két tömegpont, amelyek tömege m, illetve M, akkor P az

$$\mathbf{F}=\frac{GMm\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

erővel vonzza Q-t, ahol $\mathbf{r}$ a P-ből a Q-ba mutató vektor, G pedig az egyetemes gravitációs állandó. Sőt, ha $Q_1,\ldots,Q_k$ $m_1,\ldots,m_k$ tömeggel rendelkező tömegpontok, akkor P a Q_i pontokra összesen

$$\mathbf{F}=\sum_{i=1}^{k}\frac{GMm_i}{|\mathbf{r}_i|^3}\mathbf{r}_i$$

erővel hat, ahol $\mathbf{r}_i$ a P-ből a Q_i-ba mutató vektor.



(a) Legyen az M tömegű P tömegpont a koordinátasík $(0,d)$, $d>0$ pontjában. $i=-n,-n+1,\ldots,-1,-,1,\ldots,n$-re helyezzük az m_i tömegű Q_i tömegpontokat az $(id,0)$ koordinátájú pontokba. Összesen mekkora erővel hatnak a Q_i tömegpontok P-re?

(b) Véges-e a P-re ható erő nagysága, ha $n\to\infty$? Miért vagy miért nem?

26. Relativisztikus összeg: Einstein speciális relativitáselmélete durván azt mondja ki, hogy valamely vonatkoztatási rendszerhez (koordináta-rendszerhez) képest egyetlen anyagi objektumnak sem lehet a c fénysebességnél nagyobb sebessége. Így ha $\vec{x}$ és $\vec{y}$ két sebesség és $|\vec{x}|<c$, illetve $|\vec{y}|<c$, akkor $\vec{x}$ és $\vec{y}$ $\vec{x}\oplus\vec{y}$ relativisztikus összegének nagysága kisebb c-nél. Einstein speciális relativitáselmélete szerint

$$\vec{x}\oplus\vec{y}=\frac{\vec{x}\oplus\vec{y}}{1+\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{c^2}}+\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\gamma_x}{\gamma_x+1}\cdot\frac{\vec{x}\times(\vec{x}\times\vec{y})}{1+\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{c^2}},$$

ahol

$$\gamma_x=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{x}\cdot\vec{x}}{c^2}}}.$$

Be lehet látni, hogy ha $|\vec{x}|<c$ és $|\vec{y}|<c$, akkor $\vec{x}\oplus\vec{y}<c$. Ebben a feladatban két speciális esettel foglalkozunk.

(a) Mutassuk meg, hogy ha $\vec{x}$ és $\vec{y}$ ortogonálisak, $|\vec{x}|<c$, $|\vec{y}|<c$, akkor $\vec{x}\oplus\vec{y}<c$.

(b) Mutassuk meg, hogy ha $\vec{x}$ és $\vec{y}$ párhuzamosak, $|\vec{x}|<c$, $|\vec{y}|<c$, akkor $\vec{x}\oplus\vec{y}<c$.

(c) Számítsuk ki $\lim_{x\to\infty}\vec{x}\oplus\vec{y}$ értékét!

13. fejezet

Vektor értékű függvények, mozgás a térben

ÁTTEKINTÉS: Egy térben mozgó pontszerű test koordinátáit az idő függvényében leíró $x = f(t)$, $y = g(t)$ és $z = h(t)$ egyenletek a test által leírt görbe paraméteres előállítását adják. Vektoros jelöléssel ezt a három egyenletet $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ alakban, egyben is felírhatjuk. Ha a test az xy-síkban mozog, akkor a z koordinátája minden pillanatban nulla, azaz a $h(t)$ függvény azonosan 0 lesz.

A fejezetben matematikai eszközökkel fogjuk tanulmányozni a térben mozgó testek pályáját, sebességét és gyorsulását. Ahogy haladunk, megnézzük, hogy az eredményeink hogyan használhatóak lövedékek, bolygók, műholdak mozgásának a vizsgálatára. Végül a vektorkalkulus eszközeivel levezetjük a bolygómozgást leíró Kepler-törvényeket Newton gravitációs és mozgástörvényéből.

13.1. Vektorfüggvények

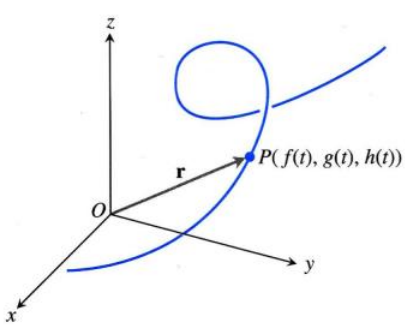
Egy I időszakasz alatt a térben mozgó részecske koordinátáit az I intervallumon definiált függvényekként képzelhetjük el:

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t), \qquad t \in I. \tag{13.1}$$

Az $(x,y,z) = (f(t),g(t),h(t))$, $t \in I$ pontok által alkotott **görbét** nevezzük a részecske **pályájának**. A (13.1) egyenletek az I intervallumon **paraméterezik** a görbét. Egy görbét megadhatunk vektoros formában is. Az origóból a $P = P(f(t),g(t),h(t))$ pontba mutató

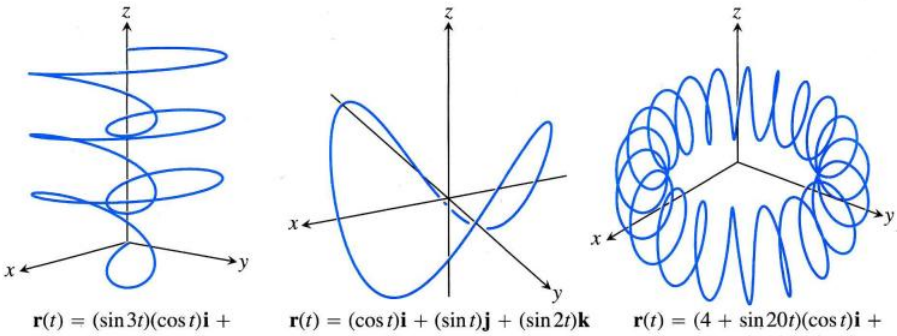
$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \tag{13.2}$$

vektor a részecske **helyvektora** a t időpillanatban (13.1. ábra). Az f, g és h függvények a helyvektor **komponensei**, vagy másszóval **koordinátafüggvényei**. A $t \in I$ időintervallumon az $\mathbf{r}(t)$ által befutott görbe a részecske **pályája**. A 13.2. ábrán három, számítógép segítségével ábrázolt térgörbét láthatunk. Egy térgörbének a (13.1), vagy (13.2) alakú leírását a térgörbe **paraméterezésének** nevezzük. Kézzel igen nehéz lenne ezeket a görbéket lerajzolni.



13.1. ÁBRA: A térben mozgó részecske $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ helyvektora az idő függvénye.

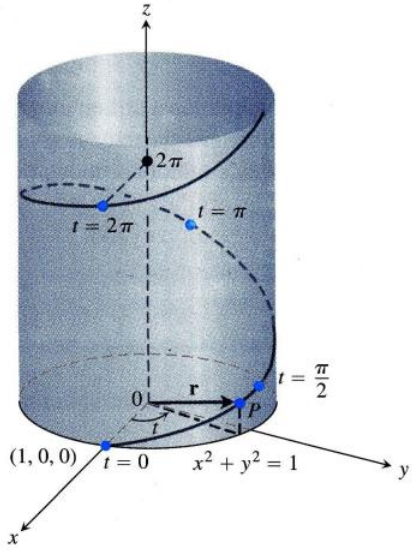
A (13.2) egyenlettel $\mathbf{r}$-t az I intervallumon értelmezett, t változójú vektor értékű függvényként definiáltuk. Általánosabban **vektor értékű függvénynek**, vagy röviden **vektorfüggvénynek** nevezünk egy D halmazon értelmezett olyan függvényt, amely D minden egyes eleméhez a tér egy vektorát rendeli. Most a D értelmezési tartomány a valós számegyenes egy intervalluma, így a vektorfüggvény értékei, a koordinátafüggvényekre tett néhány feltétel mellett, a térben elhelyezkedő görbét adnak meg. Később, a 16. fejezetben olyan vektorfüggvényekkel is foglalkozunk, amelyek értelmezési tartománya síktartomány. Az



13.2. ÁBRA: Az $\mathbf{r}(t)$ helyvektorok által definiált görbék számítógéppel ábrázolva.

ilyen vektorfüggvény, ugyancsak a koordinátafüggvényekre tett néhány feltétel mellett, egy térbeli felületet reprezentál. A sík vagy tér egy tartományán értelmezett vektorfüggvényt „vektormezőként" is értelmezhetünk. A vektormezőket felhasználhatjuk áramló folyadékok, a gravitációs erőtér vagy elektromágneses jelenségek vizsgálatához. Ezekre szintén a 16. fejezetben kerül sor.

A valós szám értékű függvényeket, hogy megkülönböztessük a vektor értékű függvényektől, **skalárfüggvényeknek** nevezzük. Például $\mathbf{r}$ komponensei a t változó skalárfüggvényei. Amikor egy vektor értékű függvényt a komponensei megadásával definiálunk, akkor az értelmezési tartománya a komponensek értelmezési tartományainak a közös része, vagy annak egy leszűkítése. Ebben a fejezetben kizárólag olyan vektorfüggvényekkel foglalkozunk, amelyeknek értelmezési tartománya intervallum, így ebben a fejezetben a vektorfüggvény szó mindig ilyen függvényt jelent.



13.3. ÁBRA: Az 1. példában szereplő $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ spirál felső része.

1. PÉLDA: **Spirál ábrázolása**

Ábrázoljuk az

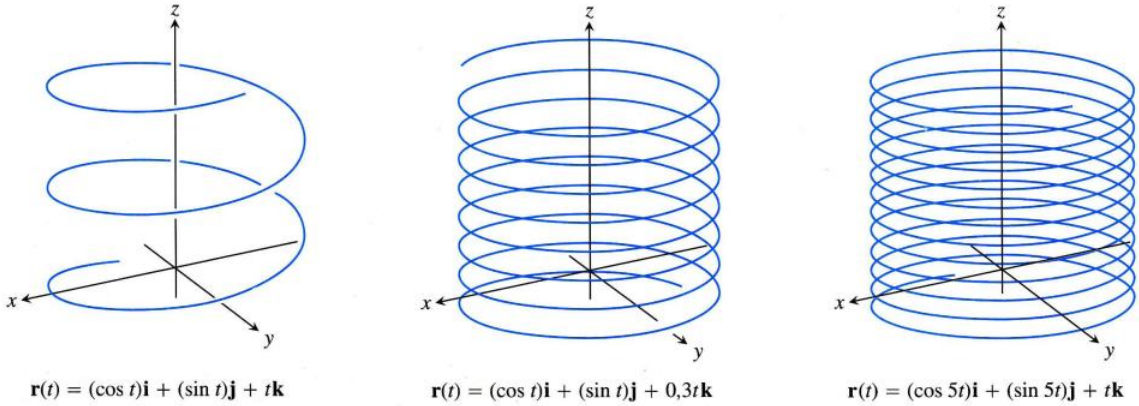
$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

függvényt!

Megoldás: Az

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

képlettel definiált vektorfüggvény t minden valós értékére értelmezve van. Az $\mathbf{r}$ által befutott görbe egy spirál, amely az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő henger palástján fut. (Lásd a 13.3. ábrát.) Azt, hogy a görbe tényleg a henger palástjára illeszkedik, onnan láthatjuk, hogy az $\mathbf{r}$ függvény $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ komponense, amelyek a



13.4. ÁBRA: Számítógéppel ábrázolt spirálok.

görbe x és y koordinátáját alkotják, kielégítik a henger egyenletét:

$$x^2+y^2=(\cos t)^2+(\sin t)^2=1.$$

A görbe „emelkedik", ahogy a $\mathbf{k}$ komponens, azaz $z=t$ növekszik. Mialatt t értéke 2π-vel megnő, a görbe egy fordulatot tesz meg a hengerpaláston. Az

$$x=\cos t, \qquad y=\sin t, \qquad z=t$$

egyenletek a $-\infty<t<\infty$ intervallumon vannak értelmezve, és a spirál egy paraméterezését adják. További spirálokat láthatunk a 13.4. ábrán. □

Határérték és folytonosság

Vektorfüggvények határértékét a valós értékű függvények határértékéhez hasonlóan definiáljuk.

DEFINÍCIÓ: Vektorfüggvények határértéke

Legyen $\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}$ egy vektorfüggvény, és $\mathbf{L}$ egy vektor. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{r}$ **határértéke** t_0-ban $\mathbf{L}$, azaz

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{r}(t)=\mathbf{L},$$

ha minden $\varepsilon>0$-hoz létezik $\delta>0$, amelyre minden t esetén

$$0<|t-t_0|<\delta \qquad \Rightarrow \qquad |\mathbf{r}(t)-\mathbf{L}|<\varepsilon.$$

Ha $\mathbf{L}=L_1\mathbf{i}+L_2\mathbf{j}+L_3\mathbf{k}$, akkor $\lim_{t\to t_0}\mathbf{r}(t)=\mathbf{L}$ pontosan akkor teljesül, ha

$$\lim_{t\to t_0}f(t)=L_1, \qquad \lim_{t\to t_0}g(t)=L_2 \qquad \text{és} \qquad \lim_{t\to t_0}h(t)=L_3.$$

Az ebből adódó

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{r}(t)=\left(\lim_{t\to t_0}f(t)\right)\mathbf{i}+\left(\lim_{t\to t_0}g(t)\right)\mathbf{j}+\left(\lim_{t\to t_0}h(t)\right)\mathbf{k} \tag{13.3}$$

egyenlet jól használható vektorfüggvények határértékének meghatározására.

2. PÉLDA: **Vektorfüggvény határértéke**

Ha $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}$, akkor

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\pi/4}\mathbf{r}(t)&=\left(\lim_{t\to\pi/4}\cos t\right)\mathbf{i}+\left(\lim_{t\to\pi/4}\sin t\right)\mathbf{j}+\left(\lim_{t\to\pi/4}t\right)\mathbf{k}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}+\frac{\pi}{4}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

□

Vektorfüggvények folytonosságát a skalárfüggvények folytonosságához hasonlóan definiáljuk.

DEFINÍCIÓ: Folytonosság

Az $\mathbf{r}(t)$ vektorfüggvény **folytonos a** $t=t_0$ **pontban**, ha ott értelmezve van, és $\lim_{t\to t_0}\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t_0)$. A függvény **folytonos**, ha értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

A (13.3) egyenlőségből láthatjuk, hogy $\mathbf{r}(t)$ pontosan akkor folytonos a $t = t_0$ pontban, ha minden komponense folytonos ott. [1]

3. PÉLDA: **Térgörbék folytonossága**

(a) A 13.2. és a 13.4. ábrákban szereplő térgörbék folytonosak, mivel a komponenseik minden $t \in (-\infty, \infty)$ pontban folytonosak.

(b) A

$$\mathbf{g}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + \lfloor t \rfloor \mathbf{k}$$

függvény az egész számokban nem folytonos, ugyanis az egészrészfüggvény ezeken a helyeken szakad. □

Deriváltak és mozgás

Legyen $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ egy térben mozgó részecske helyvektora, és tegyük fel, hogy f, g és h az idő differenciálható függvénye. A t és $t + \Delta t$ időpontok között a részecske helyvektorának a megváltozása

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t).$$

(Lásd a 13.5a ábrát.) Áttérve a helyvektor komponenseire:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{r} &= \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \\ &= \big[f(t + \Delta t)\mathbf{i} + g(t + \Delta t)\mathbf{j} + h(t + \Delta t)\mathbf{k}\big] - \big[f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}\big] \\ &= \big[f(t + \Delta t) - f(t)\big]\mathbf{i} + \big[g(t + \Delta t) - g(t)\big]\mathbf{j} + \big[h(t + \Delta t) - h(t)\big]\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Ahogy Δt nullához tart, három dolog történik egyszerre. Először is, Q a görbe mentén P-hez tart. Másodszor, a görbe PQ húrja a görbe P-beli érintőjének az irányába áll be. Végül pedig a $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ hányados határértéke így alakul (13.5b ábra):

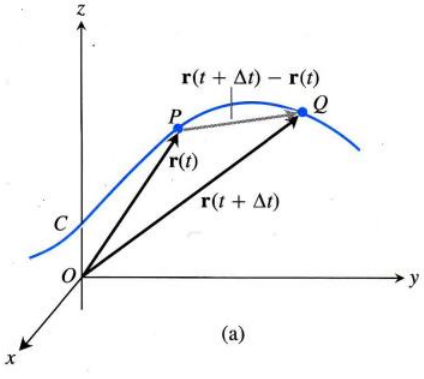
$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} &= \left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}\right]\mathbf{j} + \\ &\quad + \left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}\right]\mathbf{k} = \\ &= \left[\frac{df}{dt}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{dg}{dt}\right]\mathbf{j} + \left[\frac{dh}{dt}\right]\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Ezek alapján a következő definíciót fogalmazhatjuk meg:

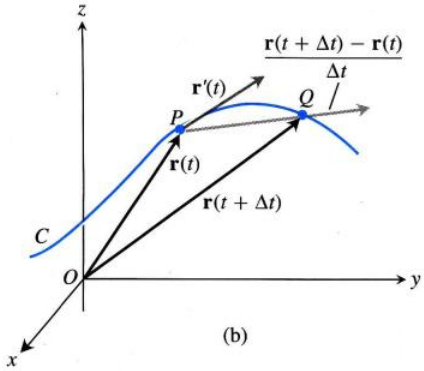
DEFINÍCIÓ: Derivált

Az $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ vektorfüggvény **deriválható (differenciálható)** t**-ben**, ha f, g és h deriválható t-ben. Ekkor a vektorfüggvény deriváltja[2]

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{df}{dt}\mathbf{i} + \frac{dg}{dt}\mathbf{j} + \frac{dh}{dt}\mathbf{k}.$$



(a)

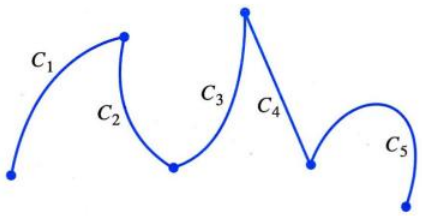


(b)

13.5. ÁBRA: Ahogy $\Delta t \to 0$, a Q pont P-hez közeledik a C görbe mentén. A határértéket véve a $\overrightarrow{PQ}/\Delta t$ vektor a görbe $\mathbf{r}'(t)$ érintővektorába megy át.

[1] Ebben a fejezetben a térgörbék vektorfüggvények grafikonjai. Különböző vektorfüggvényeknek lehet megegyező grafikonja. Ha egy vektorfüggvény komponensei nagyon szakadásos skalárfüggvények, akkor lehetséges, hogy a grafikonja nem is tekinthető térgörbének. Mivel egy térgörbének végtelen sok különböző paraméterezése van, és ezek mindegyike egy-egy vektorfüggvény, lehetséges, hogy a görbe egy adott pontjában az egyik paraméterezéssel folytonos vektorfüggvényt kapunk, a másikkal nem. Így lehetséges, hogy egy konkrét vektorfüggvény egy pontban nem folytonos, de a grafikonja mégis folytonos görbe. Ha a vektorfüggvény komponensei folytonosak, és nem mindegyik konstans, akkor a grafikonja folytonos térgörbe.

[2] Ezt a deriváltat az irodalomban, és később ebben a könyvben is többnyire $\dot{\mathbf{r}}(t)$-vel jelöljük.



13.6. ÁBRA: A szakaszonként sima görbe néhány, végpontjaiknál folytonosan összeillesztett sima görbéből áll.

Az $\mathbf{r}$ vektorfüggvény **differenciálható**, ha az értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható. Az $\mathbf{r}$ által meghatározott görbe **sima**, ha $\mathbf{r}'$ folytonos, és sehol sem $\mathbf{0}$. Ez pontosan akkor teljesül, ha f, g és h deriváltjai folytonosak, és ezek a deriváltak semelyik pontban sem nullák egyszerre.

A derivált geometriai jelentését a 13.5. ábráról olvashatjuk le. A P és Q pontokba az $\mathbf{r}(t)$ és $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ helyvektorok mutatnak, így a $\overrightarrow{PQ}$ vektort az $\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)$ állítja elő. Ha $\Delta t > 0$, akkor az $(\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t))/\Delta t$ vektor ennek pozitív konstansszorosa, azaz a $\overrightarrow{PQ}$ vektorral egyirányú. $\Delta t \to 0$ mellett ez a vektor a görbe P pontbeli geometriai érintőegyenesével párhuzamos vektorhoz tart (13.5b ábra). Ha $\mathbf{r}'(t)$ értéke nem $\mathbf{0}$, akkor az $\mathbf{r}'(t)$ vektort a görbe P pontbeli **érintővektorának** nevezzük. Ebben az esetben a görbe $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ pontbeli **érintőegyenese** az az egyenes, amely átmegy az adott ponton, és párhuzamos $\mathbf{r}'(t_0)$-al. Ha a görbe sima, akkor a $d\mathbf{r}/dt \neq \mathbf{0}$ feltétel biztosítja, hogy az érintője folyamatosan forduljon a görbe mentén. Egy sima görbén nem lehetnek hegyes csúcsok, sarkok.[3]

Egy olyan görbét, amelyet véges sok sima görbe folytonos összeillesztésével kapunk, **szakaszonként simának** nevezünk (13.6. ábra).

Nézzünk ismét a 13.5. ábrára. Az ábrán Δt-t pozitívnak vettük, így $\Delta\mathbf{r}$ a mozgás irányába, azaz előre mutat. Ebben az esetben $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ a $\Delta\mathbf{r}$ vektorral egyező irányú, azaz szintén előre mutat. Ha Δt negatív, akkor $\Delta\mathbf{r}$ visszafelé mutat, ellentétesen a mozgás irányával. Ekkor azonban $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ a $\Delta\mathbf{r}$ vektornak negatív skalárszorosa, azaz megint előre mutat. Tehát $\Delta\mathbf{r}$ irányától függetlenül $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ mindig előre mutat, és így $d\mathbf{r}/dt = \lim_{\Delta t\to 0}\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ is, amennyiben $\mathbf{0}$-tól különbözik. Eszerint a $d\mathbf{r}/dt$ derivált úgy viselkedik, ahogy azt elvárnánk a görbén mozgó részecske sebességvektorától. A mozgás irányába mutat, és megadja a hely időben való megváltozását. Ha a görbe sima, akkor a sebesség sohasem nulla. A részecske nem áll meg, nem fordul vissza, és mozgása ugrásszerűen nem módosul.

DEFINÍCIÓ: **Sebességvektor, mozgásirány, sebesség, gyorsulás**

Ha $\mathbf{r}$ egy sima görbén mozgó részecske helyvektora az idő függvényében, akkor

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

a részecske **sebességvektora**, amely a görbe érintővektorával egyező irányú. Tetszőleges t mellett $\mathbf{v}(t)$ iránya a **mozgás iránya**, $\mathbf{v}(t)$ nagysága a részecske **sebessége**. Amennyiben létezik,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

a részecske **gyorsulásvektora**. Összefoglalva:

1. A sebességvektor a helyvektor deriváltja: $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$.
2. A sebesség a sebességvektor nagysága: sebesség $= |\mathbf{v}|$.
3. A gyorsulás a sebességvektor deriváltja: $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$.
4. A $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ egységvektor a mozgás iránya a t időpillanatban.

[3] Ahogy az egyváltozós függvények és grafikonjaik esetében is előfordult, itt is lehetséges, hogy a vektorfüggvény egy adott pontban nem differenciálható, de a grafikonjának, a térgörbének, geometriai értelemben van érintője. Ha a koordinátafüggvények egy t_0 paraméterű pontban differenciálhatók, de a deriváltvektor itt nullvektor, akkor az is lehet, hogy a görbének ebben a pontban van geometriai értelemben vett érintője, de az is lehet, hogy nincs. Mivel az a tény, hogy egy adott pontban egy adott görbének megfelelő vektorfüggvény koordinátafüggvényei differenciálhatók-e, és az, hogy a deriváltvektor nulla-e, függ a választott paraméterezéstől, a görbe, vagyis a grafikon maga sima, ha van sima paraméterezése.

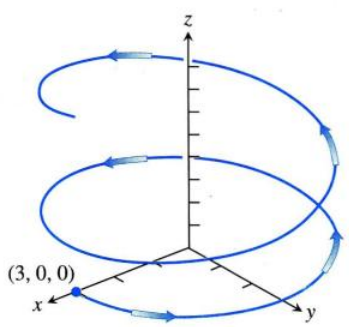
Egy részecske sebességvektorát felírhatjuk a sebesség és a mozgás irányának a szorzataként is:

$$\text{sebességvektor} = |\mathbf{v}|\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) = (\text{sebesség})(\text{mozgásirány}).$$

A 12.5. rész 4. példájában láttuk, hogy a sebességvektor ilyen formában való felírása hasznos, ha például egy egyenes mentén mozgó helikopter pillanatnyi tartózkodási helyét szeretnénk meghatározni. A következő példa egy nem lineáris pályán mozgó testről szól.

4. PÉLDA: **Sárkányrepülő röpte**

Egy sárkányrepülő spirálozva emelkedik a kedvező légáramlatokat kihasználva. A helyvektora $\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$. A repülő pályájának a $0 \le t \le 4\pi$ intervallumra eső részét a 13.7. ábrán ábrázoltuk. A pálya hasonlít egy spirálra, de *nem* spirál, ahogy azt a 13.4. részben látni fogjuk. Határozzuk meg



13.7. ÁBRA: A 4. feladatban szereplő $\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ helyvektorú sárkányrepülő pályája.

(a) a sebesség- és gyorsulásvektort,

(b) a sárkányrepülő sebességét a t időpontban,

(c) azokat a pillanatokat, amelyekben a gyorsulásvektor merőleges a sebességvektorra!

Megoldás:

(a)
$$\mathbf{r} = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(3\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -(3\cos t)\mathbf{i} - (3\sin t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

(b) A sebesség a $\mathbf{v}$ vektor nagysága:

$$\begin{aligned}|\mathbf{v}(t)| &= \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + (2t)^2} \\ &= \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 4t^2} \\ &= \sqrt{9 + 4t^2}.\end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy ahogy az idő telik, a sárkányrepülő egyre gyorsabb lesz.

(c) Két vektor pontosan akkor merőleges, ha skalárszorzatuk nulla. Így olyan t-ket keresünk, amelyekre

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 9\sin t\cos t - 9\cos t\sin t + 4t = 4t = 0.$$

Azt kaptuk, hogy a gyorsulásvektor csak a $t = 0$ időpontban merőleges a sebességvektorra. Mozgó testek gyorsulását részletesebben a 13.5. részben fogjuk tanulmányozni. Ott megnézzük, hogy a gyorsulásvektor vizsgálatával hogyan állapíthatjuk meg, hogy a görbe „forog"-e, illetve azt, hogy a görbe „kifordul"-e egy, a sebességvektort tartalmazó síkból. □

Differenciálási szabályok

Mivel egy vektorfüggvény deriválását komponensenként végezzük, a vektorfüggvényekre vonatkozó differenciálási szabályok hasonlóak lesznek, mint a skalárfüggvények differenciálási szabályai.

Vektoriális szorzat deriválásánál figyeljünk a tényezők sorrendjére! Ha **u** elöl szerepel a deriválandó képletben, az eredmény két tagjában is elöl kell szerepelnie, különben rossz lesz az eredmény előjele.

A vektorfüggvények differenciálási szabályai

Legyen **u** és **v** a t változó deriválható vektorfüggvényei, **C** egy konstans vektor, c egy tetszőleges skalár, f pedig egy deriválható skalárfüggvény.

1. *konstans:* $\dfrac{d}{dt}\mathbf{C} = \mathbf{0}$
2. *skalárszoros:* $\dfrac{d}{dt}\big[c\mathbf{u}(t)\big] = c\mathbf{u}'(t)$
   $\dfrac{d}{dt}\big[f(t)\mathbf{u}(t)\big] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$
3. *összeg:* $\dfrac{d}{dt}\big[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)\big] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$
4. *különbség:* $\dfrac{d}{dt}\big[\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\big] = \mathbf{u}'(t) - \mathbf{v}'(t)$
5. *skalárszorzat:* $\dfrac{d}{dt}\big[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)\big] = \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$
6. *vektoriális szorzat:* $\dfrac{d}{dt}\big[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)\big] = \mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)$
7. *láncszabály:* $\dfrac{d}{dt}\big[\mathbf{u}(f(t))\big] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$

A kétfajta szorzat differenciálási szabályát és a láncszabályt bebizonyítjuk, a többi szabály bizonyítását meghagyjuk feladatnak.

A skalárszorzat deriválási szabályának bizonyítása: Legyen

$$\mathbf{u} = u_1(t)\mathbf{i} + u_2(t)\mathbf{j} + u_3(t)\mathbf{k} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{v} = v_1(t)\mathbf{i} + v_2(t)\mathbf{j} + v_3(t)\mathbf{k}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= \frac{d}{dt}(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)\\ &= \underbrace{u_1'v_1 + u_2'v_2 + u_3'v_3}_{\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}} + \underbrace{u_1v_1' + u_2v_2' + u_3v_3'}_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'}.\end{aligned}$$ □

A vektoriális szorzat deriválási szabályának bizonyítása: A bizonyítás a skalárfüggvények szorzat deriválási szabályának a bizonyításához hasonló. A derivált definíciója szerint

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{u}(t+h)\times\mathbf{v}(t+h) - \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)}{h}.$$

Hogy ebben a törtben felfedezzük **u** és **v** differenciahányadosát, a számlálóból kivonjuk, majd hozzáadjuk a $\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t+h)$ kifejezést. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) =\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{u}(t+h)\times\mathbf{v}(t+h) - \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t+h) + \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t+h) - \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\mathbf{u}(t+h)-\mathbf{u}(t)}{h}\times\mathbf{v}(t+h) + \mathbf{u}(t)\times\frac{\mathbf{v}(t+h)-\mathbf{v}(t)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{u}(t+h)-\mathbf{u}(t)}{h}\times\lim_{h\to 0}\mathbf{v}(t+h) + \lim_{h\to 0}\mathbf{u}(t)\times\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{v}(t+h)-\mathbf{v}(t)}{h}.\end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőség azért áll fenn, mert vektoriális szorzat határértéke egyenlő a határértékek vektoriális szorzatával, amennyiben ez utóbbi létezik (52. feladat). Ahogy h nullához tart, $\mathbf{v}(t+h)$ tart $\mathbf{v}(t)$-hez, hiszen $\mathbf{v}$ differenciálható t-ben, így folytonos is ott (53. feladat). A két tört határértéke a derivált definíciója szerint $d\mathbf{u}/dt$, illetve $d\mathbf{v}/dt$, így

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt}\times\mathbf{v} + \mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \qquad \square$$

Időnként, ha kényelmesebb, a c skalár és a $\mathbf{v}$ vektor szorzatát $\mathbf{v}c$-nek írjuk $c\mathbf{v}$ helyett. Így a láncszabályt felírhatjuk a megszokott módon is:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{ds}\frac{ds}{dt}, \qquad \text{ahol } s = f(t).$$

A láncszabály bizonyítása: Tegyük fel, hogy $\mathbf{u}(s) = a(s)\mathbf{i} + b(s)\mathbf{j} + c(s)\mathbf{k}$ s-nek differenciálható vektorfüggvénye, $s = f(t)$ pedig t differenciálható függvénye. Ekkor a skalárfüggvényekre vonatkozó láncszabály szerint a, b és c is t differenciálható függvénye és

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(s)] &= \frac{da}{dt}\mathbf{i} + \frac{db}{dt}\mathbf{j} + \frac{dc}{dt}\mathbf{k} \\
&= \frac{da}{ds}\frac{ds}{dt}\mathbf{i} + \frac{db}{ds}\frac{ds}{dt}\mathbf{j} + \frac{dc}{ds}\frac{ds}{dt}\mathbf{k} \\
&= \frac{ds}{dt}\left(\frac{da}{ds}\mathbf{i} + \frac{db}{ds}\mathbf{j} + \frac{dc}{ds}\mathbf{k}\right) \\
&= \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{u}}{ds} \\
&= f'(t)\mathbf{u}'(f(t)). \qquad\qquad s = f(t)
\end{aligned}$$

$\square$

Állandó hosszúságú vektorfüggvények

Ha egy részecske egy origó közepű gömb felszínén mozog, akkor a helyvektora állandó hosszúságú, és ez a hosszúság egyenlő a gömb sugarával (13.8. ábra). A $d\mathbf{r}/dt$ sebességvektor a mozgás pályájának az érintője, így érinti a gömböt is, azaz merőleges az $\mathbf{r}$ helyvektorra. Ez mindig igaz egy állandó hosszúságú deriválható vektorfüggvényre: a vektor és a deriváltja merőlegesek egymásra. Ezt az eredményt megkaphatjuk számolás útján is:

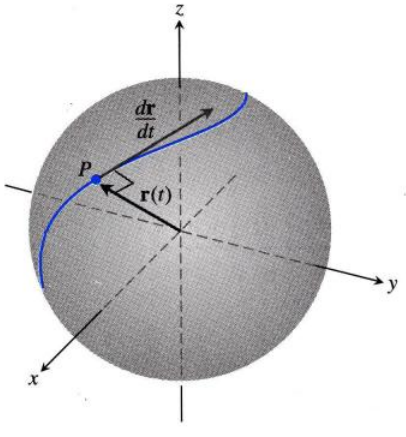
$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t) &= c^2 && |\mathbf{r}(t)| = c \text{ konstans} \\
\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t)] &= 0 && \text{mindkét oldalt deriválva} \\
\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t) &= 0 && \text{skalárszorzat deriválási szabálya} \\
2\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}(t) &= 0.
\end{aligned}$$

Az $\mathbf{r}'(t)$ és $\mathbf{r}(t)$ vektorok merőlegesek, mert skalárszorzatuk 0. Összefoglalva:

Ha $\mathbf{r}$ konstans hosszúságú differenciálható vektorfüggvény, akkor

$$\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0. \qquad (13.4)$$

Ezt a megállapítást többször is használni fogjuk a 13.4. részben.



13.8. ÁBRA: Ha egy $\mathbf{r}$ helyvektorú részecske differenciálható pályán mozog a gömb felszínén, akkor

$$\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0.$$

5. PÉLDA: **Konkrét példa (13.4)-re**

Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}$ vektorfüggvény állandó hosszúságú, majd azt, hogy merőleges a deriváltjára!

Megoldás:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}, \\
|\mathbf{r}(t)| &= \sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2,
\end{aligned}$$

illetve

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sin t \cos t - \sin t \cos t = 0. \qquad \square$$

Vektorfüggvények integrálása

Egy $\mathbf{r}(t)$ vektorfüggvény **primitív függvénye** vagy **antideriváltja** az I intervallumon egy olyan differenciálható $\mathbf{R}(t)$ vektorfüggvény, amelyre minden $t \in I$-re $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$. Ha $\mathbf{R}$ az $\mathbf{r}$ primitív függvénye I-n, akkor a komponensek vizsgálatával beláthatjuk, hogy $\mathbf{r}$ I intervallumon vett bármely primitív függvénye alkalmas $\mathbf{C}$ konstansvektorral $\mathbf{R}(t) + \mathbf{C}$ alakba írható (56. feladat). Az $\mathbf{r}$ vektorfüggvény I intervallumon vett összes primitív függvényeinek halmazát **r határozatlan integráljának** nevezzük.

> DEFINÍCIÓ: **Határozatlan integrál**
>
> Az $\mathbf{r}$ vektorfüggvény t változó szerinti **határozatlan integrálja** az $\mathbf{r}$ összes primitív függvényének halmaza. Jelölése $\int \mathbf{r}(t)\,dt$. Ha $\mathbf{R}$ az $\mathbf{r}$ primitív függvénye, akkor
>
> $$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{C}.$$

A határozatlan integrál megszokott tulajdonságai vektorfüggvények határozatlan integráljára is teljesülnek.

6. PÉLDA: Határozatlan integrál keresése

$$\int \big((\cos t)\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2t\mathbf{k}\big)\,dt = \left(\int \cos t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int dt\right)\mathbf{j} - \left(\int 2t\,dt\right)\mathbf{k} \qquad (13.5)$$

$$= (\sin t + C_1)\mathbf{i} + (t + C_2)\mathbf{j} - (t^2 + C_3)\mathbf{k} \qquad (13.6)$$

$$= (\sin t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k} + \mathbf{C},$$

ahol $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} - C_3\mathbf{k}$. Ahogy skalárfüggvények esetén is, a továbbiakban a (13.5) és (13.6) lépéseket nyugodtan átugorhatjuk. Megkeressük minden egyes komponens primitív függvényét, majd hozzáadunk egy $\mathbf{C}$ konstans vektort. $\square$

Vektorfüggvények határozott integrálját legegyszerűbben a komponensek integráljai segítségével definiálhatjuk.

> DEFINÍCIÓ: **Határozott integrál**
>
> Ha $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ komponensei integrálhatóak az $[a,b]$ intervallumon, akkor $\mathbf{r}$ **határozott integrálja** a-tól b-ig
>
> $$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\mathbf{k}.$$

7. PÉLDA: **Határozott integrál kiszámolása**

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} ((\cos t)\mathbf{i}+\mathbf{j}-2t\mathbf{k})\,dt &= \left(\int_0^{\pi}\cos t\,dt\right)\mathbf{i}+\left(\int_0^{\pi}dt\right)\mathbf{j}-\left(\int_0^{\pi}2t\,dt\right)\mathbf{k}\\ &= \Big[\sin t\Big]_0^{\pi}\mathbf{i}+\Big[t\Big]_0^{\pi}\mathbf{j}-\Big[t^2\Big]_0^{\pi}\mathbf{k}\\ &= (0-0)\mathbf{i}+(\pi-0)\mathbf{j}-(\pi^2-0^2)\mathbf{k}\\ &= \pi\mathbf{j}-\pi^2\mathbf{k}.\end{aligned}$$

□

A vektorfüggvényekre vonatkozó Newton–Leibniz szabály szerint

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \Big[\mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b)-\mathbf{R}(a),$$

ahol $\mathbf{R}$ az $\mathbf{r}$ egy tetszőleges primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon. (57. feladat).

8. PÉLDA: **A sárkányrepülő pályájának meghatározása**

Képzeljük el, hogy nem ismerjük a 4. példában szereplő sárkányrepülő pályáját, csak az $\mathbf{a}(t) = -(3\cos t)\mathbf{i}-(3\sin t)\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ gyorsulásvektorát. Azt is tudjuk, hogy a repülő kezdetben (azaz a $t=0$ időpontban) a $(3,0,0)$ pontból startolt, $\mathbf{v}(0)=3\mathbf{j}$ kezdősebességgel. Határozzuk meg a repülő helyét t függvényeként!

Megoldás: A célunk $\mathbf{r}(t)$ meghatározása. Ismerünk

egy differenciálegyenletet: $\mathbf{a} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -(3\cos t)\mathbf{i}-(3\sin t)\mathbf{j}+2\mathbf{k}$,

és a kezdeti feltételeket: $\mathbf{v}(0)=3\mathbf{j}$ és $\mathbf{r}(0)=3\mathbf{i}+0\mathbf{j}+0\mathbf{k}$.

A differenciálegyenlet mindkét oldalát t szerint integrálva azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{v}(t) = -(3\sin t)\mathbf{i}+(3\cos t)\mathbf{j}+2t\mathbf{k}+\mathbf{C_1}.$$

A $\mathbf{v}(0)=3\mathbf{j}$ kezdeti feltételt felhasználva megkeressük $\mathbf{C_1}$-et:

$$\begin{aligned}3\mathbf{j} &= -(3\sin 0)\mathbf{i}+(3\cos 0)\mathbf{j}+(0)\mathbf{k}+\mathbf{C_1}\\ 3\mathbf{j} &= 3\mathbf{j}+\mathbf{C_1}\\ \mathbf{C_1} &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Így már ismerjük a sárkányrepülő sebességét az idő függvényében:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t) = -(3\sin t)\mathbf{i}+(3\cos t)\mathbf{j}+2t\mathbf{k}.$$

Ennek az új differenciálegyenletnek mindkét oldalát integrálva

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i}+(3\sin t)\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}+\mathbf{C_2}$$

adódik. Az $\mathbf{r}(0)=3\mathbf{i}$ feltételből meghatározzuk $\mathbf{C_2}$-t is:

$$\begin{aligned}3\mathbf{i} &= (3\cos 0)\mathbf{i}+(3\sin 0)\mathbf{j}+0^2\mathbf{k}+\mathbf{C_2}\\ 3\mathbf{i} &= 3\mathbf{i}+(0)\mathbf{j}+(0)\mathbf{k}+\mathbf{C_2}\\ \mathbf{C_2} &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Megkaptuk, hogy a repülő helye t függvényében

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i}+(3\sin t)\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}.$$

Kijött az az eredmény, amelyre a 4. feladat alapján számítottunk.

Megjegyzés: A példában mindkét integrációs konstans értékére, azaz $\mathbf{C_1}$-re és $\mathbf{C_2}$-re, $\mathbf{0}$ jött ki. Ez általában nem így van, más eredményekre a 31. és 32. feladatban láthatunk példát. □

13.1. Feladatok

Mozgás az xy-síkban

Az 1–4. feladatban szereplő $\mathbf{r}(t)$ egy, az xy-síkban mozgó részecske helyét adja meg az idő függvényében. Írjunk fel egy összefüggést x és y között, amelynek grafikonja kirajzolja a részecske pályáját! Ezután keressük meg a részecske sebesség- és gyorsulásvektorát a kijelölt t időpontban!

1. $\mathbf{r}(t) = (t+1)\mathbf{i} + (t^2-1)\mathbf{j}, \quad t = 1$

2. $\mathbf{r}(t) = (t^2+1)\mathbf{i} + (2t-1)\mathbf{j}, \quad t = 1/2$

3. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + \frac{2}{9}e^{2t}\mathbf{j}, \quad t = \ln 3$

4. $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (3\sin 2t)\mathbf{j}, \quad t = 0$

Az 5–8. feladatban a részecske egy-egy kijelölt, xy-síkbeli pályán mozog. Keressük meg a részecske sebesség- és gyorsulásvektorát az adott időpontokban, és rajzoljuk be őket a görbébe!

5. **Mozgás az $x^2+y^2=1$ körön:**

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}, \quad t = \pi/4,\ \pi/2$$

6. **Mozgás az $x^2+y^2=16$ körön:**

$$\mathbf{r}(t) = \left(4\cos\frac{t}{2}\right)\mathbf{i} + \left(4\sin\frac{t}{2}\right)\mathbf{j}, \quad t = \pi,\ 3\pi/2$$

7. **Mozgás az $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ cikloison:**

$$\mathbf{r}(t) = (t-\sin t)\mathbf{i} + (1-\cos t)\mathbf{j}, \quad t = \pi,\ 3\pi/2$$

8. **Mozgás az $y = x^2+1$ parabolán:**

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t^2+1)\mathbf{j}, \quad t = -1,\ 0\ ,1$$

Sebesség és gyorsulás a térben

A 9–14. feladatban $\mathbf{r}(t)$ egy térben mozgó részecske helyét adja meg a t időpontban. Keressük meg a részecske sebesség- és gyorsulásvektorát! Határozzuk meg a részecske sebességének a nagyságát és irányát a kijelölt t időpontban! Írjuk fel a részecske sebességvektorát a sebesség nagyságának és irányának szorzataként!

9. $\mathbf{r}(t) = (t+1)\mathbf{i} + (t^2-1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad t = 1$

10. $\mathbf{r}(t) = (1+t)\mathbf{i} + \frac{t^2}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{t^3}{3}\mathbf{k}, \quad t = 1$

11. $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}, \quad t = \pi/2$

12. $\mathbf{r}(t) = (\sec t)\mathbf{i} + (\operatorname{tg} t)\mathbf{j} + \frac{4}{3}t\mathbf{k}, \quad t = \pi/6$

13. $\mathbf{r}(t) = (2\ln(t+1))\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}, \quad t = 1$

14. $\mathbf{r}(t) = (e^{-t})\mathbf{i} + (2\cos 3t)\mathbf{j} + (2\sin 3t)\mathbf{k}, \quad t = 0$

A 15–18. feladatban $\mathbf{r}(t)$ egy térben mozgó részecske helyét adja meg a t időpontban. Számítsuk ki a részecske sebesség- és gyorsulásvektora által bezárt szöget a $t = 0$ pillanatban!

15. $\mathbf{r}(t) = (3t+1)\mathbf{i} + \sqrt{3}t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

16. $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t - 16t^2\right)\mathbf{j}$

17. $\mathbf{r}(t) = (\ln(t^2+1))\mathbf{i} + (\operatorname{arctg} t)\mathbf{j} + \sqrt{t^2+1}\mathbf{k}$

18. $\mathbf{r}(t) = \frac{4}{9}(1+t)^{3/2}\mathbf{i} + \frac{4}{9}(1-t)^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{3}t\mathbf{k}$

A 19–20. feladatban $\mathbf{r}(t)$ egy térben mozgó részecske helyét adja meg a t időpontban. Keressük meg az összes olyan időpontot az adott intervallumban, amelyben a részecske sebesség- és gyorsulásvektora egymásra merőleges!

19. $\mathbf{r}(t) = (t-\sin t)\mathbf{i} + (1-\cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

20. $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (\cos t)\mathbf{k}, \quad t \ge 0$

Vektorfüggvények integrálása

Számoljuk ki az integrálokat (21–26. feladat).

21. $\displaystyle\int_0^1 \left(t^3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + (t+1)\mathbf{k}\right) dt$

22. $\displaystyle\int_1^2 \left((6-6t)\mathbf{i} + 3\sqrt{t}\mathbf{j} + \frac{4}{t^2}\mathbf{k}\right) dt$

23. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left((\sin t)\mathbf{i} + (1+\cos t)\mathbf{j} + (\sec^2 t)\mathbf{k}\right) dt$

24. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \left((\sec t \operatorname{tg} t)\mathbf{i} + (\operatorname{tg} t)\mathbf{j} + (2\sin t\cos t)\mathbf{k}\right) dt$

25. $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{t}\mathbf{i} + \frac{1}{5-t}\mathbf{j} + \frac{1}{2t}\mathbf{k}\right) dt$

26. $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{1+t^2}\mathbf{k}\right) dt$

Kezdetiérték-feladatok vektorfüggvényekre

Keressük meg a 27–32. feladatban szereplő kezdetiérték-feladatokat kielégítő $\mathbf{r}$ vektorfüggvényeket!

27. Differenciálegyenlet: $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = -t\mathbf{i} - t\mathbf{j} - t\mathbf{k}$

Kezdeti feltétel: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

28. Differenciálegyenlet: $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = (180t)\mathbf{i} + (180t - 16t^2)\mathbf{j}$

Kezdeti feltétel: $\mathbf{r}(0) = 100\mathbf{j}$

29. Differenciálegyenlet: $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{3}{2}(t+1)^{1/2}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \frac{1}{t+1}\mathbf{k}$

Kezdeti feltétel: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{k}$

30. Differenciálegyenlet: $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = (t^3+4t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$

Kezdeti feltétel: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

31. Differenciálegyenlet: $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -32\mathbf{k}$

Kezdeti feltétel: $\mathbf{r}(0) = 100\mathbf{k}$ és

$$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=0} = 8\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$

32. Differenciálegyenlet: $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

Kezdeti feltétel: $\mathbf{r}(0) = 10\mathbf{i}+10\mathbf{j}+10\mathbf{k}$ és $\left.\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=0} = \mathbf{0}$

Sima görbe érintője

Ahogy említettük, az $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}$ sima görbe $t = t_0$-beli érintőegyenese egy olyan egyenes, amely átmegy az $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ ponton, és párhuzamos a görbe t_0-beli $\mathbf{v}(t_0)$ érintővektorával. Írjuk fel a 33–36. feladatban megadott görbe t_0-beli érintőegyenesének paraméteres egyenletét!

33. $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i}+(t^2-\cos t)\mathbf{j}+e^t\mathbf{k}, \quad t_0 = 0$

34. $\mathbf{r}(t) = (2\sin t)\mathbf{i}+(2\cos t)\mathbf{j}+5t\mathbf{k}, \quad t_0 = 4\pi$

35. $\mathbf{r}(t) = (a\sin t)\mathbf{i}+(a\cos t)\mathbf{j}+bt\mathbf{k}, \quad t_0 = 2\pi$

36. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+(\sin 2t)\mathbf{k}, \quad t_0 = \pi/2$

Körkörös mozgás

37. A feladat (a)–(e) pontjaiban leírt mozgások mind ugyanazon a görbén, nevezetesen az $x^2+y^2 = 1$ egyenletű körvonalon történnek. Bár a mozgó részecske az (a)–(e) részfeladatban ugyanazt az utat futja be, a mozgás dinamikája mégis más. Válaszoljunk meg az (a)–(e) pontokban megadott részecskékre az alábbi kérdéseket:

i. Állandó a részecske sebessége? Ha igen, mennyi?
ii. A részecske gyorsulás- és sebességvektora végig merőleges?
iii. A részecske pozitív vagy negatív irányban köröz?
iv. Az $(1,0)$ pontból indul a részecske?

(a) $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}, \quad t \geq 0$

(b) $\mathbf{r}(t) = \cos(2t)\mathbf{i}+\sin(2t)\mathbf{j}, \quad t \geq 0$

(c) $\mathbf{r}(t) = \cos(t-\pi/2)\mathbf{i}+\sin(t-\pi/2)\mathbf{j}, \quad t \geq 0$

(d) $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i}-(\sin t)\mathbf{j}, \quad t \geq 0$

(e) $\mathbf{r}(t) = \cos(t^2)\mathbf{i}+\sin(t^2)\mathbf{j}, \quad t \geq 0$

38. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{r}(t) = (2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})+\cos t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right)+ \\ +\sin t\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right)$$

vektorfüggvény által leírt részecske a $(2,2,1)$ közepű, 1 sugarú, $x+y-2z = 2$ síkban fekvő körvonalon mozog!

Egyenes vonalú mozgás

39. A $t = 0$ időpontban az $(1,2,3)$-ban levő részecske egy egyenes vonalon a $(4,1,4)$ pont felé mozog. Induláskor a sebessége 2, a gyorsulásvektora végig $3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Írjuk fel az $\mathbf{r}(t)$ helyvektort az idő függvényében megadó egyenletet!

40. A $t = 0$ időpontban az $(1,-1,2)$-ban levő részecske egy egyenes vonalon a $(3,0,3)$ pont felé mozog. Induláskor a sebessége 2, a gyorsulásvektora végig $2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Írjuk fel az $\mathbf{r}(t)$ helyvektort az idő függvényében megadó egyenletet!

További példák és feladatok

41. Mozgás egy parabola mentén: Egy részecske az $y^2 = 2x$ parabola felső ága mentén mozog, balról jobbra, konstans 5 egység/másodperces sebességgel. Határozzuk meg a részecske sebességvektorát, amikor áthalad a $(2,2)$ ponton!

42. Mozgás egy ciklois mentén: Egy részecske az xy-síkban mozog, a helyvektora az idő függvényében

$$\mathbf{r}(t) = (t-\sin t)\mathbf{i}+(1-\cos t)\mathbf{j}.$$

T **(a)** Ábrázoljuk $\mathbf{r}(t)$-t. A kapott görbe egy ciklois!

(b) Keressük meg $|\mathbf{v}|$ és $|\mathbf{a}|$ maximális értékét! (*Útmutatás:* először keressük meg $|\mathbf{v}|^2$ és $|\mathbf{a}|^2$ szélsőértékét, aztán vonjunk gyököt.)

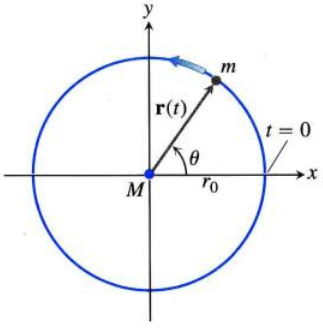
43. Mozgás egy ellipszis mentén: Egy részecske az yz-síkban fekvő $(y/3)^2+(z/2)^2 = 1$ egyenletű ellipszis mentén mozog. A helyvektora az idő függvényében

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{j}+(2\sin t)\mathbf{k}.$$

Keressük meg $|\mathbf{v}|$ és $|\mathbf{a}|$ maximális értékét! (*Útmutatás:* először keressük meg $|\mathbf{v}|^2$ és $|\mathbf{a}|^2$ szélsőértékét, aztán vonjunk gyököt.)

44. Körpályán keringő műhold: Egy m tömegű műhold konstans v sebességgel kering egy M tömegű bolygó (például a Föld) körül. A pályája egy r_0 sugarú kör, amelynek közepe a bolygó tömegközéppontja. Határozzuk meg a keringés T periódusidejét (amennyi idő alatt egy teljes kört megtesz a műhold) a következő lépésekkel:

(a) Vegyük fel a koordináta-rendszert. Legyen a bolygó tömegközéppontja az origó, az x-tengely menjen át a műhold $t = 0$-beli helyzetén. A keringés iránya legyen az óramutató járásával ellentétes (ábra).



Jelöljük $\mathbf{r}(t)$-vel a műhold helyvektorát a t időpontban. Mutassuk meg, hogy $\theta = vt/r_0$, és így

$$\mathbf{r}(t) = \left(r_0\cos\frac{vt}{r_0}\right)\mathbf{i}+\left(r_0\sin\frac{vt}{r_0}\right)\mathbf{j}.$$

(b) Határozzuk meg a műhold gyorsulását!

(c) Newton gravitációs törvénye szerint a műholdra ható gravitációs erő a bolygó tömegközéppontja felé mutat. Értéke

$$\mathbf{F} = \left(-\frac{GmM}{r_0^2}\right)\frac{\mathbf{r}}{r_0},$$

ahol G az általános gravitációs állandó. Newton második törvénye szerint $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Ennek segítségével lássuk be, hogy $v^2 = GM/r_0$.

(d) Mutassuk meg, hogy a keringés T periódusidejére igaz a $vT = 2\pi r_0$ összefüggés!

(e) A (c) és (d) pont eredményeit felhasználva lássuk be, hogy

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r_0^3.$$

Eszerint a körpályán keringő műhold periódusidejének a négyzete a keringés sugarának a köbével arányos.

45. Legyen $\mathbf{v}(t)$ differenciálható vektorfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy ha minden t-re $\mathbf{v} \cdot (d\mathbf{v}/dt) = 0$, akkor $|\mathbf{v}|$ konstans!

46. Vegyesszorzat deriváltja:

(a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ differenciálható vektorfüggvényei t-nek, akkor

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w} + \mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\mathbf{w} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\frac{d\mathbf{w}}{dt}. \quad (13.7)$$

(b) Lássuk be, hogy (13.7) ekvivalens a következővel:

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{du_1}{dt} & \frac{du_2}{dt} & \frac{du_3}{dt} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \frac{dv_1}{dt} & \frac{dv_2}{dt} & \frac{dv_3}{dt} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \frac{dw_1}{dt} & \frac{dw_2}{dt} & \frac{dw_3}{dt} \end{vmatrix}. \quad (13.8)$$

A (13.8) egyenlőség szerint egy deriválható függvényekből álló 3×3-as determináns deriváltja három olyan determináns összege, amelyekben az eredeti determináns sorait külön-külön, egyesével deriváljuk. Ez az eredmény nagyobb determinánsokra is átvihető.

47. (*A 46. feladat folytatása.*) Legyen $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, ahol f, g és h háromszor deriválhatóak. A (13.7) vagy (13.8) képlet segítségével lássuk be, hogy

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right) = \mathbf{r}\cdot\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right). \quad (13.9)$$

(*Útmutatás:* deriváljuk a bal oldalt, és vegyük észre, hogy néhány tag nulla lesz.)

48. Konstansfüggvény deriváltja: Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{u}$ vektorfüggvény értéke konstans $\mathbf{C}$, akkor $d\mathbf{u}/dt = \mathbf{0}$.

49. Skalárszoros deriváltja:

(a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{u}$ a t differenciálható vektorfüggvénye, és c tetszőleges valós szám, akkor

$$\frac{d(c\mathbf{u})}{dt} = c\frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{u}$ differenciálható vektorfüggvénye, és f differenciálható skalárfüggvénye t-nek, akkor

$$\frac{d}{dt}(f\mathbf{u}) = \frac{df}{dt}\mathbf{u} + f\frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

50. Összeg és különbség deriváltja: Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ differenciálható függvénye t-nek, akkor

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \text{és} \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

51. Folytonosság – komponensek folytonossága: Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ vektorfüggvény pontosan akkor folytonos a $t = t_0$ pontban, ha az f, g és h komponensei folytonosak t_0-ban!

52. Vektorfüggvények vektoriális szorzatának a határértéke: Legyen $\mathbf{r}_1(t) = f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j} + h_1(t)\mathbf{k}$, illetve $\mathbf{r}_2(t) = f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j} + h_2(t)\mathbf{k}$. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{A} \quad \text{és} \quad \lim_{t\to t_0}\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{B}.$$

A vektoriális szorzat kiszámolására vonatkozó determinánsos képlet, illetve a skalárfüggvények szorzatának a határértékére vonatkozó képlet segítségével lássuk be, hogy

$$\lim_{t\to t_0}(\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)) = \mathbf{A}\times\mathbf{B}.$$

53. Differenciálható vektorfüggvények folytonossága: Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ deriválható a $t = t_0$ pontban, akkor folytonos is ott!

54. Lássuk be az integrálható vektorfüggvények következő tulajdonságait!

(a) *Konstansszoros integrálja:*

$$\int_a^b k\mathbf{r}(t)\,dt = k\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt \qquad (k \text{ tetszőleges skalár})$$

Ha ezt a tételt $k = -1$ mellett alkalmazzuk, azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b (-\mathbf{r}(t))\,dt = -\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt.$$

(b) *Összeg és különbség integrálja:*

$$\int_a^b (\mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t))\,dt = \int_a^b \mathbf{r}_1(t)\,dt \pm \int_a^b \mathbf{r}_2(t)\,dt.$$

(c) *Konstansvektorszoros integrálja:*

$$\int_a^b \mathbf{C}\cdot\mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{C}\cdot\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt \qquad (\mathbf{C} \text{ tetszőleges vektor})$$

és

$$\int_a^b \mathbf{C}\times\mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{C}\times\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt \qquad (\mathbf{C} \text{ tetszőleges vektor})$$

55. Skalár- és vektorfüggvények szorzata: Tegyük föl, hogy az $u(t)$ skalárfüggvény és az $\mathbf{r}(t)$ vektorfüggvény az $[a,b]$ intervallumon van értelmezve.

(a) Bizonyítsuk be, hogy ha u és $\mathbf{r}$ folytonos $[a,b]$-n, akkor $u\mathbf{r}$ is az!

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha u és $\mathbf{r}$ differenciálható $[a,b]$-n, akkor $u\mathbf{r}$ is az, és

$$\frac{d}{dt}(u\mathbf{r}) = u\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r}\frac{du}{dt}.$$

56. Vektorfüggvények primitív függvénye:

(a) A skalárfüggvényekre vonatkozó Lagrange-féle középértéktétel második következménye segítségével lássuk be, hogy ha az $\mathbf{R}_1(t)$ és $\mathbf{R}_2(t)$ vektorfüggvénynek egy I intervallumon azonos a deriváltja, akkor $\mathbf{R}_1(t)$ és $\mathbf{R}_2(t)$ csak egy konstansvektorban különböznek egymástól I-n.

(b) Az (a) részben belátott állítás segítségével bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{R}(t)$ az $\mathbf{r}(t)$ egy primitív függvénye I-n, akkor $\mathbf{r}$ minden más I-n vett primitív függvénye $\mathbf{R}(t)+\mathbf{C}$ alakú, valamely $\mathbf{C}$ konstansvektorral.

57. Newton–Leibniz szabály vektorfüggvényekre: A skalárfüggvények Newton–Leibniz szabálya vektorfüggvényekre is igaz. Bizonyítsuk ezt be a skalárfüggvényekre vonatkozó tétel segítségével úgy, hogy először belátjuk, hogy ha egy $\mathbf{r}(t)$ vektorfüggvény folytonos az $a \le t \le b$ intervallumon, akkor

$$\frac{d}{dt}\int_a^t \mathbf{r}(\tau)\,d\tau = \mathbf{r}(t)$$

tetszőleges $t \in (a,b)$ esetén. Ezután az 56. feladat (b) részének eredményét használva mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{R}$ az $\mathbf{r}$ tetszőleges primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, akkor

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(b)-\mathbf{R}(a).$$

Görbék érintőjének számítógépes vizsgálata

Számítógép segítségével hajtsuk végre a következő lépéseket az 58–61. feladatban megadott vektorfüggvényekkel!

(a) Ábrázoljuk az $\mathbf{r}$ helyvektor által befutott görbét!

(b) Határozzuk meg a $d\mathbf{r}/dt$ sebességvektor komponenseit!

(c) Értékeljük ki $d\mathbf{r}/dt$ értékét a megadott t_0 pontban, majd írjuk fel a görbe $\mathbf{r}(t_0)$-beli érintőjének az egyenletét!

(d) Ábrázoljuk a görbét és az érintőt a megadott intervallumon!

58. $\mathbf{r}(t) = (\sin t - t\cos t)\mathbf{i} + (\cos t + t\sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$,
$0 \le t \le 6\pi, \quad t_0 = 3\pi/2$

59. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$,
$-2 \le t \le 3, \quad t_0 = 1$

60. $\mathbf{r}(t) = (\sin 2t)\mathbf{i} + (\ln(1+t))\mathbf{j} + t\mathbf{k}$,
$0 \le t \le 4\pi, \quad t_0 = \pi/4$

61. $\mathbf{r}(t) = (\ln(t^2+2))\mathbf{i} + (\operatorname{arctg} 3t)\mathbf{j} + \sqrt{t^2+1}\mathbf{k}$,
$-3 \le t \le 5, \quad t_0 = 3$

A 62. és 63. feladatban az

$$\mathbf{r}(t) = (\cos at)\mathbf{i} + (\sin at)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$$

vektorfüggvénnyel definiált spirál a és b paraméterektől való függését vizsgáljuk. Számítógép használatával hajtsuk végre a feladatokban megadott lépéseket.

62. Legyen $b = 1$. Ábrázoljuk az $\mathbf{r}(t)$ spirált, és a $t = 3\pi/2$ értékhez tartozó érintőegyenest az $a = 1,\ 2,\ 4,\ 6$ értékek mellett a $0 \le t \le 4\pi$ intervallumon! Fogalmazzuk meg, hogy hogyan változik a spirál és az érintője, ahogy a értékét növeljük!

63. Legyen $a = 1$. Ábrázoljuk az $\mathbf{r}(t)$ spirált, és a $t = 3\pi/2$ értékhez tartozó érintőegyenest a $b = 1/4,\ 1/2,\ 2,\ 4$ értékek mellett a $0 \le t \le 4\pi$ intervallumon! Fogalmazzuk meg, hogy hogyan változik a spirál és az érintője, ahogy b értékét növeljük!

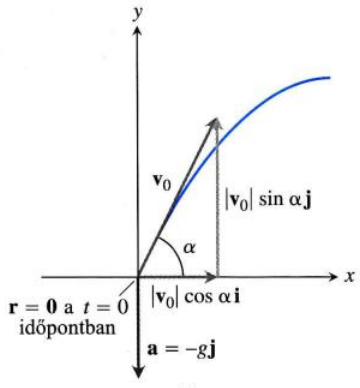
13.2. Egy lövedék röppályájának leírása

Amikor egy lövedéket az útjára indítunk, általában még a kilövés előtt szeretnénk tudni, hogy milyen messzire fog repülni (célba talál?), milyen magasra emelkedik (átmegy a domb felett?), és hogy mikor fog becsapódni (mikor számíthatunk az eredményre?). Ezekre a kérdésekre Newton második mozgástörvényének alkalmazásával kaphatunk választ, a lövedék kezdősebességének és a kilövés irányvektorának az ismeretében.

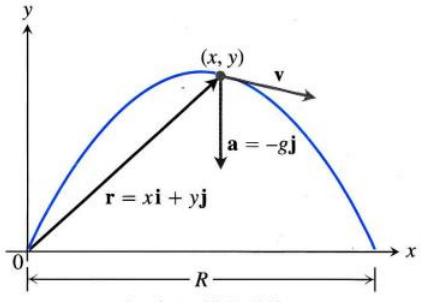
Az ideális lövedék vektor- és paraméteres egyenlete

A lövedék mozgását leíró egyenletek meghatározásához feltesszük, hogy a lövedék úgy viselkedik, mint egy függőleges síkban mozgó tömegpont, amelyre az útja során csak egyetlen erő, az időben állandó, lefelé mutató gravitációs erő hat. A gyakorlatban ezen feltételek egyike sem teljesül. Elmozdul a föld a lövedék alatt, ahogy a Föld forog, a légellenállás a sebességtől függő, a mozgással ellentétes irányú erőt ad, a testre ható gravitációs erő is változik. Ezeket mind figyelembe kell vennünk, ha a hajítás tényleges pályáját akarjuk megbecsülni az általunk hamarosan meghatározásra kerülő *ideális* egyenletekből. Ezen korrekciók tárgyalása nem célja a fejezetnek.

Feltehetjük, hogy a kilövés a $t = 0$ időpontban történik, és a $\mathbf{v_0}$ kezdősebesség-vektor az első síknegyedbe esik (13.9. ábra). Legyen α a $\mathbf{v_0}$ vektor vízszin-



(a)



(b)

13.9. ÁBRA: (a) A lövedék hely-, sebesség- és gyorsulásvektora a $t = 0$ időpontban.
(b) A lövedék hely-, sebesség- és gyorsulásvektora a későbbi t időpontban.

tessel bezárt szöge. Ekkor

$$\mathbf{v_0} = (|\mathbf{v_0}| \cos \alpha)\mathbf{i} + (|\mathbf{v_0}| \sin \alpha)\mathbf{j}.$$

Ha bevezetjük a $v_0 = |\mathbf{v_0}|$ jelölést, akkor az egyenlet így alakul:

$$\mathbf{v_0} = (v_0 \cos \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha)\mathbf{j}. \tag{13.10}$$

A lövedék kezdőpozíciója

$$\mathbf{r_0} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = \mathbf{0}. \tag{13.11}$$

Newton második mozgásegyenlete szerint a lövedékre ható erő egyenlő a lövedék m tömegének és $d^2\mathbf{r}/dt^2$ gyorsulásának szorzatával. A mi esetünkben a lövedékre egyedül csak a gravitációs erő, azaz $-mg\mathbf{j}$ hat. Ezek szerint

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -mg\mathbf{j}, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{j}.$$

Az itt szereplő $\mathbf{r}$-t, mint t függvényét szeretnénk meghatározni. Ez a következő kezdetiérték-feladat megoldását jelenti:

differenciálegyenlet: $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{j}$,

kezdeti feltételek: $t = 0$ esetén $\mathbf{r} = \mathbf{r_0}$ és $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v_0}$.

A differenciálegyenletet integrálva azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(gt)\mathbf{j} + \mathbf{v_0},$$

és ezt még egyszer integrálva azt, hogy

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{v_0}t + \mathbf{r_0}.$$

A (13.10) és (13.11) egyenletekből behelyettesítve $\mathbf{v_0}$ és $\mathbf{r_0}$ értékét

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \underbrace{(v_0 \cos \alpha)t\mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha)t\mathbf{j}}_{\mathbf{v_0}t} + \mathbf{0}$$

adódik. Összefoglalva az eredményünket:

Az ideális lövedék mozgásegyenlete

$$\mathbf{r} = (v_0 \cos \alpha)t\mathbf{i} + \left((v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j}. \tag{13.12}$$

A (13.12) egyenlet az ideális lövedék *vektoros mozgásegyenlete*. A benne szereplő α a lövedék **kilövési szöge** vagy **emelkedési szöge**, v_0 a lövedék **kezdősebessége**. Ha $\mathbf{r}$ komponenseit külön írjuk fel, megkapjuk a *paraméteres mozgásegyenleteket:*

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \qquad \text{és} \qquad y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2, \tag{13.13}$$

ahol x a lövedék kezdőponttól számított vízszintes távolsága, y pedig a magassága a $t \geq 0$ időpontban.

1. PÉLDA: **Ideális ágyúlövés**

Az origóban elsütött ágyú 500 m/s kezdősebességgel, 60°-os emelkedési szöggel lövi ki a lövedéket. Hol lesz a lövedék 10 másodperccel később?

Megoldás: A kérdés megválaszolásához a (13.12) egyenletet fogjuk alkalmazni $v_0 = 500$, $\alpha = 60°$, $g = 9{,}8$ és $t = 10$ mellett.

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (v_0 \cos\alpha)t\mathbf{i} + \left((v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j} \\ &= (500)\left(\frac{1}{2}\right)(10)\mathbf{i} + \left((500)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(10) - \left(\frac{1}{2}\right)(9{,}8)(100)\right)\mathbf{j} \\ &\approx 2500\mathbf{i} + 3840\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy tíz másodperccel az ágyú elsütése után a lövedék körülbelül 3840 méter magasan, az ágyútól vízszintesen 2500 méter távolságra lesz. □

Pályamagasság, levegőben töltött idő, lőtávolság

Az origóból kilőtt ideális lövedék röppályájára vonatkozó kérdések nagy része megválaszolható a (13.12) egyenlet segítségével.

A lövedék akkor van a pályája legmagasabb pontján, amikor a sebességvektorának a függőleges komponense 0, azaz amikor

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt = 0, \qquad \text{vagy másképp} \qquad t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Amikor t értéke ennyi, akkor y értéke

$$y_{\max} = (v_0 \sin\alpha)\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}.$$

Most nézzük meg, hogy ha a talaj vízszintes, akkor mennyi idő elteltével csapódik be a lövedék. Ez akkor következik be, amikor a függőleges koordinátája 0 lesz. Írjuk ezt be (13.12)-ba, és oldjuk meg az egyenletet t-re:

$$\begin{aligned}(v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 &= 0 \\ t\left(v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt\right) &= 0 \\ t = 0, \qquad t &= \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.\end{aligned}$$

A kijövő két megoldás közül a $t = 0$ a kilövés időpontja, ezért a $(2v_0 \sin\alpha)/g$ kell, hogy a becsapódás időpontja legyen.

Most keressük meg a lövedék kilövésének és becsapódásának a távolságát, azaz az R **lőtávolságot**. Ehhez a helyvektor vízszintes komponensét kell kiszámolnunk a $t = (2v_0 \sin\alpha)/g$ időpontban.

$$\begin{aligned}x &= (v_0 \cos\alpha)t \\ R &= (v_0 \cos\alpha)\left(\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}\right) = \frac{v_0^2}{g}(2 \sin\alpha \cos\alpha) = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha\end{aligned}$$

Innen azt is láthatjuk, hogy a lőtávolság akkor a legnagyobb, amikor $\sin 2\alpha = 1$, vagyis $\alpha = 45°$.

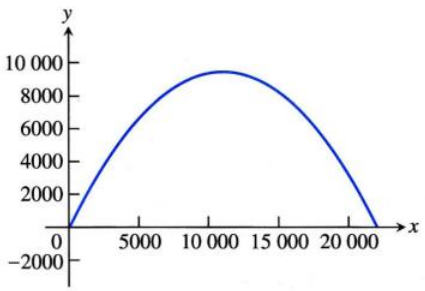
Az ideális lövedék pályamagassága, repülési ideje és lőtávolsága

Az origóból v_0 kezdősebességgel, α emelkedési szöggel kilőtt ideális lövedék

pályamagassága: $y_{\max} = \dfrac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$

repülési ideje: $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$

lőtávolsága: $R = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha.$



13.10. ÁBRA: A 2. példában vizsgált lövedék pályája.

2. PÉLDA: **Ideális lövedék pályájának vizsgálata**

Számoljuk ki az 500 m/s kezdősebességgel, 60°-os szögben kilőtt lövedék pályájának magasságát, a levegőben töltött időt, és a becsapódás távolságát! (Ugyanarról a lövedékről van szó, mint az 1. példában.)

Megoldás:

$$\text{A pályamagasság:} \quad y_{\max} = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} = \frac{(500\sin 60°)^2}{2(9{,}8)} \approx 9566 \text{ m.}$$

$$\text{A repülési idő:} \quad t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2(500)\sin 60°}{9{,}8} \approx 88{,}4 \text{ s.}$$

$$\text{A lőtávolság:} \quad R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha = \frac{(500)^2 \sin 120°}{9{,}8} \approx 22092 \text{ m.}$$

A (13.12) egyenlettel felírhatjuk a lövedék helyvektorát az idő függvényében:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (v_0\cos\alpha)t\mathbf{i} + \left((v_0\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j} \\ &= (500\cos 60°)t\mathbf{i} + \left((500\sin 60°)t - \frac{1}{2}(9{,}8)t^2\right)\mathbf{j} \\ &= 250t\mathbf{i} + \left(\left(250\sqrt{3}\right)t - 4{,}9t^2\right)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

A lövedék röppályáját a 13.10. ábrán láthatjuk. □

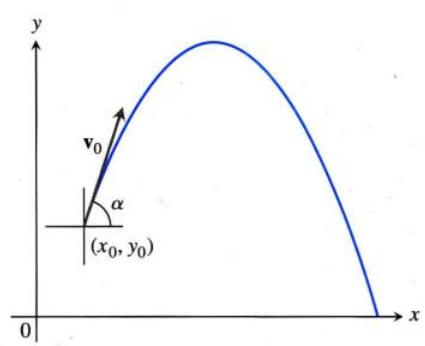
Az ideális lövedék röppályája parabola

Gyakran mondják, hogy a locsolótömlőből spriccelő víz egy parabolaívet rajzol a levegőben, de ha közelebbről megnézzük, láthatjuk, hogy ez nem igaz. A levegő lelassítja a vizet, és a pályája vége felé az oldal irányú mozgása túlzottan lelassul a lefele eséséhez képest.

Amit tényleg állíthatunk az az, hogy egy ideális lövedék pályája parabola. A bizonyításhoz a (13.13) egyenleteket fogjuk használni. Az elsőből fejezzük ki t-t: $t = x/(v_0\cos\alpha)$, és helyettesítsük be a másodikba:

$$y = -\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right)x^2 + (\operatorname{tg}\alpha)x.$$

Kifejeztük a lövedék y koordinátáját az x koordináta függvényeként, és láthatjuk, hogy az egyenlet $y = ax^2 + bx$ alakú, azaz tényleg egy parabolát határoz meg.



13.11. ÁBRA: Az (x_0, y_0) pontból, a vízszintessel α szöget bezáró $\mathbf{v_0}$ sebességvektorral indított lövedék röppályája.

Lövés az (x_0, y_0) pontból

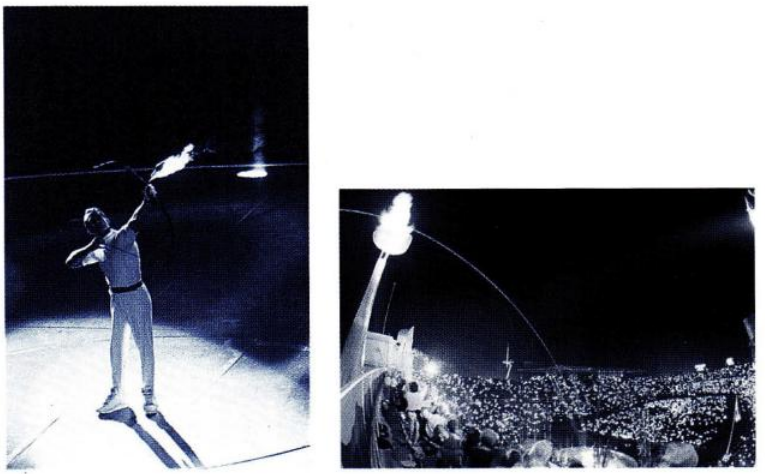
Ha egy ideális lövedéket az origó helyett az (x_0, y_0) pontból lövünk ki, akkor a helyvektora az idő függvényében így alakul:

$$\mathbf{r} = \left(x_0 + (v_0\cos\alpha)t\right)\mathbf{i} + \left(y_0 + (v_0\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j} \qquad (13.14)$$

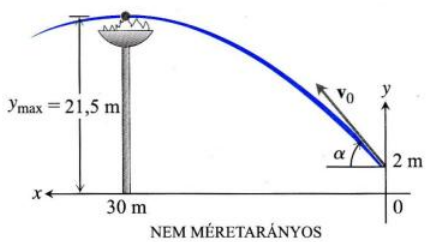
Ennek az állításnak a bizonyítása lesz a 19. feladat

3. PÉLDA: **A lángoló nyílvessző pályája**

Az 1992-es barcelonai olimpián Antonio Rebollo bronzérmes íjász gyújtotta meg az olimpiai lángot egy lángoló nyílvesszővel (13.12. ábra). Tegyük fel, hogy



13.12. ÁBRA: A spanyol íjász, Antonio Rebollo meggyújtja az olimpiai lángot Barcelonában.



13.13. ÁBRA: Az olimpiai lángot meggyújtó nyílvessző tervezett röppályája (3. feladat).

Rebollo 2 méterrel a talaj felett lövi ki a nyílvesszőt, 30 méterre a 20 méter magas fáklyától, és azt szeretné, hogy a nyílvessző a pályájának a csúcsán, pontosan 1,5 méter magasan haladjon el az olimpiai fáklya felett.

(a) Írjuk fel y_{max} értékét a v_0 kezdősebesség és az α kilövési szög függvényeként!

(b) Az $y_{max} = 21{,}5$ feltételt (13.13. ábra) és az (a) pontbeli eredményt felhasználva számoljuk ki $v_0 \sin\alpha$ értékét!

(c) Számoljuk ki $v_0 \cos\alpha$ értékét!

(d) Határozzuk meg a nyílvessző kilövési szögét!

Megoldás:

(a) Vegyünk fel egy olyan koordináta-rendszert, amelynek az x-tengelye balra mutat (hogy összhangban legyen a 13.12. ábra második képével), és amelyben a lángoló nyílvessző a $t = 0$ időpontban az $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ pontból indul (13.13. ábra). A (13.14) egyenletből

$$y = y_0 + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{a (13.14) egyenlet } \mathbf{j} \text{ komponense}$$

$$= 2 + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2. \qquad y_0 = 2$$

Keressük meg, hogy mennyi idő elteltével ér a nyílvessző a pályája legmagasabb pontjára. Ehhez deriváljuk az egyenletet t szerint, írjuk bele a $dy/dt = 0$ feltételt, és oldjuk meg t-re:

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Erre a t-re y értéke

$$y_{max} = 2 + (v_0 \sin\alpha)\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2$$

$$= 2 + \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}.$$

(b) Az $y_{max} = 21{,}5$ és $g = 9{,}8$ értékeket beírva az előző egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$21{,}5 = 2 + \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2(9{,}8)},$$

ahonnan

$$v_0 \sin\alpha = \sqrt{(19{,}5)(19{,}6)}.$$

(c) Amikor a nyíl eléri az $y_{\max}$ magasságot, éppen a fáklya felett kell járnia, azaz a vízszintesen megtett távolság 30 méter kell hogy legyen. Helyettesítsük a (13.14) egyenlet **i** komponensébe az $y_{\max}$ magasság eléréséhez szükséges időt, amelyet az (a) részben számoltunk ki, és az $x = 30$ m vízszintes távolságot:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (v_0 \cos\alpha)t && \text{a (13.14) egyenlet } \mathbf{i} \text{ komponense} \\ 30 &= 0 + (v_0 \cos\alpha)t && x = 30,\ x_0 = 0 \\ &= (v_0 \cos\alpha)\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right). && t = (v_0 \sin\alpha)/g \end{aligned}$$

Használjuk fel, hogy $g = 9{,}8$, és számoljuk ki $v_0 \cos\alpha$ értékét:

$$v_0 \cos\alpha = \frac{30g}{v_0 \sin\alpha} = \frac{(30)(9{,}8)}{\sqrt{(19{,}5)(19{,}6)}}.$$

(d) A (b) és (c) pontokban kijött eredmény alapján

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha} = \frac{\left(\sqrt{(19{,}5)(19{,}6)}\right)^2}{(30)(9{,}8)} = 1{,}3,$$

vagyis

$$\alpha = \operatorname{arctg}(1{,}3) \approx 54{,}4°.$$

Ekkora szögben kellett Rebollonak kilőnie a lángoló nyilat. □

Széllökés hatása a lövedék pályájára

A következő példa megmutatja, hogy hogyan kezelhetjük egy újabb, a lövedékre ható erő megjelenését. Továbbra is feltesszük, hogy a 4. feladatban szereplő baseball-labda egy függőleges síkban mozog.

4. PÉLDA: **Baseball-labda pályája**

Egy baseball-labdát az ütőjátékos a föld felett 1 méteres magasságban talál el. A labda az ütőt 47 m/s kezdősebességgel, a vízszintessel 20°-os szöget bezárva hagyja el. Az ütés pillanatában egy vízszintes, az ütés irányával ellentétes irányú széllökés belekap a labdába, $-2{,}6\mathbf{i}$ (m/s) sebességkomponenst adva a baseball-labda kezdősebesség-vektorához.

(a) Írjuk fel a labda helyvektorára vonatkozó vektoregyenletet!

(b) Milyen magas a labda pályája? Mikor ér a labda a pályája csúcsára?

(c) Milyen messze, és mennyi idő múlva esik le a labda, ha nem kapják el?

Megoldás:

(a) A (13.10) egyenlet alapján, a széllökést is beleszámítva, a baseball-labda kezdősebesség-vektora

$$\begin{aligned} \mathbf{v_0} &= (v_0 \cos\alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin\alpha)\mathbf{j} - (2{,}6)\mathbf{i} \\ &= (47\cos 20°)\mathbf{i} + (47\sin 20°)\mathbf{j} - (2{,}6)\mathbf{i} \\ &= (47\cos 20° - 2{,}6)\mathbf{i} + (47\sin 20°)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

A labda kezdőpozíciója $\mathbf{r_0} = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$. A

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{j}$$

egyenletet integrálva azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(gt)\mathbf{j} + \mathbf{v_0},$$

majd újra integrálva azt, hogy

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0.$$

Ide behelyettesítjük $\mathbf{v}_0$ és $\mathbf{r}_0$ értékét, és megkapjuk a labda pályáját leíró egyenletet:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \\ &= -(4{,}9)t^2\mathbf{j} + (47\cos 20^\circ - 2{,}6)t\mathbf{i} + (47\sin 20^\circ)t\mathbf{j} + \mathbf{j} \\ &= (47\cos 20^\circ - 2{,}6)t\mathbf{i} + \left(1 + (47\sin 20^\circ)t - (4{,}9)t^2\right)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

(b) A labda akkor éri el a pályája legmagasabb pontját, amikor a sebességének függőleges komponense 0, azaz

$$\frac{dy}{dt} = 47\sin 20^\circ - (9{,}8)t = 0.$$

Az egyenletet t-re megoldva megkapjuk, hogy

$$t = \frac{47\sin 20^\circ}{9{,}8} \approx 1{,}64 \text{ s}.$$

A pályamagasság meghatározásához az itt kiszámolt időt behelyettesítjük $\mathbf{r}$ függőleges komponensébe:

$$y_{\max} = 1 + (47\sin 20^\circ)(1{,}64) - (4{,}9)(1{,}64)^2 \approx 14{,}18 \text{ m}.$$

Tehát a baseball labda az elütéstől számított 1,64 másodperc múlva ér fel a pályája csúcsára, 14,18 méter magasra.

(c) A labda akkor ér földet, amikor az $\mathbf{r}$ helyvektorának a függőleges komponense 0 lesz. Írjuk fel ezt a feltételt, és a kapott egyenletből határozzuk meg t értékét:

$$\begin{aligned}1 + (47\sin 20^\circ)t - (4{,}9)t^2 &= 0 \\ 1 + (16{,}07)t - (4{,}9)t^2 &= 0.\end{aligned}$$

A másodfokú egyenlet két megoldása $t = -0{,}06$ és $t = 3{,}34$ másodperc. Az utóbbit behelyettesítve $\mathbf{r}$ vízszintes komponensébe, megkapjuk, hogy a labda által megtett távolság

$$R = (47\cos 20^\circ - 2{,}6)(3{,}34) \approx 138{,}8 \text{ m}.$$

Azaz a labda az ütés után körülbelül 3,34 másodperc múlva, az ütés helyétől 138,8 méterre ér földet. □

A 29–31. feladatban a légellenállást is beszámítjuk a lövedék röppályájának vizsgálatakor.

13.2. Feladatok

A következő feladatok – hacsak mást nem mondunk – ideális lövedékekről szólnak, amelyeket az origóból lövünk ki. A kilövés szöge mindig a vízszintes talajjal bezárt szög.

1. Repülési idő: Egy lövedéket 840 m/s kezdősebességgel, 60°-os szögben lövünk ki. Mennyi idő alatt tesz meg a lövedék vízszintesen 21 kilométert?

2. Torkolati sebesség: Mekkora annak az ágyúnak a torkolati sebessége (azaz az ágyúgolyó kezdősebessége), amelynek maximális lőtávolsága 24,5 km?

3. Repülési idő, pályamagasság: Egy lövedéket 45° emelkedési szöggel, 500 m/s kezdősebességgel lövünk ki.

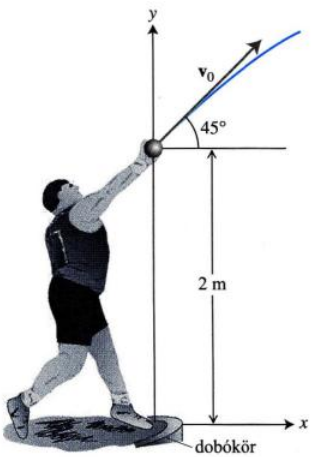
(a) Mikor és milyen messze csapódik be a lövedék?

(b) Milyen magasan van a lövedék, amikor vízszintesen mérve 5 kilométerre van az ágyútól?

(c) Mekkora a lövedék által elért maximális magasság?

4. Labdahajítás: Egy labdát 30°-os szögben, 10 m/s kezdősebességgel egy 10 méter magas emelvényről elhajítunk. Mikor és milyen messze fog földet érni?

5. Súlylökés: Egy atléta a földtől számított 2 méteres magasságban, 45°-os szögben, 13,2 m/s kezdősebességgel löki el a 7,27 kilogrammos súlygolyót, ahogy az ábra is mutatja. Mennyi idő múlva és milyen messze csapódik be a golyó?



6. (*Az 5. feladat folytatása.*) A lökés kezdőmagassága miatt az 5. feladatban szereplő súly messzebbre repülne, ha az atléta 40°-os szögben lökné el. Mennyivel messzebbre?

7. Golflabda kilövése: Egy rugós hajítógép a földről 45°-os szögben, 10 m távolságra lő el egy golflabdát.

(a) Mekkora a labda kezdősebessége?

(b) Keressük meg azt a két szöget, amellyel azonos sebességgel lőve a labdát, az 6 méter távolságra esik le!

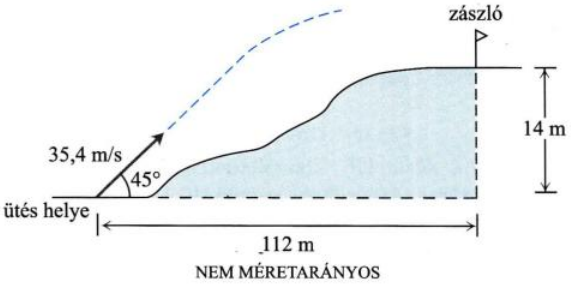
8. Elektronsugár: A TV képcsövében egy elektron vízszintes irányban, $5 \cdot 10^6$ m/s kezdősebességgel indul el a 40 cm távolságra levő képernyő felé. Mennyit esik lefelé, amíg odaér?

9. Golfütés: Laboratóriumban vizsgálták, hogy különböző keménységű golflabdák milyen messzire repülnek, ha 9°-os szögben, 100 mph (= 44,7 m/s) sebességgel érkező ütővel ütik el őket. Egy 100-as keménységű labda 227,5 méter távolságra repült. Mekkora volt a kezdősebessége? (Nagyobb volt a kezdősebessége az ütő sebességénél, ugyanis ahogy az ütő előrelendült, az összenyomódó majd alakját visszanyerő labda ellökte magát az ütőtől.)

10. Emberi ágyúgolyó: A cirkuszban egy bohócot egy $v_0 =$ 25,7 m/s torkolati sebességű ágyúból szeretnének kilőni úgy, hogy a bohóc egy 60 méter távolságra, az ágyú torkolatával azonos magasságon levő párnára érkezzen. A terem mennyezete vízszintes, és 23 méterrel van az ágyú torkolata felett. Végre lehet hajtani a lövést úgy, hogy a bohóc ne csapódjon neki a mennyezetnek? Ha igen, milyen szögben kell az ágyút felállítani?

11. Egy golfozó 30°-os szögben, 24,7 m/s kezdősebességgel üti el a golflabdát. Át fog repülni a labda a 41 méterre levő, 914 cm magas fa fölött? Válaszát indokolja!

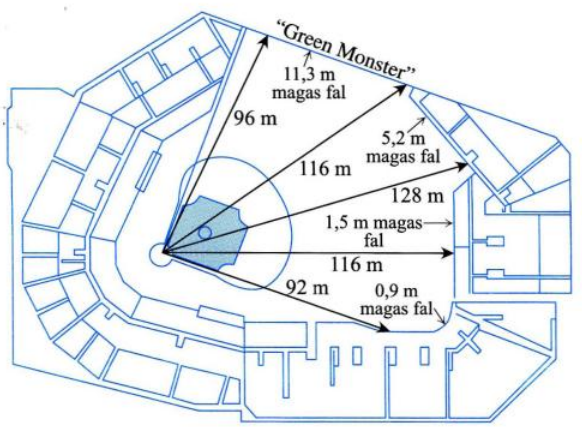
12. Egy golflabdát 35,4 m/s kezdősebességgel, 45°-os emelkedési szöggel ütnek el. A célterület egy 14 méter magas domb tetején van, ahogy az ábrán is látható. Feltéve, hogy a vízszintesen 112 méterre levő zászlórúd nem állja útját, a lyuktól milyen messze fog leesni a labda?



13. A „Green Monster": A Boston Red Sox játékosa 91 centiméter magasságban, 20°-os szögben üti el a baseball-labdát, amely a Fenway Park stadion „Green Monster" nevű falának a bal szélén, annak a tetejéről pattan tovább. A fal 11,3 méter magas, és 96 méter távolságra van az ütőjátékostól (lásd az ábrát).

(a) Mekkora volt a labda kezdősebessége?

(b) Mennyi időbe telt, amíg a labda a falhoz ért?



14. Azonos lőtávolságú emelkedési szögek: Mutassuk meg, hogy egy $\alpha \in (0,90)$ fokos emelkedési szöggel kilőtt lövedék pontosan olyan messzire repül, mint egy azonos kezdősebességgel, $(90-\alpha)$ fokos emelkedési szöggel kilőtt lövedék! (Ha a légellenállást is beleszámítanánk, ez a szimmetria elveszne.)

15. Azonos lőtávolságú emelkedési szögek: Számoljuk ki azt a két emelkedési szöget, amellyel egy 400 m/s kezdősebességgel kilőtt lövedék eltalálja a 16 kilométerre, az ágyúval azonos magasságban levő célpontot.

16. Lőtávolság és pályamagasság, illetve kezdősebesség:

(a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy rögzített emelkedési szög mellett megduplázzuk egy lövedék kezdősebességét, akkor a lőtávolság négyszeresére változik!

(b) Körülbelül hány százalékkal kell megemelni a kezdősebességet, hogy duplájára nőjjön a lőtávolság és a pályamagasság?

17. Súlylökés: 1987-ben Moszkvában Natalya Lisouskaya 22,50 méter távolságra lökte a 4 kg-os súlyt, megdöntve a női súlylökés világcsúcsát. Feltéve, hogy 2 méter magasságból, 40°-os szögben indította a golyót, mekkora volt a súlygolyó kezdősebessége?

18. Pályamagasság, illetve idő: Mutassuk meg, hogy egy lövedék a pályamagasságának 3/4-ére emelkedik a pályamagasság elérésehez szükséges idő fele alatt!

19. Lövés az (x_0, y_0) pontból: Vezessük le az

$$x = x_0 + (v_0 \cos\alpha)t,$$
$$y = y_0 + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

egyenleteket (lásd a szövegben szereplő (13.14) egyenletet) a következő, $\mathbf{r}$ helyvektorra felírt kezdetiérték-feladat megoldásával:

differenciálegyenlet: $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{j}$,

kezdeti feltételek: $\mathbf{r}(0) = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$,

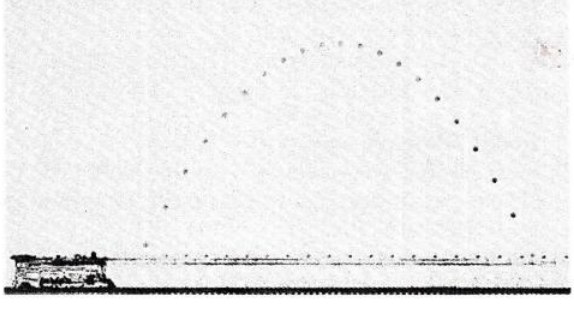
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(0) = (v_0 \cos\alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin\alpha)\mathbf{j}.$$

20. Lángoló nyílvessző: A 3. példában megtalált szöget használva számoljuk ki Rebollo nyilának a kezdősebességét! (Lásd a 13.13. ábrát.)

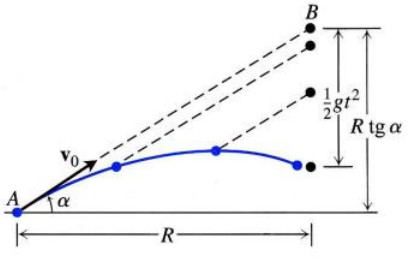
21. Lángoló nyílvessző: A 3. példában szereplő fáklya átmérője 366 centiméter. A (13.14) egyenlet és a 3. feladat (c) részének segítségével számoljuk ki, hogy mennyi ideig tart, amíg a nyílvessző a fáklya pereme fölé ér! Milyen magasan van ekkor?

22. Írjuk le a (13.13) egyenletekkel meghatározott lövedék pályáját $\alpha = 90°$ esetén!

23. Modellvasút: A mellékelt sorozatkép egy mozdonymodell állandó sebességű, egyenes pályán végzett mozgásáról készült. Ahogy a mozdony mozgott, a kéményébe épített rugós kilövőszerkezet egy üveggolyót lőtt ki. Az üveggolyó a vonat sebességével mozgott előre, és pontosan 1 másodperc múlva visszaesett a mozdony kéményébe. Mérjük meg a golyó pályájának a vízszintessel bezárt szögét, és ennek segítségével számoljuk ki, hogy milyen magasra repült a golyó, és hogy mekkora sebességgel haladt a mozdony!



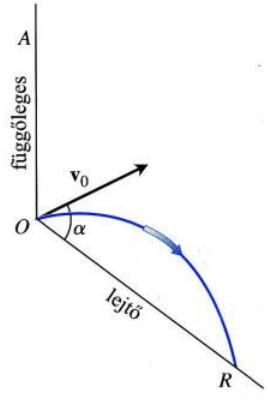
24. Ütköző üveggolyók: Az ábrán látható kísérlet két üveggolyó pályáját mutatja. Az A jelű golyót α szöggel, a B golyót megcélozva v_0 kezdősebességgel kilőjük, és a lövés pillanatában a B golyót leejtjük az A-tól vízszintesen R távolságra levő, $R\,\mathrm{tg}\,\alpha$ magas állványról. Azt találjuk, hogy az üveggolyók v_0 megválasztásától függetlenül mindig összeütköznek. Ez csak véletlen, vagy mindig így kell lennie? Válaszát indokolja!



25. Lövés a lejtőn: Egy ideális lövedéket lövünk ki egy lejtő tetejéről, ahogy az ábra is mutatja.

(a) Bizonyítsuk be, hogy akkor repül legmesszebb a lövedék, ha a kilövés iránya felezi az *AOR* szöget!

(b) Ha lejtő helyett egy emelkedőn próbálnánk fellőni, melyik kilövési szög esetén lőnénk a legmesszebb?



26. Baseball ütés széllökéssel: Egy baseball-labdát a föld felett 76 centiméter magasan ütnek el. A labda az ütőt 44 m/s kezdősebességgel, a vízszintessel 23°-os szöget bezárva hagyja el. Az ütés pillanatában egy vízszintes, az ütés irányával ellentétes irányú széllökés belekap a labdába, $-4{,}3\mathbf{i}$ (m/s) sebességkomponenst adva a baseball-labda kezdősebesség-vektorához. A labda egy 91 méter távolságra levő, 4,5 méter magas kerítés felé száll.

(a) Írjuk fel a labda helyvektorára vonatkozó vektoregyenletet!

(b) Milyen magasra repül a labda? Mikor éri el a maximális magasságát?

(c) Milyen messze és mennyi idő múlva esik le a labda, ha nem kapják el?

(d) Sikerült átütni a labdát a kerítés felett?

27. Röplabda: Egy röplabdát 1,22 méterrel a föld fölött, a 182 centiméter magas hálótól 3,66 méter távolságra ütnek meg. Az ütés pontjától a labda 10,67 m/s kezdősebességgel, 27°-os szögben megy tovább, és további érintés nélkül leesik a pálya másik térfelén.

(a) Írjuk fel a labda útját leíró vektoregyenletet!

(b) Milyen magasra repül a labda? Mikor éri el a maximális magasságát?

(c) Milyen messze, mennyi idő múlva esik le?

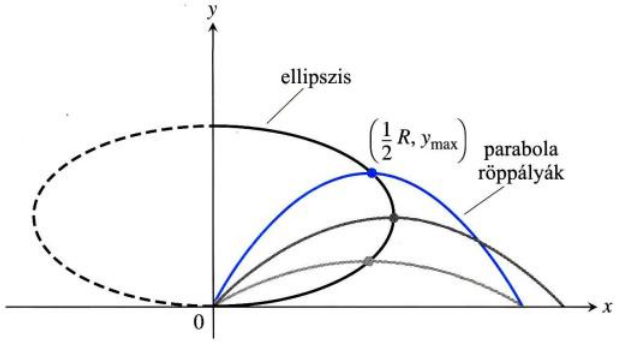
(d) Mikor van a labda 213 centi magasan? Ekkor (vízszintesen mérve) milyen messze van a földet érés helyétől?

(e) Emeljük meg a hálót 245 cm magasra. Változtat ez a dolgokon? Válaszát indokolja!

28. Röppályák csúcspontja: Rögzített v_0 kezdősebességgel, változó α emelkedési szöggel lövedékeket lövünk ki az origóból. Tudjuk, hogy minden $0 < \alpha < \pi/2$ esetén a lövedék pályája parabola. (Lásd az ábrát.) Bizonyítsuk be, hogy ezen parabolák csúcspontja az

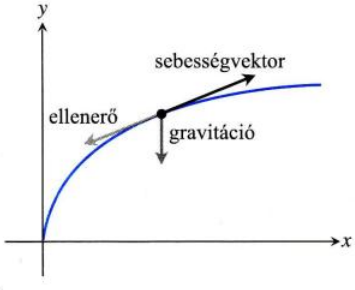
$$x^2 + 4\left(y - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2 = \frac{v_0^4}{4g^2}, \qquad x \geq 0$$

egyenletű félellipszisen helyezkedik el!



Lövedék lineáris ellenerővel

A gravitáció után a lövedékekre ható második legfontosabb erő a légellenállás. A légellenállás egy **ellenerő**, iránya a mozgás irányával *ellentétes*. (Lásd az ábrát.) A levegőben alacsony sebességgel mozgó részecskére ható ellenerő nagysága igen jó közelítéssel arányos a mozgás sebességével (a sebesség első hatványával), ezért azt mondjuk, hogy ez az ellenerő **lineáris**.



29. Lineáris ellenerő: Vezessük le az

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})(\cos\alpha)$$

$$y = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})(\sin\alpha) + \frac{g}{k^2}(1 - kt - e^{-kt})$$

egyenleteket az $\mathbf{r}$ síkbeli helyvektorra vonatkozó következő kezdetiérték-feladat megoldásával:

differenciálegyenlet: $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{j} - k\mathbf{v} = -g\mathbf{j} - k\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$,

kezdeti feltételek: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(0) = \mathbf{v_0} = (v_0\cos\alpha)\mathbf{i} + (v_0\sin\alpha)\mathbf{j}.$$

Az itt szereplő v_0 és α a lövedék kezdősebessége és kilövési szöge, g a gravitációs gyorsulás, k pedig az **ellenerő együtthatója**. Például a légellenállási együttható függ a levegő sűrűségétől és a mozgó tárgy alakjától.

30. Baseballütés légellenállással: Tekintsük a 4. példában szereplő baseball-problémát széllökés nélkül, de lineáris ellenerővel. Az ellenerő együtthatója $k = 0{,}12$.

(a) A 29. feladat alapján írjuk fel a labda pályájának vektoros egyenletét!

(b) Milyen magasra megy fel a labda, és mikor éri el ezt a magasságot?

(c) Milyen messzire repül a labda, mennyi időt tölt a levegőben?

(d) Mikor van a labda 10 méter magasságban? Ekkor (vízszintesen mérve) milyen messze van az ütés helyétől?

(e) A labda egy 103 méter távolságra levő, 3 méter magas kerítés felé száll. A fogójátékos felugorva maximum 3,3 méter magasan tudja megfogni a labdát. Sikerülhet a labdát elkapnia?

31. Baseballütés széllökéssel, légellenállással: Tekintsük ismét a 4. példa baseball-ütését. Most az ellenerő együtthatója $k = 0{,}08$, és az ütés pillanatában a széllökés $-5{,}36\mathbf{i}$ m/s-ot ad hozzá a labda kezdősebesség-vektorához.

(a) Írjuk fel a labda pályájának vektoros egyenletét!

(b) Milyen magasra megy fel a labda, és mikor éri el ezt a magasságot?

(c) Milyen messzire repül a labda, mennyi időt tölt a levegőben?

(d) Mikor van a labda 10 méter magasságban? Ekkor (vízszintesen mérve) milyen messze van az ütés helyétől?

(e) A labda egy 115 méter távolságra levő, 6 méter magas kerítés felé száll. Sikerült az ütőnek átütnie a labdát a kerítés felett? Ha igen, mekkora széllökés tudta volna megakadályozni ebben? Ha nem, mekkora széllökés esetén sikerült volna?

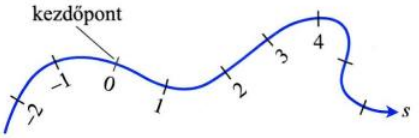
13.3. Ívhossz és a normált érintővektor

Képzeljük el, milyen élmény lehet nagy sebességgel száguldani a levegőben vagy az űrben! A járművünk jobbra-balra, fel és le fordul, belepréselve vagy éppen kiemelve minket az ülésből. A vadászpilóták, műrepülők, űrhajósok ismerik ezeket az érzéseket: a fordulók kellemetlenül szűkek, az emelkedés-süllyedés túl gyors. A sebességünk egyre csak emelkedik, és félő, hogy egy erősebb fordulóban irányíthatatlanná válik a gépünk, darabokra törik, majd belecsapódik a földbe.

Ebben, és a következő két részben a görbék alakjának a vizsgálatával foglalkozunk, megnézzük, hogy hogyan lehet matematikailag definiálni a kanyarok élességét, pörgések, forgások sebességét.

Térgörbe ívhossza

Ha egy térgörbe sima, akkor létezik mérhető hossza. Ez azt jelenti, hogy ha kijelölünk rajta egy **kezdőpontot**, akkor a görbe pontjait jellemezhetjük ettől a kezdőponttól mért s előjeles távolsággal (13.14. ábra). Ez hasonló ahhoz, ahogy a koordinátatengelyek pontjait jelöltük meg az origótól való előjeles távolságuk segítségével. Az idő természetes paraméterként adódott, amikor egy mozgó test sebességét és gyorsulását vizsgáltuk, de ez az s a természetes paraméter, ha a görbe alakját szeretnénk tanulmányozni.



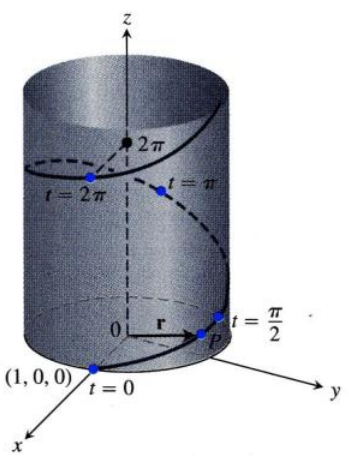
13.14. ÁBRA: A sima görbéket beskálázhatjuk a számegyeneshez hasonlóan. A görbe egy pontjának a „koordinátája" a kijelölt kezdőponttól való előjeles távolsága lesz.

Sima térgörbék ívhosszának a definiálásához a síkgörbéknél használt képletbe belevesszük a térgörbe z koordinátáját is.

DEFINÍCIÓ: Sima görbe ívhossza

Az $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $t \in [a,b]$ sima görbe ívhossza, amennyiben $\mathbf{r}$ pontosan egyszer járja be a görbét, miközben t a-tól b-ig növekszik:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt. \qquad (13.15)$$



13.15. ÁBRA: Az 1. feladatban szereplő $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ spirál.

Ahogy síkgörbék esetén is, egy térgörbe ívhosszát bármely olyan paraméterezéséből kiszámolhatjuk, amely megfelel a definícióban támasztott követelménynek. Ennek a bizonyítását elhagyjuk.

A (13.15) képletben szereplő négyzetgyökös kifejezés értéke $|\mathbf{v}|$, azaz a $d\mathbf{r}/dt$ sebességvektor hossza. Így a fenti képletet rövidebb formába is írhatjuk:

Sima görbe ívhossza

$$L = \int_a^b |\mathbf{v}|\, dt. \qquad (13.16)$$

1. PÉLDA: **A sárkányrepülő által megtett út hossza**

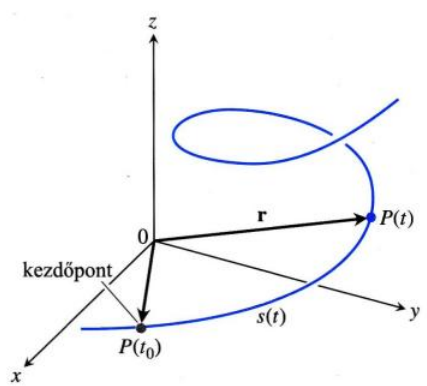
Egy sárkányrepülő felfelé spirálozik az $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ egyenletű görbén. Mekkora utat tesz meg a $t = 0$ és a $t = 2\pi$ másodperc között?

Megoldás: Az adott időintervallumon megtett út egy teljes fordulat a 13.15. ábrán ábrázolt spirál mentén. A görbe ívhossza ezen a szakaszon

$$L = \int_a^b |\mathbf{v}|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\pi\sqrt{2} \text{ egység.}$$

Ez a spirál alapköre kerületének a $\sqrt{2}$-szerese. □



13.16. ÁBRA: A $P(t)$ pont $P(t_0)$ kezdőponttól mért előjeles távolsága

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{v}(\tau)|\, d\tau.$$

Ha kiválasztunk egy $P(t_0)$ kezdőpontot a C sima görbén, akkor t értékéhez hozzárendelhetjük a görbe $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ pontját, és a $P(t_0)$ és $P(t)$ közötti irányított távolságot (13.16. ábra):

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{v}(\tau)|\, d\tau.$$

Ha $t > t_0$, akkor $s(t)$ értéke a $P(t_0)$ és $P(t)$ közötti távolság, míg ha $t < t_0$, akkor a távolság negatív előjellel. Az s előjeles távolság minden értéke meghatározza C egy pontját, így s paraméterezi C-t. Ennek a paraméterezésnek **ívhosszal való paraméterezés** a neve. Látható, hogy t növekedési irányában s is növekszik, illetve t csökkenési irányában s értéke is csökken. A görbe forgó, pörgő jellegének vizsgálatához az ívhosszal való paraméterezés jobban használható.

A görbe $P(t_0)$ kezdőpontú ívhossz paramétere

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2 + (z'(\tau))^2}\, d\tau = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{v}(\tau)|\, d\tau. \qquad (13.17)$$

Integrandusnak a görög τ („tau") betűt használjuk, mert t az integrációs tartomány felső határaként már foglalt.

Tegyük fel, hogy adott a görbét t függvényeként leíró $\mathbf{r}(t)$ vektorfüggvény, és a (13.17) egyenlet segítségével felírjuk az $s(t)$ ívhossz paramétert, szintén t függvényeként. Ha kifejezzük t-t s függvényeként $t = t(s)$ formában, akkor a görbét újra paraméterezhetjük s szerint az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$ képlet segítségével.

2. PÉLDA: **Ívhosszal való paraméterezés**

Jelöljük ki a $t_0 = 0$ kezdőpontot, és számoljuk ki az

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

spirál ívhossz paraméterét:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^{t} |\mathbf{v}(\tau)|\, d\tau && \text{a (13.17) egyenlet} \\ &= \int_{0}^{t} \sqrt{2}\, d\tau && \text{az 1. példa eredménye} \\ &= \sqrt{2}t. \end{aligned}$$

Az egyenletet t-re megoldva $t = s/\sqrt{2}$ adódik. Helyettesítsük ezt be az $\mathbf{r}$ helyvektorra vonatkozó egyenletbe, és megkapjuk a spirál ívhosszal való paraméterezését:

$$\mathbf{r}(t(s)) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} + \left(\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{2}}\mathbf{k}. \qquad \square$$

Ellentétben a 2. példával, az ívhosszal való paraméterezést általában bonyolult egy más paraméterrel definiált görbe esetén megtalálni. Szerencsére általában nincs szükségünk $s(t)$, illetve $t(s)$ zárt formulával való megadására.

3. PÉLDA: **Egyenes menti távolság**

Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ egy egységvektor, akkor az

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + tu_1)\mathbf{i} + (y_0 + tu_2)\mathbf{j} + (z_0 + tu_3)\mathbf{k}$$

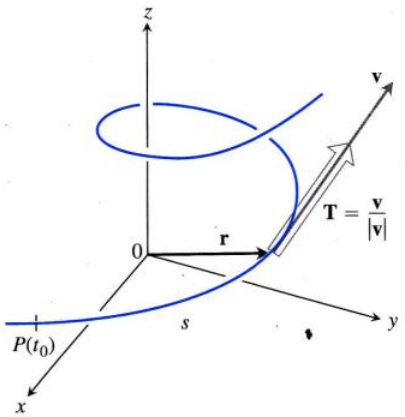
görbe $P_0(x_0, y_0, z_0)$ kezdőpontú ívhossz paramétere maga t!

Megoldás:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(x_0 + tu_1)\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(y_0 + tu_2)\mathbf{j} + \frac{d}{dt}(z_0 + tu_3)\mathbf{k} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} = \mathbf{u},$$

így

$$s(t) = \int_{0}^{t} |\mathbf{v}|\, d\tau = \int_{0}^{t} |\mathbf{u}|\, d\tau = \int_{0}^{t} 1\, d\tau = t. \qquad \square$$



13.17. ÁBRA: A görbe normált érintővektora $\mathbf{T} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$.

Sima görbe mentén mért sebesség

Mivel a (13.17) képletben a gyökjel alatti függvények folytonosak (ugyanis a görbe sima), az $s(t)$ integrálfüggény differenciálható, és

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}(t)|. \tag{13.18}$$

Ahogy eddig is tudtuk, $|\mathbf{v}|$ a görbén mozgó részecske sebessége.

Vegyük észre, hogy – bár $P(t_0)$ kiemelt szerepet játszik s definíciójában – a (13.18) egyenlőségben már nem szerepel. Ez azt jelenti, hogy az, hogy egy részecske milyen gyorsan halad előre a pályáján, nem függ a kezdőponttól való távolságától.

Mivel ds/dt a definíció alapján mindig pozitív, sima görbe esetén $|\mathbf{v}|$ nem lehet 0. Még egyszer láthatjuk azt is, hogy s t-nek növekvő függvénye.

A normált érintővektor

Már láttuk, hogy a $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ sebességvektor érintőirányú a görbéhez viszonyítva, és így a

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

egységvektor is ilyen. Mivel a most vizsgált görbék esetén $ds/dt > 0$ és s egy kölcsönösen egyértelmű, invertálható függvénye t-nek, ezért t is felírható mint s differenciálható függvénye. (Lásd a 7.1. részt.) Az s inverzének deriváltja

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}.$$

Ezek alapján $\mathbf{r}$ differenciálható függvénye s-nek, és a derivált a láncszabály alapján

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \mathbf{v}\frac{1}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \mathbf{T}.$$

Eszerint $d\mathbf{r}/ds$ a görbe normált (azaz egységnyi hosszúságú) érintővektora, amely a $\mathbf{v}$ sebességvektor irányába mutat (13.17. ábra).

> DEFINÍCIÓ: **Normált érintővektor (T)**
>
> Az $\mathbf{r}(t)$ sima görbe **normált** (azaz egységnyi hosszúságú) **érintővektora**
>
> $$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}. \tag{13.19}$$

Ha $\mathbf{v}$ differenciálható függvénye t-nek, akkor a $\mathbf{T}$ normált érintővektor is differenciálható függvénye t-nek. Ahogy a 13.5. részben látni fogjuk, $\mathbf{T}$ az egyik azon három egységvektor közül, amelyek segítenek a görbe geometriai elemzésében.

4. PÉLDA: A T normált érintővektor megkeresése

Keressük meg a 13.1. rész 4. példájában szereplő,

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

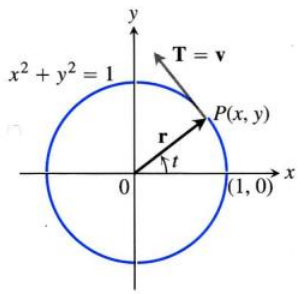
görbén repülő sárkányrepülő normált érintővektorát!

Megoldás: A 13.1. részben már láttuk, hogy

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(3\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} \qquad \text{és} \qquad |\mathbf{v}| = \sqrt{9+4t^2},$$

így

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -\frac{3\sin t}{\sqrt{9+4t^2}}\mathbf{i} + \frac{3\cos t}{\sqrt{9+4t^2}}\mathbf{j} + \frac{2t}{\sqrt{9+4t^2}}\mathbf{k}. \qquad \square$$



13.18. ÁBRA: Az $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$ helyvektorú részecske az 5. példából.

5. PÉLDA: **Mozgás az egységkörön**

Az egységkörön az óramutatóval ellentétes irányban köröz az

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$$

helyvektorú részecske. A

$$\mathbf{v} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$$

sebességvektora már eleve egységnyi hosszúságú, így $\mathbf{T} = \mathbf{v}$. (Lásd a 13.18. ábrát.) □

13.3. Feladatok

Normált érintővektor, ívhossz

Keressük meg a görbe normált érintővektorát, majd számoljuk ki a görbe feltüntetett részének ívhosszát! (1–8. feladatok)

1. $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{j} + \sqrt{5}\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

2. $\mathbf{r}(t) = (6\sin 2t)\mathbf{i} + (6\cos 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

3. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2/3)t^{3/2}\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 8$

4. $\mathbf{r}(t) = (2+t)\mathbf{i} - (t+1)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 3$

5. $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{j} + (\sin^3 t)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2$

6. $\mathbf{r}(t) = 6t^3\mathbf{i} - 2t^3\mathbf{j} - 3t^3\mathbf{k}, \quad 1 \le t \le 2$

7. $\mathbf{r}(t) = (t\cos t)\mathbf{i} + (t\sin t)\mathbf{j} + \left(2\sqrt{2}/3\right)t^{3/2}\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

8. $\mathbf{r}(t) = (t\sin t + \cos t)\mathbf{i} + (t\cos t - \sin t)\mathbf{j}, \quad \sqrt{2} \le t \le 2$

9. Keressük meg az

$$\mathbf{r}(t) = (5\sin t)\mathbf{i} + (5\cos t)\mathbf{j} + 12t\mathbf{k}$$

görbe az origótól a paraméter növekvő irányába eső, görbe mentén mért 26π távolságra levő pontját!

10. Keressük meg az

$$\mathbf{r}(t) = (12\sin t)\mathbf{i} - (12\cos t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$$

görbe az origótól a paraméter csökkenő irányába eső, görbe mentén mért 13π távolságra levő pontját!

Ívhosszal való paraméterezés

Keressük meg a 11–14. feladatban szereplő görbék $t = 0$ kezdőpontú ívhossz paraméterezését az

$$s = \int_0^t |\mathbf{v}(\tau)|\, d\tau$$

integrál kiszámolásával! Ezután határozzuk meg a görbe feltüntetett részének ívhosszát!

11. $\mathbf{r}(t) = (4\cos t)\mathbf{i} + (4\sin t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2$

12. $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j}, \quad \pi/2 \le t \le \pi$

13. $\mathbf{r}(t) = (e^t\cos t)\mathbf{i} + (e^t\sin t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad -\ln 4 \le t \le 0$

14. $\mathbf{r}(t) = (1+2t)\mathbf{i} + (1+3t)\mathbf{j} + (6-6t)\mathbf{k}, \quad -1 \le t \le 0$

További példák és feladatok

15. Ívhossz: Keressük meg az

$$\mathbf{r}(t) = \left(\sqrt{2}t\right)\mathbf{i} + \left(\sqrt{2}t\right)\mathbf{j} + (1-t^2)\mathbf{k}$$

görbe $(0,0,1)$ és $\left(\sqrt{2},\sqrt{2},0\right)$ pontok közötti ívhosszát!

16. Spirál hossza: Az 1. példában szereplő spirál egy fordulatának az ívhossza $2\pi\sqrt{2}$, amely pont ugyanannyi, mint egy 2π oldalhosszúságú négyzet átlójának hossza. Hogyan tudjuk a négyzet átlójának hosszát kiszámolni a spirál által meghatározott henger szétvágásával?

17. Ellipszis:

(a) Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (1-\cos t)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

görbe egy ellipszis, azaz egy henger és egy sík metszete!

(b) Ábrázoljuk az ellipszist és a hengert, amelynek a felszínén fekszik! Rajzoljuk be a $t = 0$, $\pi/2$, π és $3\pi/2$ pontokhoz húzott normált érintővektort!

(c) Mutassuk meg, hogy a gyorsulásvektor mindig párhuzamos az ellipszis síkjával! Ez azt jelenti, hogy ha megrajzoljuk a gyorsulásvektort, az mindig az ellipszis síkjában fekszik. Rajzoljuk be az ábrába a $t = 0$, $\pi/2$, π és $3\pi/2$ pontokhoz tartozó gyorsulásvektort!

(d) Írjuk fel az ellipszis ívhosszát megadó integrált! Ne próbáljuk meg kiszámolni, ugyanis az integrál nem elemi!

T **(e)** Számítógéppel számoljuk ki az integrál közelítő értékét, legalább 2 tizedesjegy pontossággal!

18. Az ívhossz nem függ a paraméterezéstől: Annak szemléltetésére, hogy egy sima görbe ívhossza független a kiszámolásához használt paraméterezéstől, számoljuk ki az 1. példában szereplő spirál egy fordulat alatti ívhosszát a következő paraméterezésekkel:

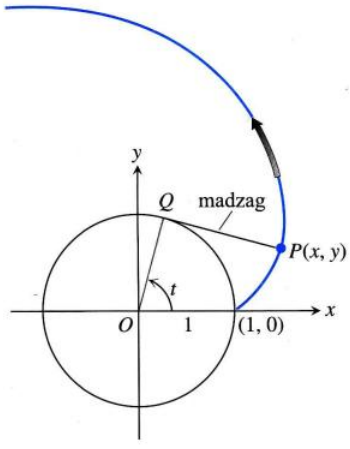
(a) $\mathbf{r}(t) = (\cos 4t)\mathbf{i} + (\sin 4t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2.$

(b) $\mathbf{r}(t) = (\cos(t/2))\mathbf{i} + (\sin(t/2))\mathbf{j} + (t/2)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 4\pi.$

(c) $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j} - t\mathbf{k}, \quad -2\pi \le t \le 0.$

19. A kör evolvense: Tekerjünk fel egy madzagot egy rögzített körre. Ahogy a madzagot letekerjük úgy, hogy közben mindig feszes legyen, a végpontja által a kör síkjában befutott görbe a kör *evolvense*, vagy *involutája*. A mellékelt ábrán a kérdéses kör az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű egységkör, és az evolvenst kirajzoló madzag végpontja az $(1,0)$ pontból indul. A letekeredő madzag a kör Q pontjához húzott érintője, t pedig az OQ szakasz x-tengellyel bezárt szöge radiánban. Mutassuk meg, hogy az evolvens $P(x,y)$ pontjának paraméteres egyenlete

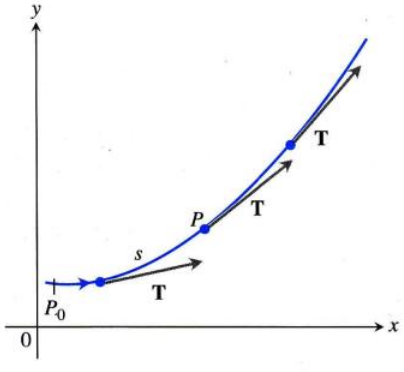
$$x = \cos t + t\sin t, \qquad y = \sin t - t\cos t, \qquad t > 0.$$



20. (*A 19. feladat folytatása.*) Számítsuk ki a görbe $P(x,y)$ pontjába húzott normált érintővektort!

13.4. Görbület és a normált főnormális

Ebben az alfejezetben görbék hajlását, görbülését fogjuk vizsgálni. Először síkgörbékkel foglalkozunk, aztán megnézzük, hogy hogyan módosulnak az eredményeink a térben.



13.19. ÁBRA: Ahogy a P pont a görbén előre mozog, a pontbeli normált érintővektor elfordul. A $|d\mathbf{T}/ds|$ P-beli értékét nevezzük a görbe P-beli *görbületének*.

Síkgörbe görbülete

Ahogy egy részecske egy síkbeli sima görbén mozog, a $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ normált érintővektor elfordul a görbe hajlásának megfelelően. Mivel $\mathbf{T}$ egy egységvektor, a hossza állandó marad, csak az iránya változik. A görbén megtett egységnyi távolság alatt $\mathbf{T}$ fordulásának mértékét nevezzük *görbületnek* (13.19. ábra). A görbület szokásos jelölése a görög κ („kappa") betű.

DEFINÍCIÓ: Görbület

Ha $\mathbf{T}$ egy sima görbe normált érintővektora, akkor a görbe **görbülete**

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|.$$

Ha $|d\mathbf{T}/ds|$ értéke, azaz a görbület nagy, az azt jelenti, hogy $\mathbf{T}$ élesen fordul, ahogy a részecske áthalad a P ponton. Ha a görbület nulla közelében van, akkor $\mathbf{T}$ lassan fordul a P pont környezetében.

Nézzük meg, hogy mi történik, ha az $\mathbf{r}(t)$ sima görbe nem ívhosszal, hanem valamely más t változóval van paraméterezve. Ekkor a görbület

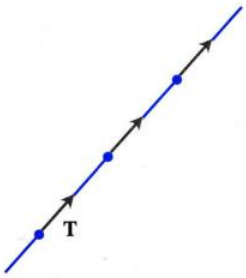
$$\begin{aligned}\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| &= \left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}\right| && \text{láncszabály}\\ &= \frac{1}{|ds/dt|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| \\ &= \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|. && \frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}|\end{aligned}$$

Görbület kiszámolása

Ha $\mathbf{r}(t)$ egy sima görbe, akkor a görbülete

$$\kappa = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|, \tag{13.20}$$

ahol $\mathbf{T} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ a normált érintővektor.



13.20. ÁBRA: Egyenes mentén **T** mindig ugyanarra mutat. A görbület $|d\mathbf{T}/ds| = 0$ (1. példa).

Hogy kipróbáljuk a definíciót, nézzük meg egy egyenes és egy kör görbületét. Az 1. és 2. példában látni fogjuk, hogy ezeknek a görbülete konstans.

1. PÉLDA: **Egyenes görbülete nulla**

Egy egyenes mentén a **T** érintővektor mindig azonos irányba mutat (13.20. ábra), a komponensei konstansok. Ezért $|d\mathbf{T}/ds| = |\mathbf{0}| = 0$. □

2. PÉLDA: **Az a sugarú kör görbülete $1/a$**

Tekintsük az a sugarú kör paraméteres előállítását:

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j}.$$

Ekkor

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(a\sin t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j},$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} = \sqrt{a^2} = |a| = a. \qquad \text{mivel } a > 0,\ |a| = a$$

Ezek alapján a normált érintővektor és a deriváltja:

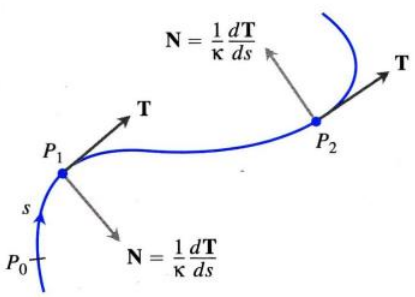
$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -(\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j},$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -(\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j},$$

$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1.$$

Így a t paraméter tetszőleges értékére

$$\kappa = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \frac{1}{a}\cdot 1 = \frac{1}{a}.$$ □



13.21. ÁBRA: A $d\mathbf{T}/ds$ vektor merőleges a görbe érintőjére, és mindig abba az irányba mutat, amerre a görbe fordul. **N** az ezzel párhuzamos egységvektor.

Bár a görbületre vonatkozó (13.20) képlet alkalmazható a térben is, a következő fejezetben mutatunk egy olyan formulát, amellyel általában egyszerűbb kiszámolni egy térgörbe görbületét.

A **T** érintővektorra merőleges vektorok közül az egyiket megkülönböztetett figyelmünkkel tüntetjük ki: azt, amelyik arra mutat, amerre a görbe kanyarodik. Mivel **T** konstans hosszúságú (nevezetesen $|\mathbf{T}| = 1$), a $d\mathbf{T}/ds$ derivált merőleges **T**-re. (Lásd a 13.1. részt.) Így, ha elosztjuk $d\mathbf{T}/ds$-t a hosszával, amely κ, egy **T**-re merőleges **N** *egységvektort* kapunk (13.21. ábra).

DEFINÍCIÓ: **A normált főnormális (N)**

Egy olyan pontban, amelyben $\kappa \neq 0$, a sima síkgörbe **normált főnormálisa**

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds}.$$

A $d\mathbf{T}/ds$ vektor abba az irányba mutat, amerre **T** fordul, ahogy a görbe hajlik. Ha a görbe ívhossz szerinti növekvő irányába nézünk, akkor $d\mathbf{T}/ds$ balra mutat, ha a **T** az óramutató járásával ellentétes irányba fordul, és jobbra, ha **T** az óramutató járásával egyező irányba fordul. Másképp fogalmazva az **N** normált főnormális a görbe konkáv oldala felé mutat (13.21. ábra).

Ha az $\mathbf{r}(t)$ sima görbe egy t, ívhossztól különböző változóval van paraméterezve, akkor a láncszabály segítségével így kaphatjuk meg **N**-t közvetlenül:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|}$$

$$= \frac{(d\mathbf{T}/dt)(dt/ds)}{|d\mathbf{T}/dt||dt/ds|}$$

$$= \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}. \qquad \text{egyszerűsíthetünk, mivel } \frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} > 0$$

Ezzel a képlettel κ és s kiszámolása nélkül számolhatjuk ki **N**-t.

A normált főnormálisra (N) vonatkozó formula

Az $\mathbf{r}(t)$ sima görbe normált főnormálisa

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}, \tag{13.21}$$

ahol $\mathbf{T} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ a görbe normált érintővektora.

3. PÉLDA: **T és N meghatározása**

Határozzuk meg a **T** és **N** vektorfüggvényeket az

$$\mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j}$$

körpályán való mozgás esetén!

Megoldás: **T**-vel kezdjük:

$$\mathbf{v} = -(2\sin 2t)\mathbf{i} + (2\cos 2t)\mathbf{j}$$
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t} = 2$$
$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -(\sin 2t)\mathbf{i} + (\cos 2t)\mathbf{j}.$$

Innen

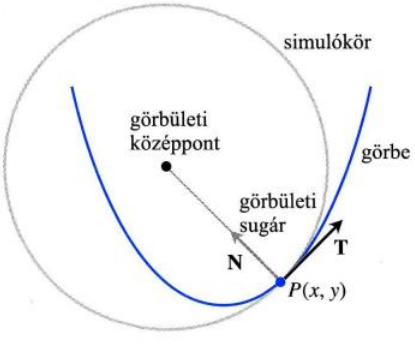
$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = -(2\cos 2t)\mathbf{i} - (2\sin 2t)\mathbf{j}$$
$$\left|\frac{d\mathbf{t}}{dt}\right| = \sqrt{4\cos^2 2t + 4\sin^2 2t} = 2,$$

és végül

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} = -(\cos 2t)\mathbf{i} - (\sin 2t)\mathbf{j}. \qquad \text{(13.21) alapján}$$

Figyeljük meg, hogy $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$, azaz **N** tényleg merőleges **T**-re. Az is látható, hogy a tárgyalt körmozgás esetén az **N** normált főnormális a görbéről a kör középpontja felé mutat. □

A simulókör



13.22. ÁBRA: A $P(x,y)$-beli simulókör a görbe belső oldalán helyezkedik el.

Egy síkgörbe **simulókköre** egy olyan P pontban, amelyben $\kappa \neq 0$, egy olyan kör, amely

1. érinti a görbét P-ben (azaz ugyanaz az érintője, mint a görbének),
2. görbülete megegyezik a görbe P-beli görbületével,
3. a görbe konkáv, vagyis belső oldalán helyezkedik el (13.22. ábra).

A P pontbeli **görbületi sugár** a simulókör sugara, amelyet ρ-val („ró") jelölünk. A 2. példa szerint

$$\text{görbületi sugár} = \rho = \frac{1}{\kappa}.$$

A görbületi sugarat ezek szerint úgy határozhatjuk meg, hogy kiszámoljuk κ-t, és vesszük a reciprokát. A görbe P-beli **görbületi középpontja** a simulókör közepe.

4. PÉLDA: Egy parabola simulóköre

Keressük meg, és ábrázoljuk az $y = x^2$ parabola origóbeli simulókörét!

Megoldás: A parabola $t = x$ paraméter szerinti paraméterezése

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}.$$

A (13.20) képlettel kiszámoljuk a parabola origóbeli görbületét:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1+4t^2},$$

így

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = (1+4t^2)^{-1/2}\mathbf{i} + 2t(1+4t^2)^{-1/2}\mathbf{j}.$$

Innen

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -4t(1+4t^2)^{-3/2}\mathbf{i} + \left(2(1+4t^2)^{-1/2} - 8t^2(1+4t^2)^{-3/2}\right)\mathbf{j}.$$

Az origóban $t = 0$, azaz a görbület

$$\kappa(0) = \frac{1}{|\mathbf{v}(0)|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}(0)\right| \qquad \text{(1) alapján}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1}}|0\mathbf{i} + 2\mathbf{j}|$$
$$= \sqrt{0^2+2^2} = 2.$$

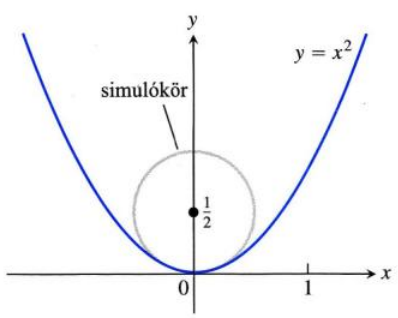
A görbületi sugár $1/\kappa = 1/2$, és a görbületi középpont $(0,\ 1/2)$. (Lásd a 13.23. ábrát.) A simulókör egyenlete

$$(x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

vagy egyszerűsítve

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

A 13.23. ábrán látható, hogy a simulókör sokkal jobban közelíti a parabolát, mint az $y = 0$ egyenletű érintőegyenes. □



13.23. ÁBRA: Az $y = x^2$ parabola origóbeli simulóköre (4. példa).

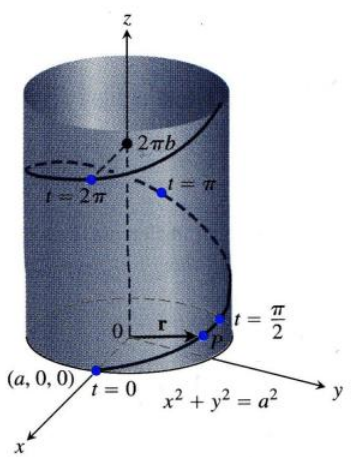
Térgörbék görbülete és főnormálisa

Tekintsük a t-vel paraméterezett $\mathbf{r}(t)$ térgörbét, és legyen s az ívhossz paraméter. Ekkor a normált érintővektor $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. A térgörbe **görbületét**

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| \tag{13.22}$$

definiálja, hasonlóan a síkgörbékhez. A $d\mathbf{T}/ds$ vektor merőleges $\mathbf{T}$-re, és ha ezt normáljuk, megkapjuk a **normált főnormálist**:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}. \tag{13.23}$$



13.24. ÁBRA: Az

$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$

egyenletű spirál $t \geq 0$ része pozitív a és b mellett (5. példa).

5. PÉLDA: A spirál görbülete

Határozzuk meg az

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}, \qquad a, b \geq 0, \qquad a^2 + b^2 \neq 0$$

egyenletű spirál görbületét!

Megoldás: Számoljuk ki T-t a sebességvektorból:

$$\mathbf{v} = -(a\sin t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j} + b\mathbf{k},$$
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2},$$
$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big(-(a\sin t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j} + b\mathbf{k}\Big).$$

A (13.22) képlet szerint

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left|\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big(-(a\cos t)\mathbf{i} - (a\sin t)\mathbf{j}\Big)\right| \\ &= \frac{a}{a^2+b^2}\left|-(\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j}\right| \\ &= \frac{a}{a^2+b^2}\sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = \frac{a}{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy ha rögzített a mellett b értékét növeljük, akkor a görbület csökken. Ezt úgy is értelmezhetjük, hogy ha egy rugót széthúzunk, azzal kiegyenesedik.

Ha $b = 0$, akkor a spirál egy a sugarú körré nyomódik össze, és a görbülete $1/a$ lesz. Ha $a = 0$, akkor a görbe a z-tengellyé egyenesedik ki, görbülete pedig 0 lesz, ahogy vártuk. □

6. PÉLDA: **A spirál normált főnormálisa**

Keressük meg az 5. példában szereplő spirál normált főnormálisát!

Megoldás:

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\big((a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j}\big), \qquad \text{az 5. példából}$$

$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} \qquad \text{a (13.23) képletből} \\ &= -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\big((a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j}\big) \\ &= -(\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

□

Vegyük észre, hogy a görbe minden pontjában a z-tengely felé mutat.

13.4. Feladatok

Síkgörbék

Keressük meg $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ és κ értékét az 1–4. feladatban szereplő síkgörbéknél!

1. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (\ln\cos t)\mathbf{j}, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
2. $\mathbf{r}(t) = (\ln\sec t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
3. $\mathbf{r}(t) = (2t+3)\mathbf{i} + (5-t^2)\mathbf{j}$
4. $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j}, \quad t > 0$
5. **Az xy-síkban fekvő görbe görbülete:**

   (a) Az xy-síkban fekvő $y = f(x)$ függvény grafikonjának természetes paraméterezését adja az $x = x$, $y = f(x)$, és ezzel $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$ a grafikon helyvektoros előállítása. Mutassuk meg, hogy ha f kétszer differenciálható függvény, akkor

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{\big(1+(f'(x))^2\big)^{3/2}}.$$

   (b) Az (a) pontban bebizonyított képlet segítségével számoljuk ki az $y = \ln(\cos x)$, $-\pi/2 < x < \pi/2$ függvény görbületét! Hasonlítsuk össze az eredményt az 1. feladat eredményével!

   (c) Lássuk be, hogy egy inflexiós pontban a görbület 0!

6. Paraméteres síkgörbe görbülete:

(a) Tekintsük az $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ síkgörbét, ahol $x = f(t)$ és $y = g(t)$ kétszer differenciálható függvények! Mutassuk meg, hogy a síkgörbe görbülete

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

A képlet segítségével számoljuk ki a következő görbék görbületét:

(b) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (\ln(\sin t))\mathbf{j}, \quad 0 < t < \pi,$

(c) $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} t))\mathbf{i} + (\ln(\operatorname{ch} t))\mathbf{j}.$

7. Síkgörbék normálisa:

(a) Mutassuk meg, hogy mind az $\mathbf{n}(t) = -g'(t)\mathbf{i} + f'(t)\mathbf{j}$, mind a $-\mathbf{n}(t) = g'(t)\mathbf{i} - f'(t)\mathbf{j}$ vektor merőleges az $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ görbére az $(f(t), g(t))$ pontban!
N kiszámolásához vegyük az (a) részben megtalált **n** és $-\mathbf{n}$ vektorok közül azt, amelyik a görbe konkáv oldala felé mutat, és ezt a hosszával elosztva tegyük egységvektorrá (13.21. ábra). Ennek az eljárásnak a segítségével keressük meg a következő görbék **N** normált főnormálisát:

(b) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j},$

(c) $\mathbf{r}(t) = \sqrt{4 - t^2}\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad -2 \le t \le 2.$

8. *(A 7. feladat folytatása.)*

(a) A 7. feladat eljárását használva keressük meg **N**-t az $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1/3)t^3\mathbf{j}$ görbénél $t < 0$, illetve $t > 0$ esetén.

(b) Számítsuk ki

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}, \qquad t \neq 0$$

értékét az (a) részben definiált görbére! Létezik **N** a $t = 0$ pontban is? Rajzoljuk le a görbét, és magyarázzuk meg, mi történik **N**-el ahogy t negatívból pozitívra vált.

Térgörbék

Határozzuk meg a **T**, **N** és κ mennyiségeket (9–16. feladat)!

9. $\mathbf{r}(t) = (3\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$

10. $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

11. $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = (6\sin 2t)\mathbf{i} + (6\cos 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = (t^3/3)\mathbf{i} + (t^2/2)\mathbf{j}, \quad t > 0$

14. $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}, \quad 0 < t < \pi/2$

15. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (a\operatorname{ch}(t/a))\mathbf{j}, \quad a > 0$

16. $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{ch} t)\mathbf{i} - (\operatorname{sh} t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

Görbület

17. Mutassuk meg, hogy az $y = ax^2$, $a \neq 0$ parabola maximális görbületű pontja a csúcspontja, míg a görbülete sehol sem minimális! (Mivel a görbület azonos marad, ha a görbét eltoljuk vagy elforgatjuk, ez minden parabolára igaz.)

18. Mutassuk meg, hogy az $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $a > b > 0$ ellipszis nagytengelyének két végpontjában maximális, kistengelyének két végpontjában minimális a görbület! (Ahogy a 17. feladatban, ez is igaz minden ellipszisre.)

19. Spirál maximális görbülete: Az 5. példában megmutattuk, hogy az $\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$, $(a, b \ge 0)$ spirál görbülete $\kappa = a/(a^2 + b^2)$. Rögzített b esetén mi κ legnagyobb értéke? Válaszát indokolja!

20. Teljes görbület: Egy görbe s_0 és s_1 pontok közötti **teljes görbülete** κ integrálja s_0 és s_1 között. Ha a görbe valamely más t változóval van paraméterezve, akkor a teljes görbület

$$K = \int_{s_0}^{s_1} \kappa\, ds = \int_{t_0}^{t_1} \kappa \frac{ds}{dt}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \kappa |\mathbf{v}|\, dt,$$

ahol t_0, t_1 az s_0, s_1 kezdő- és végpontnak megfelelő érték. Keressük meg a következő görbedarabok teljes görbületét:

(a) $\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 4\pi,$

(b) $y = x^2, \quad -\infty < x < \infty.$

21. Írjuk fel az $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$ görbe $(\pi/2, 1)$ pontbeli simulókörének egyenletét! (A görbe az $y = \sin x$ függvény grafikonját paraméterezi.)

22. Írjuk fel az $\mathbf{r}(t) = (2\ln t)\mathbf{i} - (t + 1/t)\mathbf{j}$, $e^{-2} \le t \le e^2$ görbe $(0, -2)$ (azaz $t = 1$) pontbeli simulókörének egyenletét!

Számítógépes ábrázolás

Az 5. feladatban bebizonyított

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{3/2}}$$

képlettel megkapjuk az $y = f(x)$ kétszer differenciálható függvény grafikonjának görbületét az x függvényeként. Keressük meg a 23–26. feladatban megadott függvénygrafikonok görbületfüggvényét, majd ábrázoljuk számítógéppel $f(x)$-et és $\kappa(x)$-et a megadott intervallumon! Találunk valami meglepőt?

23. $y = x^2, \quad -2 \le x \le 2$ **24.** $y = x^4/4, \quad -2 \le x \le 2$

25. $y = \sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi$ **26.** $y = e^x, \quad -1 \le x \le 2$

A simulókör számítógépes vizsgálata

A 27–34. feladatban síkgörbék simulókörét vizsgáljuk valamelyik matematikai program használatával. Hajtsuk végre a következő lépéseket:

(a) Ábrázoljuk a paraméteres, vagy függvénygrafikonként definiált görbéket a megadott intervallumon!

(b) Az 5. vagy a 6. feladatban tárgyalt képlettel számoljuk ki a κ görbületet a görbe megadott t_0 pontjában! Használjuk az $x = t$ és $y = f(t)$ paraméterezést az $y = f(x)$ formában megadott görbéknél!

(c) Keressük meg a t_0-beli **N** normált főnormálist! Figyeljük meg, hogy **N** komponenseinek előjele attól függ, hogy a görbe **T** normált érintővektora pozitív vagy negatív irányba fordul a $t = t_0$ pontnál. (Lásd a 7. feladatot.)

(d) Jelöljük $\mathbf{C} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$-vel a simulókör (a,b) középpontjába mutató vektort. Számoljuk ki **C**-t a

$$\mathbf{C} = \mathbf{r}(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\mathbf{N}(t_0)$$

képlet használatával! ($\mathbf{r}(t_0)$ a görbe $P(x_0, y_0)$ pontjába mutató helyvektor.)

(e) Rajzoltassuk ki az $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1/\kappa^2$ egyenletű simulókört, majd rajzoltassuk ki a simulókört és a görbét közös koordináta-rendszerben! A képernyőre kirajzolt ablak beállításánál ügyeljünk arra, hogy a két koordinátatengely lépésköze azonos legyen!

27. $\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (5\sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad t_0 = \pi/4$

28. $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad t_0 = \pi/4$

29. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^3 - 3t)\mathbf{j}, \quad -4 \le t \le 4, \quad t_0 = 3/5$

30. $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 2t^2 - t)\mathbf{i} + \dfrac{3t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}, \quad -2 \le t \le 5, \quad t_0 = 1$

31. $\mathbf{r}(t) = (2t - \sin t)\mathbf{i} + (2 - 2\cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 3\pi, \quad t_0 = 3\pi/2$

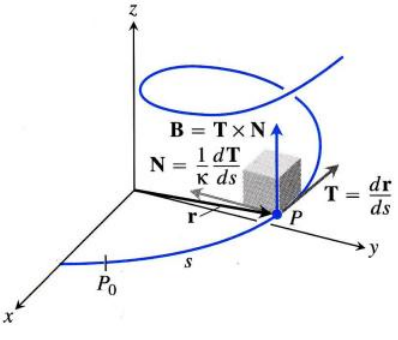
32. $\mathbf{r}(t) = (e^{-t}\cos t)\mathbf{i} + (e^{-t}\sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 6\pi, \quad t_0 = \pi/4$

33. $y = x^2 - x, \quad -2 \le x \le 5, \quad x_0 = 1$

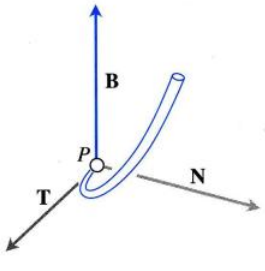
34. $y = x(1-x)^{2/5}, \quad -1 \le x \le 2, \quad x_0 = 1/2$

13.5. Torzió és a normált binormális

Egy térben mozgó űrhajó mozgásának leírásához a koordináta-rendszer **i**, **j** és **k** vektorai nem a legpraktikusabbak. Célszerűbb lenne olyan koordináta-rendszert választani, amelynek első alapvektora a mozgás irányába mutat (ez a **T** normált érintővektor), a második a pálya fordulásának irányába (ez az **N** normált főnormális), míg a harmadik arra, amerre az űrhajó „kifordul" a **T** és **N** vektorok által meghatározott síkból. Ezt a harmadik vektort, a görbe *binormálisát* $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ definiálja. Ha felírjuk az űrhajó gyorsulásvektorát ebben, az űrhajóval együtt mozgó koordináta-rendszerben, azaz a **TNB** egymásra merőleges vektorokból álló alaprendszerben (13.25. ábra), akkor ezekből a koordinátákból kiolvashatjuk az űrhajó mozgásának legfőbb jellemzőit.



13.25. ÁBRA: A mozgó ponttal együtt utazó, **TNB** vektorok által alkotott derékszögű koordináta-rendszer.



13.26. ÁBRA: A **T**, **N** és **B** vektorok (ebben a sorrendben) jobbsodrású derékszögű koordináta-rendszert alkotnak a térben.

Torzió

Egy térgörbe **binormálisa** $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$, amely egy **T**-re és **N**-re is merőleges egységvektor (13.26. ábra). E három vektor, **T**, **N** és **B** egy, a részecskével együtt mozgó jobbsodrású derékszögű koordináta-rendszert alkot, amely fontos szerepet játszik a pályán mozgó részecske mozgásának leírásában. A **T**, **N** és **B** vektorok együttes neve **kisérő tríéder**, vagy **Frenet-bázis** (ejtsd: „frené").

Vizsgáljuk meg a $d\mathbf{B}/ds$ vektor **T**-hez, **N**-hez és **B**-hez való viszonyát. A vektoriális szorzat differenciálási szabályából

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds}.$$

Mivel **N** ugyanabba az irányba mutat, mint $d\mathbf{T}/ds$, ezért $(d\mathbf{T}/ds) \times \mathbf{N} = \mathbf{0}$ és

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \mathbf{0} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds}.$$

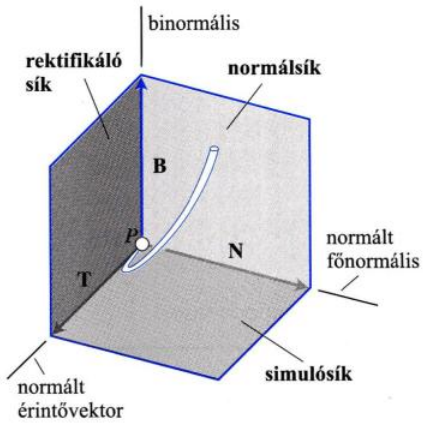
Innen látható, hogy $d\mathbf{B}/ds$ merőleges **T**-re, hiszen a vektoriális szorzat merőleges a tényezőire.

Mivel $d\mathbf{B}/ds$ merőleges **B**-re is (ugyanis **B** konstans hosszúságú), $d\mathbf{B}/ds$ merőleges a **B** és **T** által kifeszített síkra. Másképp fogalmazva $d\mathbf{B}/ds$ párhuzamos **N**-nel, azaz konstansszorosa:

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}.$$

A negatív előjel megállapodás kérdése. Az egyenletben szereplő τ skalár neve a görbe *torziója*. Mivel

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N} = -\tau\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = -\tau \cdot 1 = -\tau,$$



13.27. ÁBRA: A **T**, **N** és **B** vektorok által kifeszített síkok elnevezése.

ezért

$$\tau = -\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N}.$$

DEFINÍCIÓ: Torzió

Legyen $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$. A sima görbe **torziója**

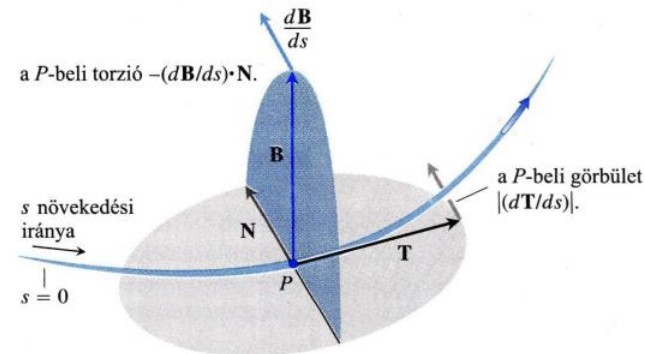
$$\tau = -\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N}. \tag{13.24}$$

Ellentétben a görbülettel, amely soha sem negatív, a torzió lehet pozitív, nulla vagy negatív is.

A **T**, **N** és **B** vektorok által kifeszített három sík elnevezését a 13.27. ábra mutatja. A $\kappa = |d\mathbf{T}/ds|$ görbületre gondolhatunk úgy, mint a normálsík fordulásának sebessége, ahogy P előre mozog a pályán. Hasonlóan, a $\tau = -(d\mathbf{B}/ds) \cdot \mathbf{N}$ torzió a simulósík **T** körüli forgásának a sebessége. A torzió azt méri, hogy a görbe mennyire csavarodik ki a simulósíkból.

Ha a görbére egy mozgó test pályájaként tekintünk, $|d\mathbf{T}/ds|$ megmutatja, hogy a pálya mennyit fordul jobbra vagy balra, ahogy a test mozog. Ezt a pálya *görbületének* nevezzük. A $-(d\mathbf{B}/ds) \cdot \mathbf{N}$ szám a test csavarodását méri a mozgás pillanatnyi síkjából. Ez a pálya *torziója*.

Tekintsük a 13.28. ábrát. Legyen P egy mozdony, amely egy kanyarban kapaszkodik felfelé egy emelkedőn. A mozdony lámpája által előrevetített fénysugár egységnyi megtett út alatt történő elfordulása a sínpálya görbülete. A torzió pedig annak a mértéke, hogy a mozdony milyen gyorsan lép ki a **T** és **N** által kifeszített síkból.



13.28. ÁBRA: A mozgó test által meghatározott kisérő triéder segít a test pályájának geometriai elemzésében.

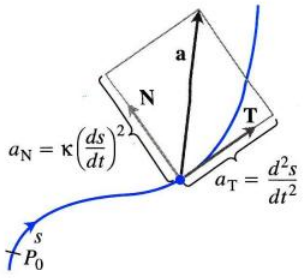
A gyorsulásvektor érintő- és főnormális irányú komponense

Ha egy testre gyorsító erő hat, legyen az akár a gravitáció, fékek, rakétamotor, általában tudni szeretnénk, hogy mekkora gyorsulás hat a mozgás, azaz **T** irányában. Hogy ezt meghatározhassuk, írjuk át **v**-t a láncszabály segítségével

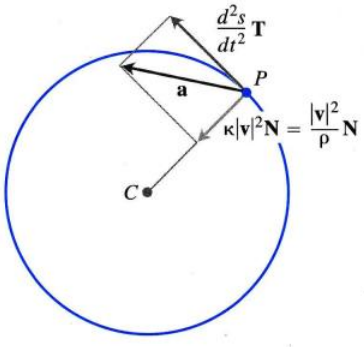
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{T}\frac{ds}{dt}$$

alakba, majd differenciáljuk az egyenlőség két végét:

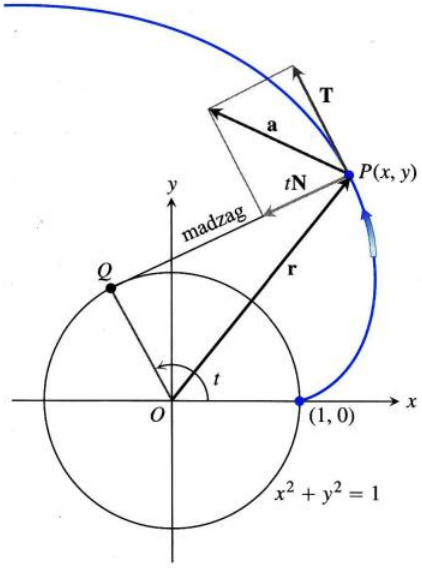
$$\begin{aligned}
\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{T}\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{dt} \\
&= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\left(\frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\left(\kappa\mathbf{N}\frac{ds}{dt}\right) \qquad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N} \\
&= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}.
\end{aligned}$$



13.29. ÁBRA: A gyorsulásvektor érintő- és főnormális irányú komponense. A gyorsulásvektor mindig **T** és **N** síkjában fekszik, azaz merőleges **B**-re.



13.30. ÁBRA: A gyorsulásvektor érintő- és főnormális irányú komponense, ahogy egy test egyre gyorsulva egy ρ sugarú körpályán mozog.



13.31. ÁBRA: Az $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j}$, $t > 0$ mozgás gyorsulásvektorának érintő- és főnormális irányú komponense. Ha egy rögzített körre feltekert madzagot letekerünk, a madzag P végpontja által rajzolt pálya a kör evolvense (1. példa).

DEFINÍCIÓ: A gyorsulásvektor érintő- és főnormális irányú komponense

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}, \tag{13.25}$$

ahol

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}|\mathbf{v}| \qquad \text{és} \qquad a_N = \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \kappa|\mathbf{v}|^2 \tag{13.26}$$

a gyorsulásvektor **érintő-** és **főnormális irányú** komponense.

Figyeljük meg, hogy a gyorsulásvektor (13.25)-beli előállításában nem szerepel **B** irányú komponens. Bárhogy is forog, pörög a térben a test, az **a** gyorsulásvektora *mindig a* **T** *és* **N** *által alkotott síkban fekszik*, azaz merőleges **B**-re. A (13.26) egyenletből az is leolvasható, hogy mekkora gyorsulás hat a test mozgásának az irányába (d^2s/dt^2), és mekkora a főnormális irányába ($\kappa(ds/dt)^2$). (Lásd a 13.29. ábrát.)

Most nézzük meg, a mozgásra vonatkozó milyen információt olvashatunk ki a (13.26) képletből. A definíció szerint a gyorsulás a sebesség változását jelenti, pontosabban a sebesség nagyságának és irányának a változását. A gyorsulásvektor érintőirányú a_T komponense méri a **v** sebességvektor *hosszának* (azaz a sebesség nagyságának) a változását, míg a főnormális irányú a_N komponens **v** *irányának* a változását mutatja.

A gyorsulásvektor főnormális irányú komponense a görbe görbületének és a sebesség *négyzetének* szorzata. Ez megmagyarázza, hogy miért kell kapaszkodnunk a kanyarban, ha az autónk éles fordulót (magas κ) hajt végre nagy sebességgel (nagy $|\mathbf{v}|$). Ha megduplázzuk az autó sebességét, akkor ugyanabban a kanyarban a gyorsulás főnormális irányú komponense a négyszeresére nő.

Ha egy test állandó sebességgel körpályán mozog, akkor $d^2s/dt^2 = 0$, azaz a gyorsulásvektor **N**-el megegyező irányú, a kör középpontja felé mutat. Ha a test sebessége növekszik vagy csökken, akkor **a** érintőirányú komponense nullától különböző lesz (13.30. ábra).

a_N kiszámolását általában az $a_N = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - {a_T}^2}$ képlettel végezzük, amely az $|\mathbf{a}|^2 = {a_T}^2 + {a_N}^2$ Pitagorasz-tételből következik. Így ki tudjuk számolni a_N-t κ kiszámolása nékül is.

A gyorsulásvektor főnormális irányú komponensének kiszámolása

$$a_N = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - {a_T}^2} \tag{13.27}$$

1. PÉLDA: **A gyorsulásvektor a_T és a_N komponense**

Írjuk (**T** és **N** meghatározása nélkül) az

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j}, \qquad t > 0$$

helyvektorral definiált mozgás gyorsulásvektorát $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ alakba! (A mozgás pályája a 13.31. ábrán látható evolvens.)

Megoldás: A (13.26)-beli első képlettel megkeressük a_T-t:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t + \sin t + t\cos t)\mathbf{i} + (\cos t - \cos t + t\sin t)\mathbf{j} \\
&= (t\cos t)\mathbf{i} + (t\sin t)\mathbf{j}, \\
|\mathbf{v}| &= \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} = \sqrt{t^2} = |t| = t, \qquad t > 0 \\
a_T &= \frac{d}{dt}|\mathbf{v}| = \frac{d}{dt}(t) = 1. \qquad \text{(13.26)-ból}
\end{aligned}$$

Miután kiszámoltuk a_T-t, (13.27) segítségével megkeressük a_N-t:

$$\mathbf{a} = (\cos t - t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t + t\cos t)\mathbf{j},$$
$$|\mathbf{a}|^2 = t^2 + 1, \qquad \text{némi számolással}$$
$$a_N = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - {a_T}^2}$$
$$= \sqrt{(t^2+1)-(1)} = \sqrt{t^2} = t.$$

Végül (13.25) alapján

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N} = 1\mathbf{T} + t\mathbf{N} = \mathbf{T} + t\mathbf{N}. \qquad \square$$

Képletek térgörbék görbületére és torziójára

Már definiáltuk sima görbék görbületét és torzióját, most egy könnyebben használható formulát mutatunk ezek kiszámolására. A (13.25) egyenlet alapján

$$\mathbf{v}\times\mathbf{a} = \left(\frac{ds}{dt}\mathbf{T}\right)\times\left[\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}\right] \qquad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}$$
$$= \left(\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\right)(\mathbf{T}\times\mathbf{T}) + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^3(\mathbf{T}\times\mathbf{N})$$
$$= \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\mathbf{B}. \qquad \mathbf{T}\times\mathbf{T} = \mathbf{0} \text{ és } \mathbf{T}\times\mathbf{N} = \mathbf{B}$$

Innen az következik, hogy

$$|\mathbf{v}\times\mathbf{a}| = \kappa\left|\frac{ds}{dt}\right|^3|\mathbf{B}| = \kappa|\mathbf{v}|^3. \qquad \frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}| \quad \text{és} \quad |\mathbf{B}| = 1$$

Az egyenletből κ-t kifejezve megkapjuk a következő képletet:

Vektorszorzatos képlet a görbületre

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} \qquad (13.28)$$

A (13.28) képlet segítségével kiszámolhatjuk a görbületet, azaz a görbe egy geometriai tulajdonságát a görbén mozgó részecske sebesség- és gyorsulásvektorából, amennyiben a görbe adott reprezentációjában $|\mathbf{v}|$ nullától különböző. Gondoljuk meg, miről is van szó? Bárhogy is mozog egy test az adott görbe mentén (amíg a sebessége nem nulla), egy olyan értéket számolhatunk ki a sebesség- és gyorsulásvektorából, amely csak a görbétől függ, a konkrét mozgástól nem.

A torzió kiszámolására leggyakrabban használt képlet, amelynek bizonyításával ebben a könyvben nem foglalkozunk, a következő:

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|^2} \qquad (\text{ha } \mathbf{v}\times\mathbf{a} \neq \mathbf{0}). \qquad (13.29)$$

Newton jelölése az idő szerinti deriváltakra
A (13.29) egyenletben szereplő pontok idő szerinti deriváltakat jelölnek. Így $\dot{x}$ jelentése dx/dt, $\ddot{x}$ jelentése d^2x/dt^2, illetve $\dddot{x}$ jelentése d^3x/dt^3. Hasonlóan $\dot{y} = dy/dt$ stb.

E képlettel közvetlenül számolhatjuk ki a torziót az $\mathbf{r}$-t összetevő $x = f(t)$, $y = g(t)$ és $z = h(t)$ komponensek deriváltjaiból. A determináns első sora $\mathbf{v}$ koordinátáiból, a második $\mathbf{a}$ koordinátáiból, a harmadik pedig $\dot{\mathbf{a}} = d\mathbf{a}/dt$ koordinátáiból áll.

2. PÉLDA: **A görbület és torzió kiszámolása**

A (13.28) és (13.29) egyenlet segítségével számoljuk ki az

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}, \qquad a, b \geq 0, \qquad a^2 + b^2 \neq 0$$

spirál görbületét és torzióját!

Megoldás: A görbületet a (13.28) képlet segítségével határozzuk meg:

$$\mathbf{v} = -(a\sin t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j} + b\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a} = -(a\cos t)\mathbf{i} - (a\sin t)\mathbf{j},$$

$$\mathbf{v}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (ab\sin t)\mathbf{i} - (ab\cos t)\mathbf{j} + a^2\mathbf{k},$$

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} = \frac{\sqrt{a^2b^2+a^4}}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{a}{a^2+b^2}. \tag{13.30}$$

Ha összehasonlítjuk a (13.30) egyenletben kijött eredményt a 13.4. rész 5. példájával, láthatjuk, hogy ugyanazt kapjuk, amelyet ott közvetlenül a definíció alkalmazásával.

A torzió (13.29) alapján történő kiszámolásához először határozzuk meg a determinánsban szereplő deriváltakat. Már ismerjük **v**-t és **a**-t, és

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = (a\sin t)\mathbf{i} - (a\cos t)\mathbf{j}.$$

Ez alapján

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|^2} = \frac{\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}}{\left(a\sqrt{a^2+b^2}\right)^2} \qquad |\mathbf{v}\times\mathbf{a}| \text{ értéke (13.30)-ból}$$

$$= \frac{b(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Azt látjuk, hogy a spirál torziója konstans. Valójában az a tulajdonság, hogy a görbület és a torzió konstans, a térgörbék közül egyedül a spirálra jellemző. □

A térgörbékre vonatkozó formulák

Normált érintővektor: $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

Normált főnormális: $\mathbf{N} = \dfrac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}$

Binormális: $\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$

Görbület: $\kappa = \left|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \dfrac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}$

Torzió: $\tau = -\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}\cdot\mathbf{N} = \dfrac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|^2}$

A gyorsulásvektor érintő- és főnormális irányú komponense:

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$$

$$a_T = \frac{d}{dt}|\mathbf{v}|$$

$$a_N = \kappa|\mathbf{v}|^2 = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - {a_T}^2}$$

13.5. Feladatok

Torzió és binormális

Az 1–8. feladatban szereplő térgörbéknél már kiszámoltuk **T**, **N** és κ értékét a 13.4. rész 9–16. feladataiban. Most keressük meg **B**-t és τ-t!

1. $\mathbf{r}(t) = (3\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$

2. $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

3. $\mathbf{r}(t) = (e^t\cos t)\mathbf{i} + (e^t\sin t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

4. $\mathbf{r}(t) = (6\sin 2t)\mathbf{i} + (6\cos 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$

5. $\mathbf{r}(t) = (t^3/3)\mathbf{i} + (t^2/2)\mathbf{j}, \quad t > 0$

6. $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}, \quad 0 < t < \pi/2$

7. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (a\,\mathrm{ch}(t/a))\mathbf{j}, \quad a > 0$

8. $\mathbf{r}(t) = (\mathrm{ch}\,t)\mathbf{i} - (\mathrm{sh}\,t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

A gyorsulásvektor érintő- és főnormális irányú komponense

Keressük meg az $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ felbontás együtthatóit **T** és **N** kiszámolása nélkül (9. és 10. feladat)!

9. $\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$

10. $\mathbf{r}(t) = (1+3t)\mathbf{i} + (t-2)\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$

Keressük meg az $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ felbontás együtthatóit az adott t pontban (11–14. feladat)!

11. $\mathbf{r}(t) = (t+1)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad t = 1$

12. $\mathbf{r}(t) = (t\cos t)\mathbf{i} + (t\sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad t = 0$

13. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \left(t + (1/3)t^3\right)\mathbf{j} + \left(t - (1/3)t^3\right)\mathbf{k}, \quad t = 0$

14. $\mathbf{r}(t) = \left(e^t\cos t\right)\mathbf{i} + \left(e^t\sin t\right)\mathbf{j} + \sqrt{2}e^t\mathbf{k}, \quad t = 0$

A 15. és 16. feladatban számoljuk ki az **r**, **T**, **N** és **B** vektorokat t adott értékére, majd írjuk fel a ponthoz tartozó simulósík, normálsík és rektifikáló sík egyenletét!

15. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad t = \pi/4$

16. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t = 0$

Fizikai alkalmazások

17. Az autónk sebességmérője állandó 45 km/h sebességet mutat. Lehet, hogy az autó gyorsulása mégsem nulla? Válaszát indokolja!

18. Mit mondhatunk egy állandó sebességgel mozgó részecske gyorsulásáról? Válaszát indokolja!

19. Mit mondhatunk egy olyan részecske sebességéről, amelynek a gyorsulása mindig merőleges a sebességvektorára? Válaszát indokolja!

20. Egy m tömegű test egyenletes 10 egység/másodperc sebességgel mozog az $y = x^2$ parabolapályán. Mekkora erő gyorsítja a testet a $(0,0)$, illetve a $(\sqrt{2},2)$ pontban? (Az erőt vektor formában határozzuk meg, használva Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ mozgástörvényét.)

21. A következő idézet a *The American Mathematical Monthly* folyóirat Robert Osserman: „Curvature in the Eighties" című cikkéből származik (1990. október, 731. oldal).

> „A görbület a fizikában is fontos szerepet játszik. Egy tárgy görbe pályán, állandó sebességgel mozgatásához szükséges erő nagysága – Newton mozgástörvényei alapján – a pálya görbületének konstansszorosa."

Magyarázzuk meg, hogy az idézet második mondata miért igaz!

22. Mutassuk meg, hogy ha egy mozgó részecske gyorsulásvektorának főnormális irányú komponense nulla, akkor a pályája egyenes!

23. A görbületszámolás máshogy: Ha ismerjük a_N és $|\mathbf{v}|$ értékét, akkor az $a_N = \kappa|\mathbf{v}|^2$ képletből kényelmesen kiszámolhatjuk a görbületet. Számoljuk ki ezzel a módszerrel az

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j}, \qquad t > 0$$

görbe görbületét! (Az 1. példából megtudhatjuk a_N-t és $|\mathbf{v}|$-t.)

24. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + At)\mathbf{i} + (y_0 + Bt)\mathbf{j} + (z_0 + Ct)\mathbf{k}$$

egyenes görbülete és torziója nulla!

További példák és feladatok

25. Mit mondhatunk egy $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ sima síkgörbe torziójáról? Válaszát indokolja!

26. A spirál torziója: A 2. példában láttuk, hogy az

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}, \qquad a, b \geq 0$$

spirál torziója $\tau = b/(a^2+b^2)$. Rögzített a mellett mennyi a torzió maximuma?

27. A nulla torziójú görbék síkgörbék: Az, hogy egy differenciálható görbe, amelynek a torziója nulla, egy síkban fekszik, speciális esete a következő állításnak: ha egy részecske sebességvektora mindig merőleges valamely **C** rögzített vektorra, akkor a részecske egy **C**-re merőleges síkban mozog. Ez belátható a következő állítás igazolásával:

Legyen $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ kétszer differenciálható a $t \in [a,b]$ intervallumon. Tegyük fel, hogy $\mathbf{r}(a) = \mathbf{0}$, és $\mathbf{v}\cdot\mathbf{k} = 0$ minden $t \in [a,b]$-re. Ekkor $h(t) = 0$, ha $t \in [a,b]$.

Bizonyítsuk ezt be! (*Útmutatás:* Induljunk ki az $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2$ egyenletből, majd használjuk a kezdeti feltételeket.)

28. τ kiszámolása B-ből és v-ből: Ha a $\tau = -(d\mathbf{B}/ds)\cdot\mathbf{N}$ képletben szereplő $d\mathbf{B}/ds$-t a láncszabály segítségével

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{dt}\frac{1}{|\mathbf{v}|}$$

alakba írjuk, akkor a

$$\tau = -\frac{1}{|\mathbf{v}|}\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\cdot\mathbf{N}\right)$$

összefüggéshez jutunk. A képlet előnye, hogy könnyebb bebizonyítani, mint a (13.29) egyenlőséget, viszont általában nehezebb τ-t számítógép nélkül kiszámolni belőle. Számoljuk ki a 2. példában szereplő spirál torzióját az új képlet segítségével!

A görbület, torzió, és a kisérő triéder számítógépes vizsgálata

Számítógép használatával számítsuk ki 4 tizedesjegy pontossággal $\mathbf{v}$, $|\mathbf{v}|$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$, κ, τ, illetve a gyorsulás érintő- és főnormális irányú komponensét az adott t pontban (29–32. feladat)!

29. $\mathbf{r}(t) = (t\cos t)\mathbf{i} + (t\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t = \sqrt{3}$

30. $\mathbf{r}(t) = (e^t\cos t)\mathbf{i} + (e^t\sin t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad t = \ln 2$

31. $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + \sqrt{-t}\mathbf{k}, \quad t = -3\pi$

32. $\mathbf{r}(t) = (3t - t^2)\mathbf{i} + (3t^2)\mathbf{j} + (3t + t^3)\mathbf{k}, \quad t = 1$

13.6. Bolygómozgás és műholdpályák

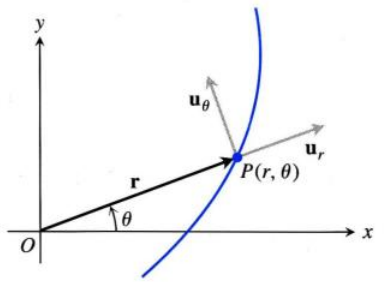
A fejezet utolsó részében levezetjük a bolygómozgásra vonatkozó Kepler-törvényeket Newton mozgás- és gravitációs törvényeiből, majd megvizsgáljuk a Föld körül keringő műholdak pályáit. A Kepler-törvények levezetéséhez szinte mindent felhasználunk, amit az előző fejezetekben elsajátítottunk. Szükségünk lesz térvektorokkal végzett algebrai műveletekre, vektorfüggvények analitikus kezelésére, differenciálegyenletek és kezdetiérték-feladatok megoldására, illetve a kúpszeletek polárkoordinátás leírására is.

Mozgás leírása polár- és hengerkoordináta-rendszerben

Egy polárkoordináta-rendszerben mozgó részecske hely-, sebesség- és gyorsulásvektorát a 13.32. ábrán látható, a részecskével együtt mozgó

$$\mathbf{u}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}, \qquad \mathbf{u}_\theta = -(\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j} \tag{13.31}$$

egységvektorok szerint fejtjük ki. Az $\mathbf{u}_r$ egységvektor az $\overrightarrow{OP}$ vektorral egyező irányú, így $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$. Az $\mathbf{u}_\theta$ vektor merőleges $\mathbf{u}_r$-re, és a θ szög növekedésének irányába mutat.



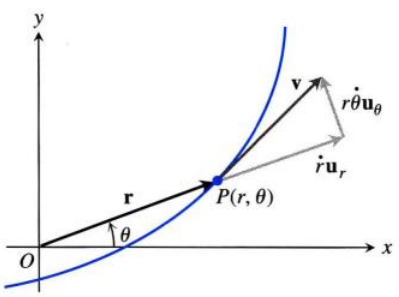
13.32. ÁBRA: Az $\mathbf{r}$ vektor hossza a P pont polárkoordinátás felírásának az r-je. Így $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ felírható $\mathbf{r}/r$ alakban is.
A (13.31) egyenletek $\mathbf{u}_r$-t és $\mathbf{u}_\theta$-t fejtik ki $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ kombinációjaként.

A (13.31)-beli egyenletek alapján

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} &= -(\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j} = \mathbf{u}_\theta, \\ \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} &= -(\cos\theta)\mathbf{i} - (\sin\theta)\mathbf{j} = -\mathbf{u}_r. \end{aligned} \tag{13.32}$$

Differenciáljuk $\mathbf{u}_r$-t és $\mathbf{u}_\theta$-t t szerint, hogy megtudjuk az időben való változásukat. A láncszabály szerint azt kapjuk, hogy

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta}\dot\theta = \dot\theta\mathbf{u}_\theta, \qquad \dot{\mathbf{u}}_\theta = \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta}\dot\theta = -\dot\theta\mathbf{u}_r. \tag{13.33}$$



13.33. ÁBRA: A sebességvektor polárkoordináták szerinti felbontása
$\mathbf{v} = \dot r\mathbf{u}_r + r\dot\theta\mathbf{u}_\theta$.

Így, ahogy a 13.33. ábrán is láthatjuk,

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}_r) = \dot r\mathbf{u}_r + r\dot{\mathbf{u}}_r = \dot r\mathbf{u}_r + r\dot\theta\mathbf{u}_\theta. \tag{13.34}$$

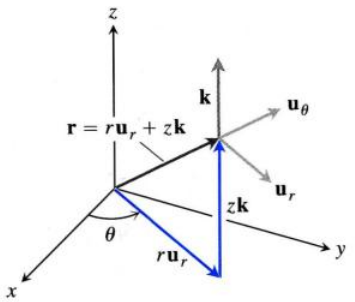
Hogy a képletek rövidek legyenek, az idő szerinti derivált jelölésére a Newton által bevezetett pontokat használjuk, ahogy az előző részben is. Eszerint $\dot{\mathbf{u}}_r = \frac{d\mathbf{u}_r}{dt}$, $\dot\theta = \frac{d\theta}{dt}$ stb.

A gyorsulásvektor

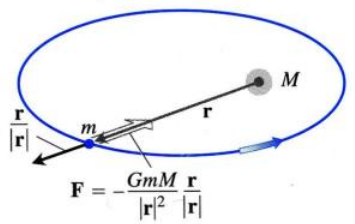
$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = (\ddot r\mathbf{u}_r + \dot r\dot{\mathbf{u}}_r) + (\dot r\dot\theta\mathbf{u}_\theta + r\ddot\theta\mathbf{u}_\theta + r\dot\theta\dot{\mathbf{u}}_\theta). \tag{13.35}$$

Ha a (13.33) egyenletek alapján kiszámoljuk $\dot{\mathbf{u}}_r$-t és $\dot{\mathbf{u}}_\theta$-t, akkor a komponensek szétválogatása után azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{a} = (\ddot r - r\dot\theta^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)\mathbf{u}_\theta. \tag{13.36}$$



13.34. ÁBRA: Az $\mathbf{r}$ helyvektor, és az $\mathbf{r}$ pontbeli bázisvektorok a hengerkoordináta-rendszerben.



13.35. ÁBRA: A gravitációs erő a tömegközéppontokat összekötő egyenes mentén hat.

Térjünk át a síkról térre. Adjunk $z\mathbf{k}$-t az $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$ egyenlet jobb oldalához, így megkapjuk a mozgás leírásához szükséges vektorok *hengerkoordinátás* formáját:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= r\mathbf{u}_r + z\mathbf{k},\\ \mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{k},\\ \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{13.37}$$

(Hengerkoordinátákkal 15.6 alfejezetben foglalkozunk részletesen.) Az $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$ és $\mathbf{k}$ vektorok egy jobbsodrású rendszert alkotnak (13.34. ábra), azaz

$$\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{u}_\theta \times \mathbf{k} = \mathbf{u}_r, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta. \tag{13.38}$$

A bolygók síkban mozognak

Newton gravitációs törvénye szerint, ha a Nap tömege M, és a Nap tömegközéppontjából az $\mathbf{r}$ vektor mutat az m tömegű bolygó tömegközéppontjába, akkor a bolygó és a Nap közötti gravitációs vonzóerő (13.35. ábra)

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{|\mathbf{r}|^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \tag{13.39}$$

A képletben szereplő G szám az **univerzális gravitációs állandó**. A tömeget kilogrammban, az erőt newtonban, a távolságot méterben mérve G értéke körülbelül $6{,}6726 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$.

A (13.39) képletet Newton $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ mozgástörvényével összekombinálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}m\ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{GmM}{|\mathbf{r}|^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},\\ \ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{GM}{|\mathbf{r}|^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}.\end{aligned} \tag{13.40}$$

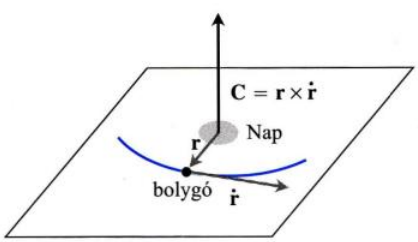
Eszerint a bolygó gyorsulásvektora minden pillanatban a Nap tömegközéppontja felé mutat.

A (13.40) egyenlet szerint $\ddot{\mathbf{r}}$ az $\mathbf{r}$ vektor skalárszorosa, így

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}. \tag{13.41}$$

Egy gyors számolás szerint $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$ az $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ deriváltja:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}}_{\mathbf{0}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}. \tag{13.42}$$



13.36. ÁBRA: A Newton mozgástörvényeinek engedelmeskedő bolygó a Nap tömegközéppontját tartalmazó síkban mozog, amely merőleges a $\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ vektorra.

Így a (13.41) egyenlet felírható

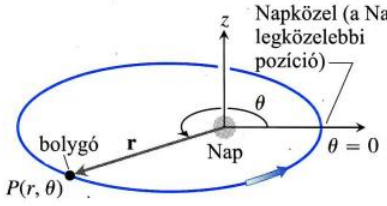
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0} \tag{13.43}$$

formában is, amelyet integrálva azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}, \tag{13.44}$$

valamely $\mathbf{C}$ konstans vektorral.

A (13.44) képlet szerint mind $\mathbf{r}$, mind $\dot{\mathbf{r}}$ egy $\mathbf{C}$-re merőleges síkban fekszik. Ez azt jelenti, hogy a bolygó egy állandó, $\mathbf{C}$-re merőleges síkban mozog, amely tartalmazza a nap tömegközéppontját is (13.36. ábra).



13.37. ÁBRA: A bolygómozgás leírásához használt koordináta-rendszer. A mozgás az óramutató járásával ellentétes irányú ha felülről nézzük, és $\dot{\theta} > 0$.

Koordináták és kezdeti értékek

Vezessünk be egy olyan hengerkoordináta-rendszert, amelynek középpontja a Nap tömegközéppontjában van, és a bolygó mozgásának síkja merőleges a z-tengelyre. Így a bolygó mozgását valójában egy polárkoordináta-rendszerben írhatjuk le. Ekkor az $\mathbf{r}$ vektor a bolygó helyvektora lesz, $|\mathbf{r}| = r$ és $\mathbf{r}/|\mathbf{r}| = \mathbf{u}_r$. A koordináta-rendszer z-tengelyét irányítsuk úgy, hogy $\mathbf{C}$ irányába mutasson. Ekkor $\mathbf{k}$ is $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ irányába mutat, így a bolygó mozgásiránya az óramutató járásával ellentétes, ha a z-tengely pozitív oldala felől nézzük. Ez azt jelenti, hogy θ növekszik, ahogy az idő telik, azaz minden t-re $\dot{\theta} > 0$. Végül forgassuk el a koordináta-rendszert a z-tengely körül úgy, hogy a koordináta-rendszer $\theta = 0$ tengelye a bolygó naphoz legközelebbi pozícióján menjen keresztül. Ezt a pozíciót **napközelnek**, vagy **perihelionnak** nevezzük (13.37. ábra).

Ha úgy mérjük az időt, hogy a $t = 0$ időpillanatban a bolygó napközelben legyen, akkor a következő kezdeti értékeket írhatjuk fel:

1. $r = r_0$ amikor $t = 0$. r_0 a minimális Nap–bolygó távolság.
2. $\dot{r} = 0$ amikor $t = 0$, mivel ekkor r minimális.
3. $\theta = 0$ amikor $t = 0$.
4. $|\mathbf{v}| = v_0$ amikor $t = 0$.

Ezek mellett, mivel

$$\begin{aligned} v_0 &= |\mathbf{v}|_{t=0} \\ &= |\dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta|_{t=0} && \text{(13.34) alapján} \\ &= |r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta|_{t=0} && \dot{r} = 0, \text{ ha } t = 0 \\ &= \big(|r\dot{\theta}||\mathbf{u}_\theta|\big)_{t=0} \\ &= |r\dot{\theta}|_{t=0} && |\mathbf{u}_\theta| = 1 \\ &= (r\dot{\theta})_{t=0}, && r \text{ és } \dot{\theta} \text{ pozitív} \end{aligned}$$

ezért azt is tudjuk, hogy

5. $r\dot{\theta} = v_0$ amikor $t = 0$.

Kepler első törvénye

Kepler első törvénye azt mondja ki, hogy ha egy bolygó a Nap gravitációs terében mozog, akkor a bolygó pályája kúpszelet, amelynek egyik fókuszában a Nap áll. A kúpszelet excentricitása

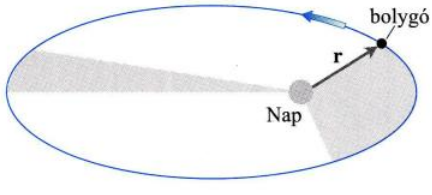
$$e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1, \tag{13.45}$$

és a kúpszelet egyenlete a Nap középpontú polárkoordináta-rendszerben

$$r = \frac{(1+e)r_0}{1 + e\cos\theta}. \tag{13.46}$$

A bizonyításhoz szükségünk lesz Kepler második törvényére, úgyhogy először azt bizonyítjuk be.

Kepler második törvénye



13.38. ÁBRA: A bolygót a napjával összekötő sugár azonos idő alatt azonos területet súrol.

Kepler második törvénye szerint a Napot a bolygóval összekötő sugárvektor (amelyet mi $\mathbf{r}$-el jelölünk) azonos idő alatt azonos területet súrol (13.38. ábra). A törvény bizonyításához a (13.34) egyenlet felhasználásával számoljuk ki a (13.44) egyenletben szereplő $\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ vektoriális szorzatot.

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \\ &= r\mathbf{u}_r \times (\dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta) && \text{(13.34) alapján} \\ &= r\dot{r}\underbrace{(\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_r)}_{\mathbf{0}} + r(r\dot{\theta})\underbrace{(\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta)}_{\mathbf{k}} && (13.47) \\ &= r(r\dot{\theta})\mathbf{k}. && (13.48) \end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{C}$ független t-től, $t = 0$ helyettesítéssel megkapjuk, hogy

$$\mathbf{C} = \left[r(r\dot{\theta})\right]_{t=0}\mathbf{k} = r_0 v_0 \mathbf{k}. \tag{13.49}$$

A most kiszámolt $\mathbf{C}$ értéket behelyettesítve (13.47)-be

$$r_0 v_0 \mathbf{k} = r^2\dot{\theta}\mathbf{k}, \qquad \text{vagyis} \qquad r^2\dot{\theta} = r_0 v_0. \tag{13.50}$$

Térjünk rá a terület kiszámolására. A terület differenciálja a polárkoordináta-rendszerben (lásd a 10.7. alfejezetet)

$$dA = \frac{1}{2}r^2\, d\theta.$$

Ennek megfelelően

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}r_0 v_0. \tag{13.51}$$

Tehát dA/dt értéke t-től független konstans, amelyből Kepler második törvénye következik.

A Föld esetén r_0 értéke körülbelül 150 000 000 km, v_0 körülbelül 30 km/s és dA/dt közelítőleg 2 250 000 000 km^2/s. Ez azt jelenti, hogy két szívdobbanás között a Föld 30 kilométert halad, és a Nappal összekötő sugár 2 250 000 000 négyzetkilométert súrol.

Kepler első törvényének bizonyítása

Ahhoz, hogy belássuk, a bolygó pályája kúpszelet, egyik fókuszában a Nappal, fel kell írnunk a bolygó Naptól vett r távolságát θ függvényeként. Ehhez sok számoláson, helyettesítésen át vezet az út, amelyek közel sem triviálisak.

Kezdetnek tekintsük a (13.36) és (13.40) egyenleteket. Mivel $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$, a két egyenletben $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ együtthatója egyenlő:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2}. \tag{13.52}$$

Átmenetileg cseréljük le $\dot{\theta}$-t (13.50) alapján $r_0 v_0/r^2$-re. Rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\ddot{r} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2}. \tag{13.53}$$

Ezt a másodrendű egyenletet egy új változó bevezetésével elsőrendű differenciálegyenletté alakítjuk. Legyen

$$p = \frac{dr}{dt}, \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dr}\frac{dr}{dt} = p\frac{dp}{dr}. \qquad \text{láncszabály}$$

Ezzel a (13.53) egyenlet így alakul:

$$p\frac{dp}{dr} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2}. \tag{13.54}$$

Szorozzuk meg 2-vel mindkét oldalt, és integráljunk r szerint:

$$p^2 = (\dot{r})^2 = -\frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} + \frac{2GM}{r} + C_1. \tag{13.55}$$

A $t = 0$-beli $r = r_0$ és $\dot{r} = 0$ kezdőfeltételekből C_1 értéke

$$C_1 = v_0^2 - \frac{2GM}{r_0}.$$

Ezt beírva a (13.55) egyenletbe, a megfelelő átrendezések után azt kapjuk, hogy

$$\dot{r}^2 = v_0^2\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right). \tag{13.56}$$

A (13.52) és (13.56) egyenletek közötti átalakítások során sikerült egy r-re vonatkozó másodrendű differenciálegyenletet elsőrendűre cserélnünk. A célunk még mindig az, hogy kifejezzük r-t θ függvényeként, úgyhogy hozzuk vissza θ-t az egyenletbe. Ezt úgy tesszük, hogy a (13.56) egyenletet elosztjuk a (13.50) egyenlet (amely $r^2\dot{\theta} = r_0 v_0$) négyzetével, és felhasználjuk, hogy

$$\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \left(\frac{dr}{dt}\right) / \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{dr}{d\theta}.$$

Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GM}{r_0^2 v_0^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \\ &= \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} + 2h\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right). \qquad h = \frac{GM}{r_0^2 v_0^2} \end{aligned} \tag{13.57}$$

A további egyszerűsítések végett vezessük be a következő jelöléseket:

$$u = \frac{1}{r}, \qquad u_0 = \frac{1}{r_0}, \qquad \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}, \qquad \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2.$$

Ezzel a (13.57) egyenlet így alakul:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = u_0^2 - u^2 + 2hu - 2hu_0 = (u_0 - h)^2 - (u - h)^2, \tag{13.58}$$

$$\frac{du}{d\theta} = \pm\sqrt{(u_0 - h)^2 - (u - h)^2}. \tag{13.59}$$

Melyik előjel a helyes? Tudjuk, hogy $\dot{\theta} = r_0 v_0 / r^2$ pozitív. Azt is, hogy r a $t = 0$ időpontban minimális, így egy darabig nem tud csökkenni, azaz $\dot{r} \geq 0$ a $t = 0$ pont egy környezetében. Így

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} \geq 0 \qquad \text{és} \qquad \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} \leq 0.$$

Tehát a (13.59) egyenletben a negatív előjel a helyes. Miután az előjelet lerögzítettük, rendezzük át a (13.59) egyenletet, és integráljuk mindkét oldalt θ szerint:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\sqrt{(u_0 - h)^2 - (u - h)^2}}\frac{du}{d\theta} &= 1 \\ \arccos\left(\frac{u - h}{u_0 - h}\right) &= \theta + C_2. \end{aligned} \tag{13.60}$$

Mivel $\theta = 0$ esetén $u = u_0$, és $\arccos(1) = 0$, ezért $C_2 = 0$. Így

$$\frac{u - h}{u_0 - h} = \cos\theta$$

és

$$\frac{1}{r} = u = h + (u_0 - h)\cos\theta. \tag{13.61}$$

Innen további átalakításokkal megkapjuk az egyenlet végső alakját:

$$r = \frac{(1 + e)r_0}{1 + e\cos\theta}, \tag{13.62}$$

ahol

$$e = \frac{1}{r_0 h} - 1 = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1. \tag{13.63}$$

A (13.62) és (13.63) egyenlet szerint a bolygó pályája egy kúpszelet, egyik fókuszában a Nappal, és $e = (r_0 v_0^2 / GM) - 1$ excentricitással. Ezzel Kepler első törvényét bebizonyítottuk.

Azzal, hogy ez a kúpszelet mikor ellipszis, mikor parabola és mikor hiperbola, a 12. feladat foglalkozik.

Kepler harmadik törvénye

A bolygó **keringési ideje** az a T idő, amely alatt a bolygó megtesz egy teljes „kört" (valójában ellipszist) a Nap körül. A T keringési idő és a bolygó pályájának a-val jelölt fél nagytengelye közötti

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \tag{13.64}$$

összefüggés *Kepler harmadik törvénye*. Mivel az egyenlet jobb oldala egy naprendszeren belül konstans, e szerint T^2/a^3 értéke a *rendszer összes bolygójára azonos*.

Kepler harmadik törvényével nekiállhatunk a Naprendszer feltérképezésének. Mivel meg tudjuk mérni bármelyik bolygó keringési idejét, ki tudjuk számolni a bolygók pályájának nagytengelyét a Föld fél nagytengelyét használva egységnek. Ezt a távolságot *csillagászati egységnek* nevezzük. Így már bármely két bolygó távolságát kiszámolhatjuk egy adott pillanatban, ha megmérjük, hogy a csillagászati egység hány kilométer. Ezt megtehetjük például a Vénusz távolságának radarral történő meghatározásával. Ma már pontosan ismerjük a csillagászati egység hosszát, ilyen és hasonló mérésekkel az jött ki, hogy 1 csillagászati egység = 149 597 870 km.

Kepler harmadik törvényének bizonyítása a bolygó által befutott ellipszis területének két különböző képlettel való kiszámolásával történik.

1. képlet: $\text{Terület} = \pi ab$ — a geometriából ismert formula; a a fél nagytengely, b a fél kistengely

2. képlet:
$$\text{Terület} = \int_0^T dA$$
$$= \int_0^T \frac{1}{2} r_0 v_0 \, dt \qquad \text{(13.51) alapján}$$
$$= \frac{1}{2} T r_0 v_0.$$

A két módszerrel kiszámolt terület azonossága miatt

$$T = \frac{2\pi ab}{r_0 v_0} = \frac{2\pi a^2}{r_0 v_0}\sqrt{1-e^2}. \qquad \text{tetszőleges ellipszisre } b = a\sqrt{1-e^2} \tag{13.65}$$

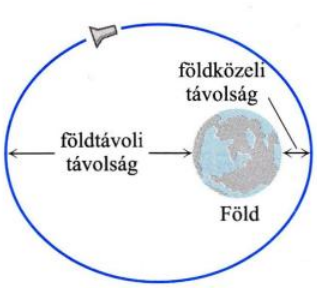
Már csak az van hátra, hogy a-t és e-t kifejezzük r_0, v_0, G és M segítségével. A (13.63) egyenlettel e kifejezése már megvan. Hogy a-t is megkapjuk, helyettesítsünk θ helyébe π-t (13.62)-ben:

$$r_{\max} = r_0 \frac{1+e}{1-e}.$$

Így

$$2a = r_0 + r_{\max} = \frac{2r_0}{1-e} = \frac{2r_0 GM}{2GM - r_0 v_0^2}. \tag{13.66}$$

A (13.65) egyenlet négyzetébe behelyettesítve a (13.63)-ben és (13.66)-ben megkapott eredményeket megkapjuk Kepler harmadik törvényét (15. feladat).



13.39. ÁBRA: A Föld körül keringő műhold pályája.
$2a$ = (Föld átmérője) + (földközeli távolság) + (földtávoli távolság).

Keringési adatok

Bár Kepler az akkor ismert hat bolygó megfigyelése alapján állította fel a törvényeit, az utókor bebizonyította, hogy a Kepler törvények fennállnak minden, a (13.39) képlethez hasonló, a távolság négyzetével fordítottan arányos erő által mozgatott testre. Teljesülnek a Halley-üstökösre, az Icarus aszteroidára, a Hold Föld körüli pályájára, és az *Apollo 8* Hold körüli pályájára is.

A 13.1–13.3. táblázat a bolygók és 7 műhold pályaadatait tartalmazzák (13.39. ábra).

A *Vanguard 1* által visszaküldött adatok bizonyították az óceánok vízszintje közötti eltéréseket, és megadták néhány különálló Csendes-óceáni sziget pontos elhelyezkedését. Az adatok azt is megerősítették, hogy a Nap és Hold gravitációja befolyásolja a Föld körül keringő műholdak pályáját, illetve hogy a Nap által kibocsátott sugárzás nyomása elég nagy ahhoz, hogy befolyásolja egy műhold pályáját. A *Syncom 3* az USA Védelmi Minisztériumának kommunikációs műholdja. A *Tiros II* (Television Infrared Observation Satellite) egy meterológiai műhold. A *GOES 4* (Geostationary Operational Environmental Satellite) a Föld légkörét kutatja. Keringési ideje 1436,2 perc, amely majdnem pontosan megegyezik a Föld 1436,1 perces forgási idejével. A pályája majdnem kör ($e = 0{,}0003$). Az *Intelsat 5* egy nagykapacitású kereskedelmi telekommunikációs műhold.

Bolygó	**fél nagytengely** (a^*)	**excentricitás** (e)	**keringési idő** (T)
Merkúr	57,95	0,2056	87,967 nap
Vénusz	108,11	0,0068	224,701 nap
Föld	149,57	0,0167	365,256 nap
Mars	227,84	0,0934	1,8808 év
Jupiter	778,14	0,0484	11,8613 év
Szaturnusz	1427,0	0,0543	29,4568 év
Uránusz	2870,3	0,0460	84,0081 év
Neptunusz	4499,9	0,0082	164,784 év
Plutó	5909	0,2481	248,35 év

13.1. TÁBLÁZAT: A bolygók és a Plutó pályájának a, e és T értéke.

* millió kilométer

Név	**felbocsátás ideje**	**(tervezett) élettartam**	**kilövési tömeg (kg)**	**keringési idő (perc)**	**földközeli távolság (km)**	**földtávoli távolság (km)**	**fél nagytengely (km)**	**excentricitás**
Szputnyik 1	1957. okt.	57,9 nap	83,6	96,2	215	939	6955	0,052
Vanguard 1	1958. márc.	300 év	1,47	138,5	649	4340	8872	0,208
Syncom 3	1964. aug.	$> 10^6$ év	39	1436,2	35718	35903	42189	0,002
Skylab 4	1973. nov.	84,06 nap	13980	93,11	422	437	6808	0,001
Tiros II	1978. okt.	500 év	734	102,12	850	866	7236	0,001
GOES 4	1980. szept.	$> 10^6$ év	627	1436,2	35776	35800	42166	0,0003
Intelsat 5	1980. dec.	$> 10^6$ év	1928	1417,67	35143	35707	41803	0,007

13.2. TÁBLÁZAT: Néhány Föld körüli műhold pályaadata.

Univerzális gravitációs állandó:	$G = 6{,}6726 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$
A Nap tömege:	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg
A Föld tömege:	$5{,}975 \cdot 10^{24}$ kg
A Föld sugara az egyenlítő síkjában:	6378,533 km
A Föld sugara az É-D tengely mentén:	6356,912 km
A Föld forgási ideje:	1436,1 perc
A Föld keringési ideje:	1 év = 365,256 nap

13.3. TÁBLÁZAT: A Naprendszer néhány állandója.

13.6. Feladatok

Emlékeztető: Amikor a számolásokban a G gravitációs állandót használjuk, akkor az erőt newtonban, a távolságot méterben, a tömeget kilogrammban és az időt másodpercben fejezzük ki!

1. A *Skylab 4* keringési ideje: A *Skylab 4* pályájának fél nagytengelye $a = 6808$ km. Helyettesítsük Kepler harmadik törvényében M-et a Föld tömegével, és számoljuk ki a *Skylab 4* keringési idejét! Hasonlítsuk össze az eredményt a 13.2. táblázat értékével!

2. A Föld sebessége napközelben: A Föld–Nap távolság, amikor a Föld legközelebb van a Naphoz, körülbelül 149 577 000 km. A Föld pályájának excentricitása 0,0167. Számoljuk ki a Föld napközeli v_0 sebességét a (13.45) egyenletet használatával!

3. A *Proton I* pályájának fél nagytengelye: 1965 júliusában a Szovjetunió felbocsátotta az 12 200 kg tömegű *Proton I* holdat. A műhold keringési ideje 92,25 perc, a Földtől való minimális és maximális távolsága 183, illetve 589 km. Számoljuk ki a műhold pályájának fél nagytengelyét a (13.33) képlet segítségével! Hasonlítsuk össze az eredményt a (minimális távolság) + (maximális távolság) + (Föld átmérője) képlet segítségével kapott nagytengelyhosszal.

4. A *Viking I* pályájának fél nagytengelye: A *Viking I* keringő egysége 1975 augusztusa és 1976 júniusa között vizsgálta a Mars felszínét. A műhold keringési ideje 1639 perc volt, a Mars tömege $6{,}418 \cdot 10^{23}$ kg. Számoljuk ki a *Viking I* pályájának fél nagytengelyét!

5. A Mars átmérője: (*A 4. feladat folytatása.*) A *Viking I* keringő egységének a Mars felszínétől való távolsága marsközelben 1499, marstávolban 35 800 km volt. A 4. feladat eredményeit felhasználva becsüljük meg a Mars átlagos átmérőjét!

6. A *Viking 2* keringési ideje: A *Viking 2* keringő egysége 1975 szeptemberétől 1976 augusztusáig vizsgálta a Marsot. Az ellipszispályája fél nagytengelye 22030 km volt. Számítsuk ki a műhold keringési idejét!

7. Geostacionárius pályák: A Föld körüli műholdak egy része az egyenlítő síkjában, majdnem körpályán kering, amelyen a keringési idő azonos a Föld forgási idejével. Ezeket a pályákat *geoszinkron* vagy *geostacionárius* pályának nevezzük, ugyanis egy ilyen műhold a Föld azonos pontja fölött tartózkodik a keringése során.

(a) Körülbelül mekkora a geostacionárius pálya fél nagytengelye?

(b) Milyen magasan van egy geostacionárius pályán keringő műhold a Föld felszínétől számítva?

(c) A 13.2. táblázat műholdjai közül melyek keringenek közel geostacionárius pályán?

8. A Mars tömege $6{,}418 \cdot 10^{23}$ kg, egy marsi nap hossza 1477,4 másodperc. Mekkora annak a pályának a fél nagytengelye, amelyen egy műhold keringési ideje 1 marsi nappal egyenlő?

9. A Föld–Hold távolság: A Hold keringési ideje $2{,}36055 \cdot 10^6$ másodperc. Körülbelül milyen messze van a Hold a Földtől?

10. Műhold sebessége: Egy műhold körpályán kering a Föld körül. Adjuk meg a műhold sebességét a keringési pálya sugarának függvényeként!

11. Keringési idő: Ha T-t másodpercben, a-t méterben mérjük, akkor mennyi T^2/a^3 értéke a Naprendszer bolygóinál? A Föld körül keringő műholdaknál? A Hold körül keringő műholdaknál? (A Hold tömege $7{,}354 \cdot 10^{22}$ kg.)

12. A pálya alakja: A (13.45) egyenletben szereplő v_0 mely értéke esetén lesz a test pályája kör? Ellipszis? Parabola? Hiperbola?

13. Körpálya: Bizonyítsuk be, hogy egy körpályán mozgó bolygó sebessége állandó! (*Útmutatás:* alkalmazzuk Kepler valamelyik törvényét.)

14. Legyen $\mathbf{r}$ egy síkpályán mozgó részecske helyvektora, dA/dt a helyvektor által súrolt terület változási sebessége. Koordináták bevezetése nélkül, feltéve, hogy a szükséges deriváltak léteznek, adjunk geometriai indoklást a $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}|$ összefüggésre!

15. Kepler harmadik törvénye: Fejezzük be Kepler harmadik törvényének bizonyítását! (Folytassuk a bizonyítást a (13.65) egyenlettől!)

A 16. és 17. feladatban két bolygó egy közös csillag körül kering. Az A bolygó a csillaghoz közelebbi belső bolygó, B a külső. A két bolygó helyvektora az idő függvényében

$$\mathbf{r}_A(t) = 2\cos(2\pi t)\mathbf{i} + 2\sin(2\pi t)\mathbf{j},$$

illetve

$$\mathbf{r}_B(t) = 3\cos(\pi t)\mathbf{i} + 3\sin(\pi t)\mathbf{j},$$

ahol az origó a csillag közepe, és az egység a csillagászati egység. (Vegyük észre, hogy az A bolygó gyorsabban mozog, mint a B.)

Az A bolygón élő emberek nem a napjukat, hanem a saját bolygójukat tekintik a rendszerük középpontjának.

16. Írjuk fel a B bolygó helyének paraméteres egyenletét t függvényeként, az A bolygót használva a koordináta-rendszer középpontjaként! (Az eredményt fejezzük ki $\cos(\pi t)$ és $\sin(\pi t)$ függvényeként!)

T 17. Ábrázoljuk a B bolygó pályáját az A középpontú koordináta-rendszerben!
Ez a feladat megmutatja, hogy milyen nehéz volt a Kepler előtt élő csillagászok helyzete, akik még a Földet (azaz az A bolygót) tekintették a naprendszer középpontjának, és így próbálták megérteni más bolygók (például B = Mars) mozgását. (Lásd még D. G. Saari cikkét az *American Mathematical Monthly*, Vol. 97. (1990. február) 105-119. oldalán.)

18. Kepler felfedezte, hogy a Föld ellipszispályán mozog, amelynek egyik fókuszában a Nap áll. Legyen $\mathbf{r}(t)$ a Föld középpontjának a helyvektora t függvényeként a Nap közepű koordináta-rendszerben felírva. Legyen $\mathbf{w}$ a Föld déli sarkából az északi sarkba mutató vektor. Tudjuk, hogy a Föld tengelye ferde, azaz $\mathbf{w}$ nem merőleges a keringés síkjára. Definiáljuk $\mathbf{r}(t)$ és $\mathbf{w}$ segítségével a következő fogalmakat: (i) napközel, (ii) naptávol, (iii) napéjegyenlőség, (iv) nyári napforduló, (v) téli napforduló.

13. fejezet Áttekintő kérdések

1. Soroljuk fel a vektorfüggvények differenciálási és integrálási szabályait! Adjunk példát mindegyikre!

2. Hogyan definiáljuk, illetve hogyan számoljuk ki egy szükséges mértékben differenciálható pályán mozgó részecske sebességvektorát, sebességét, mozgásirányát, gyorsulásvektorát? Mutassunk példát rájuk!

3. Mit tudunk konstans hosszúságú vektorfüggvény deriváltjáról? Mutasson egy példát!

4. Adjuk meg egy ideális lövedék pályájának vektoros és paraméteres egyenletét! Hogyan számolhatjuk ki a lövedék pályamagasságát, repülési idejét és a lőtávolságot? Írjunk fel egy példát!

5. Hogyan definiáljuk, illetve hogyan számoljuk ki egy sima térgörbe egy szakaszának hosszát? Mutassunk egy példát! Milyen kikötéseket kell tennünk a definíciónál?

6. Hogyan mérünk egy kijelölt ponttól való távolságot egy sima görbe mentén? Adjunk egy példát!

7. Mi egy differenciálható görbe normált érintővektora? Adjon példát rá!

8. Definiáljuk kétszer differenciálható síkgörbék görbületét, simulókörét, görbületi középpontját, görbületi sugarát. Mutassunk példát rájuk! Mely görbéknek nulla a görbülete? Mely görbék görbülete állandó?

9. Mit nevezünk egy térgörbe főnormálisának? Mely pontokban van definiálva? Melyik irányba mutat? Mutassunk példát rá!

10. Definiáljuk **N**-t és κ-t térgörbék esetén! Hogyan függnek össze? Adjunk egy példát!

11. Mit nevezünk egy görbe binormálisának? Adjunk példát rá! Hogyan függ össze a binormális a torzióval? Mutassunk rá példát!

12. Milyen képlettel lehet egy test gyorsulásvektorát érintő- és főnormális irányú komponensek összegére bontani? Mutassunk egy példát rá! Mi az értelme egy ilyen felbontásnak? Mi történik, ha a test sebessége állandó? Mi történik, ha a test állandó sebességgel körpályán mozog?

13. Mondjuk ki a Kepler-törvényeket! Milyen objektumok mozgását lehet leírni a segítségükkel?

13. fejezet Gyakorló feladatok

Mozgás a síkon

Rajzoljuk fel az 1. és a 2. feladatban megadott görbéket, majd rajzoljuk be a sebesség- és gyorsulásvektort a megadott pontokban! Írjuk a gyorsulásvektort $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ formába ($\mathbf{T}$ és $\mathbf{N}$ meghatározása nélkül), és számoljuk ki a görbületet a megadott pontokban!

1. $\mathbf{r}(t) = (4\cos t)\mathbf{i} + \left(\sqrt{2}\sin t\right)\mathbf{j}, \quad t = 0$ és $t = \pi/4$

2. $\mathbf{r}(t) = \left(\sqrt{3}\sec t\right)\mathbf{i} + \left(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,t\right)\mathbf{j}, \quad t = 0$

3. Egy részecske helyvektora az idő függvényében

$$\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}.$$

Mekkora a részecske legnagyobb sebessége?

4. Legyen $\mathbf{r}(t) = (e^t\cos t)\mathbf{i} + (e^t\sin t)\mathbf{j}$. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{r}$ és az $\mathbf{a}$ vektorok által bezárt szög állandó! Mekkora ez a szög?

5. Görbület kiszámolása: A P pontban a részecske sebesség- és gyorsulásvektora $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, illetve $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$. Mekkora a részecske pályájának P-beli görbülete?

6. Keressük meg az $y = e^x$ görbének azt a pontját, amelyben a görbület maximális!

7. Egy részecske az xy-síkban fekvő egységkörön mozog. A helyvektora az idő függvényében $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, ahol x és y az idő differenciálható függvénye. Számoljuk ki dy/dx értékét, ha tudjuk, hogy $\mathbf{v}\cdot\mathbf{i} = y$! A mozgás az óramutató járásával megegyező, vagy ellentétes irányban történik?

8. Egy üzenetet küldünk a $9y = x^3$ görbét követő csőpostán át. Tudjuk, hogy a $(3,3)$ pontban $\mathbf{v}\cdot\mathbf{i} = 4$ és $\mathbf{a}\cdot\mathbf{i} = -2$. Keressük meg $\mathbf{v}\cdot\mathbf{j}$ és $\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}$ értékét a $(3,3)$ pontban!

9. A körpálya jellemzése: Egy síkban mozgó részecske hely- és sebességvektora állandóan merőlegesek egymásra. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a részecske pályája egy origó közepű körvonal!

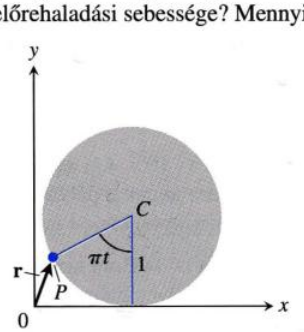
10. Mozgás a cikloison: Egy 1 méter sugarú, C közepű korong gurul az x-tengely mentén, sebessége fél fordulat másodpercenként. (Lásd a mellékelt ábrát.) A korong szélén elhelyezkedő P pont helyvektora t függvényében

$$\mathbf{r} = (\pi t - \sin \pi t)\mathbf{i} + (1 - \cos \pi t)\mathbf{j}.$$

(a) Rajzoljuk le P pályáját a $0 \le t \le 3$ intervallumon!

(b) Számoljuk ki $\mathbf{v}$ és $\mathbf{a}$ értékét a $t = 0, 1, 2, 3$ időpontokban, és rajzoljuk be az ábrába!

(c) Mennyi egy tetszőleges időpontban a kerék legfelső pontjának előrehaladási sebessége? Mennyi a C ponté?



Lövedék pályája, mozgás a síkon

11. Súlylökés: Egy súlygolyó 2 méter magasságban, 45°-os szögben, 13 m/s kezdősebességgel hagyja el a súlylökő kezét. Hol lesz 3 másodperccel később?

12. Gerelyhajítás: Egy gerely 2,3 méter magasságban, 45°-os szögben, 25 m/s kezdősebességgel hagyja el a gerelyhajító kezét. Milyen magas a pályája?

13. Egy golflabdát v_0 kezdősebességgel, a vízszintessel α szöget bezáró irányban ütnek el egy egyenes oldalú, ϕ szögű emelkedő aljáról, ahol

$$0 < \phi < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Mutassuk meg, hogy a labda

$$\frac{2v_0^2 \cos\alpha}{g\cos^2\phi}\sin(\alpha-\phi)$$

emelkedő mentén mért távolságra fog leesni! Bizonyítsuk be, hogy ez a távolság akkor lesz a legnagyobb, ha $\alpha = (\phi/2) + (\pi/4)$, azaz ha a kezdősebesség-vektor felezi a függőleges és az emelkedő közötti szöget!

T 14. A „Dictator": Az amerikai polgárháborúban használt *Dictator* nevű mozsárágyú olyan nehéz volt (7765 kg), hogy egy vasúti kocsira kellett felszerelni. A kilőtt lövedék átmérője 330 mm, tömege 91 kg volt, és 9 kg lőporra volt szükség a kilövéséhez. Az ágyút Mr. Charles Knapp gyártotta a pittsburghi öntőüzemében, és a virginiai Petersburg ostrománál vetették be. Az ágyú lőtávolságát illetően megoszlanak a vélemények. A hivatalos adatok szerint a lőtávolság 3955 méter volt, míg a tüzérek 4345 méter lőtávolságról számoltak be. Ha feltesszük, hogy 45°-os szögben állították be az ágyút, mekkora lehetett az ágyú torkolati sebessége?

T 15. A pezsgősdugólövés világrekordja:

(a) 1988-ig a pezsgősdugólövés világrekordját Michael Hill kapitány (Brit Királyi Tüzérség) tartotta 33,38 méterrel. Feltéve, hogy Hill kapitány a talajszintről lőtt, 45°-os szögben tartotta a pezsgősüveget, és hogy a dugó ideális lövedékként viselkedett, számoljuk ki a pezsgősdugó kezdősebességét!

(b) Az új világrekordot 1988. június 5-én állította fel Prof. Emeritus Heinrich, a Rensselaer Politechnikai Intézettől. Ő 1,22 méter magasról, 45°-os szögben lőtt a New Yorki *Woodbury Vineyard* borászatban, és a dugó 54,18 méterre szállt. Feltéve, hogy a dugó ideális lövedékként viselkedett, számoljuk ki a pezsgősdugó kezdősebességét!

T 16. Gerelyhajítás: Petra Felke, az NDK sportolója volt az első nő, aki 80 méter feletti eredményt ért el gerelyhajításban. Eredménye 80,01 méter volt, melyet az 1988-as szöuli olimpián ért el.

(a) Számoljuk ki a gerely kezdősebességét, feltéve, hogy Felke 40°-os szögben, 2,3 méteres magasságban hajította el a gerelyt!

(b) Milyen magasra szállt a gerely?

17. Küszöböljük ki α-t az ideális lövedék

$$x = (v_0\cos\alpha)t, \qquad y = (v_0\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

mozgásegyenletéből, és mutassuk meg, hogy $x^2 + (y + gt^2/2)^2 = v_0^2 t^2$. Ez azt jelenti, hogy az origóból egyszerre, azonos kezdősebességgel kilőtt lövedékek minden t-re egy $v_0 t$ sugarú, $(0, -gt^2/2)$ közepű körön helyezkednek el.

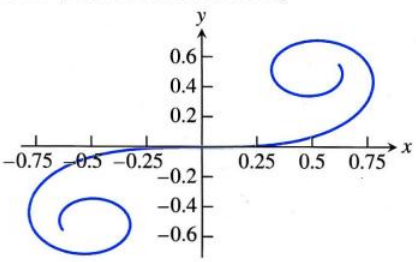
18. Görbületi sugár: Mutassuk meg, hogy egy kétszer differenciálható $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ síkgörbe, ahol $x = f(t)$, $y = g(t)$, görbületi sugara

$$\rho = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{s}^2}}, \qquad \text{ahol} \qquad \ddot{s} = \frac{d}{dt}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

19. Görbület: Számoljuk ki az

$$\mathbf{r}(t) = \left(\int_0^t \cos\left(\frac{1}{2}\pi\theta^2\right) d\theta\right)\mathbf{i} + \left(\int_0^t \sin\left(\frac{1}{2}\pi\theta^2\right) d\theta\right)\mathbf{j}$$

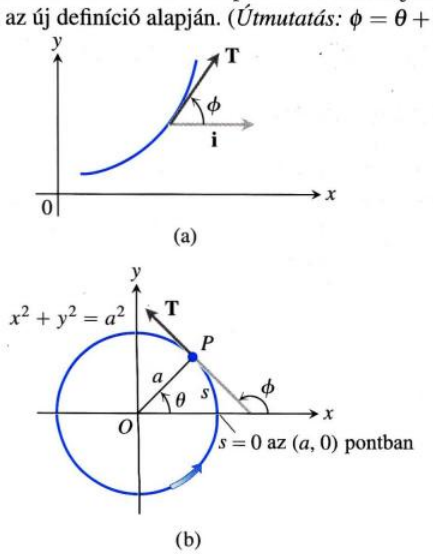
görbe görbületét az s, origótól mért görbe menti előjeles távolság függvényeként! (Lásd a mellékelt ábrát.)



20. Síkbeli görbület másképp: Egy megfelelően sokszor differenciálható síkgörbe görbületét így is definiálhatjuk:

$$\kappa = \left|\frac{d\phi}{ds}\right|,$$

ahol ϕ a $\mathbf{T}$ és $\mathbf{i}$ vektorok által bezárt szög (13.40a ábra). A 13.40b ábrán látható $x^2 + y^2 = a^2$ körvonalon az s előjeles görbe menti távolságot az óramutató járásával ellenkező irányban mérjük, a $(0, a)$ pontot használva kiindulási pontként. Számoljuk ki a kör görbületét az új definíció alapján. (*Útmutatás:* $\phi = \theta + \pi/2$.)



13.40. ÁBRA: A 20. feladat ábrái.

Mozgás a térben

Számoljuk ki a görbe ívhosszát (21. és 22. feladat)!

21. $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi/4$

22. $\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 3$

Számoljuk ki $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$, κ és τ értékét t megadott értéke mellett (23–26. feladat)!

23. $\mathbf{r}(t) = \frac{4}{9}(1+t)^{3/2}\mathbf{i} + \frac{4}{9}(1-t)^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{3}t\mathbf{k}, \quad t = 0$

24. $\mathbf{r}(t) = (e^t \sin 2t)\mathbf{i} + (e^t \cos 2t)\mathbf{j} + 2e^t\mathbf{k}, \quad t = 0$

25. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}e^{2t}\mathbf{j}, \quad t = \ln 2$

26. $\mathbf{r}(t) = (3\operatorname{ch}2t)\mathbf{i} + (3\operatorname{sh}2t)\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}, \quad t = \ln 2$

A 27. és 28. feladatban bontsuk $\mathbf{a}$-t $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ alakba ($\mathbf{T}$ és $\mathbf{N}$ kiszámolása nélkül) a $t = 0$ pontban!

27. $\mathbf{r}(t) = (2+3t+3t^2)\mathbf{i} + (4t+4t^2)\mathbf{j} - (6\cos t)\mathbf{k}$

28. $\mathbf{r}(t) = (2+t)\mathbf{i} + (t+2t^2)\mathbf{j} + (1+t^2)\mathbf{k}$

29. Legyen $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\sqrt{2}\cos t)\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}$. Írjuk fel a $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$, κ és τ mennyiségeket t függvényében!

30. Hányszor lesz az $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + (5\cos t)\mathbf{j} + (3\sin t)\mathbf{k}$ helyvektorú részecske sebesség- és gyorsulásvektora merőleges egymásra a $0 \le t \le \pi$ intervallumon?

31. Egy térben mozgó részecske helyvektora $t \ge 0$ esetén

$$\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + \left(4\sin\frac{t}{2}\right)\mathbf{j} + \left(3 - \frac{t}{\pi}\right)\mathbf{k}.$$

Keressük meg azt a pillanatot, amelyben $\mathbf{r}$ először merőleges az $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ vektorra!

32. Írjuk fel az $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ görbe $(1,1,1)$-beli rektifikáló síkjának, normálsíkjának és simulósíkjának az egyenletét!

33. Írjuk fel az $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + \ln(1-t)\mathbf{k}$ görbe $t = 0$-beli érintőegyenesének paraméteres egyenletét!

34. Írjuk fel az $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}\cos t)\mathbf{i} + (\sqrt{2}\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ spirál $t = \pi/4$-beli érintőegyenesének paraméteres egyenletét!

35. A Föld a *Skylab 4*-ről nézve: A Föld felszínének hány százalékát láthatták a *Skylab 4* űrhajósai, amikor az űrállomás földtávolban, a Föld felszínétől 437 kilométerre tartózkodott? A látott felszínt modellezzük a GT körív y-tengely körüli megpörgetésével, majd hajtsuk végre a következő lépéseket:

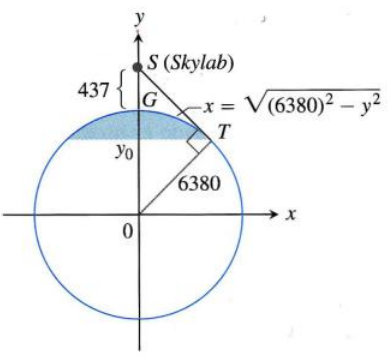
1. Az ábrán látható háromszögek hasonlóságából írjuk fel az $y_0/6380 = 6380/(6380+437)$ összefüggést, majd számoljuk ki y_0 értékét belőle!

2. A látott felszín meghatározását végezzük el a

$$\text{látott felszín} = \int_{y_0}^{6380} 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

integrál 4 számjegynyi pontossággal való kiszámolásával!

3. Adjuk meg a választ a Föld felszínének százalékában!



13. fejezet Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

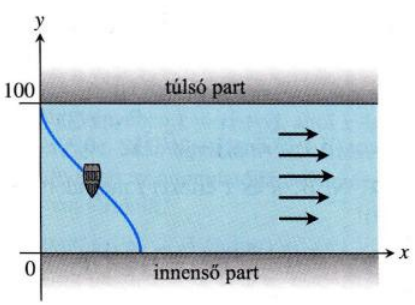
Alkalmazások

1. Egy egyenes partú, 100 méter széles folyó túlpartjáról a $t = 0$ időpontban egy csónak indul az innenső part felé. A csónakban ülő ember 20 m/perc sebességgel evez, mindig az innenső part felé irányítva a csónak orrát. A folyó sodrási sebessége az (x,y) pontban

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{1}{250}(y-50)^2 + 10\right)\mathbf{i} \quad \text{(m/perc)}, \qquad 0 < y < 100.$$

(a) Adjuk meg a csónak helyzetét t függvényében leíró $\mathbf{r}(t)$ függvényt, ha a csónak indulási pontja $\mathbf{r}(0) = 0\mathbf{i} + 100\mathbf{j}$!

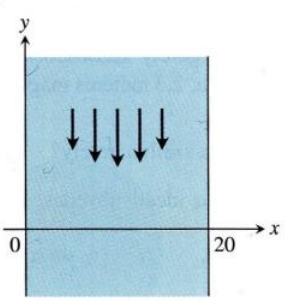
(b) Milyen messzire sodorja a folyó a csónakot, mire átér az innenső partra?



2. Egy egyenes partú, 20 méter széles folyó sodrási sebessége az (x,y) pontban

$$\mathbf{v} = -\frac{3x(20-x)}{100}\mathbf{j} \quad \text{(m/perc)}, \qquad 0 \le x \le 20.$$

Egy csónak a $(0,0)$ pontból indulva, a vízhez képest állandó sebességvektorral szeli át a folyót, majd megérkezik a $(20,0)$ pontba. A csónak vízhez viszonyított sebességének nagysága $\sqrt{20}$ m/perc volt.



(a) Határozzuk meg a csónak sebességvektorát!

(b) Írjuk fel a csónak helyét t függvényeként!

(c) Rajzoljuk le a csónak pályáját!

3. Egy magára hagyott P részecske álló helyzetből indulva a gravitáció hatására súrlódás nélkül lecsúszik az

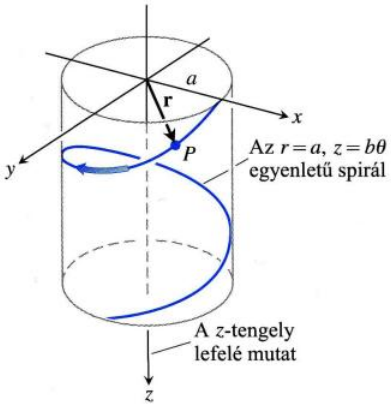
$$\mathbf{r}(\theta) = (a\cos\theta)\mathbf{i} + (a\sin\theta)\mathbf{j} + b\theta\mathbf{k} \qquad (a,b>0)$$

spirálon. (Lásd a mellékelt ábrát.) Az egyenletben szereplő θ a hengerkoordináta-rendszer szögváltozója, és a spirál egyenlete a hengerkoordináta-rendszerben $r = a$, $z = b\theta$, $\theta \geq 0$. Feltesszük, hogy θ a t differenciálható függvénye a mozgás során. Mivel a gravitációs erőtér konzervatív, a részecske sebessége, miután z távolságot esett lefelé, $\sqrt{2gz}$. (g a gravitációs gyorsulás.)

(a) Számoljuk ki a részecske $d\theta/dt$ szögsebességét, amikor $\theta = 2\pi$!

(b) Írjuk fel a részecske θ és z koordinátáját t függvényeként!

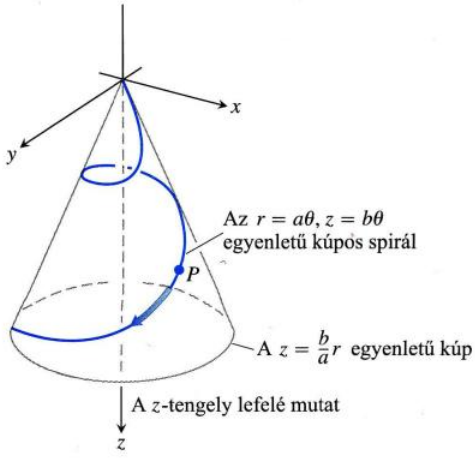
(c) Bontsuk fel a $d\mathbf{r}/dt$ sebességvektort érintő- és főnormális irányú komponensekre, és írjuk fel a $d^2\mathbf{r}/dt^2$ gyorsulásvektort t függvényeként! Van a gyorsulásvektornak nullától különböző **B** binormális irányú komponense?



4. A 3. feladatban szereplő spirált cseréljük ki az ábrán látható, $r = a\theta$, $z = b\theta$ egyenletekkel adott kúpos spirálra.

(a) Írjuk fel a $d\theta/dt$ szögsebességet θ függvényeként!

(b) Írjuk fel a részecske által megtett utat θ függvényeként!



Polárkoordináta-rendszer

5. A bolygópályát leíró

$$r = \frac{(1+e)r_0}{1+e\cos\theta}$$

egyenletből vezessük le, hogy a bolygó akkor van a napjához a legközelebb, amikor $\theta = 0$, és hogy ez a távolság $r = r_0$!

T **6. A Kepler-egyenlet:** Egy bolygó adott időpontbeli helyzetének meghatározásához egy

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{2}\sin x = 0$$

formájú *Kepler-egyenletet* kell megoldanunk.

(a) Mutassuk meg, hogy ennek a konkrét egyenletnek létezik $x = 0$ és $x = 2$ között megoldása!

(b) Számológépet vagy számítógépet használva keressük meg a megoldást a Newton-módszer segítségével olyan pontosan, ahogy csak sikerül! (Ne felejtsük el radián módba kapcsolni a számológépet!)

7. A 13.6. részben láttuk, hogy egy síkon mozgó részecske sebességvektora

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta.$$

(a) Írjuk fel $\dot{x}$-ot és $\dot{y}$-ot $\dot{r}$ és $r\dot{\theta}$ függvényeként a $\mathbf{v}\cdot\mathbf{i}$ és $\mathbf{v}\cdot\mathbf{j}$ skalárszorzat kiszámolásával!

(b) Írjuk fel $\dot{r}$-ot és $r\dot{\theta}$-ot $\dot{x}$ és $\dot{y}$ függvényeként a $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_r$ és $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_\theta$ skalárszorzat kiszámolásával!

8. Írjuk fel a polárkoordináta-rendszerben adott $r = f(\theta)$ függvény görbületét f és deriváltjai segítségével!

9. A polárkoordináta-rendszer középpontján átmenő vékony pálca forog (a síkban) az origó körül 3 radián/másodperc sebességgel. Egy katicabogár a $(2,0)$ pontból indulva 1 cm/s sebességgel mászik a pálcán az origó felé.

(a) Írjuk fel a katicabogár sebesség- és gyorsulásvektorát polárkoordinátás alakban, amikor a bogár félúton (1 cm-re) van az origó felé!

T **(b)** Számoljuk ki milliméteres pontossággal a katicabogár által az origóig leírt pálya hosszát!

10. A perdületmegmaradás törvénye: Jelölje $\mathbf{r}(t)$ egy térben mozgó részecske helyvektorát, és tegyük fel, hogy a testre ható erő t függvényében

$$\mathbf{F}(t) = -\frac{c}{|\mathbf{r}(t)|^3}\mathbf{r}(t),$$

ahol c konstans. Egy m tömegű, $\mathbf{v}(t)$ sebességű test **perdülete** vagy **impulzusmomentuma** $\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times m\mathbf{v}(t)$. Bizonyítsuk be a perdületmegmaradás törvényét, azaz lássuk be, hogy $\mathbf{L}(t)$ nem függ t-től! (Emlékezzünk Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ mozgástörvényére!)

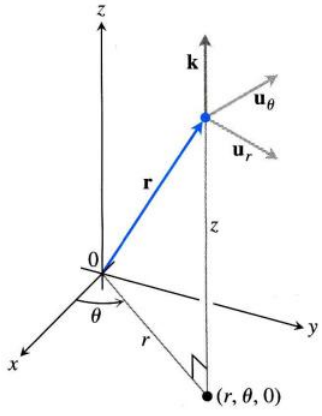
Hengerkoordináta-rendszer

11. Alapvektorok, és mozgás leírása hengerkoordináta-rendszerben: Ha egy térben mozgó részecske helyét és mozgását hengerkoordináta-rendszerben szeretnénk leírni, akkor praktikus az

$$\mathbf{u}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}, \quad \mathbf{u}_\theta = -(\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j}, \quad \mathbf{k}$$

vektorok által alkotott alaprendszer használata (lásd az ábrát). Ekkor a részecske helyvektora $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{k}$, ahol r a részecske

xy-síkra való merőleges vetületének origótól mért távolsága.



(a) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$ és $\mathbf{k}$ ebben a sorrendben egy jobbsodrású, egységnyi hosszú vektorokból álló koordináta-rendszert alkot!

(b) Mutassuk meg, hogy

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} = \mathbf{u}_\theta \qquad \text{és} \qquad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{u}_r.$$

(c) Feltéve, hogy a megfelelő t szerinti deriváltak léteznek, írjuk fel a $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ és $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ vektorokat $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$, $\mathbf{k}$, $\dot{r}$ és $\dot{\theta}$ segítségével! (A pontok t szerinti deriváltakat jelölnek.) A 13.6. részben láthattuk, hogy hogyan használhatóak ezek a formulák a bolygómozgás leírásához.

12. Ívhossz meghatározása hengerkoordinátákkal:

(a) Mutassuk meg, hogy ha $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$-et hengerkoordinátáták szerint fejtjük ki, akkor azt kapjuk, hogy $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$!

(b) Adjuk meg az előző összefüggés geometriai értelmezését a megfelelő téglatest éleinek és átlójának segítségével!

(c) Számoljuk ki az $r = e^\theta$, $z = e^\theta$, $0 \le \theta \le \ln 8$ görbe ívhosszát az (a) pontban felírt képlet használatával!

14. fejezet Parciális deriváltak

ÁTTEKINTÉS: A minket körülvevő világ jelenségeit tanulmányozva látjuk, hogy a mennyiségek legtöbbször több más mennyiségtől is függnek. Így az egyváltozós függvényeknél tárgyalt alapfogalmakat ki kell terjesztenünk többváltozós függvényekre is. Bár a szabályszerűségek lényegében ugyanazok maradnak, a vizsgálatok sokkal összetettebbek lesznek. A deriváltak vizsgálata is érdekesebb a több változó együttes hatása miatt. Ilyen függvények integráljait is széles körben használják, ezeket későbbi fejezetekben tárgyaljuk. A valószínűségszámítás, statisztika, áramlástan, elektromosságtan stb. természetes módon vezetnek el a többváltozós függvények tanulmányozásához.

14.1. Többváltozós függvények

Sok függvény függ több mint egy független változótól. A $V = \pi r^2 h$ függvény az egyenes henger térfogatát számítja ki az alapkör sugarából és a magasságából. Az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény a $z = x^2 + y^2$ paraboloid pontjának magasságát számolja a $P(x,y)$ pontban P koordinátáiból. A T hőmérséklet a Föld egy pontján függ az x szélességtől és az y hosszúságtól, amit úgy jelölhetünk, hogy $T = f(x,y)$.

A valós értékű többváltozós függvények ahhoz hasonlóan vannak megadva, ahogy azt az egyváltozósok alapján elképzeljük. Az értelmezési tartományaik rendezett számpároknak (számhármasoknak, ..., szám n-eseknek) halmazai, az értékkészleteik pedig a valós számoknak olyan részhalmazai, amilyenekkel eddig is dolgunk volt.

DEFINÍCIÓ: ***n*-változós függvény**

Legyen D a valós $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ szám-n-eseknek egy halmaza. A **valós értékű** f **függvény** a D minden eleméhez egy

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

valós értéket rendel. D a függvény **értelmezési tartománya**. Az f által felvett w értékek halmaza a **függvény értékkészlete**. A w szimbólum f **függő változója**, és f az n darab $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **független változó** függvénye. (Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változókat olykor a függvény **bemenő** vagy **input** változóinak, w-t a függvény **kimenő** vagy **output** változójának nevezzük.)

Ha a függvénynek két független változója van, akkor azokat általában x és y jelöli, és így az értelmezési tartomány az xy-sík egy részhalmazának felel meg.

Ha f-nek három független változója van, akkor ezeket általában x, y, z-nek hívjuk, és az értelmezési tartomány a tér egy része.

Az alkalmazásokban gyakran olyan betűket használunk a független változók jelölésére, amelyek emlékeztetnek azokra a mennyiségekre, amelyek helyett állnak. Amikor azt mondjuk, hogy az egyenes henger térfogata a sugarától és a magasságától függ, írhatjuk azt, hogy $V = f(r,h)$. Vagy ha még konkrétabban akarjuk kifejezni, írhatjuk, hogy $V = \pi r^2 h$. Mindkét esetben r és h a független változók, és V a függő változó.

A képlettel adott függvény helyettesítési értékét, mint eddig is, úgy számítjuk ki, hogy a változók megfelelő értékét a képletbe helyettesítjük.

1. PÉLDA: **Függvényérték kiszámítása**

Az $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ függvény értéke a $(3,0,4)$ pontban

$$f(3,0,4) = \sqrt{3^2+0^2+4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

A 12.1. alfejezetből tudjuk, hogy ez a függvény az (x,y,z) pont origótól vett távolságát adja meg Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben. □

Értelmezési tartomány és értékkészlet

Ha az értelmezési tartomány nincs külön megadva, és a függvény egy képlettel van definiálva, akkor szokás szerint az értelmezési tartományt úgy tekintjük, mint a legbővebb olyan halmazt, amire a képlet helyettesítési értéke számolható. Ha $f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$, akkor y nem lehet kevesebb, mint x^2, különben a valós f függvénynek komplex értéket kellene felvennie. Ha $f(x,y) = 1/(xy)$, akkor xy nem lehet nulla. Az értékkészlet a függő változó helyettesítési értékeiből áll.

2. PÉLDA: **Két- és háromváltozós függvények**

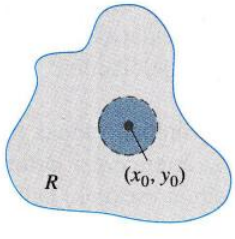
(a) Kétváltozós függvények

Függvény	Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$w = \sqrt{y-x^2}$	$y \geq x^2$	$[0,\infty)$
$w = \frac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty,0) \cup (0,\infty)$
$w = \sin xy$	teljes sík	$[-1,1]$

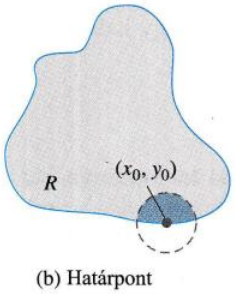
(b) Háromváltozós függvények

Függvény	Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$w = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$	teljes tér	$[0,\infty)$
$w = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$	$(x,y,z) \neq (0,0,0)$	$(0,\infty)$
$w = xy \ln z$	$z > 0$ féltér	$(-\infty,\infty)$

□



(a) Belső pont



(b) Határpont

14.1. ÁBRA: Egy T síktartomány belső és határpontjai. A belső pont szükségképpen T-hez tartozik. A határpontnak nem kell feltétlenül T-hez tartoznia.

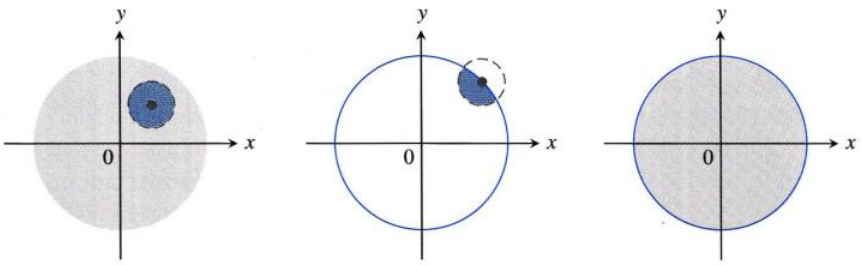
Kétváltozós függvények

A síktartományoknak az intervallumokhoz hasonlóan lehetnek belső pontjai és határpontjai. A zárt $[a,b]$ intervallum tartalmazza határpontjait, a nyílt (a,b) intervallum nem. Az $[a,b)$ intervallum se nem nyílt, se nem zárt.

DEFINÍCIÓ: **Belső és határpontok, nyílt és zárt halmazok**

Egy (x_0,y_0) pont a T tartomány (halmaz) **belső pontja**, ha van egy olyan pozitív sugarú (x_0,y_0) középpontú körlap, amely teljes egészében T-ben fekszik (14.1. ábra). Egy (x_0,y_0) pont a T tartomány (halmaz) **határpontja**, ha bármely pozitív sugarú (x_0,y_0) középpontú körlap tartalmaz a tartományhoz tartozó és a tartományhoz nem tartozó pontokat is.

A tartomány belső pontjai alkotják a **tartomány belsejét**, a határpontok a **tartomány határát**. A tartomány (halmaz) **nyílt**, ha minden pontja belső pont, **zárt**, ha tartalmazza minden határpontját (14.2. ábra).



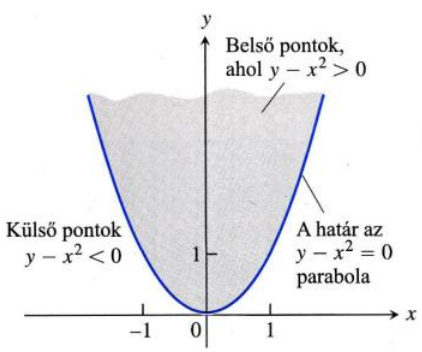
$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$
Nyílt egységkörlemez
Minden pont belső pont

$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$
Egységkörlemez
határa

$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
Zárt egységkörlemez
Tartalmazza minden
határpontját

14.2. ÁBRA: Origó középpontú körlap belső és határpontjai a síkban.

Az intervallumokhoz hasonlóan a síktartományok[1] között is vannak olyanok, amelyek se nem nyíltak, se nem zártak. Ha a 14.2. ábra nyílt köréhez hozzávesszük néhány határpontját, de nem az összeset, egy se nem nyílt, se nem zárt tartományt kapunk. A határpontok miatt nem lesz nyílt, a hiányzó határpontok miatt nem lesz zárt.



14.3. ÁBRA: Az $f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$ függvény értelmezési tartománya az árnyékolt rész, beleértve az $y = x^2$ határgörbét is (3. példa).

DEFINÍCIÓ: Korlátos és nem korlátos tartományok a síkban

Egy síktartomány vagy a sík egy ponthalmaza **korlátos**, ha benne fekszik egy kör belsejében. Ha nem, akkor a tartomány, illetve a ponthalmaz **nem korlátos**.

Példák korlátos halmazokra: szakaszok, háromszögek, háromszögek belseje, körvonalak, körlapok stb. Példák nem korlátos halmazokra: egyenesek, koordináta-tengelyek, félsíkok, síknegyedek, maga a sík stb.

3. PÉLDA: **Kétváltozós függvény értelmezési tartománya**

Adjuk meg az $f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Mivel f ott van definiálva, ahol $y - x^2 \geq 0$, az értelmezési tartomány egy zárt, nem korlátos tartomány a síkon (14.3. ábra). Az $y = x^2$ parabola a tartomány határa. A parabolagörbe feletti pontok alkotják a tartomány belsejét. □

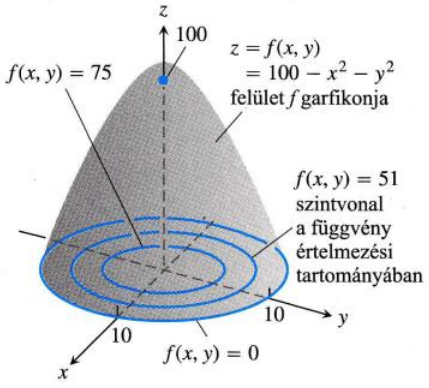
Kétváltozós függvény grafikonja, szintvonalai

Kétféle gyakran használt geometriai szemléltetése van a kétváltozós függvényeknek. Az egyik az, hogy megrajzolunk és a függvényértékekkel megcímkézünk olyan görbéket a síkon, amelyek mentén a függvény konstans. A másik, hogy a három-dimenziós térben felrajzoljuk a $z = f(x,y)$ felületet.

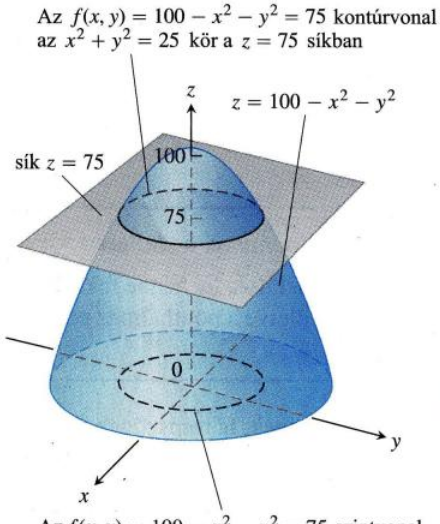
DEFINÍCIÓ: Szintvonal, grafikon, felület

A sík azon pontjainak összességét, amelyekben az f függvény ugyanazt a konstans értéket veszi fel, azaz $f(x,y) = c$, az f függvény **szintvonalának**, vagy **nívóvonalának** hívjuk. A tér $(x,y,f(x,y))$ koordinátájú pontjainak összességét az f **grafikonjának** nevezzük. A grafikont a $z = f(x,y)$ **felületnek** is hívjuk.

[1] Nem minden ponthalmazt nevezünk tartománynak. Ez a könyv a *tartomány* szót nem definiálja. A mérnöki gyakorlatban általában előforduló, „viszonylag szép" ponthalmazokat jelöli vele.



14.4. ÁBRA: Az $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ függvény grafikonja néhány szintvonallal (4. példa).



14.5. ÁBRA: A $z = c$ sík, ami párhuzamos az xy-síkkal, a $z = f(x,y)$ felületet egy kontúrvonalban metszi.

4. PÉLDA: **Kétváltozós függvény grafikonja**

Rajzoljuk meg az $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ függvényt, és húzzuk be az $f(x,y) = 0$, $f(x,y) = 51$ és $f(x,y) = 75$ konstansokhoz tartozó szintvonalakat f értelmezési tartományába!

Megoldás: f értelmezési tartománya az egész xy-sík, és értékkészlete minden szám, ami kisebb vagy egyenlő 100. A $z = 100 - x^2 - y^2$ grafikonból egy darabot mutat a 14.4. ábra.

Az $f(x,y) = 0$ szintvonal az xy-sík azon pontjaiból áll, amelyekre

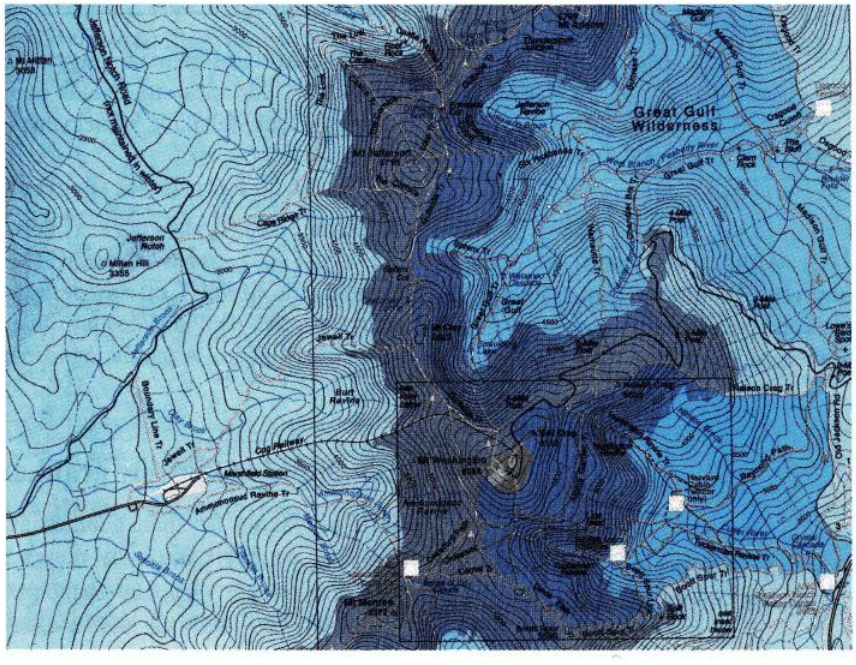
$$f(x,y) = 100 - x^2 - y^2 = 0 \quad \text{vagy} \quad x^2 + y^2 = 100,$$

ami egy origó középpontú, 10 sugarú kör. Hasonlóképpen, az $f(x,y) = 51$ és $f(x,y) = 75$ görbék is körök.

$$f(x,y) = 100 - x^2 - y^2 = 51 \quad \text{vagy} \quad x^2 + y^2 = 49.$$
$$f(x,y) = 100 - x^2 - y^2 = 75 \quad \text{vagy} \quad x^2 + y^2 = 25.$$

Az $f(x,y) = 100$ szintvonal egyetlen pontból áll, az origóból, de ez is egy szintvonal. □

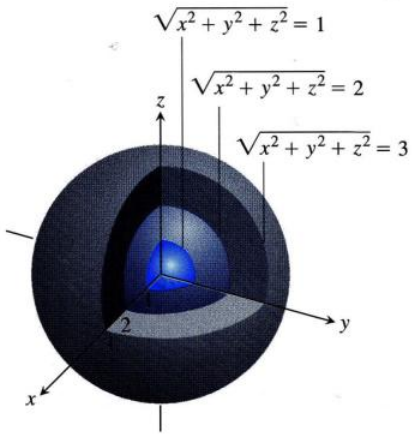
Az a térgörbe, amiben a $z = c$ sík metszi a $z = f(x,y)$ felületet, azokból a pontokból áll, amelyekben a függvényérték $f(x,y) = c$. Ezt **kontúrvonalnak** hívjuk, megkülönböztetendő az $f(x,y) = c$ szintvonaltól, ami f értelmezési tartományában fut. A 14.5. ábra az $f(x,y) = 75$ kontúrvonalat mutatja a $z = 100 - x^2 - y^2$ felületen, amelyet az $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ függvény definiál. A kontúrvonal pontosan az $x^2 + y^2 = 25$ görbe felett fekszik, ami az $f(x,y) = 25$ szintvonal a függvény értelmezési tartományában.



14.6. ÁBRA: Szintvonalak a Washington-hegy térképén (New Hampshire). (Az Appalachian Mountain Club engedélyével.)

Háromváltozós függvények

Az f kétváltozós függvény értelmezési tartományának azon pontjai, amelyekben a függvény konstans értéket vett fel, $f(x,y) = c$, egy szintvonalat alkottak. A térben azok a pontok, ahol a háromváltozós f függvény konstans értéket vesz fel, egy $f(x,y,z) = c$ szintfelületet alkotnak a függvény értelmezési tartományában.



14.7. ÁBRA:
Az $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ függvény szintfelületei koncentrikus gömbök (5. példa).

DEFINÍCIÓ: Szintfelület

Azt az (x,y,z) ponthalmazt a térben, ahol a háromváltozós f függvény konstans értéket vesz fel, azaz $f(x,y,z)=c$, az f függvény **szintfelületének** nevezzük.

Mivel egy háromváltozós függvény szokásos grafikai megjelenítésénél a grafikon pontjai az $(x,y,z,f(x,y,z))$ négydimenziós térben lennének, nem tudjuk kifejezően felvázolni a háromdimenziós térben, de a viselkedéséről képet alkothatunk a szintfelületek segítségével. (Bár a háromdimenziós felületeknek is *általában csak kétdimenziós vetületeit vázoljuk fel a papíron, de tapasztalataink* alapján azt a képet fantáziánk képes a térbe helyezni.)

5. PÉLDA: Háromváltozós függvény szintfelületeinek megadása

Adjuk meg az

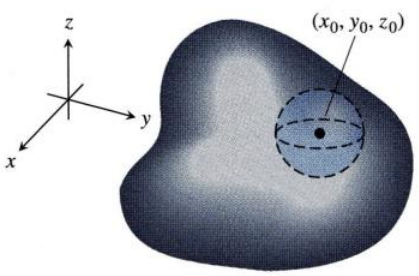
$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

függvény szintfelületeit!

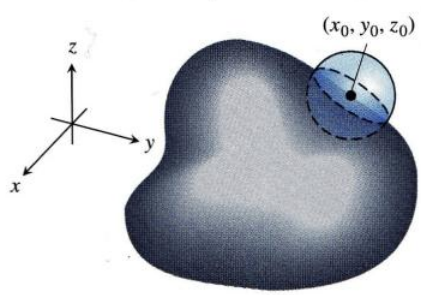
Megoldás: A függvény értéke az (x,y,z) pont távolsága az origótól. Minden szintfelület $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=c$, $c>0$, egy c sugarú, origó középpontú gömb. A 14.7. ábra ezekre mutat példát egy metszetkép segítségével. A $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=0$ egyedül az origóból áll.

Nem rajzoljuk meg a függvény grafikonját. A szintfelületeket vizsgáljuk a függvény értelmezési tartományában. Ha egy c sugarú, origó középpontú gömbön maradunk, a függvény értéke nem változik. Ha egyikről a másikra térünk, a függvény értéke megváltozik. Növekszik, ha távolodunk az origótól, csökken, ha közeledünk felé. Az érték változása függ attól, milyen irányban mozgunk. A változásnak az iránytól való függése fontos tulajdonság, amire majd visszatérünk a 14.5. alfejezetben. □

A tartomány belsejének, határának definíciója, a nyílt, zárt, korlátos és nem korlátos tartomány definíciója hasonló a kétdimenzióséhoz, csak itt a több dimenzió miatt pozitív sugarú gömbtartományok veszik át a körlapok szerepét.



(a) Belső pont



(b) Határpont

14.8. ÁBRA: Egy térbeli tartomány belső, ill. határpontja.

DEFINÍCIÓ: Tartomány belső és határpontjai térben

Egy (x_0,y_0,z_0) pont egy tartomány **belső pontja**, ha középpontja egy olyan gömbnek, ami teljes egészében a tartományban van (14.8a ábra). Egy (x_0,y_0,z_0) pont **határpont**, ha minden olyan gömbnek, aminek (x_0, y_0, z_0) a középpontja, van a tartományhoz tartozó és a tartományhoz nem tartozó pontja is (14.8b ábra). Egy tartomány **belseje** a belső pontok halmaza, a **határa** pedig a határpontok halmaza.
Egy tartomány **nyílt**, ha minden pontja belső pont. Egy tartomány **zárt**, ha tartalmazza minden határpontját.

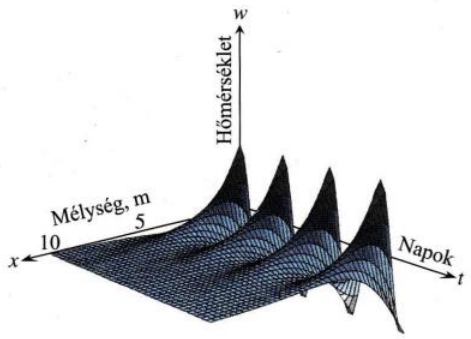
Nyílt tartomány a térben pl.: egy gömb belseje, a $z>0$ nyílt féltér, az első nyolcad (ahol x,y,z mind pozitív), és az egész tér. Zárt tartomány a térben pl.: görbék, síkok, a $z\geq 0$ zárt féltér, az első térnyolcad a határoló koordinátasíkokkal, és az egész tér is (ugyanis nincs határpontja).

Egy olyan gömb, aminek felülete részben hiányzik, vagy olyan kocka, aminek hiányzik egy oldala, éle vagy csúcsa, se nem nyílt, se nem zárt halmazok.

A több mint három változótól függő függvények szintén fontosak. Például, a hőmérséklet egy test adott $P(x,y,z)$ pontjában nem csak a helytől, az időtől is függhet $T=f(x,y,z,t)$.

Számítógépes grafika

A számítógépek és kalkulátorok háromdimenziós grafikus programjai lehetővé teszik, hogy megjelenítsük kétváltozós függvények grafikonjait egy-két gombnyomással. A grafikonból gyakran gyorsabban tudunk bizonyos információkat megkapni, mint a képletből.



14.9. ÁBRA: Ez a $w = \cos(1{,}7 \times 10^{-2}t - 0{,}2x)e^{-0{,}2x}$ függvény számítógép által generált grafikonja, ami a földalatti hőmérséklet változását mutatja a felszíni hőmérséklethez viszonyítva. A változás $x = 5$ m mélységben már csak 5%-a felszíninek, és $x = 10$ m mélységben már kevesebb, mint 0,25%-a. (Az ábrát Norton Starr készítette.)

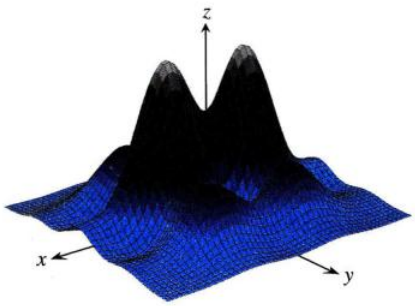
6. PÉLDA: **A hőmérséklet a Föld felszíne alatt**

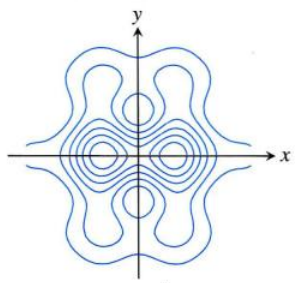
A hőmérséklet a Föld felszíne alatt az x mélységnek és annak a t időnek a függvénye, hogy milyen évszakban járunk. Ha a mélységet méterben mérjük, az időt napokban, attól a naptól, ami az év legmelegebb napja általában, akkor a hőmérséklet változását a következő függvénnyel írhatjuk le:

$$w = e^{-0{,}6x}\cos(1{,}7 \cdot 10^{-2}t - 0{,}6x).$$

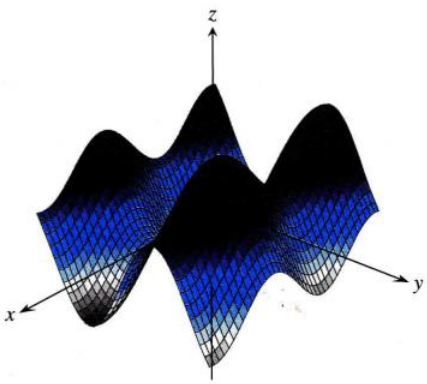
A függvény nem a hőmérsékletet adja meg, hanem a hőmérséklet változását a felszínen mért változáshoz képest, ha feltesszük, hogy a felszíni hőmérséklet (átskálázás után) a $+1$ és -1 értékek között változik. A 14.9. ábrán láthatjuk, hogy 5 méter mélységben a hőmérsékletváltozás (az ábrán a függőleges amplitúdó) a felszínen mért legnagyobb változásnak csak 5%-a, 10 méter mélységben pedig a hőmérséklet gyakorlatilag állandó. A grafikon azt is mutatja, hogy 5 méter mélységben a hőmérséklet kb. fél év fáziskésésben van a felszínhez képest. Így ha januárt feltételezzük a leghidegebb hónapnak, akkor ilyen mélységben ekkor van a lemelegebb. Tehát az évszakok 5 méter mélyen megfordulnak. □

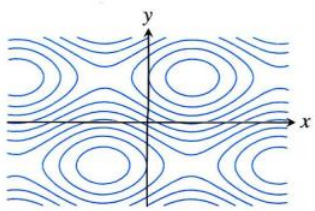
A 14.10. ábra néhány függvény számítógéppel kirajzolt képét mutatja, a szintvonalaikkal együtt.



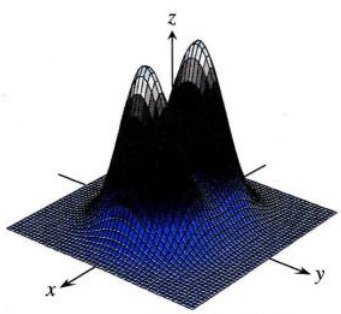


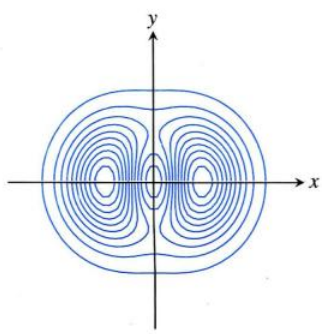
(a) $z = e^{-(x^2+y^2)/8}(\sin x^2 + \cos y^2)$



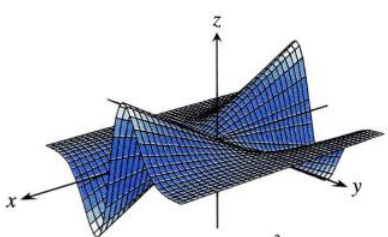


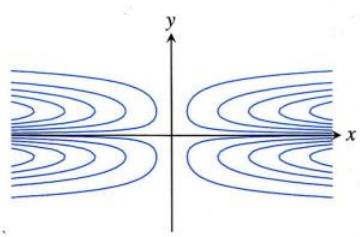
(b) $z = \sin x + 2 \sin y$





(c) $z = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$





(d) $z = xye^{-y^2}$

14.10. ÁBRA: Néhány kétváltozós függvény számítógép által generált grafikonja és szintvonalai.

14.1. Feladatok

Értelmezési tartomány, értékkészlet, szintvonal

A következő feladatokban **(a)** adjuk meg a függvény értelmezési tartományát, **(b)** határozzuk meg az értékkészletét, **(c)** adjuk meg a szintvonalakat, **(d)** határozzuk meg az értelmezési tartomány határait, **(e)** állapítsuk meg, hogy az értelmezési tartomány nyílt, vagy zárt halmaz, vagy egyik sem, **(f)** döntsük el, hogy az értelmezési tartomány korlátos vagy nem! (1–12. feladatok)

1. $f(x,y) = y - x$

2. $f(x,y) = \sqrt{y-x}$

3. $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$

4. $f(x,y) = x^2 - y^2$

5. $f(x,y) = xy$

6. $f(x,y) = y/x^2$

7. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

8. $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$

9. $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

10. $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

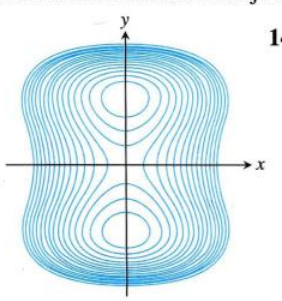
11. $f(x,y) = \arcsin(y-x)$

12. $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

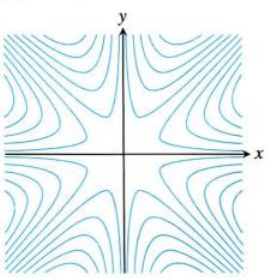
Felületekhez tartozó szintvonalak felismerése

A 13–18. feladatokban az **(a)–(f)** függvények közül válasszuk ki, melyiknek a szintvonalait mutatja az ábra!

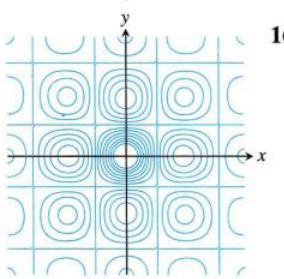
13.



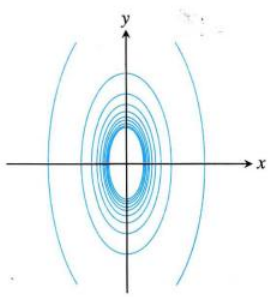
14.



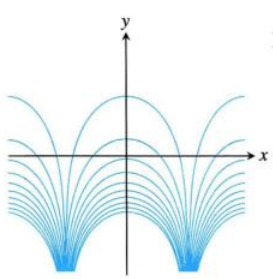
15.



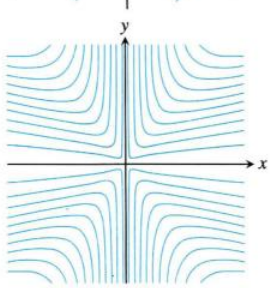
16.



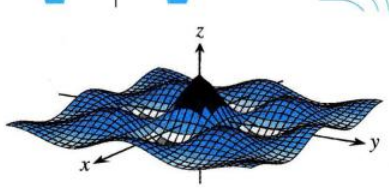
17.



18.

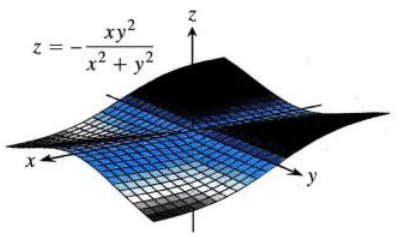


(a)

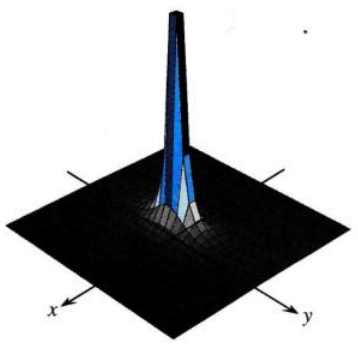


$z = (\cos x)(\cos y)\, e^{-\sqrt{x^2+y^2}/4}$

(b)

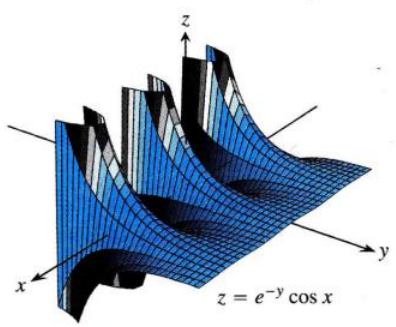


(c)



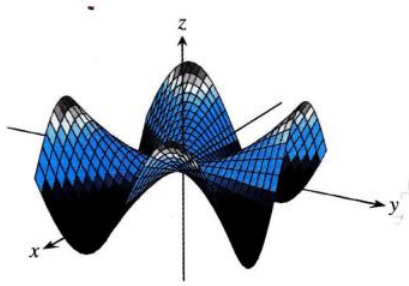
$z = \frac{1}{4x^2+y^2}$

(d)



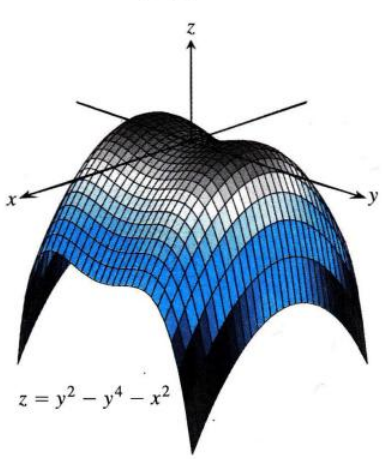
$z = e^{-y}\cos x$

(e)



$z = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

(f)



$z = y^2 - y^4 - x^2$

Kétváltozós függvények felvázolása képlet alapján

Szemléltessük a 19–28. feladatokban képlettel adott függvényeket kétféleképpen: **(a)** vázoljuk fel a $z = f(x,y)$ felületet, **(b)** rajzoljunk fel jó néhány szintvonalat, és mindegyikre írjuk rá a függvényértéket!

19. $f(x,y) = y^2$

20. $f(x,y) = 4 - y^2$

21. $f(x,y) = x^2 + y^2$

22. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

23. $f(x,y) = -(x^2 + y^2)$

24. $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

25. $f(x,y) = 4x^2 + y^2$

26. $f(x,y) = 4x^2 + y^2 + 1$

27. $f(x,y) = 1 - |y|$

28. $f(x,y) = 1 - |x| - |y|$

Szintvonal meghatározása

A 29–32. feladatokban adjuk meg annak a szintvonalnak az egyenletét, amelyik átmegy a megadott ponton!

29. $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$, $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$

30. $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 1}$, $(1,0)$

31. $f(x,y) = \int_x^y \frac{dt}{1+t^2}$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

32. $f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n$, $(1,2)$

Szintfelületek felvázolása

A 33–40. feladatokban vázoljuk fel a függvény egy jellegzetes szintfelületét!

33. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

34. $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

35. $f(x,y,z) = x + z$

36. $f(x,y,z) = z$

37. $f(x,y,z) = x^2 + y^2$

38. $f(x,y,z) = y^2 + z^2$

39. $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$

40. $f(x,y,z) = (x^2/25) + (y^2/16) + (z^2/9)$

Szintfelület egyenlete

A 41–44. feladatokban adjuk meg az adott ponton átmenő szintfelület egyenletét!

41. $f(x,y,z) = \sqrt{x-y} - \ln z$, $(3,-1,1)$

42. $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y + z^2)$, $(-1,2,1)$

43. $g(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!z^n}$, $(\ln 2, \ln 4, 3)$

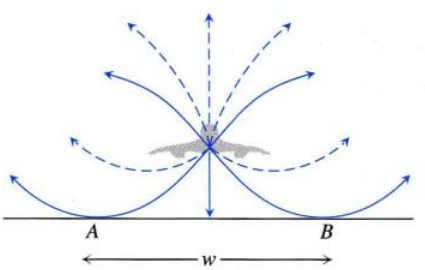
44. $g(x,y,z) = \int_x^y \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} + \int_{\sqrt{2}}^z \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$, $(0, 1/2, 2)$

További példák és feladatok

45. Háromváltozós függvény maximuma egy egyenes mentén a térben: Van az $f(x,y,z) = xyz$ függvénynek maximális értéke az $x = 20 - t$, $y = t$, $z = 20$ egyenes valamely pontjában? Ha igen, hol? (*Útmutatás*: Az egyenes mentén a $w = f(x,y,z)$ kifejezés a t változónak differenciálható függvénye.)

46. Függvény minimuma egy egyenes mentén a térben: Van-e az $f(x,y,z) = xy - z$ függvénynek minimális értéke az $x = t - 1$, $y = t - 2$, $z = t + 7$ egyenes valamely pontjában? (*Útmutatás*: Az egyenes mentén a $w = f(x,y,z)$ kifejezés t-nek differenciálható függvénye.)

47. A Concorde hangrobbanása: A gép által keltett hanghullámok elhajlanak, ahogy a hőmérséklet változik azon magasság felett és alatt, ahol a gép repül. A hangrobbanás hatássávja a földön az a sáv, ami a lökéshullámot közvetlenül a gépről kapja, nem az atmoszférából visszaverődve, ill. a földről szóródva. A hatássávot azok a sugarak határozzák meg, amelyek a föld felé indulnak közvetlenül a gép alatt levő pontból. (Lásd a mellékelt ábrát.)



Hangrobbanás sáv

Annak a sávnak a szélessége, ahol az emberek a földön közvetlenül, nem az atmoszféráról visszaverődve hallják a hangrobbanást, és amit w-vel jelölünk, függ a következőktől:

T = a levegő hőmérséklete a föld felszínén (Kelvin-fok)

h = a Concorde magassága (kilométerben)

d = a függőleges hőmérséklet-gradiens (hőmérsékletesés Kelvin-fokban kilométerenként)

A w-re vonatkozó képlet

$$w = 4\left(\frac{Th}{d}\right)^{1/2}.$$

A Washingtoni Concorde-járat Európából a Nantucket-szigettől délre haladó légifolyósón éri el az Amerikai Egyesült Államokat, 16,8 km magasságban. Ha a felszíni hőmérséklet 290 K, és a függőleges hőmérséklet-gradiens 5 K/km, hány kilométerre délre repüljön a gép Nantuckettől, hogy a hangrobbanás hatássávja ne érje a szigetet? (N. K. Balachandra, W. L. Donn, és D. H. Rind: „Concorde Sonic Booms as an Atmospheric Probe" *Science*, Vol. 197 (1977. júl. 1.), pp. 47–49.)

48. Tudjuk, hogy egy egyetlen valós változótól függő valós függvény grafikonja egy két-koordinátájú tér egy részhalmaza, két valós változótól függő valós függvény grafikonja egy három-koordinátájú tér egy részhalmaza. Egy három valós változótól függő valós függvény grafikonja egy négy-koordinátájú térnek egy részhalmaza. Hogyan definiáljuk egy $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ négy valós változótól függő valós függvény grafikonját? És hogyan egy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n valós változós valós függvényét?

Számítógépes vizsgálatok

Explicit alakban adott felületek

Használjunk számítógépes programot a felsorolt lépések végrehajtására a 49–52. feladatokban!

(a) Rajzoltassuk ki a felületet a megadott téglalap felett!

(b) Rajzoltassunk számos szintvonalat a téglalapba!

(c) Rajzoltassuk meg f szintvonalát az adott ponton keresztül!

49. $f(x,y) = x\sin\frac{y}{2} + y\sin 2x$, $0 \le x \le 5\pi$, $0 \le y \le 5\pi$, $P(3\pi, 3\pi)$

50. $f(x,y) = (\sin x)(\cos y)e^{\sqrt{x^2+y^2}/8}$, $0 \le x \le 5\pi$ $0 \le y \le 5\pi$, $P(4\pi, 4\pi)$

51. $f(x,y) = \sin(x + 2\cos y)$, $-2\pi \le x \le 2\pi$, $-2\pi \le x \le 2\pi$, $P(\pi, \pi)$

52. $f(x,y) = e^{(x^{0,1}-y)}\sin(x^2+y^2)$, $0 \le x \le 2\pi$, $-2\pi \le y \le \pi$, $P(\pi, -\pi)$

Implicit alakban adott felületek

Használjunk számítógépes programot az 53–56. feladatokban adott felületek kirajzoltatására!

53. $4\ln(x^2+y^2+z^2) = 1$

54. $x^2 + z^2 = 1$

55. $x + y^2 - 3z^2 = 1$

56. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) - (\cos y)\sqrt{x^2+z^2} = 2$

Paraméteresen adott felületek

Úgy, ahogy a síkban az $x = f(t)$, $y = g(t)$ egyenlőségekkel görbét tudunk megadni a t paraméter valamely I intervallumhoz tartozó értékeire, a térben felületet tudunk megadni az $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$, $z = h(u,v)$ egyenlőségekkel, az uv sík egy tartományán definiálva, amit a következő feladatokban $a \le u \le b$, $c \le v \le d$ téglalapnak feltételezünk. Több számítógépes program is tud paraméteresen adott felületeket kirajzolni. (A paraméteresen adott felületeket részletesen 16.6. alfejezetben tárgyaljuk.) Használjunk számítógépes programot az 57–60. feladatokban adott paraméteres felületek megrajzolására! Rajzoljunk meg néhány szintvonalat is!

57. $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u$, $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 2\pi$

58. $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$, $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 2\pi$

59. $x = (2+\cos u)\cos v$, $y = (2+\cos u)\sin v$, $z = \sin u$, $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 2\pi$

60. $x = 2\cos u\cos v$, $y = 2\cos u\sin v$, $z = 2\sin u$, $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le \pi$.

14.2. Határérték és folytonosság magasabb dimenzióban

Ebben az alfejezetben többváltozós függvények határértékét és folytonosságát vizsgáljuk. Ezek a fogalmak a két- és háromváltozós esetben is az egyváltozós esethez hasonlóan vannak definiálva, de látni fogjuk, hogy lényegesen nehezebb kezelni őket.

Határérték

Ha az $f(x,y)$ értékek tetszőlegesen közel vannak egy L értékhez minden olyan (x,y) pontban, ami elég közel van (x_0,y_0)-hoz, de nem esik egybe (x_0,y_0)-lal, akkor azt mondjuk, hogy f tart L-hez, ha (x,y) tart (x_0,y_0)-hoz. A közeledés iránya vagy módja fontos kérdés lehet, ahogy azt néhány példán látni fogjuk.

DEFINÍCIÓ: Kétváltozós függvény határértéke

Tegyük fel, hogy az (x_0,y_0) pont olyan, hogy tetszőleges $\delta > 0$ esetén van olyan (x,y) pont, ami az f kétváltozós függvény értelmezési tartományához tartozik, és $0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$. Azt mondjuk, hogy az $f(x,y)$ kétváltozós függvénynek az (x_0,y_0) pontban van **határértéke**, és ez L, azaz

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L,$$

ha tetszőleges pozitív ε-hoz van olyan pozitív δ, hogy f értelmezési tartományának minden olyan (x,y) pontjára, amire

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \quad \text{fennáll, igaz, hogy} \quad |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

A definíció azt mondja, hogy az $f(x,y)$ és L közötti távolság tetszőlegesen kicsi lesz, valahányszor az (x,y) és (x_0,y_0) közötti távolság elég kicsi, de nem nulla.

A határérték definíciója az értelmezési tartomány (x_0,y_0) határpontjaira is alkalmazható, csak azt követeljük meg, hogy (x,y) az értelmezési tartomány pontja legyen. Megmutatható, ahogy az egyváltozós függvényekre is, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k = k \quad \text{bármilyen } k \text{ konstansra}$$

Például, az első állításban $f(x,y) = x$ és $L = x_0$. A határérték definícióját használva, legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ha $\delta = \varepsilon$-t tekintünk, akkor az

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta = \varepsilon$$

egyenlőtlenségből

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2} < \varepsilon,$$
$$|x-x_0| < \varepsilon, \qquad \sqrt{a^2} = |a|$$
$$|f(x,y) - x_0| < \varepsilon \qquad x = f(x,y)$$

következik. Azaz

$$|f(x,y) - x_0| < \varepsilon \quad \text{mindig, ha} \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta.$$

Így

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0.$$

Be lehet bizonyítani, hogy ha két függvény mindegyikének van határértéke egy adott pontban, akkor összegüknek, szorzatuknak stb. is van határértéke.

1. TÉTEL: Kétváltozós függvények határértékének tulajdonságai

A következő szabályok érvényesek: Ha L, M és k valós számokat jelölnek és

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{és} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$$

akkor

1. *Összeg:* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = L + M$
2. *Különbség:* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) - g(x,y)) = L - M$
3. *Szorzat:* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) \cdot g(x,y)) = L \cdot M$
4. *Szorzás konstanssal:* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k(f(x,y)) = kL$
5. *Hányados:* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$, ha $M \neq 0$

6. *Hatványozás:* Ha r és s relatív prím egészek, és $s \neq 0$, feltéve, hogy $L^{r/s}$ valós szám, ($r/s < 0$ esetén feltesszük, hogy $L \neq 0$, páros s esetén feltesszük, hogy $L > 0$,) akkor

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y))^{r/s} = L^{r/s}.$$

Nem bizonyítjuk ezt a tételt, csak szemléletes magyarázatát adjuk annak, miért igaz. Ha (x,y) elég közel van (x_0,y_0)-hoz, de $(x,y) \neq (x_0,y_0)$, akkor $f(x,y)$

közel van L-hez, és $g(x,y)$ közel van M-hez. Kézenfekvő, hogy $f(x,y)+g(x,y)$ közel van $L+M$-hez; $f(x,y)-g(x,y)$ közel van $L-M$-hez; $f(x,y)g(x,y)$ közel van LM-hez, és így tovább. Az 1. Tételt alkalmazva polinomokra és racionális függvényekre az a hasznos és kényelmes eredmény adódik, hogy a határérték, $(x,y)\to(x_0,y_0)$ esetén, egyszerűen az (x_0,y_0) pontbeli helyettesítési értékkel számolható, ha a függvény értelmezve van ebben a pontban.

1. PÉLDA: **Határértékszámítás**

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3} = \frac{0-(0)(1)+3}{(0)^2(1)+5(0)(1)-(1)^3} = -3$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(3)^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ □

2. PÉLDA: **Határértékszámítás**

Határozzuk meg a következő határértéket: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

Megoldás: Mivel a nevező nullához tart, nem tudjuk az 1. Tétel hányadosszabályát használni. Megszorozva a számlálót és nevezőt is $(\sqrt{x}+\sqrt{y})$-nal:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-xy)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \qquad \text{Egyszerűsítve } x-y\neq 0\text{-val} \\ &= 0(\sqrt{0}+\sqrt{0}) = 0.\end{aligned}$$

Az $(x-y)$ tényezővel azért egyszerűsíthetünk, mert az $y=x$ egyenes nem tartozik a függvény értelmezési tartományához. □

3. PÉLDA: **A határérték definíciójának alkalmazása**

Mennyi $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2}$, ha létezik?

Megoldás: Ha az $x=0$ egyenes mentén közelítünk és $y\neq 0$, a függvény azonosan 0. Ha az $y=0$ egyenes mentén közelítünk, és $x\neq 0$, akkor szintúgy. Így ha a határérték egyáltalán létezik, akkor nullának kell lennie. Ahhoz, hogy ezt ellenőrizzük, használjuk a határérték definícióját.

Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges, adott érték. Találnunk kellene olyan $\delta>0$ értéket, hogy

$$\left|\frac{4xy^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta,$$

vagy egyszerűsítve

$$\frac{4|x|y^2}{x^2+y^2}<\varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta.$$

Mivel $y^2\le x^2+y^2$,

$$\frac{4|x|y^2}{x^2+y^2}\le 4|x| = 4\sqrt{x^2}\le 4\sqrt{x^2+y^2}.$$

Így ha $\delta=\varepsilon/4$, és $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$, akkor

$$\left|\frac{4xy^2}{x^2+y^2}\right|\le 4\sqrt{x^2+y^2}<4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)=\varepsilon.$$

A határérték definíciójából következően

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2} = 0.$$ □

Folytonosság

Ahogy az egyváltozós függvények esetében is, a folytonosságot a határérték segítségével definiáljuk.

DEFINÍCIÓ: Kétváltozós függvény folytonossága

Egy kétváltozós $f(x,y)$ függvény **folytonos az** (x_0,y_0) **pontban**, ha

1. f-nek van (x_0,y_0)-ban helyettesítési értéke,
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ létezik,
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

Egy függvényt **folytonosnak** nevezünk, ha folytonos az értelmezési tartományának minden pontjában.

Ahogy a határérték, a folytonosság is vonatkozik az értelmezési tartomány határpontjaira is, nem csak a belső pontokra. Csak arra kell tekintettel lenni, hogy az (x,y) pont mindig az értelmezési tartományhoz tartozzon.

Ahogy az 1. Tétel alapján várhattuk, folytonos függvények algebrai kifejezései minden pontban folytonosak, ahol a kifejezésben levő függvények léteznek. Ez azt jelenti, hogy számszoros, összeg, szorzat, hányados, hatvány folytonos, ahol definiálva van. Speciálisan, a kétváltozós polinomok és racionális függvények folytonosak minden pontban, ahol definiálva vannak.

4. PÉLDA: Egyetlen pontban nemfolytonos függvény

Mutassuk meg, hogy az

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény mindenütt folytonos, kivéve az origót (14.11. ábra)!

Megoldás: Az f függvény az origó kivételével minden pontban x-nek és y-nak racionális függvénye, így folytonos. A függvény definiálva van $(0,0)$-ban is, de nem folytonos, mert ahogy azt meg fogjuk mutatni, itt nincs határértéke. Különböző irányból közelítve az origóhoz, más és más értékhez közelítenek a függvényértékek. Ha az $y = mx$ egyenes mentén közelítünk az origóhoz, a függvény konstans értéket vesz fel:

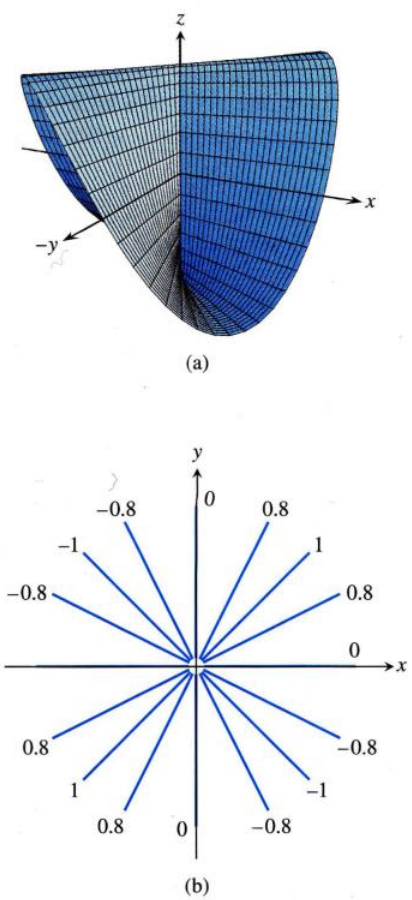
$$f(x,y)\Big|_{y=mx} = \frac{2xy}{x^2+y^2}\Big|_{y=mx} = \frac{2x(mx)}{x^2+m^2x^2} = \frac{2m}{1+m^2}.$$

Következésképp f-nek ez az érték a határértéke ezen egyenes mentén:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{ha } y=mx}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[f(x,y)\Big|_{y=mx} \right] = \frac{2m}{1+m^2}$$

Ez az érték különböző m-ekre más és más, tehát nincs egyetlen olyan érték, amit a függvény közelítene az origóban. Nincs határértéke, tehát nem folytonos. □

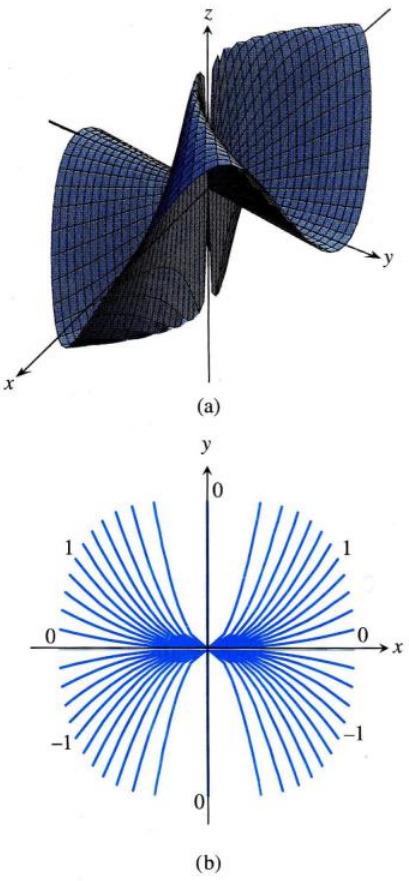
A 4. példa egy fontos esetet illusztrál a kétváltozós, ill. akárhány változós függvények esetére. Ahhoz, hogy létezzen határérték egy pontban, bárhogyan is közelítünk a ponthoz, a függvényértékeknek ugyanahhoz az értékhez kell közelíteniük. Ha találunk akár csak két olyan utat, hogy a függvényértékek nem ugyanahhoz a számhoz tartanak, akkor a függvénynek nincs határértéke az adott pontban.



14.11. ÁBRA: **(a)** Az

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$

függvény grafikonja. A függvény az origó kivételével mindenütt folytonos. **(b)** A függvény szintvonalai (4. példa).



14.12. ÁBRA: (a) Az
$$f(x,y)=\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)}$$
függvény grafikonja. Az ábra is sugallja, és a (b) részben látható szintvonalak megerősítik, hogy nem létezik a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ határérték.

Két-út vizsgálat határérték nemlétezésének kimutatására

Ha egy f függvény értékeinek különböző határértéke adódik az (x_0,y_0) pontot különböző utakon megközelítve, akkor $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nem létezik.

5. PÉLDA: **A két-út vizsgálat alkalmazása**

Mutassuk meg, hogy a
$$f(x,y)=\frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$
függvénynek nincs határértéke az origóban (14.12. ábra)!

Megoldás: A határértéket nem tudjuk egyszerű helyettesítéssel megállapítani, mert 0/0 adódik. Ha az előző példához hasonlóan, egyenesek mentén tartunk az origóhoz, minden irányból 0 határértéket kapunk. Ha $y=kx^2$, $x\neq 0$ parabolák mentén közelítünk:
$$f(x,y)\Big|_{y=kx^2}=\frac{2x^2y}{x^4+y^2}\Big|_{y=kx^2}=\frac{2x^2(kx^2)}{x^4+k^2x^4}=\frac{2k}{1+k^2}.$$
Következésképp
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{ha } y=kx^2}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[f(x,y)\Big|_{y=kx^2}\right]=\frac{2k}{1+k^2}.$$
Ez a határérték függ k-tól, azaz attól, hogy melyik parabola mentén közelítünk. Pl. ha $y=x^2$ mentén, akkor 1, ha viszont $k=0$, azaz az x-tengely mentén, akkor 0. Így f-nek nincs határértéke. □

Folytonos függvényekből képzett összetett függvények is folytonosak. A bizonyítás, amit itt most nem közlünk, nagyon hasonló az egyváltozós esethez (10. Tétel a 2.6. alfejezetben).

Összetett függvények folytonossága

Ha f folytonos (x_0,y_0)-ban, és g egy egyváltozós függvény, amelyik folytonos $f(x_0,y_0)$-ban, akkor a $h=g\circ f$ $\big(h(x,y)=g(f(x,y))\big)$ összetett függvény is folytonos (x_0,y_0)-ban.

Például, az
$$e^{x-y},\quad \cos\frac{xy}{x^2+1},\quad \ln(1+x^2y^2)$$
összetett függvények folytonosak minden (x,y) pontban. Akárcsak az egyváltozós esetben, az állítás nem megfordítható, azaz az összetett függvény folytonossága nem vonja maga után a komponensek folytonosságát.

Természetesen hasonló állítások igazak az $f(x(u,v),y(u,v))$, $f(x(t),y(t))$ stb. alakú függvények esetében is.

Függvények több, mint két változóval

A határérték és folytonosság definíciói csakúgy, mint az összegre, szorzatra, hányadosra, hatványokra és összetett függvényekre vonatkozó következmények, kiterjeszthetők a három- és többváltozós függvényekre is. Olyan függvények, mint
$$\ln(x+y+z)\quad \text{és}\quad \frac{y\sin z}{x-1}$$
az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak, és az olyan határértékek, mint
$$\lim_{P\to(1,0,-1)}\frac{e^{x+z}}{z^2+\cos\sqrt{xy}}=\frac{e^{1-1}}{(-1)^2+\cos 0}=\frac{1}{2},$$
ahol P jelöli az (x,y,z) pontot, egyszerű helyettesítéssel számolhatók.

Korlátos, zárt halmazon folytonos függvények szélsőértékei

Láttuk az egyváltozós függvényeknél, hogy ha az egyváltozós függvény folytonos egy korlátos, zárt $[a,b]$ intervallumon, akkor ott van maximuma és minimuma. Ugyanez igaz a $z=f(x,y)$ kétváltozós függvényekre is, amelyek folytonosak az xy-sík egy korlátos és zárt halmazának pontjaiban (mint amilyen pl. egy szakasz, egy körlap, háromszöglap stb.). A függvénynek van a T tartomány valamely pontjában abszolút maximuma és minimuma.

Ehhez hasonló tételek igazak három- és többváltozós függvényekre is. Például, egy folytonos $w=f(x,y,z)$ függvénynek van abszolút maximuma és minimuma bármilyen korlátos és zárt halmazon (gömb, kocka, gömbhéj stb.), ahol definiálva van.

A 14.7. alfejezetben megtanuljuk, hogyan találhatjuk meg ezeket a pontokat, de előbb tanulmányoznunk kell a deriváltat magasabb dimenzióban.

14.2. Feladatok

Kétváltozós határérték

Határozzuk meg a határértékeket! (1–12. feladatok)

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2-y^2+5}{x^2+y^2+2}$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,4)} \dfrac{x}{\sqrt{y}}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2+y^2-1}$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-3)} \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi/4)} \dfrac{1}{\cos x}\operatorname{tg} y$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos\dfrac{x^2+y^3}{x+y+1}$

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y}$

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \ln|1+x^2y^2|$

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^y\sin x}{x}$

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \cos\sqrt[3]{|xy|-1}$

11. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{x\sin y}{x^2+1}$

12. $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi/2,0)} \dfrac{\cos y+1}{y-\sin x}$

Hányadosok határértéke

A 13–20. feladatokban határozzuk meg a határértéket úgy, hogy előbb átalakítjuk a törtet!

13. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \dfrac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$

14. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$

15. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq 1}} \dfrac{xy-y-2x+2}{x-1}$

16. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,-4)\\ y\neq -4, x\neq x^2}} \dfrac{y+4}{x^2y-xy+4x^2-4x}$

17. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \dfrac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

18. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,2)\\ x+y\neq 4}} \dfrac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2}$

19. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,0)\\ 2x-y\neq 4}} \dfrac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}$

20. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(4,3)\\ x\neq y+1}} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$

Háromváltozós határértékek

Határozzuk meg a határértékeket a 21–26. feladatokban!

21. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,3,4)} \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$

22. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,-1,-1)} \dfrac{2xy+yz}{x^2+z^2}$

23. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(3,3,0)} (\sin^2 x+\cos^2 y+1/\cos^2 z)$

24. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(-1/4,\pi/2,2)} \operatorname{arctg} xyz$

25. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\pi,0,3)} ze^{-2y}\cos 2x$

26. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,-2,0)} \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Kétváltozós függvények folytonossága

Az xy-sík mely (x,y) pontjaiban folytonosak az alábbi függvények? (27–30. feladatok)

27. **(a)** $f(x,y)=\sin(x+y)$ **(b)** $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

28. **(a)** $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ **(b)** $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2+1}$

29. **(a)** $g(x,y)=\sin\dfrac{1}{xy}$ **(b)** $g(x,y)=\dfrac{x+y}{2+\cos x}$

30. **(a)** $g(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-3x+2}$ **(b)** $g(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y}$

Háromváltozós függvények folytonossága

Mely (x,y,z) pontokban folytonosak az alábbi függvények? (31–34. feladatok)

31. **(a)** $f(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$

(b) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-1}$

32. **(a)** $f(x,y,z)=\ln xyz$ **(b)** $f(x,y,z)=e^{x+y}\cos z$

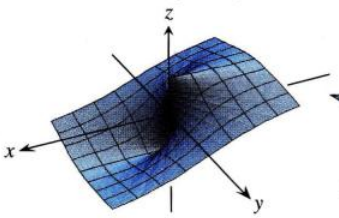
33. **(a)** $h(x,y,z)=xy\sin\dfrac{1}{z}$ **(b)** $h(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+z^2-1}$

34. **(a)** $h(x,y,z)=\dfrac{1}{|y|+|z|}$ **(b)** $h(x,y,z)=\dfrac{1}{|xy|+|z|}$

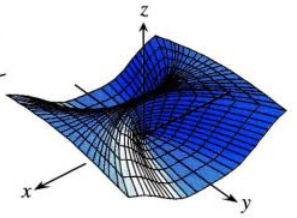
Nemlétező határérték

Különböző utakon tartva a (0, 0) pont felé, mutassuk meg, hogy az alábbi függvényeknek nem létezik ebben a pontban határértéke! (35–42. feladatok)

35. $f(x,y)=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$



36. $f(x,y)=\dfrac{x^4}{x^4+y^2}$



37. $f(x,y)=\dfrac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$

38. $f(x,y)=\dfrac{xy}{|xy|}$

39. $g(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$

40. $g(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$

41. $h(x,y)=\dfrac{x^2+y}{y}$

42. $h(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2-y}$

További példák és feladatok

43. Ha $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$, akkor biztos, hogy f definiálva van (x_0,y_0)-ban? Válaszunkat indokoljuk!

44. Ha $f(x_0,y_0)=3$, mit mondhatunk a

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

határértékről, ha f folytonos (x_0,y_0)-ban? Ha nem folytonos (x_0,y_0)-ban? Válaszunkat indokoljuk!

A szendvics tétel kétváltozós függvényekre azt jelenti, hogy ha $g(x,y)\le f(x,y)\le h(x,y)$ minden $(x,y)\ne(x_0,y_0)$ esetén egy (x_0,y_0) középpontú körben, és g-nek és h-nak ugyanaz az L véges határértéke van, midőn $(x,y)\to(x_0,y_0)$, akkor

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L.$$

Használjuk ezt a tételt a 45–48.feladatok megoldásánál!

45. Ha tudjuk, hogy

$$1-\frac{x^2y^2}{3}<\frac{\operatorname{arctg}xy}{xy}<1,$$

akkor mit mondhatunk a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{arctg}xy}{xy}$$

határértékről?

46. Ha tudjuk, hogy

$$2|xy|-\frac{x^2y^2}{6}<4-4\cos\sqrt{|xy|}<2|xy|$$

akkor mit mondhatunk a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$$

határértékről?

47. Tudjuk, hogy $|\sin(1/x)|\le 1$. Mit mondhatunk a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\frac{1}{x}$$

határértékről?

48. Tudjuk, hogy $|\cos(1/y)|\le 1$. Mit mondhatunk a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\frac{1}{y}$$

határértékről?

49. *(A 4. példa folytatása)*

(a) Olvassuk újra a 4. példát, majd helyettesítsünk $m=\operatorname{tg}\theta$-t az

$$f(x,y)\Big|_{y=mx}=\frac{2m}{1+m^2}$$

képletbe, azután egyszerűsítsünk, hogy jobban lássuk, hogyan változik f a megközelítés irányától függően!

(b) Használjuk az **(a)** részben kapott eredményt, hogy megmutassuk, azok az értékek, amikhez f értékei tartanak, -1-től 1-ig változhatnak az iránytól függően, ha egy $y=mx$ egyenes mentén tartunk a nullához!

50. Folytonos kiterjesztés: Definiáljuk az $f(0,0)$ értéket úgy, hogy az

$$f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

függvény folytonos legyen az origóban!

Áttérés polárkoordinátákra

Ha nem tudunk zöldágra vergődni a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ határértékkel a derékszögű koordináta-rendszerben, megpróbálhatunk áttérni polárkoordinátákra. Az $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ helyettesítés elvégzése után a kapott kifejezést vizsgáljuk $r\to 0$ esetére! Azaz azt vizsgáljuk, létezik-e olyan L, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz létezik olyan $\delta>0$, hogy minden θ és olyan r esetén, amire

$$0<|r|<\delta \quad \text{következik, hogy} \quad |f(r,\theta)-L|<\varepsilon. \qquad (14.1)$$

Ha ilyen L létezik, akkor

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to 0} f(r,\theta)=L.$$

Például:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^3\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0} r\cos^3\theta=0.$$

Ahhoz, hogy ezt az utolsó egyenlőséget igazoljuk, meg kell mutatni, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan δ, hogy bármilyen θ esetén

$$0 < |r| < \delta \quad \Rightarrow \quad |r\cos^3\theta - 0| < \varepsilon.$$

Mivel

$$|r\cos^3\theta| = |r||\cos^3\theta| \le |r| \cdot 1 = |r|,$$

amiből következik, hogy $\delta = \varepsilon$ választás esetén az implikáció igaz.

Példa arra, hogy határérték nem létezik:

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta,$$

ami 0 és 1 között minden értéket felvesz $|r|$ nagyságától függetlenül, így $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2/(x^2+y^2)$ nem létezik.

Az előző példákban a határérték létezése vagy nem létezése $r \to 0$ esetén meglehetősen nyilvánvaló. A polárkoordinátákra való áttérés nem mindig segít a bonyolult határérték egyszerűbbé tételében, és ha nem vagyunk elég alaposak, hamis eredményre is vezethet. Ha pl. a 4. példát tekintjük, akkor az $f(x,y) = (2x^2y)/(x^4+y^2)$ függvény polárkoordinátákra átírva

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta\sin 2\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta},$$

ha $r \neq 0$. Ha az $r \to 0$, a kifejezés nullához tart, ha θ értékét bármilyen konstans értéken tartjuk. De vigyázat, az

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\left(\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}\right)$$

felírásban a jobboldalon, a zárójelben álló kifejezés nem korlátos éppen az $r \to 0$ esetben: minél kisebb r, annál nagyobb értékeket vehet fel. Így például amikor $\sin\theta = r\cos^2\theta$, azaz $\sin\theta/\cos^2\theta = r$ (ami épp az $y = x^2$ eset, és ami pici r esetén kicsi szögértékekre áll fenn), akkor

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta\sin 2\theta}{r^2\cos^4\theta + (r\cos^2\theta)^2} = \frac{2r\cos^2\theta\sin\theta}{2r^2\cos^4\theta} = \frac{r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta} = 1.$$

Az 51–56. feladatokban határozzuk meg a határértéket amint $(x,y) \to (0,0)$, vagy mutassuk meg, hogy a határérték itt nem létezik!

51. $f(x,y) = \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2}$

52. $f(x,y) = \cos\left(\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right)$

53. $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$

54. $f(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+x+y^2}$

55. $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right)$

56. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Az 57. és 58. feladatban definiáljuk az $f(0,0)$ értéket úgy, hogy a függvény folytonos legyen az origóban!

57. $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{3x^2 - x^2y^2 + 3y^2}{x^2+y^2}\right)$

58. $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$

A $\delta - \varepsilon$ definíció használata

Az 59–62. feladatokban egy-egy függvény és $\varepsilon > 0$ van megadva. Minden feladatban mutassuk meg, hogy létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden (x,y)-ra $\sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$.

59. $f(x,y) = x^2+y^2, \quad \varepsilon = 0{,}01$

60. $f(x,y) = y/(x^2+1), \quad \varepsilon = 0{,}05$

61. $f(x,y) = (x+y)/(x^2+1), \quad \varepsilon = 0{,}01$

62. $f(x,y) = (x+y)/(2+\cos x), \quad \varepsilon = 0{,}02$

A 63–66. feladatokban egy-egy függvény és $\varepsilon > 0$ van megadva. Minden feladatban mutassuk meg, hogy létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden (x,y,z)-re $\sqrt{x^2+y^2+z^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y,z) - f(0,0,0)| < \varepsilon$.

63. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2, \quad \varepsilon = 0{,}015$

64. $f(x,y,z) = xyz, \quad \varepsilon = 0{,}008$

65. $f(x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2+1}, \quad \varepsilon = 0{,}015$

66. $f(x,y,z) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 z, \quad \varepsilon = 0{,}03$

67. Mutassuk meg, hogy $f(x,y,z) = x+y-z$ folytonos minden (x_0,y_0,z_0) pontban.

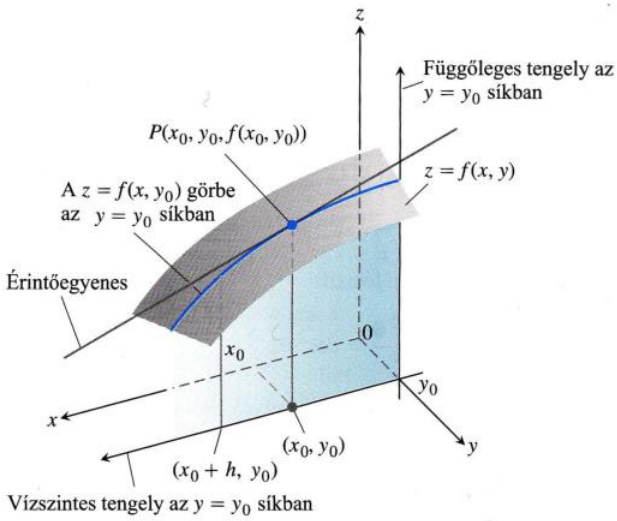
68. Mutassuk meg, hogy $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ folytonos az origóban.

14.3. Parciális deriváltak

A többváltozós függvényekkel való számítások, és ezen függvények vizsgálata is, többnyire visszavezethető egyváltozós függvényekkel végzett számításokra. Ha a független változókat egy kivételével konstans értéken tartjuk, és aszerint a változó szerint deriválunk, akkor „parciális" deriváltat kapunk. Ebben az alfejezetben azt mutatjuk meg, hogy hogyan definiáljuk és hogyan számítjuk a parciális deriváltakat. Azt is megmutatjuk, mi a geometriai jelentésük.

Kétváltozós függvény parciális deriváltjai

Tekintsük az f függvény $z = f(x,y)$ geometriai szemléltetését a térben. Ha (x_0,y_0) egy pont az $f(x,y)$ függvény értelmezési tartományában, akkor az $y = y_0$ függőleges sík (azaz az xy-koordinátasíkra merőleges sík), a $z = f(x,y)$ felületet



14.13. ÁBRA: Az $y = y_0$ síknak a $z = f(x,y)$ felülettel való metszete az xy-sík első negyede felől nézve.

a $z = f(x,y_0)$ görbében metszi (14.13. ábra). Ez a görbe a $z = f(x,y_0)$ függvény grafikonja az $y = y_0$ síkban. A vízszintes koordináta ebben a síkban x, a függőleges koordináta z. Mivel y konstans értékű, y nem változó.

Az f függvény x szerinti parciális deriváltját az (x_0,y_0) pontban úgy definiáljuk, mint $f(x,y_0)$ x szerinti közönséges deriváltját. Hogy megkülönböztessük a parciális deriváltat a közönséges deriválttól, a d szimbólum helyett a ∂ szimbólumot használjuk.

DEFINÍCIÓ: *x* szerinti parciális derivált

Az $f(x,y)$ **függvény x szerinti parciális deriváltja** az (x_0,y_0) pontban

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

feltéve, hogy ez a határérték létezik.

A parciális deriváltra egy ekvivalens jelölés:

$$\left.\frac{d}{dx} f(x,y_0)\right|_{x=x_0}.$$

A $z = f(x,y_0)$ görbe $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ pontbeli érintője az $y = y_0$ síkban van, és meredeksége az f függvény x szerinti parciális deriváltja az (x_0,y_0) pontban. Az (x_0,y_0) pontban $\partial f/\partial x$ adja az f függvény változási mértékét az **i** irányában.

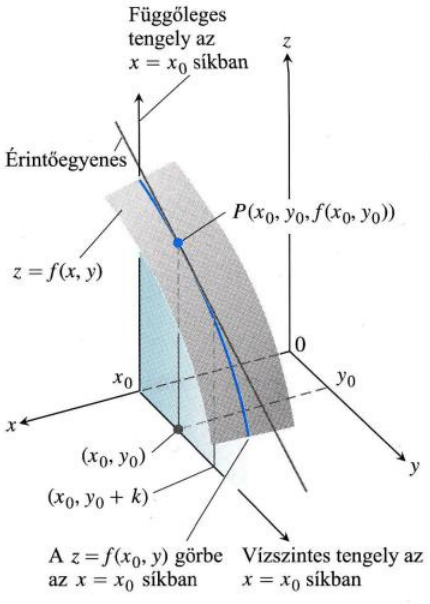
A parciális derivált jelölése függ attól, mit akarunk hangsúlyozni:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ vagy $f_x(x_0,y_0)$ — Az f függvény x szerinti parciális deriváltja az (x_0,y_0) pontban. Hangsúlyozza az (x_0,y_0) pontot.

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ — A z függvény parciális deriváltja x szerint (x_0,y_0)-ban. Használatos a mérnöki és természettudományokban, ha változókkal dolgozunk, és nem akarjuk a függvényt magát említeni.

f_x, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, z_x, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ — Az f, ill. z függvény parciális deriváltja x szerint. Kényelmes, ha a parciális deriváltat, mint függvényt tekintjük.

Az $f(x,y)$ függvény parciális deriváltja y szerint az (x_0,y_0) pontban hasonló módon definiálható, mint az x szerinti. Most x-et tartjuk az x_0 konstans értéken, és az $f(x_0,y)$ függvény y szerinti közönséges deriváltját számítjuk.



14.14. ÁBRA: Az $x = x_0$ síknak a $z = f(x,y)$ felülettel való metszete az xy-sík első negyede felől nézve.

DEFINÍCIÓ: y szerinti parciális derivált

Az $f(x,y)$ **függvény y szerinti parciális deriváltja** az (x_0,y_0) pontban

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{d}{dy} f(x_0,y)\right|_{y=y_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

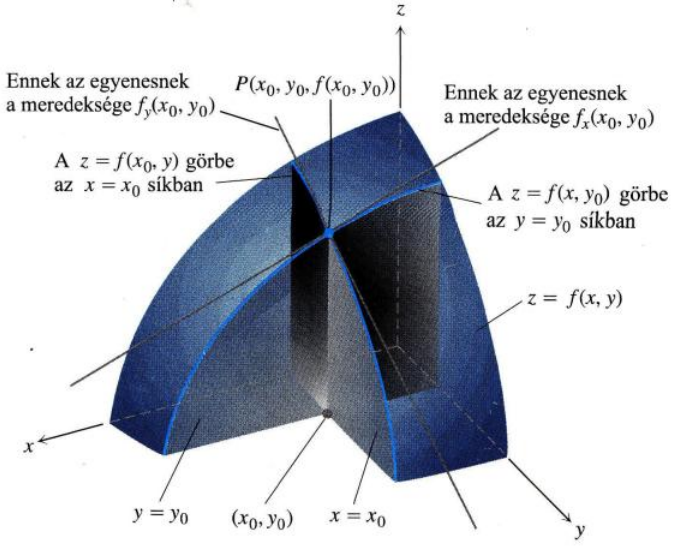
feltéve, hogy ez a határérték létezik.

A $z = f(x_0,y)$ görbe $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ pontbeli érintője az $x = x_0$ függőleges síkban van (14.14. ábra), és meredeksége az f függvény y szerinti parciális deriváltja az (x_0,y_0) pontban. Az (x_0,y_0) pontban $\partial f/\partial y$ adja az f függvény változási mértékét a **j** irányában.

Az y szerinti parciális deriváltakat ugyanúgy jelöljük, mint az x szerintieket:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), \quad f_y(x_0,y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_y.$$

Vegyük észre, hogy most két érintőegyenesünk is van a $z = f(x,y)$ felület $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ pontjában (14.15. ábra). Igaz, hogy az a sík, amit ez a két egyenes meghatároz, a felület érintősíkja? Látni fogjuk, ha a felület „elég szép" akkor valóban így van, de addig még sok mindent kell megtudnunk a parciális deriváltakról.



14.15. ÁBRA: A 14.13. és 14.14. ábrák együtt. Az $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ pontbeli érintőegyenesek egy síkot határoznak meg, ami, legalábbis ezen az ábrán úgy tűnik, a felület érintősíkja.

Számítások

$\partial f/\partial x$ és $\partial f/\partial y$ két különböző úton számít f-hez deriváltat, egyszer x szerint deriválva a szokásos módon, miközben y-t konstansként kezeljük, másszor y szerint deriválva a szokásos módon, és x-et kezelve konstansként. A következő példában látni fogjuk, a két parciális derivált általában nem egyenlő.

1. PÉLDA: **Parciális deriváltak számítása egy adott pontban**

Határozzuk meg $\partial f/\partial x$ és $\partial f/\partial y$ értékét a $(4,-5)$ pontban, ha

$$f(x,y) = x^2 + 3xy + y - 1.$$

Megoldás: $\partial f/\partial x$ meghatározásához y-t konstansként kezeljük, és x szerint deriválunk:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + y - 1) = 2x + 3\cdot 1\cdot y + 0 - 0 = x + 3y.$$

$\partial f/\partial x$ értéke a $(4,-5)$ pontban: $2(4)+3(-5)=-7$.

$\partial f/\partial y$ meghatározásához x-et konstansként kezeljük, és y szerint deriválunk:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+3xy+y-1)=0+3\cdot x\cdot 1+1-0=3x+1.$$

$\partial f/\partial y$ értéke a $(4,-5)$ pontban $3(4)+1=13$. □

2. PÉLDA: **Parciális derivált mint függvény**

Határozzuk meg $\frac{\partial f}{\partial y}$-t, ha $f(x,y)=y\sin xy$.

Megoldás: x-et mint konstanst kezeljük, f szorzata y-nak és $\sin xy$-nak:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y\sin xy)=y\frac{\partial}{\partial y}\sin xy+(\sin xy)\frac{\partial}{\partial y}(y)=$$

$$=(y\cos xy)\frac{\partial}{\partial y}(xy)+\sin xy=xy\cos xy+\sin xy.$$ □

Számítógép alkalmazása parciális deriváltak meghatározására

Egy egyszerű grafikus kalkulátor vagy rajzoló program is segítheti a számításainkat még többdimenzióban is. Ha megadjuk a változók értékeit egy kivételével, akkor a gép számítani tudja a parciális deriváltat a megmaradt egyetlen változó szerint. A számítógépes programok ugyanolyan egyszerűen és gyorsan tudják formálisan számítani a parciális deriváltakat, mint az egyszerű deriváltakat. A legtöbb program egy és ugyanazt az utasítást használja deriválásra a változók számától függetlenül, csak meg kell adni, melyik változó szerinti deriváltra van szükségünk.

3. PÉLDA: **A parciális deriváltak különböző függvények**

Határozzuk meg f_x-et és f_y-t, ha

$$f(x,y)=\frac{2y}{y+\cos x}.$$

Megoldás: f-et mindkét esetben, mint hányadost kezeljük. Ha y-t konstansként kezeljük:

$$f_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{y+\cos x}\right)=\frac{(y+\cos x)\frac{\partial}{\partial x}(2y)-2y\frac{\partial}{\partial x}(y+\cos x)}{(y+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{(y+\cos x)(0)-2y(-\sin x)}{(y+\cos x)^2}=\frac{2y\sin x}{(y+\cos x)^2}.$$

Ha x-et konstansként kezeljük:

$$f_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{y+\cos x}\right)=\frac{(y+\cos x)\frac{\partial}{\partial y}(2y)-2y\frac{\partial}{\partial y}(y+\cos x)}{(y+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{(y+\cos x)(2)-2y(1)}{(y+\cos x)^2}=\frac{2\cos x}{(y+\cos x)^2}.$$ □

Az implicit deriválás parciális deriválás esetén ugyanúgy működik, mint közönséges deriválásnál.

4. PÉLDA: **Implicit parciális deriválás**

Határozzuk meg $\partial z/\partial x$-et, ha z az

$$yz-\ln z=x+y$$

egyenlőséggel van definiálva, mint x és y változók függvénye, és a parciális derivált létezik.

Megoldás: Deriváljuk az egyenlőség mindkét oldalát x szerint, y-t úgy kezelve, mint konstanst, z-t pedig úgy, mint x differenciálható függvényét.

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}\ln z = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}$$

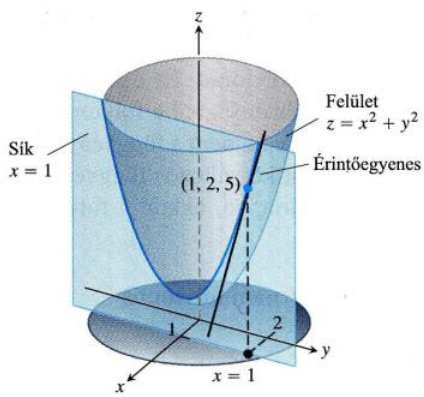
$$y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 0 \qquad \begin{matrix} y \text{ konstans, így} \\ \frac{\partial}{\partial x}(yz) = y\frac{\partial z}{\partial x} \end{matrix}$$

$$\left(y - \frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{yz-1}. \qquad \square$$

5. PÉLDA: Felület meredeksége y irányban

Az $x = 1$ sík a $z = x^2 + y^2$ paraboloidot egy parabolában metszi (14.16. ábra). Adjuk meg a parabola érintőjének meredekségét a parabola (1, 2, 5) pontjában!



14.16. ÁBRA: Az $x = 1$ sík és a $z = x^2 + y^2$ felület metszetgörbéjének érintőegyenese az (1, 2, 5) pontban (5. példa)

Megoldás: A meredekség a $\partial z/\partial y$ az (1, 2) pontban:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = \left.\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\right|_{(1,2)} = \left.2y\right|_{(1,2)} = 2(2) = 4.$$

Ellenőrzésképpen felírhatjuk a parabolát, mint egyváltozós függvényt: az $x = 1$ síkban $z = (1)^2 + y^2 = 1 + y^2$, és keressük a meredekségét $y = 2$-ben. A meredekség most egyváltozós deriválással számolható:

$$\left.\frac{dz}{dy}\right|_{y=2} = \left.\frac{d}{dy}(1+y^2)\right|_{y=2} = \left.2y\right|_{y=2} = 4. \qquad \square$$

Függvények több, mint két változóval

A kettőnél több változós függvények parciális deriváltjait ugyanúgy definiáljuk, mint a kétváltozósakét. Azok is egyszerű, egy változó szerinti deriváltak, miközben a többi változót konstansként kezeljük.

6. PÉLDA: Háromváltozós függvény

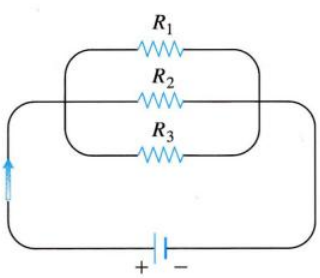
Ha x, y, z független változók, és

$$f(x,y,z) = x\sin(y+3z),$$

akkor

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}[x\sin(y+3z)] = x\frac{\partial}{\partial z}\sin(y+3z) =$$

$$= x\cos(y+3z)\frac{\partial}{\partial z}(y+3z) = 3x\cos(y+3z). \qquad \square$$



14.17. ÁBRA: Ha az ellenállások így vannak összekapcsolva, akkor párhuzamos kapcsolásról beszélünk (7. példa). Mindegyik ellenállás átenged valamennyi áramot. Az eredő R ellenállást a

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

képlettel számíthatjuk ki.

7. PÉLDA: Párhuzamos elektromos ellenállások

Ha az R_1, R_2, R_3 ellenállásokat párhuzamosan kapcsoljuk, hogy egy R ellenállást hozzunk létre, akkor R-et az

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

egyenletből határozhatjuk meg (14.17. ábra). Adjuk meg $\partial R/\partial R_2$ értékét, ha $R_1 = 30$, $R_2 = 45$, $R_3 = 90$ ohm.

Megoldás: $\partial R/\partial R_2$ meghatározásához R_1-et és R_3-t konstansként kezeljük, az egyenlet mindkét oldalát implicit függvényként deriválva:

$$\frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)$$
$$-\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial R_2} = 0 - \frac{1}{R_2^2} + 0$$
$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R^2}{R_2^2} = \left(\frac{R}{R_2}\right)^2.$$

Ha $R_1 = 30$, $R_2 = 45$, $R_3 = 90$, akkor

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{30}+\frac{1}{45}+\frac{1}{90} = \frac{3+2+1}{90} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}.$$

Így $R = 15$, és

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \left(\frac{15}{45}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$ □

Parciális deriváltak és folytonosság

Egy $f(x,y)$ függvénynek létezhet akár mindkét változója szerinti parciális deriváltja is egy pontban úgy, hogy a függvény ott nem folytonos. Ez más, mint az egyváltozós függvények esetében, ahol a differenciálhatóságból a folytonosság következett. (A parciális derivált csak „parciális" derivált, nem a függvény deriváltja.) Ha azonban $f(x,y)$ parciális deriváltjai– mint kétváltozós függvények– léteznek és folytonosak egy (x_0,y_0) középpontú körlapon, akkor f folytonos (x_0,y_0)-ban, ahogy azt később látni fogjuk.

8. PÉLDA: **A parciális deriváltak léteznek, de f nem folytonos**

Legyen

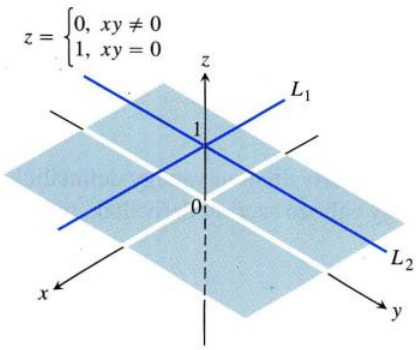
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & xy \neq 0 \\ 1 & xy = 0 \end{cases}$$

(14.18. ábra).

(a) Mi f határértéke, ha (x,y) tart (0, 0)-hoz az $y = x$ egyenes mentém?

(b) Mutassuk meg, hogy f nem folytonos az origóban!

(c) Mutassuk meg, hogy az origóban mindkét parciális derivált, $\partial f/\partial x$ és $\partial f/\partial y$ is létezik!



14.18. ÁBRA: Az

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & xy \neq 0 \\ 1 & xy = 0 \end{cases}$$

függvény grafikonja az L_1, L_2 egyenesekből és négy nyílt negyedsíkból áll. A függvény nem folytonos az origóban, bár a parciális deriváltjai léteznek itt (8. példa).

Megoldás:

(a) Mivel $f(x,y)$ azonosan 0 az $y = x$ egyenes mentén (kivéve az origót),

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\Big|_{y=x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0.$$

(b) Mivel $f(0,0) = 1$ és ez nem egyenlő az előbb számolt határértékkel, a függvény nem folytonos.

(c) Ahhoz, hogy meghatározzuk $\partial f/\partial x$-et a (0, 0) pontnál, y értékét rögzítjük nullának. Ekkor $f(x,y) = f(x,0) = 1$ minden x értékre, és f grafikonja L_1. Ennek az egyenesnek a meredeksége $\partial f/\partial x = 0$ mindenütt, a (0, 0) pontban is. Hasonlóképp, $\partial f/\partial y$, azaz az L_2 egyenes meredeksége is nulla minden y-ra, így $\partial f/\partial y = 0$ a (0, 0) pontban is. □

Az előző példa ellenére, magasabb dimenzió esetén is igaz, hogy a differenciálhatóságból következik a folytonosság. Az előző példából csak arra a következtetésre jutunk, hogy a parciális deriváltak létezésénel erősebb tulajdonságra van szükség, ha a deriváltat akarjuk definiálni, ahogy ezt ennek az alfejezetnek a végén látni fogjuk.

Másodrendű parciális deriváltak

Ha az $f(x,y)$ függvényt kétszer deriváljuk parciálisan, másodrendű deriváltakat kapunk. Ezeket a deriváltakat általában a következőképp jelöljük:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (\text{„d-négyzet-f-d-x-négyzet”}), \qquad \text{vagy} \quad f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (\text{„d-négyzet-f-d-y-négyzet”}), \qquad \text{vagy} \quad f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (\text{„d-négyzet-f-d-x-d-y”}), \qquad \text{vagy} \quad f_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (\text{„d-négyzet-f-d-y-d-x”}), \qquad \text{vagy} \quad f_{xy}.$$

A definiáló egyenlőségek:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

és így tovább. Jegyezzük meg, hogy a deriválás sorrendje:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ először y szerint deriválunk, majd x szerint

$f_{yx} = (f_y)_x$ ugyanazt jelenti.

9. PÉLDA: **Másodrendű parciális deriváltak meghatározása**

Határozzuk meg a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

függvényeket, ha $f(x,y) = x\cos y + ye^x$.

Megoldás:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos y + ye^x) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x\cos y + ye^x)$$
$$= \cos y + ye^x \qquad = -x\sin y + e^x.$$

Így

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\sin y + e^x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\sin y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = ye^x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = x\cos y. \qquad \square$$

Vegyes parciális deriváltak

Ahogy nyilván feltűnt, a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

vegyes parciális deriváltak az előző példában egyenlők. Ez nem véletlen. Mindig egyenlőnek kell lenniük, ha az f, f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} függvények folytonosak.

2. TÉTEL: **Vegyes parciális deriváltak**

Ha $f(x,y)$ és parciális deriváltjai f_x, f_y, f_{xy} és f_{yx} léteznek egy olyan nyílt tartományon, ami tartalmazza az (a,b) pontot, és valamennyi folytonos az (a,b) pontban, akkor

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b).$$

A 2. Tétel *Young tételként* ismert, de *Clairaut*-tételnek is nevezik, felfedezője Alexis Clairaut francia matematikus után. A bizonyítást az F.8. függelékben közöljük. A 2. Tétel azt mondja ki, hogy a vegyes parciális deriváltakat akármilyen sorrendben számíthatjuk, ha a megfelelő függvények folytonosak. Ez előnyünkre van.

10. PÉLDA: **A deriválás sorrendjének megválasztása**

Adjuk meg $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$-t, ha

$$w = xy + \frac{e^y}{y^2+1}.$$

Megoldás: A $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ szimbólum azt jelenti, hogy először y szerint majd x szerint deriválunk. Ha megfordítjuk a sorrendet, és először deriválunk x szerint, a kifejezés már az első lépésben nagyon egyszerű lesz:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 1.$$

Ha fordított sorrendben deriválunk, akkor is ugyanezt kapjuk. □

Magasabbrendű parciális deriváltak

Bár legtöbbször első- és másodrendű parciális deriváltakkal dolgozunk, mivel ezek fordulnak elő leggyakrabban az alkalmazásokban, nincs elméleti felső korlát arra, hogy hányszor deriválhatunk parciálisan, ha a megfelelő deriváltak léteznek. Számíthatunk harmad-, negyedrendű parciális deriváltat is, mint:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = f_{yyx}, \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = f_{yyxx},$$

és így tovább. Akárcsak a második deriváltaknál, amíg a deriváltak folytonosak, addig a deriválás sorrendje tetszőleges.

11. PÉLDA: **Negyedrendű parciális deriváltak**

Adjuk meg f_{yxyz}-t, ha $f(x,y,z) = 1 - 2xy^2z + x^2y$.

Megoldás: Először y szerint, majd x szerint, megint y szerint, végül z szerint deriválunk:

$$\begin{aligned} f_y &= -4xyz + x^2 \\ f_{yx} &= -4yz + 2x \\ f_{yxy} &= -4z \\ f_{yxyz} &= -4. \end{aligned}$$

□

Differenciálhatóság

A kiindulási pontunk nem a különbségi hányados, hanem a növekmény kifejezésének gondolata. Emlékezzünk az egyváltozós függvények esetére a 3.8. alfejezetben, ahol a differenciálható f függvény változását x_0-ból $x_0 + \Delta x$-be

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

fejezte ki, ahol $\Delta x \to 0$ esetén $\varepsilon \to 0$. Kétváltozós függvényeknél ennek analogonja lesz a differenciálhatóság definíciója. Az $f(x,y)$ függvény megváltozásáról szól a következő tétel.

3. TÉTEL: Kétváltozós függvények megváltozása

Tegyük fel, hogy $f(x,y)$ parciális deriváltjai léteznek egy nyílt T tartományon, és $(x_0,y_0) \in T$, valamint f_x, f_y folytonosak (x_0,y_0)-ban. Ekkor az f függvény

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

változása (x_0,y_0)-tól $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$-ig a T tartományban kifejezhető, mint

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,$$

ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$, ha Δx és Δy mindketten tartanak a nullához.

Az F.8. függelékben láthatjuk, hogyan jönnek ki az epszilonok, és azt is, hogy hasonló eredmények vannak több, mint két változó esetére is.

DEFINÍCIÓ: Függvény deriváltja

Tegyük fel, hogy f értelmezve van egy nyílt tartományon, és (x_0,y_0) pontja ennek a tartománynak. Az $f(x,y)$ függvény **differenciálható az** (x_0,y_0) **pontban**, ha $f_x(x_0,y_0)$ és $f_y(x_0,y_0)$ létezik, és

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,$$

ahol ε_1 és ε_2 is nullához tart, ha Δx és Δy is tartanak a nullához. Az f függvényt **differenciálhatónak** hívjuk, ha az értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható.

Ha ezt az egyváltozós eset analogonjaként nézzük, akkor látjuk, hogy kétváltozós függvény deriváltja egy vektorral jellemezhető, aminek koordinátái a parciális deriváltak.

A definícióból a 3. Tétel alapján következik, hogy ha egy függvény parciális deriváltjai mindenütt folytonosak, akkor az differenciálható.

A 3. Tétel következménye

Ha az $f(x,y)$ függvény f_x és f_y parciális deriváltjai folytonosak egy nyílt T halmazon, akkor f differenciálható a T minden pontjában.

Ha $f(x,y)$ differenciálható, akkor $\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ nullához tart, ha Δx és Δy is nullához tart. A differenciálhatóságból tehát következik a folytonosság.

4. TÉTEL: A differenciálhatóságból következik a folytonosság

Ha $f(x,y)$ differenciálható (x_0,y_0)-ban akkor folytonos is (x_0,y_0)-ban.

A 3. és 4. Tételek következménye, hogy f-nek folytonosnak kell lennie (x_0,y_0)-ban, ha a parciális deriváltjai folytonosak egy (x_0,y_0)-t tartalmazó nyílt halmazon. De a 8. példában azt is láttuk, hogy a parciális deriváltak puszta létezése egy pontban nem elég a folytonossághoz abban a pontban.

14.3. Feladatok

Elsőrendű parciális deriváltak számítása

Az 1–22. feladatokban határozzuk meg a $\partial f/\partial x$ és $\partial f/\partial y$ parciális deriváltakat!

1. $f(x,y) = 2x^2 - 3y - 4$
2. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$
3. $f(x,y) = (x^2-1)(y+2)$
4. $f(x,y) = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x - 6y + 2$
5. $f(x,y) = (xy-1)^2$
6. $f(x,y) = (2x-3y)^3$
7. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
8. $f(x,y) = (x^3 + (y/2))^{2/3}$
9. $f(x,y) = 1/(x+y)$
10. $f(x,y) = x/(x^2+y^2)$
11. $f(x,y) = (x+y)/(xy-1)$
12. $f(x,y) = \operatorname{arctg}(y/x)$
13. $f(x,y) = e^{(x+y+1)}$
14. $f(x,y) = e^{-x}\sin(x+y)$
15. $f(x,y) = \ln(x+y)$
16. $f(x,y) = e^{xy}\ln y$
17. $f(x,y) = \sin^2(x-3y)$
18. $f(x,y) = \cos^2(3x-y^2)$

19. $f(x,y) = x^y$ **20.** $f(x,y) = \log_y x$

21. $f(x,y) = \int_x^y g(t)dt$ (g folytonos minden t-ben)

22. $f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n$ ($|xy| < 1$)

A 23–34. feladatokban határozzuk meg az f_x, f_y, f_z parciális deriváltakat.

23. $f(x,y,z) = 1 + xy^2 - 2z^2$

24. $f(x,y,z) = xy + yz + xz$

25. $f(x,y,z) = x - \sqrt{y^2+z^2}$

26. $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

27. $f(x,y,z) = \arcsin(xyz)$

28. $f(x,y,z) = \operatorname{arcsec}(x+yz)$

29. $f(x,y,z) = \ln(x+2y+3z)$

30. $f(x,y,z) = yz\ln(xy)$

31. $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

32. $f(x,y,z) = e^{-xyz}$

33. $f(x,y,z) = \operatorname{th}(x+2y+3z)$

34. $f(x,y,z) = \operatorname{sh}(xy - z^2)$

A 35–40. feladatokban határozzuk meg a függvény parciális deriváltjait minden változója szerint!

35. $f(t,\alpha) = \cos(2\pi t - \alpha)$

36. $g(u,v) = v^2 e^{(2u/v)}$

37. $h(\rho,\phi,\theta) = \rho\sin\phi\cos\theta$

38. $g(r,\theta,z) = r(1-\cos\theta) - z$

39. A szív által végzett munka: (3.8. alfejezet, 51. feladat)

$$W(P,V,\delta,v,g) = PV + \frac{V\delta v^2}{2g}$$

40. Wilson-féle kritikus mennyiség képlet: (4.5. alfejezet, 45. feladat)

$$A(c,h,k,m,q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$$

Másodrendű parciális deriváltak számítása

Határozzuk meg az összes másodrendű parciális deriváltat a 41–46. feladatokban!

41. $f(x,y) = x + y + xy$ **42.** $f(x,y) = \sin xy$

43. $g(x,y) = x^2y + \cos y + y\sin x$

44. $h(x,y) = xe^y + y + 1$

45. $r(x,y) = \ln(x+y)$ **46.** $s(x,y) = \operatorname{arctg}(y/x)$

Vegyes parciális deriváltak

A 47–50. feladatokban mutassuk meg, hogy $w_{xy} = w_{yx}$.

47. $w = \ln(2x+3y)$

48. $w = e^x + x\ln y + y\ln x$

49. $w = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4$

50. $w = x\sin y + y\sin x + xy$

51. Milyen sorrendű deriválással kapjuk meg könnyebben f_{xy}-t: először x szerint, vagy először y szerint? Válaszoljunk anélkül, hogy előbb kipróbálnánk!

(a) $f(x,y) = x\sin y + e^y$

(b) $f(x,y) = 1/x$

(c) $f(x,y) = y + (x/y)$

(d) $f(x,y) = y + x^2y + 4y^3 - \ln(y^2+1)$

(e) $f(x,y) = x^2 + 5xy + \sin x + 7e^x$

(f) $f(x,y) = x\ln xy$

52. A következő függvények $\partial^5 f/\partial x^2\partial y^3$ ötödik parciális deriváltja nulla. Ahhoz, hogy ezt minél gyorsabban megmutassuk, melyik változó szerint deriváljunk először: x szerint vagy y szerint? Válaszoljunk anélkül, hogy előbb kipróbálnánk!

(a) $f(x,y) = y^2x^4e^x + 2$

(b) $f(x,y) = y^2 + y(\sin x - x^4)$

(c) $f(x,y) = x^2 + 5xy + \sin x + 7e^x$

(d) $f(x,y) = xe^{y^2/2}$

A parciális deriváltak definíciójának használata

Az 53–54. feladatokban használjuk a parciális derivált definícióját az adott pontbeli parciális deriváltak meghatározására!

53. $f(x,y) = 1 - x + y - 3x^2y$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ és $\frac{\partial f}{\partial y}$ az $(1,2)$ pontban.

54. $f(x,y) = 4 + 2x - 3y - xy^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ és $\frac{\partial f}{\partial y}$ a $(-2,1)$ pontban.

55. Három változó: Legyen $w = f(x,y,z)$ egy háromváltozós függvény. Írjuk le $\partial f/\partial z$ formális definícióját (x_0,y_0,z_0)-ban. Használjuk ezt a definíciót $\partial f/\partial z$ meghatározására az $(1,2,3)$ pontban, ha $f(x,y,z) = x^2yz^2$.

56. Három változó: Legyen $w = f(x,y,z)$ egy háromváltozós függvény. Írjuk le $\partial f/\partial y$ formális definícióját (x_0,y_0,z_0)-ban. Használjuk ezt a definíciót $\partial f/\partial y$ meghatározására az $(-1,0,3)$ pontban, ha $f(x,y,z) = -2xy^2 + yz^2$.

Implicit deriválás

57. Határozzuk meg $\partial z/\partial x$ értékét az (1, 1, 1) pontban, ha z-t az

$$xy + z^3x - 2yz = 0$$

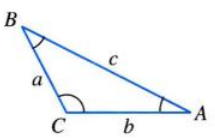
egyenlet mint x és y függvényét definiálja, és a parciális deriváltak léteznek!

58. Határozzuk meg $\partial x/\partial z$ értékét az $(1,-1,3)$ pontban, ha x-et az

$$xz + y\ln x - x^2 + 4 = 0$$

egyenlet mint z és y függvényét definiálja, és a parciális deriváltak léteznek!

Az 59. és a 60. feladatok az alábbi háromszögre vonatkoznak, ahol A, B és C a megfelelő csúcsoknál levő szögeket jelentik radiánban.



59. Adjuk meg A-t implicit formában, mint az a, b és c függvényét, és írjuk fel $\partial A/\partial a$-t és $\partial A/\partial b$-t.

60. Adjuk meg a-t implicit formában, mint az A, b és B függvényét, és írjuk fel $\partial a/\partial A$-t és $\partial a/\partial B$-t.

61. Két független változó: Fejezzük ki v_x-et, mint u és v függvényét, ha az $x = v\ln u$ és $y = u\ln v$ egyenlőségek definiálják az u és v függvényeket mint x és y függvényét, és v_x létezik! (*Útmutatás*: Differenciáljuk mindkét egyenletet x szerint, majd fejezzük ki v_x-et).

62. Két független változó: Határozzuk meg $\partial x/\partial u$-t és $\partial y/\partial u$-t mint u és v függvényét, ha az $u = x^2 - y^2$ és $v = x^2 - y$ egyenlőségek definiálják az x és y függvényeket mint u és v függvényeit, és a parciális deriváltak léteznek! (*Útmutatás*: Lásd előző feladat) Majd legyen $s = x^2 + y^2$, és adjuk meg $\partial s/\partial u$-t.

A Laplace-egyenlet

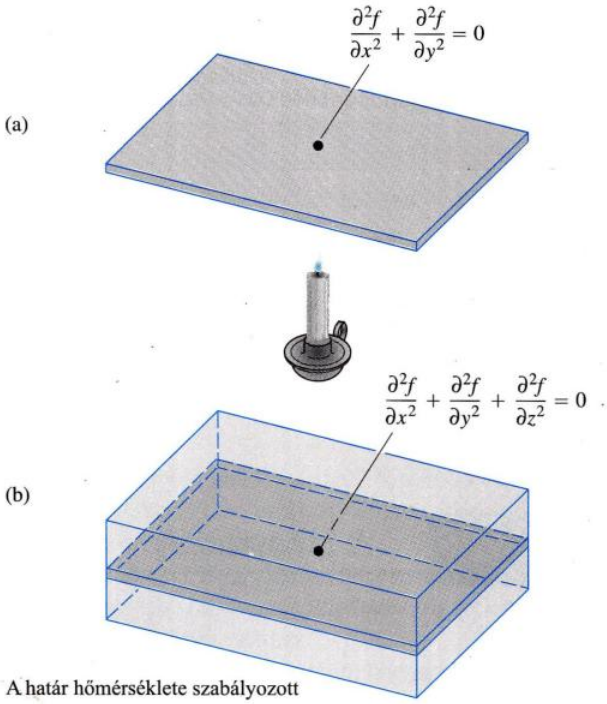
A **háromdimenziós Laplace-egyenlet**:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

A Laplace-egyenletet kielégítik például állandósult állapotú $T = f(x,y,z)$ hőmérséklet-eloszlások a térben, a gravitációs potenciálfüggvények, az elektrostatikus potenciálfüggvények. A **kétdimenziós Laplace-egyenlet**:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Ezt úgy kapjuk, hogy a harmadik koordinátára vonatkozó $\partial^2 f/\partial z^2$ tagot elhagyjuk az előző egyenletből. Ezt síkbeli potenciálfüggvények, ill. síkbeli állandósult hőmérsékleteloszlások elégítik ki. Lásd a mellékelt ábrán. A síkot (a) úgy tekinthetjük, mint egy vékony szeletet a testből (b), ami merőleges a z-tengelyre.



A határ hőmérséklete szabályozott

Mutassuk meg, hogy a 63–68. feladatok függvényei kielégítik a Laplace-egyenletet!

63. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

64. $f(x,y,z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z$

65. $f(x,y) = e^{-2y}\cos 2x$

66. $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

67. $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

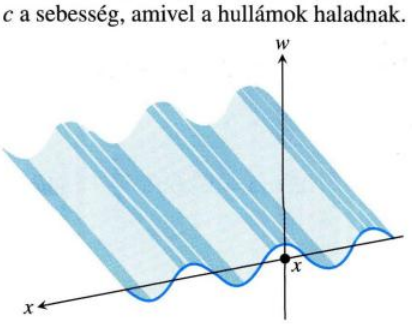
68. $f(x,y,z) = e^{3x+4y}\cos 5z$

A hullámegyenlet

Ha az óceán partján állunk, és egy pillanatfelvételt készítünk a hullámokról, akkor a kép csúcsoknak és völgyeknek szabályos mintáját mutatja egy időpillanatban. Periodikus függőleges változást látunk a távolság függvényében. Ha a vízben állunk, akkor a lábunkon érezzük a vízszint mozgását fel és le, ahogy a hullámok elhaladnak. Periodikus függőleges mozgást látunk az idő függvényében. Ezt a gyönyörű szimmetriát a fizikában az **egydimenziós hullámegyenlettel** fejezik ki:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

ahol w a vízfelszín magassága, x a távolság-változó, t az idő-változó, és c a sebesség, amivel a hullámok haladnak.



A példánkban x jelenti az óceán felszínén a távolságot, de más példákban jelentheti a távolságot egy rezgő húr mentén, a levegőben (hanghullámok), vagy a térben (fényhullámok). A c szám a

közegtől és a hullám típusától függően különböző értékeket vesz fel.

Mutassuk meg, hogy a 69–75. feladatok függvényei kielégítik a hullámegyenletet!

69. $w = \sin(x+ct)$

70. $w = \cos(2x+2ct)$

71. $w = \sin(x+ct)+\cos(2x+2ct)$

72. $w = \ln(2x+2ct)$

73. $w = \operatorname{tg}(2x-2ct)$

74. $w = 5\cos(3x+3ct)+e^{x+ct}$

75. $w = f(u)$, ahol f differenciálható függvénye u-nak, és $u = a(x+ct)$, ahol a egy konstans.

Folytonos parciális deriváltak

76. Ha egy $f(x,y)$ függvény parciális deriváltjai folytonosak egy nyílt T tartományon, akkor következik-e ebből, hogy f folytonos ezen a T tartományon? Válaszunkat indokoljuk!

77. Ha az $f(x,y)$ függvénynek folytonos második parciális deriváltjai vannak egy T nyílt tartományon, akkor következik-e ebből, hogy f első parciális deriváltjai folytonosak ezen a T tartományon?

14.4. A láncszabály

Az egyváltozós függvényekre a láncszabály a 3.5. alfejezetben azt mondja ki, hogy ha $w = f(x)$ differenciálható függvénye x-nek, és $x = g(t)$ differenciálható függvénye t-nek, akkor w differenciálható függvénye t-nek, és a derivált a

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt}$$

képlettel számítható.

A láncszabálynak hasonló alakja van két- vagy többváltozós függvényekre is. A képlet alakja függ attól, hogy hány változónk van, de ugyanúgy működik, mint az, amelyet a 3. fejezetben adtunk.

Kétváltozós függvények

A láncszabályt egy olyan $w = f(x,y)$ függvényre, ahol $x(t)$, $y(t)$ is a t változó differenciálható függvényei, a következő tétel adja.

5. TÉTEL: A láncszabály két független változóra

Ha $w = f(x,y)$-nek f_x és f_y parciális deriváltjai folytonosak és $x = x(t)$, $y = y(t)$ t-nek differenciálható függvényei, akkor a $w = f(x(t),y(t))$ is differenciálható függvénye t-nek, és

$$\frac{df}{dt} = f_x(x(t),y(t))\cdot x'(t) + f_y(x(t),y(t))\cdot y'(t)$$

vagy

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Bizonyítás: A bizonyítás abból áll, hogy megmutatjuk, ha x és y differenciálhatók $t = t_0$-ban, akkor w is differenciálható t_0-ban, és

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0},$$

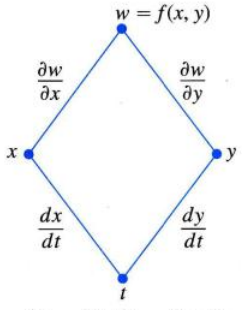
ahol $P_0 = (x(t_0),y(t_0))$. Az indexek azt mutatják, hogy melyik deriváltat hol kell számolni.

Legyenek Δx, Δy és Δw a növekmények, miközben t változik t_0-tól $t_0+\Delta t$-ig. Mivel f differenciálható (ld. a definíciót az előző alfejezetben),

$$\Delta w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,$$

Hogy könnyebben megjegyezhessük a láncszabályt, rajzoljuk meg az alábbi diagramot. A dw/dt deriváltat úgy határozzuk meg, hogy elindulunk w-ből, és minden lehetséges úton lemegyünk t-ig összeszorozva a deriváltakat. Azután az így kapott tagokat összeadjuk.

Láncszabály



$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$, ha $\Delta x, \Delta y \to 0$. Ahhoz, hogy megtaláljuk dw/dt-t, osszuk el az egyenletet Δt-vel, és nézzük mi történik, ha Δt tart nullához. Az osztás eredménye:

$$\frac{\Delta w}{dt} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Ha Δt nullához tart, az eredmény:

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t_0} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta w}{dt}$$
$$= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0} + 0\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + 0\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0}.$$

□

Az oldalt látható diagram egy könnyen megjegyezhető forma a láncszabályhoz, amiből látszik, hogy ha $t = t_0$, akkor a dx/dt és dy/dt hányadosokat t_0-ban kell számolni. t_0 értéke meghatározza a differenciálható x és y függvények x_0, y_0 helyettesítési értékét is. A $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ függvények (mint x és y függvényei) a t_0-nak megfelelő $P_0(x_0, y_0)$-ban vannak számítva. A tényleges független változó t, x és y közbülső függvények, és w a függő változó.

A láncszabály egy részletesebben kiírt alakja mutatja, hogyan kell a deriváltakat számolni:

$$\frac{dw}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{dy}{dt}(t_0).$$

1. PÉLDA: **A láncszabály alkalmazása**

Használjuk a láncszabályt a

$$w = xy$$

függvény t szerinti deriváltjára az $x = \cos t$, $y = \sin t$ görbe mentén! Mennyi a derivált értéke $t = \pi/2$-ben?

Megoldás: Alkalmazzuk a láncszabályt dw/dt meghatározására:

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= \frac{\partial(yx)}{\partial x}\cdot\frac{d}{dt}(\cos t) + \frac{\partial(xy)}{\partial y}\cdot\frac{d}{dt}(\sin t)\\ &= (y)(-\sin t) + (x)(\cos t)\\ &= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t)\\ &= -\sin^2 t + \cos^2 t\\ &= \cos 2t.\end{aligned}$$

Ebben az esetben direkt módon is ellenőrizhetjük az eredményünket. Behelyettesítve:

$$w = xy = \cos t \sin t = \frac{1}{2}\sin 2t,$$

így

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\cos 2t = \cos 2t.$$

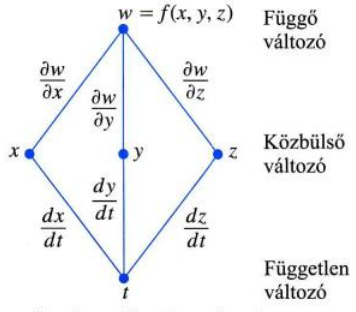
Bármelyik eredmény t adott értékére:

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=\pi/2} = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \cos\pi = -1.$$

□

Most három úton juthatunk w-ből t-be, de az eljárás dw/dt meghatározására ugyanaz. Minden lehetséges úton lemegyünk w-ből t-be, és az útbaeső deriváltakat összeszorozzuk, majd az így kapott szorzatokat összeadjuk.

Láncszabály



$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Háromváltozós függvények

6. TÉTEL: A láncszabály három független változóra

Ha $w = f(x,y,z)$ differenciálható, és x, y, z differenciálható függvényei t-nek, akkor w is differenciálható függvénye t-nek, és

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

A bizonyítás pontosan ugyanúgy szól, mint kétváltozós esetben, csak most három közbülső változónk van kettő helyett. A diagram is majdnem ugyanaz, csak most három út vezet w-ből t-be.

2. PÉLDA: Egy függvény értékeinek változása egy csavarvonal mentén

Határozzuk meg dw/dt-t, ha

$$w = xy + z, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t.$$

Ebben a példában w értékei egy csavarvonal mentén változnak (13. fejezet). Mennyi a derivált értéke $t = 0$-ban?

Megoldás:

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= (y)(-\sin t) + (x)(\cos t) + (1)(1) \\ &= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 1 \qquad y = \sin t,\ x = \cos t. \\ &= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 1 + \cos 2t \\ \left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=0} &= 1 + \cos 0 = 2.\end{aligned}$$

□

Lássunk egy fizikai példát egy görbementi változásra! Ha $w = T(x,y,z)$ a hőmérséklet az (x,y,z) pontban, akkor az $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ paraméterezésű görbe pontjaiban a t paramétertől függő hőmérsékletet a $w = T(x(t), y(t), z(t))$ összetett függvény adja meg. A dw/dt derivált a hőmérsékletváltozás pillanatnyi sebességét adja a görbe mentén, a 6. Tétel alapján számítva.

Felületeken definiált függvények

Ha például a $w = f(x,y,z)$ hőmérsékletet egy gömbfelület (x,y,z) pontjaiban vizsgáljuk, akkor valószínű, hogy a pontot x, y és z helyett inkább a szélességi és hosszúsági fokokkal szeretnénk megadni. Ha $x = g(r,s)$, $y = h(r,s)$ és $z = k(r,s)$, akkor a hőmérsékletet kifejezhetjük mint r és s függvényét a

$$w = f(g(r,s), h(r,s), k(r,s))$$

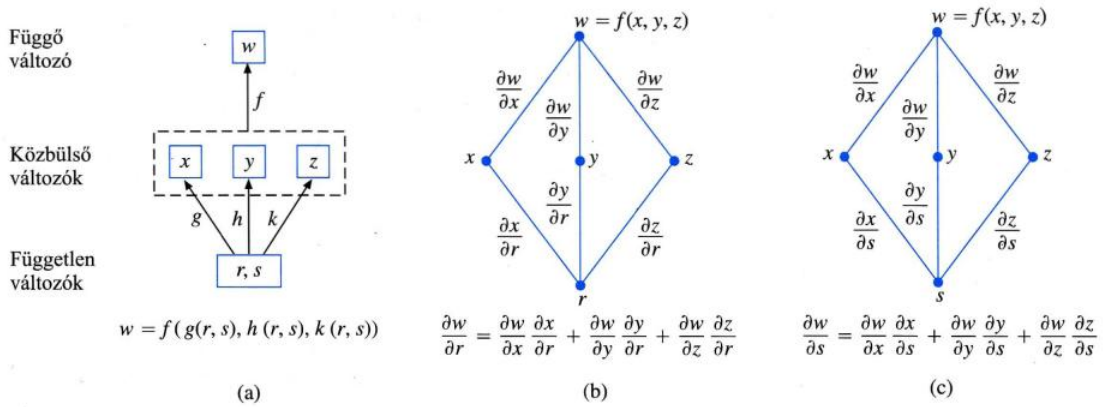
összetett függvénnyel. A megfelelő feltételek mellett w-nek r és s szerinti parciális deriváltjai léteznek, és a következőképpen lehet azokat kiszámítani:

7. TÉTEL: A láncszabály két független és három közbülső változó esetén

Tegyük fel, hogy a $w = f(x,y,z)$, $x = g(r,s)$, $y = h(r,s)$ és $z = k(r,s)$ függvények valamennyien differenciálhatók. Ekkor w parciális deriváltjai r és s szerint:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r},$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}.$$



14.19. ÁBRA: Összetett függvény és deriválási diagram a 7. Tételhez.

Az egyenlőségek közül az elsőt levezethetjük úgy, hogy a 6. Tétel láncszabályát alkalmazzuk fixen tartva s-et, és r-et kezelve t-ként. Mindkét derivált diagramja a 14.19. ábrán látható.

3. PÉLDA: **Parciális deriváltak számítása a 7. Tétellel**

Fejezzük ki $\frac{\partial w}{\partial r}$-et és $\frac{\partial w}{\partial s}$-et r és s függvényeként, ha

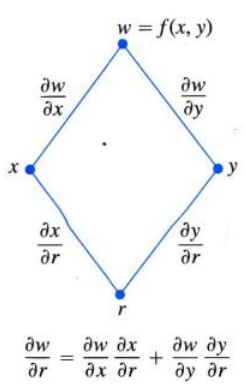
$$w = x + 2y + z^2, \quad x = \frac{r}{s}, \quad y = r^2 + \ln s, \quad z = 2r.$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \\
&= (1)\left(\frac{1}{s}\right) + (2)(2r) + (2z)(2) \\
&= \frac{1}{s} + 4r + (4r)(2) = \frac{1}{s} + 12r \qquad z = 2r \text{ helyettesítés} \\
\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\
&= (1)\left(-\frac{r}{s^2}\right) + (2)\left(\frac{1}{s}\right) + (2z)(0) = \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2}
\end{aligned}$$

□

Láncszabály



$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

14.20. ÁBRA: Diagram a

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

egyenlethez.

Ha az f függvény nem három-, hanem csak kétváltozós, akkor a 7. Tétel minden képlete értelemszerűen rövidebb lesz.

Ha $w = f(x,y)$, $x = g(r,s)$, $y = h(r,s)$, akkor

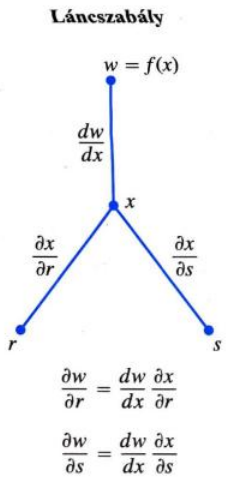
$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{és} \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

A 14.20. ábra mutatja a fenti egyenlőségek közül az elsőnek a diagramját. A második egyenlőségé ugyanolyan, csak r helyére s-et kell tenni.

4. PÉLDA: **További parciális deriváltak**

Fejezzük ki $\frac{\partial w}{\partial r}$-et és $\frac{\partial w}{\partial s}$-et r és s függvényeként, ha

$$w = x^2 + y^2, \quad x = r - s, \quad y = r + s.$$



14.21. ÁBRA: Diagram f, mint összetett függvény differenciálásához, ahol f r és s függvénye egyetlen közbülső változóval.

Megoldás:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$
$$= (2x)(1) + (2y)(1)$$
$$= 2(r-s) + 2(r+s)$$
$$= 4r$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$
$$= (2x)(-1) + (2y)(1)$$
$$= -2(r-s) + 2(r+s) \quad \begin{matrix} x = r-s, \\ y = r+s \end{matrix}$$
$$= 4s$$

□

Ha f egyedül x függvénye, az egyenleteink még egyszerűbbé válnak.

Ha $w = f(x)$ és $x = g(r,s)$, akkor

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} \quad \text{és} \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}.$$

Ebben az esetben w-nek x szerinti parciális deriváltja tulajdonképpen az x szerint közönséges derivált, dw/dx. A diagram a 14.21. ábrán látható.

Implicit deriválás újratárgyalva

Az 5. Tételbeli kétváltozós láncszabály nagyon megkönnyítheti az implicit deriválást. Tegyük fel, hogy

1. az $F(x,y)$ függvény differenciálható, és
2. az $F(x,y) = 0$ egyenlettel definiáljuk y-t, mint x differenciálható függvényét, legyen mondjuk $y = h(x)$.

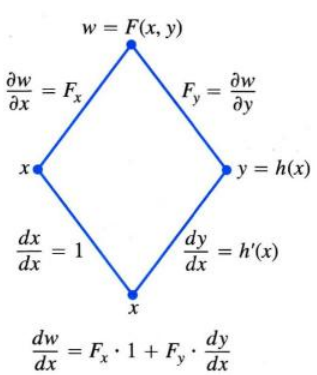
Mivel $w = F(x,y) = 0$, a dw/dx derivált nulla kell, hogy legyen. A deriváltat a láncszabállyal számítva (14.22. ábra diagramja) azt kapjuk, hogy

$$0 = \frac{dw}{dx} = F_x\frac{dx}{dx} + F_y\frac{dy}{dx} \qquad \begin{matrix} \text{5. Tétel } t = x \\ \text{és } f = F \text{ esetén} \end{matrix}$$
$$= F_x \cdot 1 + F_y \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Ha $F_y = \partial w/\partial y \neq 0$, akkor megoldhatjuk ezt az egyenletet dy/dx-re:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Ez a kapcsolat meglepően egyszerűre rövidíti az implicit függvények deriválását, így tételként is kimondjuk.



14.22. ÁBRA: Diagram $w = F(x,y)$ deriválásához x szerint. A $dw/dx = 0$ helyettesítés az implicit függvények differenciálási szabályához vezet (8. Tétel).

8. TÉTEL: Implicit differenciálás

Tegyük fel, hogy $F(x,y)$ differenciálható, és az $F(x,y) = 0$ egyenlet az y-t, mint x differenciálható függvényét definiálja. Ekkor minden olyan pontban, ahol $F_y \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

5. PÉLDA: Implicit deriválás

Használjuk a 8. Tételt dy/dx meghatározására, ha $y^2 - x^2 - \sin xy = 0$.

Megoldás: Legyen $F(x,y) = y^2 - x^2 - \sin xy$. Ekkor

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-2x - y\cos xy}{2y - x\cos xy} = \frac{2x + y\cos xy}{2y - x\cos xy}.$$

Ez a számítás sokkal rövidebb, mint pl. a 3.6. alfejezetben alkalmazott egyváltozós implicit deriválás. □

Sokváltozós függvények

Számos formáját adtuk a láncszabálynak ebben az alfejezetben, de egyáltalán nem kell őket külön-külön megjegyezni, ha látjuk az általános képletet. Amikor egy konkrét feladatot oldunk meg, sokat segíthet a megfelelő diagram megrajzolása. A függő változót helyezzük a tetejére, a közbülső változókat középre, a kiválasztott független változót a legaljára. Ahhoz, hogy a függő változó kiválasztott független változó szerinti deriváltját megkapjuk, induljunk ki a függő változóból lefelé a független változóig minden úton, összeszorozva a deriváltakat. Ezután a különböző utakon nyert szorzatokat adjuk össze!

Általában tegyük fel, hogy $w = f(x,y,\dots,v)$ differenciálható függvénye az x, $y,\dots v$ változóknak (véges halmaz), és, hogy $x, y, \dots, v$ differenciálható függvényei a $p, q, \dots, t$ változóknak (szintén véges halmaz). Ekkor w differenciálható függvénye a változóknak p-től t-ig, és w-nek ezen változók szerinti parciális deriváltjai a következő képlettel, ill. ehhez hasonlókkal számíthatók:

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p} + \dots + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}.$$

A többi változó szerinti deriváltat úgy kapjuk, hogy p helyére a megfelelő változót írjuk. Könnyű megjegyezni a jobboldali kifejezést, ha két olyan vektor skalárszorzatának tekintjük, amelyekben a parciális deriváltak állnak:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \dots, \frac{\partial w}{\partial v}\right)}_{\substack{w \text{ deriváltjai a} \\ \text{közbülső} \\ \text{változók szerint}}} \quad \text{és} \quad \underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial y}{\partial p}, \dots, \frac{\partial v}{\partial p}\right)}_{\substack{\text{a közbülső változók} \\ \text{deriváltjai a választott} \\ \text{független változó szerint}}}.$$

14.4. Feladatok

Láncszabály, egy független változó

Az 1–6. feladatokban **(a)** fejezzük ki dw/dt-t mint a t függvényét kétféleképpen, láncszabállyal és behelyettesítéssel is! **(b)** Azután adjuk meg dw/dt értékét a megadott helyen!

1. $w = x^2+y^2$, $x = \cos t$, $y = \sin t$; $t = \pi$

2. $w = x^2+y^2$, $x = \cos t + \sin t$, $y = \cos t - \sin t$; $t = 0$

3. $w = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$, $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$, $z = 1/t$; $t = 3$

4. $w = \ln(x^2+y^2+z^2)$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 4\sqrt{t}$; $t = 3$

5. $w = 2ye^x - \ln z$, $x = \ln(t^2+1)$, $y = \operatorname{arctg} t$, $z = e^t$; $t = 1$

6. $w = z - \sin xy$, $x = t$, $y = \ln t$, $z = e^{t-1}$; $t = 1$

Láncszabály, kettő és három független változó

A 7. és 8. feladatokban **(a)** fejezzük ki $\partial z/\partial u$-t és $\partial z/\partial v$-t mint u és v függvényét kétféleképpen, láncszabállyal és behelyettesítéssel is! **(b)** Azután adjuk meg $\partial z/\partial u$ és $\partial z/\partial v$ értékét a megadott (u,v) helyen!

7. $z = 4e^x \ln y$, $x = \ln(u\cos v)$, $y = u\sin v$; $(u,v) = (2,\pi/4)$

8. $z = \operatorname{arctg}(x/y)$, $x = u\cos v$, $y = u\sin v$; $(u,v) = (1{,}3, \pi/6)$

A 9. és 10. feladatokban **(a)** fejezzük ki $\partial w/\partial u$-t és $\partial w/\partial v$-t mint u és v függvényét kétféleképpen, láncszabállyal és behelyettesítéssel is! **(b)** Azután adjuk meg $\partial w/\partial u$ és $\partial w/\partial v$ értékét a megadott (u,v) helyen!

9. $w = xy+yz+xz$, $x = u+v$, $y = u-v$, $z = uv$; $(u,v) = (1/2,1)$

10. $w = \ln(x^2+y^2+z^2)$, $x = ue^v \sin u$, $y = ue^v \cos u$, $z = ue^v$; $(u,v) = (-2,0)$

A 11. és 12. feladatokban **(a)** fejezzük ki $\partial u/\partial x$-t, $\partial u/\partial y$ és $\partial u/\partial z$-t mint x, y és z függvényét kétféleképpen, láncszabállyal is, behelyettesítéssel is! **(b)** Azután adjuk meg $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ és $\partial u/\partial z$ értékét a megadott (x,y,z) helyen!

11. $u = \dfrac{p-q}{q-r}$, $p = x+y+z$, $q = x-y+z$, $r = x+y-z$; $(x,y,z) = (\sqrt{3},2,1)$

12. $u = e^{qr} \arcsin p$, $p = \sin x$, $q = z^2 \ln y$, $r = 1/z$; $(x,y,z) = (\pi/4,\ 1/2, -1/2)$

Diagram használata

A 13–24. feladatokban rajzoljuk meg a deriválás diagramját, és adjuk meg a láncszabállyal való deriválás képletét!

13. $\dfrac{dz}{dt}$, ha $z = f(x,y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$

14. $\dfrac{dz}{dt}$, ha $z = f(u,v,w)$, $u = g(t)$, $v = h(t)$ $w = k(t)$

15. $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ és $\dfrac{\partial w}{\partial u}$, ha $w = h(x,y,z)$, $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$, $z = k(u,v)$

16. $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ és $\dfrac{\partial w}{\partial y}$, ha $w = f(r,s,t)$, $r = g(x,y)$, $s = h(x,y)$, $t = k(x,y)$

17. $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ és $\dfrac{\partial w}{\partial v}$, ha $w = g(x,y)$, $x = h(u,v)$, $y = k(u,v)$

18. $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ és $\dfrac{\partial w}{\partial y}$, ha $w = g(u,v)$, $u = h(x,y)$, $v = k(x,y)$

19. $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ és $\dfrac{\partial z}{\partial s}$, ha $z = f(x,y)$, $x = g(t,s)$, $y = h(t,s)$

20. $\dfrac{\partial y}{\partial r}$, ha $y = f(u)$, $u = g(r,s)$

21. $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ és $\dfrac{\partial w}{\partial t}$, ha $w = g(u)$, $u = h(s,t)$

22. $\dfrac{\partial w}{\partial p}$, ha $w = f(x,y,z,v)$, $x = g(p,q)$, $y = h(p,q)$, $z = j(p,q)$, $v = k(p,q)$

23. $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ és $\dfrac{\partial w}{\partial s}$, ha $w = f(x,y)$, $x = g(r)$, $y = h(s)$

24. $\dfrac{\partial w}{\partial s}$, ha $w = g(x,y)$, $x = h(r,s,t)$, $y = k(r,s,t)$

Implicit deriválás

Feltételezve, hogy a 25–28. feladatokban y az x-nek differenciálható függvénye, használjuk a 8. Tételt dy/dx meghatározására az adott pontban!

25. $x^3 - 2y^2 + xy = 0$, $(1,1)$

26. $xy + y^2 - 3x - 3 = 0$, $(-1,1)$

27. $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0$, $(1,2)$

28. $xe^y + \sin xy + y - \ln 2 = 0$, $(0, \ln 2)$

Háromváltozós implicit deriválás

A 8. Tétel három vagy több változó esetére is általánosítható. A háromváltozós eset a következő: ha az $F(x,y,z) = 0$ egyenlettel definiált z az x és y változók differenciálható függvénye, akkor azokban a pontokban, ahol $F_z \neq 0$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{és} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Használjuk ezeket az összefüggéseket a 29–32. feladatokban $\partial z/\partial x$ és $\partial z/\partial y$ meghatározására az adott pontokban!

29. $z^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0$, $(1,1,1)$

30. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} - 1 = 0$, $(2,3,6)$

31. $\sin(x+y) + \sin(y+z) + \sin(x+z) = 0$, (π,π,π)

32. $xe^y + ye^z + 2\ln x - 2 - 3\ln 2 = 0$, $(1, \ln 2, \ln 3)$

Parciális deriváltak meghatározása adott pontokban

33. Mennyi $\partial w/\partial r$, ha $r = 1$, $s = -1$ és $w = (x+y+z)^2$, $x = r - s$, $y = \cos(r+s)$, $z = \sin(r+s)$?

34. Mennyi $\partial w/\partial v$, ha $u = -1$, $v = 2$ és $w = xy + \ln z$, $x = v^2/u$, $y = u + v$, $z = \cos u$?

35. Mennyi $\partial w/\partial v$, ha $u = 0$, $v = 0$ és $w = x^2 + (y/x)$, $x = u - 2v + 1$, $y = 2u + v - 2$?

36. Mennyi $\partial z/\partial u$, ha $u = 0$, $v = 1$ és $z = \sin xy + x\sin y$, $x = u^2 + v^2$, $y = uv$?

37. Mennyi $\partial z/\partial u$ és $\partial z/\partial v$, ha $u = \ln 2$, $v = 1$ és $z = 5\,\mathrm{arctg}\,x$, $x = e^u + \ln v$?

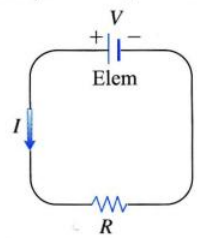
38. Mennyi $\partial z/\partial u$ és $\partial z/\partial v$, ha $u = 1$, $v = -2$ és $z = \ln q$, $q = \sqrt{v+3}\,\mathrm{arctg}\,u$?

További példák és feladatok

39. Változó feszültség egy áramkörben: Egy áramkörben, amire érvényes a $V = IR$ egyenlőség, a V feszültség lassan csökken, ahogy az elem lemerül. Ugyanakkor az R ellenállás nő, ahogy a fogyasztó felmelegszik. Használjuk a

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial I}\frac{dI}{dt} + \frac{\partial V}{\partial R}\frac{dR}{dt}$$

egyenletet, hogy meghatározzuk, hogyan változik az áramerősség abban a pillanatban, amikor $R = 600\text{ohm}$, $I = 0{,}04\text{amper}$, $dR/dt = 0{,}5\text{ohm/s}$ és $dV/dt = -0{,}01\text{volt/s}$.



40. Változó méretű doboz: Tegyük fel, hogy egy téglatest alakú doboz a, b és c élhosszúságai időben változnak. Egy bizonyos pillanatban $a = 1$ m, $b = 2$ m és $c = 3$ m, $da/dt = db/dt = 1$ m/s, $dc/dt = -3$ m/s. Milyen gyorsan változik a doboz V térfogata és F felszíne ebben a pillanatban? A doboz testátlói csökkennek vagy nőnek ebben a pillanatban?

41. Ha $f(x,y,z)$ differenciálható és $u = x - y$, $v = y - z$, $w = z - x$, mutassuk meg, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

42. Tegyük fel, hogy az $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ polárkoordinátákat helyettesítjük egy differenciálható $w = f(x,y)$ függvénybe.

(a) Mutassuk meg, hogy

$$\frac{\partial w}{\partial r} = f_x\cos\theta + f_y\sin\theta$$

és

$$\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} = -f_x\sin\theta + f_y\cos\theta$$

(b) Oldjuk meg az (a) rész egyenleteit úgy, hogy f_x-et és f_y-t fejezzük ki $\partial w/\partial r$ és $\partial w/\partial\theta$ függvényeként!

(c) Mutassuk meg, hogy

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2.$$

43. Laplace-egyenlet: Mutassuk meg, ha $w = f(u,v)$ kielégíti az $f_{uu} + f_{vv} = 0$ Laplace-egyenletet, és ha $u = (x^2 - y^2)/2$, $v = xy$, akkor w kielégíti a $w_{xx} + w_{yy} = 0$ Laplace-egyenletet is!

44. Laplace-egyenlet: Legyen $w = f(u) + g(v)$, ahol $u = x + iy$ és $v = x - iy$ $(i = \sqrt{-1})$. Mutassuk meg, hogy w kielégíti a $w_{xx} + w_{yy} = 0$ Laplace-egyenletet, ha minden függvény differenciálható, amelyiknek annak kell lennie!

Függvények változása görbék mentén

45. Szélsőértékek egy csavarvonalon: Tegyük fel, hogy az $f(x,y,z)$ függvény parciális deriváltjai az $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$ csavarvonal pontjaiban

$$f_x=\cos t, \quad f_y=\sin t, \quad f_z=t^2+t-2$$

A görbe mely pontjában (pontjaiban) lehet f-nek szélsőértéke, ha egyáltalán van ilyen pont?

46. Térgörbe: Legyen $w=x^2e^{2y}\cos 3z$. Határozzuk meg dw/dt értékét az $x=\cos t$, $y=\ln(t+2)$, $z=t$ görbe mentén a $(1,\ln 2,0)$ pontban!

47. Hőmérséklet egy körön: Legyen $T=f(x,y)$ a hőmérséklet az $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t\le 2\pi$ kör (x,y) pontjaiban, és tegyük fel, hogy

$$\frac{\partial T}{\partial x}=8x-4y, \quad \frac{\partial T}{\partial y}=8y-4x\,.$$

(a) Határozzuk meg a hőmérséklet maximumát a körön a dT/dt és d^2T/dt^2 vizsgálatával!

(b) Tegyük fel, hogy $T=4x^2-4xy+4y^2$. Keressük meg T maximális és minimális értékét a körön!

48. Hőmérséklet egy ellipszisen: Legyen $T=g(x,y)$ a hőmérséklet az

$$x=2\sqrt{2}\cos t, \quad y=\sqrt{2}\sin t, \quad 0\le t\le 2\pi$$

ellipszis (x,y) koordinátájú pontjában, és tegyük fel, hogy

$$\frac{\partial T}{\partial x}=y, \quad \frac{\partial T}{\partial y}=x.$$

(a) Határozzuk meg a hőmérséklet maximumát az ellipszisen a dT/dt és d^2T/dt^2 vizsgálatával!

(b) Tegyük fel, hogy $T=xy-2$. Keressük meg T maximális és minimális értékét a körön!

Integrálok deriválása

Bizonyos folytonossági feltételek mellett igaz, hogy ha

$$F(x)=\int_a^b g(t,x)\,dt,$$

akkor $F'(x)=\int_a^b g_x(t,x)\,dt$. Ezt a tételt és a láncszabályt használva meghatározhatjuk

$$F(x)=\int_a^{f(x)} g(t,x)\,dt$$

deriváltját, ha bevezetjük a

$$G(u,x)=\int_a^u g(t,x)\,dt$$

függvényt, és $u=f(x)$-et helyettesítünk. Határozzuk meg a 49. és 50. feladatokban adott függvények deriváltját.

49. $F(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{t^4+x^3}\,dt$

50. $F(x)=\displaystyle\int_{x^2}^1\sqrt{t^3+x^2}\,dt$

14.5. Iránymenti deriváltak és gradiens vektor

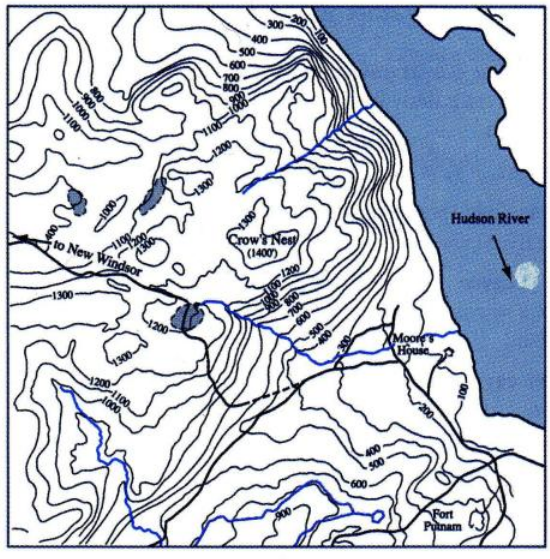
Ha egy pillantást vetünk a szintvonalakat mutató térképre (14.23. ábra), ami a West Point részt mutatja New Yorkban a Hudson folyó mellett, akkor látjuk, hogy a vízmosások iránya merőleges a szintvonalakra. A vízfolyások olyan irányban húzódnak, hogy a víz a lehető legmeredekebben folyjon lefelé, és minél előbb érje el a Hudson folyót. Ezért a vízfolyás tengerszint feletti magassága egy adott pontban egy meghatározott irányban változik a leggyorsabban. Ebben az alfejezetben megvizsgáljuk, hogy a leggyorsabb változás iránya miért merőleges a szintvonalakra.

Iránymenti derivált a síkban

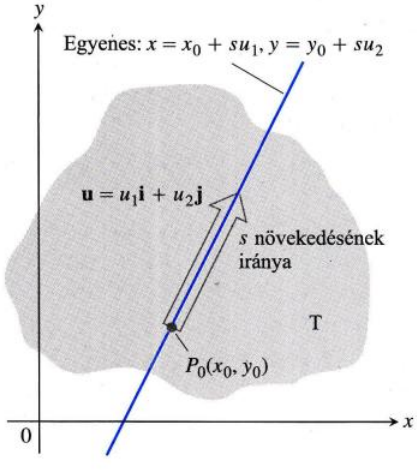
A 14.4. alfejezetből tudjuk, hogy ha $f(x,y)$ differenciálható, akkor f változásának gyorsasága t szerint a differenciálható $x=g(t)$, $y=h(t)$ görbe mentén

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Minden $P_0(x_0,y_0)=P_0(g(t_0),h(t_0))$ pontban ez az egyenlőség adja meg f változásának gyorsaságát a t növekedő irányában, azaz ez az érték függ attól, merre „megyünk" a görbén. Ha pl. a görbe egy egyenes és t ívhosszparaméter egy adott **u** egységvektor irányában indulva egy adott P_0 ponttól, akkor df/dt az f-nek az értelmezési tartományabeli távolság szerinti változási sebessége **u** irányában.



14.23. ÁBRA: A West Point Area (New York) térképe. A vízfolyások iránya olyan, hogy a víz a legmeredekebben haladjon lefelé, azaz merőlegesek a szintvonalakra.



14.24. ÁBRA: Az f függvény változásának sebessége a P_0 pontban $\mathbf{u}$ irányában az, mint f változása ezen egyenes mentén a P_0-ban.

Ha az $\mathbf{u}$-t változtatjuk, megkapjuk, milyen gyorsan változik f a P_0 pontban a különböző irányokban a távolság szerint. Fogalmazzuk meg ezt a gondolatot pontosabban.

Tegyük fel, hogy $f(x,y)$ definiálva van az xy-sík egy T tartományán, a $P_0(x_0,y_0)$ a T tartomány egy pontja és $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ egy egységvektor. Ekkor az

$$x = x_0 + su_1, \quad y = y_0 + su_2$$

egyenletek egy P_0-on átmenő, $\mathbf{u}$-val párhuzamos egyenes paraméteres egyenletrendszerét adják. Mivel $\mathbf{u}$ egységvektor, s az „előjeles" ívhossz P_0-tól számítva az $\mathbf{u}$ irányában, és mivel egyenes mentén haladunk, ez a P és P_0 közötti „előjeles" távolság (14.24. ábra).

DEFINÍCIÓ: Iránymenti derivált

Az f **függvény iránymenti deriváltja P_0-ban az $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ egységvektor irányában** a

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0+su_1, y_0+su_2) - f(x_0,y_0)}{s} \qquad (14.2)$$

szám, feltéve, hogy a határérték létezik.

Az irodalomban az iránymenti derivált egy másik (féloldali) értelmezése is használatos (ld. gyakorló feladatok 100/c feladat).

Az iránymenti derivált egy másik jelölése:

$(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0}$. f deriváltja a P_0 pontban $\mathbf{u}$ irányában

1. PÉLDA: **Iránymenti derivált meghatározása definíció szerint**

Adjuk meg az

$$f(x,y) = x^2 + xy$$

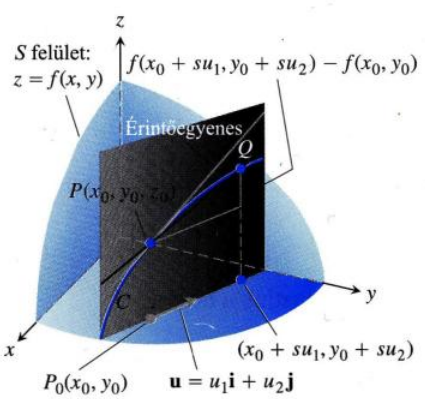
függvény iránymenti deriváltját a $P_0(1,2)$ pontban, az $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2})\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})\mathbf{j}$ irányban.

Megoldás:

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = \lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1,y_0+su_2)-f(x_0,y_0)}{s}$$
$$= \lim_{s\to 0}\frac{f\left(1+s\cdot\frac{1}{\sqrt{2}},2+s\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-f(1,2)}{s}$$
$$= \lim_{s\to 0}\frac{\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(2+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)-(1^2+1\cdot 2)}{s}$$
$$= \lim_{s\to 0}\frac{\left(1+\frac{2s}{\sqrt{2}}+\frac{s^2}{2}\right)+\left(2+\frac{3s}{\sqrt{2}}+\frac{s^2}{2}\right)-3}{s}$$
$$= \lim_{s\to 0}\frac{\frac{5s}{\sqrt{2}}+s^2}{s} = \lim_{s\to 0}\left(\frac{5}{\sqrt{2}}+s\right) = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}+0\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Az $f(x,y) = x^2 + xy$ függvény változási sebessége a $P_0(1,2)$ pontban az $\mathbf{u} = 1/\sqrt{2}\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})\mathbf{j}$ irányban $\frac{5}{\sqrt{2}}$. □

Az iránymenti derivált geometriai jelentése



14.25. ÁBRA: A C görbe meredeksége P_0-ban a PQ szakaszok meredekségének határértéke, ha $Q \to P$. Ez a $\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = (D_{\mathbf{u}}F)_{P_0}$ iránymenti derivált.

A $z = f(x,y)$ egyenlet egy S felületet ad meg a térben. Ha $z_0 = f(x_0,y_0)$, akkor $P(x_0,y_0,z_0)$ a felületnek egy pontja. A függőleges sík, amelyik átmegy P-n és egyben $P_0(x_0,y_0)$-on is, az S felületet a G görbében metszi (14.25. ábra).

Az f függvény változási sebessége $\mathbf{u}$ irányban a G görbéhez a P pontban húzott érintő meredeksége (ahol $\mathbf{u}$ jelöli ki a pozitív irányt).

Ha $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, akkor az iránymenti derivált P_0-ban épp $\partial f/\partial x$ az (x_0,y_0) pontban. Ha $\mathbf{u} = \mathbf{j}$, akkor az iránymenti derivált P_0-ban épp $\partial f/\partial y$ az (x_0,y_0) pontban. Az iránymenti derivált a parciális deriváltak általánosítása. Most már bármilyen irányú deriváltat számíthatunk, nemcsak $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ irányút.

Egy fizikai szemléltetését is megadjuk az iránymenti deriváltnak. Tegyük fel, hogy $T = f(x,y)$ a hőmérsékletet adja meg a sík pontjaiban. Ekkor $f(x_0,y_0)$ a hőmérséklet a $P_0(x_0,y_0)$ pontban, és $(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0}$ a pillanatnyi hőmérsékletváltozás, ha P_0-ból $\mathbf{u}$ irányba kimozdulunk.

Iránymenti derivált számítása gradiensvektorral

DEFINÍCIÓ: Gradiensvektor

Az $f(x,y)$ függvény **gradiensvektora**, másszóval **gradiense** a $P_0(x_0,y_0)$ pontban a

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

vektor, ahol f parciális deriváltjai a P_0 pontban vannak számolva.

A ∇f jelölést „gradiens f”-nek, „grad f”-nek, vagy „nabla f”-nek olvassuk. Ugyanennek egy másik jelölése: grad(f). Nyilvánvaló, hogy ha f differenciálható a P_0 pontban, akkor deriváltvektora a gradiensével egyenlő ebben a pontban.

Levezetünk egy egyszerű számítási képletet differenciálható függvények iránymenti deriváltjára. Induljunk ki az

$$x = x_0 + su_1, \quad y = y_0 + su_2 \tag{14.3}$$

egyenesből, ami átmegy a $P_0(x_0, y_0)$ ponton. Az s paraméter az $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ egységvektor irányába nő, és abszolút értéke éppen P távolsága P_0-tól. Ekkor

$$\begin{aligned}\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\frac{dy}{ds} && \text{láncszabály}\\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\cdot u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\cdot u_2 && \text{(14.3) egyenletből } dx/ds = u_1,\ dy/ds = u_2\\ &= \underbrace{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\mathbf{j}\right]}_{f \text{ gradiense } P_0\text{-ban}} \cdot \underbrace{\left[u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}\right]}_{\mathbf{u} \text{ irány}}. && (14.4)\end{aligned}$$

A (14.4) egyenlet azt jelenti, hogy differenciálható f függvény iránymenti deriváltja számítható úgy, mint az adott irányú $\mathbf{u}$ egységvektor skaláris szorzata f gradiensével az adott pontban.

9. TÉTEL: Az iránymenti derivált egy skalárszorzat

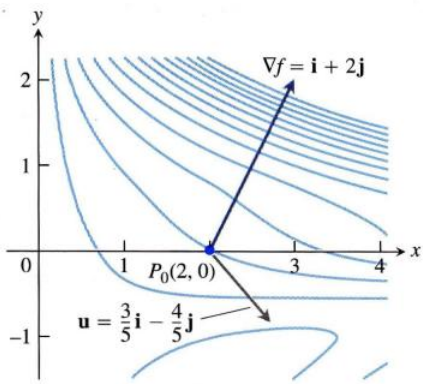
Ha $f(x,y)$ differenciálható egy nyílt tartományon, amelynek $P_0(x_0,y_0)$ belső pontja, akkor

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = (\nabla f)_{P_0}\cdot\mathbf{u} \qquad (14.5)$$

azaz f gradiense P_0-ban skalárisan szorozva $\mathbf{u}$-val.

2. PÉLDA: Iránymenti derivált meghatározása gradienssel

Határozzuk meg $f(x,y) = xe^y + \cos(xy)$ iránymenti deriváltját a (2, 0) pontban $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ irányban!



14.26. ÁBRA: ∇f képe mint vektor f értelmezési tartományában. Ha $f(x,y) = xe^y + \cos(xy)$, akkor az értelmezési tartomány az egész sík. Az f függvény változásának sebessége a (2, 0) pontban az $\mathbf{u} = (3/5)\mathbf{i} - (4/5)\mathbf{j}$ irányban $\nabla f \cdot \mathbf{u} = -1$ (2. példa).

Megoldás: $\mathbf{v}$ irányú egységvektort kapunk, ha elosztjuk a hosszával:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{v}}{5} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}.$$

Az f függvény parciális deriváltjai mindenütt léteznek és folytonosak, és

$$\begin{aligned} f_x(2,0) &= (e^y - y\sin(xy))_{(2,0)} = e^0 - 0 = 1\\ f_y(2,0) &= (xe^y - x\sin(xy))_{(2,0)} = 2e^0 - 2\cdot 0 = 2.\end{aligned}$$

f gradiense (2, 0)-ban:

$$\nabla f|_{(2,0)} = f_x(2,0)\mathbf{i} + f_y(2,0)\mathbf{j} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

(14.26. ábra). Így f $\mathbf{v}$ irányú iránymenti deriváltja (2, 0)-ban

$$\begin{aligned}(D_{\mathbf{u}}f)|_{(2,0)} &= \nabla f|_{(2,0)}\cdot\mathbf{u}\\ &= (\mathbf{i}+2\mathbf{j})\cdot\left(\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}\right) = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1.\end{aligned}$$

□

Kiszámítva a skalárszorzatot a (14.5) képletben,

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f\cdot\mathbf{u} = |\nabla f||u|\cos\theta = |\nabla f|\cos\theta$$

ahol θ az $\mathbf{u}$ és ∇f vektorok szöge, szembeszökőek a következő tulajdonságok.

A $D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f| \cos\theta$ iránymenti derivált tulajdonságai

Tegyük fel, hogy f az értelmezési tartományán differenciálható.

1. Az f függvény akkor nő a leggyorsabban, ha $\cos\theta = 1$, azaz, ha $\mathbf{u}$ épp ∇f irányába mutat. Tehát f az értelmezési tartományának minden P pontjában abban az irányban növekszik a leggyorsabban, amerre a P-beli gradiens mutat. Ebben az irányban az iránymenti derivált:

$$D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos(0) = |\nabla f|.$$

2. Hasonlóképp, az f függvény $-\nabla f$ irányban csökken a leggyorsabban. Ebben az irányban az iránymenti derivált $D_{\mathbf{u}}f = = |\nabla f| \cos(\pi) = -|\nabla f|$.

3. A $\nabla f \neq 0$ gradiensre merőleges irányban az iránymenti derivált 0, hiszen ekkor $\theta = \pi/2$ és

$$D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos(\pi/2) = |\nabla f| \cdot 0 = 0.$$

Ezek a tulajdonságok három változó esetén ugyanígy fennállnak, ahogy azt majd később látni fogjuk.

3. PÉLDA: **A maximális, minimális és nulla változás irányai**

Határozzuk meg azokat az irányokat, amelyekben az $f(x,y) = (x^2/2) + (y^2/2)$ függvény

(a) az (1, 1) pontban a leggyorsabban nő,

(b) az (1, 1) pontban a leggyorsabban csökken,

(c) az (1, 1) pontban nem változik.

Megoldás:

(a) A függvény a gradiens irányában nő a leggyorsabban. A gradiens az (1, 1) pontban

$$(\nabla f)_{(1,1)} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})_{(1,1)} = \mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

Az egységnyi hosszú irányvektor:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{|\mathbf{i}+\mathbf{j}|} = \frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

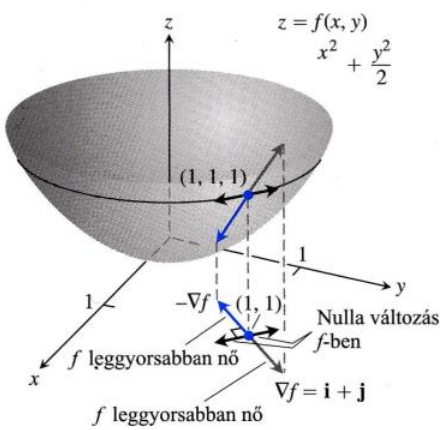
(b) A függvény a gradienssel ellentétes irányban, azaz $-(\nabla f)_{(1,1)}$ irányban csökken a leggyorsabban:

$$-\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

(c) A nulla változás iránya merőleges a gradiensre, azaz a $\nabla f_{(1,1)}$ vektorra:

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \quad \text{és} \quad -\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

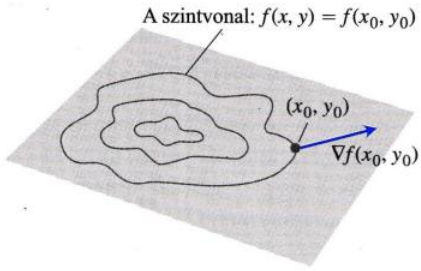
(14.27. ábra). □



14.27. ÁBRA: Az az irány, amelyben az $f(x,y) = (x^2/2) + (y^2/2)$ a leggyorsabban növekszik az (1, 1) pontban, a $\nabla f|_{(1,1)} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ irány. Ez a legmeredekebb emelkedés iránya a felület (1, 1, 1) pontjában (3. példa).

Gradiensek és szintvonalak érintői

Ha egy differenciálható $f(x,y)$ függvény értéke egy sima $\mathbf{r} = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j}$ görbe mentén állandó és egyenlő c-vel, az azt jelenti, hogy $f(g(t), h(t)) = c$ (azaz, a



14.28. ÁBRA: Egy kétváltozós differenciálható függvény gradiense mindig merőleges az ugyanazon a ponton áthaladó szintvonalra.

görbe egy szintvonal). Deriváljuk ennek az egyenletnek mindkét oldalát t szerint:

$$\frac{d}{dt} f(g(t), h(t)) = \frac{d}{dt}(c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial g}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{dh}{dt} = 0 \qquad \text{láncszabály}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial g}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial h}\mathbf{j}\right)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{\left(\frac{dg}{dt}\mathbf{i} + \frac{dh}{dt}\mathbf{j}\right)}_{\frac{d\mathbf{r}}{dt}} = 0. \tag{14.6}$$

A (14.6) egyenlet azt jelenti, hogy ∇f merőleges a $d\mathbf{r}/dt$ érintővektorra, így merőleges a görbére.

> Egy differenciálható $f(x,y)$ függvény értelmezési tartományának minden (x_0,y_0) pontjában a függvény gradiense merőleges az (x_0,y_0) ponton átmenő szintvonalra (14.28. ábra).

A (14.6) egyenlet magyarázatot ad arra, miért merőlegesek a vízfolyások a szintvonalakra (14.23. ábra). Mivel a lefelé folyó vizek mindig a leggyorsabban lefelé vezető irányba folynak, mindig a negatív gradiens irányában kell haladniuk, és ez merőleges a szintvonalakra.

Ez a tulajdonság lehetővé teszi, hogy a szintvonalakhoz érintőt húzzunk. Ezek az egyenesek merőlegesek a gradiensre. Ha egy $P_0(x_0,y_0)$ ponton áthaladó egyenes merőleges az $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ vektorra, akkor az egyenlete (35. feladat):

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0.$$

Ha $\mathbf{N}$ éppen a $(\nabla f)_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0,y_0)\mathbf{j}$ gradiens, akkor az érintőegyenes egyenlete:

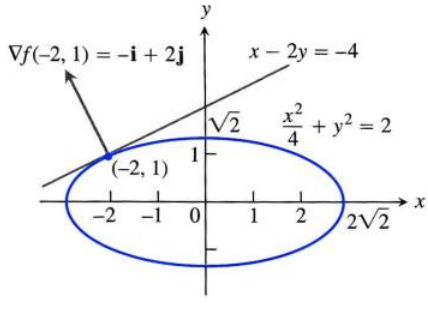
$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 0. \tag{14.7}$$

4. PÉLDA: **Ellipszis érintőjének meghatározása**

Adjuk meg az

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$

ellipszis érintőjének egyenletét a $(-2,1)$ pontban (14.29. ábra)!



14.29. ÁBRA: Az $(x^2/4) + y^2 = 2$ ellipszis érintőjét egy adott pontban megkaphatjuk, ha azt az $f(x,y) = (x^2/4) + y^2$ függvény szintvonalának tekintjük.

Megoldás: Az ellipszis az

$$f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$

függvény szintvonala. Az f függvény gradiense a $(-2,1)$ pontban:

$$\nabla f|_{(-2,1)} = \left(\frac{x}{2}\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}\right)_{(-2,1)} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

Az érintő egyenlete:

$$(-1)(x+2) + (2)(y-1) = 0 \qquad \text{(14.7) egyenlet}$$
$$x - 2y = -4. \qquad \square$$

Ha ismerjük két függvény, az f és g gradienseit egy pontban, akkor ebből következően ismerjük konstansszorosaik, összegük, szorzatuk, hányadosuk gradiensét is. Ezen szabályok bizonyítása a 36. feladatban van kitűzve. Vegyük észre, hogy ezeknek ugyanolyan alakjuk van, mint az egyváltozós függvények deriváltjaira vonatkozó szabályoknak.

Gradiensre vonatkozó algebrai összefüggések

1. *Konstansszoros gradiense:* $\nabla(kf) = k\nabla f$ (bármely k konstansra)
2. *Összeg gradiense:* $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
3. *Különbség gradiense:* $\nabla(f-g) = \nabla f - \nabla g$
4. *Szorzat gradiense:* $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
5. *Hányados gradiense:* $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

5. PÉLDA: **Példa összeg, szorzat stb. gradiensére**

Alkalmazzuk a fenti szabályokat az

$$f(x,y) = x - y \qquad g(x,y) = 3y$$
$$\nabla f = \mathbf{i} - \mathbf{j} \qquad \nabla g = 3\mathbf{j}$$

függvényekre!

1. $\nabla(2f) = \nabla(2x - 2y) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} = 2\nabla f$
2. $\nabla(f+g) = \nabla(x+2y) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} = \nabla f + \nabla g$
3. $\nabla(f-g) = \nabla(x-4x) = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} = \nabla f - \nabla g$
4. $$\begin{aligned}\nabla(fg) &= \nabla(3xy - 3y^2) = 3y\mathbf{i} + (3x-6y)\mathbf{j} \\ &= 3y(\mathbf{i}-\mathbf{j}) + 3y\mathbf{j} + (3x-6y)\mathbf{j} \\ &= 3y(\mathbf{i}-\mathbf{j}) + (3x-3y)\mathbf{j} \\ &= 3y(\mathbf{i}-\mathbf{j}) + (x-y)3\mathbf{j} = g\nabla f + f\nabla g\end{aligned}$$
5. $$\begin{aligned}\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \nabla\left(\frac{x-y}{3y}\right) &= \left(\frac{x}{3y} - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3y}\mathbf{i} - \frac{x}{3y^2}\mathbf{j} \\ &= \frac{3y\mathbf{i} - 3x\mathbf{j}}{9y^2} = \frac{3y(\mathbf{i}-\mathbf{j}) - (3x-3y)\mathbf{j}}{9y^2} \\ &= \frac{3y(\mathbf{i}-\mathbf{j}) - (x-y)3\mathbf{j}}{9y^2} = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}\end{aligned}$$

□

Háromváltozós függvények

Ha $f(x,y,z)$ differenciálható függvény és $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ egységnyi hosszúságú vektor, akkor

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

és

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}u_3.$$

Az iránymenti derivált ismét felírható a

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||\mathbf{u}|\cos\theta = |\nabla f|\cos\theta$$

alakban, így a kétváltozós esetre érvényes tulajdonságok továbbra is érvényben maradnak. Bármely pontban az f függvény a ∇f irányban növekszik a leggyorsabban, és $-\nabla f$ irányban csökken a leggyorsabban. Bármely ∇f-re merőleges irányban az iránymenti derivált nulla.

6. PÉLDA: **A maximális és minimális növekedés irányának meghatározása**

(a) Adjuk meg az $f(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$ függvény iránymenti deriváltját a $P_0(1,1,0)$ pontban, a $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ irányban!

(b) Melyik irányban változik az f függvény a leggyorsabban ebben a P_0 pontban, és mennyi a változás sebessége ebben az irányban?

Megoldás:

(a) A $\mathbf{v}$ irányú egységvektort úgy kapjuk, hogy $\mathbf{v}$-t elosztjuk a saját hosszával:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(2)^2+(-3)^2+(6)^2} = \sqrt{49} = 7$$
$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}.$$

Az f függvény parciális deriváltjai P_0-ban

$$f_x = (3x^2 - y^2)_{(1,1,0)} = 2, \quad f_y = -2xy|_{(1,1,0)} = -2, \quad f_z = -1|_{(1,1,0)} = -1.$$

A gradiens a P_0-ban

$$\nabla f|_{(1,1,0)} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Az f függvény differenciálható, ezért f iránymenti deriváltja P_0-ban a $\mathbf{v}$ irányban

$$(D_{\mathbf{u}}f)_{(1,1,0)} = \nabla f|_{(1,1,0)} \cdot \mathbf{u} = (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - k) \cdot \left(\frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}\right)$$
$$= \frac{4}{7} + \frac{6}{7} - \frac{6}{7} = \frac{4}{7}.$$

(b) A függvény a $\nabla f = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ irányban növekszik és a $-\nabla f$ irányban csökken a leggyorsabban. A változás sebessége

$$|\nabla f| = \sqrt{(2)^2+(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{és} \quad -|\nabla f| = -3. \qquad \square$$

14.5. Feladatok

Gradiens számítása adott pontban

Az 1–4. feladatokban adjuk meg a gradienst az adott pontban, azután vázoljuk fel a gradienst és azt a szintvonalat, amelyik az adott ponton átmegy!

1. $f(x,y) = y - x$, $(2,1)$
2. $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, $(1,1)$
3. $g(x,y) = y - x^2$, $(-1,0)$
4. $g(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$, $(\sqrt{2},1)$

Az 5–8. feladatokban adjuk meg ∇f-et az adott pontban!

5. $f(x,y,z) = x^2+y^2-2z^2+z\ln x$, $(1,1,1)$
6. $f(x,y,z) = 2x^3 - 3(x^2+y^2)z + \operatorname{arctg} xz$, $(1,1,1)$
7. $f(x,y,z) = (x^2+y^2+y^2)^{-1/2} + \ln(xyz)$, $(-1,2,-2)$
8. $f(x,y,z) = e^{x+y}\cos z + (y+1)\arcsin x$, $(0,0,\pi/6)$

Iránymenti derivált meghatározása

A 9–16. feladatokban adjuk meg a függvény iránymenti deriváltját a P_0 pontban, $\mathbf{A}$ irányban!

9. $f(x,y) = 2xy - 3y^2$, $P_0(5,5)$, $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
10. $f(x,y) = 2x^2 + y^2$, $P_0(-1,1)$, $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
11. $g(x,y) = x - (y^2/x) + \sqrt{3}\operatorname{arcsec}(2xy)$, $P_0(1,1)$, $\mathbf{A} = 12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
12. $h(x,y) = \operatorname{arctg}(y/x) + \sqrt{3}\arcsin(xy/2)$, $P_0(1,1)$ $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
13. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, $P_0(1,-1,2)$, $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
14. $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2$, $P_0(1,1,1)$, $\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
15. $g(x,y,z) = 3e^x \cos yz$, $P_0(0,0,0)$, $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
16. $h(x,y,z) = \cos xy + e^{yz} + \ln zx$, $P_0(1,0,1/2)$, $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

A leggyorsabb növekedés és csökkenés iránya

A 17–22. feladatokban adjuk meg azokat az irányokat, amelyekben a függvény az adott P_0 pontban a leggyorsabban növekszik, ill. csökken!

17. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $P_0(-1,1)$
18. $f(x,y) = x^2y + e^{xy}\sin y$, $P_0(1,0)$
19. $f(x,y,z) = (x/y) - yz$, $P_0(4,1,1)$
20. $g(x,y,z) = xe^y + z^2$, $P_0(1,\ln 2,1/2)$
21. $f(x,y,z) = \ln xy + \ln yz + \ln xz$, $P_0(1,1,1)$
22. $h(x,y,z) = \ln(x^2+y^2-1) + y + 6z$, $P_0(1,1,0)$

Görbék érintőegyenesei

A 23–26. feladatokban vázoljuk fel az $f(x,y)=c$ görbét ∇f-fel és az érintőegyenessel együtt az adott pontban, azután adjuk meg az érintőegyenes egyenletét!

23. $x^2+y^2=4$, $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ **24.** $x^2-y=1$, $(\sqrt{2},1)$

25. $xy=-4$, $(2,-2)$ **26.** $x^2-xy+y^2=7$, $(-1,2)$

További példák és feladatok

27. Nulla iránymenti derivált: Melyik irányban nulla az $f(x,y)=xy+y^2$ függvény deriváltja a $P(3,2)$ pontban?

28. Nulla iránymenti derivált: Melyik irányban nulla az $f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$ függvény deriváltja a $P(1,1)$ pontban?

29. Van olyan $\mathbf{u}$ irány, amerre az $f(x,y)=x^2-3xy+4y^2$ függvény deriváltja a $P(1,2)$ pontban 14? Válaszunkat indokoljuk!

30. Változó hőmérséklet egy kör mentén: Van-e olyan $\mathbf{u}$ irány, amerre a $T(x,y,z)=2xy-yz$ hőmérsékletfüggvény (fokok Celsius-fokban, távolság cm-ben) változási sebessége a $P(1,-1,1)$ pontban $-3°$C/cm? Válaszunkat indokoljuk!

31. A differenciálható $f(x,y)$ függvény deriváltja a $P_0(1,2)$ pontban az $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ irányban $2\sqrt{2}$ és a $-2\mathbf{j}$ irányban -3. Mennyi f iránymenti deriváltja a $-\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ irányban? Válaszunkat indokoljuk!

32. A differenciálható $f(x,y,z)$ függvény iránymenti deriváltja a P pontban a $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ irányban a legnagyobb, és itt az értéke $2\sqrt{3}$.

(a) Mennyi ∇f P-ben? Válaszunkat indokoljuk!

(b) Mennyi f deriváltja a P-ben az $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ irányban?

33. Iránymenti derivált és skalár komponens: Mi a kapcsolat egy differenciálható $f(x,y,z)$ függvénynek a P_0 pontban az $\mathbf{u}$ egységvektor irányában vett iránymenti deriváltja és a $(\nabla f)_{P_0}$ vektor $\mathbf{u}$ irányú skalár komponense között?

34. Iránymenti derivált és parciális deriváltak: Feltéve, hogy a szükséges deriváltak léteznek, mi a kapcsolat $D_{\mathbf{i}}f$, $D_{\mathbf{j}}f$, $D_{\mathbf{k}}f$ valamint f_x, f_y, f_z között?

35. Egyenesek az xy-síkban: Mutassuk meg, hogy $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ egy olyan egyenes egyenlete az xy-síkban, amelyik átmegy az (x_0,y_0) ponton és merőleges az $\mathbf{N}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}$ vektorra!

36. Gradiensre vonatkozó algebrai összefüggések: Legyen k egy konstans,

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

és

$$\nabla g=\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial g}{\partial z}\mathbf{k}$$

pedig az f, ill. g függvény gradiensei. Használjuk a

$$\frac{\partial}{\partial x}(kf)=k\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial x}(f\pm g)=\frac{\partial f}{\partial x}\pm\frac{\partial g}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(fg)=f\frac{\partial g}{\partial x}+g\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\frac{\partial f}{\partial x}-f\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}$$

egyenlőségeket és a többi hasonló összefüggést a következők igazolására:

(a) $\nabla(kf)=k\nabla f$ (bármely k konstansra)

(b) $\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$

(c) $\nabla(f-g)=\nabla f-\nabla g$

(d) $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$

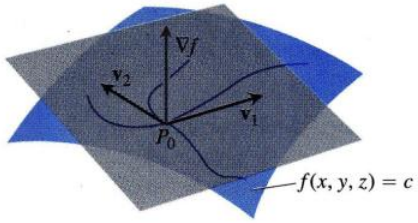
(e) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$

14.6. Érintősíkok és differenciálok

Ebben az alfejezetben definiáljuk sima felület érintősíkját. (A sima felület definícióját a 16. fejezetben adjuk meg.) Az érintősík egyenletét a felületet definiáló függvény parciális deriváltjainak segítségével írjuk fel. Az ötlet nagyon hasonló ahhoz, ahogy az egyváltozós függvény által definiált görbéhez írtuk fel az érintőegyenes egyenletét (2.7. alfejezet). Azután tanulmányozzuk többváltozós függvények lineáris approximációját és teljes differenciálját is.

Érintősík és normálegyenes

Ha $\mathbf{r}=g(t)\mathbf{i}+h(t)\mathbf{j}+k(t)\mathbf{k}$ egy sima görbe a differenciálható f függvény egy $f(x,y,z)=c$ szintfelületén, akkor $f(g(t),h(t),k(t))=c$. Mindkét oldalt t szerint differenciálva



14.30. ÁBRA: A ∇f gradiens merőleges minden P_0-on átmenő, az adott szintfelületen fekvő sima görbe sebességvektorára. A sebességvektorok így közös síkban fekszenek, amit érintősíknak hívunk.

$$\frac{d}{dt}f(g(t),h(t),k(t)) = \frac{d}{dt}(c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dk}{dt} = 0 \qquad \text{láncszabály}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{\left(\frac{dg}{dx}\mathbf{i} + \frac{dh}{dy}\mathbf{j} + \frac{dk}{dz}\mathbf{k}\right)}_{d\mathbf{r}/dt} = 0. \tag{14.8}$$

A görbe minden pontjában ∇f merőleges a görbe sebességvektorára. Tekintsük most a P_0 ponton átmenő sima görbéket (14.30. ábra). P_0-ban minden sebességvektor merőleges ∇f-re, így a görbék érintőegyenesei ∇f-re merőleges síkban vannak. Ezt a síkot hívjuk a felület érintősíkjának a P_0 pontban.

DEFINÍCIÓ: Érintősík, normálegyenes

Az f differenciálható függvény $f(x,y,z) = c$ szintfelületének **érintősíkja** a $P_0(x_0,y_0,z_0)$ pontban az a sík, amelyik átmegy P_0-on és merőleges a $\nabla f|_{P_0}$ vektorra.
A felület **normálegyenese** az az egyenes, amelyik átmegy P_0-on és párhuzamos a $\nabla f|_{P_0}$ vektorral.

Azaz az érintősík és a normálegyenes egyenletei 12.5. alfejezet alapján a következők:

$f(x,y,z) = c$ **érintősíkja** $P_0(x_0,y_0,z_0)$**-ban**

$$f_x(P_0)(x-x_0) + f_y(P_0)(y-y_0) + f_z(P_0)(z-z_0) = 0. \tag{14.9}$$

$f(x,y,z) = c$ **normálegyenese** $P_0(x_0,y_0,z_0)$**-ban**

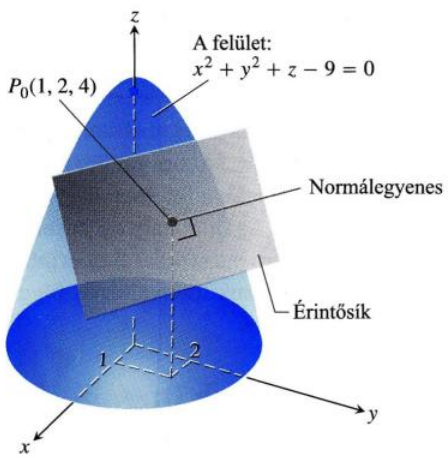
$$x = x_0 + f_x(P_0)t, \quad y = y_0 + f_y(P_0)t, \quad z = z_0 + f_z(P_0)t. \tag{14.10}$$

1. PÉLDA: Érintősík és normálegyenes meghatározása

Határozzuk meg az

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0 \qquad \text{forgásparaboloid}$$

felület érintősíkját és normálegyenesét a $P_0(1,2,4)$ pontban!



14.31. ÁBRA: Az $x^2 + y^2 + z - 9 = 0$ felület érintősíkja és normálegyenese a $P_0(1,2,4)$ pontban.

Megoldás: A felület a 14.31. ábrán látható. Az érintősík merőleges az f függvény gradiensére a P_0 pontban. A gradiens:

$$\nabla f|_{P_0} = (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})_{(1,2,4)} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

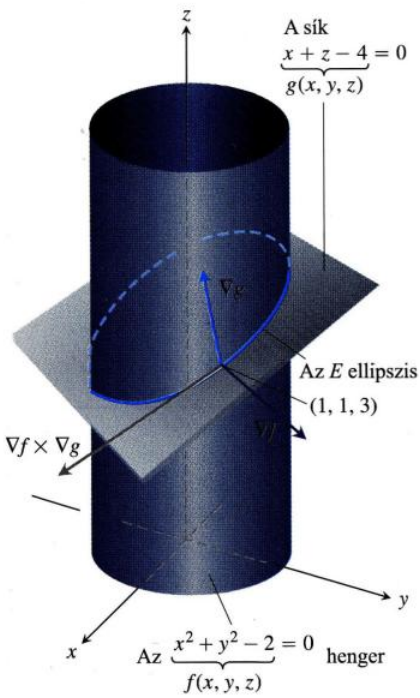
Az érintősík ezért

$$2(x-1) + 4(y-2) + (z-4) = 0 \quad \text{vagy} \quad 2x + 4y + z = 14.$$

A felület normálegyenese P_0-ban

$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 + 4t, \quad z = 4 + t. \qquad \square$$

Ahhoz, hogy felírjuk egy $z = f(x,y)$ sima felület érintősíkjának egyenletét a $P_0(x_0,y_0,z_0)$ pontban, ahol $z_0 = f(x_0,y_0)$, vegyük észre, hogy a $z = f(x,y)$ egyenlőség ekvivalens az $f(x,y) - z = 0$ egyenlőséggel. Ezért a $z = f(x,y)$ felület az



14.32. ÁBRA: Az $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ henger és a $g(x,y,z) = x + z - 4 = 0$ sík az E ellipszisben metszik egymást (3. példa).

$F(x,y,z) = f(x,y) - z$ függvény nulla értékhez tartozó szintfelülete. F parciális deriváltjai:

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y) - z) = f_x - 0 = f_x,$$
$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y) - z) = f_y - 0 = f_y,$$
$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(f(x,y) - z) = 0 - 1 = -1.$$

A képlet tehát:

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0,$$

így az érintősík egyenlete f-fel kifejezve:

$$f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

A $z = f(x,y)$ felület érintősíkja $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$-ban
A $z = f(x,y)$ felület érintősíkja differenciálható f esetén a $P_0(x_0,y_0,z_0) = (x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ pontban

$$f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \qquad (14.11)$$

2. PÉLDA: $z = f(x,y)$ **felület érintősíkja**

Adjuk meg a $z = x\cos y - ye^x$ felület érintősíkját a (0, 0, 0) pontban!

Megoldás: Meghatározzuk $f(x,y) = x\cos y - ye^x$ parciális deriváltjait, és használjuk a (14.11) képletet:

$$f_x(0,0) = (\cos y - ye^x)_{(0,0)} = 1 - 0 \cdot 1 = 1,$$
$$f_y(0,0) = (-x\sin y - e^x)_{(0,0)} = 0 - 1 = -1.$$

Ezért az érintősík:

$$1 \cdot (x - 0) - 1 \cdot (y - 0) - (z - 0) = 0 \qquad \text{(14.11) képlet}$$

azaz

$$x - y - z = 0. \qquad \square$$

3. PÉLDA: **Két felület metszésvonalának érintőegyenese**

A két felület, az

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$$

henger és a

$$g(x,y,z) = x + z - 4 = 0$$

sík, egy E ellipszisben metszi egymást (14.32. ábra). Adjuk meg az érintőegyenes paraméteres egyenletrendszerét a $P_0(1,1,3)$ pontban.

Megoldás: Az érintőegyenes merőleges ∇f-re és ∇g-re is az adott pontban, ezért párhuzamos $\mathbf{v} = \nabla f \times \nabla g$-vel. P_0 és $\mathbf{v}$ meghatározzák az egyenest.

$$\nabla f|_{(1,1,3)} = (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j})_{(1,1,3)} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$
$$\nabla g|_{(1,1,3)} = (\mathbf{i} + \mathbf{k})_{(1,1,3)} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Az érintőegyenes:

$$x = 1 + 2t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = 3 - 2t. \qquad \square$$

Változás becslése egy adott irányban

Ha csak egy kis ds távolságra mozdulunk ki P_0-ból, és meg akarjuk becsülni a függvény változását, az iránymenti derivált közönséges derivált szerepét játssza. Ha f egyváltozós függvény volna, a képletünk

$$df = f'(P_0)ds \quad \text{közönséges derivált} \times \text{növekmény}$$

lenne. Kettő vagy többváltozós függvény esetén a

$$df = (\nabla f|_{P_0} \cdot \mathbf{u})ds \quad \text{iránymenti derivált} \times \text{növekmény}$$

képletet használjuk, ahol $\mathbf{u}$ a mozgás iránya P_0-ból.

f változásának becslése u irányban

Annak becslésére, hogy hogyan változik a differenciálható f függvény, ha $\mathbf{u}$ irányban elmozdulunk a P_0 pontból egy kis ds távolságra, a

$$df = \underbrace{(\nabla f|_{P_0} \cdot \mathbf{u})}_{\substack{\text{Iránymenti} \\ \text{derivált}}} \cdot \underbrace{ds}_{\substack{\text{Távolság} \\ \text{növekmény}}}$$

képletet használjuk.

4. PÉLDA: $f(x,y,z)$ értékváltozásának becslése

Becsüljük meg, mennyit változik az

$$f(x,y,z) = y\sin x + 2yz$$

függvény, ha a $P(x,y,z)$ pont 0,1 egységnyit mozdul el $P_0(0,1,0)$-ból $P_1(2,2,-2)$ irányába!

Megoldás: Először deriváljuk f-et a P_0-ban, $\overrightarrow{P_0P_1} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ irányában. Ennek a vektornak az iránya

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{|\overrightarrow{P_0P_1}|} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{3} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Az f függvény gradiense P_0-ban

$$\nabla f|_{(0,1,0)} = ((y\cos x)\mathbf{i} + (\sin x + 2z)\mathbf{j} + 2y\mathbf{k})_{(0,1,0)} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}.$$

Következésképp

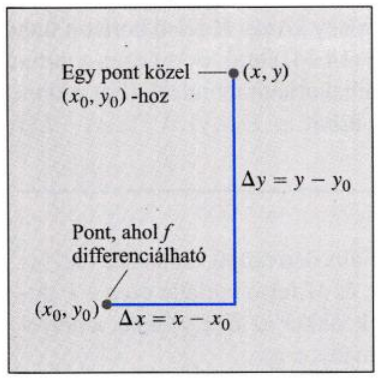
$$\nabla f|_{P_0} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Az f függvény df változása tehát, miközben $ds = 0,1$ egységnyit mozdulunk el P_0-ból $\mathbf{u}$ irányban, körülbelül

$$df = (\nabla f|_{P_0} \cdot \mathbf{u})(ds) = \left(-\frac{2}{3}\right)(0,1) \approx -0,067 \text{ egység.} \qquad \square$$

Kétváltozós függvény linearizálása

A kétváltozós függvények nagyon bonyolultak is lehetnek, ezért olykor szükség van arra, hogy egyszerűbbel helyettesítsük őket. Olyanokkal, amelyek elég pontos közelítést adnak az éppen tekintett alkalmazás szempontjából, de amelyek sokkal kevesebb munkát igényelnek. Ezt hasonló módon csináljuk, mint ahogy az egyváltozós függvények esetében jártunk el (3.8. alfejezet).



14.33. ÁBRA: Ha f differenciálható az (x_0,y_0) pontban, akkor ennek közvetlen közelében bármely (x,y) pontban az f értéke megközelítőleg

$$f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Tegyük fel, hogy a függvény, amelyet helyettesíteni akarunk $z=f(x,y)$. Olyan helyettesítést akarunk találni, ami jó egy adott (x_0,y_0) pont közelében, ahol f differenciálható, ahol ismerjük az f függvény értékét, és az f_x, f_y parciális deriváltakat is. Ha (x_0,y_0)-ból bármely más (x,y) pontba mozdulunk ki $\Delta x=x-x_0$ és $\Delta y=y-y_0$ változásokkal, akkor a differenciálhatóság 14.3. alfejezetében adott definíciója szerint f változása

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y,$$

ahol ε_1, $\varepsilon_2\to 0$ ha Δx, $\Delta y\to 0$. Ha a Δx, Δy növekmények kicsinyek, ezért az $\varepsilon_1\Delta x$, $\varepsilon_2\Delta y$ szorzatok még sokkal kisebbek, és

$$f(x,y)\approx \underbrace{f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{L(x,y)}.$$

Más szóval, amíg Δx és Δy kicsi, addig f kb. ugyanannyi, mint az L lineáris függvény. Ha f bonyolult, és a munkánk az itt előforduló hibát elviseli, f-et helyettesíthetjük L-lel (14.33. ábra).

DEFINÍCIÓ: Linearizáció, lineáris közelítés

Ha f differenciálható az (x_0,y_0) pontban, akkor az f függvénynek az (x_0,y_0) ponthoz tartozó **linearizációja**

$$L(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0). \qquad (14.12)$$

Az

$$f(x,y)\approx L(x,y)$$

approximáció az f függvény **lineáris approximációja** az (x_0,y_0) ponthoz közeli (x,y) pontokban.

A (14.11) egyenletből látjuk, hogy a $z=L(x,y)$ sík a $z=f(x,y)$ felület érintősíkja az (x_0,y_0) pontban. Azaz a kétváltozós függvények approximációja érintősíkkal ugyanaz, mint az egyváltozós függvények approximációja érintőegyenessel.

5. PÉLDA: Linearizáció meghatározása

Adjuk meg az

$$f(x,y)=x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+3$$

függvény linearizációját a (3, 2) pontban!

Megoldás: Először kiszámítjuk f-et, f_x-et és f_y-t az $(x_0,y_0)=(3,2)$ pontban:

$$f(3,2)=\left(x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+3\right)_{(3,2)}=8$$

$$f_x(3,2)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+3\right)_{(3,2)}=(2x-y)_{(3,2)}=4$$

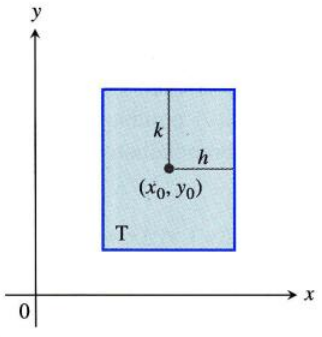
$$f_y(3,2)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+3\right)_{(3,2)}=(-x+y)_{(3,2)}=-1.$$

Ebből

$$\begin{aligned}L(x,y)&=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\\&=8+(4)(x-3)+(-1)(y-2)=4x-y-2.\end{aligned}$$

Az f függvény linearizációja a (3, 2) pontban $L(x,y)=4x-y-2$. □

Amikor a differenciálható $f(x,y)$ függvényt az (x_0,y_0) ponthoz tartozó $L(x,y)$ linearizációjával közelítjük, rögtön adódik a kérdés, milyen pontos ez a közelítés.



14.34. ÁBRA: A T: $|x-x_0| \le h$, $|y-y_0| \le k$ téglalap alakú tartomány az xy-síkban.

Ha az $|f_{xx}|$, $|f_{yy}|$ és az $|f_{xy}|$ függvényekre egy közös M felső korlátot tudunk találni egy (x_0,y_0) középpontú T téglalapon (14.34. ábra), akkor ezen a tartományon egy egyszerű képlettel tudunk egy E hibakorlátot mondani. (Ezt a képletet a 14.10. alfejezetben vezetjük majd le.) A **hibát** az $E(x,y) = f(x,y) - L(x,y)$ kifejezéssel definiáljuk.

Lineáris approximáció hibája

Ha f-nek folytonos első és második parciális deriváltjai vannak az (x_0,y_0) középpontú nyílt T téglalaptartományon, és M felső korlátja ezen a T tartományon $|f_{xx}|$-nek, $|f_{yy}|$-nek és $|f_{xy}|$-nek, akkor az $E(x,y)$ hiba, amelyet akkor kapunk, ha $f(x,y)$-t az adott tartományon az

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

linearizációjával közelítjük, kielégíti az

$$|E(x,y)| \le \frac{1}{2}M(|x-x_0| + |y-y_0|)^2$$

egyenlőtlenséget.

Ha adott M esetén kicsi $|E(x,y)|$ értéket akarunk, kicsi $|x-x_0|$-at és kicsi $|y-y_0|$-at kell választanunk.

6. PÉLDA: **Hibakorlát meghatározása az 5. példában**

Adjunk felső korlátot az $f(x,y) \approx L(x,y)$ lineáris approximáció hibájára az 5. példában a

$$T: \quad |x-3| \le 0{,}1, \quad |y-2| \le 0{,}1$$

tartományon! Fejezzük ki a felső korlátot $f(3,2)$ – azaz f-nek a téglalap középpontjában felvett értékének – százalékában!

Megoldás: Az

$$|E(x,y)| \le \frac{1}{2}M(|x-x_0| + |y-y_0|)^2$$

egyenlőtlenséget használjuk. A megfelelő M megtalálásához kétszer deriváljuk a függvényt, és arra jutunk, hogy minden második parciális deriváltja konstans:

$$|f_{xx}| = |2| = 2, \quad |f_{xy}| = |-1| = 1, \quad |f_{yy}| = |1| = 1.$$

Ezek közül a legnagyobb 2, így M értéke 2. Mivel $(x_0,y_0) = (3,2)$, a téglalapon

$$|E(x,y)| \le \frac{1}{2}(2)(|x-3| + |y-2|)^2 = (|x-3| + |y-2|)^2.$$

Mivel $|x-x_0| \le 0{,}1$ és $|y-y_0| \le 0{,}1$,

$$|E(x,y)| \le (0{,}1 + 0{,}1)^2 = 0{,}04.$$

Ez az $f(3,2) = 8$ értéknek százalékában:

$$\frac{0{,}04}{8} \times 100 = 0{,}5\%.$$ □

Differenciálok

Emlékezzünk, hogy a 3.8. alfejezetben az egyváltozós függvények esetében az f függvény megváltozását, miközben x a-ról $a+\Delta x$-re változik, a

$$\Delta f = f(a+\Delta x) - f(a)$$

különbséggel definiáltuk, míg a differenciál definíciója

$$df = f'(a)dx$$

volt. Tekintsünk most egy kétváltozós függvényt.

Tegyük fel, hogy $f(x,y)$ differenciálható (x_0,y_0)-ban. Ekkor itt a parciális deriváltjai is léteznek. Ha egy kicsit kimozdulunk az (x_0,y_0) pontból, akkor f megváltozása

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0).$$

Az $L(x,y)$ definíciójából egyszerű számítással kapjuk, hogy ha $x-x_0=\Delta x$-et és $y-y_0=\Delta y$-t helyettesítünk, akkor L megváltozása

$$\Delta L = L(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - L(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

A **differenciálok**, dx és dy független változók, így akármilyen értéket felvehetnek. (Leggyakrabban $dx=\Delta x = x-x_0$, és $dy=\Delta y = y-y_0$.) Az f függvény differenciálja, vagy *teljes* differenciálja tehát:

DEFINÍCIÓ: Teljes differenciál

Ha az (x_0,y_0) pontból az (x_0+dx, y_0+dy) pontba mozdulunk el, akkor az f függvény linearizációjának

$$df = f_x(x_0,y_0)dx + f_y(x_0,y_0)dy$$

változását **az f függvény teljes differenciáljának** nevezzük.

7. PÉLDA: **Térfogat változásának becslése**

Tegyük fel, hogy egy hengeres konzervdoboz sugara 2,5 cm, magassága pedig 7,5 cm kellene, hogy legyen, de méretei nem pontosak. A sugár, ill. a magasság eltérése: $dr=+0{,}08$, $dh=-0{,}25$. Becsüljük meg a konzervdoboz térfogatának változását!

Megoldás: A $V=\pi r^2 h$ térfogat teljes megváltozásának becsléséhez használjuk a

$$\Delta V \approx dV = V_r(r_0,h_0)dr + V_h(r_0,h_0)dh$$

közelítést. Mivel $V_r = 2\pi rh$ és $V_h = \pi r^2$,

$$\begin{aligned} dV &= 2\pi r_0 h_0 dr + \pi r_0^2 dh = 2\pi(2{,}5)(7{,}5)(0{,}08) + \pi(2{,}5)^2(-0{,}25) \\ &= 3{,}0\pi - 1{,}5625\pi = 1{,}4375\pi \approx 4{,}52\text{cm}^3. \end{aligned}$$ □

A teljes változás helyett megbecsülhetjük $f(x,y)$ relatív változását, ill. azt, hogy hány százalékos f változása:

$$\frac{df}{f(x_0,y_0)}, \quad \text{ill.} \quad \frac{df}{f(x_0,y_0)} \times 100.$$

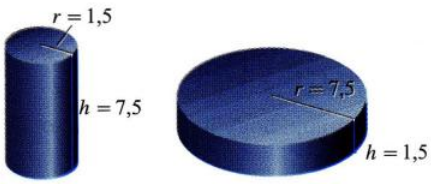
A 7. példában a relatív változás becslése:

$$\frac{dV}{V(r_0,h_0)} = \frac{1{,}4375\pi}{\pi r_0^2 h_0} = \frac{1{,}4375\pi}{\pi(2{,}5)^2(7{,}5)} \approx 0{,}0307,$$

ami kb. 3,1%-os térfogatváltozást jelent.

8. PÉLDA: **Változás érzékenysége**

Tegyük fel, cégünk egyenes körhenger alakú melasztároló tartályokat gyárt, amiknek 1,5 m a sugara, és 7,5 m a magassága. Mennyire érzékeny a tartály térfogata a sugár, ill. a magasság kis változásaira?



14.35. ÁBRA: Az (a) esetben a henger térfogata sokkal érzékenyebb r kis változásaira, mint ugyanakkora változására h-nak. A (b) esetben a henger térfogata sokkal érzékenyebb h kis változásaira, mint ugyanakkora változására r-nek.

Megoldás: Mivel $V = \pi r^2 h$, a térfogat változásának közelítése

$$\begin{aligned} dV &= V_r(1{,}5\,,\,7{,}5)dr + V_h(1{,}5\,,\,7{,}5)dh \\ &= (2\pi rh)_{(1{,}5\,,\,7{,}5)}dr + (\pi r^2)_{(1{,}5\,,\,7{,}5)}dh \\ &= 22{,}5\pi dr + 2{,}25\pi dh. \end{aligned}$$

Azaz egy egységnyi változás a sugárban, kb. $22{,}5\pi$ változást eredményez a térfogatban, míg egy egységnyi változás a magasságban, a térfogatban kb. $2{,}25\pi$ változást eredményez. A térfogat változása tízszer olyan érzékeny a sugár kis változásaira, mint a magasságéra. A minőségért felelős mérnöknek, ha azt akarja, hogy a tartály térfogata megfelelő legyen, a sugár megfelelő nagyságára kell különösképpen ügyelnie.

Ha fordítva lenne, és a sugár lenne 7,5 m, a magasság pedig 1,5 m, akkor V teljes differenciálja

$$dV = (2\pi rh)_{(7{,}5\,,\,1{,}5)}dr + (\pi r^2)_{(7{,}5\,,\,1{,}5)}dh = 22{,}5\pi dr + 56{,}25\pi dh,$$

így a térfogat a magasság változásaira lesz érzékenyebb.

Általában a függvény annak a változónak a változásaira lesz érzékenyebb, amelyhez tartozó parciális derivált az adott pontban a legnagyobb abszolút értékű. □

9. PÉLDA: **Hibaszázalék becslése**

Egy egyenes körhenger $V = \pi r^2 h$ térfogatát a sugarának és magasságának megmérésével állapítjuk meg. Tegyük fel, hogy a mérési hiba a sugár esetén nem több, mint 2%, a magasság esetén nem több, mint 0,5 %. Becsüljük meg, ez így hány százalékos hibát eredményezhet a térfogat számításánál!

Megoldás: Tudjuk, hogy

$$\left|\frac{dr}{r} \times 100\right| \le 2 \quad \text{és} \quad \left|\frac{dh}{h} \times 100\right| \le 0{,}5.$$

Mivel

$$\frac{dV}{V} = \frac{2\pi rh\,dr + \pi r^2\,dh}{\pi r^2 h} = \frac{2dr}{r} + \frac{dh}{h},$$

ezért

$$\begin{aligned} \left|\frac{dV}{V}\right| &= \left|2\frac{dr}{r} + \frac{dh}{h}\right| \\ &\le \left|2\frac{dr}{r}\right| + \left|\frac{dh}{h}\right| \\ &\le 2(0{,}02) + 0{,}005 = 0{,}045. \end{aligned}$$

Tehát a térfogatszámításnál legfeljebb 4,5%-os hibát vétünk. □

Kettőnél több változós függvények

Hasonló eredmények igazak a kettőnél több változós függvényekre is.

1. Az $f(x,y,z)$ függvény **linearizációja** a $P_0(x_0,y_0,z_0)$ pontban

$$L(x,y,z) = f(P_0) + f_x(P_0)(x-x_0) + f_y(P_0)(y-y_0) + f_z(P_0)(z-z_0).$$

2. Tegyük fel, hogy T egy zárt, P_0 középpontú téglatest, ami teljes egészében egy olyan nyílt tartományban van, amelyben a második parciális deriváltak folytonosak. Tegyük fel továbbá, hogy T-n $|f_{xx}|$, $|f_{xy}|$, $|f_{xz}|$, $|f_{yy}|$, $|f_{yz}|$, $|f_{zz}|$ valamennyien kisebbek, mint M. Ekkor az $E(x,y,z) = f(x,y,z) - L(x,y,z)$ **hiba**, ha f-et L-lel közelítjük T-n, az

$$|E| \le \frac{1}{2}M(|x-x_0| + |y-y_0| + |z-z_0|)^2$$

egyenlőtlenséggel felülről becsülhető.

3. Ha f második parciális deriváltjai folytonosak, x, y és z az x_0, y_0 és z_0 értékektől a kicsi dx, dy és dz mennyiségekkel különbözik, akkor a

$$df = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy + f_z(P_0)dz$$

teljes differenciál jó közelítését adja az f függvény változásának.

10. PÉLDA: **Lineáris közelítés meghatározása a 3 dimenziós térben**

Adjuk meg az

$$f(x,y,z) = x^2 - xy + 3\sin z$$

függvény $L(x,y,z)$ linearizációját az $(x_0,y_0,z_0) = (2,1,0)$ pontban! Adjunk felső korlátot a hibára, ha f-et L-lel közelítjük a

$$T: \quad |x-2| \le 0{,}001\,, \quad |y-1| \le 0{,}02\,, \quad |z| \le 0{,}01$$

tartományon!

Megoldás: Egyszerű számolással kapjuk:

$$f(2,1,0) = 2, \quad f_x(2,1,0) = 3, \quad f_y(2,1,0) = -2, \quad f_z(2,1,0) = 3.$$

Ezért

$$L(x,y,z) = 2 + 3(x-2) + (-2)(y-1) + 3(z-0) = 3x - 2y + 3z - 2.$$

Mivel

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2, & f_{yy} &= 0, & f_{zz} &= -3\sin z, \\ f_{xy} &= -1, & f_{xz} &= 0, & f_{yz} &= 0, \end{aligned}$$

ezért felső korlát lehet $M = \max|-3\sin z| = 3$. Tehát a hiba, amelyet akkor követünk el, ha f-et L-lel helyettesítjük, kielégíti az

$$|E| \le \frac{1}{2}(3)(0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}01)^2 = 0{,}0024$$

egyenlőtlenséget, azaz nem nagyobb, mint 0,0024. □

14.6. Feladatok

Felületek érintősíkjai és normálegyenesei

Az 1–8. feladatokban adjuk meg az egyenleteit az **(a)** érintősíknak és a **(b)** normálegyenesnek a P_0 pontban!

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $P_0(1,1,1)$

2. $x^2 + y^2 - z^2 = 18$, $P_0(3,5,-4)$

3. $2z - x^2 = 0$, $P_0(2,0,2)$

4. $x^2 + 2xy - y^2 + z^2 = 7$, $P_0(1,-1,3)$

5. $\cos \pi x - x^2 y + e^{xz} + yz = 4$, $P_0(0,1,2)$

6. $x^2 - xy - y^2 - z = 0$, $P_0(1,1,-1)$

7. $x + y + z = 1$, $P_0(0,1,0)$

8. $x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y - z = -4$, $P_0(1,-3,18)$

A 9–12. feladatokban adjuk meg az érintősík egyenletét az adott függvény adott pontjában!

9. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $(1,0,0)$

10. $z = e^{-(x^2+y^2)}$, $(0,0,1)$

11. $z = \sqrt{y - x}$, $(1,2,1)$

12. $z = 4x^2 + y^2$, $(1,1,5)$

Görbék érintőegyenesei

Adjuk meg a két felület metszetgörbéje adott pontjában az érintőegyenes paraméteres egyenletrendszerét! (13–18. feladatok)

13. Felületek: $x + y^2 + 2z = 4$, $x = 1$
Pont: $(1,1,1)$

14. Felületek: $xyz = 1$, $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
Pont: $(1,1,1)$

15. Felületek: $x^2 + 2y + 2z = 4$, $y = 1$
Pont: $(1,1,1/2)$

16. Felületek: $x + y^2 + z = 2$, $y = 1$
Pont: $(1/2,1,1/2)$

17. Felületek: $x^3 + 3x^2y^2 + y^3 + 4xy - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 11$
Pont: $(1,1,3)$

18. Felületek: $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - z = 0$
Pont: $(\sqrt{2},\sqrt{2},4)$

Változás becslése

19. Körülbelül mennyit fog változni az

$$f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

függvény, ha a $P(x,y,z)$ pont a $P_0(3,4,12)$ pontból $ds = 0{,}1$ távolságra mozdul el $3\mathbf{i}+6\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ irányban?

20. Körülbelül mennyit fog változni az

$$f(x,y,z) = e^x \cos yz$$

függvény, ha a $P(x,y,z)$ pont az origóból $ds = 0{,}1$ távolságra mozdul el $2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ irányban?

21. Körülbelül mennyit fog változni az

$$g(x,y,z) = x + x\cos z - y\sin z + y$$

függvény, ha a $P(x,y,z)$ pont a $P_0(2,-1,0)$ pontból $ds = 0{,}2$ távolságra mozdul el a $P_1(0,1,2)$ pont felé?

22. Körülbelül mennyit fog változni az

$$h(x,y,z) = \cos(\pi xy) + xz^2$$

függvény, ha a $P(x,y,z)$ pont a $P_0(-1,-1,-1)$ pontból $ds = 0{,}1$ távolságra mozdul el az origó felé?

23. Hőmérséklet változása egy kör mentén: Tegyük fel, hogy a hőmérséklet az xy-sík (x,y) pontjában $T(x,y) = x\sin 2y$, ahol a hőmérsékletet Celsius-fokban mérjük, a távolságot pedig méterben. Egy részecske mozog az óramutató járásával megegyező irányban az origó középpontú, egy méter sugarú körön, állandó 2 m/s pályamenti sebességgel.

(a) Mekkora a részecske által észlelt hőmérsékletváltozás nagysága Celsius-fok/méterben kifejezve, amikor a részecske a $P(1/2, \sqrt{3}/2)$ pontban van?

(b) Mekkora a részecske által észlelt hőmérsékletváltozás nagysága Celsius-fok/másodpercben kifejezve, amikor a részecske a P pontban van?

24. Változó hőmérséklet egy térgörbe mentén: A hőmérsékletet Celsius-fokban kifejezve a tér egy részén a $T(x,y,z) = 2x^2 - xyz$ függvény írja le. Egy részecske mozog ebben a tartományban, és a helyzetét a t időpillanatban az $x = 2t^2$, $y = 3t$, $z = -t^2$ koordinátafüggvények adják meg, ahol az idő másodpercben, a távolság pedig méterben van mérve.

(a) Mekkora a részecske által észlelt hőmérsékletváltozás nagysága Celsius-fok/méterben kifejezve, amikor a részecske a $P(8,6,-4)$ pontban van?

(b) Mekkora a részecske által észlelt hőmérsékletváltozás nagysága Celsius-fok/másodpercben kifejezve, amikor a részecske a P pontban van?

Linearizáció meghatározása

A 25–30. feladatokban határozzuk meg az f függvény $L(x,y)$ linearizációját az adott pontokban!

25. $f(x,y) = x^2+y^2+1$ **(a)** $(0,0)$, **(b)** $(1,1)$

26. $f(x,y) = (x+y+2)^2$ **(a)** $(0,0)$, **(b)** $(1,2)$

27. $f(x,y) = 3x-4y+5$ **(a)** $(0,0)$, **(b)** $(1,1)$

28. $f(x,y) = x^3y^4$ **(a)** $(1,1)$, **(b)** $(0,0)$

29. $f(x,y) = e^x\cos y$ **(a)** $(0,0)$, **(b)** $(0,\pi/2)$

30. $f(x,y) = e^{2y-x}$ **(a)** $(0,0)$, **(b)** $(1,2)$

Lineáris közelítés hibájának felső korlátja

A 31–36. feladatokban határozzuk meg az $f(x,y)$ függvény $L(x,y)$ linearizációját az adott P_0 pontban. Adjunk felső becslést az $f(x,y) \approx L(x,y)$ közelítés $|E|$ hibájára az adott T téglalapon!

31. $f(x,y) = x^2-3xy+5$, $P_0(2,1)$,
$T: |x-2| \le 0{,}1, |y-1| \le 0{,}1$

32. $f(x,y) = (1/2)x^2+xy+(1/4)y^2+3x-3y+4$, $P_0(2,2)$,
$T: |x-2| \le 0{,}1, |y-2| \le 0{,}1$

33. $f(x,y) = 1+y+x\cos y$, $P_0(0,0)$,
$T: |x| \le 0{,}2, |y| \le 0{,}2$
(Használjuk: $|\cos y| \le 1$ és $|\sin y| \le 1$)

34. $f(x,y) = xy^2+y\cos(x-1)$, $P_0(1,2)$,
$T: |x-1| \le 0{,}1, |y-2| \le 0{,}1$

35. $f(x,y) = e^x\cos y$, $P_0(0,0)$,
$T: |x| \le 0{,}1$, $|y| \le 0{,}1$
(Használjuk: $e^x \le 1{,}11$ és $|\cos y| \le 1$)

36. $f(x,y) = \ln x + \ln y$, $P_0(1,1)$,
$T: |x-1| \le 0{,}2$, $|y-1| \le 0{,}2$

Háromváltozós függvények

Adjuk meg a függvények $L(x,y,z)$ linearizációját az adott pontban! (37–42. feladatok)

37. $f(x,y,z) = xy+yz+xz$
(a) $(1,1,1)$ **(b)** $(1,0,0)$ **(c)** $(0,0,0)$

38. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$
(a) $(1,1,1)$ **(b)** $(0,1,0)$ **(c)** $(1,0,0)$

39. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
(a) $(1,0,0)$ **(b)** $(1,1,0)$ **(c)** $(1,2,2)$

40. $f(x,y,z) = (\sin xy)/z$
(a) $(\pi/2,1,1)$ **(b)** $(2,0,1)$

41. $f(x,y,z) = e^x + \cos(y+z)$
(a) $(0,0,0)$ **(b)** $(0,\pi/2,0)$ **(c)** $(0,\pi/4,\pi/4)$

42. $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}(xyz)$
(a) $(1,0,0)$ **(b)** $(1,1,0)$ **(c)** $(1,1,1)$

A 43–46. feladatokban adjuk meg az $f(x,y,z)$ függvény $L(x,y,z)$ linearizációját a P_0 pontban! Adjunk felső becslést az $|E|$ hiba nagyságára a T téglalapon, ha az $f(x,y,z) \approx L(x,y,z)$ közelítést használjuk!

43. $f(x,y,z) = xz-3yz+2$, $P_0(1,1,2)$,
$T: |x-1| \le 0{,}01$, $|y-1| \le 0{,}01, |z-2| \le 0{,}02$

44. $f(x,y,z) = x^2+xy+yz+(1/4)z^2$, $P_0(1,1,2)$,
$T: |x-1| \le 0{,}01$, $|y-1| \le 0{,}01, |z-2| \le 0{,}08$

45. $f(x,y,z) = xy+2yz-3xz$, $P_0(1,1,0)$,
$T: |x-1| \le 0{,}01$, $|y-1| \le 0{,}01, |z| \le 0{,}01$

46. $f(x,y,z) = \sqrt{2}\cos x\sin(y+z)$, $P_0(0,0,\pi/4)$,
$T: |x| \le 0{,}01$, $|y| \le 0{,}01$, $|z-\pi/4| \le 0{,}01$

Becsült hiba, a változás érzékenysége

47. Maximális hiba becslése: Tegyük fel, hogy a T értéket a $T = x(e^y + e^{-y})$ képletből kell számítanunk, ahol x-et is, y-t is 2-nek mértük, és $|dx| \le 0{,}1$, $|dy| \le 0{,}02$. Becsüljük meg a maximális hibát, amit T számításánál vétünk!

48. Henger térfogatának becslése: Mennyire pontosan tudjuk számítani a $V = \pi r^2 h$ térfogatot, ha r és h mérési hibája 1% lehet?

49. Maximális hibaszázalék: Ha $r = 5{,}0$ cm és $h = 12{,}0$ cm a legközelebbi milliméterre kerekítve, mekkora a maximális hibaszázalék a $V = \pi r^2 h$ térfogat számításakor?

50. Elektromos ellenállás változása: A párhuzamosan kötött R_1 és R_2 ellenállások eredő ellenállását az

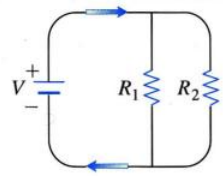
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

képlet adja.

(a) Mutassuk meg, hogy

$$dR = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 dR_1 + \left(\frac{R}{R_2}\right)^2 dR_2.$$

(b) Az Ön tervében egy olyan két ellenállást tartalmazó áramkör van, mint ami a mellékelt ábrán látható.



$R_1 = 100$ ohm, $R_2 = 400$ ohm. De azok az ellenállások, amelyeket az Ön cége vásárolt, nem biztos, hogy pontosan megfelelnek ezeknek az értékeknek. Melyik ellenállás eltérésére lesz R érzékenyebb, az R_1 ellenálláséra vagy az R_2-ére?

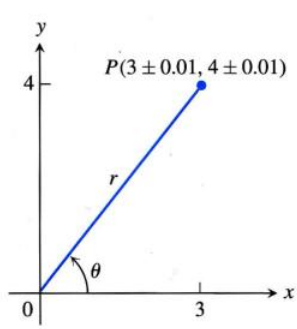
(c) Egy hasonló összeállítású, de másik áramkörben hány százalékos változást eredményez R-ben, ha R_1 20 helyett 20,1 ohm, R_2 pedig 25 helyett 24,5 ohm?

51. Ha egy hosszú, vékony téglalap területét akarjuk az oldalainak mért értékéből kiszámítani, melyik oldalt kell gondosabban mérni: a hosszút, vagy a rövidet?

52. (a) Az $(1,0)$ pont körül az $f(x,y) = x^2(y+1)$ függvény az x vagy az y hibájára érzékenyebb? Válaszunkat indokoljuk!

(b) A dx-nek és dy-nak milyen aránya eredményez nulla df-et?

53. Hibaátvitel koordináta-transzformációnál:



(a) Ha $x = 3 \pm 0{,}01$ és $y = 4 \pm 0{,}01$, ahogy az ábra mutatja, milyen pontossággal tudjuk a $P(x,y)$ pont r és θ polárkoordinátáit meghatározni az $r^2 = x^2 + y^2$ és $\theta = \text{arctg}(y/x)$ képletekkel? Fejezzük ki a százalékos eltérést is az $(x_0, y_0) = (3,4)$ pontban.

(b) Az $(x_0, y_0) = (3,4)$ pontban r és θ az x vagy az y eltérésére érzékenyebb? Válaszunkat indokoljuk.

54. Italosdoboz tervezése: A szokásos 3,33 dl-es hengeres fém italosdoboz méretei: $r = 2{,}5$ cm, $h = 12{,}5$ cm.

(a) Ilyen méretek mellett, mennyire érzékeny a térfogat a sugár kis változására a magasság kis változásához képest?

(b) Tudnánk egy olyan italosdobozt tervezni, amelyik 3,33 dl italt tartalmaz, de úgy *tűnik*, mintha több lenne benne? (több helyes válasz is van.)

55. 2×2-es determináns értéke: Ha $|a|$ sokkal nagyobb, mint $|b|$, $|c|$ és $|d|$, akkor az a, b, c, d értékek melyikére lesz az

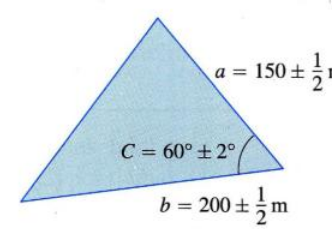
$$f(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

determináns értéke a legérzékenyebb?

56. Maximális hiba becslése: Tegyük fel, hogy $u = xe^y + y\sin z$ és hogy az x, y, z értékek $\pm 0{,}2$, $\pm 0{,}6$, $\pm \pi/180$ pontossággal mérhetők. Becsüljük meg a maximális hibát, amit u számításakor vétünk, ha a mért értékek: $x = 2$, $y = \ln 3$, $z = \pi/2$.

57. Wilson-féle kritikusmennyiség képlet: A Wilson-féle kritikusmennyiség képlet a közgazdaságtanban azt fejezi ki, hogy mennyi valamiből (rádió, cipő, ruhakefe stb.) az a leggazdaságosabb mennyiség, amit egy üzlet egyszerre rendeljen. A képlet: $Q = \sqrt{2KM/h}$, ahol K a rendelés költsége, M a hetenként eladott mennyiség, és h az egy egységnyi áru heti tárolási költsége (hely, fűtés-hűtés, biztonság). A K, M, h mennyiségek melyikének változására a legérzékenyebb Q, ha $(K_0, M_0, h_0) = (2, 20, 0{,}05)$? Válaszunkat indokoljuk!

58. Háromszög alakú földdarab felmérése: A háromszög egyik területképlete $(1/2)ab\sin C$, ahol a és b a háromszögnek két oldala, C pedig a közbezárt szög mértéke. Egy háromszög alakú földdarab felmérésekor $a = 150m$, $b = 200m$ és $C = 60°$ adódott. Mekkora lehet a terület számított értékének hibája, ha a és b esetén a maximális eltérés 1/2 méter, C esetén pedig 2°? (Lásd a mellékelt ábrát!) A számításokat radiánban kell végezni.



További példák és feladatok

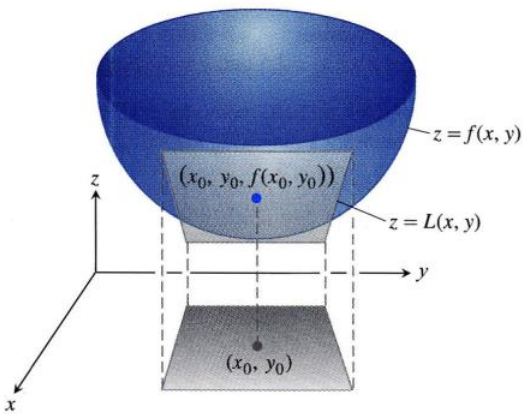
59. f(x,y) linearizációja az érintősíkkal való közelítés: Mutassuk meg, hogy egy differenciálható f függvénnyel definiált $z = f(x,y)$ felület $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontjához tartozó érintősík egyenlete

$$f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0,y_0)) = 0$$

vagy

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

Azaz a P_0-beli érintősík f P_0-beli linearizációjának grafikonja (lásd a mellékelt ábrát).



60. Változás egy kör evolvense mentén: Adjuk meg $f(x,y) = x^2 + y^2$ iránymenti deriváltját az

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j}, \quad t > 0$$

görbe érintő egységvektora irányában!

61. Változás egy csavarvonal mentén: Adjuk meg $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ iránymenti deriváltját az

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

csavarvonal érintő egységvektora irányában, azokban a pontokban, ahol $t = -\pi/4$, ill. $t = \pi/4$. Az f függvény a görbe $P(x,y,z)$ pontjainak a távolságnégyzetét adja az origótól. Az itt számított derivált azt adja meg, milyen gyorsan változik t-től függően a P pont origótól számított távolságnégyzete a $t = -\pi/4$, 0, ill. $\pi/4$ paraméterértékű pontokban.

62. Normálisok: Egy sima görbét az $f(x,y,z) = c$ normálisának nevezünk, ha abban a pontban, ahol a görbe metszi a felületet, a görbe sebességvektora nemnulla konstansszorosa ∇f-nek.

Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} - \frac{1}{4}(t+3)\mathbf{k}$$

görbe normálisa az $x^2 + y^2 - z = 3$ felületnek, ha $t = 1$.

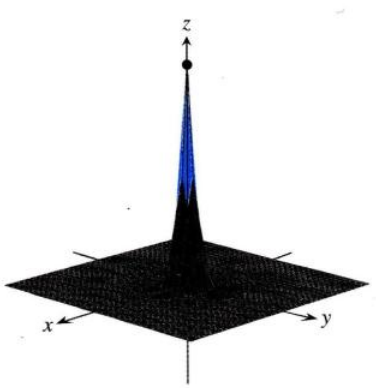
63. Érintő görbék: Egy sima görbe érintője a felületnek, ha a közös pontjukban a görbe sebességvektora merőleges a ponthoz tartozó ∇f-re. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} + (2t-1)\mathbf{k}$$

görbe érintője az $x^2 + y^2 - z = 1$ felületnek, amikor $t = 1$.

14.7. Szélsőértékek és nyeregpontok

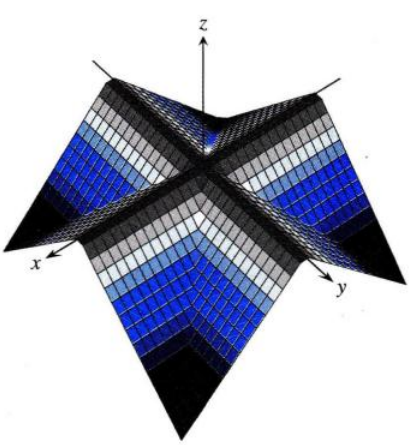
Korlátos, zárt tartományon folytonos, kétváltozós függvényeknek van szélsőértéke ezen a tartományon (14.36. és 14.37. ábra). Ebben az alfejezetben meglátjuk, hogyan szűkíthetjük a szóbajövő pontok számát a parciális deriváltak vizsgálatával. Egy kétváltozós függvény szélsőértéket vagy a tartomány határán vesz fel, vagy olyan pontban, ahol mindkét parciális derivált nulla, vagy olyan pontban, ahol egyik, vagy másik parciális derivált nem létezik. Mindamellett egy (a,b) belső pontban nullává váló parciális deriváltak még nem garantálják, hogy



14.36. ÁBRA: A

$$z = (\cos x)(\cos y)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$$

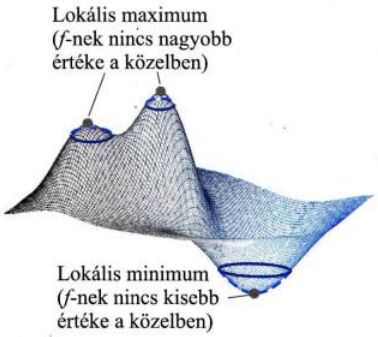
függvénynek az $|x| \le 3\pi/2$, $|y| \le$ $\le 3\pi/2$ négyzeten a maximális értéke 1, és a minimális kb. $-0{,}067$.



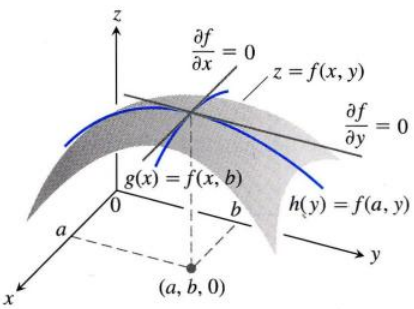
14.37. ÁBRA: A „háztető felület”

$$z = \frac{1}{2}(\big||x| - |y|\big| - |x| - |y|)$$

a (10, 15, 20) pontból tekintve. A felületet definiáló függvénynek az $|x| \le a$, $|y| \le a$ négyzeten maximuma a 0, és minimuma $-a$.



14.38. ÁBRA: A lokális maximum a hegy csúcsa, a lokális minimum pedig a völgy mélye.



14.39. ÁBRA: Ha f-nek az $x=a$, $y=b$ pontban lokális maximuma van, akkor mindkét parciális derivált, $f_x(a,b)$ és $f_y(a,b)$ is nulla.

abban a pontban szélsőérték van. A felület, ami a függvény grafikonja, lehet nyereg alakú (a,b) felett, és ott metszi az érintősíkját.

Lokális szélsőérték vizsgálata deriváltakkal

A differenciálható egyváltozós függvényeknél olyan pontokat kerestünk, ahol a grafikonnak vízszintes érintője volt. Ezekben a pontokban vagy maximum, vagy minimum, vagy inflexiós pont volt. A kétváltozós $f(x,y)$ függvények esetében olyan pontokat keresünk, amelyekben a grafikon, azaz a $z=f(x,y)$ felület érintősíkja vízszintes. Ezekben a pontokban maximum, minimum, vagy nyeregpont van.

DEFINÍCIÓ: Helyi maximum, minimum

Legyen $f(x,y)$ egy olyan tartományban definiálva, amely az (a,b) pontot tartalmazza. Akkor

1. $f(a,b)$ egy **helyi** (**lokális** vagy **relatív**) **maximum**, ha van olyan (a,b) középpontú nyílt körlap, hogy $f(a,b) \geq f(x,y)$ minden olyan pontra teljesül, ami a körlapon és az f értelmezési tartományában van.
2. $f(a,b)$ egy **helyi** (**lokális** vagy **relatív**) **minimum**, ha van olyan (a,b) középpontú nyílt körlap, hogy $f(a,b) \leq f(x,y)$ minden olyan pontra teljesül, ami a körlapon és az f értelmezési tartományában van.

A lokális maximum a hegycsúcsoknak felel meg a $z=f(x,y)$ felületen, a lokális minimum pedig a völgyek mélypontjainak (14.38. ábra). Az ilyen pontokban az érintősík, ha létezik, vízszintes.

Ahogy az egyváltozós függvények esetében is eljártunk, a lokális szélsőértékhelyeket az elsőrendű deriválttal keressük.

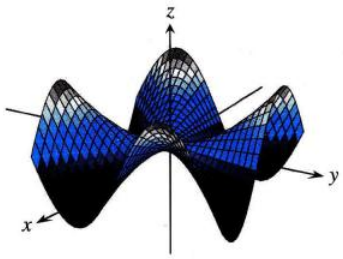
10. TÉTEL: Első parciális deriváltak viselkedése a szélsőértékhelyen

Ha $f(x,y)$-nak lokális maximuma vagy minimuma van az értelmezési tartományának (a,b) belső pontjában, és itt az első parciális deriváltak léteznek, akkor $f_x(a,b)=0$ és $f_y(a,b)=0$.

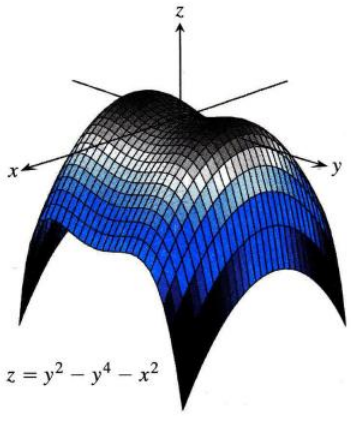
Bizonyítás: Ha f-nek lokális szélsőértéke van (a,b)-ben, akkor $g(x)=f(x,b)$-nek is szélsőértéke van $x=a$-ban (14.39. ábra). Ezért $g'(a)=0$ (4. fejezet, 2. Tétel). Most $g'(a)=f_x(a,b)$, így $f_x(a,b)=0$. Hasonló okoskodás a $h(y)=f(a,y)$ függvénnyel az $f_y(a,b)=0$ egyenlőséget eredményezi. □

Ha $f_x(a,b)=0$-t és $f_y(a,b)=0$-t helyettesítünk az

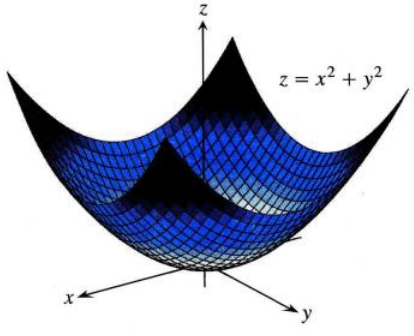
$$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)-(z-f(a,b))=0$$



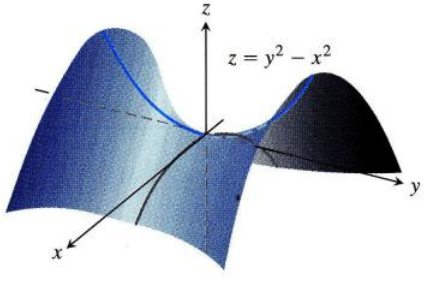
$$z = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$



14.40. ÁBRA: Nyeregpont az origónál.



14.41. ÁBRA: Az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény grafikonja egy paraboloid. A függvénynek az origóban lokális minimuma van, és ez 0 (1. példa)



14.42. ÁBRA: Az $f(x,y) = y^2 - x^2$ függvénynek az origó nyeregpontja. Nincs lokális szélsőértéke (2. példa)

egyenletbe azért, hogy megkapjuk a $z = f(x,y)$ felület érintősíkját (a,b)-nél, akkor ez az egyenlet

$$0 \cdot (x-a) + 0 \cdot (y-b) - z + f(a,b) = 0,$$

illetve

$$z = f(a,b)$$

alakú lesz. Tehát a felületnek abban a pontban, ahol szélsőértéke van, tényleg vízszintes érintősíkja lesz.

DEFINÍCIÓ: Kritikus pont

Az f függvény értelmezési tartományának azokat a belső pontjait, ahol f_x és f_y is nulla, vagy ahol legalább az egyik nem létezik, az f függvény **kritikus pontjainak** nevezzük.

A 10. Tétel azt mondja ki, hogy szélsőérték vagy csak határon, vagy csak kritikus pontban lehet. Az egyváltozós esethez hasonlóan, itt sincs feltétlenül minden kritikus pontban szélsőérték. Az egyváltozósaknál lehetett inflexiós pont, a kétváltozósaknál pedig nyeregpont.

DEFINÍCIÓ: Nyeregpont

Egy differenciálható $f(x,y)$ függvénynek **nyeregpontja** van az (a,b) kritikus pontban, ha minden (a,b) középpontú körlapon van olyan (x,y) pontja az értelmezési tartománynak, hogy $f(x,y) < f(a,b)$, és van olyan is, hogy $f(x,y) > f(a,b)$ (14.40. ábra).

1. PÉLDA: Lokális szélsőérték megtalálása

Keressük meg az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény szélsőértékhelyeit!

Megoldás: Az értelmezési tartomány az egész sík, így nincsenek határpontok. Az $f_x = 2x$ és $f_y = 2y$ parciális deriváltak mindenütt léteznek és folytonosak. Így szélsőérték csak ott lehet, ahol

$$f_x = 2x = 0 \quad \text{és} \quad f_y = 2y = 0.$$

Az egyetlen megoldás az origó, ahol a függvény nulla. Mivel a függvény sehol sem negatív, az origóban tényleg lokális minimuma van (14.41. ábra). (Sőt, ez abszolút minimum is.) □

2. PÉLDA: Nyeregpont megtalálása

Keressük meg az $f(x,y) = y^2 - x^2$ függvény szélsőértékhelyeit, ha vannak ilyenek!

Megoldás: Az értelmezési tartomány az egész sík, így nincsenek határpontok. A parciális deriváltak $f_x = -2x$, $f_y = 2y$ mindenütt léteznek és folytonosak. Így szélsőérték csak az origóban lehet. Viszont az origó kivételével az x-tengely mentén $f(x,0) = -x^2 < 0$, az y-tengely mentén $f(0,y) = y^2 > 0$. Így minden origó középpontú körlapon van olyan pont, ahol a függvény pozitív, és van olyan, ahol negatív. A függvénynek az origóban nem szélsőértéke, hanem nyeregpontja van (14.42. ábra), tehát nincs lokális szélsőértéke. □

Tehát az $f_x = f_y = 0$ egyenlőségek teljesülése egy (a,b) pontban itt nem garantálja a lokális szélsőértéket. Ha a függvénynek folytonos másodrendű parciális deriváltjai vannak, akkor könnyen dönthetünk a szélsőértékről, mint azt a következő tétel kimondja, de ezt csak a 14.10. alfejezetben fogjuk bizonyítani.

11. TÉTEL: Szélsőérték keresése második deriváltakkal

Tegyük fel, hogy $f(x,y)$ első és második parciális deriváltjai folytonosak egy (a,b) középpontú körlapon, és $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$. Ekkor

i. ha $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ és $f_{xx} > 0$, akkor f-nek (a,b)-ben **lokális minimuma** van.

ii. ha $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ és $f_{xx} < 0$, akkor f-nek (a,b)-ben **lokális maximuma** van.

iii. ha $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$, akkor f-nek (a,b)-ben **nyeregpontja** van.

iv. ha $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ akkor a második deriváltakkal **nem eldönthető**, hogy van-e szélsőértéke f-nek (a,b)-ben. Ekkor más úton kell vizsgálódnunk.

Az $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ kifejezést a kétváltozós f függvény **diszkriminánsának**, vagy más néven **Hesse-determinánsának** nevezzük. Talán könnyebb determináns-formában megjegyezni:

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}.$$

A 11. Tétel azt mondja ki, hogy ha a diszkrimináns pozitív az (a,b) pontban, akkor a felület ugyanúgy görbül minden irányban: lefelé, ha f_{xx} negatív, és felfelé, ha f_{xx} pozitív, és ennek megfelelően itt maximum, ill. minimum van. Ha a diszkrimináns negatív, akkor a függvény különbözőképp görbül a különböző irányokban.

3. PÉLDA: Lokális szélsőértékek keresése

Keressük meg az

$$f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$$

függvény szélsőértékeit!

Megoldás: A függvény létezik és differenciálható minden x és y értékre, nincsenek határpontok. Így szélsőérték csak ott lehet, ahol f_x és f_y egyidejűleg nulla.

$$f_x = y - 2x - 2 = 0, \quad f_y = x - 2y - 2 = 0,$$

amiből

$$x = y = -2.$$

Tehát a $(-2,-2)$ pont az egyetlen, ahol az f-nek szélsőértéke lehet.

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{xy} = 1.$$

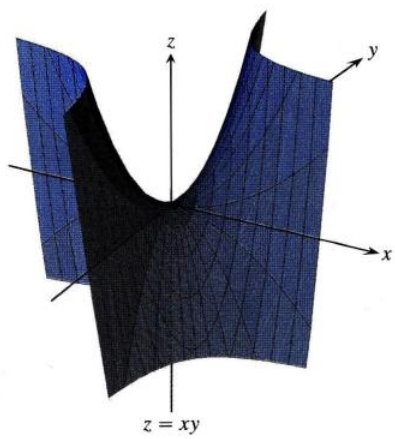
A diszkrimináns az $(a,b) = (-2,-2)$ pontban

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2) - (1)^2 = 4 - 1.$$

A megfelelő helyettesítési értékek

$$f_{xx} < 0 \quad \text{és} \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

alapján tudjuk, hogy f-nek lokális maximuma van $(-2,-2)$-ben, és itt $f(-2,-2) = 8$. □



14.43. ÁBRA: A $z = xy$ felületnek nyeregpontja van az origóban (4. példa)

4. PÉLDA: Lokális szélsőértékek keresése

Keressük az $f(x,y) = xy$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás: Mivel f mindenütt differenciálható, szélsőérték csak ott lehet, ahol

$$f_x = y = 0 \quad \text{és} \quad f_y = x = 0.$$

Az egyetlen pont az origó, ahol szélsőérték lehet. Itt

$$f_{xx} = 0, \quad f_{yy} = 0, \quad f_{xy} = 1.$$

A diszkrimináns

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -1,$$

ami negatív, tehát itt nyeregpont van. Vagyis az $f(x,y) = xy$ függvénynek sehol sincs lokális szélsőértéke. □

Abszolút maximum és abszolút minimum egy korlátos, zárt tartományon

DEFINÍCIÓ: Abszolút maximum, abszolút minimum

Egy f függvénynek a P_0 pontban **abszolút maximuma** (**abszolút minimuma**) van, ha f értelmezve van P_0-ban és az értelmezési tartományának bármely P pontjára $f(P_0) \geq f(P)$ ($f(P_0) \leq f(P)$) teljesül.

Többváltozós függvényekre is igaz az a tétel, hogy korlátos, zárt tartományon folytonos függvénynek van ezen a tartományon abszolút maximuma és abszolút minimuma. Mivel az abszolút szélsőérték egyben lokális szélsőérték is, ha sorra vesszük azokat a pontokat, ahol lokális szélsőérték lehet, akkor megtaláljuk az abszolút szélsőértékhelyeket is.

Egy korlátos, zárt T tartományon folytonos $f(x,y)$ függvény abszolút szélsőértékeinek keresését három lépésben végezhetjük.

1. Soroljuk fel a *tartomány belsejében* azokat a pontokat, ahol f-nek lokális szélsőértéke lehet, és számítsuk ki f helyettesítési értékeit ezekben a pontokban.

2. Soroljuk fel a *tartomány határán* azokat a pontokat, ahol f-nek lokális szélsőértéke lehet, és számítsuk ki f helyettesítési értékeit ezekben a pontokban.

3. Válasszuk ki a helyettesítési értékek közül a legnagyobbat és a legkisebbet. Mivel az abszolút maximum és minimum lokális is, ezeknek elő kell fordulniuk a lokális szélsőértékek között, így a legnagyobb érték az abszolút maximum, a legkisebb érték az abszolút minimum.

5. PÉLDA: Abszolút szélsőértékek keresése

Keressük meg az

$$f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

függvény abszolút szélsőértékeit az első síknegyed azon háromszög alakú tartományán, amelyet az $x = 0$, $y = 0$ és $y = 9 - x$ egyenesek határolnak!

Megoldás: Mivel f mindenütt differenciálható, a háromszögön csak ott lehet szélsőérték, ahol $f_x = f_y = 0$, vagy a határon.

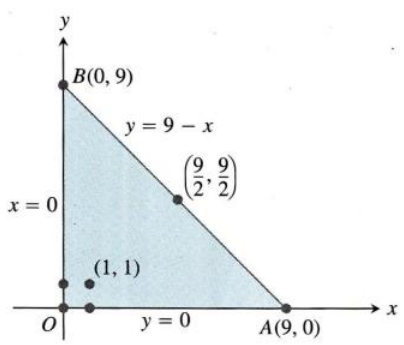
(a) Belső pontok A belső pontokban az

$$f_x = 2 - 2x = 0, \quad f_y = 2 - 2y = 0$$

egyenlőségekből egyetlen pontot kapunk, $(x,y) = (1,1)$. Itt a függvény

$$f(1,1) = 4.$$

(b) Határpontok A háromszögnek egyszerre csak egy oldalát tekintjük, mert mindegyiket különböző képlettel tudjuk csak megadni.



14.44. ÁBRA: Ez a háromszög alakú tartomány az értelmezési tartomány az 5. példában.

(i) Az OA szakaszon $y = 0$. Így a függvény

$$f(x,y) = f(x,0) = 2 + 2x - x^2$$

csak x függvénye a véges és zárt $0 \le x \le 9$ intervallumon. A 4. fejezetből tudjuk, hogy szélsőértékei lehetnek a végpontokban

$$\begin{aligned} x = 0, &\quad \text{ahol} \qquad f(0,0) = 2, \\ x = 9, &\quad \text{ahol} \qquad f(9,0) = 2 + 18 - 81 = -61, \end{aligned}$$

és az intervallum belsejében, ahol $\frac{d}{dx} f(x,0) = 2 - 2x = 0$. Az egyetlen ilyen pont, ahol $\frac{d}{dx} f(x,0) = 0$ az $x = 1$. Itt

$$f(x,0) = f(1,0) = 3.$$

(ii) Az OB szakaszon $x = 0$ és

$$f(x,y) = f(0,y) = 2 + 2y - y^2.$$

Az f függvény szimmetriájából következik, hogy a lehetséges szélsőértékek

$$f(0,0) = 2, \quad f(0,9) = -61, \quad f(0,1) = 3.$$

(iii) Mivel az AB szakasz végpontjait már figyelembe vettük, csak a belső pontjaival kell törődni. Mivel $y = 9 - x$, így

$$f(x,y) = 2 + 2x + 2(9-x) - x^2 - (9-x)^2 = -61 + 18x - 2x^2.$$

A $\frac{d}{dx} f(x, 9-x) = 18 - 4x = 0$ egyenlet megoldása

$$x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}.$$

Erre az x értékre

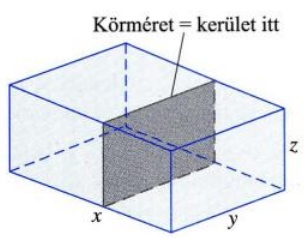
$$y = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \quad \text{és} \quad f(x,y) = f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = -\frac{41}{2}.$$

Végső következtetés A szóbajöhető értékek: $4, 2, -61, 3 - (41/2)$. A maximum 4, amit f az $(1,1)$ pontban vesz fel, a minimum -61, amit f a $(0,9)$ és $(9,0)$ pontokban vesz fel. □

Szélsőértékproblémák megoldásához algebrai korlátozó feltételek mellett általában a Lagrange-féle multiplikátoros módszert használjuk, amit a következő alfejezetben tárgyalunk. Egyszerűbb esetekben viszont közvetlenül is meg tudjuk oldani a feladatot.

6. PÉLDA: **Feltételes szélsőérték**

Egy szállító cég csak olyan téglatest alakú dobozokat fogad el, amelyeknél a leghosszabb oldal hossza és a rá merőleges oldal kerülete együttesen nem haladja meg a 270 centimétert. Milyen méretek mellett lesz a küldemény térfogata maximális?



14.45. ÁBRA: A 6. példában szereplő doboz.

Megoldás: Jelölje x, y és z a hosszat, magasságot és szélességet. Ekkor a kerület $2y + 2z$. A $V = xyz$ térfogatot akarjuk maximálni az $x + 2y + 2z = 270$ feltétel mellett (14.45. ábra). (A térfogat nyilván a legnagyobb megengedett méret esetén lesz a legnagyobb.) Így a doboz térfogatát felírhatjuk két változó függvényeként.

$$\begin{aligned} V(y,z) &= (270 - 2y - 2z)yz \qquad x = 270 - 2y - 2z \\ &= 270yz - 2y^2z - 2yz^2 \end{aligned}$$

Az első parciális deriváltakat nullával téve egyenlővé:

$$V_y(y,z) = 270z - 4zy - 2z^2 = (270 - 4y - 2z)z = 0,$$
$$V_z(y,z) = 270y - 2y^2 - 4zy = (270 - 2y - 4z)y = 0,$$

a (0, 0), (0, 135), (135, 0) és a (45, 45) kritikus pontokat kapjuk. Az első három pontban a térfogat nulla, ez biztosan nem maximum. A (45, 45) pontban vizsgáljuk a második deriváltakat:

$$V_{yy} = -4z, \quad V_{zz} = -4y, \quad V_{yz} = 270 - 4y - 4z.$$

Így

$$V_{yy}V_{zz} - V_{yz}^2 = 16yz - 4(135 - 2y - 2z)^2.$$

Mivel

$$V_{yy}(45,45) = -180 < 0,$$

és

$$[V_{yy}V_{zz} - V_{yz}^2]_{(45,45)} = 16(45)(45) - 4(-45)^2 > 0,$$

a térfogatnak $y = z = 45$-nél maximuma van. A keresett méretek: $y = z = 45$ centiméter, $x = 270 - 2 \cdot 45 - 2 \cdot 45 = 90$ centiméter, és a térfogat $V = 18225$ cm^3 = $= 0{,}18225$ m^3. □

Emlékeztetjük az olvasót arra, hogy akármilyen jól alkalmazható is a 10. Tétel a belső pontokra, nem működik, ha valamelyik parciális derivált nem létezik, és nem alkalmazható a határpontokban sem, hiszen itt lehet szélsőérték úgy is, hogy a parciális deriváltak nem nullák.

Összefoglaló a szélsőérték kereséséhez
Az $f(x,y)$ függvénynek lehet szélsőértéke

i. f értelmezési tartományának **határpontjaiban**,

ii. a **kritikus pontokban** (az értelmezési tartomány belső pontjai, ahol $f_x = f_y = 0$, vagy f_x, f_y valamelyike nem létezik).

Ha f-nek az első és második parciális deriváltjai folytonosak egy (a,b) középpontú körlemezen, és $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$, akkor ezt a pontot tovább vizsgáljuk a második parciális deriváltakkal:

i. $f_{xx} < 0$ és $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ az (a,b) pontban, itt **lokális maximum** van,

ii. $f_{xx} > 0$ és $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ az (a,b) pontban, itt **lokális minimum** van,

iii. $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ az (a,b) pontban, itt **nyeregpont** van,

iv. $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ az (a,b) pontban, **nem eldönthető** a második deriváltakkal.

14.7. Feladatok

Az 1–30. feladatokban határozzuk meg a megadott függvények összes lokális minimumát, maximumát, ezek helyét és a nyeregpontokat is!

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$

2. $f(x,y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6$

3. $f(x,y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4$

4. $f(x,y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x - 4$

5. $f(x,y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$

6. $f(x,y) = y^2 + xy - 2x - 2y + 2$

7. $f(x,y) = 5xy - 7x^2 + 3x - 6y + 2$

8. $f(x,y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4$

9. $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2 + 6y + 2$

10. $f(x,y) = 3x^2 + 6xy + 7y^2 - 2x + 4y$

11. $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$

12. $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 5y^2 - 20x + 26y$

13. $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 6$

14. $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 2y + 1$

15. $f(x,y) = x^2 + 2xy$

16. $f(x,y) = 3 + 2x + 2y - 2x^2 - 2xy - y^2$

17. $f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$

18. $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$

19. $f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

20. $f(x,y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$

21. $f(x,y) = 9x^3 + y^3/3 - 4xy$

22. $f(x,y) = 8x^3 + y^3 + 6xy$

23. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$

24. $f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 9x^2 + 3y^2 - 12y$

25. $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$

26. $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy$

27. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$

28. $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + xy + \dfrac{1}{y}$

29. $f(x,y) = y \sin x$

30. $f(x,y) = e^{2x} \cos y$

Abszolút szélsőértékek meghatározása

A 31–38. feladatokban határozzuk meg az adott függvény abszolút maximumát és minimumát az adott tartományon!

31. $f(x,y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ azon az első síknegyedbe eső háromszög alakú zárt tartományon, amelyet az $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$ egyenesek határolnak.

32. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ azon az első síknegyedbe eső háromszög alakú zárt tartományon, amelyet az $x = 0$, $y = 4$, $y = x$ egyenesek határolnak.

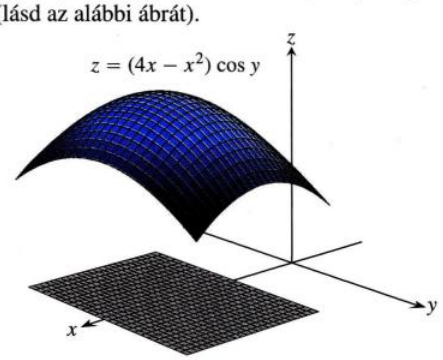
33. $f(x,y) = x^2 + y^2$ azon az első síknegyedbe eső háromszög alakú zárt tartományon, amelyet az $x = 0$, $y = 0$, $y + 2x = 2$ egyenesek határolnak.

34. $T(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x$ a $0 \le x \le 5$, $-3 \le y \le 3$ téglalapon.

35. $T(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$ a $0 \le x \le 5$, $-3 \le y \le 0$ téglalapon.

36. $f(x,y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2$ a $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ négyzeten.

37. $f(x,y) = (4x - x^2)\cos y$ a $1 \le x \le 3$, $-\pi/4 \le y \le \pi/4$ téglalapon (lásd az alábbi ábrát).



38. $f(x,y) = 4x - 8xy + 2y + 1$ azon az első síknegyedbe eső háromszög alakú zárt tartományon, amelyet az $x = 0$, $y = 0$, $y + x = 1$ egyenesek határolnak.

39. Adjuk meg azokat az a és b számokat, amelyekre az

$$\int_a^b (6 - x - x^2)\,dx$$

integrál a legnagyobb értékét veszi fel!

40. Adjuk meg azokat az a és b számokat, amelyekre az

$$\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{1/3}\,dx$$

integrál a legnagyobb értékét veszi fel!

41. Hőmérséklet: A lapos, kerek tányér alakja a 14.46. ábrán az $x^2 + y^2 \le 1$ egyenlőtlenséggel jellemezhető. A tányért, a kerületével együtt (ami $x^2 + y^2 = 1$) melegítjük úgy, hogy a hőmérséklet az (x,y) pontban

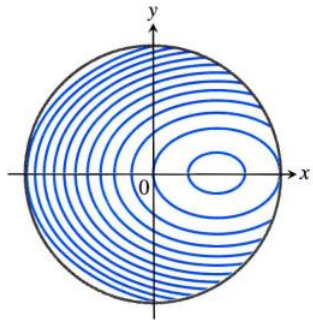
$$T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x.$$

Találjuk meg a tányér legmelegebb és leghidegebb pontját!

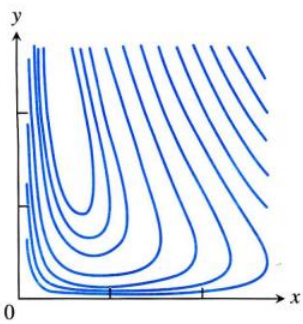
42. Keressük meg

$$f(x,y) = xy + 2x - \ln x^2 y$$

kritikus pontjait az első síknegyedben ($x > 0$, $y > 0$), és mutassuk meg, hogy f itt minimumot vesz fel (14.47. ábra).



14.46. ÁBRA: A konstans hőmérsékletű pontokat izotermikus vonalaknak hívják. Az ábra a $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ függvény izotermikus vonalait mutatja az $x^2 + y^2 \le 1$ körlapon az xy-síkban. A 41. feladat a hőmérséklet szélsőértékeit kérdezi.



14.47. ÁBRA: Az $f(x,y) = xy + 2x - \ln x^2 y$ függvény (aminek néhány szintvonalát mutatja az ábra) a legkisebb értékét az $x > 0$, $y > 0$ nyílt első síknegyedben veszi fel (42. feladat).

További példák és feladatok

43. Határozzuk meg $f(x,y)$ maximum-, minimumhelyeit, nyeregponthelyeit, amennyiben ilyenek vannak, és indokoljuk is válaszunkat!

(a) $f_x = 2x - 4y$ és $f_y = 2y - 4x$

(b) $f_x = 2x - 2$ és $f_y = 2y - 4$

(c) $f_x = 9x^2 - 9$ és $f_y = 2y + 4$

44. Az $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$ kifejezés az origóban a következő függvények mindegyikére nulla, így a második deriváltak alapján nem tudjuk eldönteni, van-e szélsőérték. Más módon állapítsuk meg, van-e a következő függvényeknek szélsőértéke az origóban! Válaszunkat indokoljuk!

(a) $f(x,y) = x^2 y^2$ **(b)** $f(x,y) = 1 - x^2 y^2$

(c) $f(x,y) = xy^2$ **(d)** $f(x,y) = x^3 y^2$

(e) $f(x,y) = x^3 y^3$ **(f)** $f(x,y) = x^4 y^4$

45. Mutassuk meg, hogy az $f(x,y) = x^2 + kxy + y^2$ függvénynek a k konstans értékétől függetlenül a $(0,0)$ pont kritikus pontja!

46. A k konstans milyen értékeire következik a második deriváltakból, hogy a $(0,0)$-nál nyeregpontja van az $f(x,y) = x^2 + kxy + y^2$ függvénynek? És az, hogy minimuma? Milyen k értékekre lesz ez a kérdés a második deriváltak alapján eldönthetetlen?

47. Ha $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$, akkor biztos, hogy (a,b)-nél lokális maximum vagy minimum van?

48. Tudunk valamit mondani az f függvényről, ha az első és második parciális deriváltjai folytonosak egy (a,b) középpontú körlapon, és f_{xx}, f_{yy} különböző előjelűek?

49. A $z = 10 - x^2 - y^2$ grafikonnak azon pontjai közül, amelyek az $x + 2y + 3z = 0$ sík felett vannak, keressük meg a síktól legtávolabb levő pontot!

50. Keressük meg $z = x^2 + y^2 + 10$ grafikonjának az $x + 2y - z = 0$ síkhoz legközelebb levő pontját!

51. Az $f(x,y) = x + y$ függvénynek nincs abszolút maximuma zárt első síknegyedben, ahol $x \ge 0$ és $y \ge 0$. Ellentmondásban van-e ez azzal a módszerrel, amit az abszolút maximum, ill. minimum megkeresésére tanultunk?

52. Tekintsük az $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy - x - y + 1$ függvényt a $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ négyzet felett.

(a) Mutassuk meg, hogy a függvénynek a $2x + 2y = 1$ egyenesnek ebbe a négyzetbe eső szakasza mentén van abszolút minimuma! Mi ez az érték?

(b) Mi f abszolút maximuma a teljes négyzeten?

Szélsőértékek paraméteres görbéken

Ahhoz, hogy az $f(x,y)$ függvény szélsőértékeit megtaláljuk egy $x = x(t)$, $y = y(t)$ görbe mentén, az f függvényt mint a t változó egyváltozós függvényét kezeljük, és a láncszabályt alkalmazva meghatározzuk, hol nulla a df/dt derivált. Mint minden más egyváltozós esetben, f szélsőértékei vagy

(a) a kritikus pontokban vannak (ahol df/dt nulla, vagy nem létezik), vagy

(b) a paramétertartomány végpontjaiban.

Keressük meg az abszolút maximumát és abszolút minimumát a következő függvényeknek az adott görbéken:

53. Függvények:
(a) $f(x,y) = x + y$ **(b)** $g(x,y) = xy$
(c) $h(x,y) = 2x^2 + y^2$
Görbék:
i. $x^2 + y^2 = 4$, $y \ge 0$ félkör
ii. $x^2 + y^2 = 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ negyedkör
Használjuk az $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ paraméterezést!

54. Függvények:
(a) $f(x,y) = 2x + 3y$ **(b)** $g(x,y) = xy$
(c) $h(x,y) = x^2 + 3y^2$
Görbék:
i. $x^2/9 + y^2/4 = 1$, $y \ge 0$ fél ellipszis
ii. $x^2/9 + y^2/4 = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ negyed ellipszis
Használjuk az $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ paraméterezést!

55. Függvény: $f(x,y) = xy$
Görbék:
i. $x = 2t$, $y = t + 1$ egyenes
ii. $x = 2t$, $y = t + 1$, $-1 \le t \le 0$ szakasz
iii. $x = 2t$, $y = t + 1$, $0 \le t \le 1$ szakasz

56. Függvények:
(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ **(b)** $g(x,y) = 1/(x^2 + y^2)$
Görbék:
i. $x = t$, $y = 2 - 2t$ egyenes
ii. $x = t$, $y = 2 - 2t$, $0 \le t \le 1$ szakasz

Legkisebb négyzetek és regressziós egyenes

Ha egy $y = mx + b$ egyenest próbálunk illeszteni egy (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ ponthalmazra (14.48. ábra), akkor legtöbbször azt az egyenest választjuk, amelyikre a pontok egyenestől való függőleges távolságnégyzetei a minimálisak. Ez azt jelenti, hogy keressük azt az m-et és b-t, amelyekre a

$$w = (mx_1 + b - y_1)^2 + \cdots + (mx_n + b - y_n)^2 \qquad (14.13)$$

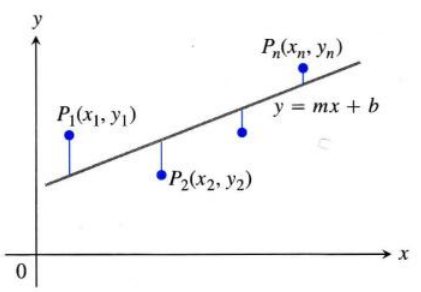
függvény minimális. Az m és b értékei az első és második deriváltak ellenőrzése alapján

$$m = \frac{(\sum x_k)(\sum y_k) - n\sum x_k y_k}{(\sum x_k)^2 - n\sum x_k^2}, \qquad (14.14)$$

$$b = \frac{1}{n}\left(\sum y_k - m\sum x_k\right), \qquad (14.15)$$

ahol minden szumma $k = 1$-től $k = n$-ig megy. A legtöbb kalkulátorba bele van építve ez a formula, így egyszerűen megkaphatjuk m-et és b-t is, miután beütöttük az adatokat. Az ezekkel az m és b értékekkel meghatározott egyenest **regressziós egyenesnek**, vagy **trend egyenesnek** hívjuk. A regressziós egyenes a következő előnyökkel rendelkezik:

1. egyszerű kifejezéssel összefoglalja az adatokat,
2. előrejelez y értékeket a kísérletben nem vizsgált x értékekre,
3. analitikusan lehet vele adatokat kezelni.



14.48. ÁBRA: A nemkollineáris pontokhoz olyan egyenest keresünk, amelyikre a helyettesítési értékek eltérésének négyzetösszege minimális.

7. PÉLDA:

Határozzuk meg a regressziós egyenesét a következő pontoknak: (0, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 4), (4, 5).

Megoldás: A számításokat egy táblázatba írjuk:

k	x_k	y_k	x^2	$x_k y_k$
1	0	1	0	0
2	1	3	1	3
3	2	2	4	4
4	3	4	9	12
5	4	5	16	20
$\sum$	10	15	30	39

Az egyenes meredeksége

$$m = \frac{(10)(15) - 5(39)}{(10)^2 - 5(30)} = 0{,}9$$

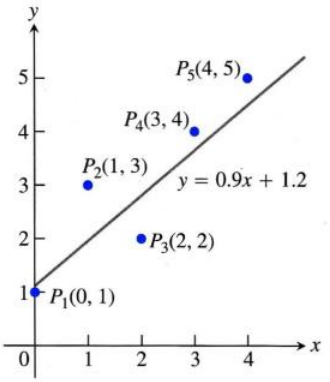
(14.14) egyenlőség $n = 5$-re a táblázat adataival

és m értékével

$$b = \frac{1}{5}(15 - (0{,}9)(10)) = 1{,}2.$$

(14.15) egyenlőség $n = 5$, $m = 0{,}9$

A regressziós egyenes tehát $y = 0{,}9x + 1{,}2$ (14.49. ábra). □



14.49. ÁBRA: A példabeli adatokra számított regressziós egyenes.

Az 57–60. feladatokban használjuk a (14.13) és (14.14) egyenlőségeket az adott pontok regressziósegyeneseinek meghatározására. Azután mondjuk meg y becsült értékét $x = 4$-nél!

57. $(-1, 2), (0, 1), (3, -4)$ **58.** $(-2, 0), (0, 2), (2, 3)$

59. $(0, 0), (1, 2), (2, 3)$ **60.** $(0, 1), (2, 2), (3, 2)$

T 61. Adjunk meg egy lineáris egyenletet, ami leírja az összefüggést a locsoláshoz használt vízmennyiség és a hektáronként betakarított lucernamennyiség között! Használjuk a legkisebb négyzetek módszerét a 14.1. táblázat adataira támaszkodva (University of California Kutató Állomás, *Bulletin* No. 450, p. 8)! Jelöljük be a pontokat egy koordináta-rendszerben, és húzzuk be az egyenest!

x (teljes vízmennyiség a szezonban cm-ben)	y (betakarított lucerna átlaga tonna/hektár)
30	13,02
45	14,03
60	15,44
75	17,81
90	20,25
105	21,51

14.1. TÁBLÁZAT: Lucerna növekedés.

T 62. Kráterek a Marson: A kráterformációk egyik elmélete szerint a nagy kráterek gyakorisága az átmérőjük négyzetével arányosan csökken (Marcus, *Science*, jún. 21., 1968, p. 1334). A *Mariner IV* által küldött képekről szerzett adatokat a 14.2. táblázatban foglaltuk össze. Illesszünk egy $F = m(1/D^2) + b$ alakú egyenest az adatokra! Rajzoljuk be a pontokat és az egyenest egy koordináta-rendszerbe!

Átmérő D km-ben	$1/D^2$ (az intervallum alsó határán)	Gyakoriság F
32-45	0,001	51
45-64	0,0005	22
64-90	0,00024	14
90-128	0,000123	4

14.2. TÁBLÁZAT: Mars krátereinek méretei.

T 63. A német zenetudós, Ludwig von Köchel, 1862-ben egy időszerinti listát készített Wolfgang Amadeus Mozart műveiről. Ez a lista adja az ún. „Köchel-jegyzékszámokat", amelyeket feltüntetnek a Mozart művek címe mellett (pl. Sinfonia Concertante, esz-dur K. 364). A 14.3. táblázat néhány Köchel-jegyzékszámot és a mű komponálásának évét (y) tartalmazza.

(a) Rajzoljuk be a (K,y) pontokat egy koordinátarendszerbe, hogy lássuk, y kb. lineáris függvénye K-nak!

(b) Adjuk meg a regressziós egyenes egyenletét, és azt is rajzoljuk be az előbbi ábrába!

(c) K. 364 1779-ben lett komponálva. Mi az egyenes által becsült idő?

Köchel jegyzékszám K	Komponálás éve y
1	1761
75	1771
155	1772
219	1775
271	1777
351	1780
425	1783
503	1786
575	1789
626	1791

14.3. TÁBLÁZAT: Mozart kompozíciói.

T 64. Süllyedő tengeralattjáró: A 14.4. táblázat egy történelmi tanulmány eredményeit mutatja, az Egyesült Államok Haditengerészete által elsüllyesztett német tengeralattjárók számát 16 hónapon át a II. Világháborúban. A táblázatban az elsüllyesztett hajók száma két oszlopban is szerepel, az egyikben az, amiről a Haditengerészet tudott, ami a jelentésekben szerepelt. A másik oszlopban a tényleges értékek vannak.

Hónap	Az Egyesült Államok által becsült (jelentett) süllyesztés x	Tényleges adat y
1	3	3
2	2	2
3	4	6
4	2	3
5	5	4
6	5	3
7	9	11
8	12	9
9	8	10
10	13	16
11	14	13
12	3	5
13	4	6
14	13	19
15	10	15
16	16	15
	123	140

14.4. TÁBLÁZAT: Az Egyesült Államok Haditengerészete által elsüllyesztett német tengeralattjárók száma a II. Világháború 16 egymásutáni hónapjában.

A ténylegesen elsüllyedt hajók száma némileg több, mint amiről a Haditengerészet tudott. Határozzuk meg azt a regressziós egyenest, ami a ténylegesen elsüllyesztett hajók számát becsli a jelentett elsüllyesztésekből.

Lokális szélsőértékhelyek és kritikus pontok megtalálása

A 65–70. feladatokban használjunk számítógép-programot a következő lépések végrehajtására!

(a) Rajzoltassuk ki a függvényt a megadott téglalapon!

(b) Rajzoltassuk ki néhány szintvonalát a téglalapban!

(c) Számítsuk ki a függvény parciális deriváltjait, és a számítógép egyenletmegoldó programjával keressük meg a kritikus pontokat! Milyen kapcsolatban vannak a kritikus pontok a szintvonalakkal, amiket a (b) részben kirajzoltattunk? Mely kritikus pontok tűnnek úgy, hogy ott nyeregpont van, ha egyáltalán vannak ilyenek?

(d) Számítsuk ki a második parciális deriváltakat, és adjuk meg a $D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ kifejezést!

(e) Az előző pontban meghatározott D-vel osztályozzuk a (c)-ben talált kritikus pontokat (maximum, minimum, nyeregpont)! Megegyeznek ezek a válaszok azzal, amit a (c)-ben tippeltünk?

65. $f(x,y) = x^2 + y^3 - 3xy$, $-5 \le x \le 5$, $-5 \le y \le 5$

66. $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^2$, $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$

67. $f(x,y) = x^4 + y^2 - 8x^2 - 6y + 16$, $-3 \le x \le 3$, $-6 \le y \le 6$

68. $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 3$, $-3/2 \le x \le 3/2$, $-3/2 \le y \le 3/2$

69. $f(x,y) = 5x^6 + 18x^5 - 30x^4 + 30xy^2 - 120x^3$, $-4 \le x \le 3$, $-2 \le y \le 2$

70. $f(x,y) = \begin{cases} x^5 \ln(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$

14.8. Lagrange-multiplikátorok

Gyakran keressük többváltozós függvények szélsőértékét bizonyos korlátozó feltételek mellett, azaz az értelmezési tartomány valamely részhalmazán. Pl. kétváltozós esetben a síkban egy háromszögvonalon, vagy valamely más görbén. Ebben az alfejezetben egy általánosan használható módszert adunk az ilyen jellegű feladatok megoldására, amit *Lagrange-féle multiplikátoros módszernek* nevezzük.

Feltételes maximum és minimum

1. PÉLDA: **Feltételes minimum**

Keressük meg a $2x+y-z-5=0$ sík origóhoz legközelebbi $P(x,y,z)$ pontját!

Megoldás: A feladat az, hogy megtaláljuk a

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

függvény minimumát a

$$2x+y-z-5=0$$

korlátozó feltétel mellett. Mivel $|\overrightarrow{OP}|$-nek minimuma van, ha az

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

függvénynek minimuma van, a feladat az, hogy megtaláljuk $f(x,y,z)$ minimális értékét (elkerülvén a négyzetgyökkel való bajlódást) a $2x+y-z-5=0$ feltétel mellett. Ebben az esetben viszonylag egyszerű megoldás kínálkozik, mert z a feltételből könnyen kifejezhető x és y függvényeként:

$$z=2x+y-5$$

Tehát a feladat arra redukálódik, hogy megtaláljuk azt az (x,y) pontot, ahol a

$$h(x,y)=f(x,y,2x+y-5)=x^2+y^2+(2x+y-5)^2$$

függvénynek minimuma van, immár minden egyéb feltétel nélkül. Mivel a h függvény az egész xy-síkon értelmezve van és parciális deriváltjai folytonosak, a szélsőértékei ott lehetnek, ahol

$$h_x=2x+2(2x+y-5)(2)=0, \quad h_y=2y+2(2x+y-5)=0.$$

Ez a két egyenlet

$$10x+4y=20, \quad 4x+4y=10,$$

és a megoldásuk

$$x=\frac{5}{3}, \quad y=\frac{5}{6}.$$

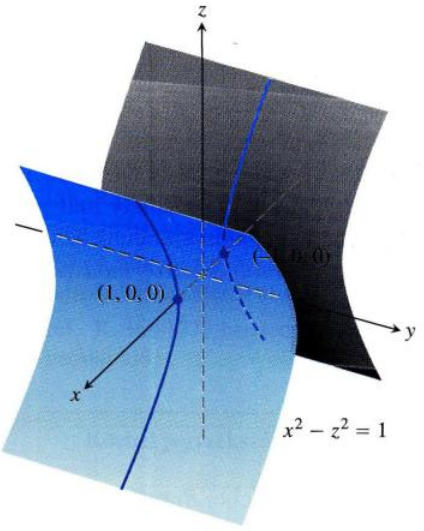
Akár geometriai érveléssel, akár a második deriváltakkal is igazolhatjuk, hogy itt tényleg minimuma van h-nak. A z-koordináta a $z=2x+y-5$ sík megfelelő pontjában

$$z=2\left(\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{6}-5=-\frac{5}{6}.$$

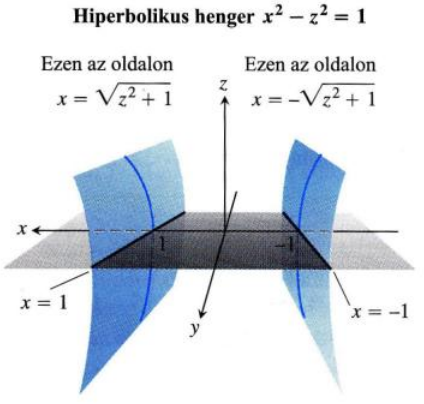
Ezért a legközelebbi pont:

$$P\left(\frac{5}{3},\frac{5}{6},-\frac{5}{6}\right).$$

A távolsága pedig az origótól $5/\sqrt{6}\approx 2{,}04$. □



14.50. ÁBRA: Az 1. példabeli $x^2 - z^2 - 1 = 0$ hiperbolikus henger.



14.51. ÁBRA: Az xy-síknak az a tartománya, ahonnan az első két koordinátáját választjuk az $x^2 - z^2 = 1$ hiperbolikus henger (x, y, z) pontjának, nem tartalmazza a $-1 < x < 1$ sávot (2. példa).

A feltételes szélsőértéknek feltétel nélkülire való visszavezetése általában egyáltalán nem olyen egyszerű, mint az 1. példában volt. Ezért vezetünk be egy másik módszert ebben az alfejezetben.

2. PÉLDA: **Feltételes minimum**

Találjuk meg az $x^2 - z^2 - 1 = 0$ hiperbolikus hengernek az origóhoz legközelebb eső pontját!

Megoldás: Első megoldás. A hengert a 14.50. ábra mutatja. A hengeren azok a pontok vannak az origóhoz legközelebb, amelyekre az

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

függvény minimumot vesz fel feltéve, hogy kielégítik az $x^2 - z^2 - 1 = 0$ egyenletet. Ha a feltételi egyenletben x-et és y-t tekintjük független változóknak, akkor

$$z^2 = x^2 - 1$$

és az $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ függvény értékei a henger pontjaiban a

$$h(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 - 1) = 2x^2 + y^2 - 1$$

függvénnyel számíthatók. Azért, hogy megtaláljuk a henger pontjait, amelyekre f minimális, h minimumát keressük az x, y változókban, tehát az xy-síkon. Az egyetlen pont, ahol h-nak minimuma van,

$$h_x = 4x = 0 \quad \text{és} \quad h_y = 2y = 0,$$

azaz a (0, 0) pont. Csakhogy az origó nincs a hengeren. Hol rontottuk el? Az történt, hogy az első deriváltak vizsgálata megtalálta azt a pontot, amire a h függvény felveszi minimumát. A h függvény valóban a henger pontjainak origótól való távolságát adja, de csak a henger pontjaiban, ott viszont $x \geq 1$. A h függvény az egész xy-síkon értelmezve van, az a tartomány viszont, ahonnan mi megoldást választhatunk, a henger pontjainak merőleges vetülete az xy-síkon, és ez nem tartalmazza az $x = -1$ és $x = 1$ egyenesek közötti sávot (14.51. ábra).

Ebben az esetben el tudjuk kerülni ezt a problémát, ha y-nal és z-vel fejezzük ki a távolságot, mert az yz-síkra való vetület az egész síkot lefedi. Ha x-et fejezzük ki z-vel:

$$x^2 = z^2 + 1$$

és ezt $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$-be helyettesítve

$$k(y, z) = (z^2 + 1) + y^2 + z^2 = 1 + y^2 + 2z^2$$

adódik. k értelmezési tartománya megegyezik azzal, ahonnan a henger (x, y, z) pontjainak y és z koordinátáját választhatjuk. Így a k függvényt minimalizáló yz-síkban levő pontoknak vannak megfelelő pontjai a hengeren is. A k függvényt minimalizáló pontok:

$$k_y = 2y = 0 \quad \text{és} \quad k_z = 4z = 0,$$

ahonnan $y = 0$, $z = 0$. Mivel

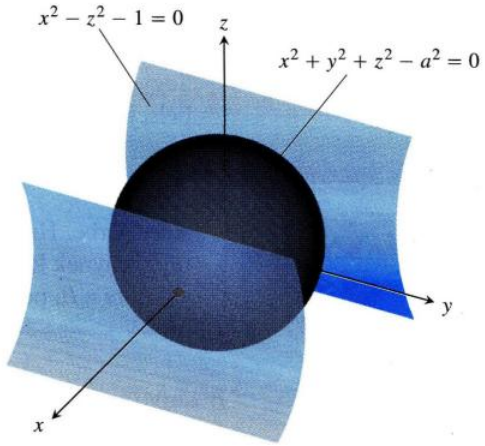
$$x^2 = z^2 + 1 = 1, \quad x = \pm 1.$$

A megfelelő pontok tehát a hengeren $(\pm 1, 0, 0)$. A nyilvánvaló

$$k(x, y) = 1 + y^2 + 2z^2 \geq 1$$

egyenlőtlenségből látjuk, hogy k-nak a $(\pm 1, 0, 0)$ pontban tényleg minimuma van.

Második megoldás. Egy másik út, hogy megtaláljuk a probléma megoldását az, hogy egy origó középpontú kicsiny gömböt kezdünk el nagyobbítani. Ennek a pontjai mind egyenlő távol vannak az origótól. Ahol a gömb először eléri a



14.52. ÁBRA: Egy origó középpontú gömb szappanbuborékként növekszik, amíg csak nem érinti az $x^2 - z^2 - 1 = 0$ hiperbolikus hengert (2. példa).

hengert, ott lesz a legközelebbi pont (14.52. ábra). Ahol először érintkeznek, ott közös érintősíkjuk van. Így a henger és a gömb az

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 \quad \text{és} \quad g(x,y,z) = x^2 - z^2 - 1$$

függvényeknek 0 értékhez tartozó szintfelületei, és így ∇f és ∇g párhuzamosak abban a pontban, ahol a gömb és a henger érintkezik. Ezért ezekben a pontokban van olyan λ szám, hogy

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

azaz

$$2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = \lambda(2x\mathbf{i} - 2z\mathbf{k}).$$

A koordinátáknak tehát minden érintési pontban ki kell elégíteniük a

$$2x = 2\lambda x, \quad 2y = 0, \quad 2z = -2\lambda z$$

egyenleteket. Milyen λ értékekre fogja kielégíteni egy (x,y,z) pont az egyenleteket úgy, hogy közben rajta legyen az $x^2 - z^2 - 1 = 0$ hengeren? Tudjuk, hogy $x \neq 0$, így $2x = 2\lambda x$ csak úgy teljesülhet, ha

$$2 = 2\lambda, \quad \text{azaz} \quad \lambda = 1.$$

Ha $\lambda = 1$, akkor $2z = -\lambda 2z$-ből $2z = -2z$, tehát $z = 0$. Mivel y is nulla, a keresett pont

$$(x,0,0)$$

alakú. Az $x^2 - z^2 = 1$ henger mely pontjai felelnek meg ennek? A válasz az, hogy:

$$x^2 - 0^2 = 1, \quad x^2 = 1, \quad x = \pm 1.$$

Az origóhoz legközelebbi pontjai a hengernek a $(\pm 1,0,0)$ pontok. □

Lagrange-féle multiplikátoros módszer

A 2. példa második megoldásában tulajdonképpen a **Lagrange-féle multiplikátoros módszert** alkalmaztuk. A módszer azt mondja, hogy az $f(x,y,z)$ függvény szélsőértékei a $g(x,y,z) = 0$ feltételek mellett azok közül a pontok közül kerülnek ki, amelyek a $g = 0$ feltétel mellett a

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

egyenlőségnek is eleget tesznek valamilyen λ konstans esetén. Ezt a λ-t hívjuk **Lagrange-multiplikátornak**. Ahhoz, hogy lássuk, a módszer miért működik, először nézzük a következő tételt.

12. TÉTEL: Merőleges gradiens tétel

Tegyük fel, hogy $f(x,y,z)$ differenciálható egy tartományban, és ennek belsejében van a

$$C: \mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$$

sima görbe. Ha P_0 a C görbe olyan pontja, ahol a görbe pontjaiban az f függvénynek lokális maximuma vagy minimuma van, akkor ∇f merőleges C-re a P_0 pontban.

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy ∇f merőleges a görbe sebességvektorára a P_0 pontban. Az f függvény értékei a C görbe pontjaiban az $f(g(t),h(t),k(t))$ összetett függvénnyel vannak megadva, amelynek t szerinti deriváltja

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dk}{dt} = \nabla f \cdot \mathbf{v}.$$

Minden pontban, ahol f-nek maximuma vagy minimuma van a C görbén felvett értékeihez képest, $df/dt = 0$ kell, hogy legyen, így

$$\nabla f \cdot \mathbf{v} = 0. \qquad \square$$

Ha a z koordinátás tagot elhagyjuk a 12. Tételből, akkor ugyanez az eredmény adódik a kétdimenziós esetre is.

A 12. Tétel következménye

Az $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j}$ sima görbe azon pontjaiban, ahol az $f(x,y)$ függvény lokális maximumot vagy minimumot vesz fel a görbe pontjaiban felvett értékekhez képest, $\nabla f \cdot \mathbf{v} = 0$, ahol $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$.

A 12. Tétel a kulcs a Lagrange-féle multiplikátoros módszerhez. Tegyük fel, hogy $f(x,y,z)$ és $g(x,y,z)$ differenciálható függvények, és P_0 egy olyan pont a $g(x,y,z) = 0$ felületen, ahol f-nek lokális maximuma, vagy minimuma van a felületen felvett értékeihez képest. Ekkor f-nek lokális szélsőértéke van P_0-ban minden olyan görbén, ami a $g = 0$ felületen halad és átmegy a P_0 ponton. Azaz ∇f merőleges minden ilyen differenciálható görbe sebességvektorára ebben a pontban. Mivel ∇g szintén merőleges ezekre a sebességvektorokra (lásd 14.5. alfejezet), ∇f valamilyen konstansszorosa ∇g-nek.

A Lagrange-féle multiplikátoros módszer

Tegyük fel, hogy $f(x,y,z)$ és $g(x,y,z)$ differenciálható függvények. Az f függvény a $g(x,y,z) = 0$ feltételeknek eleget tevő pontokban akkor vehet fel lokális maximumot vagy minimumot, ha x,y,z és λ kielégíti a

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{és} \quad g(x,y,z) = 0 \tag{14.16}$$

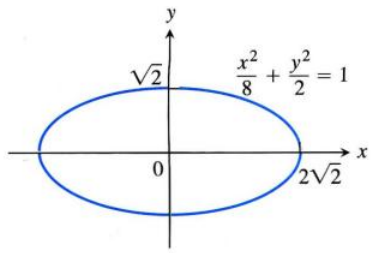
egyenleteket. Kétváltozós függvény esetén a feltétel hasonló, csupán a harmadik koordinátától kell eltekintenünk.

3. PÉLDA: A Lagrange-féle multiplikátoros módszer használata

Keressük meg az

$$f(x,y) = xy$$

függvény maximumát és minimumát az



14.53. ÁBRA: A 3. példa megmutatja, hogyan találhatjuk meg az xy szorzat legnagyobb és legkisebb értékét ezen az ellipszisen.

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$$

ellipszisen (14.53. ábra)!

Megoldás: Az $f(x,y)=xy$ szélsőértékeit keressük a

$$g(x,y)=\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1=0$$

feltétel mellett. Ehhez először keressük meg azokat az x, y és λ értékeket, amelyekre

$$\nabla f=\lambda\nabla g \quad \text{és} \quad g(x,y)=0.$$

Ennek alapján

$$y\mathbf{i}+x\mathbf{j}=\frac{\lambda}{4}x\mathbf{i}+\lambda y\mathbf{j},$$

amiből

$$y=\frac{\lambda}{4}x, \quad x=\lambda y, \quad \text{így} \quad y=\frac{\lambda}{4}(\lambda y)=\frac{\lambda^2}{4}y.$$

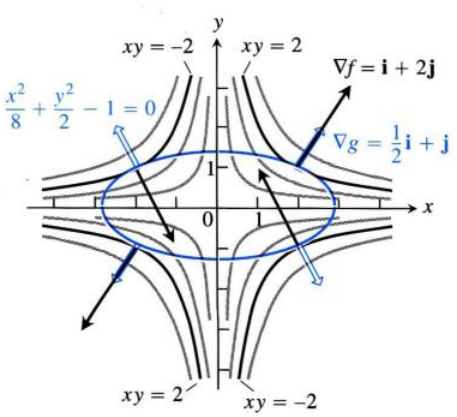
Tehát $y=0$ vagy $\lambda=\pm 2$. Tekintsük ezt a két esetet.
Első eset: Ha $y=0$, akkor $x=y=0$, de a (0, 0) pont nincs az ellipszisen. Így $y\neq 0$.
Második eset: Ha $y\neq 0$, akkor $\lambda=\pm 2$ és $x=\pm 2y$. Behelyettesítve ezt a $g(x,y)=0$ egyenletbe

$$\frac{(\pm 2y)^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1, \quad \text{így} \quad 4y^2+4y^2=8, \quad \text{azaz} \quad y=\pm 1.$$

Az $f(x,y)=xy$ függvénynek tehát négy pontban lehet szélsőértéke az ellipszisen. Ezek a pontok $(\pm 2,1)$, $(\pm 2,-1)$. Viszonylag könnyű meggyőződni arról, hogy ezek valóban szélsőértékek, és $xy=2$ maximum, $xy=-2$ minimum.

A megoldás geometriája

Az $f(x,y)=xy$ függvény szintvonalai az $xy=c$ hiperbolák (14.54. ábra). Minél messzebb van a hiperbola az origótól, annál nagyobb c abszolút értéke, azaz f abszolút értéke. Mi $f(x,y)$ szélsőértékét keressük olyan pontban, ami az $x^2+4y^2=8$ ellipszisen is rajta van. Melyik, az origótól lehető legtávolabb fekvő hiperbolának van közös pontja az ellipszissel?



14.54. ÁBRA: A $g(x,y)=x^2/8+y^2/2-1=0$ korlátozó feltétel mellett az $f(x,y)=xy$ függvény négy pontban vesz fel szélsőértéket: $(\pm 2,\pm 1)$. Ezek azok a pontok az ellipszisen, ahol ∇f számszorosa ∇g-nek (3. példa).

Annak, amelyik csak érinti, azaz az ellipszisnek van közös pontja vele, de nincs pontja a görbe „mindkét oldalán". (Ugyanis ha az ellipszis metszi az $xy = c$ hiperbolát, akkor az ellipszisen a metszéspont két oldalán, az f függvény c-nél kisebb és nagyobb értékeket is felvesz.) Ezekben a pontokban a hiperbolára merőleges irányok merőlegesek az ellipszisre is, így $\nabla f = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ konstansszorosa ($\lambda = \pm 2$) a $\nabla g = (x/4)\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ vektornak. A (2, 1) pontban például

$$\nabla f = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \quad \nabla g = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \text{így} \quad \nabla f = 2\nabla g.$$

A $(-2, 1)$ pontban

$$\nabla f = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}, \quad \nabla g = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \text{így} \quad \nabla f = -2\nabla g. \qquad \square$$

4. PÉLDA: **Függvény szélsőértékeinek keresése egy körön**
Keressük $f(x,y) = 3x + 4y$ szélsőértékeit az $x^2 + y^2 = 1$ körön!

Megoldás: A feladat egy Lagrange-féle multiplikátoros probléma a

$$f(x,y) = 3x + 4y, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

függvényekkel. Olyan x, y és λ értékeket keresünk, amelyek kielégítik a

$$\nabla f = \lambda \nabla g: \quad 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} = 2x\lambda\mathbf{i} + 2y\lambda\mathbf{j}$$
$$g(x,y) = 0: \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

egyenlőségeket. A (14.16) egyenletből következik, hogy $\lambda \neq 0$ és

$$x = \frac{3}{2\lambda}, \quad y = \frac{2}{\lambda}.$$

Ezekből az egyenletekből, többek között, az is látszik, hogy x és y előjele megegyezik. Ezekből az egyenletekből és a $g(x,y) = 0$ egyenletből

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0$$

következik, így

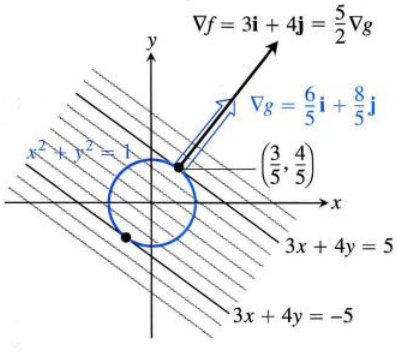
$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1, \quad 9 + 16 = 4\lambda^2, \quad 4\lambda^2 = 25, \quad \text{így} \quad \lambda = \pm\frac{5}{2}.$$

Azaz

$$x = \frac{3}{2\lambda}, \quad y = \frac{2}{\lambda} = \pm\frac{4}{5}$$

és könnyű meggyőződni arról, hogy az $f(x,y) = 3x + 4y$ függvénynek az $(x,y) = \pm(3/5, 4/5)$ pontokban tényleg szélsőértékei vannak.
A $3x + 4y$ kifejezés értékét kiszámítva a $\pm(3/5, 4/5)$ pontokban azt kapjuk, hogy az $x^2 + y^2 = 1$ körön a maximális és minimális értékek

$$3\left(\frac{3}{5}\right) + 4\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{25}{5} = 5, \quad \text{ill.} \quad 3\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{25}{5} = -5.$$



14.55. ÁBRA: Az $f(x,y) = 3x + 4y$ függvény a legnagyobb értékét a $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ körvonalon a (3/5, 4/5) pontban, a legkisebb értékét pedig a $(-3/5, -4/5)$ pontban veszi fel (4. példa). Mindkét pontban ∇f számszorosa ∇g-nek. Az ábrán az első pontban mutatjuk a gradienseket.

A megoldás geometriája

Az $f(x,y) = 3x + 4y$ függvény szintvonalai a $3x + 4y = c$ egyenesek (14.55. ábra). Minél messzebb van az egyenes az origótól, annál nagyobb c abszolút értéke, és ezzel együtt f abszolút értéke. $f(x,y)$ szélsőértékeit keressük olyan pontokban, amelyek a körön fekszenek. Melyek lesznek azok az egyenesek, amelyeknek van közös pontja a körrel, és ugyanakkor a legmesszebb vannak

az origótól? (Valójában az a lényeg, hogy legyen a körrel közös pontja az egyenesnek, de ne legyen a körnek pontja az egyenes mindkét oldalán, mert akkor nyilvánvaló, hogy a körön, a közös pont két oldalán c-nél kisebb és nagyobb értékeket is felvesz az f függvény.) A keresett egyenesek a kör érintői, és az érintési pontban az egyenes bármely normálvektora merőleges a körre, így $\nabla f = 3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ konstansszorosa ($\lambda = \pm 5/2$) a $\nabla g = 2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}$ vektornak. Például a (3/5, 4/5) pontban

$$\nabla f = 3\mathbf{i}+4\mathbf{j}, \quad \nabla g = \frac{6}{5}\mathbf{i}+\frac{8}{5}\mathbf{j}, \quad \text{így} \quad \nabla f = \frac{5}{2}\nabla g. \qquad \square$$

Lagrange-féle multiplikátorok két feltétel esetén

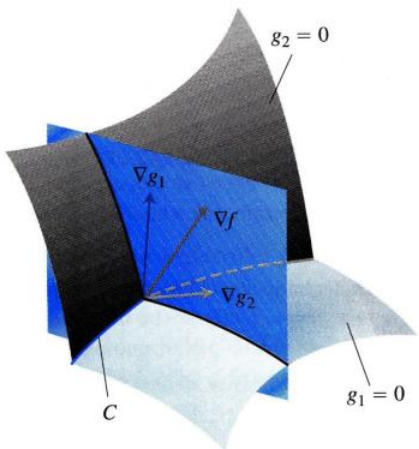
Gyakran előfordul, hogy egy differenciálható $f(x,y,z)$ függvény szélsőértékeit két korlátozó feltétel mellett keressük. Ha a korlátozó feltételek

$$g_1(x,y,z) = 0 \quad \text{és} \quad g_2(x,y,z) = 0,$$

és a g_1 és g_2 függvények differenciálhatóak és ∇g_1 nem párhuzamos ∇g_2-vel, a feltételes szélsőértékeket úgy találhatjuk meg, hogy bevezetjük a λ és μ Lagrange-féle multiplikátorokat. Azaz f olyan $P(x,y,z)$ pontokban vehet fel szélsőértéket, ahol x, y, z, λ és μ kielégítik a

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2, \quad g_1(x,y,z) = 0, \quad g_2(x,y,z) = 0 \qquad (14.17)$$

egyenleteket. A (14.17) egyenleteknek nagyon szemléletes geometriai jelentése van. A $g_1 = 0$ és $g_2 = 0$ felületek általában egy sima görbében metszik egymást, jelöljük ezt C-vel (14.56. ábra). Ezen görbe mentén keressük azokat a pontokat, ahol f-nek lokális szélsőértéke van a görbén felvett értékeihez képest. Ezek azok a pontok lehetnek, ahol ∇f merőleges a C görbére, ahogy azt a 12. Tételben láttuk. De ∇g_1 és ∇g_2 szintén merőlegesek C-re, hiszen C a $g_1 = 0$ és $g_2 = 0$ felületeken fekszik. Így ∇f a ∇g_1 és ∇g_2 vektorok által meghatározott síkban van, tehát azok lineáris kombinációja, azaz $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$ valamilyen λ és μ értékre. Mivel a keresett pontoknak a felületeken is rajta kell lenniük, ki kell elégíteniük a $g_1(x,y,z) = 0$, $g_2(x,y,z) = 0$ egyenleteket a (14.17)-ből.



14.56. ÁBRA: A ∇g_1 és ∇g_2 vektorok a C görbére merőleges síkban vannak, mert ∇g_1 merőleges a $g_1 = 0$ felületre, ∇g_2 pedig merőleges a $g_2 = 0$ felületre

5. PÉLDA: Távolság szélsőértékének keresése egy ellipszisen

Az $x+y+z = 1$ sík az $x^2+y^2 = 1$ hengert egy ellipszisben metszi (14.57. ábra). Az ellipszis mely pontjai vannak az origótól legmesszebb, ill. legközelebb?

Megoldás: Az

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

függvény (az (x,y,z) pont origótól vett távolságnégyzete) szélsőértékeit keressük a

$$g_1(x,y,z) = x^2+y^2-1 = 0 \qquad (14.18)$$
$$g_2(x,y,z) = x+y+z-1 = 0 \qquad (14.19)$$

feltételek mellett. A (14.17) egyenletek gradiensegyenlete

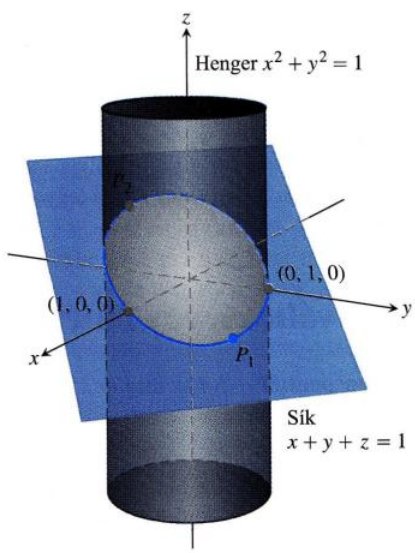
$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g$$
$$2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k} = \lambda(2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j})+\mu(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$
$$2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k} = (2\lambda x+\mu)\mathbf{i}+(2\lambda y+\mu)\mathbf{j}+\mu\mathbf{k}$$

vagy

$$2x = 2\lambda x+\mu, \quad 2y = 2\lambda y+\mu, \quad 2z = \mu. \qquad (14.20)$$

A (14.20) egyenletekből következik, hogy

$$\begin{aligned} 2x = 2\lambda x+2z \quad &\Rightarrow \quad (1-\lambda)x = z, \\ 2y = 2\lambda y+2z \quad &\Rightarrow \quad (1-\lambda)y = z. \end{aligned} \qquad (14.21)$$



14.57. ÁBRA: A henger és a sík metszésvonalának, az ellipszisnek, melyek az origótól legtávolabbi és ahhoz legközelebbi pontjai?

A (14.21) egyenlőségek fennállnak, ha $\lambda = 1$ és $z = 0$, vagy ha $\lambda \neq 1$ és $x = y = z/(1-\lambda)$.

Ha $z = 0$, akkor a (14.18) és (14.19) egyenletekből két pontot, az (1, 0, 0) és (0, 1, 0) pontot kapjuk. Ez érthető, ha a 14.57. ábrára nézünk.

Ha $x = y$, akkor a (14.18) és (14.19) egyenletekből

$$x^2 + x^2 - 1 = 0 \qquad x + x + z - 1 = 0$$
$$2x^2 = 1 \qquad z = 1 - 2x$$
$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad z = 1 \mp \sqrt{2}.$$

Az ellipszis megfelelő pontjai

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2}\right) \quad \text{és} \quad P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2}\right).$$

Itt azért elővigyázatosnak kell lennünk, jóllehet P_1-ben és P_2-ben is lokális maximuma van f-nek az ellipszisen, P_2 messzebb van az origótól mint P_1.

Az ellipszis origóhoz legközelebbi pontjai (1, 0, 0) és (0, 1, 0), a legtávolabbi pedig P_2. □

14.8. Feladatok

Két független változó, egy feltétel

1. Szélsőérték egy ellipszisen: Határozzuk meg azokat a pontokat, amelyekben az $f(x,y) = xy$ függvény szélsőértéket vesz fel az $x^2 + 2y^2 = 1$ ellipszisen!

2. Szélsőérték egy körön: Keressük meg az $f(x,y) = xy$ függvény szélsőértékeit a $g(x,y) = x^2 + y^2 - 10$ feltétel mellett!

3. Maximum egy egyenes mentén: Keressük meg $f(x,y) = 49 - x^2 - y^2$ maximumát az $x + 3y = 10$ egyenesen!

4. Szélsőérték egy egyenesen: Határozzuk meg $f(x,y) = x^2y$ lokális szélsőértékeit az $x + y = 3$ egyenesen!

5. Feltételes minimum: Határozzuk meg az $xy^2 = 54$ görbe origóhoz legközelebbi pontját!

6. Feltételes minimum: Határozzuk meg az $x^2y = 2$ görbe origóhoz legközelebbi pontját.

7. A Lagrange-féle multiplikátoros módszerrel oldjuk meg a következő feladatot!

(a) Minimum egy hiperbolán: Mennyi a minimuma $x + y$-nak, ha $xy = 16$, $y \geq 0$?

(b) Maximum egy egyenesen: Mennyi a maximuma xy-nak, ha $x + y = 16$? Elemezzük a megoldások geometriáját!

8. Szélsőérték egy görbén: Keressük meg az $x^2 + xy + y^2 = 1$ xy-síkban fekvő görbének az origóhoz legközelebbi, és origótól legtávolabbi pontjait!

9. Minimális felszín adott térfogat esetén: Milyen méretei legyenek a 16π cm^3 térfogatú, egyenes körhenger alakú fémdoboznak, hogy a felszíne minimális legyen?

10. Henger egy gömbben: Határozzuk meg a sugarát és a magasságát annak a maximális felszínű nyitott hengernek, amelyiket egy a sugarú gömbbe írhatunk be!

11. Legnagyobb területű téglalap egy ellipszisben: A Lagrange-féle multiplikátoros módszerrel határozzuk meg a méreteit az $x^2/16 + y^2/9 = 1$ ellipszisbe írható maximális területű téglalapnak, amelynek oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel!

12. Legnagyobb kerületű téglalap egy ellipszisben: Mekkorák a méretei az $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ellipszisbe írható legnagyobb kerületű téglalapnak, ha az oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel? Mekkora a kerülete?

13. Szélsőérték egy körön: Mennyi a maximuma és a minimuma az $x^2 + y^2$ kifejezésnek, ha $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$?

14. Szélsőérték egy körön: Mennyi a maximuma és a minimuma az $3x - y + 6$ kifejezésnek, ha $x^2 + y^2 = 4$?

15. Egy hangya egy fémlemezen: Egy fémlemez hőmérsékletét az (x,y) pontban a $T(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$ függvény írja le. Egy hangya egy origó középpontú, 5 sugarú körön sétál. Mekkora a hangya által mért legnagyobb és legkisebb hőmérséklet?

16. Legolcsóbb tároló tartály: A cégünket azzal bízták meg, hogy tervezzen egy benzintartályt. A megrendelő olyan hengeralakot kér, ami félgömbben végződik, és a térfogata 8000 m^3. Az a kívánsága, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen a tartályhoz használni. Milyen sugara és milyen magassága legyen a tartály hengeres részének?

Három független változó, egy feltétel

17. Legkisebb távolság egy ponttól: Adjuk meg az $x + 2y + 3z = 13$ síknak azt a pontját, amelyik legközelebb van az $(1,1,1)$ ponthoz!

18. Legnagyobb távolság egy ponttól: Adjuk meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ gömbön azt a pontot, amelyik legtávolabb van az (1, 1, 1) ponttól!

19. Legkisebb távolság az origótól: Adjuk meg az $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ felület origóhoz legközelebbi pontját!

20. Legkisebb távolság az origótól: Adjuk meg a $z = xy + 1$ felület origóhoz legközelebbi pontját!

21. Legkisebb távolság az origótól: Adjuk meg a $z^2 = xy + 4$ felület origóhoz legközelebbi pontját!

22. Legkisebb távolság az origótól: Adjuk meg az $xyz = 1$ felület origóhoz legközelebbi pontját!

23. Szélsőérték egy gömbön: Adjuk meg az $f(x,y,z) = x - 2y + 5z$ függvény maximumát és minimumát az $x^2 + y^2 + z^2 = 30$ gömbön!

24. Szélsőérték egy gömbön: Adjuk meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ gömb azon pontjait, amelyekben az $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ függvény maximumát, ill. minimumát veszi fel ezen a gömbön!

25. Négyzetösszeg minimalizálása: Adjuk meg azt a három valós számot, amelyeknek összege 9, és a négyzeteik összege a legkisebb!

26. Szorzat maximálása: Mi a legnagyobb értéke a pozitív x, y, z számok szorzatának, ha $x + y + z^2 = 16$?

27. Legnagyobb térfogatú téglatest egy gömbben: Milyen méretei vannak az egységsugarú gömbbe írható maximális térfogatú téglatestnek?

28. Doboz, csúcsával egy síkon: Mekkora lehet a maximális térfogata annak a téglatest alakú doboznak, ami az első térnyolcadban van, három oldala a koordinátasíkokon nyugszik, és egyik csúcsa az $x/a + y/b + z/c = 1$ síkra illeszkedik, ahol $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$?

29. Űrszonda legforróbb pontja: Egy ellipszoid alakú űrszonda felszíne, aminek alakja a

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$$

egyenlettel írható le, felforrósodik, amikor a Föld légkörébe lép. Egy óra múlva az (x,y,z) felületi pont hőmérséklete

$$T(x,y,z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600.$$

Melyik a felület legforróbb pontja?

30. Hőmérséklet szélsőértéke egy gömbön: Tegyük fel, hogy az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gömbfelület (x,y,z) pontjában a hőmérsékletet a $T = 400xyz^2$ függvény írja le Celsius-fokban mérve. Határozzuk meg a legmagasabb és a legalacsonyabb hőmérsékletet a gömbfelületen!

31. Hasznossági függvény maximalizálása: A közgazdaságban a G_1 és G_2 tőkejavakból rendelkezésre álló x és y mennyiség hasznosságát egy $U(x,y)$ függvénnyel, az ún. hasznossági függvénnyel szokták megadni. Pl. G_1 és G_2 lehet két vegyipari alapanyag, amit egy gyógyszergyártó cég használ. $U(x,y)$ adja meg a nyereséget egy termék gyártásánál, aminek az előállítása az alkalmazott technológiától függően különböző mennyiségeket követel az alapanyagokból. A G_1 alapanyag ára egységenként a Ft, a G_2 alapanyagé b Ft, összesen pedig c Ft-ot költhetnek alapanyagra. Ha a cég menedzsere maximalizálni akarja az U függvényt az $ax + by = c$ feltétel mellett, akkor egy tipikus Lagrange-féle multiplikátoros problémát kell megoldania.

Tegyük fel, hogy

$$U(x,y) = xy + 2x$$

és az $ax + by = c$ egyenlet pedig

$$2x + y = 30.$$

Keressük meg U maximumát az adott feltétel mellett!

32. Rádióteleszkóp elhelyezése: Tegyük fel, hogy el kell helyeznünk egy rádióteleszkópot egy újonnan felfedezett bolygón. Az interferencia minimalizálása érdekében oda akarjuk tenni, ahol a leggyengébb a bolygó mágneses mezeje. A bolygó gömb alakú, a sugara 6 egység. Egy olyan koordináta-rendszerben, amelynek origója a bolygó középpontjában van, a mágneses mező erősségét az $M(x,y,z) = 6x - y^2 + xy + 60$ függvény írja le. Hova helyezzük el a rádióteleszkópot?

Szélsőérték két feltétellel

33. Maximalizáljuk az $f(x,y,z) = x^2 + 2y - z^2$ függvényt a $2x - y = 0$ és $y + z = 0$ feltételek mellett!

34. Minimalizáljuk az $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ függvényt az $x + 2y + 3z = 6$ és $x + 3y + 9z = 9$ feltételek mellett!

35. Minimális távolság az origótól: Melyik lesz az $x + y = 6$ és $y + 2z = 12$ síkok metszésvonalának origóhoz legközelebb eső pontja?

36. Maximális érték a metszésvonalon: Mi lesz az $f(x,y,z) = x^2 + 2y - z^2$ függvény maximuma a $2x - y = 0$ és $y + z = 0$ síkok metszésvonalán?

37. Szélsőérték a metszetgörbén: Határozzuk meg az $f(x,y,z) = x^2yz + 1$ függvény szélsőértékeit a $z = 1$ sík és $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ gömb metszésvonalán!

38. Maximum a metszésvonalon:

(a) Mennyi a $w = xyz$ függvény maximuma az $x + y + z = 40$ és $x + y - z = 0$ síkok metszésvonalán?

(b) Adjunk geometriai magyarázatot arra, hogy valóban maximumot és nem minimumot találtunk!

39. Szélsőérték a metszetkörön: Határozzuk meg az $f(x,y,z) = xy + z^2$ függvény szélsőértékeit azon a körön, amelyet az $y - x = 0$ sík metsz ki az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ gömbből!

40. Minimális távolság az origótól: Melyik az origóhoz legközelebb eső pontja a $2y + 4z = 5$ sík és a $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ kúp metszetgörbéjének?

További példák és feladatok

41. A $\nabla f = \lambda \nabla g$ feltétel nem elég: Bár a $\nabla f = \lambda \nabla g$ feltétel szükséges ahhoz, hogy a differenciálható $f(x,y)$ függvénynek szélsőértéke legyen a $g(x,y) = 0$ feltétel mellett (ahol $g(x,y)$ szintén differenciálható), de ez önmagában nem elegendő a szélsőérték létezéséhez. Keressük az $f(x,y) = y - \sin x$ függvény szélsőértékét az $y = x$ feltétel mellett. A $\nabla f = \lambda \nabla g$ egyenlet megoldásai között van a $(0,0)$ pont, ahol $\nabla f = (-1,1)$, az $x - \sin x$ kifejezés viszont a nulla pont környezetében pozitív és negatív értékeket is felvesz. Végezzük el a szükséges számításokat, és ellenőrizzük az állítást.

42. Legközelebbi sík: Keressük azt a $z = Ax + By + C$ síkot, amelyik a „legközelebb" van az (x_k, y_k, z_k) pontokhoz, ha ezek:

$$(0,0,0), \quad (0,1,1), \quad (1,1,1), \quad (1,0,-1).$$

„Legközelebb" olyan értelemben, hogy z koordináták különbségei négyzetének összege az adott (x,y) pontokban minimális. Azaz keressük azon A, B, C értékeket, amelyekre

$$\sum_{k=1}^{4} (Ax_k + By_k + C - z_k)^2$$

minimális.

43. **(a) Maximum egy gömbön:** Mutassuk meg, hogy az $a^2b^2c^2$ kifejezés maximális értéke a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben egy r sugarú, origó középpontú gömbön $(r^2/3)^3$.

(b) Mértani és számtani közép: Az **(a)** rész eredményének felhasználásával mutassuk meg, hogy

$$(abc)^{1/3} \le \frac{a+b+c}{3},$$

azaz három nemnegatív szám mértani közepe mindig kisebb vagy egyenlő a számtani közepüknél!

44. **Szorzatok összege:** Legyen $a_1, a_2, \ldots a_n$ n darab pozitív szám. Határozzuk meg a $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ maximumát a $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ feltétel mellett.

Számítógépes vizsgálatok

A Lagrange-féle multiplikátoros módszer alkalmazása

A 45–50. feladatokban használjunk számítógépes programot a Lagrange-féle multiplikátoros módszer alkalmazására a következő lépések végrehajtásával:

(a) Definiáljuk a $h = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$ függvényt, ahol f szélsőértékét keressük a $g_1 = 0$, $g_2 = 0$ feltételek mellett.

(b) Határozzuk meg h összes parciális deriváltját, természetesen a λ_1-re és λ_2-re vonatkozót is.

(c) Oldjuk meg azt az egyenletrendszert, amit úgy kapunk, hogy a **(b)** részben kapott parciális deriváltakat egyenlővé tesszük nullával.

(d) Számítsuk ki f értékét a **(c)** pontban kapott helyeken, és vizsgáljuk meg valóban szélsőértéket kaptunk-e!

45. Keressük $f(x,y,z) = xy + yz$ minimumát az $x^2 + y^2 - 2 = 0$ és $x^2 + z^2 - 2 = 0$ feltételek mellett!

46. Keressük $f(x,y,z) = xyz$ minimumát az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ és $x - z = 0$ feltételek mellett.

47. Keressük $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ maximumát a $2y + 4z - 5 = 0$ és $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$ feltételek mellett.

48. Keressük $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ minimumát az $x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1 = 0$ és $x^2 + y^2 - 1 = 0$ feltételek mellett.

49. Keressük $f(x,y,z,w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ minimumát a $2x - y + z - w - 1 = 0$ és $x + y - z + w - 1 = 0$ feltételek mellett.

50. Keressük a minimális távolságot az $y = x + 1$ egyenes és az $y^2 = x$ parabola pontjai között. (*Útmutatás*: Legyen (x,y) az egyenes pontja, (w,z) a parabola pontja. Az $(x-w)^2 + (y-z)^2$ függvény minimumát keressük.)

14.9. Feltételes parciális deriváltak

Amikor $w = f(x,y)$ alakú függvények parciális deriváltjait akartuk meghatározni, feltettük, hogy x és y függetlenek. Sok esetben azonban ez nem így van. Például abban az esetben, amikor valamilyen gáz belső energiája kifejezhető, mint $U = f(P,V,T)$ függvénye a P nyomásnak, V térfogatnak és T hőmérsékletnek. Ha a gáz egyes molekulái nincsenek egymással kölcsönhatásban, akkor P, V és T a

$$PV = nRT \quad (n \text{ és } R \text{ konstansok})$$

ideális gáztörvénynek engedelmeskednek, így egyáltalán nem függetlenek. Ebben az alfejezetben megmutatjuk, hogyan kell ilyen esetben parciális deriváltat számolni, amit azután kamatoztathatunk a közgazdasági, mérnöki, vagy éppen fizikai tanulmányaink során.[2]

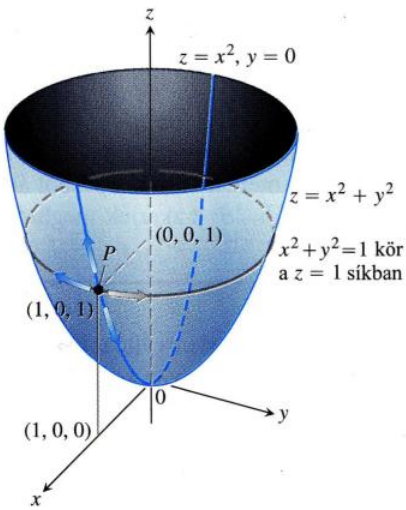
Döntsük el, mely változók függők, melyek függetlenek

Ha egy $w = f(x,y,z)$ függvény változói egy egyenlőséggel vannak korlátozva, mint pl. $z = x^2 + y^2$, a parciális deriváltak geometriai jelentései és numerikus értékei attól függnek, melyek változókat választunk függő, és melyeket választunk független változóknak. Hogy lássuk, ez a választás mennyire befolyásolja az eredményeket, tekintsük a $\partial w/\partial x$ deriváltat, ha $w = x^2 + y^2 + z^2$ és $z = x^2 + y^2$.

1. PÉLDA: **Parciális derivált meghatározása korlátozott független változók esetén**

Határozzuk meg a $\partial w/\partial x$ deriváltat, ha $w = x^2 + y^2 + z^2$ és $z = x^2 + y^2$.

[2]Ez a rész Arthur P. Mattuck feljegyzésein alapul, amit az MIT-nak írt.



14.58. ÁBRA: Ha a P pontnak a $z = x^2 + y^2$ paraboloidon kell lennie, a $w = x^2 + y^2 + z^2$ függvény x szerinti deriváltja P-ben a mozgás irányától függ (1. példa). **(a)** Ha x úgy változik, hogy $y = 0$, akkor a pont fel vagy le mozog a $z = x^2$ parabolán az xz-síkban, és $\partial w/\partial x = 2x + 4x^3$. **(b)** Ha x úgy változik, hogy közben $z = 1$, akkor P az $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ körön mozog, és $\partial w/\partial x = 0$.

Megoldás: Két egyenletünk van és négy ismeretlenünk: x, y, z és w. Mint sok más hasonló egyenletrendszert, ezt is meg lehet oldani két változóra (a függő változókra) a másik kettő (a független változók) függvényében. Mivel a kérdés $\partial w/\partial x$, w szükségképpen függő változó, x pedig független változó. A többi változó lehetséges választásai:

függő	*független*
w, z	x, y
w, y	x, z

Bármelyik esetet is nézzük, w-t kifejezhetjük a választott független változókkal. A második egyenlet segítségével kiküszöböljük a függő változónak választott változót az elsőből.

Az első esetben a függő változó z. Az első egyenletből úgy küszöböljük ki, hogy helyettesítjük $x^2 + y^2$-tel.

$$w = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2$$
$$= x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

és

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 4x^3 + 4xy^2. \tag{14.22}$$

Ez a képletete $\partial w/\partial x$-nek, ha x és y a független változók.

A második esetben, ahol x és z a független változók, a másik függő változó az y. Az y függő változót úgy küszöböljük ki w kifejezéséből, hogy a második egyenletből y^2-et kifejezzük, és beírjuk w kifejezésébe:

$$w = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (z - x^2) + z^2 = z + z^2$$

és

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0. \tag{14.23}$$

Ez a képlete $\partial w/\partial x$-nek, ha x és z a független változók.

A $\partial w/\partial x$-re (14.22)-ben és (14.23)-ban kapott kifejezések lényegesen különbözőek. Egyiket sem kaphatjuk meg a másikból a $z = x^2 + y^2$ összefüggéssel. Vajon melyik a jó?

A (14.22) és (14.23) egyenlőségeknek geometriai szemléltetése megmagyarázza, miért különböznek. A $w = x^2 + y^2 + z^2$ függvény az (x, y, z) pont origótól vett távolságának négyzete. A $z = x^2 + y^2$ feltételnek eleget tevő pontok egy forgásparaboloidon vannak (14.58. ábra). Mit jelent a $\partial w/\partial x$ derivált a $P(x, y, z)$ pontban, ami csak ezen a felületen mozoghat? Mi az értéke $\partial w/\partial x$-nek pl. az (1, 0, 1) pontban?

Ha az x és y változókat tekintjük független változóknak, akkor $\partial w/\partial x$ számításánál az y rögzített (ebben az esetben $y = 0$) és x a változó. Következésképp P a zx-síkban a $z = x^2$ parabola mentén mozog. Amikor P ezen a parabolán mozog, a w, ami a pont origótól vett távolságának négyzete, változik. Ebben az esetben $\partial w/\partial x$-et úgy számoljuk, ahogy a megoldás első esetében,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 4x^3 + 4xy^2.$$

A $P(1, 0, 1)$ pontban ennek a deriváltnak az értéke

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2 + 4 + 0 = 6.$$

Ha x és z a független változók, akkor $\partial w/\partial x$ számításánál z rögzített, miközben x változik. Mivel a P pont z koordinátája 1, a P pont egy egységsugarú kör mentén mozog a $z = 0$ síkban, így az origótól vett távolsága állandó, tehát ennek négyzete, w is állandó. Azaz

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

ahogy azt a második esetben láttuk. □

Hogyan számítsuk ki a $w = f(x,y,z)$ függvény $\partial w/\partial x$ parciális deriváltját, ha a független változók egyenlőségekkel vannak korlátozva?

Ahogy azt az 1. példában láttuk, a $w = f(x,y,z)$ függvény $\partial w/\partial x$ parciális deriváltjának kiszámítása egyéb korlátozó egyenlőségek mellett három lépésből áll. Ezeket kell végrehajtani akkor is, ha $\partial w/\partial y$-t vagy $\partial w/\partial z$-t akarjuk meghatározni.

1. *Határozzuk el*, mely változók legyenek a független változók. (A valóságban ez a döntés attól függ, hogy a függvény hogyan kapcsolódik egy konkrét fizikai vagy elméleti problémához. Az alfejezet végén, a feladatokban mindig megadjuk, melyik változó milyen legyen.)

2. *Küszöböljük ki* a többi függő változót a w függvényből.

3. *Deriváljunk*, mint máskor.

Ha a 2. lépést nem tudjuk végrehajtani, ami gyakran előfordul, akkor az összes egyenletet deriváljuk, szem előtt tartva, hogy melyek a függő, melyek a független változók. A kapott összefüggésekből megpróbáljuk kiküszöbölni a függő változókat, ahogy azt a következő példa mutatja.

2. PÉLDA: **Parciális derivált meghatározása egyenlőséggel korlátozott, adott független változók esetén**

Határozzuk meg $\partial w/\partial x$-et az $(x,y,z) = (2,-1,1)$ pontban, ha

$$w = x^2 + y^2 + z^2, \quad z^3 - xy + yz + y^3 = 1,$$

a független változók pedig legyenek x és y.

Megoldás: Rendkívül bonyolult lenne valahogy kiküszöbölni z-t a w függvényből. Deriváljuk mindkét összefüggést x szerint, szem előtt tartva, hogy x és y a független változók, w és z a függő változók. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} \tag{14.24}$$

és

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x} - y + y\frac{\partial z}{\partial x} + 0 = 0. \tag{14.25}$$

Ezekkel az egyenlőségekkel már ki tudjuk fejezni $\partial w/\partial x$-et, mint x, y és z függvényét. A (14.25) egyenletből kifejezzük $\partial z/\partial x$-et, mint

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{y + 3z^2},$$

majd a (14.24) egyenlőségbe helyettesítjük:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + \frac{2yz}{y + 3z^2}.$$

Ennek a deriváltnak az értéke az $(x,y,z) = (2,-1,1)$ pontban

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{(2,-1,1)} = 2(2) + \frac{2(-1)(1)}{-1 + 3(1)^2} = 4 + \frac{-2}{2} = 3. \qquad \square$$

Jelölés

Ha ki akarjuk fejezni, hogy a deriválásnál milyen változókat tekintünk függetlennek, használhatjuk a következő jelölésmódot:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y \qquad \partial w/\partial x, \quad x \text{ és } y \text{ független változók},$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,t} \qquad \partial f/\partial y, \quad y, x \text{ és } t \text{ független változók}.$$

3. PÉLDA: **Parciális deriváltak meghatározása olyan korlátozott változók szerint, amelyeket jelöléssel azonosítottunk**

Határozzuk meg $(\partial w/\partial x)_{y,z}$-t, ha $w = x^2 + y - z + \sin t$ és $x + y = t$.

Megoldás: Ha x, y, z a független változók, akkor

$$\begin{aligned} t &= x+y, \quad w = x^2 + y - z + \sin(x+y) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} &= 2x + 0 - 0 + \cos(x+y)\frac{\partial}{\partial x}(x+y) \\ &= 2x + \cos(x+y). \end{aligned}$$

□

Nyíl-diagramok

Ha egy olyan feladatot kell megoldanunk, mint amilyen a 3. példában szerepel, akkor célszerű egy nyíl-diagrammal kezdeni, hogy jól lássuk, milyen kapcsolatban vannak a változók és a függvények. Ha

$$w = x^2 + y - z + \sin t \quad \text{és} \quad x + y = t,$$

és $\partial w/\partial x$-et kell meghatároznunk, ahol x, y és z független változók, akkor a diagram a következő:

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longrightarrow & w. \\ \text{független változók} & & \text{közbülső változók} & & \text{függő változó} \end{array} \tag{14.26}$$

Ha el akarjuk kerülni a zavart, amit az okoz, hogy a független változókat és a közbülső változókat is ugyanazokkal a betűkkel jelöljük, akkor átnevezzük a közbülső változókat (azaz látszódjanak úgy, mint a független változók függvényei). Legyenek $u = x$, $v = y$, $s = z$ az átnevezett közbülső változók. Ezzel a jelöléssel a nyíl-diagram a következő:

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} u \\ v \\ s \\ t \end{pmatrix} & \longrightarrow & w. \\ \text{független változók} & & \begin{array}{c}\text{közbülső változók és kapcsolatok} \\ u = x \\ v = y \\ s = z \\ t = x + y\end{array} & & \text{függő változó} \end{array} \tag{14.27}$$

A diagram a független változókat a bal oldalon, a közbülső változókat a kapcsolataikkal középen, a függő változót a jobb oldalon mutatja. Így a w függvény most

$$w = u^2 + v - s + \sin t,$$

ahol

$$u = x, \quad v = y, \quad s = z, \quad t = x + y.$$

A $\partial w/\partial x$ parciális derivált meghatározásához a négyváltozós láncszabályt alkalmazzuk a w függvényre, követve a (14.27) nyíl-diagramot:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} \\ &= (2u)(1) + (1)(0) + (-1)(0) + (\cos t)(1) \\ &= 2u + \cos t \\ &= 2x + \cos(x+y). \quad \text{Behelyettesítve az eredeti független változókat}\end{aligned}$$

14.9. Feladatok

Parciális deriváltak meghatározása korlátozott változók szerint

Az 1–3. feladatokat kezdjük azzal, hogy diagramot rajzolunk, ami megmutatja a kapcsolatot a változók között!

1. Ha $w = x^2 + y^2 + z^2$ és $z = x^2 + y^2$, adjuk meg az

(a) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_z$ **(b)** $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_x$ **(c)** $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_y$

parciális deriváltakat!

2. Ha $w = x^2 + y - z + \sin t$ és $x + y = t$, adjuk meg a

(a) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,z}$ **(b)** $\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_{z,t}$ **(c)** $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y}$

(d) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_{y,t}$ **(e)** $\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)_{x,z}$ **(f)** $\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)_{y,z}$

parciális deriváltakat!

3. Legyen $U = f(P,V,T)$ a belső energiája egy olyan gáznak, amelyik eleget tesz a $PV = nRT$ ideális gáztörvénynek (n, és R állandók). Adjuk meg a

(a) $\left(\dfrac{\partial U}{\partial P}\right)_V$ **(b)** $\left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V$

parciális deriváltakat!

4. Adjuk meg a

(a) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ **(b)** $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_y$

parciális deriváltakat az $(x,y,z) = (0,1,\pi)$ pontban, ha $w = x^2 + y^2 + z^2$ és $y\sin z + z\sin x = 0$.

5. Adjuk meg a

(a) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_x$ **(b)** $\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_z$

parciális deriváltakat a $(w,x,y,z) = (4,2,1,-1)$ pontban, ha $w = x^2y^2 + yz - z^3$ és $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

6. Mennyi $(\partial u/\partial y)_x$ az $(u,v) = (\sqrt{2},1)$ pontban, ha $x = u^2 + v^2$ és $y = uv$?

7. Tegyük fel, hogy $x^2 + y^2 = r^2$ és $x = r\cos\theta$, mint polárkoordinátákkal. Határozzuk meg a

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta \quad \text{és} \quad \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y$$

parciális deriváltakat!

8. Tegyük fel, hogy

$$w = x^2 - y^2 + 4z + t \quad \text{és} \quad x + 2z + t = 25.$$

Mutassuk meg, hogy a

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x - 1 \quad \text{és} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 2x - 2$$

kifejezések mindegyike $\partial w/\partial x$-et adja, attól függően, hogy melyik változókat választjuk függetlennek! Adjuk meg a független változókat mindkét esetben!

Parciális deriváltak adott képletek nélkül

9. Bizonyítsuk be azt a hidrodinamikában gyakran használt azonosságot, hogy ha $f(x,y,z) = 0$, akkor

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.$$

(*Útmutatás:* Fejezzük ki az összes deriváltat formálisan a $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ deriváltakkal.)

10. Mutassuk meg, ha $z = x + f(u)$, ahol $u = xy$, akkor

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

11. Tegyük fel, hogy a $g(x,y,z) = 0$ egyenlet z-t, mint az x, y független változók differenciálható függvényét határozza meg, és $g_z \neq 0$. Mutassuk meg, hogy

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -\frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial z}.$$

12. Tegyük fel, hogy az $f(x,y,z,w) = 0$ és $g(x,y,z,w) = 0$ egyenletek z-t és w-t, mint az x, y független változók differenciálható függvényeit határozzák meg, és tegyük fel, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial z} \neq 0.$$

Mutassuk meg, hogy

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial z}}$$

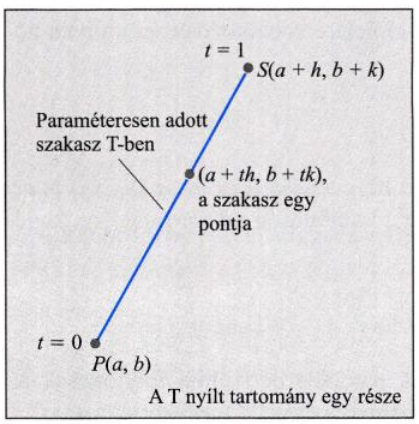
és

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial z}}.$$

14.10. Kétváltozós Taylor-formula

Ebben az alfejezetben a kétváltozós Taylor-formula segítségével levezetjük a lokális szélsőértékre vonatkozó 11. Tételt (szélsőérték létezésének ellenőrzése második parciális deriváltakkal) és a kétváltozós függvények linearizációjára vonatkozó hibaképletet. A Taylor-formula használata ezekben a levezetésekben elvezet minket a formula egy olyan kiterjesztéséhez, ami lehetővé teszi kétváltozós függvény bármilyen fokszámú polinommal való közelítését.

A 11. Tétel levezetése (szélsőérték létezésének ellenőrzése második parciális deriváltakkal)



14.59. ÁBRA: A $P(a,b)$-beli második deriváltakkal való szélsőértékvizsgálat szabályának levezetését a P pontot a közeli S ponttal összekötő szakasz parametrizálásával kezdjük.

Legyenek $f(x,y)$ második parciális deriváltjai folytonosak egy olyan nyílt T tartományon, amelynek pontja $P(a,b)$, ahol $f_x = f_y = 0$ (14.59. ábra). Legyenek a h és k értékek olyan kicsik, hogy az $S(a+h,b+k)$ pontot P-vel összekötő szakasz teljes egészében T-ben haladjon. Paraméterezzük a PS szakaszt, mint

$$x = a+th, \quad y = b+tk, \quad 0 \le t \le 1.$$

Ha $F(t) = f(a+th,b+tk)$, a láncszabályból következik, hogy

$$F'(t) = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = h\,f_x + k\,f_y.$$

Mivel f_x és f_y differenciálhatók (folytonos parciális deriváltjaik vannak), F' a t-nek differenciálható függvénye, és

$$F'' = \frac{\partial F'}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F'}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}(hf_x + kf_y)\cdot h + \frac{\partial}{\partial y}(hf_x + kf_y)\cdot k$$
$$= h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}. \qquad f_{xy} = f_{yx}$$

Mivel F és F' folytonosak $[0,1]$-en, és F' differenciálható $(0,1)$-en, alkalmazhatjuk a Taylor-formulát $n = 2$ és $a = 0$ esetre:

$$\begin{aligned} F(1) &= F(0) + F'(0)(1-0) + F''(c)\tfrac{(1-0)^2}{2} \\ F(1) &= F(0) + F'(0) + \tfrac{1}{2}F''(c) \end{aligned} \tag{14.28}$$

valamilyen c értékre 0 és 1 között. Beírva a (14.28) képletbe az f kifejezéseit

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + hf_x(a,b) + kf_y(a,b) + \\ + \frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}\right)\Big|_{(a+ch,b+ck)}. \tag{14.29}$$

Mivel $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$, ez

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy})\Big|_{(a+ch,b+ck)} \tag{14.30}$$

alakúra egyszerűsödik. Az f függvény szélsőértékének létezése az (a,b) pontban $f(a+h,b+k) - f(a,b)$ előjelétől függ. A (14.30) egyenlet szerint ez megegyezik

$$Q(c) = (h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy})\Big|_{(a+ch,b+ck)}$$

előjelével. Mivel Q folytonos, ha $Q(0) \neq 0$, akkor $Q(c)$ előjele egy alkalmas kicsiny környezetben megegyezik $Q(0)$ előjelével.

$$Q(0) = h^2 f_{xx}(a,b) + 2hkf_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b) \tag{14.31}$$

előjelét pedig többnyire meg tudjuk mondani f_{xx} és $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ előjeléből az (a,b) pontban. Szorozzuk be a (14.31) egyenlőség mindkét oldalát f_{xx}-szel és rendezzük át:

$$f_{xx}Q(0) = (hf_{xx} + kf_{xy})^2 + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)k^2. \tag{14.32}$$

A (14.32) egyenlőségből láthatjuk, hogy

1. Ha $f_{xx} < 0$ és $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ az (a,b) pontban, akkor elegendően kicsiny, de nem nulla h-ra és k-ra $Q(0) < 0$, így f-nek lokális maximuma van (a,b)-ben.

2. Ha $f_{xx} > 0$ és $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ az (a,b) pontban, akkor elegendően kicsiny, de nem nulla h-ra és k-ra $Q(0) > 0$, így f-nek lokális minimuma van (a,b)-ben.

3. Ha $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ az (a,b) pontban, akkor h-ra és k-ra mindig lehet olyan értékpárokat találni, hogy azok tetszőlegesen közel legyenek a nullához, és egyikre $Q(0) > 0$, a másikra $Q(0) < 0$. Tehát a $z = f(x,y)$ felület $P_0(a,b,f(a,b))$ pontjához tetszőlegesen közel vannak a felületen olyan P pontok, amelyek magasabban vannak, mint P_0, és vannak olyanok, amelyek alacsonyabban vannak, itt tehát f-nek nyeregpontja van.

4. Ha $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$, akkor más vizsgálatra van szükségünk. Ha $Q(0)$ lehet nulla is, akkor nem tudunk $Q(c)$ előjelére vonatkozóan semmilyen következtetést levonni.

A lineáris közelítés hibaképlete

Azt akarjuk bebizonyítani, hogy az $f(x,y)$ függvényértékek és az (x_0,y_0) pontbeli $L(x,y)$ linearizáció értékei közötti $E(x,y)$ különbség a T tartományon kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

$$|E(x,y)| \le \frac{1}{2}M(|x-x_0|+|y-y_0|)^2,$$

feltéve, hogy az f függvénynek második parciális deriváltjai folytonosak az (x_0,y_0) középpontú téglalap alakú T tartományon, és itt M felső korlátja az $|f_{xx}|$, $|f_{yy}|$, $|f_{xy}|$ függvényeknek.

Az egyenlőtlenséget a (14.29) egyenletből kapjuk. Ha a és b helyébe x_0-at, ill. y_0-at, h és k helyébe pedig $(x-x_0)$-at, ill. $(y-y_0)$-at írunk, akkor

$$f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{L(x,y)\text{ linearizáció}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\left((x-x_0)^2 f_{xx} + 2(x-x_0)(y-y_0)f_{xy} + (y-y_0)^2 f_{yy}\right)\Big|_{(x_0+c(x-x_0),y_0+c(y-y_0))}}_{E(x,y)\text{ hiba}}.$$

Ebből az egyenletből

$$|E| \le \frac{1}{2}\left(|x-x_0|^2|f_{xx}| + 2|x-x_0||y-y_0||f_{xy}| + |y-y_0|^2|f_{yy}|\right)$$

következik, és ha M az $|f_{xx}|$, $|f_{yy}|$, $|f_{xy}|$ függvényeknek felső korlátja a T-n, akkor

$$\begin{aligned}|E| &\le \frac{1}{2}\left(|x-x_0|^2 M + 2|x-x_0||y-y_0|M + |y-y_0|^2 M\right)\\ &= \frac{1}{2}M(|x-x_0|+|y-y_0|)^2.\end{aligned}$$

Kétváltozós függvények Taylor-formulája

Az F'-re és F''-re levezetett képleteket megkaphatjuk úgy is, ha $f(x,y)$-ra alkalmazzuk a

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{és} \quad \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

operátort. Ez az első két tagja egy sokkal általánosabb képletnek:

$$F^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}F(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y), \tag{14.33}$$

ami azt mutatja, hogy d^n/dt^n-t alkalmazva $F(t)$-re ugyanazt az eredményt adja, mint a

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$$

operátor alkalmazása $f(x,y)$-ra, miután kifejtettük a binomiális tétel szerint.

Ha f parciális deriváltjai egészen az $n+1$-ikig folytonosak egy (a,b) középpontú téglalapon, akkor a Taylor-formulát felírva $F(t)$-re

$$F(t)=F(0)+F'(0)t+\frac{F''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n+\text{maradéktag}$$

és a $t=1$ helyen

$$F(t)=F(0)+F'(0)+\frac{F''(0)}{2!}+\cdots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}+\text{maradéktag}.$$

Ha a jobboldalon az első n deriváltat a (14.33) egyenlet alapján a $t=0$ helyen vett, velük ekvivalens tagokkal helyettesítjük, akkor a következő formulát kapjuk:

A kétváltozós $f(x,y)$ függvény Taylor-formulája az (a,b) pontban

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)=f(a,b)+(hf_x+kf_y)|_{(a,b)}+\frac{1}{2!}(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy})|_{(a,b)}+\\+\frac{1}{3!}(h^3f_{xxx}+3h^2kf_{xxy}+3hk^2f_{xyy}+k^3f_{yyy})|_{(a,b)}+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\Big|_{(a,b)}+\\+\frac{1}{(n+1)}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Big|_{(a+ch,b+ck)}\end{aligned}\tag{14.34}$$

Az első n derivált az (a,b) pontban van számolva, Az utolsó tag pedig az $(a+h,b+k)$ pontot az (a,b) ponttal összekötő szakasznak egy $(a+ch,b+ck)$ pontjában.

Ha $(a,b)=(0,0)$, valamint h és k a független változók (most x-szel és y-nal jelölve), akkor a (14.34) kifejezés a következő egyszerűbb alakba írható:

A kétváltozós $f(x,y)$ függvény Taylor-formulája a $(0,0)$-ban

$$\begin{aligned}f(x,y)=f(0,0)+(xf_x+yf_y)\Big|_{(0,0)}+\frac{1}{2!}(x^2f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2f_{yy})\Big|_{(0,0)}+\\+\frac{1}{3!}(x^3f_{xxx}+3x^2yf_{xxy}+3xy^2f_{xyy}+y^3f_{yyy})\Big|_{(0,0)}+\cdots+\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\Big|_{(0,0)}+\\+\frac{1}{(n+1)}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Big|_{(cx,cy)}\end{aligned}\tag{14.35}$$

Az első n derivált a $(0,0)$ pontban van számolva, Az utolsó tag pedig az (x,y) *pontot a $(0,0)$ ponttal összekötő szakasznak egy (cx,cy) pontjában.*

A Taylor-formula lehetővé teszi, hogy kétváltozós függvényeket polinomokkal közelítsünk. Az első n derivált a polinom együtthatóit adja, az utolsó tag a közelítés hibáját. Az első három tag a függvény linearizációja, és a lineáris közelítés javítása érdekében magasabb fokú tagokat adunk hozzá.

1. PÉLDA: **Négyzetes közelítés meghatározása**

Adjuk meg az $f(x,y)=\sin x\sin y$ függvény négyzetes közelítését az origó közelében. Milyen pontos a közelítés, ha $|x|\le 0{,}1$, $|y|\le 0{,}1$?

Megoldás: Ha a (14.35) egyenlőséget felírjuk az $n=2$ esetre:

$$f(x,y)=f(0,0)+(xf_x+yf_y)+\frac{1}{2}(x^2f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2f_{yy})+$$
$$+\frac{1}{6}(x^3f_{xxx}+3x^2yf_{xxy}+3xy^2f_{xyy}+y^3f_{yyy})|_{(cx,cy)},$$

ahol

$$f(0,0)=\sin x\sin y|_{(0,0)}=0, \qquad f_{xx}(0,0)=-\sin x\sin y|_{(0,0)}=0,$$
$$f_x(0,0)=\cos x\sin y|_{(0,0)}=0, \qquad f_{xy}(0,0)=\cos x\cos y|_{(0,0)}=1,$$
$$f_y(0,0)=\sin x\cos y|_{(0,0)}=0, \qquad f_{yy}(0,0)=-\sin x\sin y|_{(0,0)}=0,$$

és így

$$\sin x\sin y\approx 0+0+0+\frac{1}{2}(x^2\cdot 0+2xy\cdot 1+y^2\cdot 0),$$
$$\sin x\sin y\approx xy.$$

A közelítés hibája pedig

$$E(x,y)=\frac{1}{6}(x^3f_{xxx}+3x^2yf_{xyy}+3xy^2f_{xyy}+y^3f_{yyy})|_{(cx,cy)}.$$

A harmadik deriváltak sosem többek, mint 1, hiszen szinuszok és koszinuszok szorzatai. Ezen kívül $|x|\le 0{,}1$ és $|y|\le 0{,}1$. Tehát

$$|E(x,y)|\le\frac{1}{6}((0,1)^3+3(0,1)^3+3(0,1)^3+(0,1)^3)=\frac{8}{6}(0,1)^3\le 0{,}00134$$

(kerekítve). A hiba nem nagyobb, mint 0,00134, ha $|x|\le 0{,}1$ és $|y|\le 0{,}1$. □

14.10. Feladatok

Négyzetes és köbös közelítés meghatározása

Az 1–10. feladatokban adjuk meg az $f(x,y)$ függvény négyzetes vagy köbös közelítését a Taylor-formula segítségével az origó környezetében!

1. $f(x,y)=xe^y$ **2.** $f(x,y)=e^x\cos y$

3. $f(x,y)=y\sin x$ **4.** $f(x,y)=\sin x\cos y$

5. $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$ **6.** $f(x,y)=\ln(2x+y+1)$

7. $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ **8.** $f(x,y)=\cos(x^2+y^2)$

9. $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y}$ **10.** $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y+xy}$

11. Írjuk fel az $f(x,y)=\cos x\cos y$ függvény négyzetes közelítését az origóban a Taylor-formula segítségével. Becsüljük meg a hibát, ha $|x|\le 0{,}1$ és $|y|\le 0{,}1$.

12. Írjuk fel az $f(x,y)=e^x\sin y$ függvény négyzetes közelítését az origóban a Taylor-formula segítségével. Becsüljük meg a hibát, ha $|x|\le 0{,}1$ és $|y|\le 0{,}1$.

14. fejezet Áttekintő kérdések

1. Mit nevezünk kétváltozós valós értékű függvénynek? Háromváltozósnak? Adjunk példákat!

2. Mit nevezünk nyílt halmaznak a síkban? És a térben? Adjunk példákat olyan halmazokra, amelyek se nem nyíltak, se nem zártak!

3. Hogyan szemléltethetjük egy kétváltozós függvény értékeit grafikusan? Hogyan tehetjük ezt meg háromváltozós függvény esetében?

4. Mit jelent, hogy $f(x,y)$ határértéke L, ha $(x,y)\to(x_0,y_0)$? Mik a kétváltozós függvényhatárérték legfontosabb tulajdonságai?

5. Mikor nevezünk egy két-, ill. háromváltozós függvényt folytonosnak az értelmezési tartományának egy pontjában? Adjunk példát olyan függvényekre, amelyek bizonyos pontokban folytonosak, másokban viszont nem!

6. Mit mondhatunk folytonos függvények algebrai kifejezéseiről és a folytonos függvényekből összetett függvényekről?

7. Ismertessük a két úton való közelítés módszerét a határérték nemlétezésének kimutatására!

8. Hogyan definiáljuk az $f(x,y)$ függvény $\partial f/\partial x$ és $\partial f/\partial y$ parciális deriváltjait? Mi a geometriai jelentésük, és hogyan számítjuk ezeket?

9. Mi a különbség a között a kapcsolat között, ami egy kétváltozós függvény parciális deriváltjainak létezése és a függvény folytonossága között fennáll, ahhoz a kapcsolathoz képest, ami egy egyváltozós függvény deriváltjának létezése és folytonossága között fennáll? Adjunk példát!

10. Hogyan szól a vegyes parciális deriváltakról szóló tétel? Miben segíthet ez nekünk, ha magasabbrendű vegyes parciális deriváltakat akarunk számítani?

11. Mikor differenciálható egy $f(x,y)$ függvény?

12. Hogyan lehet olykor az f_x, f_y parciális deriváltak vizsgálatával következtetni az f függvény differenciálhatóságára? Mi a kapcsolat egy f függvény differenciálhatósága és folytonossága között egy pontban?

13. Mi a láncszabály? Mi az alakja kétváltozós függvény esetén? Háromváltozós esetén? Felületen definiált függvények esetén? Milyen diagramot készítünk ezekhez az alakokhoz?

14. Mi az $f(x,y)$ függvény deriváltja egy P_0 pontban, egy $\mathbf{u}$ egységvektor irányában? Minek az arányát adja meg? Mi a geometriai szemléltetése? Adjunk példákat!

15. Mi a gradiense egy differenciálható $f(x,y)$ függvénynek egy P pontban? Milyen kapcsolatban van az iránymenti deriválttal? Mondjuk ki az analóg állításokat háromváltozós függvényekre is!

16. Hogyan határozzuk meg egy differenciálható $f(x,y)$ függvény szintvonalának érintőjét egy adott pontjában? Hogyan határozzuk meg az érintősíkot és a normálegyenest egy $f(x,y,z)$ differenciálható függvény szintfelületének egy adott pontjában?

17. Hogyan használjuk az iránymenti deriváltat a változás becslésére?

18. Hogyan linearizálunk egy kétváltozós $f(x,y)$ függvényt egy (x_0,y_0) pontban? Miért lehet erre szükségünk? Hogyan járunk el három változó esetében?

19. Mit mondhatunk a lineáris közelítés pontosságáról két változó esetében? És háromében?

20. Ha (x,y) elmozdul (x_0,y_0)-ból egy közeli (x_0+dx,y_0+dy) pontba, hogyan becsüljük meg egy differenciálható $f(x,y)$ függvény megváltozását? Adjunk példát!

21. Hogyan definiáljuk egy kétváltozós $f(x,y)$ függvény maximumát, minimumát, nyeregpontját? Adjunk példákat!

22. A deriváltaknak milyen vizsgálatai segítenek megtalálni egy $f(x,y)$ függvény szélsőértékeit? Hogyan? Adjunk példákat!

23. Hogyan találjuk meg egy $f(x,y)$ folytonos függvény maximumát és minimumát egy korlátos, zárt tartományán az xy-síknak?

24. Írjuk le a Lagrange-féle multiplikátoros eljárást és adjunk példát!

25. Ha $w=f(x,y,z)$, ahol az x, y, z változók a $g(x,y,z)=0$ egyenlettel vannak korlátozva, akkor mit jelent a $(\partial w/\partial x)_y$ jelölés? Hogyan segíthet egy nyíl-diagram a deriválásnál? Adjunk példát!

26. Hogyan adja egy $f(x,y)$ függvény Taylor-polinomja a függvény közelítését, és hogyan tudjuk a hibát becsülni?

14. fejezet Gyakorló feladatok

Értelmezési tartomány, értékkészlet, szintvonalak

Az 1–4. feladatokban határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát, értékkészletét, a szintvonalak alakját! Vázoljunk fel egy jellegzetes szintvonalat!

1. $f(x,y)=9x^2+y^2$ **2.** $f(x,y)=e^{x+y}$

3. $g(x,y)=1/xy$ **4.** $g(x,y)=\sqrt{x^2-y}$

Az 5–8. feladatokban határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát, értékkészletét, szintfelületének alakját. Vázoljunk fel egy jellegzetes szintfelületet!

5. $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$

6. $g(x,y,z)=x^2+4y^2+9z^2$

7. $h(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

8. $k(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2+1}$

Határértékek meghatározása

A 9–14. feladatokban határozzuk meg a határértékeket!

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,\ln 2)} e^y\cos x$ **10.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2+y}{x+\cos y}$

11. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x-y}{x^2-y^2}$ **12.** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^3y^3-1}{xy-1}$

13. $\lim\limits_{P\to(1,-1,e)} \ln|x+y+z|$ **14.** $\lim\limits_{P\to(1,-1,-1)} \operatorname{arctg}|x+y+z|$

Különböző utakon közelítve az adott ponthoz, mutassuk meg, hogy a határérték nem létezik (15–16. feladatok)!

15. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y\neq x^2}} \dfrac{y}{x^2-y}$ **16.** $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} \dfrac{x^2+y^2}{xy}$

17. Folytonos kiterjesztés: Ha $(x,y)\neq(0,0)$, legyen $f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$. Definiálható-e $f(0,0)$ úgy, hogy az f függvény folytonos legyen az origóban?

18. Folytonos kiterjesztés: Legyen

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-y)}{|x|+|y|}, & \text{ha } |x|+|y|\neq 0\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Folytonos az f függvény az origóban? Miért?

Parciális deriváltak

A 19–24. feladatokban határozzuk meg a függvény parciális deriváltjait minden változója szerint!

19. $g(r,\theta)=r\cos\theta+r\sin\theta$

20. $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

21. $f(R_1,R_2,R_3) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

22. $h(x,y,z) = \sin(2\pi x + y - 3z)$

23. $P(n,R,T,V) = \frac{nRT}{V}$ (ideális gáztörvény)

24. $f(r,l,T,w) = \frac{1}{2rl}\sqrt{\frac{T}{\pi w}}$

Másodrendű parciális deriváltak

A 25–28. feladatokban határozzuk meg a függvény másodrendű parciális deriváltjait minden változója szerint!

25. $g(x,y) = y + \frac{x}{y}$ **26.** $g(x,y) = e^x + y\sin x$

27. $f(x,y) = x + xy - 5x^3 + \ln(x^2+1)$

28. $f(x,y) = y^2 - 3xy + \cos y + 7e^y$

Láncszabály

29. Mennyi dw/dt $t=0$ esetén, ha $w = \sin(xy+\pi)$, $x = e^t$ és $y = \ln(t+1)$?

30. Mennyi dw/dt $t=1$ esetén, ha $w = xe^y + y\sin z - \cos z$, $x = 2\sqrt{t}$, $y = t - 1 + \ln t$ és $z = \pi t$?

31. Mennyi $\partial w/\partial r$ és $\partial w/\partial s$, $r=\pi$ és $s=0$ esetén, ha $w = \sin(2x-y)$, $x = r + \sin s$, $y = rs$?

32. Mennyi $\partial w/\partial u$ és $\partial w/\partial v$, $u = v = 0$ esetén, ha $w = \ln\sqrt{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$ és $x = 2e^u\cos v$?

33. Adjuk meg az $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ függvény t-szerinti deriváltját az $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos 2t$ görbe mentén a $t = 1$ paraméterű pontban!

34. Mutassuk meg, ha $w = f(s)$ az s változó differenciálható függvénye és $s = y + 5x$, akkor

$$\frac{\partial w}{\partial x} - 5\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Implicit differenciálás

A 35–36. feladatokban feltesszük, hogy y az x változó differenciálható függvénye. Határozzuk meg a dy/dx deriváltat a P pontban!

35. $1 - x - y^2 - \sin xy = 0$, $P(0,1)$

36. $2xy + e^{x+y} - 2 = 0$, $P(0,\ln 2)$

Iránymenti derivált

A 37–40. feladatokban adjuk meg azt az irányt, amelyik irányban f a leggyorsabban csökken a P_0 pontban, és adjuk is meg az iránymenti deriváltat ebben az irányban! Adjuk meg az iránymenti deriváltat az adott $\mathbf{v}$ vektor irányában is!

37. $f(x,y) = \cos x\cos y$, $P_0(\pi/4,\pi/4)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

38. $f(x,y) = x^2e^{-2y}$, $P_0(1,0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

39. $f(x,y,z) = \ln(2x+3y+6z)$, $P_0(-1,-1,1)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

40. $f(x,y,z) = x^2 + 3xy - z^2 + 2y + z + 4$, $P_0(0,0,0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

41. Derivált a sebességvektor irányában: Adjuk meg az $f(x,y,z) = xyz$ függvény iránymenti deriváltját az

$$\mathbf{r}(t) = (\cos 3t)\mathbf{i} + (\sin 3t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$$

csavarvonal sebességvektora irányában a $t = \pi/3$ paraméterű pontban!

42. Maximális iránymenti derivált: Mi a legnagyobb értéke az $f(x,y,z) = xyz$ függvény iránymenti deriváltjainak az (1, 1, 1) pontban?

43. Adott értékű iránymenti derivált: Az (1, 2) pontban az $f(x,y)$ függvény iránymenti deriváltja a (2, 2) pont irányában 2, az (1, 1) pont irányában -2.

(a) Mennyi $f_x(1,2)$ és $f_y(1,2)$?

(b) Mennyi f iránymenti deriváltja az (1, 2) pontban a (4, 6) pont irányában?

44. Melyek igazak a következő állítások közül, ha f differenciálható (x_0,y_0)-ban?

(a) Ha $\mathbf{u}$ egy egységvektor, akkor f iránymenti deriváltja az (x_0,y_0) pontban $\mathbf{u}$ irányában $(f_x(x_0,y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0,y_0)\mathbf{j})\cdot\mathbf{u}$.

(b) f deriváltja az (x_0,y_0) pontban $\mathbf{u}$ irányában egy vektor.

(c) f iránymenti deriváltja az (x_0,y_0) pontban a legnagyobb értéket ∇f irányában veszi fel.

(d) Az (x_0,y_0) pontban ∇f merőleges az $f(x,y) = f(x_0,y_0)$ görbére.

Gradiens, érintősík, normálegyenes

A 45–46. feladatokban vázoljuk fel az $f(x,y,z) = c$ felületet ∇f-fel együtt az adott pontban!

45. $x^2 + y + z^2 = 0$, $(0,-1,\pm 1)$, $(0,0,0)$

46. $y^2 + z^2 = 4$, $(2,\pm 2,0)$, $(2,0,\pm 2)$

A 47–48. feladatokban adjuk meg az $f(x,y,z) = c$ felület érintősíkjának egyenletét a P_0 pontban. Adjuk meg a normálegyenes paraméteres egyenleteit is az adott pontban!

47. $x^2 - y - 5z = 0$, $P_0(2,-1,1)$

48. $x^2 + y^2 + z = 4$, $P_0(1,1,2)$

A 49–50. feladatokban adjuk meg a $z = f(x,y)$ felület érintősíkjának az egyenletét az adott pontban!

49. $z = \ln(x^2+y^2)$, $(0,1,0)$

50. $z = 1/(x^2+y^2)$, $(1,1,1/2)$

Az 51–52. feladatokban adjuk meg az $f(x,y) = c$ szintvonal érintő- és normálegyenesének egyenletét az adott P_0 pontban. Azután rajzoljuk meg az egyeneseket, és vázoljuk fel a szintvonalat és ∇f-et a P_0-ban!

51. $y - \sin x = 1$, $P_0(\pi,1)$ **52.** $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2}$, $P_0(1,2)$

Görbék érintői

Az 53–54. feladatokban adjuk meg a paraméteres egyenletét annak az egyenesnek, amelyik érintője a két felület metszésvonalának az adott pontban.

53. Felületek: $x^2 + 2y + 2z = 4$, $y = 1$
Pont: (1, 1, 1/2)

54. Felületek: $x + y^2 + z = 2$, $y = 1$
Pont: (1/2, 1, 1/2)

Linearizációk

Az 55–56. feladatokban adjuk meg az $f(x,y)$ függvény $L(x,y)$ linearizációját a P_0 pontban! Azután adjunk egy felső korlátot az $f(x,y) \approx L(x,y)$ közelítés E hibájának abszolút értékére a T téglalap alakú tartományon!

55. $f(x,y) = \sin x \cos y, \quad P_0(\pi/4, \pi/4)$

$$T: \quad \left|x - \frac{\pi}{4}\right| \le 0{,}1, \quad \left|y - \frac{\pi}{4}\right| \le 0{,}1$$

56. $f(x,y) = xy - 3y^2 + 2, \quad P_0(1,1)$

$$T: \quad |x-1| \le 0{,}1, \quad |y-1| \le 0{,}2$$

Az 57–58. feladatokban adjuk meg az $f(x,y)$ függvény $L(x,y)$ linearizációját az adott pontokban!

57. $f(x,y,z) = xy + 2yz - 3xz, \quad P_1(1,0,0)$, ill. $P_2(1,1,0)$

58. $f(x,y,z) = \sqrt{2}\cos x \sin(y+z), \quad P_1(0,0,\pi/4)$, ill. $P_2(\pi/4, \pi/4, 0)$

Becslések és érzékenység a változásra

59. Csővezeték térfogatának mérése: Egy csővezetékdarab belső térfogatát kell megállapítanunk, ami kb. 90 cm átmérőjű és kb. 1 km hosszú. Melyik méréssel kell inkább pontosnak lenni, az átmérőével vagy a hosszúságával? Miért?

60. Érzékenység a változásra: Az $(1,2)$ pont közelében az $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 3$ függvény az x-nek vagy az y-nak a változására érzékenyebb? Miért?

61. Változás egy elektromos áramkörben: Tegyük fel, hogy egy elektromos áramkörben az I áramerősség (amper), a V feszültség (volt) és az R ellenállás (ohm) között az $I = V/R$ összefüggés áll fenn. Ha a feszültség 24 voltról 23-ra és az ellenállás 100 ohmról 80-ra csökken, az áramerősség növekszik vagy csökken? Mennyivel? A feszültség vagy az ellenállás változására érzékenyebb az áramerősség? Honnan tudjuk?

62. Ellipszis területének becslésekor fellépő legnagyobb hiba: Ha $a = 10$ cm és $b = 16$ cm milliméterre kerekítve, mekkora a területszámításnál fellépő maximális hibaszázalék, ha az $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ellipszis területét az $A = \pi ab$ képlettel számítjuk?

63. Szorzat becslésének hibája: Legyen $y = uv$ és $z = u + v$ ahol u és v pozitív független változók.

(a) Ha u-t 2%-os hibával mérjük, v-t pedig 3%-ossal, akkor hány százalékos hibával számítjuk y-t?

(b) Mutassuk meg, hogy z számításakor kisebb a százalékos hiba, mint y számításakor!

64. Cardiac index (Szívindex): Azért, hogy különböző embereket összehasonlíthassunk a *cardiac output* (a szív által átpumpált vér mennyisége) szempontjából, (3.7. alfejezet 25. feladat) a kutatók az átpumpált vér mennyiségét elosztják a testfelszínnel, hogy megkapják a szívindexet.

$$C = \frac{\text{átpumpált vérmennyiség}}{\text{testfelszín}}$$

Egy w tömegű, h magasságú ember B testfelszínét a

$$B = 71.84 w^{0{,}425} h^{0{,}725}$$

képlettel becsüljük, ami B értékét négyzetcentiméterben adja meg, ha w-t kilogrammban, h-t pedig centiméterben mérjük. Tegyük fel, hogy a szívindexet egy olyan személy esetében kell meghatároznunk, akinél a következőket mértük:

Átpumpált vérmennyiség:	7 L/perc
Tömeg:	70 kg
Magasság:	180 cm

Melyiknek van nagyobb hatása az indexre, 1 kg hibának a tömeg mérésekor vagy 1 cm hibának a magasság mérésekor?

Lokális szélsőérték

A 65–70. feladatokban keressük a függvények lokális maximumát, lokális minimumát, nyeregpontját. Határozzuk meg a függvényértékeket is ezekben a pontokban!

65. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 4$

66. $f(x,y) = 5x^2 + 4xy - 2y^2 + 4x - 4y$

67. $f(x,y) = 2x^3 + 3xy + 2y^3$

68. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 15$

69. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2$

70. $f(x,y) = x^4 - 8x^2 + 3y^2 - 6y$

Abszolút szélsőérték

A 71–78. feladatokban keressük a függvények abszolút maximumát és abszolút minimumát a megadott zárt T tartományon!

71. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 3y$
T: Az a zárt háromszögtartomány, amit az $x + y = 4$ egyenes metsz ki az első síknegyedből.

72. $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 1$
T: Az a zárt téglalaptartomány az első síknegyedben, amelyet a koordinátatengelyek, az $x = 4$ és az $y = 2$ egyenesek határolnak.

73. $f(x,y) = y^2 - xy - 3y + 2x$
T: Az a zárt négyzet alakú tartomány, amelyet az $x = \pm 2$, $y = \pm 2$ egyenesek határolnak.

74. $f(x,y) = 2x + 2y - x^2 - y^2$
T: Az első síknegyedben az a zárt négyzet alakú tartomány, amelyet a koordinátatengelyek, az $x = 2$ és $y = 2$ egyenesek határolnak.

75. $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y$
T: Az a zárt háromszög alakú tartomány, amelyet alulról az x-tengely, felülről az $y = x + 2$ egyenes, jobbról pedig az $x = 2$ egyenes határolnak.

76. $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4 + 16$
T: Az a háromszög alakú tartomány, amelyet alulról az $y = -2$, felülről az $y = x$, jobbról pedig az $x = 2$ egyenesek határolnak.

77. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2$
T: Az a négyzet alakú tartomány, amelyet az $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ egyenesek határolnak.

78. $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3 + 1$
T: Az a négyzet alakú tartomány, amelyet az $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ egyenesek határolnak.

Lagrange-féle multiplikátorok

79. Szélsőérték egy körön: Keressük meg $f(x,y)=x^3+y^2$ szélsőértékeit az $x^2+y^2=1$ körvonalon!

80. Szélsőérték egy körön: Keressük meg $f(x,y)=xy$ szélsőértékeit az $x^2+y^2=1$ körvonalon!

81. Szélsőérték egy körlapon: Keressük meg $f(x,y)=x^2+3y^2+2y$ szélsőértékeit az $x^2+y^2\le 1$ körlapon!

82. Szélsőérték egy körlapon: Keressük meg $f(x,y)=x^2+y^2-3x-xy$ szélsőértékeit az $x^2+y^2\le 9$ körlapon!

83. Szélsőérték egy gömbön: Keressük meg $f(x,y,z)=x-y+z$ szélsőértékeit az $x^2+y^2+z^2=1$ egységsugarú gömbfelületen!

84. Minimális távolság az origótól: Adjuk meg a $z^2-xy=4$ felületen az origóhoz legközelebb eső pontokat!

85. Doboz költségének minimalizálása: Egy téglatest alakú doboz térfogata V cm^3. A dobozhoz olyan anyagot használunk, aminek költsége az aljára a Ft/cm^2, az elejére és hátára b Ft/cm^2, a többi oldalra pedig c Ft/cm^2. Milyen méretek minimalizálják az anyagköltséget?

86. Legkisebb térfogat: Adjuk meg annak az $x/a+y/b+z/c=1$ síknak az egyenletét, ami átmegy a (2, 1, 2) ponton és a minimális térfogatot metszi ki az első térnyolcadból!

87. Szélsőérték felületek metszésvonalán: Határozzuk meg az $f(x,y,z)=x(y+z)$ függvény szélsőértékeit az $x^2+y^2=1$ körhenger és az $xz=1$ hiperbolikus henger metszésvonalán!

88. Az origó minimális távolsága sík és kúp metszésvonalától: Melyik az $x+y+z=1$ sík és $z^2=2x^2+2y^2$ kúp metszetgörbéjének az origóhoz legközelebbi pontja?

Feltételes parciális deriváltak

A 89–90. feladatokat kezdjük azzal, hogy felrajzoljuk a diagramot, ami a változók közötti kapcsolatokat mutatja.

89. Adjuk meg az alábbi parciális deriváltakat, ha $w=x^2e^{yz}$ és $z=x^2-y^2$:

(a) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_z$ **(b)** $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_x$ **(c)** $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_y$

90. Legyen $U=f(P,V,T)$ a belső energiája egy olyan gáznak, amelyik eleget tesz a $PV=nRT$ ideális gáztörvénynek (n és R állandók). Adjuk meg az

(a) $\left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_P$ **(b)** $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T$

parciális deriváltakat!

További példák és feladatok

91. Legyen $w=f(r,\theta)$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ és $\theta=\operatorname{arctg}(y/x)$. Adjuk meg a $\partial w/\partial x$ és $\partial w/\partial y$ parciális deriváltakat r és θ függvényeként!

92. Legyen $z=f(u,v)$, $u=ax+by$, $v=ax-by$. Fejezzük ki a z_x, z_y parciális deriváltakat f_u, f_v, a, b segítségével!

93. Mutassuk meg, hogy ha a, b konstansok, $w=u^3+\operatorname{th}u+\cos u$ és $u=ax+by$, akkor

$$a\frac{\partial w}{\partial y}=b\frac{\partial w}{\partial x}.$$

94. A láncszabály alkalmazása: Adjuk meg a w_r, w_s parciális deriváltakat a láncszabály segítségével, ha $w=\ln(x^2+y^2+2z)$, $x=r+s$, $y=r-s$ és $z=2rs$. Azután ellenőrizzük válaszunkat más úton való számítással!

95. Vektorok közötti szögek: Az $e^u\cos v-x=0$ és $e^u\sin v-y=0$ egyenletek u-t és v-t az x és y differenciálható függvényeként definiálják. Mutassuk meg, hogy a

$$\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j}$$

vektorok által bezárt szög állandó!

96. Polárkoordináták és második derivált: Ha bevezetjük az $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ polárkoordinátákat, akkor az $f(x,y)$ függvény egy $g(r,\theta)$ függvénybe megy át. Adjuk meg $\partial^2 g/\partial\theta^2$ értékét az $(r,\theta)=(2,\pi/2)$ pontban, ha tudjuk, hogy ebben a pontban

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=1.$$

97. Adott síkkal párhuzamos normál egyenes: Adjuk meg az

$$(y+z)^2+(z-x)^2=16$$

felület azon pontjait, ahol a felület normálegyenese párhuzamos az yz-síkkal!

98. Az xy-síkkal párhuzamos érintősík: Adjuk meg az

$$xy+yz+zx-x-z^2=0$$

felület azon pontjait, ahol az érintősík párhuzamos az xy-síkkal!

99. A helyvektorral párhuzamos gradiens: Tegyük fel, hogy a $\nabla f(x,y,z)$ mindig párhuzamos az $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ vektorral. Mutassuk meg, hogy $f(0,0,a)=f(0,0,-a)$ minden a-ra!

100. Az iránymenti derivált minden irányban létezik, de a függvény nem folytonos:

(a) Mutassuk meg, hogy az

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{ha } x>0 \text{ és } y=x^2\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$$

(azaz nullánál nagyobb x-re az $y=x^2$ parabola mentén 1, különben 0) függvénynek az origóban minden irányban létezik iránymenti deriváltja, de a függvény itt nem folytonos! (Mivel az origóban a parciális deriváltak léteznek, a gradiensvektor létezik, de a függvény nem differenciálható. Az iránymenti deriváltak történetesen megegyeznek a $\operatorname{grad} f\cdot\mathbf{u}$ szorzattal, de ez véletlen.)

(b) Legyen

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{|x|}\sqrt{x^2+y^2}, & \text{ha } x\neq 0 \text{ és } \frac{y}{x} \text{ racionális},\\ -\frac{x}{|x|}\sqrt{x^2+y^2}, & \text{ha } x\neq 0 \text{ és } \frac{y}{x} \text{ irracionális},\\ 0, & \text{ha } x=0\end{cases}$$

(azaz a függvény grafikonja egy kúp alkotóiból áll). Mutassuk meg, hogy az origóban minden irányban létezik iránymenti derivált, de a függvény itt nem differenciálható. (Van gradiensvektor, de az használhatatlan az iránymenti deriváltak számításához.)

(c) Az irodalomban gyakran definiálják az iránymenti deriváltat úgy, hogy kimondottan csak az adott **u** vektor irányban tekintik az egyoldali differenciálhányadost, azaz a $\lim_{s\to 0^+} \dfrac{f(x_0+su_1,y_0+su_2)-f(x_0,y_0)}{s}$ határértéket tekintik az adott iránymenti deriváltnak. Ekkor pl. az **i** irányú iránymenti derivált és az x szerinti parciális derivált nem feltétlenül ugyanazt jelenti. Ha f differenciálható az (x_0,y_0) pontban, akkor a két definíció ugyanazt jelenti. Mutassuk meg, hogy ha csak az $s\to 0^+$ határértéket tekintjük, akkor az

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

függvénynek az origóban minden irányból van iránymenti deriváltja, de gradiense nincs.

101. Normálegyenes az origón keresztül: Mutassuk meg, hogy az $xy+z=2$ felület $(1,1,1)$ ponthoz tartozó normálegyenese átmegy az origón.

102. Érintősík és normálegyenes:

(a) Vázoljuk fel az $x^2-y^2+z^2=4$ felületet.

(b) Adjunk meg egy vektort, ami merőleges a felületre a $(2,-3,3)$ pontban. Rajzoljuk bele ezt a vektort is az ábrába.

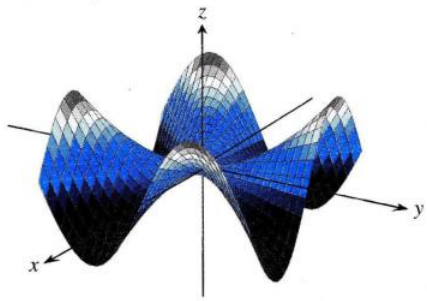
(c) Írjuk fel a $(2,-3,3)$ ponthoz tartozó érintősík és normálegyenes egyenleteit.

14. fejezet Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. Függvények nyeregponttal az origóban: Ha már megoldottuk a 14.2. alfejezet 50. feladatát, akkor már tudjuk, hogy az

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

függvény folytonos az origóban (lásd a mellékelt ábrát). Adjuk meg $f_{xy}(0,0)$-t és $f_{yx}(0,0)$-t!



2. Függvény meghatározása parciális deriváltjaiból: Keressük azt a $w=f(x,y)$ függvényt, amelynek első parciális deriváltjai: $\partial w/\partial x=1+e^x\cos y$ és $\partial w/\partial y=2y-e^x\sin y$, valamint a függvényérték az $(\ln 2,0)$ pontban $\ln 2$.

3. A Leibniz-szabály bizonyítása: A Leibniz-szabály azt mondja, hogy ha f folytonos az $[a,b]$ intervallumon, $u(x)$ és $v(x)$ pedig olyan függvények, amelyeknek értékei az $[a,b]$-ből valók, akkor

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt=f(v(x))\frac{dv}{dx}-f(u(x))\frac{du}{dx}.$$

Bizonyítsuk be ezt a szabályt a

$$g(u,v)=\int_u^v f(t)dt,\quad u=u(x),\quad v=v(x)$$

helyettesítéssel, és dg/dx-re a láncszabályt alkalmazva.

4. Függvény meghatározása korlátozott második deriváltakkal: Tegyük fel, hogy f kétszer differenciálható függvénye r-nek, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ és

$$f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=0.$$

Mutassuk meg, hogy valamilyen a és b konstanssal

$$f(r)=\frac{a}{r}+b.$$

5. Homogén függvények: Az $f(x,y)$ függvényt ***n*-edfokú homogén** függvénynek nevezzük (ahol n nemnegatív egész), ha $f(tx,ty)=t^nf(x,y)$ minden t-re, x-re, y-ra. Lássuk be, hogy egy ilyen függvényre (ami a megfelelő deriváltakkal rendelkezik)

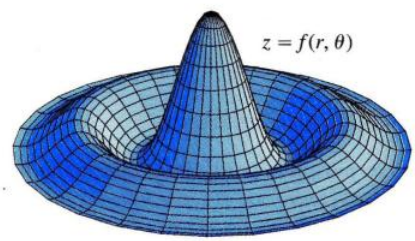
(a) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y)$

(b) $x^2\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)+2xy\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)+y^2\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=n(n-1)f.$

6. Felület polárkoordinátákkal: Legyen

$$f(r,\theta)=\begin{cases}\frac{\sin 6r}{6r}, & r\neq 0,\\ 1, & r=0.\end{cases}$$

ahol r és θ polárkoordináták. Adjuk meg:
(a) $\lim_{r\to 0} f(r,\theta)$ **(b)** $f_r(0,0)$ **(c)** $f_\theta(r,\theta)$, $r\neq 0$.



Gradiensek és érintők

7. Helyvektorok tulajdonságai: Legyen $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ és $r=|\mathbf{r}|$.

(a) Mutassuk meg, hogy $\nabla r=\mathbf{r}/r$.

(b) Mutassuk meg, hogy $\nabla(r^n)=nr^{n-2}\mathbf{r}$.

(c) Adjunk meg olyan függvényt, aminek gradiense $\mathbf{r}$.

(d) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}=rdr$.

(e) Mutassuk meg, hogy $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r})=\mathbf{A}$ minden konstans $\mathbf{A}$ vektorra.

8. A gradiens merőleges az érintőre: Tegyük fel, hogy egy differenciálható $f(x,y)$ függvény az $x = x(t)$, $y = y(t)$ paraméterezéssel adott differenciálható görbe mentén konstans c értéket vesz fel. Azaz

$$f(g(t),h(t)) = c$$

minden t értékre. Deriváljuk mindkét oldalt t szerint, hogy lássuk, ∇f merőleges a görbe érintővektorára a görbe minden pontjában!

9. Felületet érintő görbe: Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{r}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + (t\ln t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

görbe érinti az

$$xz^2 - yz + \cos xy = 1$$

felületet a (0, 0, 1) pontban!

10. Felületet érintő görbe: Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{t^3}{4} - 2\right)\mathbf{i} + \left(\frac{4}{t} - 3\right)\mathbf{j} + \cos(t-2)\mathbf{k}$$

görbe érinti az

$$x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 0$$

felületet a $(0,-1,1)$ pontban!

Szélsőértékek

11. Szélsőérték egy felületen: Mutassuk meg, hogy ha a $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ felületet tekintjük, z értékének csak a $(0,0)$, ill. $(3,3)$ pontban lehet szélsőértéke. A $(0,0)$-ban nincs szélsőérték. Döntsük el, $(3,3)$-ban minimum vagy maximum van?

12. Maximum a zárt első negyedben: Keressük meg az $f(x,y) = 6xye^{-(2x+3y)}$ függvény legnagyobb értékét a zárt első síknegyedben (azaz beleértve a tengelyek pozitív felét is).

13. Az első térnyolcadból kimetszett minimális térfogat: Mennyi lesz a minimális térfogata annak a térrésznek az első térnyolcadban, amelyet az $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ síkok és az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ellipszoid érintősíkja határol?

14. Egyenes és parabola pontjainak minimális távolsága az xy-síkban: Megkeresve az $f(x,y,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2$ függvény minimumát az $y = x+1$ és $u = v^2$ feltételek mellett, határozzuk meg az xy-síkban fekvő $y = x+1$ egyenes és $y^2 = x$ parabola pontjai közötti minimális távolságot.

További példák és feladatok

15. Az első parciális deriváltak korlátosságából következik a folytonosság: Bizonyítsuk be a következő tételt: Ha $f(x,y)$ definiálva van az xy-sík egy nyílt T tartományán, és az f_x, f_y parciális deriváltak korlátosak ezen a tartományon, akkor $f(x,y)$ folytonos T-n. (A korlátosság lényeges feltétel.)

16. Tegyük fel, hogy $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$ egy sima görbe a differenciálható $f(x,y,z)$ függvény értelmezési tartományában. Írjuk le a kapcsolatot df/dt, ∇f és $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ között! Mit mondhatunk ∇f-ről és $\mathbf{v}$-ről azokban a belső pontokban, ahol f-nek relatív szélsőértéke van a görbén? Válaszunkat indokoljuk!

17. Függvény meghatározása parciális deriváltjaiból: Tegyük fel, hogy f és g olyan függvényei x-nek és y-nak, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{és} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y},$$

valamint tegyük fel, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f(1,2) = g(1,2) = 5 \quad \text{és} \quad f(0,0) = 4.$$

Határozzuk meg az $f(x,y)$ és $g(x,y)$ függvényeket!

18. A változás változása: Tudjuk, hogy ha $f(x,y)$ egy differenciálható kétváltozós függvény és $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ egy egységvektor, akkor az $f(x,y)$ változási sebessége az $\mathbf{u}$ irányban $D_{\mathbf{u}}f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$. Adjunk hasonló képletet $f(x,y)$ változásának változására az (x,y) pontban $\mathbf{u}$ irányban.

19. Egy hőigényes részecske útja: Egy hőigényes részecske a síkban minden (x,y) pontban abba az irányba mozdul, amerre a legnagyobb a hőmérséklet növekedése. Ha a hőmérsékletet a $T(x,y) = -e^{-2y}\cos x$ függvény írja le, akkor adjuk meg a $(\pi/4, 0)$ pontból induló részecske $y = f(x)$ útját!

20. Sebesség visszapattanás után: Egy részecske mozog egy egyenes mentén állandó $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ sebességgel és átmegy a $(0,0,30)$ ponton. A részecske nekimegy a $z = 2x^2 + 3y^2$ felületnek, majd visszapattan róla. A visszaverődés szöge megegyezik a becsapódás szögével. Ha feltesszük, hogy a visszapattanáskor nincs energiaveszteség, mi lesz a részecske sebességvektora az ütközés után? Egyszerűsítsük az eredményt!

21. Iránymenti derivált egy felület érintősíkjával párhuzamos irányokban: Legyen az S felület az $f(x,y) = 10 - x^2 - y^2$ függvény grafikonja. Tegyük fel, hogy a hőmérséklet a tér (x,y,z) pontjában $T(x,y,z) = x^2y + y^2z + 4x + 14y + z$.

(a) A (0, 0, 10) pontban, az S felület érintősíkjával párhuzamos irányok közül melyikben lesz a hőmérsékletváltozás a legnagyobb?

(b) Ugyanaz a kérdés, mint az előbb, csak az (1, 1, 8) pontban.

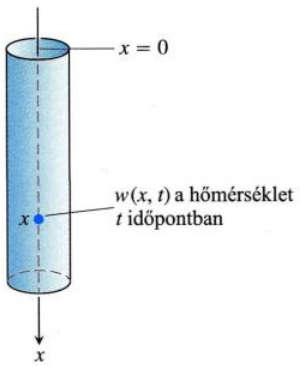
22. Feltárólyuk fúrása: Egy lapos vidéken geológusok egy feltárólyukat fúrtak, és 1000 méter mélyen találtak olyan ásványt, amit kerestek. 100 méterre északra az első lyuktól a felszín alatt 950 méterre találtak ásványt. A harmadik feltárólyuk 100 méterre keletre volt az elsőtől, és itt 1025 méter mélyen volt ásvány. A geológusok (korábbi tapasztalatok alapján) azt feltételezik, hogy az ásványkészlet kupolaalakban helyezkedik el, és szeretnék megtalálni a felszínhez legközelebbi pontját. Ha a felszínt képzeljük az xy-síknak, mit javasolunk a geológusoknak, az első lyuktól milyen irányban fúrják a negyediket?

Az egydimenziós hőegyenlet

Ha $w(x,t)$ írja le a hőmérsékletet egy oldalról tökéletesen szigetelt, egyenletesen vezető rúd x pontjában a t időpontban (lásd a mellékelt ábrát), akkor a w_{xx}, w_t parciális deriváltak kielégítik a

$$w_{xx} = \frac{1}{c^2}w_t$$

differenciálegyenletet. Ezt az egyenletet **egydimenziós hővezetési egyenletnek** nevezzük. A pozitív c^2 konstans a rúd anyagától függő állandó, amely kísérletileg van meghatározva sok különféle anyagra. Ha konkrétan alkalmazni akarjuk, a megfelelő értéket táblázatból keressük ki. Száraz talaj esetén ez pl. 0,018 m^2/nap.



A kémiában és biokémiában a hővezetési egyenletet **diffúziós egyenletként** ismerik. Ebben az összefüggésben $w(x,t)$ valamilyen oldott anyag, pl. só, koncentrációját írja le amint egy folyadékkal teli csőben terjed. $w(x,t)$ értéke az anyag koncentrációja az x helyen a t időpontban. Más alkalmazásokban $w(x,t)$ leírhatja pl. egy gáz terjedését egy hosszú, vékony csőben. Az elektromosságtanban a hővezetési egyenlet

$$v_{xx} = RCv_t$$

és

$$i_{xx} = RCi_t$$

alakban fordul elő. Ezek az egyenletek a v feszültséget, ill. i áramerősséget írják le egy olyan vezetőben, ahol a veszteség, ill. induktivitás elhanyagolható. Ezekben az egyenletekben

$v(x,t)$ = feszültség az x pontban a t időpontban

R = egységnyi hosszúságú kábel ellenállása

C = egységnyi hosszúságú kábel kapacitása

$i(x,t)$ = áramerősség az x pontban a t időpontban

23. Határozzuk meg az egydimenziós hővezetési egyenlet minden $w = e^{rt} \sin \pi x$ alakú megoldását, ahol r egy állandó.

24. Határozzuk meg az egydimenziós hővezetési egyenlet minden $w = e^{rt} \sin kx$ alakú megoldását, amely kielégíti a $w(0,t) = 0$ és $w(L,t) = 0$ feltételeket. Mi történik, ha $t \to \infty$?

15. fejezet Többes integrálok

ÁTTEKINTÉS: Ebben a fejezetben kétváltozós függvények integrálját tekintjük síktartományok felett, és háromváltozósakét a háromdimenziós tér tartományai felett. Ezeket az integrálokat a változók számától függően *kettős integráloknak*, ill. *hármas integráloknak*, vagy röviden *többes integráloknak* nevezzük. Ezeket az integrálokat is Riemann-összegek határértékeként definiáljuk, akárcsak az egyváltozós esetben. Ezen integrálokat olyan mennyiségek kiszámítására használhatjuk, amelyek több változótól függnek, mint pl. görbe felületekkel határolt változó sűrűségű testek tömege és tehetetlenségi nyomatéka.

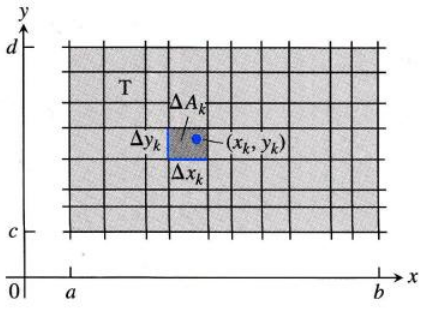
15.1. Kettős integrál

Az 5. fejezetben Riemann-összegek határértékeként definiáltuk valós $f(x)$ függvények integrálját egy $[a,b]$ intervallum felett. Ebben az alfejezetben az ott alkalmazott eljárást terjesztjük ki kétváltozós függvényekre. Egy egyváltozós függvény integrálközelítő összegéhez képeztük az intervallum egy felosztását, minden részintervallumból választottunk egy pontot, ezután képeztük azt az összeget, amelynek tagjait úgy kaptuk, hogy a részintervallum hosszát szoroztuk a függvény értékével a választott pontban. Egy kétváltozós függvény esetén egy területtel rendelkező tartományt osztunk fel területtel rendelkező résztartományokra úgy, hogy bármely kettő közös részének területe nulla, és ezekből a résztartományokból választunk egy-egy pontot. Az integrálközelítő összeg tagjait úgy kapjuk, hogy a résztartományok területét szorozzuk a függvény választott pontbeli helyettesítési értékével. A függvény *kettős integrálját* ilyen összegek határértékeként kapjuk. Az egyszerűség kedvéért a felosztást téglalapokkal végezzük. Belátható, hogy bizonyos tartományokon folytonos függvény integrálja most is mindig létezik, és ennek kiszámítását is (mint az egyszeres integráloknál) vissza tudjuk vezetni primitív függvény meghatározására. Ez mentesít minket attól, hogy egy kettős integrált a gyakorlatban is Riemann-összegek határértékeként kelljen kiszámítanunk. A megoldásnál általában a legtöbb nehézséget az integrál határainak helyes felírása okozza, hiszen míg az egydimenziós esetben az intervallumot két pont határolta, kétdimenziós esetben a tartományt görbék határolják.

Kettős integrál téglalaptartomány felett

Tekintsünk először egy nagyon egyszerű síkbeli tartományt, egy

$$T: \quad a \le x \le b, \quad c \le y \le d$$



15.1. ÁBRA: Egy derékszögű hálózattal osztjuk fel a T tartományt kis téglalapokra, amelyeknek a területe $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$.

téglalapot. Legyen $f(x,y)$ egy kétváltozós függvény ezen a téglalapon definiálva. Osszuk fel ezt a téglalapot a koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesekkel összesen n darab kisebb téglalapra. Ezek a téglalapok a T tartomány egy *felosztását* képezik. Egy Δx szélességű és Δy magasságú kis téglalap területe $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Ha megsorszámozzuk a kis téglalapokat, akkor területeiket a ΔA_1, $\Delta A_2, \ldots, \Delta A_n$ számok adják, ahol ΔA_k a k-adik téglalap területe (15.1. ábra).

A T tartomány feletti **integrálközelítő összeget** úgy képezzük, hogy minden kis téglalapból választunk egy pontot, (x_k, y_k)-t a k-adikból, megszorozzuk az f függvény helyettesítési értékét ebben a pontban a kis tartomány ΔA_k területével, és az így kapott szorzatokat összeadjuk.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\, \Delta A_k.$$

Ezt az összeget *Riemann-összegnek* is hívják. Attól függően, hogy a k-adik tartományból melyik (x_k, y_k) pontot választjuk, az így kapott S_n összeg más és más lehet.

Arra vagyunk kíváncsiak, hogyan viselkedik az S_n integrálközelítő összeg ha a téglalapok *átmérője* nullához tart. Téglalapok esetén ez ugyanaz, mint amikor szélességük és magasságuk is nullához tart. A felosztás $||P||$ **normája** a legnagyobb érték a téglalapok szélességei és hosszúságai közül. Ha például $||P|| = 0{,}1$, akkor a felosztásban minden téglalap szélte és hossza is legfeljebb 0,1. Olykor az integrálközelítő összegek konvergálnak valamilyen értékhez, ha P normája nullához tart, azaz ha $||P|| \to 0$. Ezt

$$\lim_{||P||\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

alakba írhatjuk. Mivel $||P|| \to 0$ esetén a téglalapok egyre kisebbek, a számuk egyre növekszik, így ezt úgy is írhatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta A_k,$$

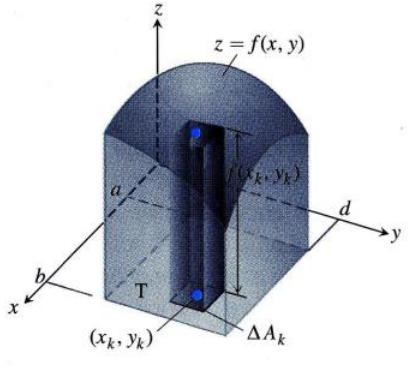
ahol feltesszük, hogy $n \to \infty$ esetén $||P|| \to 0$ és ezzel együtt mindegyik $\Delta A_k \to 0$.

Nagyon sok különböző választással kaphatunk ilyen határértéket. A kis téglalapokat a tengelyekkel párhuzamos egyenesek határozzák meg, amelyekkel a felosztást készítettük. Ezután mindegyikben szabadon választhatunk egy (x_k, y_k) pontot, amelyikben a függvényértéket számítjuk. Ezek a választások együtt határoznak meg egy összeget. Ahhoz, hogy határértéket képezhessünk, ezt az eljárást kell újra és újra megismételni úgy, hogy a téglalapok oldalai nullához tartsanak.

Ha az S_n összegeknek van határértéke, úgy hogy ugyanaz a határérték adódik a választásoktól függetlenül, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **integrálható** és a határérték az f **kettős integrálja** az T tartományon.[1] Jelölése

$$\iint_T f(x,y)\, dA \quad \text{vagy} \quad \iint_T f(x,y)\, dx\, dy$$

Be lehet látni, hogy ha f folytonos a korlátos, zárt téglalap alakú T tartományon, akkor ott integrálható, ahogy az az egyváltozós esetben is volt. Olyan korlátos, nemfolytonos függvényeknek is létezik integráljuk, amelyek csak véges sok pontban, vagy véges sok sima görbe mentén nem folytonosak. Ennek bizonyítását most nem közöljük.

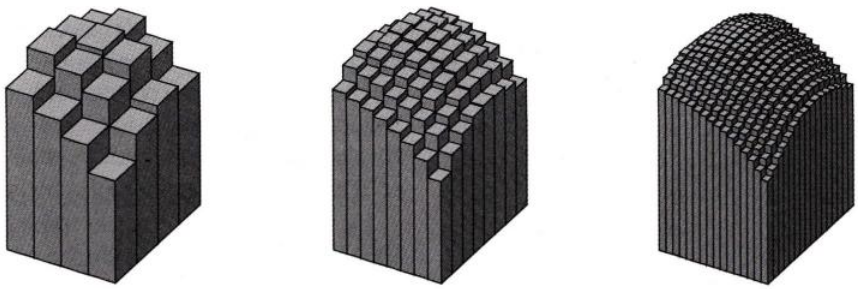


15.2. ÁBRA: A testeket téglalapalapú hasábok összességével közelítve általános alakú testek térfogatát is definiálni tudjuk kettős integrállal. Az itt látható test térfogata az $f(x,y)$ függvény kettős integrálja a T tartományon.

Kettős integrál és térfogat

Ha $f(x,y)$ pozitív a T tartomány felett, akkor f kettős integrálját ezen a tartományon úgy is tekinthetjük, mint annak az T fölötti háromdimenziós testnek

[1] Ez pontosabban azt jelenti, hogy van olyan I, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy bármely P felosztásra, amelyre $||P|| < \delta$, fennáll, hogy $|S_n - I| < \varepsilon$. Az I határértéket $\iint_T f(x,y)dA$ jelöli.



(a) $n = 16$ (b) $n = 64$ (c) $n = 256$

15.3. ÁBRA: Ahogy n nő, az integrálközelítő összegek egyre jobban közelítik a test térfogatát.

a térfogatát, amelyet alulról az xy-sík, felülről pedig $z = f(x,y)$ határol. (Lásd 15.2. ábra.) Az $S_n = \sum f(x_k,y_k)\Delta A_k$ összegben az $f(x_k,y_k)\Delta A_k$ tag egy hosszúkás egyenes hasáb térfogata, ami a test ΔA_k területű alap fölötti térfogatának egy közelítése. Így S_n egy közelítése annak, amit a test térfogatának akarunk hívni. A térfogatot így definiáljuk:

$$\text{Térfogat} = \lim_{n\to\infty} S_n = \iint_T f(x,y)\,dA,$$

ahol $\Delta A_k \to 0$, ha $n \to \infty$.

A 15.3. ábra mutatja, hogy az integrálközelítő összegek a térfogatot egyre jobban közelítik, ahogy a hasábok n száma egyre növekszik.

Fubini tétele kettős integrálok kiszámítására

Tegyük fel, hogy a $z = 4 - x - y$ sík alatti térfogatot akarjuk kiszámítani az xy-sík T: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$ téglalap alakú tartománya felett. Ha a 6. fejezetben tárgyalt szeletelős módszert választjuk az x tengelyre merőleges szeletekkel (15.4. ábra), akkor a térfogat

$$\int_{x=0}^{x=2} A(x)\,dx, \tag{15.1}$$

ahol $A(x)$ a keresztmetszet területe az x értéknél. Minden x értékre az $A(x)$ területet mint az

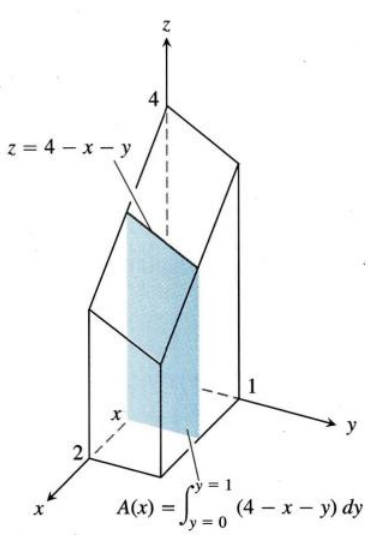
$$A(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4-x-y)dy \tag{15.2}$$

integrál értékét határozhatjuk meg, ami a $z = 4 - x - y$ görbe alatti terület x-nél. $A(x)$ számításánál x rögzített érték, az integrálás y szerint történik. A (15.1) és (15.2) egyenleteket összevetve látjuk, hogy az egész térfogat

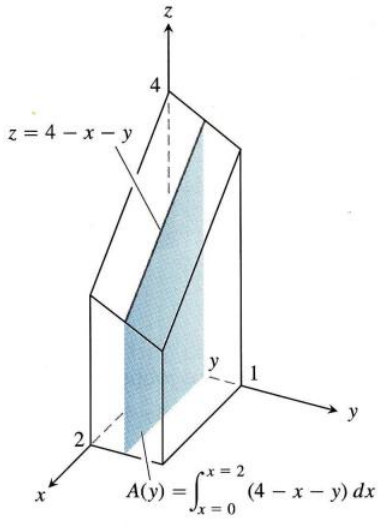
$$\begin{aligned}\text{Térfogat} &= \int_{x=0}^{x=2} A(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=2}\left(\int_{y=0}^{y=1}(4-x-y)dy\right)dx = \\ &= \int_{x=0}^{x=2}\left[4y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_{x=0}^{x=2}\left(\frac{7}{2}-x\right)dx = \\ &= \left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 5.\end{aligned} \tag{15.3}$$

Ha csak egy képletet akarunk írni a térfogatra az integrálások kiszámítása nélkül, írhatjuk, hogy

$$\text{Térfogat} = \int_0^2 \int_0^1 (4-x-y)\,dy\,dx.$$



15.4. ÁBRA: A keresztmetszet $A(x)$ területét úgy kapjuk meg, hogy x-et fixen tartva az y szerint integrálunk.



15.5. ÁBRA: A keresztmetszet $A(y)$ területét úgy kapjuk meg, hogy y-t fixen tartva az x szerint integrálunk.

A jobboldali kifejezést **kétszeres integrálnak** nevezzük. Azt mutatja, hogy a térfogatot úgy kapjuk, hogy a $4-x-y$ függvényt először integráljuk y szerint $y=0$-tól $y=1$-ig, miközben x-et fixen tartjuk, azután az eredményt integráljuk x szerint $x=0$-tól $x=2$-ig. A 0 és 1 értékek y határait jelentik, ezért a dy-hoz közelebbi integráljelre írjuk. A többi határ, 0 és 2, az x változóra vonatkozik, ezért arra az integráljelre írjuk, amelyik dx-szel van párban.

Mi történik, ha a térfogatot y tengelyre merőleges síkokkal szeleteljük (15.5. ábra)? Az adott y értékhez tartozó metszet területe

$$A(y)=\int_{x=0}^{x=2}(4-x-y)\,dx=\left[4x-\frac{x^2}{2}-xy\right]=6-2y. \tag{15.4}$$

Ezért az egész térfogat

$$\text{Térfogat}=\int_{y=0}^{y=1}A(y)dy=\int_{y=0}^{y=1}(6-2y)dy=[6y-y^2]_0^1=5$$

összhangban az előző eredményünkkel.

A térfogatra most is adhatunk egy képletet a

$$\text{Térfogat}=\int_0^1\int_0^2(4-x-y)\,dx\,dy$$

kétszeres integrállal. A jobboldali kifejezés azt mutatja, hogy a térfogatot úgy kapjuk meg, hogy először $4-x-y$-t x szerint integráljuk $x=0$-tól $x=2$-ig, ahogy (15.4)-ben tettük, majd ezt az eredményt integráljuk y szerint $y=0$-tól $y=1$-ig. Ebben a kétszeres integrálban először integrálunk x szerint, azután y szerint, éppen fordítva, mint (15.3)-ban.

Mi köze ennek a két térfogatszámításnak kétszeres integrálokkal a

$$\iint_T(4-x-y)dA$$

kettős integrálhoz a T: $0\le x\le 2$, $0\le y\le 1$ tartományon? A válasz az, hogy mindkét kétszeres integrál ugyanazt a térfogatot adja, amit a kettős integrál definiál. Guido Fubini 1907-ben publikált tétele szerint, ha az integrandus folytonos egy zárt téglalaptartományon, akkor a kétszeres integrál a kettős integrál értékét adja bármilyen sorrendben. (Fubini ezt a tételt ennél általánosabb formában bizonyította, de ebben a pillanatban csak ennyire van szükségünk.)

1. TÉTEL: Fubini tétele téglalaptartományra

Ha $f(x,y)$ folytonos a T: $a\le x\le b$, $c\le y\le d$ zárt téglalaptartományon, akkor

$$\iint_T f(x,y)\,dA=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

Tehát, a kettős integrált számíthatjuk két egymás utáni integrállal, egyszerre csak egy változót tekintve. A tétel azt is állítja, hogy a sorrend tetszőleges, ami olykor lényegesen leegyszerűsíti a munkánkat, ahogy azt a 3. példában látni fogjuk. Ha a szeletelős módszerrel számítunk térfogatot, használhatunk akár az x tengelyre, akár az y tengelyre merőleges síkokat.

1. PÉLDA: **Kettős integrál kiszámítása**

Számítsuk ki az $\iint_T f(x,y)dA$ integrált, ha

$$f(x,y) = 1 - 6x^2y \quad \text{és} \quad T: \ 0 \le x \le 2, \ -1 \le y \le 1.$$

Megoldás: Fubini tétele szerint

$$\iint_T f(x,y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} (1-6x^2y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} [x - 2x^3y]_{x=0}^{x=2} dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} (2-16y)\,dy = [2y - 8y^2]_{-1}^{1} = 4.$$

Megfordítva az integrálás sorrendjét

$$\int_0^2\int_{-1}^{1} (1-6x^2y)\,dy\,dx = \int_0^2 [y - 3x^2y^2]_{y=-1}^{y=1} dx =$$

$$= \int_0^2 [(1-3x^2) - (-1-3x^2)]dx =$$

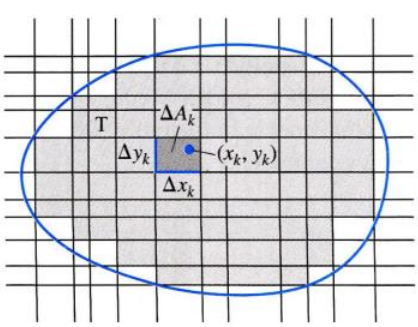
$$= \int_0^2 2dx = 4. \qquad \square$$

Számítógéphasználat: Többszörös integrálás

A legtöbb komputeralgebra-rendszer képes többszörös integrálok kiszámítására. Az integráló utasítást általában egymásba ágyazott integrálásokkal kell megadni.

Integrál	Utasítás
$\iint_{\pi/4} x^2y\,dx\,dy$	int (int (x ^2*y, x), y);
$\int_{-\pi/3}^{1}\int_{0} x\cos y\,dx\,dy$	int (int ($x*\cos(y)$, x = 0 . . 1),y = -Pi/3 . . Pi/4);

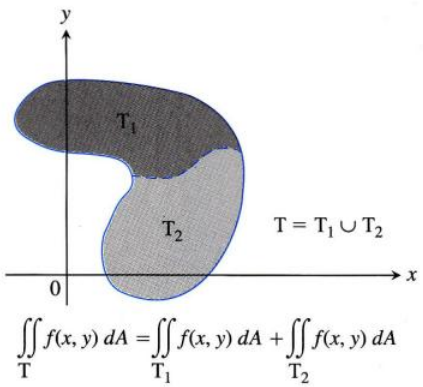
Ha egy komputeralgebra-rendszer nem tud pontos integrálértéket adni (azaz ha nem tudja formálisan integrálni az integrandust), akkor általában numerikus integrálással ad közelítő értéket. Ahhoz, hogy a számítógépnek helyesen adjuk ki az integrálási utasítást, tudnunk kell helyesen felírni az integrálás határait.



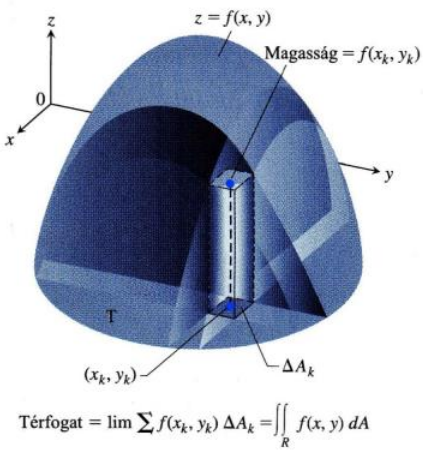
15.6. ÁBRA: Egy derékszögű háló, amivel a korlátos, nem téglalap alakú tartományt közelítőleg kis téglalapokra bontjuk.

Kettős integrál korlátos, nem téglalap alakú tartományon

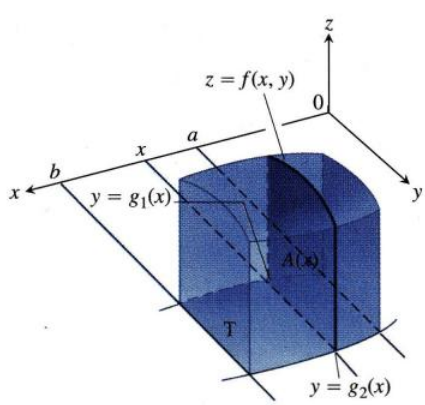
Legyen T egy olyan korlátos tartomány, amelynek van területe, de nem feltétlenül téglalap alakú, hanem pl. olyan, mint a 15.6. ábrán látható. Ahhoz, hogy egy $f(x,y)$ függvény kettős integrálját egy ilyen tartományon definiáljuk, megint a tengelyekkel párhuzamos egyenesekkel kis téglalapokat képezünk úgy, hogy ezekkel teljesen lefedjük a T tartományt. Lesznek olyan téglalapok, amelyek teljes egészében a tartományban vannak, lesznek olyanok amelyeket a határoló görbe átszel, és így a tartományhoz tartozó, és a tartományhoz nem tartozó pontokat is tartalmaznak. T-nek egy felosztását azok a téglalapok alkotják, amelyek teljes egészében a tartományhoz tartoznak, nem tekintjük azokat, amelyekben vannak a tartományhoz nem tartozó pontok is. Definíció szerint T-nek van területe, ha nullához tart azon kis téglalapok összterülete, amelyek T határát fedik



15.7. ÁBRA: A derékszögű tartományokra vonatkozó additív tulajdonság folytonos görbékkel határolt tartományokra is igaz.



15.8. ÁBRA: A görbe vonallal határolt alapú testek térfogatát ugyanúgy definiáljuk, mint a téglalap alapúakét.



15.9. ÁBRA: Az ábrán berajzolt függőleges metszet területe

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

A test térfogatát úgy számítjuk ki hogy ezt a területet integráljuk $x = a$-tól $x = b$-ig.

le (vagyis részben kilógnak T-ből) midőn a felosztás normája nullához tart, így a kis téglalapok egyre jobban kitöltik T-t.

Ha megvan a felosztásunk, megsorszámozzuk a kis téglalapokat. Jelölje n a kis téglalapok számát és ΔA_k a k-adik téglalap területét. Ezután válasszunk egy pontot a k-adik téglalapból, (x_k, y_k)-t, és képezzük az

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

integrálközelítő összeget. Ezt az összeget *Riemann-összegnek* is szokták hívni. Ahogy a felosztás normája $||P||$ nullához tart, minden kis téglalap szélte és hossza is nullához tart, a számuk pedig végtelenhez tart. Ha az S_n integrálközelítő összegek sorozata $||P|| \to 0$ esetén tetszőleges felosztás mellett, függetlenül attól, hogy hogyan választjuk az (x_k, y_k) pontokat, ugyanahhoz az értékhez tart, akkor ezt a közös határértéket nevezzük az $f(x,y)$ függvény **kettős integráljának** a T tartományon:

$$\lim_{||P||\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k = \iint_T f(x,y)\,dA.$$

Pl.: Ha T korlátos, zárt, és van területe, $f(x,y)$ pedig folytonos függvény ezen a tartományon, akkor f kettős integrálja létezik T-n. Általános esetben, a tartomány téglalapokkal való lefedését illetően, a tartomány határa az, ami miatt olyan vizsgálatra lehet szükség, ami egy intervallumon tekintett integrál esetén, vagy egy téglalap alakú tartomány esetén szóba sem jött. Itt a felosztás nem fedi le a teljes tartományt, és fontos, hogy ha a felosztás normája nullához tart, akkor a kimaradó részt tartalmazó téglalapok összterülete nullához tartson. (Ekkor mondjuk, hogy T-nek van területe.) Nyilvánvaló, hogy nem lehet probléma poligonok, körök, ellipszisek esetén, sem akkor, ha a határ folytonos függvények grafikonja egy intervallum felett, amelyek a végpontokban csatlakoznak. A „fraktál" típusú görbék okozhatnak problémát, de ilyenek a gyakorlati életben ritkán fordulnak elő. Annak részletes vizsgálatát, hogy milyen alakú tartományok alkalmasak arra, hogy rajtuk kettős integrált definiáljunk, a felsőbb kurzusokra hagyjuk.

Folytonos függvények (és általában integrálható függvények) kettős integráljainak algebrai tulajdonságai téglalap és nem téglalap alakú tartományokon ugyanazok, és az alfejezet végén soroljuk fel ezeket. A tartomány-additivitási tulajdonság azt jelenti, hogy ha a területtel rendelkező T tartományt felbontjuk két területtel rendelkező T_1 és T_2 tartományra (pl. a határ véges sok szakaszból, vagy sima görbedarabból áll) úgy, hogy nincs közös belső pontjuk (15.7. ábra), akkor

$$\iint_T f(x,y)\,dA = \iint_{T_1} f(x,y)\,dA + \iint_{T_2} f(x,y)\,dA.$$

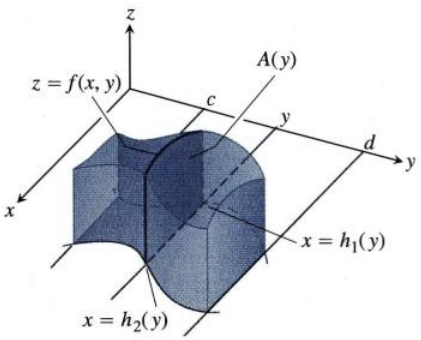
Ha $f(x,y)$ folytonos és pozitív a korlátos, zárt és területtel bíró T tartományon, akkor a $z = f(x,y)$ felület és a T tartomány közötti térrész térfogatát az $\iint_T f(x,y)\,dA$ integrállal definiáljuk, ahogy azt korábban is tettük téglalap alakú tartomány esetén (15.8. ábra).

Ha T egy olyan jellegű tartomány az xy-síkban, amilyet a 15.9. ábra mutat, tehát „alul" és „felül" az $y = g_1(x)$ és $y = g_2(x)$ görbék, „oldalt" pedig az $x = a$, ill. $x = b$ egyenesek határolják, akkor a térfogatot ismét számíthatjuk a szeletelős módszerrel. Először a keresztmetszet területét számítjuk:

$$A(x) = \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Azután integráljuk $A(x)$-et $x = a$-tól $x = b$-ig, hogy kétszeres integrálként megkapjuk a térfogatot:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx. \qquad (15.5)$$



15.10. ÁBRA: Az itt bemutatott test térfogata

$$\int_c^d A(y)\,dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Hasonlóképp, ha a T tartomány az $x = h_1(y)$, $x = h_2(y)$ görbékkel és $y = c$, $y = d$ egyenesekkel van határolva, a szeletelős módszerrel a kétszeres integrál:

$$V = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{15.6}$$

Az, hogy a (15.5) és (15.6) egyenletek kétszeres integráljai ugyanazt a térfogatot adják, mint az f kettős integrálja T-n, a Fubini-tétel erősebb formájából következik.

2. TÉTEL: Fubini tétele (erősebb alak)

Legyen f folytonos függvény a T tartományon.

1. Ha T az $a \le x \le b$, $g_1(x) \le x \le g_2(x)$ egyenlőtlenségekkel van megadva, ahol $g_1(x)$, $g_2(x)$ folytonos függvények, akkor

$$\iint_T f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

2. Ha T a $c \le y \le d$, $h_1(y) \le x \le h_2(y)$ egyenlőtlenségekkel van megadva, ahol $h_1(y)$, $h_2(y)$ folytonos függvények, akkor

$$\iint_T f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

2. PÉLDA: Térfogat számítása

Határozzuk meg annak a testnek a térfogatát, amelynek alja az xy-síkban az x-tengely, az $y = x$ és az $x = 1$ egyenesekkel határolt háromszög, oldalai merőlegesek az xy-síkra, a teteje pedig a

$$z = f(x,y) = 3 - x - y$$

síkban fekszik (15.11. ábra)!

Megoldás: Bármilyen adott $x \in [0,1]$ esetén y 0 és x között változhat, legkisebb értéke $y = 0$, legnagyobb $y = x$ (15.11b ábra). Így

$$V = \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} dx =$$

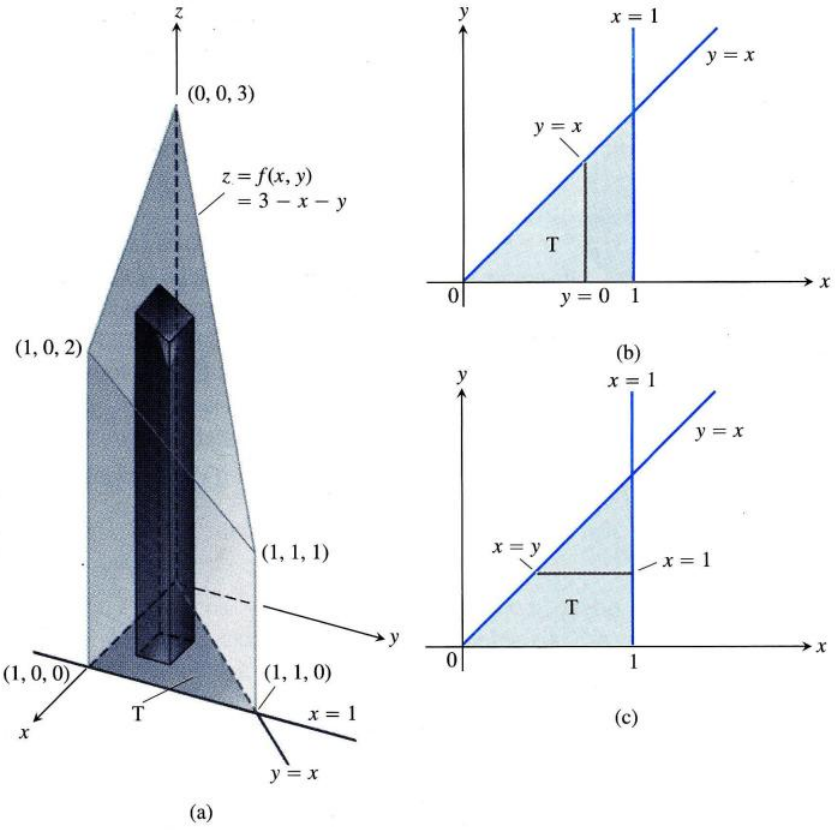
$$= \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2}\right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = 1.$$

Ha megfordítjuk az integrálás sorrendjét (15.11c ábra), akkor

$$v = \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[3x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_{x=y}^{x=1} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(3 - \frac{1}{2} - y - 3y + \frac{y^2}{2} + y^2\right) =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - 4y + \frac{3}{2}y^2\right) dy = \left[\frac{5}{2}y - 2y^2 + \frac{y^3}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = 1. \qquad \square$$



15.11. ÁBRA: **(a)** Hasáb, aminek alapja egy háromszög az xy-síkban. A hasáb térfogatát a T tartományon vett kettős integrállal definiáljuk. Ha kétszeres integrálként akarjuk kiszámítani, akkor integrálhatunk először y szerint, és azután x szerint, vagy fordítva (2. példa).
(b) Ha először y szerint integrálunk, akkor először egy y-tengellyel párhuzamos egyenes mentén integrálunk T-ben, és azután balról jobbra T-nek összes y tengellyel párhuzamos egyenesét figyelembe véve:

$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x} f(x,y)\,dy\,dx.$$

(c) Ha először x szerint integrálunk, akkor először egy x-tengellyel párhuzamos egyenes mentén integrálunk T-ben, és azután „lentről felfelé" T-nek összes x tengellyel párhuzamos egyenesét figyelembe véve:

$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=1} f(x,y)\,dx\,dy.$$

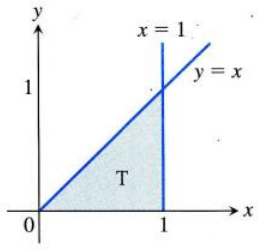
Bár Fubini tétele biztosítja, hogy a kétszeres integrált bármilyen sorrendben számíthatjuk, olykor az egyik sorrend sokkal egyszerűbb, mint a másik. Ilyen esetet mutat be a következő példa.

3. PÉLDA: **Kettős integrál kiszámítása**

Számítsuk ki a

$$\iint_T \frac{\sin x}{x}\,dA$$

kettős integrált, ahol T az a háromszög az xy-síkban, amelyet az x-tengely, az $y = x$ és $x = 1$ egyenesek határolnak!



15.12. ÁBRA: Az integrálási tartomány a 3. példában.

Megoldás: Az integrálási tartomány a 15.12. ábrán látható. Ha először y, majd x szerint integrálunk, akkor

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x} dy \right) dx = \int_0^1 \left[y \frac{\sin x}{x} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \sin x \, dx =$$
$$= -\cos(1) + 1 \approx 0{,}46.$$

Ha a fordított sorrendben kísérelnénk meg az integrálást:

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx \, dy,$$

akkor $\sin x/x$ primitív függvényére lenne szükségünk, amiről tudjuk, hogy nem lehet véges számú elemi függvénnyel kifejezni.

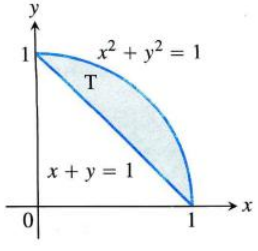
Arra nincs általános szabály, hogy mikor, milyen esetben, melyik sorrenddel érdemes kezdeni a próbálkozást. Ha az a sorrend, amivel először próbálkozunk, nem működik, kísérletezzünk a másikkal. Ha egyik sem jó, valamilyen numerikus approximációt kell alkalmaznunk. □

Az integrálás határainak felírása

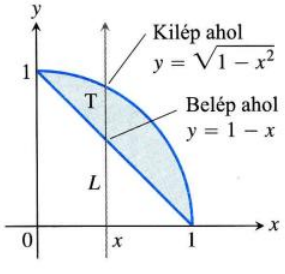
Bemutatunk egy olyan eljárást az integrál határainak felírására, amit igen sok különböző tartomány esetén jól alkalmazhatunk. A bonyolultabb tartományok többnyire feloszthatók olyan résztartományokra, amelyeken ez az eljárás már működik.

Ha először y szerint szeretnénk integrálni, azután x szerint, akkor:

1. *Vázlat:* Vázoljuk fel a tartományt, és jelöljük be a határoló görbéket!

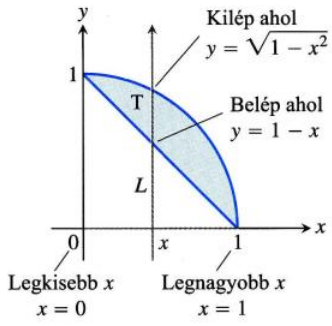


2. *Határok y-ra:* Húzzunk egy függőleges L egyenest az integrálási tartományon keresztül! Ezen az egyenesen x értékei állandók. (A belső integrálásnál x-et mint egy rögzített konstans értéket tekintjük.) Jelöljük be y legkisebb és legnagyobb értékét ezen x mellett! Ezeket az értékeket általában x-től függő kifejezés adja meg, és ezek között integrálunk y szerint.



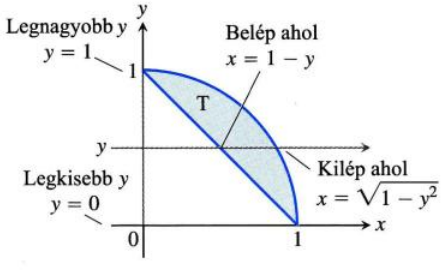
3. *Határok x-re:* Az x változó alsó és felső határát az adja, hogy mik a tartományhoz tartozó pontok legkisebb, ill. legnagyobb abszcisszái.

$$\iint_T f(x,y) dA = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x,y) \, dy \, dx.$$



Ha az integrált a fordított sorrendben szeretnénk kiszámolni, akkor függőleges egyenesek helyett vízszintes egyeneseket húzunk. Ebben az esetben az előbbi integrál:

$$\iint_T f(x,y)dA = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$$



4. PÉLDA: **Az integrálás határainak felcserélése**

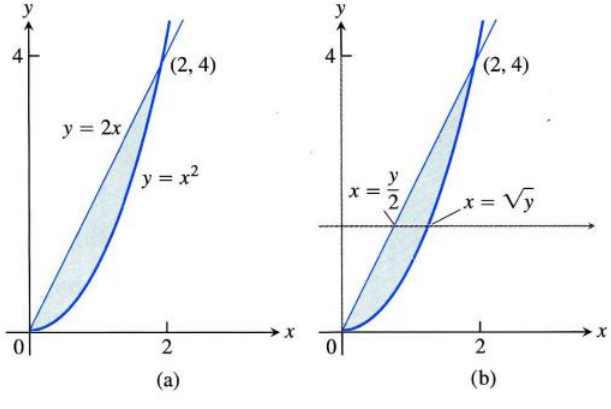
Vázoljuk fel az integrálási tartományt és cseréljük fel az integrálás határait az

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2)\,dy\,dx$$

integrálban!

Megoldás: Az integrálás határait az $x^2 \le y \le 2x$ és a $0 \le x \le 2$ egyenlőtlenségek adják. Ezért a tartományt az $y = x^2$ és $y = 2x$ görbék határolják $x = 0$ és $x = 2$ között (15.13a ábra).

A fordított sorrendű integrálás határait úgy találjuk meg, hogy vízszintes vonalat húzunk a tartományon keresztül balról jobbra. Látjuk, $x = y/2$ értéknél lép be a tartományba és $x = \sqrt{y}$ értéknél lép ki. A tartomány pontjainak y koordinátái



15.13. ÁBRA: Az integrálási tartomány a 4. példában.

0 és 4 között vannak (15.13b ábra). Így az integrál:

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x+2)\,dx\,dy.$$

Mindkét integrál értéke 8. □

A kettős integrálok tulajdonságai

Az egyszeres integrálokhoz hasonlóan az integrálható kétváltozós függvények kettős integráljainak is vannak olyan algebrai tulajdonságai, amelyek jól használhatók a számításoknál.

Kettős integrálok tulajdonságai
Ha $f(x,y)$ és $g(x,y)$ integrálhatók a képletekben előforduló tartományokon, akkor

1. *Konstansszoros:* $\iint_T cf(x,y)dA = c\iint_T f(x,y)dA$ (bármilyen c esetén)
2. *Összeg és különbség:* $\iint_T f(x,y) \pm g(x,y)dA = \iint_T f(x,y)dA \pm \iint_T g(x,y)dA$
3. *Majorálás*
   (a) Ha $f(x,y) \geq 0$ T-n, akkor $\iint_T f(x,y)dA \geq 0$
   (b) Ha $f(x,y) \geq g(x,y)$ T-n, akkor $\iint_T f(x,y)dA \geq \iint_T g(x,y)dA$
4. *Additivitás:* Ha T a közös belső ponttal nem rendelkező T_1 és T_2 tartományok egyesítése (15.7. ábra), akkor $\iint_T f(x,y)dA = \iint_{T_1} f(x,y)dA + \iint_{T_2} f(x,y)dA$

Ezen szabályok mögött az rejlik, hogy az integrál úgy viselkedik, mint egy összeg. Ha egy f függvény helyett a cf konstansszorosát tekintjük, akkor az

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A$$

integrálközelítő összeg (Riemann-összeg) helyett

$$\sum_{k=1}^{n} cf(x_k, y_k)\Delta A = c\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A = cS_n$$

áll. Ha $n \to \infty$, akkor látjuk, hogy $c\lim_{n\to\infty} S_n = c\iint_T f dA$ és $\lim_{n\to\infty} cS_n = \iint_T cf dA$ egyenlők. A „konstansszoros" tulajdonság az összegekről öröklődik a kettős integrálokra.

A többi tulajdonság is könnyen felírható integrálközelítő összegekkel, és azokból következik a kettős integrálra. Az ötlet egyszerű, de a precíz bizonyítás az integrálközelítő összegek konvergenciájának alapos vizsgálatát igényli.

15.1. Feladatok

Integrálási tartományok meghatározása és kettős integrálás

Az 1–10. feladatokban vázoljuk fel az integrálási tartományt és számítsuk ki az integrált!

1. $\int_0^3 \int_0^2 (4-y^2)\,dy\,dx$

2. $\int_0^3 \int_{-2}^0 (x^2y-2xy)\,dy\,dx$

3. $\int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (x+y+1)\,dx\,dy$

4. $\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin x+\cos y)\,dx\,dy$

5. $\int_0^{\pi} \int_0^{x} x\sin x\,dy\,dx$

6. $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y\,dy\,dx$

7. $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y}\,dx\,dy$

8. $\int_1^2 \int_y^{y^2} dx\,dy$

9. $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3e^{xy}\,dx\,dy$

10. $\int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2}e^{y/\sqrt{x}}\,dx\,dy$

A 11–16. feladatokban számítsuk ki f integrálját az adott tartomány felett!

11. Trapéz: $f(x,y)=x/y$, a tartomány az első síknegyedben van és $y=x$, $y=2x$, $x=1$, $x=2$ egyenesek határolják.

12. Négyzet: $f(x,y)=1/(xy)$, az $1\le x\le 2$, $1\le y\le 2$ négyzet felett.

13. Háromszög: $f(x,y)=x^2+y^2$, egy olyan háromszögtartomány felett, amelynek csúcsai (0,0), (1,0), (0,1).

14. Téglalap: $f(x,y)=y\cos xy$, a $0\le x\le \pi$, $0\le y\le 1$ téglalap felett.

15. Háromszög: $f(u,v)=v-\sqrt{u}$, afölött a háromszög alakú tartomány fölött, amelyet az $u+v=1$ egyenes vág le az uv-sík első negyedéből.

16. Görbével határolt tartomány: $f(s,t)=e^s\ln t$, a tartomány pedig az st-sík első negyedében fekszik az $s=\ln t$ görbe felett, $t=1$ és $t=2$ között.

A következő feladatokban egy-egy kétszeres integrál van felírva. Vázoljuk fel az integrálási tartományt, és számítsuk ki az integrált (17–20. feladatok)!

17. $\int_{-2}^0 \int_{v}^{-v} 2\,dp\,dv$ (pv-sík)

18. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-s^2}} 8t\,dt\,ds$ (st-sík)

19. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_0^{1/\cos t} 3\cos t\,du\,dt$ (tu-sík)

20. $\int_0^3 \int_1^{4-2u} \frac{4-2u}{v^2}\,dv\,du$ (uv-sík)

Az integrálás sorrendjének felcserélése

A 21–30. feladatokban vázoljuk fel az integrálási tartományt, és írjuk fel az integrált fordított integrálási sorrenddel!

21. $\int_0^1 \int_2^{4-2x} dy\,dx$

22. $\int_0^2 \int_{y-2}^0 dx\,dy$

23. $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx\,dy$

24. $\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} dy\,dx$

25. $\int_0^1 \int_1^{e^x} dy\,dx$

26. $\int_0^{\ln 2} \int_{e^x}^2 dx\,dy$

27. $\int_0^{3/2} \int_0^{9-4x^2} 16x\,dy\,dx$

28. $\int_0^2 \int_0^{4-y^2} y\,dx\,dy$

29. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3y\,dx\,dy$

30. $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x\,dy\,dx$

Kettős integrálok kiszámítása

A 31–38. feladatokban vázoljuk fel az integrálási tartományt, írjuk fel és számítsuk ki az integrált fordított integrálási sorrenddel!

31. $\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,dy\,dx$

32. $\int_0^2 \int_x^2 2y^2\sin xy\,dy\,dx$

33. $\int_0^1 \int_y^1 x^2e^{xy}\,dx\,dy$

34. $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\,dy\,dx$

35. $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\,dx\,dy$

36. $\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3}\,dy\,dx$

37. $\int_0^{1/16} \int_{y^{1/4}}^{1/2} \cos(16\pi x^5)\,dx\,dy$

38. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\,dy\,dx$

A 39. és 40. feladatokban számítsuk ki a kettős integrálokat!

39. Négyzet: $\int\int_T (y-2x^2)\,dA$, ahol az integrálási tartományt $|x|+|y|=1$ határolja.

40. Háromszög: $\int\int_T xy\,dA$, ahol a tartományt az $y=x$, $y=2x$ és az $x+y=2$ egyenesek határolják.

$z=f(x,y)$ felület alatti térfogat meghatározása

41. Határozzuk meg a térfogatát annak a térbeli tartománynak, amelyet felülről a $z=x^2+y^2$ paraboloid határol, az alapja pedig

az $y=x$, $x=0$ és $x+y=2$ egyenesek által határolt háromszög az xy-síkban!

42. Határozzuk meg a térfogatát annak a térbeli tartománynak, amelyet felülről a $z=x^2$ parabolikus hengerfelület határol, és az alapja az xy-síknak az $y=2-x^2$ parabola és $y=x$ egyenes által közrefogott része!

43. Határozzuk meg a térfogatát annak a térbeli tartománynak, amelyet felülről a $z=x+4$ sík határol, az alapja pedig az xy-síkban az $y=4-x^2$ parabola és az $y=3x$ egyenes által határolt terület!

44. Határozzuk meg a térfogatát annak az első térnyolcadbeli testnek, amelyet a koordinátasíkok, az $x^2+y^2=4$ henger és a $z+y=3$ sík határolnak!

45. Határozzuk meg a térfogatát annak az első térnyolcadbeli testnek, amelyet a koordinátasíkok, az $x=3$ sík és a $z=4-y^2$ parabolikus henger határolnak!

46. Határozzuk meg a térfogatát annak a tartománynak, amelyet a $z=4-x^2-y$ felület vág ki az első térnyolcadból!

47. Határozzuk meg a térfogatát annak az éknek, amelyet a $z=12-3y^2$ henger és az $x+y=2$ sík vág ki az első térnyolcadból!

48. Határozzuk meg a térfogatát annak a testnek, amelyet a $z=0$ és a $3x+z=3$ síkok vágnak ki az $|x|+|y|\le 1$ négyzetes hasábból!

49. Határozzuk meg a térfogatát annak a testnek, amelyet az $x=1$, $x=2$, $z=0$, $z=x+1$ síkok és az $y=\pm 1/x$ hengerek határolnak!

50. Határozzuk meg a térfogatát annak a térbeli tartománynak, amelyet az $x=\pm\pi/3$ síkok valamint az $y=\pm 1/\cos x$, $z=1+y^2$ hengerek és az xy-sík határolnak!

Integrálok nemkorlátos tartomány felett

Improprius kettős integrálok az egyváltozós improprius integrálokhoz hasonlóan értelmezhetők, és hasonlóan is számíthatók. Először meghatározzuk az integrált véges tartományon, és megnézzük a határértéket, amint a határok a két változóra **egymástól függetlenül** végtelenbe tartanak. A következő feladatokban számítsuk az integrálokat kétszeres integrálként, majd vizsgáljuk az egyváltozó szerinti végtelenben vett határértéket, ahogy a 8.8 alfejezetben (51–54.).

51. $\displaystyle\int_1^{\infty}\int_{e^{-x}}^{1}\frac{1}{x^3y}\,dy\,dx$

52. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(2y+1)\,dy\,dx$

53. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}\,dx\,dy$

54. $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}xe^{-(x+2y)}\,dx\,dy$

Kettős integrálok közelítő kiszámítása

Az 55. és 56. feladatban közelítsük a kettős integrál értékét integrálközelítő összeggel! A T tartomány felosztását $x=a$ és $y=b$ alakú egyenesekkel végezzük! Minden résztartományban a megadott módon vegyük fel az (x_k,y_k) pontokat!

$$\iint_T f(x,y)\,dA\approx\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k)\Delta A_k.$$

55. $f(x,y)=x+y$, a tartományt felülről az $y=\sqrt{1-x^2}$ félkör, alulról az x-tengely határolja. A felosztás legyen: $x=-1,\,-1/2,\,0,\,1/4,\,1/2,\,1$; $y=0,\,1/2,\,1$; az (x_k,y_k) pont legyen a kis téglalap bal alsó sarka (a kis téglalapnak teljes egészében a tartományban kell lennie).

56. $f(x,y)=x+2y$, a tartomány az $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ kör belseje. A felosztás legyen $x=1,\,3/2,\,2,\,5/2,\,3$; $y=2,\,5/2,\,3,\,7/2,\,4$; az (x_k,y_k) pont legyen a kis téglalap középpontja (a kis téglalapnak teljes egészében a tartományban kell lennie).

További példák és feladatok

57. Körcikk: Integráljuk az $f(x,y)=\sqrt{4-x^2}$ függvényt azon kisebbik körcikk felett, amit a $\theta=\pi/6$ és $\theta=\pi/2$ irányú félegyenesek vágnak ki az $x^2+y^2\le 4$ körlemezből!

58. Nemkorlátos tartomány: Integráljuk az $f(x,y)=1/[(x^2-x)(y-1)^{2/3}]$ függvényt a $2\le x<\infty$, $0\le y\le 2$ végtelen téglalapon!

59. Nem köralapú henger: Egy egyenes (nem köralapú) hengertartományt felülről a $z=x^2+y^2$ paraboloid határol, alapja az xy-síkban levő T. A térfogata:

$$V=\int_0^1\int_0^y(x^2+y^2)dxdy+\int_1^2\int_0^{2-y}(x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Vázoljuk fel a T tartományt az xy-síkban és fejezzük ki a térfogatot az integrálási sorrend felcserélésével egyetlen kétszeres integrállal! Ezután számítsuk ki a térfogatát!

60. Átírás kettős integrálra: Számítsuk ki a

$$\int_0^2(\operatorname{arctg}\pi x-\operatorname{arctg}x)\,dx$$

integrált! (*Útmutatás:* Írjuk át az integrandust integrál alakba!)

61. Kettős integrál maximalizálása: Az xy-sík melyik tartományán lesz az

$$\iint_T(4-x^2-2y^2)\,dA$$

integrál értéke a legnagyobb? Válaszunkat indokoljuk!

62. Kettős integrál minimalizálása: Az xy-sík melyik tartományán lesz az

$$\iint_T(x^2+y^2-9)\,dA$$

integrál értéke minimális? Válaszunkat indokoljuk!

63. Lehetséges az, hogy különböző választ kapunk, ha egy folytonos $f(x,y)$ függvényt az xy-sík egy téglalap alakú tartományán más-más sorrendben integrálunk?

64. Hogyan számítanánk ki a folytonos $f(x,y)$ függvény kettős integrálját az xy-sík azon háromszögtartománya felett, amelynek csúcsai (0,1), (2,0), (1,2)?

65. Nemkorlátos tartomány: Mutassuk meg, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$= 4\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

66. Improprius kettős integrál: Számítsuk ki a

$$\int_0^1\int_0^3 \frac{x^2}{(y-1)^{2/3}}\,dy\,dx$$

improprius integrált!

Számítógépes vizsgálatok

Kettős integrálok numerikus kiszámítása

Használjunk alkalmas számítógépes programot a következő integrálértékek közelítésére (67–70. feladatok)!

67. $\displaystyle\int_1^3\int_1^x \frac{1}{xy}\,dy\,dx$

68. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$

69. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \operatorname{arctg}(xy)\,dy\,dx$

70. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3\sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\,dx$

Használjunk alkalmas számítógépes programot a 71–76. feladatok integráljainak kiszámítására, majd cseréljük fel az integrálás sorrendjét és úgy is számíttassuk ki!

71. $\displaystyle\int_0^1\int_{2y}^4 e^{x^2}\,dx\,dy$

72. $\displaystyle\int_0^3\int_{x^2}^9 x\cos(y^2)\,dy\,dx$

73. $\displaystyle\int_0^2\int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} (x^2y-xy^2)\,dx\,dy$

74. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{4-y^2} e^{xy}\,dx\,dy$

75. $\displaystyle\int_1^2\int_0^{x^2} \frac{1}{x+y}\,dy\,dx$

76. $\displaystyle\int_1^2\int_{y^3}^8 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$

15.2. Terület, nyomaték, tömegközéppont

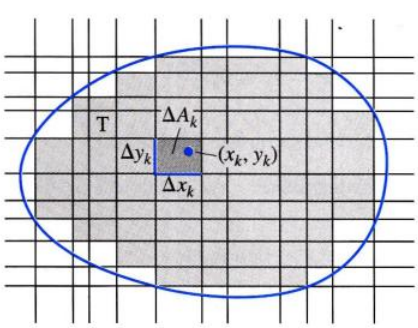
Ebben az alfejezetben megmutatjuk, hogyan lehet kettős integrállal síktartományok területét kiszámítani, és kétváltozós függvények átlagát meghatározni. Ezután tanulmányozzuk azt a fizikai kérdést, hogy hogyan találjuk meg egy síktartományt borító vékony lemez súlypontját.

Korlátos síktartományok területe

Ha az előző alfejezetben az f függvény területtel rendelkező T tartomány feletti kettős integráljának definíciójában $f(x,y) = 1$-et helyettesítünk, akkor az integrálközelítő összeg

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k \tag{15.7}$$

alakúra redukálódik. Ez egyszerűen azon kis téglalapok területeinek összege, amelyekkel a felosztást készítettük, és ez épp ahhoz az értékhez közelít, amit a T tartomány területének hívunk. Ahogy a felosztás normája tart nullához, a téglalapok oldalainak hossza tart nullához, így T lefedése egyre teljesebb (15.14. ábra).



15.14. ÁBRA

Egy T tartomány területét, összhangban az eddigiekkel, akár úgy is definiálhatnánk, hogy

$$\text{Terület} = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta A_k = \iint_T dA, \tag{15.8}$$

feltéve, hogy a határt lefedő téglalapok területeinek összege nullához tart. Ha a ponthalmaz, aminek a területét akarjuk meghatározni, olyan, hogy egyetlen kis téglalapot sem tartalmaz teljes egészében, akkor az egyetlen tagot sem tartalmazó összeg nullának tekintendő.

DEFINÍCIÓ: Terület

Egy T korlátos zárt síktartomány **területe**

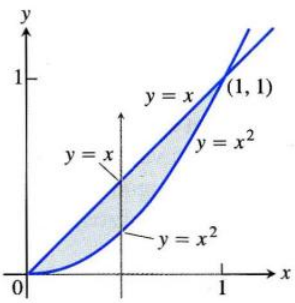
$$A = \iint_T dA,$$

ha ez az integrál létezik.

Ez a területdefiníció nyilvánvalóan megegyezik a korábbi egyváltozós esetben adott definícióval, amikor mindkettő alkalmazható, hiszen ugyanúgy téglalapok területével közelítjük a kívánt értéket. Másrészt viszont ezzel a definícióval többféle tartomány területét lehet kiszámítani.

1. PÉLDA: Terület meghatározása

Határozzuk meg a területét annak az első síknegyedbeli tartománynak, amelyet az $y = x$ és $y = x^2$ görbék határolnak!



15.15. ÁBRA: Az 1. példában szereplő tartomány.

Megoldás: Vázoljuk fel a tartományt (15.15. ábra), jelöljük be, hol metszik egymást a görbék, és a terület

$$A = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy dx = \int_0^1 \Big[y\Big]_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

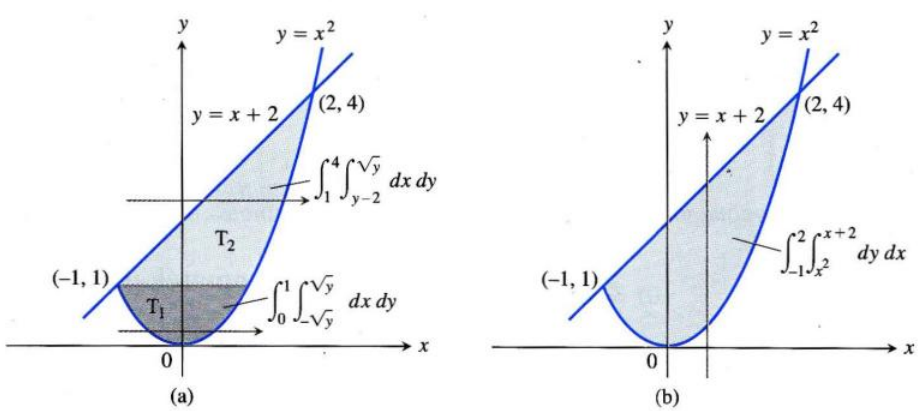
Vegyük észre, hogy az $\int_0^1 (x - x^2) dx$ egyszeres integrál, amit a belső integrál kiszámítása után kaptunk, éppen az, amit két görbe közötti területként számoltunk az 5.5. alfejezetben. □

2. PÉLDA: Terület meghatározása

Számítsuk ki annak a síktartománynak a területét, amelyet az $y = x^2$ parabola és az $y = x + 2$ egyenes határol!

Megoldás: Ha a T tartományt a T_1 és T_2 résztartományokra osztjuk (15.16a ábra), akkor a terület:

$$A = \iint_{T_1} dA + \iint_{T_2} dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx dy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx dy.$$



15.16. ÁBRA: Ez a terület két darab kettős integrállal számítható ki, ha **(a)** először x szerint integrálunk, de csak eggyel, ha **(b)** először y szerint integrálunk (2. példa).

Ha azonban megfordítjuk az integrálás sorrendjét (15.16b ábra), akkor a terület:

$$A = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} dy\,dx.$$

Ez a második alak sokkal egyszerűbb, csak egy integrál, és nyilván ezt számítjuk ki:

$$A = \int_{-1}^{2} \Big[y\Big]_{x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^{2} (x+2-x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}. \qquad \square$$

Átlagérték

Egy egyváltozós integrálható függvény átlagát egy véges, zárt intervallumon úgy definiáltuk, hogy a függvénynek az intervallumon számított integrálját osztottuk az intervallum hosszával. Egy kétváltozós integrálható függvény átlagát egy korlátos, zárt tartományon úgy definiáljuk, hogy a függvény integrálját az adott tartományon elosztjuk a tartomány területével. Ezt úgy szemléltethetjük, hogy a függvényértékeket mint egy hullámzó víz vízmagasságát képzeljük el egy olyan tartályban, amelynek függőleges falai a tartomány határán vannak, az átlagérték pedig az az érték, amit a vízmagasság felvesz, ha a víz elnyugodott és mindenütt ugyanolyan magasan áll. A magasság ekkor a víz térfogata osztva a tartomány területével. Az átlagérték definíciója tehát:

$$\text{Az } f \text{ függvény } \textbf{átlagértéke} \text{ a } T \text{ tartományon} = \frac{1}{T \text{ területe}} \iint_T f\,dA \qquad (15.9)$$

Ha f egy vékony, T tartományt lefedő lap hőmérsékletét adja meg, akkor az átlaghőmérsékletet úgy kapjuk, hogy f-nek a T tartományon vett kettős integrálját elosztjuk a tartomány területével. Ha $f(x,y)$ az (x,y) pont távolsága egy adott ponttól, akkor f átlagértéke egy T tartományon, a tartomány pontjainak átlagos távolsága az adott ponttól.

3. PÉLDA:

Mennyi az $f(x,y) = x\cos xy$ függvény átlaga a $T: 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le 1$ téglalapon?

Megoldás: Először integráljuk f-et T-n.

$$\int_0^{\pi} \int_0^{1} x\cos xy\,dy\,dx = \int_0^{\pi} \Big[\sin xy\Big]_{y=0}^{y=1} dx \qquad \int x\cos xy\,dy = \sin xy + C$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin x - 0)dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2.$$

A tartomány területe π. Az f függvény átlagértéke a T tartományon $2/\pi$. $\square$

Vékony lemez nyomatékai és tömegközéppontja

A 6.4. alfejezetben bevezettük nyomatékok és a tömegközéppont fogalmát, és láttuk, hogyan számolhatjuk ki ezeket vékony rúd vagy vékony, állandó sűrűségű lemez esetén. Többes integrálokkal számolva a legkülönbözőbb alakokra is kiterjeszthetjük számításainkat, változó sűrűség mellett is. Először azt a problémát tekintjük, hogyan találhatjuk meg egy alumínium korong vagy egy háromszög alakú fémlap tömegközéppontját. Feltesszük, hogy a tömegeloszlás folytonos.

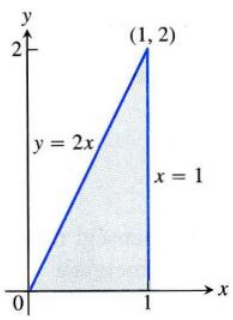
Tömeg:	$M = \int\int_R \delta(x,y)dA$ $\delta(x,y)$ a sűrűség az (x,y) pontban.
Forgatónyomaték:	$M_x = \int\int_R y\delta(x,y)dA, \quad M_y = \int\int_R x\delta(x,y)dA$
Tömegközéppont:	$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$

15.1. TÁBLÁZAT: Egy T tartományt borító vékony lemez tömeg- és nyomatékképletei.

Az anyag $\delta(x,y)$ sűrűségfüggvénye az egységnyi területen levő tömeget adja. A tömeget úgy kapjuk meg, hogy a sűrűségfüggvényt integráljuk azon a T tartományon, ami a vékony lapot meghatározza. Egy tengelyre vonatkozó forgatónyomatékot (első momentumot) úgy számítunk, hogy a tengelytől való távolsággal szorozzuk a sűrűséget, és integráljuk a tartományra. A tömegközéppontot ezekből a nyomatékokból számíthatjuk. A 15.1. táblázatban megtalálhatjuk a nyomatékokra és tömegközéppontra vonatkozó kettős integrálok képleteit.

4. PÉLDA: Változó sűrűségű vékony lemez tömegközéppontjának meghatározása

Egy vékony lemez borítja azt a háromszöget, amelyet az x-tengely, az $x = 1$ és az $y = 2x$ egyenesek határolnak az első síknegyedben. A lemez sűrűsége az (x,y) pontban $\delta(x,y) = 6x + 6y + 6$. Határozzuk meg a lemez tömegét, a koordinátatengelyekre vonatkozó nyomatékait, tömegközéppontját!



15.17. ÁBRA: A lemez által borított háromszög (4. példa).

Megoldás: Felvázoljuk a lemezt, és meghatározzuk az integrálás határait, amit ki kell számítanunk (15.17. ábra).

A lemez tömege

$$M = \int_0^1 \int_0^{2x} \delta(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6x+6y+6)dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[6xy + 3y^2 + 6y\right]_{y=0}^{y=2x} dx =$$

$$= \int_0^1 (24x^2 + 12x)dx = \left[8x^3 + 6x^2\right]_0^1 = 14.$$

Az x tengelyre vonatkozó nyomaték

$$M_x = \int_0^1 \int_0^{2x} y\delta(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy + 6y^2 + 6y)dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[3xy^2 + 2y^3 + 3y^2\right]_{y=0}^{y=2x} dx = \int_0^1 (28x^3 + 12x^2)dx =$$

$$= \left[7x^4 + 4x^3\right]_0^1 = 11.$$

Hasonló számítások adják az y tengelyre vonatkozó forgatónyomatékot:

$$M_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x\delta(x,y)\,dy\,dx = 10.$$

Ezekből az adatokból a tömegközéppont koordinátái:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{11}{14}.$$

□

Tehetetlenségi nyomaték

A nyomatékképletek (15.1. táblázat) a test egyensúlyáról és arról adnak információt, hogy mekkora forgatónyomatékot gyakorol a test a tengelyekre a gravitációs térben. Ha a test egy forgó alkatrész, pl. tengely, akkor minket inkább érdekel, hogy mennyi energia van benne, mennyi energia szükséges egy adott szögsebességre való felgyorsításához. Ehhez kell a tehetetlenségi nyomaték (második momentum).

Gondolatban osszuk fel a tengelyt kis téglatestekre, amelyeknek Δm_k a tömege, és jelölje r_k a k-adik kis test tömegközéppontjának távolságát a forgástengelytől (15.18. ábra). Ha a tengely $\omega = d\theta/dt$ radián/másodperc szögsebességgel forog, akkor a kis test tömegközéppontja állandó pályamenti sebességgel mozog a körpályája mentén. Ez a sebesség:

$$v_k = \frac{d}{dt}(r_k\theta) = r_k\frac{d\theta}{dt} = r_k\omega.$$

A kis test kinetikus energiája körülbelül

$$\frac{1}{2}\Delta m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\Delta m_k(r_k\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 r_k^2\Delta m_k.$$

A tengely kinetikus energiája közelítőleg

$$\sum\frac{1}{2}\omega^2 r_k^2\Delta m_k.$$

Az az integrál, amit ezek az összegek közelítenek, miközben a tengelyt kisebb és kisebb részekre osztjuk fel, a tengely mozgási energiáját adja:

$$E_{tengely} = \int\frac{1}{2}\omega^2 r^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2\int r^2 dm. \tag{15.10}$$

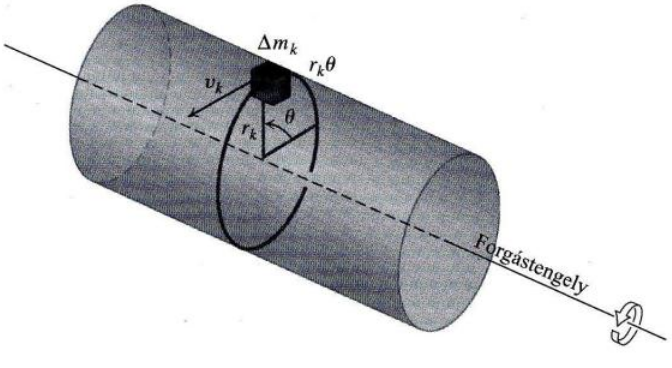
Az

$$I = \int r^2 dm$$

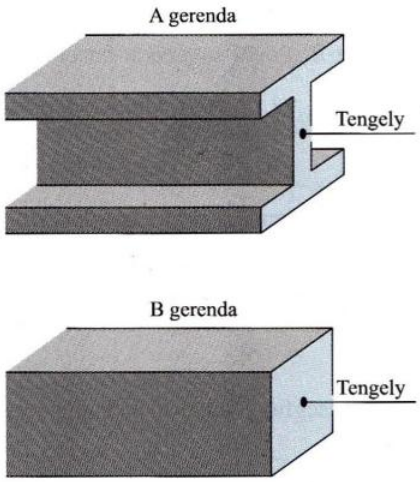
tényező a tengely forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka, és ahogy a (15.10) egyenlőségből látjuk, a tengely mozgási energiája

$$E_{tengely} = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Egy ilyen forgó tengely tehetetlenségi nyomatéka emlékeztet egy mozdony tehetetlenségére. Ahhoz, hogy egy m tömegű, egy egyenes mentén mozgó mozdonyt v sebességre gyorsítsunk fel, $E = (1/2)mv^2$ energiát kell befektetnünk. Ahhoz, hogy a mozdonyt megállítsuk, ezt az energiát el kell venni tőle. Ahhoz,



15.18. ÁBRA: Ahhoz, hogy meghatározzuk, hogy mennyi energia van egy forgó tengelyben, először kis téglatestekre felosztottnak képzeljük. Minden kis testnek megvan a maga kinetikus energiája. Összeadjuk a kis testek mozgási energiáját, hogy megkapjuk a tengelyét.



15.19. ÁBRA: Minél nagyobb a gerenda keresztmetszetének tehetetlenségi nyomatéka a hosszanti tengelyre vonatkoztatva, annál merevebb a gerenda. Az A gerenda keresztmetszetének területe megegyezik a B-ével, de az A merevebb.

hogy egy I tehetetlenségi nyomatékú tengelyt ω szögsebességre felpörgessünk, $E = (1/2)I\omega^2$ energiát kel befektetnünk. Ha meg akarjuk állítani a forgó tengelyt, akkor ezt az energiát vissza kell vennünk. Ami nehézzé teszi a mozdony megállítását, az a tömege. Ami a tengely leállítását nehézzé teszi, az a tehetetlenségi nyomatéka. A tehetetlenségi nyomaték nem csak a tömeg nagyságától függ, hanem az elhelyezkedésétől is.

A tehetetlenségi nyomaték abban is szerepet játszik, hogy hogyan hajlik meg egy fémgerenda valamilyen terhelés alatt. A gerenda merevsége konstansszorosa az I-nek, ami a gerenda keresztmetszetének tehetetlenségi nyomatéka a gerenda hosszanti tengelyére vonatkoztatva. Minél nagyobb az I, annál merevebb a gerenda, és annál kevésbé hajlik meg egy adott terhelés alatt. Ezért használnak I keresztmetszetű gerendákat téglalap keresztmetszetűek helyett. Az alsó és felső perem hordozza az anyag nagy részét viszonylag távol a hosszanti tengelytől, hogy minél nagyobb legyen I (15.19. ábra).

Azért, hogy lássuk, hogyan működik a tehetetlenségi nyomaték, végezzük el a következő kísérletet. Ragasztószalaggal erősítsünk két pénzdarabot egy ceruza két végére, és pörgessük meg a tömegközéppontja körül. Figyeljük meg, mekkora ellenállást érzünk, valahányszor meg akarjuk változtatni a mozgást. Erősítsük most a pénzdarabokat közelebb a középponthoz. Megfigyelhetjük, hogy kisebb ellenállást tapasztalunk, mint az előbb. A rendszernek ugyanaz a tömege, de kisebb az ellenállása a mozgás változtatásával szemben. A tehetetlenségi nyomatéka kisebb lett. A tehetetlenségi nyomaték adja a golfütőnek, teniszütőnek azt az érzését, hogy mennyire „kézreálló". Ugyanolyan alakú, ugyanolyan tömegű, azonos tömegközéppontú ütők különbözőképpen viselkedhetnek a tömegeloszlásuktól függően.

Vékony lemezek tehetetlenségi nyomatékainak képleteit megtalálhatjuk a 15.2. táblázatban. Egy kis darabka vékony lemez Δm tömege egyenlő ΔA területe és sűrűségének szorzata a darab egy pontjában. Olyan testek tehetetlenségi nyomatékának számítását, amelyek a tér egy részét foglalják el, a 15.5. alfejezetben tárgyaljuk. A matematikai különbség a **forgatónyomaték** (első momentum), M_x, M_y, és a **tehetetlenségi nyomaték** (második momentum), I_x, I_y között az, hogy az utóbbi az „erőkar", azaz az x és y távolság négyzetét használja.

Az I_0 momentumot **poláris momentumnak** is hívják, ha az origóra vonatkozik. Úgy számítjuk, hogy a $\delta(x,y)$ sűrűséget (egy területegységre jutó tömeg) az $r^2 = x^2 + y^2$-tel, azaz a reprezentáns pont origótól való távolságnégyzetével szorozzuk. Vegyük észre, hogy $I_0 = I_x + I_y$, azaz ha már ismerünk kettőt, a harmadikat számíthatjuk. I_0-at hívják I_z-nek is, a z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéknak. Az $I_z = I_x + I_y$ azonosságot **merőleges tengelyek tételének** is nevezik.

Az R_x **tehetetlenségi sugarat** (vagy **forgássugarat**) az

$$I_x = MR_x^2$$

egyenlettel definiáljuk. Azt mutatja meg, hogy az x-tengelytől milyen messze kellene a lemez teljes tömegét koncentrálni, hogy ugyanazt az I_x nyomatékot

Tehetetlenségi nyomaték (második momentum)		
Az x-tengelyre vonatkozó:	$I_x = \iint y^2\delta(x,y)\,dA$	
Az y-tengelyre vonatkozó:	$I_y = \iint x^2\delta(x,y)\,dA$	
Az L egyenesre vonatkozó:	$I_L = \iint r^2(x,y)\delta(x,y)\,dA$	
	ahol $r(x,y) = (x,y)$ távolsága L-től	
Az origóra vonatkozó (poláris momentum):	$I_0 = \iint (x^2+y^2)\delta(x,y)\,dA = I_x + I_y$	
Tehetetlenségi sugár:	x-tengelyre vonatkozó:	$R_x = \sqrt{I_x/M}$
	y-tengelyre vonatkozó:	$R_y = \sqrt{I_y/M}$
	origóra vonatkozó:	$R_0 = \sqrt{I_0/M}$

15.2. TÁBLÁZAT: Az xy-síkban levő vékony lemezre vonatkozó második momentumok.

kapjuk. A tehetetlenségi sugár lehetőséget ad arra, hogy a tehetetlenségi nyomatékot a tömeggel és távolsággal fejezzük ki. Az R_y és R_0 sugarakat hasonlóan definiáljuk:

$$I_y = MR_y^2 \quad \text{és} \quad I_0 = MR_0^2.$$

5. PÉLDA: **Tehetetlenségi nyomaték és tehetetlenségi sugár meghatározása**

Adjuk meg a tehetetlenségi nyomatékokat és a forgássugarakat a koordinátatengelyekre és az origóra vonatkoztatva a 4. példában szereplő vékony lemez esetén!

Megoldás: A 4. példa $\delta(x,y) = 6x+6y+6$ sűrűségfüggvényével az x-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték

$$I_x = \int_0^1 \int_0^{2x} y^2 \delta(x,y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy^2 + 6y^3 + 6y^2)\, dy\, dx =$$
$$= \int_0^1 \left[2xy^3 + \frac{3}{2}y^4 + 2y^3 \right]_{y=0}^{y=2x} dx = \int_0^1 (40x^4 + 16x^3) dx =$$
$$= [8x^5 + 4x^4]_0^1 = 12.$$

Hasonlóan az y-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték

$$I_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2 \delta(x,y)\, dy\, dx = \frac{39}{5}.$$

Figyeljünk, hogy a sűrűséget y^2-tel szorozzuk I_x számolásakor, és x^2-tel I_y számolásakor.

Ha már tudjuk I_x-et és I_y-t, nem kell I_0-t integrálással számítani, hanem az $I_0 = I_x + I_y$ képletet használjuk:

$$I_0 = 12 + \frac{39}{5} = \frac{60+39}{5} = \frac{99}{5}.$$

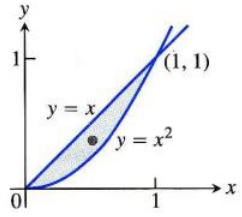
A forgássugarak:

$$R_x = \sqrt{I_x/M} = \sqrt{12/14} = \sqrt{6/7} \approx 0,93$$
$$R_y = \sqrt{I_y/M} = \sqrt{\left(\frac{39}{5}\right)/14} = \sqrt{39/70} \approx 0,75$$
$$R_0 = \sqrt{I_0/M} = \sqrt{\left(\frac{99}{5}\right)/14} = \sqrt{99/70} \approx 1,19. \qquad \square$$

A momentumok a statisztikában is fontosak. Az első momentumokat az adathalmaz μ átlagánál, a második momentumokat a σ^2 szórásnégyzet számításánál használjuk. A harmadik és negyedik momentumok a ferdeség és a kurtózis (csúcsosság) számításánál használatosak.

Geometriai alakzatok súlypontjai

Ha a test sűrűsége konstans, akkor a 15.1 táblázat $\bar{x}$ és $\bar{y}$ képleteiben egyszerűsíthetünk vele. Ha $\bar{x}$-et vagy $\bar{y}$-t nézzük, δ akár 1 is lehet. Amíg δ konstans, a tömegközéppont csak a test geometriai alakjától függ, nem az anyagától. Ezekben az esetekben a tömegközéppontot **súlypontnak** hívjuk. A súlypont kiszámításához a sűrűséget 1-nek vesszük és $\bar{x}$-et, $\bar{y}$-t ugyanúgy számítjuk, mint eddig.



15.20. ÁBRA: Ennek az alakzatnak a súlypontját a 6. példában számoljuk ki.

6. PÉLDA:

Hol lesz annak a tartománynak a súlypontja, amelyik az első térnegyedben van, és felülről az $y = x$ egyenes, alulról az $y = x^2$ parabola határolja?

Megoldás: Felvázoljuk a tartományt, majd megállapítjuk az integrálás határait (15.20. ábra). $\delta = 1$-et helyettesítünk, és a megfelelő képletet használjuk a 15.1 táblázatból:

$$M = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 1\,dy\,dx = \int_0^1 \Big[y\Big]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 (x-x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6},$$

$$M_x = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} y\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{1}{15},$$

$$M_y = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x\,dy\,dx = \int_0^1 \Big[xy\Big]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 (x^2-x^3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Ezekből az M, M_x, M_y értékekből

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1/12}{1/6} = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1/15}{1/6} = \frac{2}{5}. \qquad \square$$

A súlypont (1/2, 2/5).

15.2. Feladatok

Terület kettős integrállal

Az 1–8. feladatokban vázoljuk fel az adott görbékkel határolt tartományt, azután fejezzük ki a területét mint kétszeres integrált, majd számítsuk is ki a területet!

1. A koordinátatengelyek és az $x + y = 2$ egyenes.

2. Az $x = 0$, $y = 2x$ és az $y = 4$ egyenesek.

3. Az $x = -y^2$ parabola és az $y = x + 2$ egyenes.

4. Az $x = y - y^2$ parabola és az $y = -x$ egyenes.

5. Az $y = e^x$ görbe és az $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 2$ egyenesek.

6. Az $y = \ln x$ és $y = 2\ln x$ görbék, és az $x = e$ egyenes az első síknegyedben.

7. Az $x = y^2$ és $x = 2y - y^2$ parabolák.

8. Az $x = y^2 - 1$ és $x = 2y^2 - 2$ parabolák.

Az integrálási tartomány meghatározása

A 9–14. feladatokban szereplő integrálok, ill. ezek összegei, xy-síkbeli tartományok területét adják. Vázoljuk fel a tartományokat, *adjuk meg a határológörbéket és a metszéspontokat! Majd* számítsuk ki az integrálokat!

9. $\displaystyle\int_0^6 \int_{y^2/3}^{2y} dx\,dy$

10. $\displaystyle\int_0^3 \int_{-x}^{x(2-x)} dy\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} dy\,dx$

12. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \int_{y^2}^{y+2} dx\,dy$

13. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \int_{-2x}^{1-x} dy\,dx + \int_0^2 \int_{-x/2}^{1-x} dy\,dx$

14. $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2-4}^{0} dy\,dx + \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy\,dx$

Átlagérték

15. Mennyi az $f(x,y) = \sin(x+y)$ függvény átlaga a következő téglalapokon:

(a) $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$

(b) $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi/2$

16. Mit gondol, melyik lesz nagyobb: az $f(x,y) = xy$ függvény átlaga a $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ téglalapon, vagy f átlaga az első síknegyedbe eső $x^2 + y^2 \le 1$ negyedkörön? Számítsuk ki, hogy megtudjuk!

17. *Mennyi az átlagértéke a* $z = x^2 + y^2$ *paraboloidnak az* $0 \le$ $\le x \le 2$, $0 \le y \le 2$ négyzeten?

18. Mennyi az átlagértéke az $f(x,y) = 1/(xy)$ függvénynek az $\ln 2 \le x \le 2\ln 2$, $\ln 2 \le y \le 2\ln 2$ négyzeten?

Állandó sűrűség

19. Tömegközéppont meghatározása: Határozzuk meg annak a vékony lemeznek a tömegközéppontját, amelynek sűrűsége $\delta = 3$, az első síknegyedben van és az $x = 0$, $y = x$, $y = 2 - x^2$ görbék határolják!

20. Tehetetlenségi nyomatékok és forgássugarak meghatározása: Határozzuk meg a koordinátatengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékait és forgássugarait annak az első síknegyedbeli, vékony téglalap alakú lemeznek, amelynek állandó δ sűrűsége van, és az $x = 3$ és $y = 3$ egyenesek határolják!

21. Súlypont meghatározása: Határozzuk meg a súlypontját annak az első síknegyedbeli tartománynak, amelyet az x-tengely, az $y^2 = 2x$ parabola, és az $x + y = 4$ egyenes határol!

22. Súlypont meghatározása: Hol van a súlypontja annak a háromszögtartománynak, amelyet az $x + y = 3$ egyenes vág ki az első síknegyedből?

23. Súlypont meghatározása: Határozzuk meg a súlypontját annak a tartománynak, amelyet az x-tengely és az $y = \sqrt{1 - x^2}$ görbe határol!

24. Súlypont meghatározása: Az első síknegyedben az a terület, amit az $y = 6x - x^2$ parabola és az $y = x$ egyenes határolnak, 125/6 területegység. Hol van a súlypontja?

25. Súlypont meghatározása: Határozzuk meg a súlypontját annak a tartománynak, amit az $x^2 + y^2 = a^2$ kör vág ki az első negyedből!

26. Súlypont meghatározása: Határozzuk meg a súlypontját annak a tartománynak, amelyik az x-tengely és az $y = \sin x$ görbe íve között van, ha $0 \le y \le \pi$!

27. Tehetetlenségi nyomaték meghatározása: Határozzuk meg az x-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát annak a $\delta = 1$ sűrűségű vékony lemeznek, amelyet az $x^2 + y^2 = 4$ kör határol! Ezzel az eredménnyel fejezzük ki I_y és I_0 értékét is!

28. Tehetetlenségi nyomaték meghatározása: Határozzuk meg az y-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát annak a $\delta = 1$ sűrűségű vékony lemeznek, amelyet az $y = (\sin^2 x)/x^2$ görbe és az x-tengely $\pi \le x \le 2\pi$ intervalluma határol!

29. Végtelen tartomány súlypontja: Határozzuk meg a súlypontját annak a végtelen tartománynak, amelyik a második síknegyedben van és a koordinátatengelyek, valamint az $y = e^x$ görbe határolja! (Improprius integrált számolunk.)

30. Végtelen lemez első momentuma: Határozzuk meg az y-tengelyre vonatkozó első momentumát annak a vékony lemeznek, amelynek sűrűsége $\delta(x,y) = 1$ és az első síknegyed $y = e^{-x^2/2}$ görbéje alatti részt borítja!

Változó sűrűség

31. Tehetetlenségi nyomaték és tehetetlenségi sugár meghatározása: Határozzuk meg az x-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát és tehetetlenségi sugarát annak a vékony lemeznek, amelyet az $x = y - y^2$ parabola és az $x + y = 0$ egyenes határolnak, feltéve, hogy a sűrűség $\delta(x,y) = x + y$?

32. Tömeg meghatározása: Mennyi a tömege annak a vékony lemeznek, amelyik az $x^2 + 4y^2 = 12$ ellipszisből az $x = 4y^2$ parabola által kivágott kisebbik részt takarja, ha a sűrűségfüggvény $\delta(x,y) = 5x$?

33. Tömegközéppont meghatározása: Hol van a tömegközéppontja annak a háromszög alakú vékony lemeznek, amelyet az y-tengely, az $y = x$ és $y = 2 - x$ egyenesek határolnak és sűrűsége $\delta(x,y) = 6x + 3y + 3$?

34. Tömegközéppont és tehetetlenségi nyomaték meghatározása: Hol van a tömegközéppontja, és mennyi az x-tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka annak a vékony lemeznek, amelyet az $x = y^2$ és $x = 2y - y^2$ görbék határolnak, és sűrűsége $\delta(x,y) = y + 1$.

35. Tömegközéppont, tehetetlenségi nyomaték és tehetetlenségi sugár meghatározása: Határozzuk meg a tömegközéppontját, az y-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát és tehetetlenségi sugarát annak a vékony lemeznek, amelyet az első síknegyedből az $x = 6$ és $y = 1$ egyenesek vágnak ki, és sűrűsége $\delta(x,y) = x + y + 1$.

36. Tömegközéppont, tehetetlenségi nyomaték és tehetetlenségi sugár meghatározása: Határozzuk meg a tömegközéppontját, az y-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát és tehetetlenségi sugarát annak a vékony lemeznek, amelyet az $y = 1$ egyenes és az $y = x^2$ parabola határolnak, és sűrűségfüggvénye $\delta(x,y) = y + 1$.

37. Tömegközéppont, tehetetlenségi nyomaték és tehetetlenségi sugár meghatározása: Határozzuk meg a tömegközéppontját, az y-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát és tehetetlenségi sugarát annak a vékony lemeznek, amelyet az x-tengely, az $x = \pm 1$ egyenesek és az $y = x^2$ parabola határol, ha a sűrűsége $\delta(x,y) = 7y + 1$.

38. Tömegközéppont, tehetetlenségi nyomaték és tehetetlenségi sugár meghatározása: Határozzuk meg a tömegközéppontját, az x-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát és tehetetlenségi sugarát annak a vékony lemeznek, amelyet $x = 0$, $x = 20$, $y = -1$ és $y = 1$ egyenesek határolnak, sűrűsége pedig $\delta(x,y) = 1 + (x/20)$.

39. Tömegközéppont, tehetetlenségi nyomaték és tehetetlenségi sugár meghatározása: Határozzuk meg a tömegközéppontját, a koordinátatengelyekre valamint az origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékait és forgássugarait annak a vékony lemeznek, amelyet az $y = x$, $y = -x$ és $y = 1$ egyenesek határolnak, sűrűsége pedig $\delta(x,y) = y + 1$.

40. Tömegközéppont, tehetetlenségi nyomaték és tehetetlenségi sugár meghatározása: Ismételjük meg az előző feladatot $\delta(x,y) = 3x^2 + 1$ sűrűséggel!

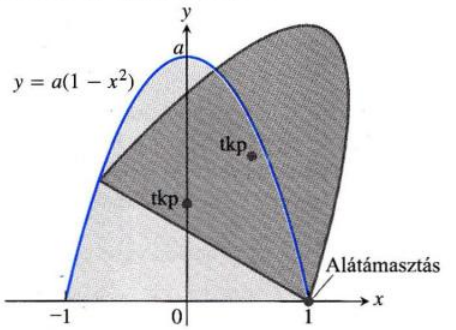
További példák és feladatok

41. Baktérium populáció: Ha $f(x,y) = (10000e^y)/(1 + |x|/2)$ egy bizonyos baktérium populációsűrűségét jelöli az xy-síkon, ahol x és y cm-ben van mérve, akkor határozzuk meg a teljes baktérium populációt a $-5 \le x \le 5$, $-2 \le y \le 0$ téglalapon!

42. Regionális populáció: Ha $f(x,y) = 100(y + 1)$ a népesség sűrűségét adja egy sík vidéken, ahol x és y km-ben van mérve, akkor határozzuk meg az $x = y^2$ és $x = 2y - y^2$ görbék közötti részen lakó népességet!

43. Készüléktervezés: Amikor egy készüléket tervezünk, fontos kérdés, hogy mennyire dönthető meg. Ha megdöntik, magától visszabillen, ha a súlypontja a forgáspont (alátámasztás) megfelelő oldalán marad. Tegyük fel, hogy a szerkezet alakja megközelítőleg parabolikus (régen voltak ilyen rádiók), amit az xy-síkban a $0 \le y \le a(1 - x^2)$ és $-1 \le x \le 1$ egyenlőtlenségekkel adhatunk meg. Tegyük fel továbbá, hogy a sűrűség konstans.

Mekkora legyen a, hogy a készüléket legalább 45° fokkal kelljen megdönteni ahhoz, hogy felboruljon?



44. A tehetetlenségi nyomaték minimalizálása: Egy állandó $\delta(x,y) = 1$ sűrűségű téglalap alakú lemez az első síknegyed $x = 4$ és $y = 2$ egyenesekkel határolt részét borítja. A lemez I_a tehetetlenségi nyomatékát az $y = a$ egyenesre vonatkoztatva az

$$I_a = \int_0^4 \int_0^2 (y-a)^2 \, dy \, dx$$

integrál adja. Határozzuk meg a értékét, amire I_a minimális!

45. Nemkorlátos tartomány súlypontja: Hol van a súlypontja az xy-sík $y = 1/\sqrt{1-x^2}$, $y = -1/\sqrt{1-x^2}$ görbékkel és $x = 0$, $x = 1$ egyenesekkel határolt tartományának?

46. Vékony rúd tehetetlenségi sugara: Mekkora a tehetetlenségi sugara annak az L cm hosszúságú, konstans δ g/cm lineáris sűrűségű vékony rúdnak, arra a tengelyre vonatkoztatva,

(a) amelyik a rúd tömegközéppontján megy át, és merőleges a rúd tengelyére?

(b) amelyik a rúd egyik végpontján megy át, és merőleges a rúd tengelyére?

47. *(A 34. feladat folytatása)* Egy állandó δ sűrűségű lemez borítja az xy-síkban az $x = y^2$, $x = 2y - y^2$ görbékkel határolt tartományt.

(a) Állandó sűrűség: Mekkora a δ állandó sűrűség, ha a lemez tömege ugyanannyi, mint a 34. feladatban volt?

(b) Átlagérték: Hasonlítsuk a feladat (a) részében kapott számot a $\delta(x,y) = y + 1$ sűrűséggel kapott átlagértékhez!

48. Átlaghőmérséklet Texasban: A *Texas Almanac* szerint Texasnak 254 megyéje van, és minden megyében van egy Nemzeti Meteorológiai Állomás. Tegyük fel, hogy egy t_0 időpillanatban mindegyik megmérte a pillanatnyi helyi hőmérsékletet. Adjunk képletet, ami elfogadhatóan kifejezi az átlaghőmérsékletet Texasban az adott t_0 pillanatban!

Párhuzamos tengelyek tétele

Legyen L_{tk} az xy-sík olyan egyenese, amelyik átmegy egy olyan m tömegű vékony lemez tömegközéppontján, amelyik egy adott tartományt borít az xy-síkon. Ha L ennek a síknak egy olyan egyenese, ami L_{tk}-val párhuzamos és attól h távolságra halad, akkor a **párhuzamos egyenesek tétele**, más néven **Steiner-tétel** szerint a tehetetlenségi nyomaték erre az egyenesre vonatkozóan

$$I_L = I_{tk} + mh^2$$

Ez a tétel lehetőséget ad nyomaték gyors kiszámítására, ha egy másikat már ismerünk.

49. A párhuzamos egyenesek tételének bizonyítása:

(a) Mutassuk meg, hogy a vékony lemez forgatónyomatéka (első momentuma) egy olyan (vele egy síkban levő) egyenesre, ami átmegy a tömegközéppontján, nulla! (*Útmutatás*: Helyezzük a tömegközéppontot az origóba úgy, hogy az egyenes legyen az y-tengely! Mit mond ekkor az $\bar{x} = M_y/M$ képlet?)

(b) Az (a) rész eredményét felhasználva vezessük le a párhuzamos egyenesek tételét! A sík koordináta-rendszerét vegyük fel úgy, hogy L_{tk} legyen az y-tengely és az L egyenes legyen $x = h$. Ezután az integrált bontsuk fel olyan integrálok összegére, amelyek értékét már ismerjük!

50. Tehetetlenségi nyomaték meghatározása:

(a) Használjuk a párhuzamos egyenesek tételét és a 4. példa eredményét, hogy meghatározzuk a 4. példában szereplő lemez tehetetlenségi nyomatékát a tömegközéppontján áthaladó x-, ill. y-tengellyel párhuzamos egyenesekre vonatkozóan!

(b) Használjuk az (a) rész eredményét az $x = 1$ és $y = 2$ egyenesekre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték meghatározására!

Papposz formulája

Papposz megállapította, hogy két, egymást át nem fedő részből álló alakzat súlypontja azon a szakaszon van, ami a részek külön vett súlypontjait összeköti. Pontosabban, tegyük fel, hogy P_1 és P_2 két egymást át nem fedő lemez a síkon, és tömegük rendre m_1, ill. m_2. Ha a tömegközéppontjaikba mutató helyvektorok $\mathbf{c}_1$ és $\mathbf{c}_2$, akkor a két lemez $P_1 \cup P_2$ egyesítésének tömegközéppontjának helyvektora

$$\mathbf{c} = \frac{m_1\mathbf{c}_1 + m_2\mathbf{c}_2}{m_1 + m_2}. \tag{15.11}$$

A (15.11) egyenlőséget **Papposz-formulának** hívjuk. Ha több egymást át nem fedő lemezünk van, és számuk véges, akkor a képlet általános alakja

$$\mathbf{c} = \frac{m_1\mathbf{c}_1 + m_2\mathbf{c}_2 + \cdots + m_n\mathbf{c}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}. \tag{15.12}$$

Ez a képlet különösen hasznos, ha egy olyan kacifántos alakú lemezről van szó, amelyik olyan állandó sűrűségű kisebb darabokból áll össze, amelyek súlypontját a geometriából már ismerjük.

51. Vezessük le a Papposz-formulát ((15.11) képlet). (*Útmutatás:* Vázoljuk fel a lemezeket mint tartományokat, és jelöljük be a tömegközéppontjaikat mint $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ és $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$.) Mik lesznek $P_1 \cup P_2$ momentumai a koordinátatengelyekre vonatkoztatva?

52. Használjuk a (15.11) képletet és a teljes indukciót a (15.12) képlet bizonyítására $n \geq 2$ esetére!

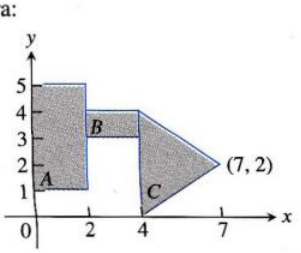
53. Legyenek az A, B és C alakzatok olyanok, mint a mellékelt ábrán. Használjuk a Papposz-tételt a következő alakzatok súlypontjainak meghatározására:

(a) $A \cup B$

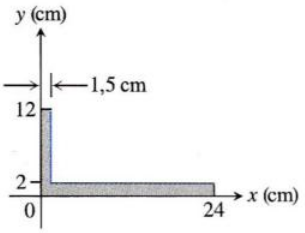
(b) $A \cup C$

(c) $B \cup C$

(d) $A \cup B \cup C$



54. Tömegközéppont meghatározása: Határozzuk meg az ábrán látható ácsvinkli tömegközéppontját!



55. Egy egyenlő szárú T háromszög alapja $2a$, magassága h. Az alap egy a sugarú D félkörlap átmérőjén nyugszik (úgy, hogy a kettő együtt tölcséres fagylaltra hasonlít). Mekkora legyen a és h viszonya, hogy a $T \cup D$ súlypontja a két alakzat közös határán legyen? T-ben?

56. Egy egyenlő szárú T háromszög magassága h, és az alapja egy s oldalú Q négyzet egyik oldala úgy, hogy nem fedik egymást. Milyen kapcsolatban legyen h és s, hogy $T \cup Q$ súlypontja a kettő közös határán legyen? Vesse össze válaszát az 55. feladattal!

15.3. Kettős integrálás polárkoordinátákkal

Az integrálokat néha könnyebb kiszámítani, ha áttérünk polárkoordinátákra. Ebben az alfejezetben megmutatjuk, hogyan lehet integrálásnál áttérni polárkoordinátákra, és pl. olyan alakzatok területét kiszámítani, amelyeknek határai polárkoordinátákkal vannak megadva.

Integrálás polárkoordinátákkal

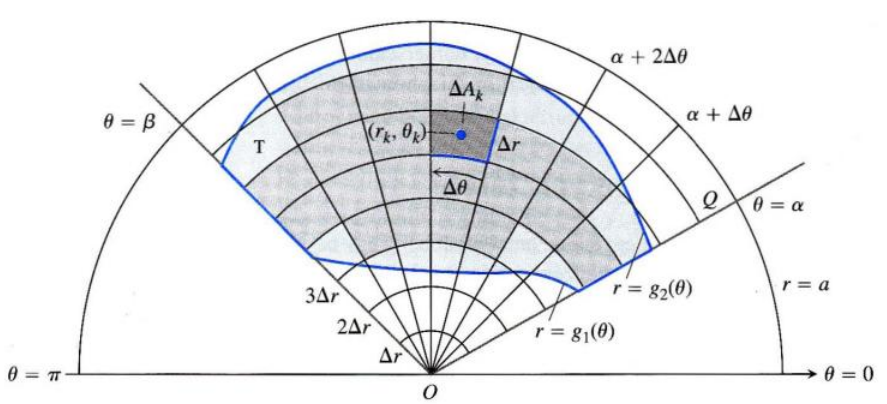
Amikor egy függvény kettős integrálját definiáltuk az xy-síkban egy T tartományon, akkor olyan kis téglalapokra bontottuk, amelyeknek oldalai párhuzamosak voltak a tengelyekkel, azaz az oldalak $x =$ állandó, ill. $y =$ állandó egyenletűek voltak. A polár síkon a „poláris téglalapok" olyan tartományok, amelyeknek oldalai konstans r, ill. konstans θ értékűek.

Tegyük fel, hogy egy $f(r,\theta)$ függvény van definiálva egy olyan T tartományon, amelyet a $\theta = \alpha$ és $\theta = \beta$ félegyenesek és az $r = g_1(\theta)$, ill. az $r = g_2(\theta)$ görbék határolnak. Tegyük fel továbbá, hogy $0 \le g_1(\theta) \le g_2(\theta) \le a$ minden α és β közötti θ esetén. Ekkor T teljes egészében egy Q körcikk-tartományban fekszik, amelyet a $0 \le r \le a$ és $\alpha \le \theta \le \beta$ egyenlőtlenségek definiálnak (15.21. ábra).

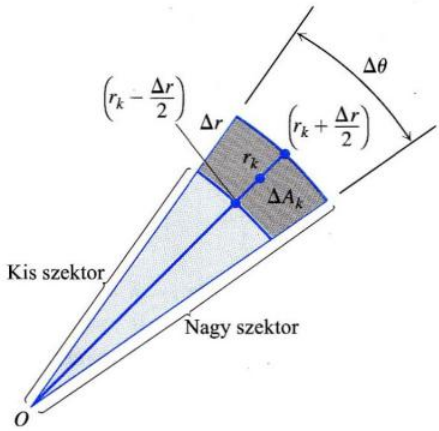
Lefedjük Q-t egy olyan ráccsal, ami koncentrikus körívekből és félegyenesekből áll. Az origó középpontú, koncentrikus körívek sugarai rendre Δr, $2\Delta r$, $\ldots$, $m\Delta r$, ahol $\Delta r = a/m$. A sugarakat a

$$\theta = \alpha, \quad \theta = \alpha + \Delta\theta, \quad \theta = \alpha + 2\Delta\theta, \quad \ldots, \quad \theta = \alpha + m'\Delta\theta = \beta$$

egyenletek adják, ahol $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/m'$. Az ívek és félegyenesek a Q tartományt olyan résztartományokra osztják, amelyeket „poláris téglalapoknak" nevezünk.



15.21. ÁBRA: A $g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)$ és $\alpha \le \theta \le \beta$ egyenlőtlenségekkel megadott T tartomány benne van a $0 \le r \le a$ és $\alpha \le \theta \le \beta$ egyenlőtlenségekkel megadott Q tartományban.



15.22. ÁBRA: Nyilvánvaló, hogy

$$\Delta A_k = \begin{pmatrix}\text{nagy szektor}\\ \text{területe}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{kis szektor}\\ \text{területe}\end{pmatrix},$$

amiből $\Delta A_k = r_k \Delta r \Delta\theta$. A $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ félegyenesekkel és az $r = r(\theta) > 0$ görbével határolt legyezőalakú tartományt **szektornak** nevezzük. Az ábrán ez éppen egy körcikk.

Megsorszámozzuk a poláris téglalapokat, amelyek T-ben fekszenek. Az nem számít, hogy milyen sorrendben. Jelölje a területeiket $\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots, \Delta A_n$. Legyen (r_k, θ_k) tetszőleges pontja a k-adik poláris téglalapnak, amelynek területe ΔA_k. Képezzük az

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k)\Delta A_k$$

összeget. Ha f folytonos T-n, akkor ez az összeg egy határértékhez közelít, ha a felosztást úgy finomítjuk, hogy Δr és $\Delta\theta$ is tart nullához. Ezt a határértéket az f függvény kettős integráljának hívjuk T-n, azaz

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iint_T f(r,\theta)\, dA.$$

Ahhoz, hogy ezt az integrált kiszámítsuk, az S_n összegben a ΔA_k területeket ki kell fejezni Δr és $\Delta\theta$ segítségével. A számításokat egyszerűsíti, ha a külső és a belső sugár r_k számtani közepével dolgozunk, amikor ΔA_k-t át akarjuk alakítani. Ekkor a belső ív sugara $r_k - (\Delta r/2)$, a külsőé pedig $r_k + (\Delta r/2)$ (15.22. ábra).

Tudjuk, hogy az r sugarú és θ középponti szögű körcikk területe

$$A = \frac{1}{2}\theta r^2,$$

ahol θ radiánban van kifejezve. (Ez belátható úgy, ha a kör πr^2 területét megszorozzuk $\theta/2\pi$-vel, azzal az aránnyal, amit a körcikk kivág az egész körből.) A kis és nagy körcikk területe

$$\text{Kis körcikk:}\quad \frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$$

$$\text{Nagy körcikk:}\quad \frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta.$$

Tehát

$$\begin{aligned}\Delta A_k &= \text{nagy körcikk területe} - \text{kis körcikk területe}\\ &= \frac{\Delta\theta}{2}\left[\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 - \left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2\right] = \frac{\Delta\theta}{2}(2r_k\Delta r) = r_k\Delta r\Delta\theta.\end{aligned}$$

Beírva ezt a kifejezést az összegbe

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k) r_k \Delta r \Delta\theta.$$

Ha Δr és $\Delta\theta$ tart nullához, akkor $n \to \infty$, az összeg pedig a következő kettős integrálhoz tart:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iint_T f(r,\theta) r\, dr\, d\theta.$$

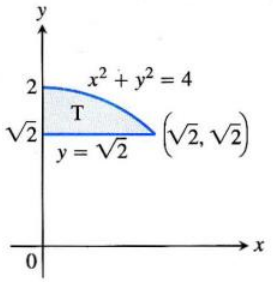
A Fubini-tétel egyik változata azt mondja ki, hogy ez a kettős integrál számítható két egymás utáni egyszeres integrállal r és θ szerint:

$$\iint_T f(r,\theta)\, dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r,\theta) r\, dr\, d\theta.$$

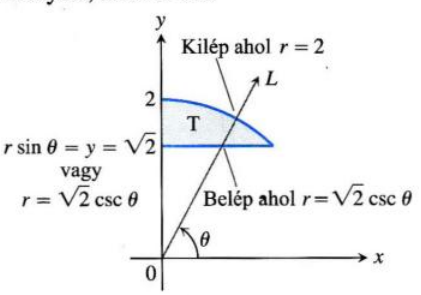
Az integrálás határainak meghatározása

Az az eljárás, amit alkalmaztunk derékszögű koordinátáknál a határok felírására a kétszeres integráloknál, a polárkoordinátáknál ugyanúgy működik. Ha az $\int\int_T f(r,\theta)dA$ integrált akarjuk kiszámítani a polárkoordinátákkal adott T tartományon először r szerint, majd θ szerint integrálva, akkor a következőképp járjunk el:

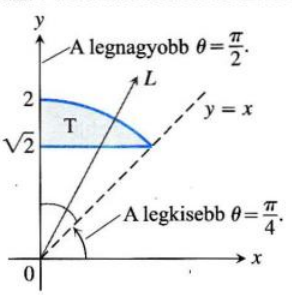
1. *Vázlat:* Vázoljuk fel a tartományt, adjuk meg a határoló görbéket.



2. *Határok r-re:* Húzzunk egy félegyenest az origóból úgy, hogy messe a tartományt, jelöljük L-lel! Nézzük meg, hol lép be a tartományba, és hol lép ki! Ezek lesznek r-re az alsó és felső határok. A belépés és kilépés origótól való távolsága, azaz r legkisebb és legnagyobb értéke az adott irányban, általában függ az iránytól, azaz θ-tól.



3. *Határok θ-ra:* Határozzuk meg a T tartományt határoló legkisebb és legnagyobb értékét θ-nak! Ezek az értékek lesznek a határok θ-ra.



Az integrál tehát

$$\iint_T f(r,\theta)\,dA = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \int_{r=\sqrt{2}/\sin\theta}^{r=2} f(r,\theta) r\,dr\,d\theta.$$

1. PÉLDA: **Az integrál határainak felírása**

Adjuk meg az integrálás határait, ha az $f(r,\theta)$ függvényt azon a T tartományon szeretnénk integrálni, ami az $r = 1 + \cos\theta$ kardioidon belül, és az $r = 1$ körön kívül van.

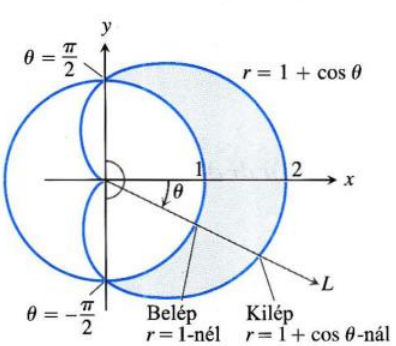
Megoldás:

1. Először felvázoljuk a tartományt, és megadjuk a határológörbéket.

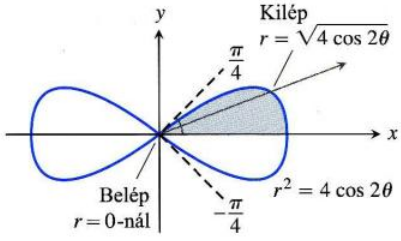
2. Megállapítjuk r határait. Az origóból induló félegyenes a tartományba $r = 1$-nél lép be, és $r = 1 + \cos\theta$-nál lép ki.

3. Megállapítjuk θ határait. Olyan félegyenesek, amelyek metszik a T tartományt a $\theta = -\pi/2$ és a $\theta = \pi/2$ irányok között vannak, így az integrál

$$\int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} \int_{r=1}^{r=1+\cos\theta} f(r,\theta) r\,dr\,d\theta. \qquad \square$$



15.23. ÁBRA: Az integrálási határok megállapítása polárkoordináták esetén az 1. példában.



15.24. ÁBRA: A sötétebb terület felett integrálva r 0-tól $\sqrt{4\cos 2\theta}$-ig megy, θ pedig 0-tól $\pi/4$-ig (2. példa).

Ha $f(r,\theta)$ olyan konstans függvény, aminek értéke 1, akkor az integrál T területét adja.

Terület polárkoordinátákkal

A korlátos, zárt T tartomány A területe:

$$A = \iint_T r\,dr\,d\theta.$$

Ez a képlet ugyanazt az eredményt adja, mint bármely másik korábbi képletünk, bár ezt a tényt nem bizonyítjuk.

2. PÉLDA: **Terület kiszámítása polárkoordinátákkal**

Határozzuk meg az $r^2 = 4\cos 2\theta$ egyenlettel adott lemniszkáta területét!

Megoldás: Rajzoljuk fel a lemniszkátát, hogy megállapíthassuk a határokat (15.24. ábra). A rajzból látjuk, hogy a teljes terület négyszer akkora, mint a sötétített rész. Ezért elég csak ennek a területét kiszámítani.

$$A = 4\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{4\cos 2\theta}} d\theta =$$

$$= 4\int_0^{\pi/4} 2\cos 2\theta\,d\theta = 4\left[\sin 2\theta\right]_0^{\pi/4} = 4. \qquad \square$$

Áttérés derékszögű koordinátákról polárkoordinátákra

Az $\iint_T f(x,y)\,dx\,dy$ integrál kiszámításánál a polárkoordinátákra való áttérés két lépésből áll. Először az $x = r\cos\theta$ és $y = r\sin\theta$ helyettesítést és a $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ helyettesítést végezzük el. Azután felírjuk az integrál határait polárkoordinátákkal. Így

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta,$$

ahol G jelöli a tartományt polárkoordinátákkal. Ez nagyon hasonlít ahhoz a helyettesítéses integrálhoz, amit az 5. fejezetben láttunk, csak most két változónk van, amit helyettesíteni akarunk, nem egy. Vegyük észre, $dx\,dy$-t nem egyszerűen $dr\,d\theta$-val helyettesítettük, hanem $r\,dr\,d\theta$-val. (Egyváltozós esetben sem írhattunk dx helyett egyszerűen pl. du-t.) A 15.7. alfejezetben fogjuk a változók helyettesítését részletesen tárgyalni.

3. PÉLDA: **Áttérés derékszögű koordinátákról polárkoordinátákra**

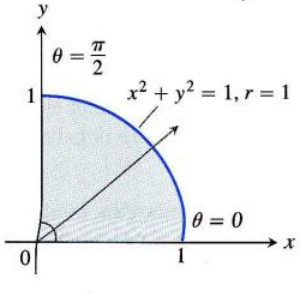
Határozzuk meg az origóra vonatkozó (poláris) tehetetlenségi nyomatékát az első síknegyedben fekvő vékony, $\delta(x,y) = 1$ sűrűségű lemeznek, amelyet az $x^2 + y^2 = 1$ negyedkör határol!

Megoldás: Felvázoljuk a lemezt, hogy meghatározhassuk az integrálás határait (15.25. ábra). Derékszögű koordináta-rendszerben a poláris momentum az

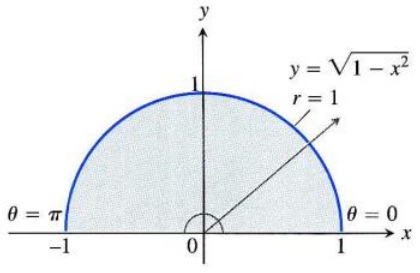
$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$$

integrál értéke. Az y szerinti integrálás eredménye

$$\int_0^1 \left(x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}\right) dx.$$



15.25. ÁBRA: Ez a tartomány polárkoordinátákkal: $0 \le r \le 1$ és $0 \le \theta \le \pi/2$ (3. példa).



15.26. ÁBRA: A félkör alakú tartomány polárkoordinátákkal:

$0 \le r \le 1$ és $0 \le \theta \le \pi$

(4. példa).

Ezt az integrált helyettesítéssel tudjuk kiszámítani, ami elég hosszadalmas.

Ha áttérünk polárkoordinátákra, egyszerűbb integrált kapunk. Végezzük el az $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ helyettesítést. Azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^2) r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

Miért ennyivel egyszerűbb ez a feladat polárkoordinátákkal? Mert az integrandusban és a tartomány leírásában is x^2+y^2 szerepel, ami polárkoordinátákkal egyszerűen r^2. □

4. PÉLDA: **Integrálok kiszámítása polárkoordinátákkal**

Számítsuk ki az

$$\iint_T e^{x^2+y^2}\,dy\,dx$$

integrált, ha a T tartomány félkör alakú, amit az x-tengely és az $y = \sqrt{1-x^2}$ görbe határol (15.26. ábra)!

Megoldás: Derékszögű koordináta-rendszerben az $e^{x^2+y^2}$ függvény integrálja nem elemi integrál, ebben az integrálban ezt a kifejezést nem is tudjuk direkt módon integrálni x vagy y szerint. Ez a függvény a matematikában gyakran előfordul (pl. statisztikában), és mindenképpen szükségünk van arra, hogy meghatározzuk az integrálját. Végezzük el az $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ helyettesítést,

$$\iint_T e^{x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_0^{\pi} \int_0^1 e^{r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1 d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(e-1)\,d\theta = \frac{\pi}{2}(e-1).$$

Az $r\,dr\,d\theta$ kifejezésben levő r-re volt éppen szükségünk e^{r^2} integrálásához. □

15.3. Feladatok

Polár integrálok számítása

Az 1–16. feladatokban térjünk át polárkoordinátákra, és számítsuk ki az integrált!

1. $\int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx$

2. $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx$

3. $\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$

4. $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$

5. $\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx$

6. $\int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$

7. $\int_{0}^{6} \int_{0}^{y} x\,dx\,dy$

8. $\int_{0}^{2} \int_{0}^{x} y\,dy\,dx$

9. $\int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx$

10. $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$

11. $\int_{0}^{\ln 2} \int_{0}^{\sqrt{(\ln 2)^2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$

12. $\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$

13. $\int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy\,dx$

14. $\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0} xy^2\,dx\,dy$

15. $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)\,dx\,dy$

16. $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(x^2+y^2+1)^2}\,dy\,dx$

Terület meghatározása polárkoordinátákkal

17. Mekkora annak a tartománynak a területe, amelyet az első síknegyedből metsz ki az $r = 2(2-\sin 2\theta)^{1/2}$ görbe?

18. Kör és kardioid átfedése: Mekkora az a terület, amely az $r = 1+\sin\theta$ kardioidon belül, de az $r = 1$ körön kívül van?

19. Rózsa egy levele: Mekkora területű az $r = 12\cos 3\theta$ rózsa egy levele?

20. Csigaház: Mekkora az a terület, amit az x-tengely pozitív fele és az $r = 4\theta/3$ spirális $0 \le \theta \le 2\pi$ közötti darabja zár közre? (A tartomány csigaházra emlékeztet.)

21. Kardioid az első síknegyedben: Mekkora az $r = 1+$ $+\sin\theta$ kardioid első síknegyedbe eső részének területe?

22. Egymást átfedő kardioidok: Mekkora annak a tartománynak a területe, ami egyszerre van az $r = 1+\cos\theta$ és az $r = 1-\cos\theta$ kardioidok belsejében?

Tömeg és momentumok

23. Egy lemez forgatónyomatéka: Mekkora az x-tengelyre vonatkozó forgatónyomatéka (első momentuma) annak a konstans $\delta(x,y) = 3$ sűrűségű lemezdarabnak, amelyet alulról az x-tengely, felülről az $r = 1-\cos\theta$ kardioid határol?

24. Tehetetlenségi nyomaték: Határozzuk meg az x-tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát, és az origóra vonatkoztatott (poláris) tehetetlenségi nyomatékát annak a vékony lemeznek, amelyet az $x^2+y^2 = a^2$ kör határol, és sűrűsége az (x,y) pontban $\delta(x,y) = k(x^2+y^2)$, ahol k egy konstans!

25. Lemez tömege: Mekkora a tömege annak a vékony lemeznek, amelyik az $r = 3$ körön kívüli, de az $r = 6\sin\theta$ körön belüli tartományt borítja, a sűrűsége pedig $\delta(x,y) = 1/r$?

26. Kardioid és kör közös részének poláris momentuma: Számítsuk ki az origóra vonatkoztatott (poláris) tehetetlenségi nyomatékát annak a vékony lemeznek, amelyik az $r = 1-\cos\theta$ kardioidon belüli és az $r = 1$ körön kívüli részt borítja, sűrűsége pedig $\delta(x,y) = 1/r^2$.

27. Kardioid súlypontja: Hol van a súlypontja az $r = 1+$ $+\cos\theta$ kardioidnak?

28. Kardioid poláris momentuma: Határozzuk meg az origóra vonatkoztatott (poláris) tehetetlenségi nyomatékát a $\delta(x,y) = 1$ sűrűségű, az $r = 1+\cos\theta$ kardioid által határolt vékony lemeznek!

Átlagértékek

29. Félgömb átlagos magassága: Határozzuk meg a $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ félgömb átlagos magasságát az $x^2+y^2 \le a^2$ körlap felett!

30. Kúp átlagos magassága: Adjuk meg a $z = \sqrt{x^2+y^2}$ kúp átlagos magasságát az $x^2+y^2 \le a^2$ körlap felett!

31. Korong pontjainak átlagos távolsága a középponttól: Mekkora az $x^2+y^2 \le a^2$ korong $P(x,y)$ pontjainak átlagos távolsága az origótól?

32. Korong pontjainak átlagos távolságnégyzete egy kerületi ponttól: Mekkora az $x^2+y^2 \le 1$ korong $P(x,y)$ pontjainak átlagos távolságnégyzete a perem $A(1,0)$ pontjától?

További példák és feladatok

33. Áttérés polárkoordinátákra:
Integráljuk az $f(x,y) = [\ln(x^2+y^2)]/\sqrt{x^2+y^2}$ függvényt az $1 \le x^2+y^2 \le e$ tartományon!

34. Áttérés polárkoordinátákra:
Integráljuk az $f(x,y) = [\ln(x^2+y^2)]/(x^2+y^2)$ függvényt az $1 \le x^2+y^2 \le e^2$ tartományon!

35. Nem köralapú, egyenes henger térfogata:
Az $r = 1+\cos\theta$ kardioidon belül, de az $r = 1$ körön kívül fekvő tartomány egy egyenes henger alapja. A henger fedőlapja a $z = x$ síkban van. Határozzuk meg a henger térfogatát!

36. Nem köralapú, egyenes henger térfogata:
Az $r^2 = 2\cos 2\theta$ lemniszkáta belseje egy egyenes henger alapja, amit felülről a $z = \sqrt{2-r^2}$ gömb határol. Mennyi a henger térfogata?

37. Áttérés polárkoordinátákra:

(a) Az $I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$ integrált a következőképpen számíthatjuk ki:

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy.$$

Számítsuk ki ezt az integrált áttérve polárkoordinátákra, majd fejezzük ki I-t!

(b) Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{erf}(x) = \lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}dt$$

határértéket!

38. Áttérés polárkoordinátákra: Számítsuk ki az

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dx\,dy$$

integrált!

39. Integrál létezése: Integráljuk az $f(x,y) = 1/(1-x^2-y^2)$ függvényt az $x^2+y^2 \le (3/4)$ tartomány felett! Létezik az integrál az $x^2+y^2 \le 1$ tartomány felett is? Válaszunkat indokoljuk!

40. A területszámítás képlete polárkoordinátákkal: Használjuk a kettős integrált polárkoordinátákkal, hogy levezessük az

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

képletet az olyan legyező alakú szektor területének meghatározására, amelyet a $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ félegyenesek és az $r = f(\theta)$ görbe határolnak, $\alpha \le \theta \le \beta$.

41. Egy korong adott belső pontjától való átlagos távolság: Legyen P_0 egy a sugarú körlap belső pontja, és jelölje h a kör középpontja és P_0 távolságát. Jelölje d a körlap tetszőleges P pontjának és P_0-nak a távolságát. Határozzuk meg d^2 átlagos értékét a körlapon! (*Útmutatás*: A számítások egyszerűbbé tétele végett válasszuk középpontnak az origót, és jelöljük ki P_0-at az x-tengelyen!)

42. Terület: Tegyük fel, hogy egy tartomány területét polárkoordinátákkal az

$$A = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{1/\sin\theta}^{2\sin\theta} r\, dr\, d\theta$$

integrál adja. Vázoljuk fel a tartományt, és számítsuk ki az integrált!

Számítógépes vizsgálatok

Koordináta-transzformáció

A 43–46. feladatokban használjunk számítógépes programot a polárkoordinátákra való áttérésre! Végezzük el a következő lépéseket:

(a) Rajzoltassuk ki a Descartes-féle koordinátarendszerben megadott tartományt az xy-síkban!

(b) Írjuk át az (a) pontban kapott határgörbéket polárkoordinátás alakba, azaz helyettesítsük x-et és y-t a szokásos módon, majd fejezzük ki r-et, vagy θ-t!

(c) Felhaszálva a (b)-ben kapott eredményt, rajzoltassuk ki a polár integrálási tartományt az $r\theta$-síkon!

(d) Írjuk át az integrandust is, és számoltassuk ki az integrált a számítógéppel!

43. $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \frac{y}{x^2+y^2}\, dy\, dx$

44. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x/2} \frac{x}{x^2+y^2}\, dy\, dx$

45. $\displaystyle\int_0^1 \int_{-y/3}^{y/3} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$

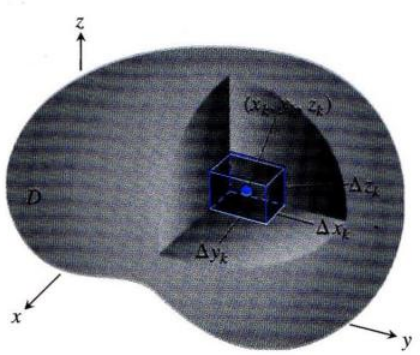
46. $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{2-y} \sqrt{x+y}\, dy\, dx$

15.4. Hármas integrál derékszögű koordináta-rendszerben

Ahogy a kettős integrállal összetettebb feladatokat tudtunk megoldani, mint egyszeres integrállal, a hármas integrál még általánosabb problémák megoldására is alkalmas. Hármas integrállal számítjuk háromdimenziós testek térfogatát, tömegét és momentumait, ha a sűrűségük helytől függően változik, valamint függvények átlagértékét háromdimenziós tartományon. Hármas integrálokat használunk vektormezők és áramlási mezők tanulmányozásánál, ahogy azt a 16. fejezetben látni fogjuk.

Hármas integrálok

Ha $F(x,y,z)$ egy olyan korlátos függvény, amely a háromdimenziós tér egy olyan korlátos zárt D részhalmazán van értelmezve, amelynek van térfogata, például olyan térrészen, mint amelyet egy tömör labda vagy egy agyagkupac foglal el, akkor F integrálját a D tartományon a következőképpen definiálhatjuk. Egy olyan téglatest alakú térrészt, amely D-t teljes egészében magában foglalja, felosztunk a koordinátasíkokkal párhuzamos síkokkal kis téglatestekre (15.27. ábra). Megsorszámozzuk a D-ben benne levő kis téglatesteket 1-től n-ig, tetszőleges sorrendben. A k-adik téglatest élei Δx_k, Δy_k, Δz_k, a térfogata pedig $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$. Minden ilyen kis testből választunk egy pontot, (x_k, y_k, z_k)-t, és elkészítjük az integrálközelítő összeget:



15.27. ÁBRA: Egy test felosztása kis ΔV_k térfogatú téglatestekre.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k. \tag{15.13}$$

A felosztás $||P||$ normája az összes Δx_k, Δy_k, Δz_k értékek közül a legnagyobb. Mi azt figyeljük meg, hogyan viselkedik az előbbi összeg, ha D-t kisebb és kisebb részekre osztjuk, azaz $||P|| \to 0$. Ha az összeg az (x_k, y_k, z_k) pontok választásától függetlenül mindig ugyanahhoz az értékhez konvergál, ha a felosztás normája nullához tart, akkor azt mondjuk, hogy F **integrálható** a D tartományon.

Ezt a határértéket az F **függvény D-n vett hármas integráljának** nevezzük, és azt írjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D F(x,y,z)\,dV \quad \text{vagy} \quad \lim_{||P||\to 0} S_n = \iiint_D F(x,y,z)\,dV.$$

A korábbiakhoz hasonlóan belátható, hogy ha F folytonos, és D-t véges sok sima felületdarab határolja, amelyek véges sok sima görbével kapcsolódnak egymáshoz, akkor az F függvény D-n integrálható. Azaz ha $||P|| \to 0$, akkor a kis téglatestek n száma tart végtelenhez, és az S_n összegek tartanak egy értékhez. Azok a D tartományok, amelyek felett a folytonos függvények integrálhatók, pontosan azok, amelyek jól közelíthetők kicsi téglatestekkel. A legtöbb alkalmazásban ilyen tartományokkal találkozunk.

A tér egy tartományának térfogata

Ha F olyan konstans függvény, aminek értéke 1, akkor a (15.13) egyenlőségben szereplő összeg

$$S_n = \sum F(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k = \sum 1\cdot\Delta V_k = \sum \Delta V_k,$$

és ahogy a Δx_k, Δy_k, Δz_k értékek tartanak 0-hoz, a kis téglatestek egyre jobban és jobban kitöltik D-t. Így D térfogatát kapjuk:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \iiint_D dV.$$

Egy D tartomány térfogatát, összhangban az eddigiekkel, ezzel a határértékkel is definiálhatjuk, feltéve, hogy a tartomány határát tartalmazó kis téglatestek térfogatainak összege nullához tart. Ha a D ponthalmaz, aminek a térfogatát akarjuk meghatározni, olyan, hogy egyetlen kis téglatestet sem tartalmaz teljes egészében, akkor az egyetlen tagot sem tartalmazó összeg nullának tekintendő.

> DEFINÍCIÓ: **Térfogat**
>
> A tér egy korlátos zárt D tartományának **térfogata**
>
> $$V = \iiint_D dV,$$
>
> ha ez az integrál létezik.

Ez a definíció összhangban van a korábbi definíciójával a térfogatnak, bár ezt most nem bizonyítjuk. Látni fogjuk, ilyen módon ki tudjuk számítani „görbe" felületekkel határolt térrészek térfogatát.

Integrálási határok meghatározása

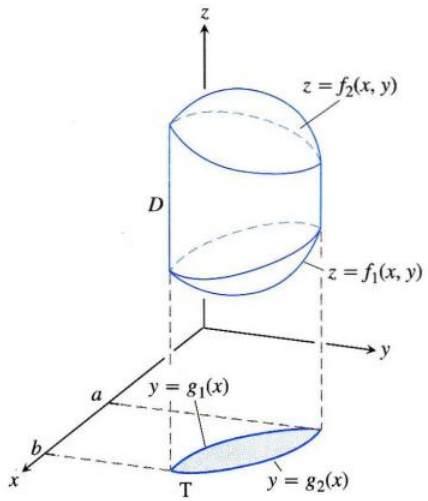
A hármas integrált a Fubini-tétel (15.1. alfejezet) háromdimenziós változatának megfelelően háromszoros integrállal számítjuk ki, ha F folytonos az adott tartományon. Az integrálás határainak megtalálása elvileg ugyanolyan módon történik, mint a kettős integráloknál.

Ha az

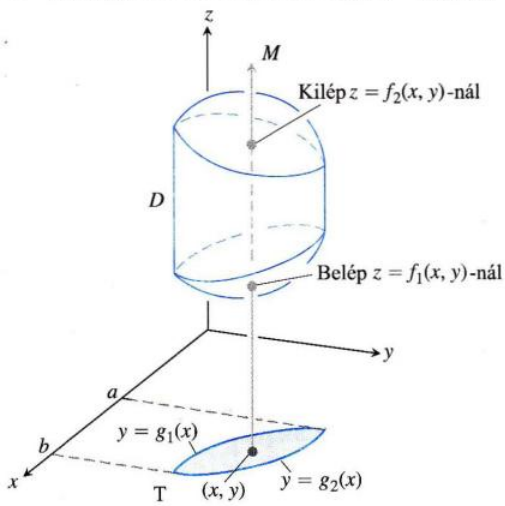
$$\iiint_D F(x,y,z)\,dV$$

integrált akarjuk kiszámítani, és először z, majd y, végül x szerint akarunk integrálni, akkor a következő lépéseket hajtsuk végre:

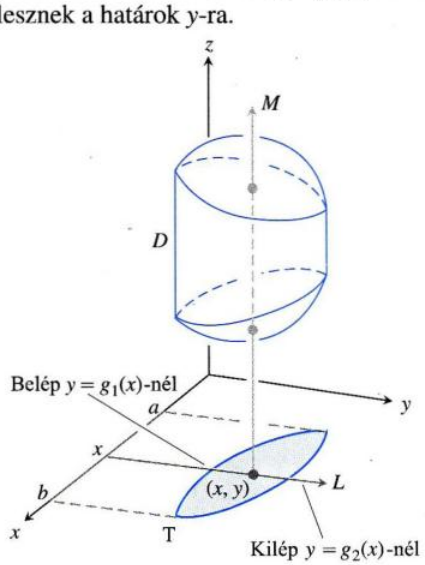
1. *Vázlat:* Vázoljuk fel a D tartományt és a vetületét az xy-síkon. Írjuk fel az alsó és felső határoló felület egyenletét, valamint az xy-síkbeli T vetület határológörbéinek egyenletét.



2. *Határok z-re:* Húzzunk egy z-tengellyel párhuzamos egyenest, ami a D tartományt metszi, tehát a T egy (x,y) pontján megy keresztül. Nézzük meg, z növekedtével hol lép be ez az egyenes D-be, és hol lép ki belőle: Tegyük fel, hogy egy $z = f_1(x,y)$ értéknél lép be, és egy $z = f_2(x,y)$ értéknél lép ki.



3. *Határok y-ra:* Húzzunk egy y-tengellyel párhuzamos egyenest az xy-síkban az (x,y) ponton keresztül. Ez T-be $y = g_1(x)$-nél lép be, és $y = g_2(x)$-nél lép ki. Ezek lesznek a határok y-ra.



4. *Határok x-re:* x értékeit az xy-síkban az y-tengellyel párhuzamos, T-t metsző összes egyenes x-tengellyel való metszéspontjai adják, tehát az előző

ábrát tekintve $x = a$ és $x = b$ lesznek a határok. Így az integrál

$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x,y,z)\, dz\, dy\, dx.$$

Hasonlóképpen járunk el, ha más sorrendben szeretnénk integrálni. A D tartomány vetülete mindig abban a koordinátasíkban van, amelyik változók szerint utoljára integrálunk.

A fenti eljárás akkor működik, ha a D tartomány T vetülete „alulról" és „felülről" is egy görbével van határolva, és a D tartomány maga is „alulról" és „felülről" is egy-egy felülettel van határolva a T felett. Nem alkalmazható, ha a tartomány túl bonyolult, például ha lyukak vannak benne. Ekkor meg kell próbálni a tartományt egyszerűbb résztartományokra felosztani.

1. PÉLDA: **Térfogat meghatározása**

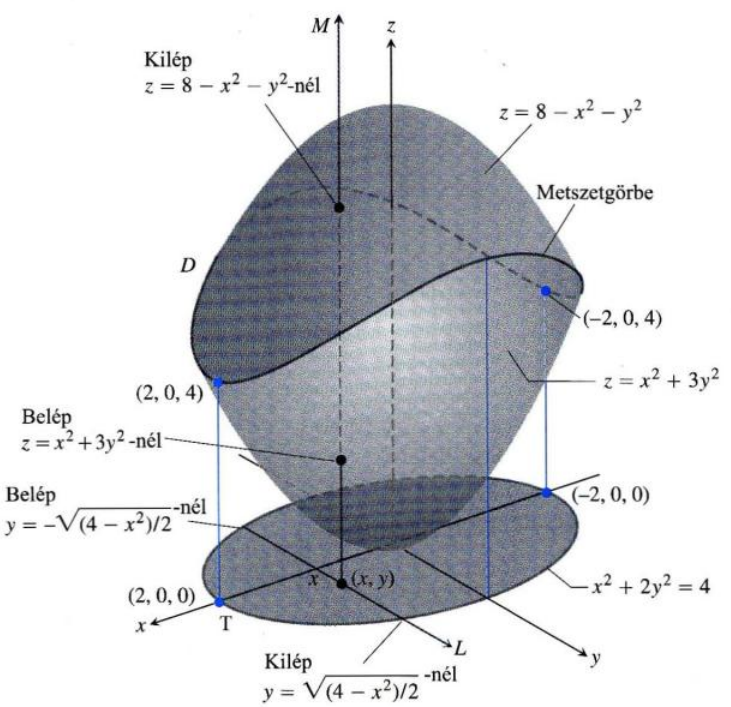
Határozzuk meg a térfogatát annak a térrésznek, amelyet a $z = x^2 + 3y^2$ és a $z = 8 - x^2 - y^2$ felületek határolnak!

Megoldás: A térfogat

$$\iiint_D dz\, dy\, dx,$$

az $F(x,y,z) = 1$ függvény integrálja a D-n. Ahhoz, hogy megállapítsuk az integrálás határait, vázoljuk fel a tartományt. A két felület az $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2$, azaz az $x^2 + 2y^2 = 4$ elliptikus hengeren metszi egymást (15.28. ábra), aminek vetülete az xy-síkon az $x^2 + 2y^2 = 4$ ellipszis. A T vetület alsó határológörbéje $y = -\sqrt{(4-x^2)/2}$, a felső görbe $y = \sqrt{(4-x^2)/2}$.

Most meghatározzuk z határait. Az M egyenes a T tartomány egy (x,y) pontján megy át, és párhuzamos a z tengellyel. A D tartományba $z = x^2 + 3y^2$-nél lép be, és $z = 8 - x^2 - y^2$-nél lép ki. A következő lépés y határainak megállapítása. Az (x,y) ponton átmenő, y-tengellyel párhuzamos L egyenes a T tartományba $y = -\sqrt{(4-x^2)/2}$-nél lép be, és $y = \sqrt{(4-x^2)/2}$-nél lép ki. Végül az x-re vonatkozó határokat adjuk meg. Miközben az L egyenesek T-ben mozognak, az x



15.28. ÁBRA: Két paraboloid által közrezárt térrész térfogatát számítjuk az 1. példában.

koordináta $x=-2$ értéktől a $(-2,0,0)$ pontban az $x=2$ értékig nő a $(2,0,0)$ pontban. D térfogata tehát

$$V=\iiint_D dz\,dy\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dy\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}}(8-2x^2-4y^2)\,dy\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{2}\left[(8-2x^2)y-\frac{4}{3}y^3\right]_{y=-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{y=\sqrt{(4-x^2)/2}}dx=$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(2(8-2x^2)\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}-\frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2}\right)dx=$$

$$=\int_{-2}^{2}\left[8\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2}-\frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2}\right]dx=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{3/2}dx=$$

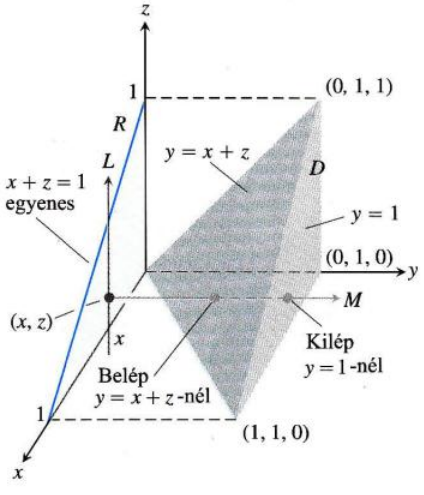
$$=8\pi\sqrt{2}.$$

Miután $x=2\sin t$ helyettesítéssel integráltunk. □

Avégett, hogy egy másik sorrendben végzett integrálást is bemutassunk, a következő példában D-t az xz-síkra vetítjük, nem az xy-síkra.

2. PÉLDA: Integrálási határok megállapítása $dy\,dz\,dx$ sorrendben

Adjuk meg az integrálási határokat, ha az $F(x,y,z)$ függvényt kell integrálni a $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$ csúcspontokkal megadott D tetraéderen!



15.29. ÁBRA: Az integrálási határok megállapítása, ha a függvényt a D tetraéderen akarjuk integrálni (2. példa).

Megoldás: Felvázoljuk a D tartományt és a vetületét az xz-síkon (15.29. ábra). A jobboldalon látható határoló felület az $y=1$ síkban fekszik. A bal oldalon látható határoló felület az $y=x+z$ síkban fekszik. Az xz-síkban fekvő T tartomány felső határoló egyenese $z=1-x$. Az alsó egyenes $z=0$.

Először az y-ra vonatkozó határokat állapítjuk meg. Az y tengellyel párhuzamos, a T tartomány (x,z) pontján átmenő egyenes a tetraéderbe az $y=x+z$ értéknél lép be, és az $y=1$ értéknél lép ki.

Következnek z határai. Az xz-síkban haladó, z-tengellyel párhuzamos, a T tartomány (x,z) pontján átmenő L egyenes a T-be $z=0$-nál lép be, és $z=1-x$-nél lép ki.

Végül az x-re vonatkozó határokat adjuk meg. Miközben L végigcsúszik T-n, az x értékek $x=0$ és $x=1$ között változnak. Így az integrál:

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_{x+z}^{1}F(x,y,z)\,dy\,dz\,dx.$$ □

3. PÉLDA: Az előző példa $dz\,dy\,dx$ integrálási sorrenddel

Ahhoz, hogy $F(x,y,z)$-t a D tetraéderen $dz\,dy\,dx$ sorrendben integráljuk, a következőképp járunk el.

Megoldás: Először megállapítjuk z határait. Az egyenes, ami párhuzamos a z-tengellyel és átmegy a tetraéder xy-síkon levő vetületének (x,y) pontján, a $z=0$ értéknél lép be, és a $z=y-x$ értéknél lép ki a tetraéderből.

Ezután jönnek y határai. Az xy-síkban, ahol $z=0$, a ferde oldal a síkot az $y=x$ egyenesben metszi. Az (x,y) ponton átmenő, y-tengellyel párhuzamos egyenes az xy-síkban levő vetületbe $y=x$-nél lép be, és $y=1$-nél lép ki.

Végül x határai. A vetületen végigfutó egyenesek x-tengellyel való metszéspontjai $x = 0$ és $x = 1$ között vannak. Így az integrál

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} F(x,y,z)\, dz\, dy\, dx.$$

Ha pl. $F(x,y,z) = 1$, akkor

$$V = \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_x^1 (y-x)\, dy\, dx =$$

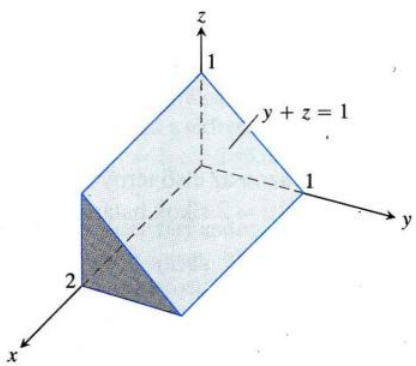
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2 - xy\right]_{y=x}^{y=1} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2\right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Ha $dy\, dz\, dx$ sorrendben integrálunk, ugyanezt kapjuk:

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^1 dy\, dz\, dx = \frac{1}{6}. \qquad \square$$

A kettős integráloknál láttuk, hogy sokszor két különböző sorrendben is integrálhatunk. A hármas integrálást hat különböző sorrendben is számíthatjuk, hiszen hat különböző sorrendje van dx, dy, dz-nek. Mindegyik sorrend a tartomány más leírásához, és az integrálás más határaihoz vezethet.



15.30. ÁBRA: A 4. példában szereplő prizma.

4. PÉLDA: **Különböző sorrendben vett integrálás**

A következő integrálok közül mindegyik a 15.30. ábrán levő test térfogatát adja.

Megoldás:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 dx\, dy\, dz$ **(b)** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 dx\, dz\, dy$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z} dy\, dx\, dz$ **(d)** $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-z} dy\, dz\, dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-y} dz\, dx\, dy$ **(f)** $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-y} dz\, dy\, dx$

A (b) és a (c) integrált kiszámítjuk:

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 dx\, dz\, dy \qquad \text{(b) integrál}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-y} 2\, dz\, dy$$

$$= \int_0^1 \left[2z\right]_{z=0}^{z=1-y} dy$$

$$= \int_0^1 2(1-y)\, dy = 1.$$

Ugyanígy

$$V = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z} dy\,dx\,dz \qquad \text{(c) integrál}$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 (1-z)\,dx\,dz$$

$$= \int_0^1 \Big[x - xz\Big]_{x=0}^{x=2} dz$$

$$= \int_0^1 (2-2z)\,dz = 1.$$

A többi, (a), (d), (e) és (f) integrálja is 1-et ad. □

Függvény átlagértéke a térben

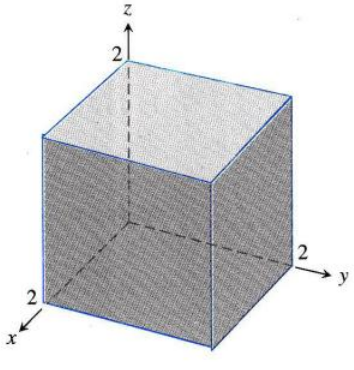
Az F függvény átlagértékét (vagy középértékét) a D tartományon a következő képlet definiálja:

$$F \textbf{ átlagértéke } D\textbf{-n} = \frac{1}{D \text{ térfogata}} \iiint_D F\,dV. \tag{15.14}$$

Például, ha $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, akkor F átlagértéke a D felett a D pontjainak átlagos távolsága az origótól. Ha $F(x,y,z)$ az (x,y,z) pont hőmérséklete egy test pontjaiban, amelyik egy D térrészt foglal el, akkor F átlaga a D felett a test átlaghőmérséklete a testben.

5. PÉLDA: Átlagérték meghatározása

Adjuk meg az $F(x,y,z) = xyz$ függvény átlagértékét azon az első térnyolcadbeli kockán, amelyet a koordinátasíkok és az $x=2$, $y=2$, $z=2$ síkok határolnak!



15.31. ÁBRA: Az 5. példa integrálási tartománya.

Megoldás: Vázoljuk fel az integrálási tartományt (15.31. ábra). Ezután használjuk a (15.14) képletet az átlagérték meghatározására.

A kocka térfogata $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Az F függvény integrálja a kockán

$$\int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 xyz\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2}yz\right]_{x=0}^{x=2} dy\,dz = \int_0^2 \int_0^2 2yz\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^2 \left[y^2 z\right] dz = \int_0^2 4z\,dz = \left[2z^2\right]_0^2 = 8.$$

Ezekkel az értékekkel a (15.14) definícióból

$$\left(\begin{array}{c}\text{Az } xyz \text{ átlaga} \\ \text{a kocka felett}\end{array}\right) = \frac{1}{\text{térfogat}} \iiint_{\text{kocka}} xyz\,dV = \left(\frac{1}{8}\right)(8) = 1.$$

Az integrál kiszámításakor a $dx\,dy\,dz$ sorrendet használtuk, de bármilyen más sorrend is jó és ugyanezt az eredményt adja. □

A hármas integrálok tulajdonságai

A hármas integráloknak ugyanolyan algebrai tulajdonságai vannak, mint a kettős, vagy egyszeres integráloknak.

A hármas integrál tulajdonságai

Ha $F = F(x,y,z)$ és $G = G(x,y,z)$ folytonos függvények, akkor

1. *Konstansszoros:* $\iiint_D kF\,dV = k\iiint_D F\,dV$ (bármilyen k számra);
2. *Összeg és különbség:* $\iiint_D (F \pm G)dV = \iiint_D F\,dV \pm \iiint_D G\,dV$;
3. *Dominációk:*
   (a) $\iiint_D F\,dV \geq 0$, ha $F \geq 0$ a D tartományon;
   (b) $\iiint_D F\,dV \geq \iiint_D G\,dV$, ha $F \geq G$ D-n;
4. *Additivitás:* $\iiint_D F\,dV = \iiint_{D_1} F\,dV + \iiint_{D_2} F\,dV$,

ahol D a közös belső ponttal nem rendelkező D_1 és D_2 tartományok egyesítése.

15.4. Feladatok

Hármas integrálok kiszámítása különböző sorrendekben

1. Számítsuk ki a 2. példában az integrált ha $F(x,y,z) = 1$, így megkapjuk a tetraéder térfogatát!

2. Téglatest térfogata: Írjuk fel hat különböző sorrendben a háromszoros integrálokat, amelyek annak az első térnyolcadban levő téglatestnek a térfogatát adják, amelyiket a koordinátasíkok és az $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ síkok határolnak! Számítsuk ki az integrálokat!

3. Tetraéder térfogata: Írjuk fel hat különböző sorrendben a háromszoros integrálokat, amelyek annak az első térnyolcadban levő tetraédernek a térfogatát adják, amelyiket a koordinátasíkok és a $6x+3y+2z = 6$ sík határolják! Számítsuk ki az integrálokat!

4. Test térfogata: Írjuk fel hat különböző sorrendben a háromszoros integrálokat, amelyek annak az első térnyolcadban levő testnek a térfogatát adják, amelyet az $x^2 + z^2 = 4$ henger és az $y = 3$ sík határol! Számítsuk ki az integrálokat!

5. Paraboloidok által közrezárt térfogat: Legyen D az a tartomány, amelyet a $z = 8 - x^2 - y^2$ és $z = x^2 + y^2$ paraboloidok határolnak. Írjuk fel a hat lehetséges sorrendjét a háromszoros integráloknak, amik D-nek a térfogatát adják! Egyiket számítsuk ki!

6. Paraboloid belsejének térfogata egy sík alatt: Legyen a D tartomány a $z = x^2 + y^2$ paraboloid belseje a $z = 2y$ sík alatt. Írjuk fel a D térfogatát meghatározó háromszoros integrálokat $dz\,dx\,dy$ és $dz\,dy\,dx$ sorrendben! Nem kell kiszámolni!

Háromszoros integrálok kiszámítása

Számítsuk ki a 7–20. feladatok integráljait!

7. $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2+z^2)dz\,dy\,dx$

8. $\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{3y}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$

9. $\int_1^e\int_1^e\int_1^e \frac{1}{xyz}dx\,dy\,dz$

10. $\int_0^1\int_0^{3-3x}\int_0^{3-3x-y} dz\,dy\,dx$

11. $\int_0^1\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} y\sin z\,dx\,dy\,dz$

12. $\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 (x+y+z)\,dy\,dx\,dz$

13. $\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2}} dz\,dy\,dx$

14. $\int_0^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{2x+y} dz\,dx\,dy$

15. $\int_0^1\int_0^{2-x}\int_0^{2-x-y} dz\,dy\,dx$

16. $\int_0^1\int_0^{1-x^2}\int_3^{4-x^2-y} x\,dz\,dy\,dx$

17. $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \cos(u+v+w)\,du\,dv\,dw$ (uvw-tér)

18. $\int_1^e\int_1^e\int_1^e \ln r \ln s \ln t\,dt\,dr\,ds$ (trs-tér)

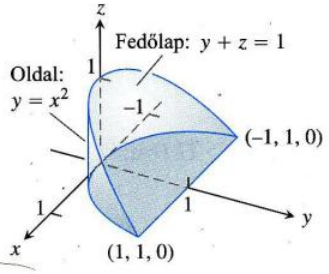
19. $\int_0^{\pi/4}\int_0^{-\ln\cos v}\int_{-\infty}^{2t} e^x\,dx\,dt\,dv$ (xtv-tér)

20. $\int_0^7\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-q^2}} \frac{q}{r+1}dp\,dq\,dr$ (pqr-tér)

Térfogat háromszoros integrállal

21. Az ábrán a következő integrál tartománya látható:

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} dz\,dy\,dx.$$



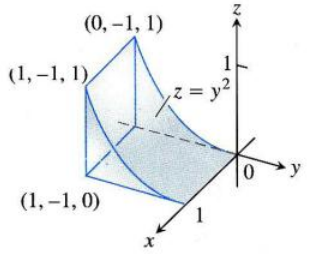
Írjuk át az integrálás sorrendjét a következőkre:

(a) $dy\,dz\,dx$ **(b)** $dy\,dx\,dz$ **(c)** $dx\,dy\,dz$

(d) $dx\,dz\,dy$ **(e)** $dz\,dx\,dy$

22. Az ábrán a következő integrál tartománya látható:

$$\int_{0}^{1}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{y^2} dz\,dy\,dx$$



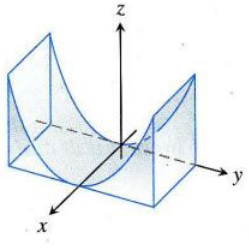
Írjuk át az integrálás sorrendjét a következőkre:

(a) $dy\,dz\,dx$ **(b)** $dy\,dx\,dz$ **(c)** $dx\,dy\,dz$

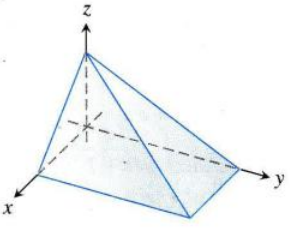
(d) $dx\,dz\,dy$ **(e)** $dz\,dx\,dy$

Határozzuk meg a megadott testek térfogatát (23–36. feladatok)!

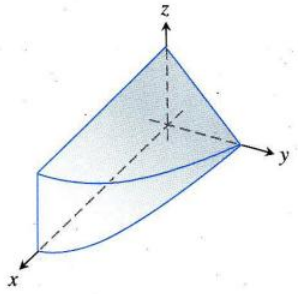
23. A tartomány az xy-sík és a $z = y^2$ hengerfelület között van, és az $x = 0$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$ síkok határolják.



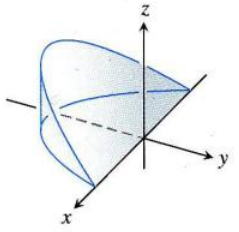
24. A tartomány az első térnyolcadban van, és az $x + z = 1$, $y + 2z = 2$ síkok határolják.



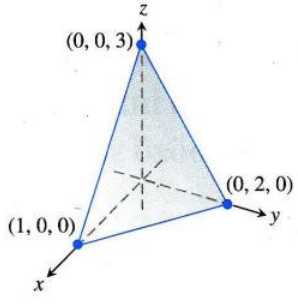
25. A tartomány az első térnyolcadban van, a koordinátasíkok, az $y + z = 2$ sík és az $x = 4 - y^2$ hengerpalást határolják.



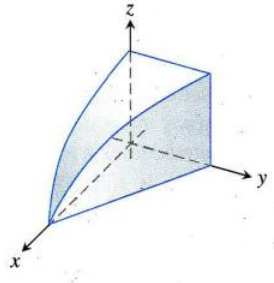
26. Az éket az $x^2 + y^2 = 1$ hengerből vágják ki a $z = -y$ és a $z = 0$ síkok.



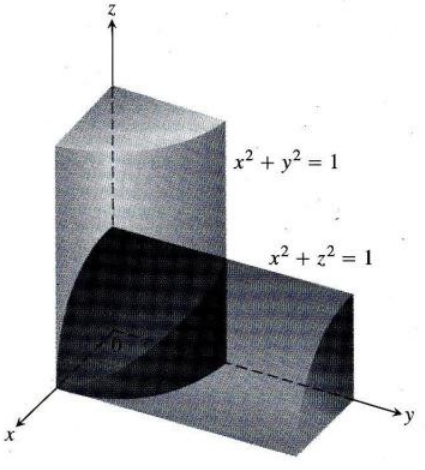
27. A tetraéder az első térnyolcadban van, a koordinátasíkok és az a sík határolja, amelyik átmegy az $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$ pontokon.



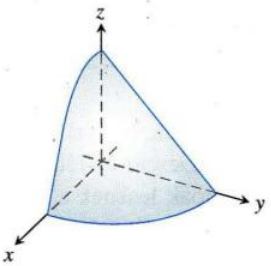
28. A tartomány az első térnyolcadban van, a koordinátasíkok, az $y = 1 - x$ sík, és a $z = \cos(\pi x/2)$ felület határolja, ahol $0 \le x \le 1$.



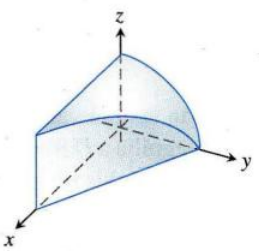
29. A tartomány az $x^2 + y^2 = 1$ és az $x^2 + z^2 = 1$ hengerek belsejének közös része, aminek nyolcadát mutatja az ábra.



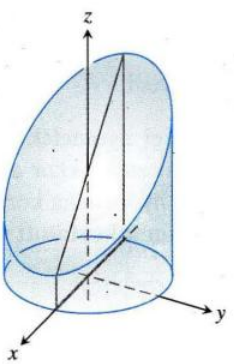
30. A tartomány az első térnyolcadban van, a koordinátasíkok és a $z = 4 - x^2 - y$ felület határolja.



31. A tartomány az első térnyolcadban van, a koordinátasíkok, az $x + y = 4$ sík és az $y^2 + 4z^2 = 16$ hengerpalást határolják.



32. A tartományt az $x^2 + y^2 = 4$ hengerből a $z = 0$ és az $x + z = 3$ síkok vágják ki.



33. A tartomány az első térnyolcadban van, az $x + y + 2z = 2$ és a $2x + 2y + z = 4$ síkok között.

34. A $z = x$, $x + z = 8$, $z = y$, $y = 8$ és $z = 0$ síkok közötti véges tartomány.

35. A tartományt az $x^2 + 4y^2 \le 4$ elliptikus hengerből vágja ki az xy-sík és a $z = x + 2$ sík.

36. A tartományt hátulról az $x = 0$ sík, elől és oldalt az $x = 1 - y^2$ parabolikus henger, felülről a $z = x^2 + y^2$ paraboloid, alulról az xy-sík határolják.

Átlagértékek

A 37–40. feladatokban határozzuk meg $F(x,y,z)$ átlagértékét az adott tartományon.

37. $F(x,y,z) = x^2 + 9$ egy olyan kocka felett, ami az első térnyolcadban van, a koordinátasíkok és az $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$ síkok határolják.

38. $F(x,y,z) = x + y - z$ azon téglatest felett, ami az első térnyolcadban van, a koordinátasíkok és az $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$ síkok határolják.

39. $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ egy olyan kocka felett, ami az első térnyolcadban van, a koordinátasíkok és az $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ síkok határolják.

40. $F(x,y,z) = xyz$ egy olyan kocka felett, ami az első térnyolcadban van, a koordinátasíkok és az $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$ síkok határolják.

Az integrálás sorrendjének megváltoztatása

A 41–44. feladatokban változtassuk meg az integrálás sorrendjét, valamilyen más alkalmas sorrendre.

41. $\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}}\, dx\, dy\, dz$

42. $\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}\, dy\, dx\, dz$

43. $\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \sin \pi y^2}{y^2}\, dx\, dy\, dz$

44. $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z}\, dy\, dz\, dx$

További példák és feladatok

45. Többszörös integrál felső határának megállapítása: Határozzuk meg α-t:

$$\int_0^1 \int_0^{4-\alpha-x^2} \int_\alpha^{4-x^2-y} dz\, dy\, dx = \frac{4}{15}.$$

46. Ellipszoid: Milyen c érték esetén lesz az $x^2 + (y/2)^2 + (z/c)^2 = 1$ ellipszoid térfogata 8π?

47. Hármas integrál minimalizálása: Milyen D tartomány minimalizálja az

$$\iiint_D (4x^2 + 4y^2 + z^2 - 4)dV$$

integrál értékét? Válaszunkat indokoljuk!

48. Hármas integrál maximalizálása: Milyen D tartomány maximalizálja az

$$\iiint_D (1 - x^2 - y^2 - z^2)dV$$

integrál értékét? Válaszunkat indokoljuk!

Számítógépes vizsgálatok

Numerikus kiértékelések

A 49–52. feladatokban használjunk számítógépes programot az adott függvények hármas integráljának numerikus meghatározására az adott tartományon.

49. $F(x,y,z) = x^2y^2z$, a tartomány a $z = 1$ és $z = 0$ síkok között, az $x^2 + y^2 = 1$ hengerfelület belseje.

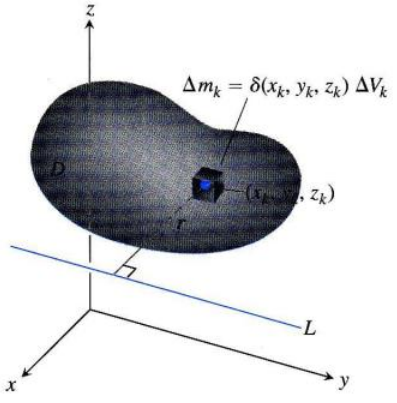
50. $F(x,y,z) = |xyz|$, a tartományt alulról a $z = x^2 + y^2$ paraboloid, felülről a $z = 1$ sík határolja.

51. $F(x,y,z) = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, a tartományt alulról a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp, felülről a $z = 1$ sík határolja.

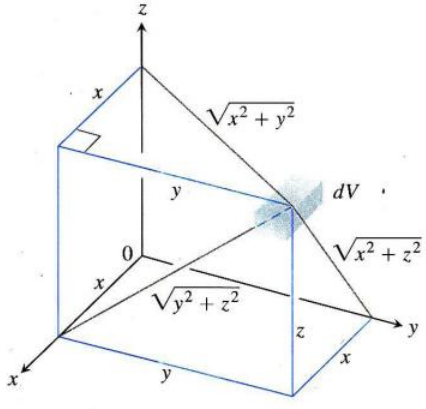
52. $F(x,y,z) = x^4 + y^2 + z^2$, a tartomány: $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ (gömbtartomány).

15.5. Tömeg és nyomaték három dimenzióban

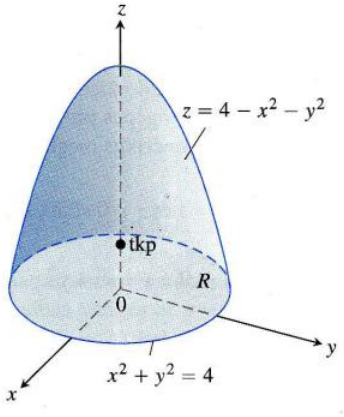
Ebben az alfejezetben megmutatjuk, hogyan számolhatjuk háromdimenziós testek tömegét és momentumait Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben. A kapott képletek hasonlóak lesznek a kétdimenziós esetekhez. A gömb- és hengerkoordináta-rendszerbeli számításokat a 15.6. alfejezet tárgyalja.



15.32. ÁBRA: Ahhoz, hogy definiáljuk egy test tömegét vagy tehetetlenségi nyomatékát egy egyenesre vonatkoztatva, először felosztjuk véges sok kis Δm_k tömegelemre.



15.33. ÁBRA: dV távolsága a koordináta-rendszer síkjaitól és tengelyeitől.



15.34. ÁBRA: Tömegközéppont meghatározása (1. példa).

Tömeg és nyomatékok

Ha $\delta(x,y,z)$ a sűrűsége egy olyan testnek, ami a tér D tartományát tölti ki (tömeg/térfogategység), akkor δ integrálja a D fölött a test **tömegét** adja. Indoklásul képzeljük el, hogy a testet felosztjuk n kis részre, ahogy a 15.32. ábrán látható.

Ekkor a test tömegét a következő határértékkel definiálhatjuk:

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \delta(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k = \iiint_D \delta(x,y,z)\,dV.$$

Most levezetjük a tehetetlenségi nyomaték képletét. Ha $r(x,y,z)$ a D-beli (x,y,z) pont távolsága az L egyenestől, akkor az $m_k = \delta(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k$ tömeg L-re vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka körülbelül $\Delta I_k = r^2(x_k,y_k,z_k)\Delta m_k$ (15.32. ábra). Az egész test **L-re vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka**

$$I_L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta I_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} r^2(x_k,y_k,z_k)\delta(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k = \iiint_D r^2\delta\,dV.$$

Ha L az x-tengely, akkor $r^2 = y^2 + z^2$ (15.33. ábra)

$$I_x = \iiint_D (y^2+z^2)\delta\,dV.$$

Hasonlóképpen, ha L az y-tengely, ill. a z-tengely:

$$I_y = \iiint_D (x^2+z^2)\delta\,dV, \quad \text{ill.} \quad I_z = \iiint_D (x^2+y^2)\delta\,dV.$$

Hasonlóképpen kapjuk a koordinátasíkokra vonatkoztatott **statikai nyomatékot (első momentum)**. Például

$$M_{yz} = \iiint_D x\delta(x,y,z)\,dV$$

az yz-síkra vonatkozó statikai nyomaték.

A tömegre és a nyomatékokra vonatkozó képletek teljesen hasonlóak a síkidomokra vonatkozó képletekhez (15.3. táblázat).

1. PÉLDA: Térbeli test tömegközéppontjának meghatározása

Adjuk meg annak a konstans δ sűrűségű testnek a tömegközéppontját, amelyet alulról a $z = 0$ sík T : $x^2 + y^2 \le 4$ tartománya, felülről a $z = 4 - x^2 - y^2$ paraboloid határol (15.34. ábra)!

Megoldás: Szimmetriaokok miatt $\bar{x} = \bar{y} = 0$. A $\bar{z}$ meghatározása érdekében először kiszámítjuk:

$$M_{xy} = \iiint_T \int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} z\delta \, dz\, dy\, dx = \iint_T \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} \delta \, dy\, dx =$$

$$= \frac{\delta}{2} \iint_T (4-x^2-y^2)^2 dy\, dx =$$

$$= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4-r^2)^2 r \, dr\, d\theta = \quad \text{polárkoordináták}$$

$$= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{6}(4-r^2)^3\right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \frac{32\pi\delta}{3}.$$

Hasonló számítások adják:

$$M = \iiint_T \int_0^{4-x^2-y^2} \delta \, dz\, dy\, dx = 8\pi\delta.$$

Következésképp $\bar{z} = (M_{xy}/M) = \frac{4}{3}$, így a tömegközéppont $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (0,0,\frac{4}{3})$. □

Ha egy testnek a sűrűsége konstans, mint pl. az 1. példában, akkor a tömegközéppontot **súlypontnak** hívják.

Tömeg: $\iiint_D \delta \, dV \qquad (\delta = \delta(x,y,z) = \text{sűrűség})$

Statikai nyomatékok (első momentumok) a koordinátasíkokra vonatkoztatva:

$$M_{yz} = \iiint_D x\delta \, dV, \quad M_{xz} = \iiint_D y\delta \, dV, \quad M_{xy} = \iiint_D z\delta \, dV$$

Tömegközéppont koordinátái:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

Tehetetlenségi nyomatékok (második momentumok) a koordinátatengelyekre vonatkoztatva:

$$I_x = \iiint (y^2+z^2)\delta \, dV$$

$$I_y = \iiint (x^2+z^2)\delta \, dV$$

$$I_z = \iiint (x^2+y^2)\delta \, dV$$

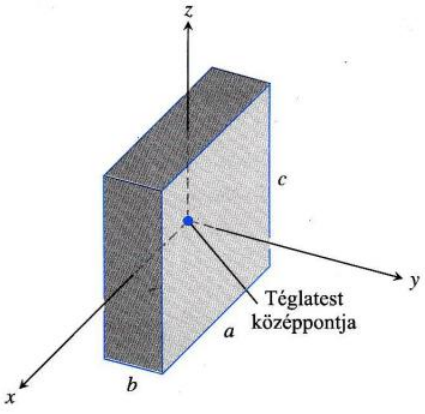
Az L egyenesre vonatkozó forgatónyomaték:

$$I_L = \iiint r^2\delta \, dV \quad (r(x,y,z) = \text{az } (x,y,z) \text{ pont távolsága az } L \text{ egyenestől})$$

Tehetetlenségi sugár az L egyenesre vonatkoztatva:

$$R_L = \sqrt{I_L/M}$$

15.3. TÁBLÁZAT: Tömeg- és nyomatékképletek térbeli testekre.



15.35. ÁBRA: Az I_x, I_y, I_z értékek meghatározása az itt bemutatott téglatestre. Az origó a középpontban van (2. példa).

2. PÉLDA: **A koordinátatengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékok számítása**

Határozzuk meg az I_x, I_y, I_z értékeket konstans δ mellett a 15.35. ábrán szereplő téglatestre!

Megoldás: Az I_x-re vonatkozó képlet:

$$I_x = \int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2} (y^2+z^2)\delta \, dx\, dy\, dz.$$

Felhasználjuk, hogy y^2+z^2 páros függvénye x-nek, y-nak, z-nek. A téglatest 8 szimmetrikus darabból áll, minden térnyolcadban egy ilyen van. Az integrált elég egyre kiszámítani és az eredményt szorozni nyolccal.

$$I_x = 8\int_0^{c/2}\int_0^{b/2}\int_0^{a/2} (y^2+z^2)\delta \, dx\, dy\, dz = 4a\delta \int_0^{c/2}\int_0^{b/2} (y^2+z^2)\, dy\, dz =$$

$$= 4a\delta \int_0^{c/2} \left[\frac{y^3}{3}+z^2y\right]_{y=0}^{y=b/2} dz =$$

$$= 4a\delta \int_0^{c/2} \left(\frac{b^3}{24}+\frac{z^2b}{2}\right) dz =$$

$$= 4a\delta \left(\frac{b^3c}{48}+\frac{c^3b}{48}\right) = \frac{abc\delta}{12}(b^2+c^2) = \frac{M}{12}(b^2+c^2).$$

Hasonlóképp

$$I_y = \frac{M}{12}(a^2+c^2) \quad \text{és} \quad I_z = \frac{M}{12}(a^2+b^2). \qquad \square$$

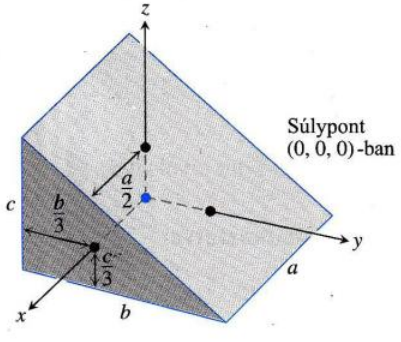
15.5. Feladatok

Konstans sűrűség

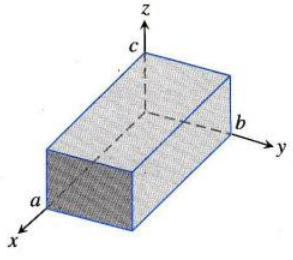
Az 1–12. feladatokban szereplő testeknek konstans sűrűsége van.

1. *Az 1. példa újra elővéve:* Számítsuk ki I_x-et a 15.3. táblázat alapján direkt módon, hogy lássuk, a 2. példában a rövidítés jogos! Használjuk a 2. példa eredményét a koordinátatengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi sugarak meghatározására!

2. Tehetetlenségi nyomaték: A mellékelt ábrán a koordinátatengelyek átmennek az ék súlypontján, párhuzamosan a bejelölt élekkel. Mennyi I_x, I_y és I_z, ha $a = b = 6$ és $c = 4$?



3. Tehetetlenségi nyomaték: Határozzuk meg az itt látható téglatest tehetetlenségi nyomatékait az éleire vonatkoztatva, I_x, I_y, I_z meghatározásával!



4. (a) Súlypont és tehetetlenségi nyomaték: Határozzuk meg a tetraéder súlypontját és I_x, I_y, I_z tehetetlenségi nyomatékait, ha a csúcsok $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, és $(0,0,1)$!
(b) Tehetetlenségi sugár: Adjuk meg a tetraéder x-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi sugarát! Hasonlítsuk össze a súlypont távolságával az x-tengelytől!

5. Tömegközéppont és tehetetlenségi nyomaték: Egy állandó sűrűségű testet alulról a $z = 4y^2$ felület, felülről a $z = 4$ sík, végein az $x = 1$ és $x = -1$ síkok határolnak. Határozzuk meg a tömegközéppontját és a tehetetlenségi nyomatékait a három tengelyre vonatkozóan!

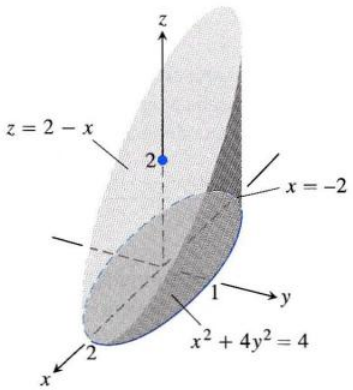
6. Tömegközéppont: Egy konstans sűrűségű testet alulról a $z = 0$ sík, oldalt az $x^2 + 4y^2 = 4$ elliptikus henger, felülről a $z = 2 - x$ sík határol (lásd a mellékelt ábrát).

(a) Határozzuk meg $\bar{x}$-et és $\bar{y}$-t!

(b) Számítsuk ki az

$$M_{xy} = \int_{-2}^{2} \int_{(-1/2)\sqrt{4-x^2}}^{(1/2)\sqrt{4-x^2}} \int_{0}^{2-x} z \, dz \, dy \, dx$$

integrált, az integrálási táblázatokat használva az utolsó, x-szerinti integrálhoz! Ezután osszuk el M_{xy}-t M-mel, hogy megmutassuk, $\bar{z} = \frac{5}{4}$!



7. **(a) Tömegközéppont:** Határozzuk meg a tömegközéppontját annak az állandó sűrűségű testnek, amelyet alulról a $z = x^2 + y^2$ paraboloid, felülről a $z = 4$ sík határol!

(b) Hol van az a $z = c$ egyenletű sík, amelyik ezt a testet két egyenlő térfogatú részre osztja? Ez a sík nem a tömegközépponton megy át.

8. **Nyomatékok és tehetetlenségi sugarak:** Egy 2 oldalú kockát az $x = \pm 1$, $z = \pm 1$, $y = 5$, $y = 3$ síkok határolnak. Határozzuk meg a tömegközéppontját, a tehetetlenségi nyomatékait és tehetetlenségi sugarait a koordinátatengelyekre vonatkozóan!

9. **Nyomaték és tehetetlenségi sugár egy egyenesre vonatkozóan:** Egy olyan ék méretei, mint amilyen a 2. feladatban van, $a = 4$, $b = 6$, $c = 3$. Csináljunk egy vázlatot magunknak, hogy lássuk, az ék egy (x, y, z) pontjának az L: $z = 0$, $y = 6$ egyenestől való távolságnégyzete $r^2 = (y-6)^2 + z^2$. Ezután számítsuk ki az ék L egyenesre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát és tehetetlenségi sugarát!

10. **Nyomaték és tehetetlenségi sugár egy egyenesre vonatkozóan:** Egy olyan ék méretei, mint amilyen a 2. feladatban van, $a = 4$, $b = 6$, $c = 3$. Csináljunk egy vázlatot magunknak, hogy lássuk, az ék egy (x, y, z) pontjának az L: $x = 4$, $y = 0$ egyenestől való távolságnégyzete $r^2 = (x-4)^2 + y^2$. Ezután számítsuk ki az ék L egyenesre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát és tehetetlenségi sugarát!

11. **Nyomaték és tehetetlenségi sugár egy egyenesre vonatkozóan:** Egy olyan téglatest méretei, mint amilyen a 3. feladatban van, $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$. Csináljunk egy vázlatot magunknak, hogy lássuk, a test egy (x, y, z) pontjának az L: $y = 2$, $z = 0$ egyenestől való távolságnégyzete $r^2 = (y-2)^2 + z^2$. Ezután számítsuk ki a test L egyenesre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát és tehetetlenségi sugarát!

12. **Nyomaték és tehetetlenségi sugár egy egyenesre vonatkozóan:** Egy olyan test méretei, mint amilyen a 3. feladatban van, $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$. Csináljunk egy vázlatot magunknak, hogy lássuk, a test egy (x, y, z) pontjának az L: $x = 4$, $y = 0$ egyenestől való távolságnégyzete $r^2 = (x-4)^2 + y^2$. Ezután számítsuk ki az ék L egyenesre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát és tehetetlenségi sugarát!

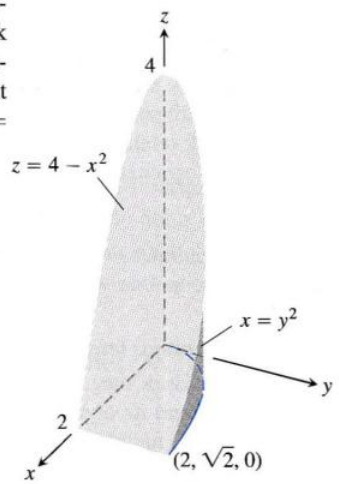
Változó sűrűség

A 13–14. feladatokban számítsuk ki a

(a) test tömegét, **(b)** tömegközéppontját!

13. A test az első térnyolcadban van, a koordinátasíkok és az $x + y + z = 2$ sík határolja, sűrűsége pedig $\delta(x, y, z) = 2x$.

14. A test az első térnyolcadban van, a $z = 0$, $y = 0$ síkok és a $z = 4 - x^2$, $x = y^2$ felületek határolják (lásd a mellékelt ábrát). A sűrűsége $\delta(x, y, z) = kxy$, ahol k konstans.



A 15–16. feladatokban számítsuk ki a test

(a) tömegét, **(b)** tömegközéppontját,

(c) a tehetetlenségi nyomatékait a koordinátatengelyekre vonatkozóan,

(d) a tehetetlenségi sugarait a koordinátatengelyekre vonatkozóan!

15. Egy kockát az első térnyolcadban a koordinátasíkok és az $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ síkok határolnak. A kocka sűrűsége $\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$.

16. Egy olyan ék méretei, mint amilyen a 2. feladatban van, $a = 2$, $b = 6$, $c = 3$. A sűrűsége $\delta(x, y, z) = x + 1$. Megjegyezzük, hogy ha a sűrűség konstans, a tömegközéppont az origóban van.

17. **Tömeg:** Adjuk meg a tömegét annak a testnek, amelyet az $x + z = 1$, $x - z = -1$, $y = 0$ síkok és az $y = \sqrt{z}$ felület határolnak! A test sűrűsége $\delta(x, y, z) = 2y + 5$.

18. **Tömeg:** Határozzuk meg a tömegét annak a testnek, amelyet a $z = 16 - 2x^2 - 2y^2$ és a $z = 2x^2 + 2y^2$ felületek határolnak, és a sűrűsége $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$!

Munka

A 19–20. feladatokban számítsuk ki a következőket:

(a) Azt a munkamennyiséget, amit az (állandó) g gravitációs tér végez, amikor a folyadékot a tartályból az xy-síkra öntjük. (*Útmutatás*: Osszuk fel a folyadékot kis ΔV_i térfogatú térfogatelemekre és számítsuk ki a hozzávetőleges munkát ezekre az elemekre! Az összegzés és limesz hármasintegrálhoz vezet.)

(b) Azt a munkamennyiséget, amit (állandó) gravitációs tér végez, amikor a test tömegközéppontját az xy-síkra viszi!

19. A tartály egy kocka alakú doboz az első térnyolcadban, amit a koordinátasíkok és az $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ síkok határolnak! A folyadék sűrűsége $\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$ (15. feladat).

20. A tartálynak olyan alakja van, mint annak a tartománynak, amelyet az $y=0$, $z=0$, $z=4-x^2$ és az $x=y^2$ felületek határolnak, a folyadék sűrűsége pedig $\delta(x,y,z)=kxy$, ahol k konstans (14. feladat)!

Párhuzamos tengelyek tétele

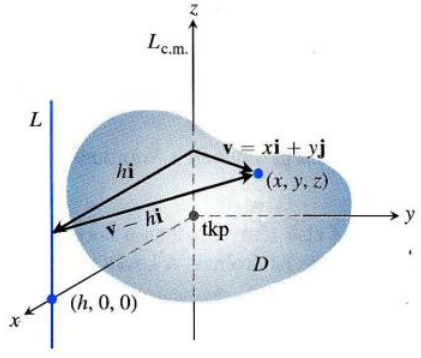
A párhuzamos tengelyek tétele (15.2. alfejezet 15. feladat) három dimenzióban ugyanúgy igaz, mint kettőben. Legyen L_{tk} egy egyenes amelyik átmegy az m tömegű test tömegközéppontján, és legyen L párhuzamos L_{tk}-val, tőle h távolságra. A **párhuzamos tengelyek tétele** azt mondja ki, hogy a tehetetlenségi nyomaték erre az egyenesre

$$I_L = I_{tk} + mh^2. \tag{15.15}$$

Akárcsak a kétdimenziós esetben, ez gyors kiszámítási módot ad a nyomatékra, ha már valamely egyenesre vonatkozólag ismerjük.

21. A párhuzamos tengelyek tételének bizonyítása:

(a) Mutassuk meg, hogy a test statikai nyomatéka (első momentuma) az olyan síkra, amelyik átmegy a tömegközéppontján, nulla! (*Útmutatás*: Helyezzük a test tömegközéppontját az origóba, a sík pedig legyen az yz-sík! Mit mond ekkor az $\bar{x} = M_{yz}/M$ képlet?)



(b) Ahhoz, hogy bebizonyítsuk a párhuzamos tengelyek tételét, helyezzük a test tömegközéppontját az origóba, az L_{tk} egyenes legyen a z-tengely, és az ezzel párhuzamos egyenes menjen át a $(h,0,0)$ ponton. Legyen a D térbeli tartomány az, amit a test elfoglal. Ekkor, az ábra jelöléseivel

$$I_L = \iiint_D |\mathbf{v} - h\mathbf{i}|^2 \, dm.$$

Fejtsük ki az integrandust, és fejezzük be a bizonyítást!

22. Egy konstans sűrűségű, a sugarú gömb tehetetlenségi nyomatéka egy átmérőjére vonatkoztatva $(2/5)ma^2$, ahol m a gömb tömege. Adjuk meg a tehetetlenségi nyomatékot egy olyan egyenesre, amelyik a gömböt érinti!

23. A z-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték a 3. feladatban $I_z = abc(a^2+b^2)/3$ volt.

(a) A (15.15) egyenlőséget használva adjuk meg a test tehetetlenségi nyomatékát és tehetetlenségi sugarát arra a z-tengellyel párhuzamos egyenesre vonatkoztatva, amelyik átmegy a test tömegközéppontján!

(b) A (15.15) egyenlőséget és az (a) rész eredményét használva adjuk meg a test tehetetlenségi nyomatékát és tehetetlenségi sugarát az $x=0$, $y=2b$ egyenesre vonatkoztatva!

24. Ha $a=b=6$ és $c=4$, akkor a 2. feladatban szereplő test x-tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka $I_x = 208$. Mennyi a tehetetlenségi nyomatéka az $y=4$, $z=-4/3$ egyenesre nézve (a keskeny vég éle)?

Papposz-formula

A 15.2. alfejezet feladatainál tárgyalt Papposz-formula három dimenzióban ugyanúgy érvényes. Tegyük fel, hogy a B_1 és B_2 testeknek a tömege rendre m_1, ill. m_2, és nem nyúlnak egymásba (nincs közös belső pontjuk). Ha a tömegközéppontjaikba mutató helyvektorok $\mathbf{c}_1$ és $\mathbf{c}_2$, akkor a két test $B_1 \cup B_2$ egyesítésének tömegközéppontjának helyvektora

$$\mathbf{c} = \frac{m_1\mathbf{c}_1 + m_2\mathbf{c}_2}{m_1 + m_2}$$

Ezt az egyenlőséget, akárcsak korábban, **Papposz-formulának** hívjuk. Ha több, egymásba át nem nyúló testünk van, és számuk véges, akkor a képlet általános alakja

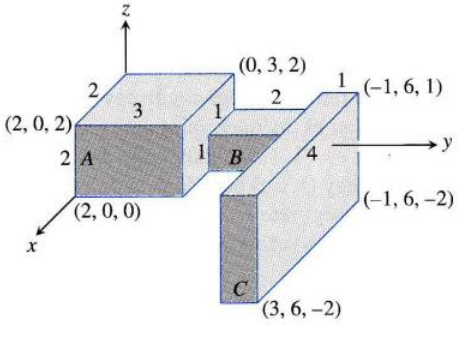
$$\mathbf{c} = \frac{m_1\mathbf{c}_1 + m_2\mathbf{c}_2 + \cdots + m_n\mathbf{c}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

25. Bizonyítsuk be a Papposz-formulát! (*Útmutatás*: Vázoljuk fel B_1-et és B_2-t, mint egymásba át nem nyúló tartományokat az első térnyolcadban, és jelölje tömegközéppontjaikat $(\bar{x}_1,\bar{y}_1,\bar{z}_1)$, ill. $(\bar{x}_2,\bar{y}_2,\bar{z}_2)$! Fejezzük ki $B_1 \cup B_2$ statikai nyomatékát a koordinátasíkokra vonatkozóan, mint m_1 és m_2, és a középpontok koordinátáinak függvényét!)

26. A mellékelt ábra egy olyan testet ábrázol, ami három téglatest alakú testből lett összeállítva, és amelyek sűrűsége $\delta = 1$. Használjuk a Papposz-formulát a következő együttesek tömegközéppontjának meghatározására:

(a) $A \cup B$, **(b)** $A \cup C$,

(c) $B \cup C$, **(d)** $A \cup B \cup C$.



27. **(a)** Tegyük fel, hogy egy egyenes körkúp alakú C test alapkörének sugara a, magassága h, és alapkörével egy szintén a sugarú G félgömb lapos feléhez van erősítve (úgy, hogy a kettő együtt tölcséres fagylalthoz hasonlít). Tudjuk, hogy egy kúp súlypontja egynegyed úton van az alaptól a csúcs felé, egy félgömb súlypontja pedig háromnyolcad úton van a lapos alaptól a csúcs felé. Milyen aránynak kell a és h között fennállni, hogy $C \cup G$ súlypontja a közös alapkörön legyen?

(b) Ha még nem tettük volna meg eddig, válaszoljuk meg a hasonló kérdést egy háromszög alakú és egy félkör alakú lemezzel (15.2. alfejezet 55. feladat)! A válaszok különböznek.

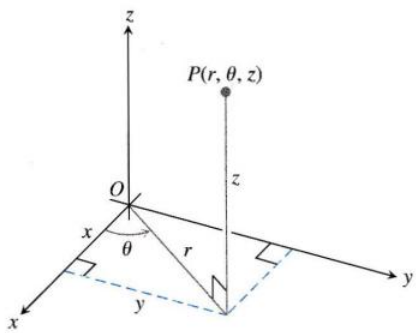
28. Egy négyzetalapú P gúla magassága h, és az alapjával egy s oldalhosszúságú K kockához van erősítve. A gúla súlypontja egynegyed úton van az alaptól a csúcs felé. Milyen legyen h és s aránya, hogy $P \cup K$ súlypontja az illesztésen legyen? Hasonlítsuk össze válaszunkat az előző feladatéval és a 15.2. alfejezet 56. feladat válaszával!

15.6. Hármas integrálok henger- és gömbi koordináta-rendszerben

Amikor a fizikában, mérnöki feladatokban, geometriában hengerekkel, kúpokkal, gömbökkel kell feladatokat megoldani, a Descartes-féle koordináta-rendszer gyökös kifejezéseit igen nehézkes kezelni. Henger- és gömbi koordináták használata ezt jelentősen leegyszerűsítheti. Ez az eljárás hasonló a 15.3. alfejezetben vizsgált polárkoordinátás transzformációhoz.

Integrálás hengerkoordináta-rendszerben

A hengerkoordináta-rendszerben az xy-sík polárkoordináta-rendszerét a z-tengellyel egészítjük ki. A tér minden pontjának három koordinátája lesz ebben a koordináta-rendszerben is, (r,θ,z), ahogy a 15.36. ábrán látszik.



15.36. ÁBRA: A P pont hengerkoordinátái (r,θ,z).

DEFINÍCIÓ: Hengerkoordináták

A **hengerkoordináták** egy térbeli P pontot a rendezett (r,θ,z) számhármassal definiálnak, ahol

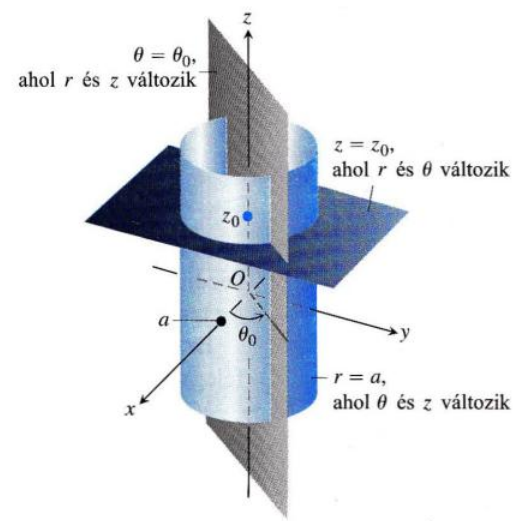
1. r és θ a P pont xy-síkra való merőleges vetületének polárkoordinátái és
2. z a derékszögű koordináta-rendszer harmadik koordinátája.

Az x, y, r, θ értékek között a jólismert összefüggések állnak fenn.

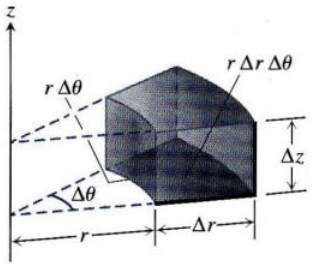
Összefüggések az (x,y,z) derékszögű és a (r,θ,z) hengerkoordináták között

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z,$$
$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg}\theta = y/x.$$

Hengerkoordináta-rendszerben az $r = a$ nem egy egyszerű kör az xy-síkban, hanem egy körhengerfelület, amelynek tengelye a z-tengely (15.37. ábra). A z-tengely egyenlete $r = 0$. A $\theta = \theta_0$ egy sík egyenlete, ami az x-tengely pozitív felével θ szöget zár be. A $z = z_0$ egyenlet egy sík egyenlete, ugyanazé, mint a derékszögű koordináta-rendszerben.



15.37. ÁBRA: A „koordináta = állandó" egyenletek hengerkoordináta-rendszerben hengerek és síkok egyenletei.



15.38. ÁBRA: Hengerkoordináták esetén a hengerhéjszeletke térfogata: $\Delta V = \Delta z\, r\, \Delta r \Delta\theta$, ahol r a kis és nagy sugár számtani közepe.

Hengerkoordináta-rendszerben egyszerűen megadhatók olyan hengerek, amelyeknek tengelye a z-tengely, és olyan síkok, amelyek a z-tengelyt tartalmazzák vagy merőlegesek rá. Ilyen felületek egyenletei például:

$r = 4,$	Henger, sugara 4, tengelye a z-tengely;
$\theta = \dfrac{\pi}{3},$	Sík, tartalmazza a z-tengelyt;
$z = 2.$	Sík, merőleges a z-tengelyre.

Amikor hengerkoordináta-rendszerben számítunk hármas integrált egy D tartomány felett, akkor azt n darab kis hengerhéjszeletke tartományra osztjuk, és nem kis téglatestekre. A k-adik hengerhéjszeletkében r, θ és z változása rendre Δr_k, $\Delta\theta_k$ és Δz_k, és ezek közül a számok közül a legnagyobb a felosztás **normája**. A hármas integrált úgy definiáljuk, mint a Riemann-összegek határértékét, amiben ezeket a kis hengerhéjszeletkéket használjuk. A k-adik hengerhéjszeletke ΔV_k térfogatát úgy kapjuk, hogy az xy-síkra vetített ΔA_k alapterületet megszorozzuk a Δz_k magassággal (15.38. ábra).

A polárkoordináták tárgyalásakor már kiszámítottuk, hogy az k-adik hengerhéjszeletke alapterülete $\Delta A_k = r_k \Delta r_k \Delta\theta_k$, ahol r_k a „középsugár". Így $\Delta V_k = \Delta z_k r_k \Delta r_k \Delta\theta_k$, és $P_k = (r_k, \theta_k, z_k)$ választással a Riemann-összeg (integrálközelítő összeg):

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k, z_k) \Delta z_k r_k \Delta r_k \Delta\theta_k.$$

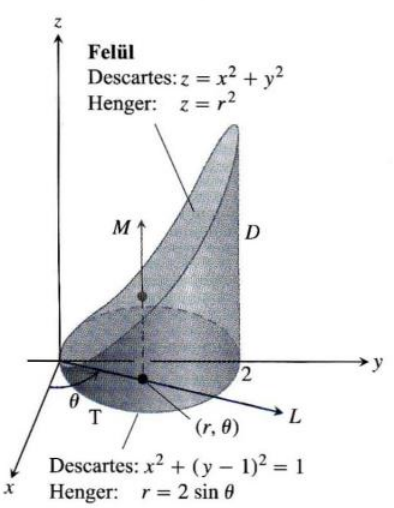
Az f függvény hármas integrálja a D tartományon a Riemann-összegek határértéke, amint a felosztás normája nullához tart:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D f\,dV = \iiint_D f\, dz\, r\, dr\, d\theta.$$

Ha az integrandus folytonos függvény, a hármas integrálokat ezután mint háromszoros integrálokat számíthatjuk.

1. PÉLDA: **Integrálási határok megállapítása hengerkoordináták esetén**

Írjuk fel az integrálási határokat hengerkoordináta-rendszerben, ha az $f(r, \theta, z)$ függvényt azon a D tartományon akarjuk integrálni, amelyet alulról a $z = 0$ sík, oldalról az $x^2 + (y-1)^2 = 1$ henger, felülről a $z = x^2 + y^2$ paraboloid határol!



15.39. ÁBRA: Az integrálási határok megállapítása hengerkoordináta-rendszerben (1. példa).

Megoldás: D alapja egyben az xy-síkra való T vetülete is, amit az $x^2 + (y-1)^2 = 1$ kör határol. Ennek polárkoordinátás egyenlete

$$\begin{aligned} x^2 + (y-1)^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 - 2y + 1 &= 1 \\ r^2 - 2r\sin\theta &= 0 \\ r &= 2\sin\theta. \end{aligned}$$

A tartományt a 15.39. ábrán láthatjuk. A határok megállapítását z határaival kezdjük. Az M egyenes, ami átmegy a T tartomány (r, θ) pontján és párhuzamos a z tengellyel, $z = 0$-nál lép be D-be, és $z = x^2 + y^2 = r^2$-nél hagyja azt el.

Ezután az r-re vonatkozó határokat állapítjuk meg. Az (r, θ) ponton átmenő félegyenes a T tartományba $r = 0$-nál lép be, és $r = 2\sin\theta$-nál lép ki.

Végül θ határai következnek. Ahogy L végigsöpör T-n, a θ szög (az x-tengely pozitív felével bezárt szög) $\theta = 0$-tól $\theta = \pi$-ig változik. Így az integrál:

$$\iiint f(r, \theta, z) dV = \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\theta} \int_0^{r^2} f(r, \theta, z)\, dz\, r\, dr\, d\theta. \qquad \square$$

Az 1. példa által illusztrált módszert foglaljuk össze a következőkben.

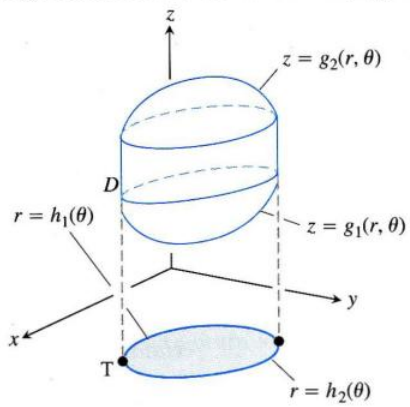
Hogyan integráljunk hengerkoordináta-rendszerben?

Ahhoz, hogy az

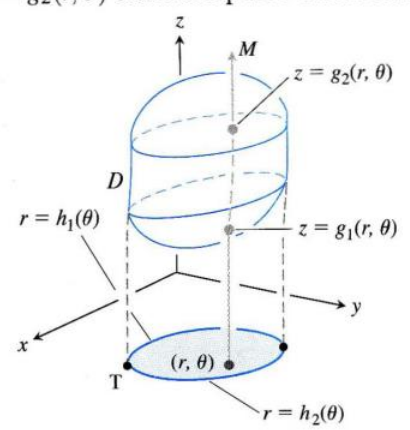
$$\iiint_D f(r,\theta,z)\,dV$$

integrált hengerkoordináta-rendszerben kiszámítsuk először z, majd r, végül θ szerint integrálva, a következő lépéseket kell végrehajtanunk:

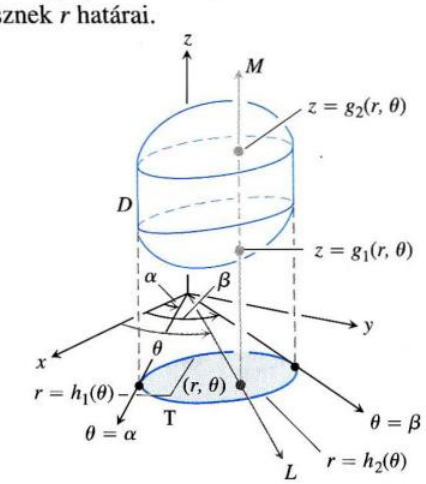
1. *Vázlat:* Vázoljuk fel a D tartományt az xy-síkon való T vetületével együtt, és adjuk meg a határoló felületek és határoló görbék egyenleteit!



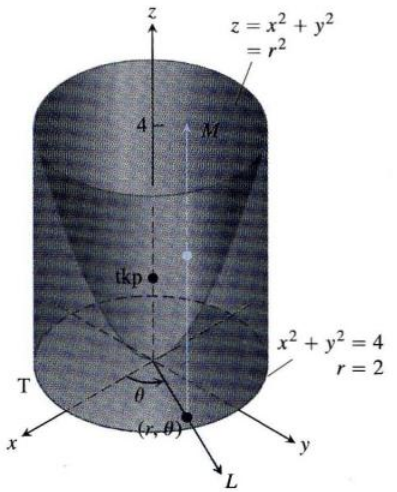
2. *Határok z-re:* Húzzunk egy M egyenest, ami átmegy T egy (r,θ) pontján, és párhuzamos a z-tengellyel! Ahogy z növekszik, a $z = g_1(r,\theta)$ értéknél lép be D-be, és $z = g_2(r,\theta)$ értéknél lép ki D-ből. Ezek z határai.



3. *Határok r-re:* Húzzunk egy félegyenest az origóból (r,θ)-n keresztül! A félegyenes az $r = h_1(\theta)$ értéknél lép be T-be és az $r = h_2(\theta)$ értéknél lép ki belőle. Ezek lesznek r határai.



4. *Határok θ-ra:* Ahogy L végigsöpör T-n, az x tengely pozitív felével bezárt szögei $\theta = \alpha$ és $\theta = \beta$ között változnak. Ezek az értékek θ határai.



15.40. ÁBRA: A 2. példában ennek a testnek a súlypontját határozzuk meg.

Az integrál tehát:

$$\iiint_D f(r,\theta,z)\,dV = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{r=h_1(\theta)}^{r=h_2(\theta)}\int_{z=g_1(r,\theta)}^{z=g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta.$$

2. PÉLDA: **Súlypont meghatározása**

Határozzuk meg a súlypontját annak a testnek, amelyet oldalról az $x^2+y^2=4$ hengerpalást, felülről a $z=x^2+y^2$ paraboloid, alulról az xy-sík határol ($\delta=1$)!

Megoldás: Felvázoljuk a testet (15.40 ábra), amit felülről a $z=r^2$ paraboloid, alulról a $z=0$ sík határol, és alapja, ami egyben a vetülete, a $0\le r\le 2$ körlemez az xy-síkban.

Mivel a test szimmetrikus a z-tengelyre a súlypont $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ koordinátái közül $\bar{x}=\bar{y}=0$. $\bar{z}$ meghatározásához az M tömeget és az M_{xy} nyomatékot (első momentumot) kell kiszámítanunk.

Az integrálási határok megállapításához a négy alaplépést követjük.
Határok z-re: Az alap (r,θ) pontján átmenő, z-tengellyel párhuzamos egyenes $z=0$-nál lép be, és $z=r^2$-nél lép ki.
Határok r-re: Az origóból induló (r,θ)-n átmenő félegyenes T-be $r=0$-nál lép be, és $r=2$-nél lép ki onnan.
Határok θ-ra: Mialatt L végigsöpör T-n, minden irányt bejár, így $\theta=0$ az alsó, $\theta=2\pi$ a felső határ. Az xy-síkra vonatkozó nyomaték

$$M_{xy}=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{r^2} z\,dz\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{r^2} r\,dr\,d\theta=$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2\frac{r^5}{2}dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^6}{12}\right]_0^2 d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{16}{3}d\theta=$$
$$=\frac{32\pi}{3}.$$

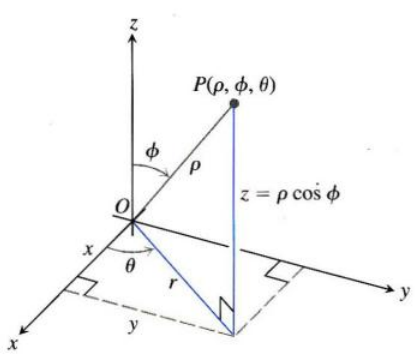
Az M tömeg értéke:

$$M=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{r^2} dz\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2\left[z\right]_0^{r^2} r\,dr\,d\theta=$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\theta=\int_0^{2\pi}4d\theta=$$
$$=8\pi.$$

Ezekből

$$\bar{z}=\frac{Mxy}{M}=\frac{32\pi}{3}\frac{1}{8\pi}=\frac{4}{3},$$

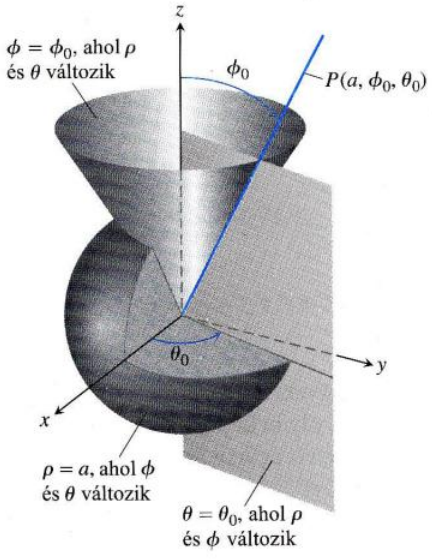
azaz a súlypont (0, 0, 4/3). Vegyük észre, hogy a súlypont a testen kívül van. □



15.41. ÁBRA: A ρ, ϕ, θ gömbi koordináták, és kapcsolatuk az x, y, z koordinátákkal.

Gömbi koordináták és integrálás

A gömbi koordináták a tér pontjait két szöggel és egy távolsággal jellemzik, ahogy az a 15.41. ábrán látható. Az első koordináta $\rho=|\overrightarrow{OP}|$, a pontnak az origótól való távolsága, ami sohasem negatív. A második koordináta ϕ, az $\overrightarrow{OP}$ vektornak a z-tengely pozitív felével bezárt szöge. Ez a $[0,\pi]$ intervallumban van. A harmadik, a θ szög ugyanaz a szög, ami a hengerkoordinátáknál volt.



15.42. ÁBRA: A „koordináta = konstans" egyenletű felületek gömbi koordináta-rendszerben: gömb, kúp, félsík.

DEFINÍCIÓ: Gömbi koordináták

A **gömbi koordináták** a tér egy P pontját egy rendezett (ρ, ϕ, θ) számhármassal adják meg, ahol

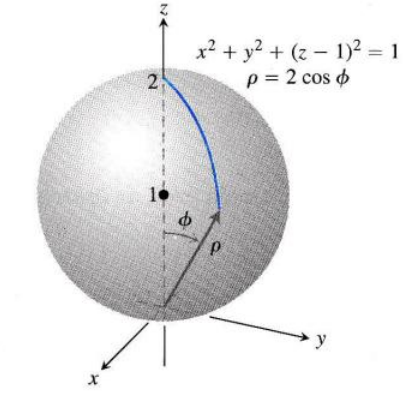
1. ρ a P pont távolsága az origótól;
2. ϕ az $\overrightarrow{OP}$ vektor szöge a z-tengely pozitív felével $(0 \le \phi \le \pi)$;
3. θ a hengerkoordinátákból ismert szög.

A Föld-térképeken θ a szélességi fok (meridián), ϕ a hosszúsági fok, ρ a földfelszínhez képest mért magassággal van kapcsolatban.

A $\rho = a$ egyenlet egy a sugarú, origó középpontú gömb egyenlete (15.42. ábra). A $\phi = \phi_0$ egyenlet egy egyköpenyű forgáskúp egyenlete, csúcsa az origóban van, tengelye a z-tengely. (Ebben a vonatkozásban az xy-sík egy elfajult kúp, egyenlete $\phi = \pi/2$). Ha $\phi > \pi/2$, akkor a kúp lefelé nyitott. A $\theta = \theta_0$ egyenlet egy félsíknak felel meg, amely tartalmazza a z-tengelyt és a pozitív x-tengellyel θ_0 szöget zár be.

A Descartes-féle, a henger- és a gömbi koordináták közötti összefüggések

$$r = \rho \sin\phi, \qquad x = r\cos\theta = \rho \sin\phi \cos\theta$$
$$z = \rho\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta = \rho \sin\phi \sin\theta \qquad (15.16)$$
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{r^2+z^2}$$



15.43. ÁBRA: A 3. példa gömbje.

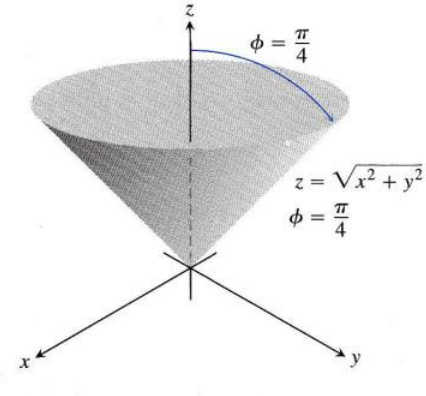
3. PÉLDA: Áttérés gömbi koordinátákra

Adjuk meg az $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$ gömb egyenletét gömbi koordinátákkal!

Megoldás: Használjuk a (15.16) egyenleteket:

$$x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$$
$$\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta + (\rho\cos\phi - 1)^2 = 1$$
$$\rho^2\sin^2\phi\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1} + \rho^2\cos^2\phi - 2\rho\cos\phi + 1 = 1$$
$$\rho^2\underbrace{(\sin^2\phi+\cos^2\phi)}_{1} = 2\rho\cos\phi$$
$$\rho^2 = 2\rho\cos\phi$$
$$\rho = 2\cos\phi$$

Lásd a 15.43. ábrát. □

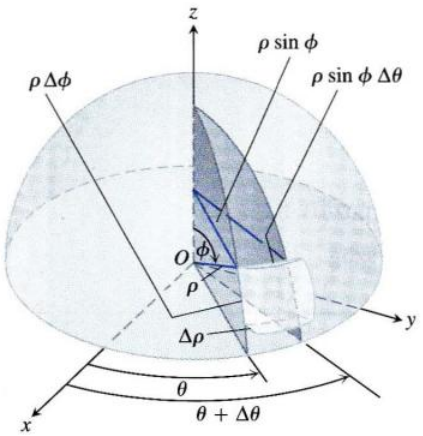


15.44. ÁBRA: A 4. példa kúpja.

4. PÉLDA: Áttérés gömbi koordinátákra

Mi lesz az egyenlete gömbi koordináta-rendszerben a $z = x^2+y^2$ kúpnak (15.44. ábra)?

Megoldás: *Első megoldás:* Geometriai meggondolással. A kúp szimmetrikus a z-tengelyre, és az yz-síkot a $z = y$ egyenes mentén metszi. Ezért a kúp minden alkotója a z-tengellyel $\pi/4$ fokos szöget zár be. Tehát a kúp azokból a pontokból áll, amelyekre a második gömbi koordináta: $\phi = \pi/4$.



15.45. ÁBRA: Gömbkoordináta-rendszerben:

$$dV = d\rho \cdot \rho\, d\phi \cdot \rho \sin\phi\, d\theta = \\ = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

Második megoldás: Algebrai helyettesítéssel. A (15.16) egyenlőségeket helyettesítve:

$$z = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\rho\cos\phi = \sqrt{\rho^2\sin^2\phi}$$
$$\rho\cos\phi = \rho\sin\phi \qquad \rho \geq 0,\ \sin\phi \geq 0$$
$$\cos\phi = \sin\phi$$
$$\phi = \frac{\pi}{4} \qquad 0 \leq \phi \leq \pi. \qquad \square$$

Gömbi koordináta-rendszerben egyszerű az egyenlete az origó középpontú gömböknek, a z-tengely által határolt félsíkoknak, olyan kúpoknak, amelyeknek tengelye a z-tengely, csúcsa az origó. Ezen felületek egyenletei olyanok, hogy valamelyik koordináta konstans:

$\rho = 4$	Gömb, sugara 4, középpontja az origó
$\phi = \frac{\pi}{3}$	Kúp, felül nyitott, nyílásszöge $2\pi/3$
$\theta = \frac{\pi}{3}$.	Félsík, a z-tengely határolja, szöge az $\pi/3$ a pozitív x-tengellyel.

Amikor gömbkoordináta-rendszerben integrálunk, akkor a tartományt n gömbhéjszeletkére osztjuk fel. A k-adik gömbhéjszeletke méretét a $\Delta\rho_k$, $\Delta\theta_k$, $\Delta\phi_k$ mennyiségek határozzák meg. Jelölje a külső sugarat $\rho_k^{(k)}$, és $\phi_k^{(f)}$ a szöget a felső élig. Az egyik külső, körív alakú él hossza $\rho_k^{(k)}\Delta\phi_k$, egy másiké $\rho_k^{(k)} \cdot \sin\phi_k^{(f)}\Delta\theta_k$, a vastagsága pedig $\Delta\rho_k$. Igen kicsi $\Delta\rho_k$, $\Delta\theta_k$, $\Delta\phi_k$ mennyiségek esetén a gömbhéjszeletke megközelítőleg téglatest alakú (15.45. ábra). Kimutatható, hogy egy ilyen gömbhéjszeletke ΔV_k térfogata a $\Delta V_k = \rho_k^2 \sin\phi_k \Delta\rho_k \Delta\phi_k \Delta\theta_k$ a szeletke egy alkalmasan választott $(\rho_k, \phi_k, \theta_k)$ belső pontjára. Az $F(\rho,\phi,\theta)$ függvény adott felosztáshoz tartozó Riemann-összege (integrálközelítő összege)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F(\rho_k,\phi_k,\theta_k)\rho_k^2 \sin\phi_k \Delta\rho_k \Delta\phi_k \Delta\theta_k.$$

Ahogy a felosztás normája tart nullához, folytonos F esetén ezek az összegek egy határértékhez tartanak:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D F(\rho,\phi,\theta)\, dV = \iiint_D F(\rho,\phi,\theta)\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

Gömbi koordináta-rendszerben

$$dV = \rho^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta.$$

Az ilyen integráloknál leggyakrabban először ρ szerint integrálunk. A integrálási határok kiválasztásának menete az alábbi. Ebben a fejezetben csak olyan tartományokkal foglalkozunk, amelyekre a ϕ-re és θ-ra vonatkozó határok mindketten konstansok.

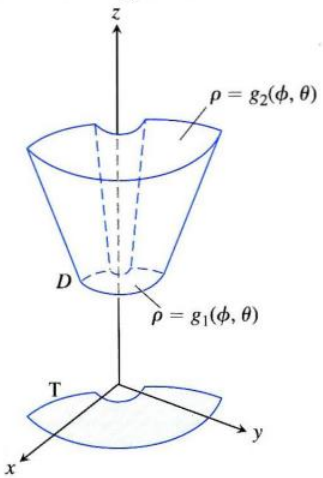
Integrálási határok felírása gömbi koordináta-rendszerben

Ha az

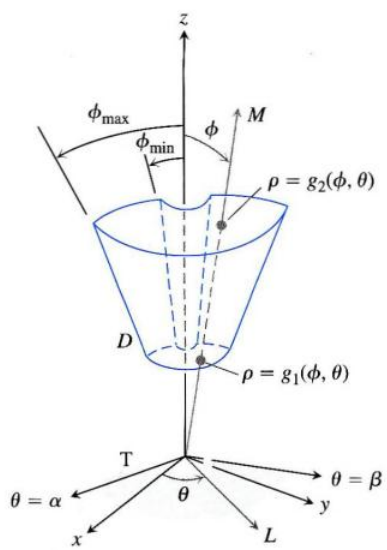
$$\iiint_D f(\rho,\phi,\theta)dV$$

integrált akarjuk kiszámítani a D tartományon először ρ, majd ϕ, majd θ szerint, akkor a következő lépéseket hajtsuk végre:

1. *Vázlat:* Vázoljuk fel a tartományt az xy-síkra való vetületével együtt! Adjuk meg a határoló felületek egyenleteit!



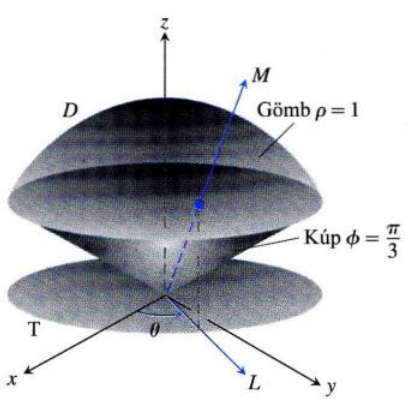
2. *Határok ρ-ra:* Húzzunk egy M félegyenest az origóból D-n keresztül, ami egy ϕ szöget zár be a z-tengely pozitív felével! Rajzoljuk be M vetületét az xy-síkon, és ezt a vetületet hívjuk L-nek! Az L félegyenes θ szöget zár be az x-tengely pozitív felével. Ahogy ρ növekszik, M belép a D tartományba a $\rho = g_1(\phi, \theta)$ értéknél, és kilép belőle a $\rho = g_2(\phi, \theta)$ értéknél. Ezek lesznek ρ határai.



3. *Határok ϕ-re:* Bármely θ értékre a szög, amit M bezár a z-tengellyel, $\phi = \phi_{\min}$-től $\phi = \phi_{\max}$-ig változik. Ezek lesznek ϕ határai.

4. *Határok θ-ra:* Az L félegyenes végigsöpri a T tartományt, amíg θ α-tól β-ig változik. Így az integrál

$$\iiint_D f(\rho,\phi,\theta)\,dV = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{\phi=\phi_{\min}}^{\phi=\phi_{\max}}\int_{\rho=g_1(\phi,\theta)}^{\rho=g_2(\phi,\theta)} f(\rho,\phi,\theta)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$$



15.46. ÁBRA: Az 5. példa „tölcséres fagylaltja".

5. PÉLDA: **Térfogat számítása gömbkoordinátákkal**

Mennyi a térfogata annak a „tölcséres fagylalt" alakú D tartománynak, amit a $\rho \le 1$ gömb vág ki a $\phi = \pi/3$ kúpból?

Megoldás: A térfogat $V = \iiint_D \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$, azaz az $f(\rho,\phi,\theta) = 1$ függvény integrálja D-n.

Az integrálási határok megtalálása érdekében vázoljuk fel a tartományt és az xy-síkra való vetületét (15.46. ábra).

Határok ρ-ra: Húzunk egy M félegyenest az origóból a D tartományon keresztül, ami a z-tengely pozitív felével ϕ szöget zár be. Szintén megrajzoljuk ennek L vetületét az xy-síkon, ami θ szöget zár be az x-tengely pozitív felével. M $\rho = 0$-nál lép be D-be, és $\rho = 1$-nél lép ki belőle.

Határok ϕ-re: A kúp alkotói $\pi/3$ szöget zárnak be a z-tengely pozitív felével, így minden θ-ra $\phi = 0$ az alsó, és $\phi = \pi/3$ a felső határ.

Határok θ-ra: Mire az L félegyenes végigsöpri az egész T tartományt, végigszalad a szögeken 0-tól 2π-ig. Így a térfogat:

$$V = \iiint_D \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \sin\phi \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \frac{1}{3}\sin\phi \, d\phi \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}\cos\phi\right]_0^{\pi/3} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right) d\theta = \frac{1}{6}(2\pi) = \frac{\pi}{3}. \qquad \square$$

6. PÉLDA: **Tehetetlenségi nyomaték meghatározása**

Egy konstans $\delta = 1$ sűrűségű test alakja olyan, mint az 5. példában szereplő D tartomány. Határozzuk meg a z-tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

Megoldás: Derékszögű koordinátákban a nyomaték:

$$I_z = \iiint (x^2+y^2)\, dV.$$

Gömbi koordinátákkal $x^2+y^2 = (\rho\sin\phi\cos\theta)^2 + (\rho\sin\phi\sin\theta)^2 = \rho^2\sin^2\phi$. Így

$$I_z = \iiint (\rho^2\sin^2\phi)\rho^2\sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \iiint \rho^4 \sin^3\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

Az 5. példa tartományára például ez

$$I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 \rho^4\sin^3\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 \sin^3\phi \, d\phi \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} (1-\cos^2\phi)\sin\phi \, d\phi \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} \left[-\cos\phi + \frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi/3} d\theta =$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{24}-\frac{1}{3}\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} \frac{5}{24} d\theta = \frac{1}{24}(2\pi) = \frac{\pi}{12}. \qquad \square$$

Koordináta-transzformációs képletek

Hengerkoordinátákról derékszögűbe	Gömbi koordinátákról derékszögűbe	Gömbi koordinátákról hengerkoordinátákra
$x = r\cos\theta$	$x = \rho\sin\phi\cos\theta$	$r = \rho\sin\phi$
$y = r\sin\theta$	$y = \rho\sin\phi\sin\theta$	$z = \rho\cos\phi$
$z = z$	$z = \rho\cos\phi$	$\theta = \theta$

A megfelelő formulák dV-re:

$$\begin{aligned} dV &= dx\,dy\,dz \\ &= dz\,r\,dr\,d\theta \\ &= \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta. \end{aligned}$$

A következő alfejezetben sokkal általánosabb képleteket fogunk adni dV meghatározására különböző koordináta-transzformációk esetén.

15.6. Feladatok

Integrálok számítása hengerkoordináta-rendszerben

Számítsuk ki a következő, hengerkoordinátákkal adott integrálokat (1–6. feladatok)!

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_r^{\sqrt{2-r^2}} dz\,r\,dr d\theta$

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_{r^2/3}^{\sqrt{18-r^2}} dz\,r\,dr d\theta$

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi\theta/2\pi 3+24r^2}\int_0^{}\int_0^{} dz\,r\,dr d\theta$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\theta/2\pi 3}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} dz\,r\,dr d\theta$

5. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_r^{1/\sqrt{2-r^2}} 3\,dz\,r\,dr d\theta$

6. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{-1/2}^{1/2} (r^2\sin^2\theta + z^2)\,dz\,r\,dr d\theta$

Az integrálási határok felcserélése hengerkoordináták esetén

Az eddig bemutatott integrálok azt sugallják, hogy vannak preferált integrálási sorrendek, de természetesen, más sorrend is lehet jó, néha még könnyebb is a számítás. Számítsuk ki a következő, hengerkoordinátákkal adott integrálokat (7–10. feladatok)!

7. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_0^{z/3} r^3\,dr\,dz\,d\theta$

8. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} 4r\,dr\,d\theta\,dz$

9. $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{2\pi} (r^2\cos^2\theta + z^2)r\,d\theta\,dr\,dz$

10. $\displaystyle\int_0^{2}\int_{r-2}^{\sqrt{4-r^2}}\int_0^{2\pi} (r\sin\theta + 1)\,r\,d\theta\,dz\,dr$

11. Legyen D az a tartomány, amit alulról a $z = 0$ sík, felülről az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ gömb, oldalról az $x^2 + y^2 = 1$ henger határol. Írjuk fel azokat a megadott sorrendek szerinti háromszoros integrálokat, amelyek D térfogatát adják!

(a) $dz\,dr\,d\theta$, **(b)** $dr\,dz\,d\theta$, **(c)** $d\theta\,dz\,dr$.

12. Legyen D az a tartomány, amelyet alulról a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp, felülről a $z = 2 - x^2 + y^2$ paraboloid határol. Írjuk fel hengerkoordinátákkal a megadott integrálási sorrendben azokat a háromszoros integrálokat, amelyek D térfogatát adják!

(a) $dz\,dr\,d\theta$, **(b)** $dr\,dz\,d\theta$, **(c)** $d\theta\,dz\,dr$.

13. Adjuk meg az

$$\iiint f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$$

integrál határait, ha háromszoros integrállal akarjuk kiszámítani, és a tartományt alulról a $z = 0$ sík, oldalt az $r = \cos\theta$ henger, felülről pedig a $z = 3r^2$ paraboloid határolja!

14. Írjuk át az

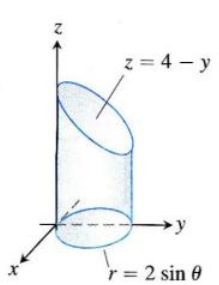
$$\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{x} (x^2 + y^2)\,dz\,dx\,dy$$

integrált hengerkoordinátára, és számítsuk ki az értékét!

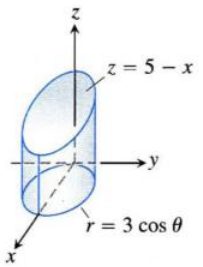
Háromszoros integrálok hengerkoordinátákkal

A 15–20. feladatokban írjuk fel az $\iiint_D f(r,\theta,z)dz\,r\,dr\,d\theta$ integrált a megadott tartományon!

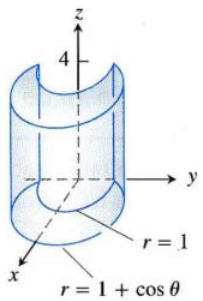
15. D egy egyenes körhenger, amelynek alapja az xy-síkban van és az $r = 2\sin\theta$ kör határolja, teteje pedig a $z = 4 - y$ síkban van.



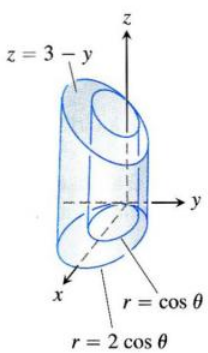
16. D egy egyenes körhenger, amelynek alapja az xy-síkban van és az $r = 3\cos\theta$ kör határolja, a teteje pedig a $z = 5 - x$ síkban van.



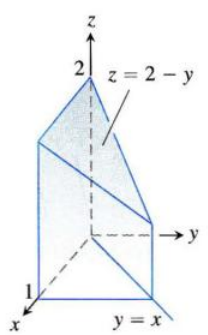
17. D egy egyenes henger, amelynek alapja az xy-síkban van az $r = 1 + \cos\theta$ kardioidon belül és az $r = 1$ körön kívül, és teteje a $z = 4$ síkban van.



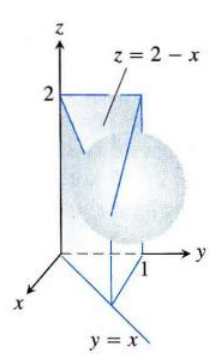
18. D egy egyenes henger, amelynek alapja az xy-síkban van, az $r = \cos\theta$ és $r = 2\cos\theta$ körök között, teteje pedig a $z = 3 - y$ síkban van.



19. D az a prizma (háromszögalapú hasáb) amelynek alapja az xy-síkban van, az x-tengely, az $y = x$ és az $x = 1$ egyenesek határolják, teteje pedig a $z = 2 - y$ síkban van.



20. D az a prizma (háromszögalapú hasáb) amelynek alapja az xy-síkban van, az y-tengely, az $y = x$ és az $y = 1$ egyenesek határolják, teteje pedig a $z = 2 - x$ síkban van.



Integrálok kiszámítása gömbi koordinátákkal

Számítsuk ki a 21–26. feladatok integráljait!

21. $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

22. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2} (\rho\cos\phi)\,\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

23. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{(1-\cos\phi)/2} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

24. $\int_0^{3\pi/2}\int_0^{\pi}\int_0^{1} 5\rho^3 \sin^3\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

25. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\phi}^{2} 3\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

26. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\phi} (\rho\cos\phi)\,\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

Az integrálás sorrendjének felcserélése gömbkoordináta-rendszerben

Az előző integrálok azt sugallják, mintha preferált sorrendek lennének az integrálások kiszámításakor. Más sorrend is lehetséges, és olykor ezt, olykor azt könnyebb kiszámítani.

27. $\int_0^{2}\int_{-\pi}^{0}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\rho^3 \sin 2\phi)\, d\phi d\theta d\rho$

28. $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_{\csc\phi}^{2\csc\phi}\int_0^{2\pi} (\rho^2 \sin\phi)\, d\theta \, d\rho \, d\phi$

29. $\int_0^{1}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4} (12\rho \sin^3\phi)\, d\phi d\theta d\rho$

30. $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\csc\phi}^{2} (5\rho^4 \sin^3\phi)\, d\rho \, d\theta \, d\phi$

31. Legyen D az a tartomány, ami a 11. feladatban. Írjuk fel gömbkoordinátákkal a következő sorrendekben azt az integrált, amelyik D térfogatát adja!

(a) $d\rho \, d\phi \, d\theta$ **(b)** $d\phi \, d\rho \, d\theta$.

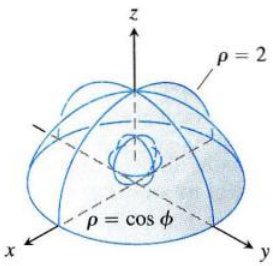
32. Legyen D az a tartomány, amelyet alulról a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp, felülről a $z = 1$ sík határol. Írjuk fel gömbkoordinátákkal a következő sorrendekben azt az integrált, ami D térfogatát adja!

(a) $d\rho \, d\phi \, d\theta$ **(b)** $d\phi \, d\rho \, d\theta$

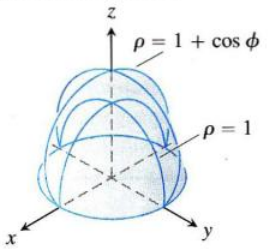
Háromszoros integrálok határai gömbi koordináta-rendszerben

A 33–38. feladatokban **(a)** írjuk fel azt a háromszoros integrált gömbi koordinátákkal, amelyik a megadott test térfogatát adja, majd **(b)** számítsuk is ki!

33. A test, ami a $\rho = \cos\phi$ gömb és $\rho = 2, z \geq 0$ félgömb között van.



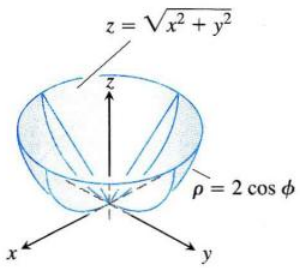
34. A test, amelyet alulról a $\rho = 1$, $z \geq 0$ félgömb, felülről a $\rho = 1 + \cos\phi$ forgáskardioid határol.



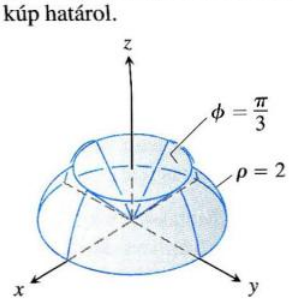
35. A testet a $\rho = 1 - \cos\phi$ forgáskardioid határolja.

36. A felső része annak a testnek, amelyet akkor kapunk, ha a 35. feladatban adott testet az xy-síkkal kettévágjuk.

37. Az a test, amelyet alulról a $\rho = 2\cos\phi$ gömb, felülről a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp határol.



38. A test, amelyet alulról az xy-sík, oldalról a $\rho = 2$ gömb, felülről $\phi = \pi/3$ kúp határol.



Derékszögű, henger- és gömbkoordináták

39. Adjuk meg a $\rho = 2$ gömb térfogatát megadó háromszoros integrált **(a)** gömbi, **(b)** henger-, **(c)** derékszögű koordináta-rendszerben!

40. Legyen D az a tartomány, amely az első térnyolcadban van, alulról a $\phi = \pi/4$ kúp, felülről a $\rho = 3$ gömb határolja. Fejezzük ki a térfogatát megadó háromszoros integrált **(a)** henger- **(b)** gömbi koordináta-rendszerben, majd **(c)** számítsuk ki a térfogatot!

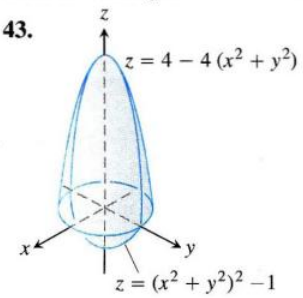
41. Legyen D a kisebbik gömbsüveg azok közül, amelyeket egy 2 egységnyi sugarú gömbből egy, a középponttól 1 egységnyi távolságra levő sík vág le. Fejezzük ki a térfogatát megadó háromszoros integrált **(a)** gömbi **(b)** henger- **(c)** derékszögű koordináta-rendszerben, majd **(d)** számítsuk ki a térfogatot!

42. Fejezzük ki az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$ félgömb I_z tehetetlenségi nyomatékát háromszoros integrállal **(a)** henger- **(b)** gömbi koordináta-rendszerben, majd **(c)** számítsuk ki I_z-t!

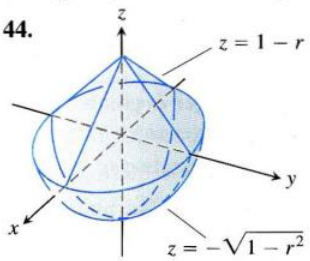
Térfogat

Határozzuk meg az ábrázolt testek térfogatát (33–38. feladatok)!

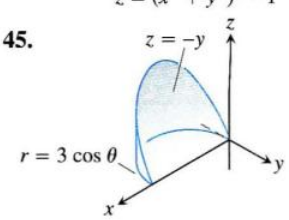
43.



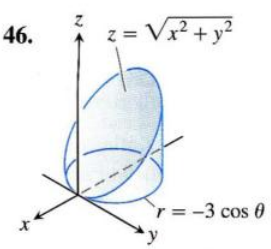
44.



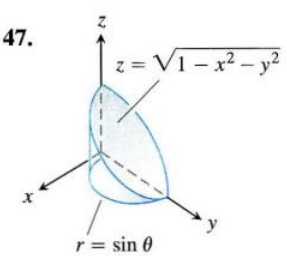
45.



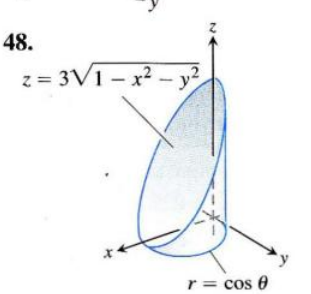
46.



47.



48.



49. Gömb és kúpok: Határozzuk meg a térfogatát a $\rho \leq a$ gömb azon részének, amelyik a $\phi = \pi/3$ és a $\phi = 2\pi/3$ kúpok között van!

50. Gömb és félsíkok: Mennyi a térfogata annak az első térnyolcadban levő testnek, amelyet a $\theta = 0$ és $\theta = \pi/6$ félsíkok vágnak ki a $\rho \leq a$ gömbből?

51. Gömb és sík: Mennyi a térfogata a kisebbik résznek, amelyet a $z = 1$ sík vág le a $\rho \leq 2$ gömbből?

52. Kúp és síkok: Mennyi a térfogata a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp azon részének, amit a $z = 1$ és $z = 2$ síkok zárnak közre?

53. Henger és paraboloid: Mennyi a térfogata annak a tartománynak, amelyet alulról a $z = 0$ sík, oldalról az $x^2 + y^2 = 1$ henger, felülről a $z = x^2 + y^2$ paraboloid határol?

54. Henger és paraboloidok: Mennyi a térfogata annak a tartománynak, amelyet alulról a $z = x^2 + y^2$ paraboloid, oldalról az $x^2 + y^2 = 1$ henger, felülről a $z = x^2 + y^2 + 1$ paraboloid határol?

55. Henger és kúpok: Mennyi a térfogata annak a tartománynak, amelyet az $1 \le x^2+y^2 \le 2$ hengerhéjból a $z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ kúpok vágnak ki?

56. Gömb és henger: Mennyi a térfogata annak a tartománynak, amelyik az $x^2+y^2+z^2 = 2$ gömbön belül, az $x^2+y^2 = 1$ hengeren kívül van?

57. Henger és síkok: Mennyi a térfogata annak a tartománynak, amelyet az $x^2+y^2 = 4$ henger és az $y+z = 4$, $z = 0$ síkok zárnak közre?

58. Henger és síkok: Mennyi a térfogata annak a tartománynak, amelyet az $x^2+y^2 = 4$ henger, a $z = 0$ és $x+y+z = 4$ síkok határolnak?

59. Paraboloidok közötti térfogat: Mennyi a térfogata annak a tartománynak, amelyik a $z = 5-x^2-y^2$ és a $z = 4x^2+4y^2$ paraboloidok között van?

60. Paraboloid és henger: Mennyi a térfogata annak a tartománynak, amelyet felülről a $z = 9-x^2-y^2$ paraboloid, alulról az xy-sík határol, és kívül van az $x^2+y^2 = 1$ hengeren?

61. Henger és gömb: Mennyi a térfogata annak a tartománynak, amelyet az $x^2+y^2 \le 1$ hengerből az $x^2+y^2+z^2 = 4$ gömb vág ki?

62. Gömb és paraboloid: Mennyi a térfogata annak a tartománynak, amit felülről az $x^2+y^2+z^2 = 2$ gömb határol, és alulról a $z = x^2+y^2$ paraboloid?

Átlagérték

63. Mennyi az átlaga az $f(r,\theta,z) = r$ függvénynek azon tartomány felett, amelyet az $r = 1$ henger határol, és a $z = -1$, $z = 1$ síkok között van?

64. Mennyi az átlaga az $f(r,\theta,z) = r$ függvénynek azon a tartományon, amelyet az $r^2+z^2 = 1$ gömb határol?

65. Mennyi az átlaga az $f(\rho,\phi,\theta) = \rho$ függvénynek a $\rho \le 1$ tartományon?

66. Mennyi az átlaga az $f(\rho,\phi,\theta) = \rho\cos\phi$ függvénynek a $\rho \le 1$, $0 \le \phi \le \pi/2$ felső félgömbön?

Tömeg, nyomaték, súlypont

67. Tömegközéppont: Egy konstans sűrűségű testet alulról a $z = 0$ sík, felülről a $z = r$, $r \ge 0$ kúp, oldalról az $r = 1$ henger határol. Hol van a tömegközéppontja?

68. Súlypont: Hol van a súlypontja annak a tartománynak, amelyik az első térnyolcadban van, felülről a $z = \sqrt{x^2+y^2}$ kúp, alulról a $z = 0$ sík, oldalról az $x^2+y^2 = 4$ henger és az $x = 0$, $y = 0$ síkok határolják?

69. Súlypont: Hol van a súlypontja a 38. feladatban szereplő testnek?

70. Súlypont: Hol van a súlypontja annak a testnek, amelyet felülről a $\rho = a$ gömb, alulról a $\phi = \pi/4$ kúp határol?

71. Súlypont: Hol van a súlypontja annak a tartománynak, amelyet felülről a $z = \sqrt{r}$ felület, oldalról az $r = 4$ henger, alulról az xy-sík határol?

72. Súlypont: Hol van a súlypontja annak a testnek, amelyet az $r^2+z^2 \le 1$ gömbből a $\theta = -\pi/3$, $r \ge 0$ és a $\theta = \pi/3$, $r \ge 0$ félsíkok vágnak ki?

73. Tehetetlenségi sugár: Határozzuk meg a z tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát és a tehetetlenségi sugarát annak a vastag falú hengerhéjnak, amelyet belülről az $r = 1$, kívülről az $r = 2$ hengerfelületek határolnak, alulról, ill. felülről pedig a $z = 0$ és $z = 4$ síkok! (Vegyünk $\delta = 1$-et!)

74. Körhenger tehetetlenségi nyomatéka: Határozzuk meg a tehetetlenségi nyomatékát az 1 sugarú, 2 magasságú körhenger alakú testnek, **(a)** a henger tengelyére vonatkozóan, **(b)** arra az egyenesre vonatkoztatva, ami átmegy a henger súlypontján és merőleges a tengelyére! (Vegyünk $\delta = 1$-et!)

75. Kúp tehetetlenségi nyomatéka: Határozzuk meg a tehetetlenségi nyomatékát az 1 alapkörsugarú és 1 magasságú kúpnak arra az egyenesre vonatkoztatva, amelyik átmegy a csúcsán és párhuzamos az alappal! (Vegyünk $\delta = 1$-et!)

76. Gömb tehetetlenségi nyomatéka: Határozzuk meg a tehetetlenségi nyomatékát egy a sugarú gömbnek az egyik átmérőjére vonatkoztatva! (Vegyünk $\delta = 1$-et!)

77. Kúp tehetetlenségi nyomatéka: Határozzuk meg a tehetetlenségi nyomatékát az a alapsugarú, h magasságú körkúpnak a tengelyére vonatkoztatva! (*Útmutatás*: Helyezzük a kúp csúcsát az origóba, tengelye legyen a z-tengely!)

78. Változó sűrűség: Egy testet felülről a $z = r^2$ paraboloid, alulról a $z = 0$ sík, oldalról az $r = 1$ henger határol. Határozzuk meg a tömegközéppontját, a z-tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát és a tehetetlenségi sugarát, ha a sűrűsége

(a) $\delta(r,\theta,z) = z$, **(b)** $\delta(r,\theta,z) = r$!

79. Változó sűrűség: Egy testet alulról a $z = \sqrt{x^2+y^2}$ kúp, felülről a $z = 1$ sík határol. Határozzuk meg a tömegközéppontját, a z-tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát és a tehetetlenségi sugarát, ha a sűrűsége

(a) $\delta(r,\theta,z) = z$, **(b)** $\delta(r,\theta,z) = z^2$!

80. Változó sűrűség: Egy tömör golyót a $\rho = a$ gömbfelület határol. Határozzuk meg a z-tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát és a tehetetlenségi sugarát, ha a sűrűsége

(a) $\delta(\rho,\phi,\theta) = \rho^2$,

(b) $\delta(\rho,\phi,\theta) = r = \rho\sin\phi$!

81. Félellipszoid súlypontja: Mutassuk meg, hogy az $(r^2/a^2)+(z^2/h^2) \le 1$, $z \ge 0$ tömör fél forgásellipszoid súlypontja a z-tengelyen van, az alaptól háromnyolcadrész úton a csúcs felé! A $h = a$ speciális eset egy félgömböt eredményez. Így egy félgömb súlypontja a szimmetriatengelyen van, háromnyolcad úton az alaptól a csúcs felé.

82. Kúp súlypontja: Mutassuk meg, hogy egy egyenes forgáskúp súlypontja a tengelyen van egynegyed úton az alaptól a csúcs felé! (Általában, egy kúp vagy gúla súlypontja egynegyed úton van az alaptól a csúcs felé.)

83. Változó sűrűség: Egy tömör, egyenes körhengert az $r = a$ hengerfelület és a $z = 0$, $z = h$, $h > 0$ síkok határolnak. Határozzuk meg a tömegközéppontját, a z-tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát és a tehetetlenségi sugarát, ha $\delta(r,\theta,z) = z+1$ a sűrűsége!

84. Bolygó atmoszférájának tömege: Egy R sugarú gömb alakú bolygó atmoszférájának sűrűsége $\mu = \mu_0 e^{-ch}$, ahol h a

bolygó felszínétől számított magasság, μ_0 a sűrűség a középponttól R távolságban és c egy pozitív konstans. Mekkora a bolygó atmoszférájának tömege?

85. Bolygó középpontjának sűrűsége: Egy gömb alakú bolygónak a sugara R, tömege M, sűrűsége gömbszimmetrikus és lineárisan növekszik, ahogy haladunk a felszín felől a középpont felé. Mekkora a sűrűség a középpontban, ha a felszínen nulla?

További példák és feladatok

86. Függőleges körhenger gömbi koordinátákkal: Mi a $\rho = f(\phi)$ alakú egyenlete az $x^2 + y^2 = a^2$ körhengernek?

87. Függőleges sík hengerkoordinátákkal:

(a) Mutassuk meg, hogy az x-tengelyre merőleges síkok egyenlete $r = a/\cos\theta$ alakú!

(b) Mutassuk meg, hogy az y-tengelyre merőleges síkok egyenlete $r = b/\sin\theta$ alakú!

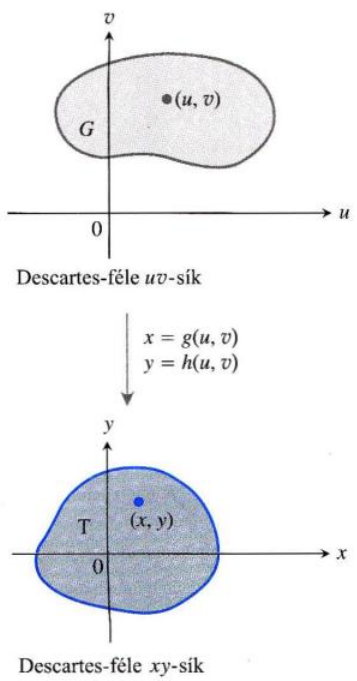
88. (*Az előző feladat folytatása*) Mi az $r = f(\theta)$ alakú egyenlete hengerkoordinátákkal az $ax + by = c$, $c \neq 0$ síkoknak?

89. Szimmetria: Milyen szimmetriája van egy olyan felületnek, amelyiknek egyenlete hengerkoordinátákkal $r = f(z)$? Válaszunkat indokoljuk!

90. Szimmetria: Milyen szimmetriája van egy olyan felületnek, amelyiknek egyenlete gömbkoordinátákkal $\rho = f(\phi)$? Válaszunkat indokoljuk!

15.7. Helyettesítés többes integráloknál

Ebben az alfejezetben megmutatjuk, hogyan számíthatunk ki többes integrálokat helyettesítéssel. Akárcsak az egyszeres integráloknál, a helyettesítést azért végezzük, hogy bonyolult integrálokat egyszerűbbé tegyünk: vagy az integrandust, vagy a határokat, vagy mindkettőt.



15.47. ÁBRA: Az $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$ egyenletetek lehetővé teszik, hogy egy T fölötti integrált az xy-síkban egy G fölötti integrállal helyettesítsünk, az uv-síkban.

Helyettesítés kettős integrálokban

A polárkoordináták helyettesítése a 15.3. alfejezetben csak egy speciális esete a kettős integráloknál alkalmazott helyettesítéseknek. A helyettesítéssel a tartomány is transzformálódik.

Tegyük fel, hogy az uv-sík G tartománya egy kölcsönösen egyértelmű leképezéssel transzformálható az xy-sík T tartományába:

$$x = g(u,v), \qquad y = h(u,v),$$

ahogy azt a 15.47. ábrán bemutatjuk. Ekkor az adott transzformációval T a G **képe**, G pedig T **ősképe**. Bármilyen T-n értelmezett $f(x,y)$ függvény a G-n értelmezett $f(g(u,v),h(u,v))$ függvénynek is tekinthető. Mi a kapcsolat $f(x,y)$-nak T-n vett integrálja, és $f(g(u,v),h(u,v))$-nek G-n vett integrálja között? A válasz az, hogy ha f, g, h folytonos parciális deriváltakkal rendelkeznek, és $J(u,v)$, amiről mindjárt megmondjuk micsoda, csak izolált pontokban vagy éppen sehol sem válik nullává, akkor

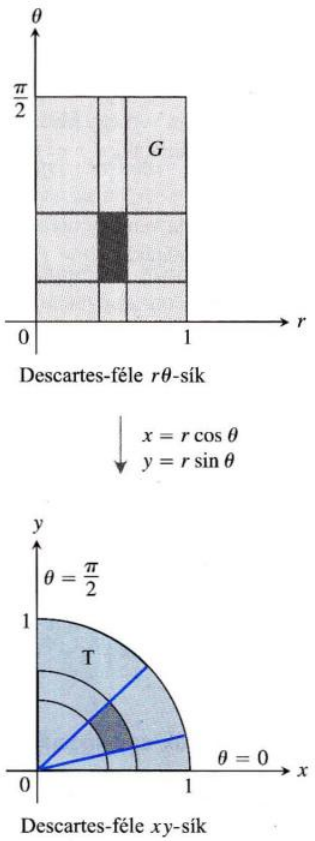
$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f(g(u,v),h(u,v))|J(u,v)|\,du\,dv. \tag{15.17}$$

A $J(u,v)$ szorzó, aminek abszolútértéke szerepel a (15.17) egyenletben, a *Jacobi-determinánsa* a koordináta-transzformációnak. Karl Jacobi német matematikusról kapta a nevét. $J(u,v)$ annak mértékét adja, mennyire nyújtja vagy zsugorítja a transzformáció egy adott pont körül a tartomány területét, miközben G-t T-be viszi.

DEFINÍCIÓ: **Jacobi-determináns**

Az $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$ koordináta-transzformáció **Jacobi-determinánsa**:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}. \tag{15.18}$$



15.48. ÁBRA: Az $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ egyenletek G-t T-be viszik.

A Jacobi-determináns másik jelölése:

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

A (15.17) egyenlőség bizonyítása bonyolult, és magasabb szintű ismereteket igényel, így ettől eltekintünk. Polárkoordináták esetén r-et és θ-t helyettesítünk u és v helyébe. Mivel $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, a Jacobi-determináns

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

Így a (15.17) egyenlőség ebben az esetben

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)|r|\,dr\,d\theta$$
$$= \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\,d\theta, \qquad \text{ha } r \geq 0. \qquad (15.19)$$

Ez megegyezik a 15.3. alfejezetben kapott képlettel.

A 15.48. ábrán láthatjuk, hogy az $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ transzformáció a G: $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ téglalapot az xy-sík első síknegyedében levő T: $x^2 + y^2 \leq 1$ negyedkörbe képezi.

1. PÉLDA: **Az integráltranszformáció alkalmazása**

Számítsuk ki az

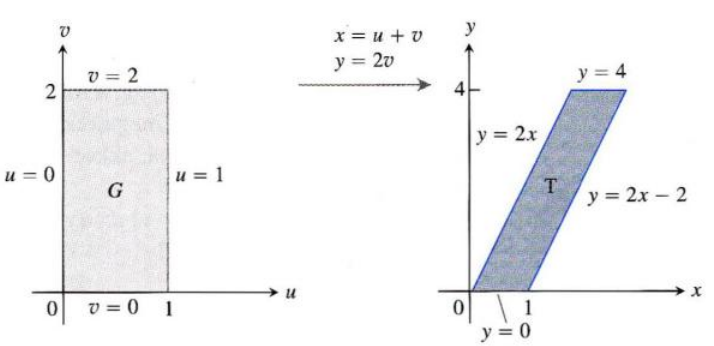
$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x-y}{2}\,dx\,dy$$

integrált az

$$u = \frac{2x-y}{2}, \quad v = \frac{y}{2} \qquad (15.20)$$

transzformációval az uv-síkon integrálva!

Megoldás: Vázoljuk fel a T integrálási tartományt az xy-síkban, és adjuk meg a határait (15.49. ábra).

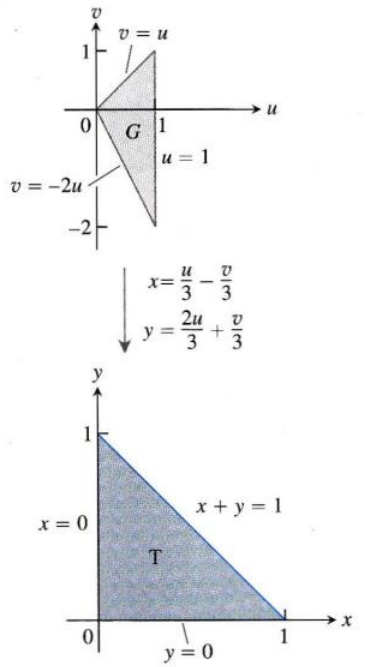


15.49. ÁBRA: Az $x = u + v$ és $y = 2v$ transzformáció G-t T-be viszi. A fordított $u = (2x-y)/2$ és $v = y/2$ transzformáció viszi T-t G-be.

Ahhoz, hogy a (15.17) egyenlőséget alkalmazhassuk, meg kell találnunk a megfelelő uv-tartományt és a transzformáció Jacobi-determinánsát. Ehhez meg kell oldanunk a (15.20) egyenleteket x-re és y-ra, azaz

$$x = u + v, \quad y = 2v. \qquad (15.21)$$

Ezután megkapjuk G határait, ha ezeket a kifejezéseket a T határaira vonatkozó egyenletekbe helyettesítjük.



15.50. ÁBRA: Az $x=(u/3)-(v/3)$ és $y=(2u/3)+(v/3)$ egyenletek viszik G-t T-be. Az inverztranszformáció $u=x+y$, $v=y-2x$ viszi T-t G-be.

xy-egyenletek T határaira	Megfelelő uv-egyenletek G határaira	egyszerűsített uv-egyenletek
$x=y/2$	$u+v=2v/2=v$	$u=0$
$x=(y/2)+1$	$u+v=(2v/2)+1=v+1$	$u=1$
$y=0$	$2v=0$	$v=0$
$y=4$	$2v=4$	$v=2$

A transzformáció Jacobi determinánsa (ismét a (15.21) egyenlet)

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u+v)\\ \frac{\partial}{\partial u}(2v) & \frac{\partial}{\partial v}(2v)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2.$$

Most már minden megvan, ami az (15.17) képlet alkalmazásához kell:

$$\int_0^4\int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1}\frac{2x-y}{2}\,dx\,dy=\int_{v=0}^{v=2}\int_{u=0}^{u=1}u|J(u,v)|\,du\,dv$$

$$=\int_0^2\int_0^1(u)(2)\,du\,dv=\int_0^2\left[u^2\right]_0^1dv=\int_0^2dv=2.\qquad\square$$

2. PÉLDA: Az integráltranszformáció alkalmazása

Számítsuk ki az

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}(y-2x)^2\,dy\,dx$$

integrált!

Megoldás: Vázoljuk fel a T integrálási tartományt az xy-síkban, és adjuk meg a határokat (15.50. ábra)! Az integrandus sugallja az $u=x+y$ és $v=y-2x$ transzformációt. Ekkor x-et és y-t kifejezve

$$x=\frac{u}{3}-\frac{v}{3},\quad y=\frac{2u}{3}+\frac{v}{3}.\tag{15.22}$$

xy-egyenletek T határaira	Megfelelő uv-egyenletek G határaira	egyszerűsített uv-egyenletek
$x+y=1$	$\left(\frac{u}{3}-\frac{v}{3}\right)+\left(\frac{2u}{3}+\frac{v}{3}\right)=1$	$u=1$
$x=0$	$\frac{u}{3}-\frac{v}{3}=0$	$v=u$
$y=0$	$\frac{2u}{3}+\frac{v}{3}=0$	$v=-2u$

A (15.22) egyenletek alapján a Jacobi-determináns

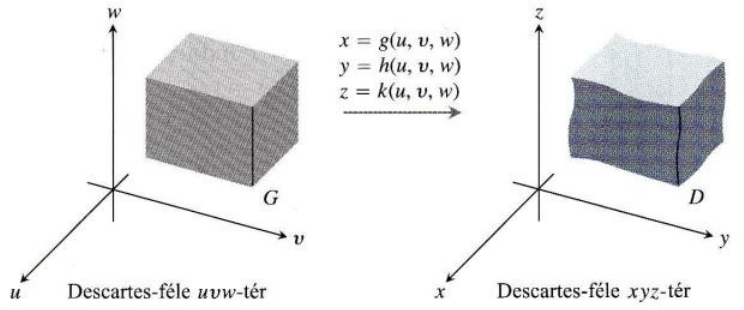
$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}.$$

A (15.17) képlettel:

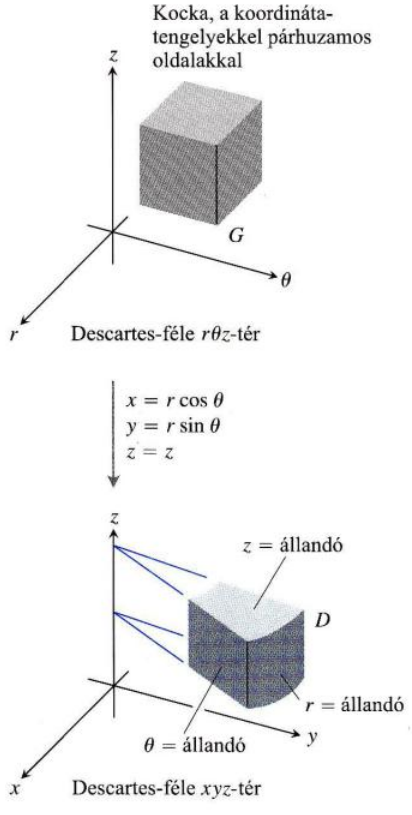
$$\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}(y-2x)^2\,dy\,dx=\int_{u=0}^{u=1}\int_{v=-2u}^{v=u}u^{1/2}v^2|J(u,v)|\,dv\,du=$$

$$=\int_0^1\int_{-2u}^{u}u^{1/2}v^2\left(\frac{1}{3}\right)dv\,du=\frac{1}{3}\int_0^1u^{1/2}\left[\frac{1}{3}v^3\right]_{v=-2u}^{v=u}du=$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^1u^{1/2}(u^3+8u^3)du=\int_0^1u^{7/2}du=\frac{2}{9}\left[u^{9/2}\right]_0^1=\frac{2}{9}.\qquad\square$$



15.51. ÁBRA: Az $x = g(u,v,w)$, $y = h(u,v,w)$, $z = k(u,v,w)$ egyenletek lehetővé teszik, hogy az xyz Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer D tartományán vett integrál helyett egy G tartományon integráljunk az uvw Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben.



15.52. ÁBRA: Az $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$ egyenletek a kocka alakú G-t a D hengerhéjszeletbe transzformálják.

Helyettesítés hármas integráloknál

A henger- és gömbi koordinátás helyettesítések a 15.6. alfejezetben speciális esetei azoknak a helyettesítéseknek, amelyek a hármas integrálásoknál koordináta-transzformációk esetén fordulnak elő. Az eljárás nagyon hasonló ahhoz, amit kétdimenziós esetben alkalmaztunk, csak most három koordinátával kell dolgoznunk, nem kettővel. Tegyük fel, hogy az uvw-tér egy G tartományát invertálhatóan (kölcsönösen egyértelműen) transzformáltuk az xyz-tér egy D tartományába a differenciálható

$$x = g(u,v,w), \quad y = h(u,v,w), \quad z = k(u,v,w)$$

függvényekkel (mint pl. a 15.51. ábra mutatja). Ekkor bármilyen $F(x,y,z)$ függvény, ami D-n van definiálva, úgy tekinthető, mint

$$F(g(u,v,w),h(u,v,w),k(u,v,w)) = H(u,v,w)$$

G-n definiált függvény. Ha a g, h, k függvényeknek folytonos parciális deriváltjaik vannak, akkor $F(x,y,z)$ D-n vett integrálja és $H(u,v,w)$ G-n vett integrálja között a következő kapcsolat áll fenn:

$$\iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_G H(u,v,w)|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw. \tag{15.23}$$

A $J(u,v,w)$ szorzó, aminek abszolútértéke szerepel az integrálban, a

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

Jacobi-determináns. Ez a determináns annak mértékét mutatja, hogy egy G-beli pont körül a térfogat hogyan nő vagy csökken az (u,v,w)-ből (x,y,z)-be való transzformáció által. Ahogy a kétváltozós esetben is, a (15.23) képlet levezetése túlságosan bonyolult, így itt ettől eltekintünk.

Hengerkoordináták esetén r, θ és z veszi át u, v és w szerepét. A transzformációs egyenletek a Descartes-féle $r\theta z$-térből a Descartes-féle xyz-térbe

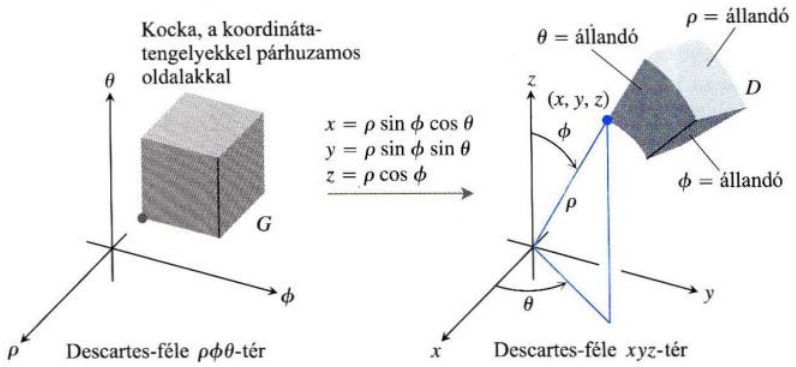
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z,$$

és egy kocka alakú G tartomány transzformált D tartományának képét a 15.52. ábrán láthatjuk.

Ennek a transzformációnak a Jacobi-determinánsa

$$J(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$



15.53. ÁBRA: Az $x = \rho \sin\phi \cos\theta$, $y = \rho \sin\phi \sin\theta$, $z = \rho \cos\phi$ egyenletek a kocka alakú G-t a D gömbhéjszeletbe transzformálják.

A (15.23) egyenlet megfelelője

$$\iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_G H(r,\theta,z)|r|\,dr\,d\theta\,dz.$$

Ha $r \geq 0$, akkor az abszolútértékjel elhagyható.

Gömbi koordináták esetén ρ-t, ϕ-t, θ-t helyettesítünk u, v, w helyébe. A transzformáció a Descartes-féle $\rho\phi\theta$-térből a Descartes-féle xyz-térbe

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta, \quad y = \rho \sin\phi \sin\theta, \quad z = \rho \cos\phi$$

(15.53. ábra). A Jacobi-determináns

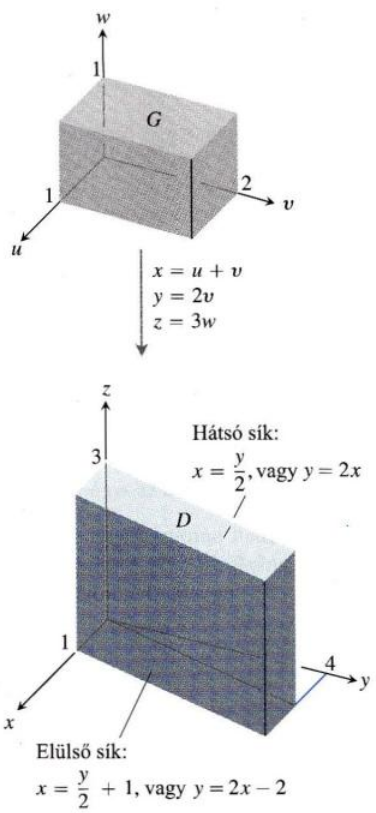
$$J(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\phi$$

(17. feladat). A (15.23) egyenlet megfelelője

$$\iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_G H(\rho,\phi,\theta)|\rho^2 \sin\phi|\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$$

Az abszolútértéket elhagyhatjuk, mivel sem ρ^2, sem $\sin\phi$ nem negatív, hiszen $0 \leq \phi \leq \pi$. Ugyanezt a képletet kaptuk a 15.6. alfejezetben.

Nézzünk egy példát egy másik helyettesítésre. Bár az integrált rögtön kiszámíthatnánk, de ezzel szeretnénk az eljárást illusztrálni.



15.54. ÁBRA: Az $x = u + v$, $y = 2v$, $z = 3w$ egyenletek G-t a D-be transzformálják. A transzformációt megfordítva, az $u = (2x - y)/2$, $v = y/2$, $w = z/3$ egyenletek viszik D-t G-be (3. példa).

3. PÉLDA: **Integráltranszformáció használata**

Számítsuk ki a

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3}\right) dx\,dy\,dz$$

integrált az

$$u = (2x-y)/2, \quad v = y/2, \quad w = z/3 \tag{15.24}$$

transzformáció alkalmazásával!

Megoldás: Felvázoljuk a D integrálási tartományt az xyz-térben, és megadjuk a határait (15.54. ábra). Most a határoló felületek síkok.

Ahhoz, hogy a (15.23) egyenlőséget alkalmazhassuk, meg kell határozni a megfelelő G tartományt és a Jacobi-determinánst. Ehhez megoldjuk a (15.24) egyenleteket x-re, y-ra, z-re.

$$x = u + v, \quad y = 2v, \quad z = 3w. \tag{15.25}$$

Ezután meghatározzuk G határait úgy, hogy ezeket a kifejezéseket D határaiba helyettesítjük.

xyz-egyenletek *D* határaira	Megfelelő *uvw*-egyenletek *G* határaira	egyszerűsített *uvw*-egyenletek
$x = y/2$	$u+v = 2v/2 = v$	$u = 0$
$x = (y/2)+1$	$u+v = (2v/2)+1 = v+1$	$u = 1$
$y = 0$	$2v = 0$	$v = 0$
$y = 4$	$2v = 4$	$v = 2$
$z = 0$	$3w = 0$	$w = 0$
$z = 3$	$3w = 3$	$w = 1$

A Jacobi-determináns

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

Most már minden megvan az integrál kiszámításához:

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u+w)|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw =$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u+w)(6)\,du\,dv\,dw = 6\int_0^1 \int_0^2 \left[\frac{u^2}{2} + uw\right]_0^1 dv\,dw =$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 \left(\frac{1}{2} + w\right) dv\,dw = 6\int_0^1 \left[\frac{v}{2} + vw\right]_0^2 dw = 6\int_0^1 (1+2w)dw =$$

$$= 6\left[w + w^2\right]_0^1 = 6(2) = 12. \qquad \square$$

Ennek az alfejezetnek az volt a célja, hogy betekintést nyújtson a koordinátatranszformációk alkalmazási lehetőségeibe. Az elméleti háttér igazi megértéséhez sokkal több analízisbeli és lineáris algebrabeli ismeretre van szükség.

15.7. Feladatok

Jacobi-determináns és transzformált tartomány meghatározása

1. **(a)** Oldjuk meg az

$$u = x - y, \quad v = 2x + y$$

egyenleteket x-re és y-ra! Ezután adjuk meg a $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ Jacobi-determinánst!

(b) Mi lesz az xy-síkbeli $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-2)$ csúcspontokkal adott háromszög képe az $u = x - y$, $v = 2x + y$ transzformációval? Vázoljuk fel a képet az uv-síkban!

2. **(a)** Oldjuk meg az

$$u = x + 2y, \quad v = x - y$$

egyenleteket x-re és y-ra! Ezután adjuk meg a $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ Jacobi-determinánst!

(b) Mi lesz annak az xy-síkbeli háromszögnek a képe az $u = x + 2y$, $v = x - y$ transzformációval, amelyet az $y = 0$, $y = x$, $x + 2y = 2$ egyenesek határolnak? Vázoljuk fel a képet az uv-síkban!

3. **(a)** Oldjuk meg az

$$u = 3x + 2y, \quad v = x + 4y$$

egyenleteket x-re és y-ra! Ezután adjuk meg a $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ Jacobi-determinánst!

(b) Mi lesz annak az xy-síkbeli háromszögnek a képe az $u = 3x + 2y$, $v = x + 4y$ transzformációval, amelyet az y-tengely, x-tengely és az $x + y = 1$ egyenes határol? Vázoljuk fel a képet az uv-síkban!

4. **(a)** Oldjuk meg az

$$u = 2x - 3y, \quad v = -x + y$$

egyenleteket x-re és y-ra! Ezután adjuk meg a $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ Jacobi-determinánst!

(b) Mi lesz annak az xy-síkbeli paralelogrammának a képe az $u = 2x - 3y$, $v = -x + y$ transzformációval, amelyet az $x = -3$, $x = 0$, $y = x$ és az $y = x + 1$ egyenesek határolnak? Vázoljuk fel a képet az uv-síkban!

Kettős integrálok kiszámítása transzformációval

5. Számítsuk ki az

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x-y}{2}\,dx\,dy$$

integrált az 1. példából, közvetlenül x és y szerint integrálva, hogy lássuk, 2 az értéke!

6. Használjuk az 1. feladat transzformációját az

$$\iint_T (2x^2 - xy - y^2)\,dx\,dy$$

integrál kiszámításához, ahol a T tartomány az első síknegyedben van, és az $y = -2x+4$, $y = -2x+7$, $y = x-2$, $y = x+1$ egyenesek határolják!

7. Használjuk a 3. feladat transzformációját az

$$\iint_T (3x^2 + 14xy + 8y^2)\,dx\,dy$$

integrál kiszámításához, ahol a T tartomány az első síknegyedben van, és az $y = -(3/2)x+1$, $y = -(3/2)x+3$, $y = -(1/4)x$, $y = -(1/4)x+1$ egyenesek határolják!

8. Használjuk a 4. feladat transzformációját és az ott szereplő paralelogrammát az

$$\iint_T 2(x-y)\,dx\,dy$$

integrál kiszámításához!

9. Legyen T egy tartomány az xy-sík első síknegyedében, amelyet az $xy = 1$, $xy = 9$ hiperbolák és az $y = x$, $y = 4x$ egyenesek határolnak. Használjuk az $x = u/v$, $y = uv$, $u > 0$, $v > 0$, transzformációt az

$$\iint_T \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) dx\,dy$$

integrál átírásához egy megfelelő G tartományra az uv-síkon! Számítsuk is ki az integrált!

10. **(a)** Adjuk meg az $x = u$, $y = uv$ transzformáció Jacobi-determinánsát, és rajzoljuk meg a G: $1 \le u \le 2$, $1 \le uv \le 2$ tartományt az uv-síkban!

(b) Ezután használjuk a (15.17) képletet az

$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{y}{x}\,dy\,dx$$

integrál transzformálására egy G fölötti integrállá, majd számítsuk ki mindkét integrált!

11. Elliptikus lemez poláris nyomatéka: Egy konstans sűrűségű vékony lemez az $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > 0$, $b > 0$ ellipszissel határolt tartományt borítja az xy-síkban. Határozzuk meg a lemez origóra vonatkozó első momentumát! (*Útmutatás*: használjuk az $x = a\,r\cos\theta$, $y = b\,r\sin\theta$ transzformációt!)

12. Ellipszis területe: Az $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ellipszis területének πab értékét megkaphatjuk, ha az $f(x,y) = 1$ függvényt integráljuk az ellipszistartomány felett. A direkt számítása ennek az integrálnak egy trigonometrikus helyettesítést igényel. Ha az $x = au$, $y = bv$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor az uv-síkon a $G: u^2 + v^2 \le 1$ körlapot kapjuk. Számítsuk ki a területet így!

13. Használjuk a 2. feladat transzformációját az

$$\int_0^{2/3} \int_y^{2-2y} (x+2y)e^{(y-x)}\,dx\,dy$$

integrál átírására az uv-sík egy G tartománya fölötti integrállá, majd számítsuk is ki az integrál értékét!

14. Használjuk az $x = u + (1/2)v$, $y = v$ transzformációt az

$$\int_0^2 \int_{y/2}^{(y+4)/2} y^3(2x-y)e^{(2x-y)^2}\,dx\,dy$$

integrál átírására az uv-sík egy G tartománya fölötti integrállá, majd számítsuk is ki az integrál értékét!

Jacobi-determináns kiszámítása

15. Adjuk meg a következő transzformációk $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ Jacobi-determinánsát:

a) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$

b) $x = u\sin v$, $y = u\cos v$!

16. Adjuk meg a következő transzformációk $\partial(x,y,z)/\partial(u,v,w)$ Jacobi-determinánsát:

(a) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = w$

(b) $x = 2u-1$, $y = 3v-4$, $z = (1/2)(w-4)$!

17. Számítsuk ki a megfelelő determinánst, hogy megmutassuk, a Descartes-féle $\rho\phi\theta$-térből a Descartes-féle xyz-térbe való transzformáció determinánsa $\rho^2\sin\phi$ ($x = \rho\sin\phi\cos\theta$, $y = \rho\sin\phi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$)!

18. Egyváltozós helyettesítés: Hogyan tekinthetjük a helyettesítést az egyváltozós határozott integráloknál az integrálási tartomány transzformációjának? Mi ebben az esetben a Jacobi-determináns? Adjunk példát!

Transzformáció alkalmazása hármas integrálok számításánál

19. Számítsuk ki a 3. példa integrálját x, y, z szerint!

20. Ellipszoid térfogata: Határozzuk meg az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ellipszoid térfogatát az $F(x,y,z) = 1$ függvényt integrálva! (*Útmutatás*: Legyen $x = au$, $y = bv$, $z = cw$, az uvw-térben kapott tartomány térfogata már ismert.)

21. Számítsuk ki az

$$\iiint |xyz|\,dx\,dy\,dz$$

integrált az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$$

ellipszoid felett! (*Útmutatás*: Legyen $x = au$, $y = bv$, $z = cw$. Ezután integráljunk az uvw-térben!)

22. Legyen D az xyz-térnek az a tartománya, amelyet az

$$1 \le x \le 2, \quad 0 \le xy \le 2, \quad 0 \le z \le 1$$

egyenlőtlenségek határoznak meg. Számítsuk ki az

$$\iiint_D (x^2y + 3xyz)\,dx\,dy\,dz$$

integrált az $u = x$, $v = xy$, $w = 3z$ transzformációt alkalmazva és az uvw-tér egy megfelelő tartományán integrálva!

23. Tömör félellipszoid súlypontja: Tudjuk, hogy egy állandó sűrűségű tömör félgömb súlypontja a szimmetriatengelyen van, háromnyolcad úton az alaptól a csúcs felé. A megfelelő koordináta-transzformációt alkalmazva mutassuk meg, hogy egy $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \le 1$, $z \ge 0$ tömör félellipszoid súlypontja a z-tengelyen van, háromnyolcad úton az alaptól a csúcs felé! (Ehhez nem kell integrált kiszámítani!)

24. Hengerhéjak: A 6.2. alfejezetben megtanultuk, hogyan számítsuk ki forgástestek térfogatát a „héj-módszer" segítségével. Azaz, ha az $f(x)$ függvénygörbe és az x tengely közötti a-tól b-ig terjedő tartományt $(0 < a < b)$ megforgatjuk az y-tengely körül, a kapott test térfogata $\int_a^b 2\pi x f(x)dx$. Mutassuk meg, hogy ha ugyanezt a térfogatot hármas integrállal számoljuk, ugyanerre az eredményre jutunk! (*Útmutatás*: Használjunk hengerkoordinátákat y és z koordináták szerepét felcserélve!)

15. fejezet Áttekintő kérdések

1. Definiáljuk kétváltozós függvény kettős integrálját a koordinátasík egy korlátos, zárt tartománya felett!

2. Hogyan számítjuk függvények kettős integrálját kétszeres integrállal? Számít-e a sorrend? Hogyan állapítjuk meg az integrálás határait? Adjunk példát!

3. Hogyan használjuk a kettős integrálokat terület, átlagérték, tömegközéppont, tehetetlenségi nyomaték, tehetetlenségi sugár kiszámítására? Adjunk példát!

4. Hogyan térhetünk át kettős integrálnál derékszögű koordinátákról polárkoordinátákra? Mikor érdemes áttérni? Adjunk példát!

5. Definiáljuk az $f(x,y,z)$ függvény hármas integrálját egy korlátos, zárt tartománya felett a térnek!

6. Hogyan számítjuk ki a hármas integrálokat derékszögű koordináta-rendszerben? Hogyan állapítjuk meg a határokat? Adjunk példát!

7. Hogyan használjuk a hármas integrálokat térfogat, átlagérték, tömeg, tömegközéppont, momentumok, tehetetlenségi sugár meghatározására? Adjunk példát!

8. Hogyan definiáljuk a hármas integrált henger- és gömbi koordináta-rendszerben? Miért érdemesebb olykor ezeket használni derékszögű koordináta-rendszer helyett?

9. Hogyan számítjuk a hármas integrálokat henger- és gömbi koordináta-rendszerben? Hogyan állapítjuk meg a határokat? Adjunk példákat!

10. Hogyan tekinthetjük a kettős integráloknál a helyettesítést, mint a tartományok transzformációját? Adjunk példát ilyen számításra!

11. Hogyan tekinthetjük a hármas integráloknál a helyettesítést, mint tartományok transzformációját? Adjunk példát ilyen számításra!

15. fejezet Gyakorló feladatok

Integrálás sík tartományon

Vázoljuk fel az integrálási tartományt, és számítsuk ki az integrálokat (1–4. feladatok)!

1. $\displaystyle\int_1^{10}\int_0^{1/y} ye^{xy}\,dx\,dy$

2. $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{x^3} e^{y/x}\,dx\,dy$

3. $\displaystyle\int_0^{3/2}\int_{-\sqrt{9-4t^2}}^{\sqrt{9-4t^2}} t\,ds\,dt$

4. $\displaystyle\int_0^{1}\int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} xy\,dx\,dy$

Integrálási határok felcserélése

Az 5–8. feladatokban rajzoljuk fel az integrálási tartományt, cseréljük fel az integrálás sorrendjét, majd mindkét sorrendben számítsuk ki az integrálokat!

5. $\displaystyle\int_0^{4}\int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2} dx\,dy$

6. $\displaystyle\int_0^{1}\int_{x^2}^{x} \sqrt{x}\,dy\,dx$

7. $\displaystyle\int_0^{3/2}\int_{-\sqrt{9-4y^2}}^{\sqrt{9-4y^2}} y\,dx\,dy$

8. $\displaystyle\int_0^{2}\int_0^{4-x^2} 2x\,dy\,dx$

Kettős integrálok kiszámítása

Számítsuk ki az alábbi kétszeres integrállal adott kettős integrálokat (9–12. feladatok)!

9. $\displaystyle\int_0^{1}\int_{2y}^{2} 4\cos(x^2)\,dx\,dy$

10. $\displaystyle\int_0^{2}\int_{y/2}^{1} e^{x^2}\,dx\,dy$

11. $\displaystyle\int_0^{8}\int_{\sqrt[3]{x}}^{2} \frac{dy\,dx}{y^4+1}$

12. $\displaystyle\int_0^{1}\int_{\sqrt[3]{y}}^{1} \frac{2\pi\sin\pi x^2}{x^2}\,dx\,dy$

Terület és térfogat

13. Parabola és egyenes közötti terület: Mennyi a területe annak a tartománynak, amelyet az $y = 2x + 4$ egyenes és az $y = 4 - x^2$ parabola zár közre?

14. Mennyi a területe annak a háromszögszerű tartománynak az xy-síkban, amelyet jobbról az $y = x^2$ parabola, balról az $x + y = 2$, felülről az $y = 4$ egyenes határol?

15. Paraboloid alatti térfogat: Mekkora a térfogata annak a térrésznek, ami a $z = x^2 + y^2$ paraboloid alatt és az $y = x$, $x = 0$, $x + y = 2$ egyenesekkel határolt xy-síkbeli háromszög felett van?

16. Parabolikus henger alatti térfogat: Mekkora a térfogata annak a térrésznek, amelyik a $z = x^2$ parabolikus henger alatt, és az xy-sík azon tartománya felett van, amelyet az $y = 6 - x^2$parabola és az $y = x$ egyenes fog közre?

Átlagérték

Határozzuk meg az $f(x,y) = xy$ függvény átlagát a 17–18. feladatokban adott tartományon!

17. Négyzet az első síknegyedben, határai a koordinátatengelyek és az $x = 1$, $y = 1$ egyenesek.

18. Az első síknegyed $x^2 + y^2 \leq 1$ negyedköre.

Tömeg és momentumok

19. Súlypont: Hol van a súlypontja annak a háromszögszerű xy-síkbeli tartománynak, amelyet az $x = 2$, $y = 2$ egyenesek és az $xy = 2$ hiperbola határol?

20. Súlypont: Hol van a súlypontja annak az xy-síkbeli tartománynak, amelyet az $x + y^2 - 2y = 0$ parabola és az $x + 2y = 0$ egyenes határol?

21. Poláris momentum: Mennyi az origóra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka (poláris momentuma) annak a vékony háromszög alakú xy-síkbeli lemeznek, amelyet az y-tengely, az $y = 2x$ és $y = 4$ egyenesek határolnak, a sűrűsége pedig $\delta = 3$?

22. Poláris momentum: Mennyi a középpontra vonatkoztatott poláris tehetetlenségi nyomatéka a $\delta = 1$ sűrűségű, téglalap alakú vékony lemeznek, ha a határoló egyenesek:

(a) $x = \pm 2$, $y = \pm 1$ az xy-síkban,

(b) $x = \pm a$, $y = \pm b$ az xy-síkban?

23. Tehetetlenségi nyomaték és tehetetlenségi sugár: Mennyi a tehetetlenségi nyomatéka és tehetetlenségi sugara az x-tengelyre vonatkoztatva annak a konstans sűrűségű vékony lemeznek, amelyik a $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,2)$ csúcspontú háromszöget borítja az xy-síkban?

24. Változó sűrűségű lemez: Hol van a tömegközéppontja, és mennyi a tehetetlenségi nyomatéka és tehetetlenségi sugara a koordinátatengelyekre vonatkoztatva annak a vékony lemeznek, amelyet az $y = x^2$ parabola és az $y = x$ egyenes határolnak, a sűrűsége pedig $\delta(x,y) = x + 1$?

25. Változó sűrűségű lemez: Mekkora a tömege, és mekkorák a tengelyekre vonatkoztatott első momentumai annak a vékony lemeznek, amelyet az $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ egyenesek határolnak, és a sűrűsége $\delta(x,y,) = x^2 + y^2 + 1/3$?

26. Háromszögek ugyanakkora tehetetlenségi nyomatékkal és tehetetlenségi sugárral: Határozzuk meg az x-tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát és tehetetlenségi sugarát annak háromszög alakú vékony lemeznek, amelynek alapja az x-tengely $[0,b]$ intervalluma, csúcsa az $y = h$ egyenesen van! Látni fogjuk, mindegy, hol van az utóbbi pont, a tehetetlenségi nyomaték és tehetetlenségi sugár mindig ugyanaz.

Polárkoordináták

A 27–28. feladatokban polárkoordinátákra való áttéréssel számítsuk ki az adott integrálokat!

27. $$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2\,dy\,dx}{(1+x^2+y^2)^2}$$

28. $$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy$$

29. Súlypont: Hol van a súlypontja annak a síkbeli tartománynak, amelyet polárkoordinátákkal a $0 \leq r \leq 3$, $-\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3$ egyenlőtlenségek írnak le?

30. Súlypont: Hol van a súlypontja annak a tartománynak, ami az első síknegyedben fekszik, és a $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ félegyenesek és az $r = 1$, $r = 3$ körök határolják?

31. Súlypont:

(a) Hol van a súlypontja annak a polárkoordináta-síkbeli tartománynak, amelyik az $r = 1 + \cos\theta$ kardioidon belül, az $r = 1$ körön kívül helyezkedik el?

(b) Vázoljuk fel a tartományt, és jelöljük be a súlypont helyét!

32. Súlypont:

(a) Hol van a súlypontja annak a polárkoordináta-síkbeli tartománynak, amelyet az $0 \leq r \leq a$, $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$ $(0 < \alpha \leq \leq \pi)$ egyenlőtlenségek definiálnak. Hogyan mozog a súlypont, ha $\alpha \to \pi$?

(b) Vázoljuk fel a tartományt $\alpha = 5\pi/6$ esetére, és jelöljük be a súlypont helyét!

33. Integrálás egy lemniszkáta felett: Integráljuk az $f(x,y) = 1/(1+x^2+y^2)^2$ függvényt afölött a tartomány fölött, amelyet az $(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2) = 0$ lemniszkáta zár körül!

34. Integráljuk az $f(x,y) = 1/(1+x^2+y^2)^2$ függvényt

(a) Háromszögtartomány: A $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,\sqrt{3})$ csúcspontokkal adott háromszögön!

(b) Első síknegyed: Az xy-sík első negyedén!

Hármas integrálok Descartes-féle koordináta-rendszerben

Számítsuk ki az integrált a 35–38. feladatokban!

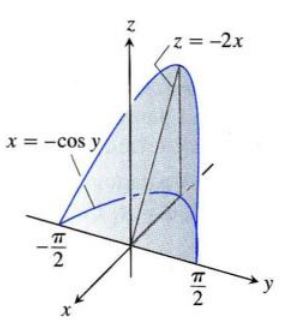
35. $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$

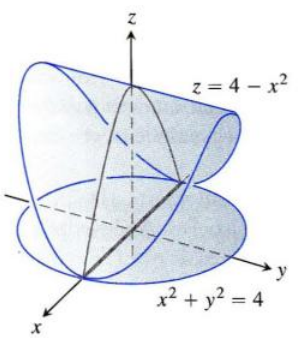
36. $\int_{\ln 6}^{\ln 7}\int_0^{\ln 2}\int_{\ln 4}^{\ln 5} e^{(x+y+z)}\,dz\,dy\,dx$

37. $\int_0^{1}\int_0^{x^2}\int_0^{x+y} (2x-y-z)\,dz\,dy\,dx$

38. $\int_1^{e}\int_1^{x}\int_0^{z} \frac{2y}{z^3}\,dy\,dz\,dx$

39. Térfogat: Számítsuk ki a térfogatát annak az ék alakú tartománynak, amelyet oldalról az $x = -\cos y$, $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ henger, felülről a $z = -2x$ sík, alulról az xy-sík határol!





40. Térfogat: Mennyi a térfogata annak a testnek, amelyet felülről a $z = 4 - x^2$ henger, oldalról az $x^2 + y^2 = 4$ henger és alulról az xy-sík határol?

41. Átlagérték: Határozzuk meg az $f(x,y,z) = 30xz\sqrt{x^2+y}$ függvény átlagértékét azon az első térnyolcadbeli tartományon, amelyet a koordinátasíkok és az $x = 1$, $y = 3$, $z = 1$ síkok határolnak!

42. Átlagérték: Mennyi az átlagértéke ρ-nak a $\rho \le a$ tartományon gömbi koordináták esetén?

Henger- és gömbkoordináták

43. Hengerkoordinátákról derékszögűre: Írjuk át az

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_r^{\sqrt{4-r^2}} 3\,dz\,r\,dr\,d\theta, \quad r \ge 0$$

integrált

(a) derékszögű koordinátákra $dz\,dx\,dy$ sorrendben,

(b) gömbi koordinátákra! Ezután **(c)** számítsuk ki egyiket!

44. Derékszögűről hengerkoordinátákra: **(a)** Írjuk át hengerkoordinátákra, majd **(b)** számítsuk ki az integrált!

$$\int_0^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-(x^2+y^2)}^{(x^2+y^2)} 21xy^2\,dz\,dy\,dx$$

45. Derékszögűről gömbkoordinátákra: **(a)** Írjuk át gömbkoordinátákra, majd **(b)** számítsuk ki az integrált!

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dz\,dy\,dx$$

46. Derékszögű, henger- és gömbkoordináták: Írjuk fel azt a háromszoros integrált, ami az $f(x,y,z) = 6 + 4y$ függvény hármas integrálját adja azon a tartományon, ami az első térnyolcadban van, a $z = \sqrt{x^2+y^2}$ kúp, az $x^2 + y^2 = 1$ henger és a koordinátasíkok határolják, **(a)** derékszögű koordinátákkal, **(b)** hengerkoordinátákkal, **(c)** gömbkoordinátákkal, azután **(d)** számítsuk ki az egyik integrált!

47. Hengerkoordinátákról derékszögűre: Térjünk át derékszögű koordinátákra úgy, hogy először z, majd y, azután x szerint integrálunk!

$$\int_0^{\pi/2}\int_1^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-r^2}} r^3(\sin\theta\cos\theta)z^2\,dz\,dr\,d\theta$$

48. Derékszögűről hengerkoordinátákra: Egy test térfogata

$$\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$$

(a) Írjuk le a testet úgy, hogy megadjuk a határoló felületek egyenleteit!

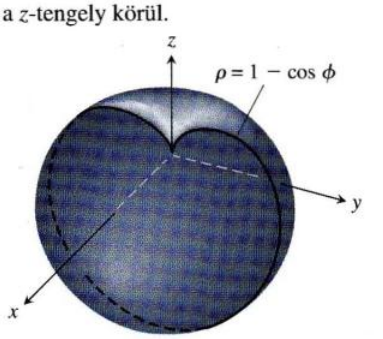
(b) Térjünk át hengerkoordinátákra, de nem kell kiszámítanunk az integrált!

49. Henger- vagy gömbkoordináták: Olyan hármas integrálok, amelyekben gömbfelületek vannak, nem mindig igényelnek gömbkoordinátás felírást a kényelmes számításokhoz. Van, amikor hengerkoordinátákkal a számítások egyszerűbbek. Példaként számítsuk ki annak a tartománynak a térfogatát, ami az $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ gömbön belül a $z = 2$ sík felett van, **(a)** hengerkoordinátákkal, **(b)** gömbkoordinátákkal!

50. I_z meghatározása gömbkoordinátákkal: Adjuk meg a z-tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát annak a $\delta = 1$ állandó sűrűségű testnek, amelyet gömbkoordinátákkal megadva felülről a $\rho = 2$, alulról a $\phi = \pi/3$ kúp határol!

51. Gömbhéj tehetetlenségi nyomatéka: Adjuk meg az egyik átmérőre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát annak az állandó δ sűrűségű gömbhéjnak, amit két koncentrikus, a, ill. b sugarú gömb határol, ahol $a < b$!

52. Alma tehetetlenségi nyomatéka: Mennyi a tehetetlenségi nyomatéka a z-tengelyre vonatkoztatva annak a $\delta = 1$ állandó sűrűségű testnek, amit gömbkoordinátákkal megadva a $\rho = 1 - \cos\theta$ felület határol? A mellékelt ábrán a sötét görbe megforgatva a z-tengely körül.



Helyettesítések

53. Mutassuk meg, ha $u = x - y$, $v = y$, akkor

$$\int_0^{\infty}\int_0^{x} e^{-sx} f(x-y,y)\,dy\,dx = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s(u+v)} f(u,v)\,du\,dv!$$

54. Milyen kapcsolatnak kell lennie a, b és c között, hogy fennálljon

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dx\,dy = 1?$$

(*Útmutatás*: Legyen $s = \alpha x + \beta y$, $t = \gamma x + \delta y$, ahol $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = ac - b^2$. Ekkor $ax^2 + 2bxy + cy^2 = s^2 + t^2$.)

15. fejezet Az anyag alaposabb megértését segítő további feladatok

1. Agyagtömb, kettős és hármas integrál: Egy agyagtömb alapja az xy-síkban van, az $x^2 + y = 6$ parabola és az $y = x$ egyenes határolja. A tömb magassága az (x, y) pont felett x^2. Fejezzük ki a tömb térfogatát **(a)** kettős integrálként, **(b)** hármas integrálként, azután **(c)** számítsuk ki az integrált!

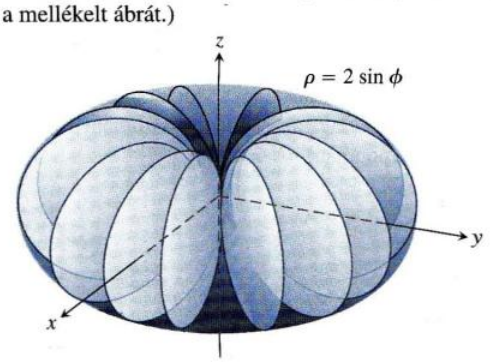
2. Víz egy félgömbben: Egy félgömb alakú tálban, aminek 5 cm a sugara, a tetejétől számítva 3 cm-ig van víz. Mennyi víz van a tálban?

3. Hengeres test két sík között: Mennyi a térfogata annak az $x^2 + y^2 \le 1$ hengeres testnek, amely a $z = 0$ és $x + y + z = 2$ síkok között van?

4. Gömb és paraboloid: Mekkora a térfogata annak a tartománynak, amit felülről az $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ gömb, alulról a $z = x^2 + y^2$ paraboloid határol?

5. Két paraboloid: Mekkora a térfogata annak a tartománynak, amit felülről a $z = 3 - x^2 - y^2$, alulról pedig a $z = 2x^2 + 2y^2$ paraboloidok határolnak?

6. Gömbkoordináták: Mekkora a térfogata annak a testnek, amit a gömbkoordinátákkal adott $\rho = 2\sin\phi$ felület határol? (Lásd a mellékelt ábrát.)



7. Lyuk egy gömbben: Egy körhenger alakú lyukat fúrunk keresztül egy gömbön. A henger tengelye átmérője a gömbnek. A maradék test térfogata

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-z^2}} r\,dr\,dz\,d\theta.$$

(a) Mekkora a henger, és mekkora a gömb sugara?

(b) Számítsuk ki az integrált!

8. Gömb és henger: Mennyi a térfogata annak az anyagnak, amit az $r^2 + z^2 \le 9$ gömbből az $r = 3\sin\theta$ hengerrel vágunk ki?

9. Két paraboloid: Mekkora a térfogata annak a tartománynak, amelyet a $z = x^2 + y^2$ és a $z = (x^2 + y^2 + 1)/2$ felületek zárnak közre?

10. Henger és $z = xy$ felület: Mennyi a térfogata annak a tartománynak, amelyik az első térnyolcadban van az $r = 1$ és $r = 2$ hengerek között, alulról az xy-sík, felülről a $z = xy$ felület határolja?

Az integrálási sorrend felcserélése

11. Számítsuk ki az

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx$$

integrált! (*Útmutatás*: Használjuk a

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy}\,dy$$

összefüggést, hogy kettős integrálra átírva megváltoztathassuk az integrálás sorrendjét!)

12. Polárkoordináták:

(a) Polárkoordinátákra áttérve mutassuk meg, hogy

$$\int_0^{a\sin\beta}\int_{y\operatorname{ctg}\beta}^{\sqrt{a^2-y^2}} \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy = a^2\beta\left(\ln a - \frac{1}{2}\right),$$

ahol $a > 0$, és $0 < \beta < \pi/2$!

(b) Fordítsuk meg az integrálás sorrendjét a Descartes-koordinátás alakban!

13. Kettős integrál redukciója egyszeres integrállá: Az integrálás sorrendjét megfordítva, mutassuk meg, hogy a következő kettős integrál egyszeres integrállá redukálódik!

$$\int_0^{x}\int_0^{u} e^{m(x-t)} f(t)\,dt\,du = \int_0^{x} (x-t)e^{m(x-t)} f(t)\,dt.$$

Hasonlóképpen

$$\int_0^{x}\int_0^{v}\int_0^{u} e^{m(x-t)} f(t)\,dt\,du\,dv = \int_0^{x} \frac{(x-t)^2}{2} e^{m(x-t)} f(t)\,dt.$$

14. Kettős integrál transzformációja, hogy konstans határokat kapjunk: Olykor a változót tartalmazó határú többszörös integrálok átírhatók úgy, hogy a határok konstansok legyenek. Az integrálás sorrendjének megváltoztatása azt eredményezi, hogy

$$\int_0^1 f(x)\left(\int_0^x g(x-y)f(y)\,dy\right)dx = \int_0^1 f(y)\left(\int_y^1 g(x-y)f(x)\,dx\right)dy = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 g(|x-y|)f(x)f(y)\,dx\,dy.$$

Tömeg és nyomatékok

15. Poláris nyomaték minimalizálása: Egy vékony, konstans sűrűségű, háromszög alakú lemez az xy-sík első negyedében azt a háromszöget borítja, amelynek csúcsai $(0,0)$, $(a,0)$, $(a,1/a)$. Milyen a-ra lesz a lemez origóra vonatkozó poláris tehetetlenségi nyomatéka minimális?

16. Háromszöglap poláris nyomatéka: Határozzuk meg az origóra vonatkozó poláris tehetetlenségi nyomatékát annak a háromszög alakú lemeznek, amelynek sűrűsége $\delta = 3$, és az y-tengely, valamint az $y = 2x$, $y = 4$ egyenesek határolják!

17. Ellensúly tömege és poláris nyomatéka: Egy lendkerék ellensúlyának sűrűsége konstans 1, és olyan alakja van, mint a kisebbik körszelet, amit egy a sugarú körből vág le egy, a középponttól b távolságra levő húr ($b < a$). Mekkora az ellensúly tömege és poláris tehetetlenségi nyomatéka a kerék középpontjára vonatkoztatva?

18. Bumeráng súlypontja: Hol van annak a bumerángnak a súlypontja, amelyik hasonló ahhoz a tartományhoz, amit az $y^2 = -4(x-1)$ és $y^2 = -2(x-2)$ parabolák zárnak közre az xy-síkon?

További példák és feladatok

19. Számítsuk ki az

$$\int_0^a\int_0^b e^{\max(b^2x^2,a^2y^2)}\,dy\,dx$$

integrált, ahol a és b pozitív számok és

$$\max(b^2x^2,a^2y^2) = \begin{cases} b^2x^2, & \text{ha } b^2x^2 \geq a^2y^2 \\ a^2y^2, & \text{ha } b^2x^2 < a^2y^2! \end{cases}$$

20. Mutassuk meg, hogy

$$\iint \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}\,dx\,dy$$

értéke az $x_0 \leq x \leq x_1$, $y_0 \leq y \leq y_1$ téglalapon

$$F(x_1,y_1) - F(x_0,y_1) - F(x_1,y_0) + F(x_0,y_0)!$$

21. Tegyük fel, hogy $f(x,y)$ felírható, mint egy csak x-től és egy csak y-tól függő függvény szorzata, azaz $f(x,y) = F(x)G(y)$. Ekkor f integrálja a T: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ téglalap felett

$$\iint_T f(x,y)dA = \left(\int_a^b F(x)dx\right)\left(\int_c^d G(y)dy\right). \qquad (15.26)$$

Bizonyítás:

$$\iint_T f(x,y)dA = \int_c^d\left(\int_a^b F(x)G(y)dx\right)dy \qquad \text{(i)}$$

$$= \int_c^d\left(G(y)\int_a^b F(x)\,dx\right)dy \qquad \text{(ii)}$$

$$= \int_c^d\left(\int_a^b F(x)dx\right)G(y)dy \qquad \text{(iii)}$$

$$= \left(\int_a^b F(x)dx\right)\int_c^d G(y)dy. \qquad \text{(iv)}$$

a) Magyarázzuk meg az (i)–(iv) lépéseket!
Ha alkalmazható, a (15.26) egyenlőséggel időt takaríthatunk meg. Használjuk a következő integrálok számításakor:

b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\int_0^{\pi/2} e^x\cos y\,dy\,dx$, **c)** $\displaystyle\int_1^2\int_{-1}^1 \frac{x}{y^2}dx\,dy.$

22. Jelölje $D_{\mathbf{u}}f$ az $f(x,y) = (x^2+y^2)/2$ függvény iránymenti deriváltját az $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ irányban.

a) Átlagérték meghatározása: Adjuk meg $D_{\mathbf{u}}f$ átlagértékét azon a háromszög alakú tartományon, amelyet az $x+y=1$ egyenes vág le az első síknegyedből!

b) Átlagérték és súlypont: Mutassuk meg általánosságban, hogy $D_{\mathbf{u}}f$ átlaga az xy-sík egy tartománya felett, a $D_{\mathbf{u}}f$ értéke a súlypontban!

23. A $\Gamma(1/2)$ értéke: A

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

gamma-függvény a faktoriális kiterjesztése a nemnegatív egészekről a valós számokra. (A negatív egészekben továbbra sincs értelmezve.) A differenciálegyenletek elméletében különös jelentősége van a következő értéknek:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{(1/2)-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt. \qquad (15.27)$$

(a) Ha még nem oldotta meg a 15.3. alfejezet 37. feladatát, akkor tegye meg most, hogy megmutassa,

$$I = \int_0^\infty e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}!$$

(b) Helyettesítsünk $y = \sqrt{t}$-t a (15.27) egyenlőségbe, hogy megkapjuk a $\Gamma(1/2) = 2I = \sqrt{\pi}$ képletet!

24. Körlap alakú lemez teljes elektromos töltése: A töltéssűrűség egy körlap alakú lemezen, aminek R méter a sugara, $\sigma(r,\theta) = kr(1-\sin\theta)$ coulomb/m^2 (k egy állandó). Integráljuk σ-t, hogy megkapjuk a teljes töltést!

25. Paraboloid alakú esőmérő: Egy edény alakja olyan, mint a $z = x^2 + y^2$ függvény grafikonja $z = 0$-tól $z = 10$ cm-ig. Kalibrálni szeretnénk az edényt, hogy esőt mérhessünk vele. Milyen magasan jelöljük be az 1 cm-es esőmagasságot? A 3 centimétereset?

26. Víz a parabolaantennában: Egy parabolaantenna tányérja 2m széles és 0,5 m mély. A szimmetriatengelye a függőlegessel 30° -os szöget zár be.

(a) Adjuk meg, de ne számítsuk ki azt a hármas integrált, ami azt mutatná meg, hogy mennyi víz állhat az antennában eső után! (*Útmutatás:* Egyszerűbb úgy felírni az integrált, hogy a tányér vízszintesen áll, és a vízszint áll ferdén.)

(b) Mekkora lenne az antenna tengelyének legkisebb olyan szöge a függőlegessel, hogy sose álljon benne víz?

27. Végtelen henger: Legyen D a belseje egy 1 sugarú végtelen henger felének, aminek tengelye a z-tengely és egy egységnyivel az xy-sík felett kezdődik, azaz a tengelye $(0,0,1)$-től ∞-ig megy. Számítsuk ki az

$$\iiint_D z(r^2+z^2)^{-5/2}dV$$

integrált!

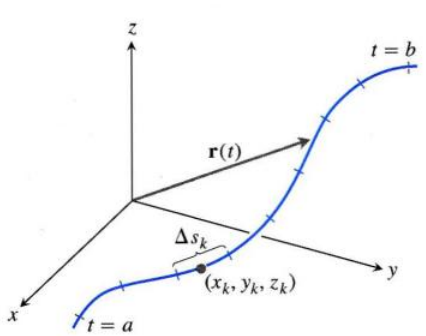
28. Tanultuk, hogy $\int_a^b 1dx$ az $[a,b]$ intervallum hossza, $\iint_T 1dA$ a T tartomány területe, $\iiint_D 1dV$ a D tartomány térfogata. Ha Q egy négydimenziós tartomány, akkor $\iiiint_Q 1dV$ a Q tartomány négydimenziós mértéke a dV négydimenziós térfogat szerint. Használjuk „általánosító" gyakorlatunkat a négydimenziós $x^2+y^2+z^2+w^2 = 1$ egységsugarú gömb térfogatának kiszámítására!

16. fejezet Integrálás vektormezőben

ÁTTEKINTÉS: Ez a fejezet integrálással foglalkozik vektormezőkben. Ez a matematikának az a része, amit a mérnökök, fizikusok akkor használnak, amikor áramlásokat írnak le, vízalatti kábeleket terveznek, hőáramlást magyaráznak, műholdat helyeznek pályára. Definiálunk vonalintegrált, amit erőtér által végzett munka kiszámítására használunk. Definiálunk felületmenti integrált, amivel egy adott felületen átáramló folyadék mennyiségét tudjuk kiszámítani. Közben olyan fogalmakkal ismerkedünk meg, mint pl. *konzervatív erőtér*, Green-tétel, hogy számításainkat olykor egyszerűsíthessük. Ezeket az új integrálokat a már ismert egyszeres és többszörös integrálokra vezetjük vissza.

16.1. Vonalintegrál

Az 5. fejezetben definiáltuk egyváltozós valós függvény integrálját az x-tengely egy véges és zárt $[a,b]$ intervallumán. A határozott integrálokat sok különböző feladat megoldásához használtuk, területszámításon kívül pl. változó sűrűségű vékony, egyenes rúd tömegének meghatározásához, munka kiszámításához, amikor az erő az x-tengely irányában hatott stb. Hogyan számolnánk ki egy olyan változó sűrűségű vékony rúd vagy huzal tömegét, amely egy görbe mentén fut a térben, vagy hogyan számolnánk ki egy térbeli görbe mentén ható erő munkáját? Ezekhez a számításokhoz általánosítanunk kell az x-tengely egy „szakasza" mentén vett integrált, a tér egy „görbedarabja" mentén vett integrálra. Ez az általánosabb fogalom a *vonalintegrál*. A „vonal", azaz a görbe, ami mentén integrálunk, lehet térgörbe vagy síkgörbe. A rövidebb tárgyalás kedvéért a síkgörbéket egyszerűen olyan térgörbéknek tekintjük, amelyeknek harmadik koordinátája azonosan nulla.



16.1. ÁBRA: Az $\mathbf{r}(t)$ görbét felosztjuk kis ívekre $t=a$-tól $t=b$-ig. A k-adik részív hossza Δs_k.

Tegyük fel, hogy $f(x,y,z)$ egy valós értékű függvény, amit az f értelmezési tartományában futó $\mathbf{r}(t)=g(t)\mathbf{i}+h(t)\mathbf{j}+k(t)\mathbf{k}$ görbe mentén szeretnénk integrálni az $a\le t\le b$ paraméterértékekre. Az f függvény értékeit a görbe mentén az $f(g(t),h(t),k(t))$ összetett függvény definiálja. Ezt az összetett függvényt integráljuk az ívhossz szerint $t=a$-tól $t=b$-ig. Ha a görbe ívhossza nem véges, akkor ez egy improprius integrál. A definícióhoz tekintsünk egy véges ívhosszú (más szóval rektifikálható) görbét. Osszuk fel a görbét n darab részívre (16.1. ábra), és a k-adik ív ívhosszát jelölje Δs_k. Mindegyik részíven válasszunk egy (x_k,y_k,z_k) pontot, és tekintsük az

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\Delta s_k$$

integrálközelítő összeget. A felosztás normáját és az integrál létezését ugyanúgy definiáljuk, mint a Riemann-integrál esetében. Az integrálközelítő összegek

határértékét **az f függvény vonalintegráljának nevezzük az adott görbe mentén a-tól b-ig**. Erre az integrálra is, és más, hasonlóképpen definiált integrálokra is az irodalomban több különböző elnevezés használatos: **görbementi integrál**, **vonalmenti integrál**, **vonalintegrál**. Az irodalomban van, aki egyáltalán nem tesz különbséget az elnevezések között, és van aki aszerint tesz különbséget, hogy a görbe irányítása befolyásolja-e az integrálás eredményét. Az, hogy **a C görbe felett**, vagy **a C görbe mentén** integrálunk, szintén ugyanazt jelenti. A görbedarabot, ami mentén integrálunk, és amit az irányításával együtt tekintünk, az **integrál útjának** nevezzük. Ha f folytonos, és a g, h és k függvényeknek a zárt $[a,b]$ intervallumban folytonos deriváltjai vannak, akkor az integrál létezik. Ha a görbét egyetlen betűvel jelöljük, pl. C-vel, akkor az integrál jelölése

$$\int_C f(x,y,z)ds \qquad f \text{ integrálja a } C \text{ görbe felett.} \tag{16.1}$$

Ha $\mathbf{r}(t)$ egy sima görbe az $a \le t \le b$ paramétertartományon ($\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ folytonos és sehol sem $\mathbf{0}$), akkor az

$$s(t) = \int_a^b |\mathbf{v}(\tau)|d\tau$$

A 13.3. alfejezet (13.17) egyenlete $t_0 = a$ helyettesítéssel

egyenlőséget felhasználhatjuk ds kifejezésére: $ds = |\mathbf{v}(t)|dt$. Egy általunk nem bizonyított tétel szerint f integrálja a C görbén

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(g(t),h(t),k(t))|\mathbf{v}(t)|\,dt.$$

Vegyük észre, hogy az egyenlőség jobboldalán egy közönséges egyváltozós integrál áll, amilyet az 5. fejezetben definiáltunk. Ez a képlet a balodali integrál helyes értékét adja, függetlenül attól, milyen paraméterezést választottunk, természetesen olyat, ami „sima" paraméterezés.

A vonalintegrál kiszámítása

Ha ki akarjuk számítani $f(x,y,z)$ integrálját egy C görbe mentén, akkor:

1. Keressük meg C-nek egy sima paraméterezését,

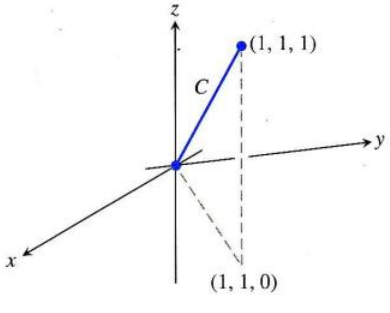
$$\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}, \quad a \le t \le b.$$

2. Számítsuk ki az

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(g(t),h(t),k(t))|\mathbf{v}(t)|\,ds \tag{16.2}$$

integrált.

Ha f az azonosan 1 függvény, akkor az integrál épp C ívhosszát adja.



16.2. ÁBRA: Az 1. példa integrálási útja.

1. PÉLDA: **Vonalintegrál kiszámítása**

Integráljuk az $f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$ függvényt az origóból az $(1,1,1)$ pontba menő egyenes szakasz mentén (16.2. ábra)!

Megoldás: A legegyszerűbb paraméterezést választjuk:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1.$$

A koordinátafüggvényeknek folytonos első deriváltjaik vannak, és a deriváltfüggvényre $|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$, tehát sehol sem 0, így ez egy sima paraméterezés. A C menti integrál

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_0^1 f(t,t,t)\left(\sqrt{3}\right)dt \qquad \text{(16.2) egyenlőség}$$

$$= \int_0^1 (t-3t^2+t)\sqrt{3}dt$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 (2t-3t^2)dt = \sqrt{3}[t^2-t^3]_0^1 = 0. \qquad \square$$

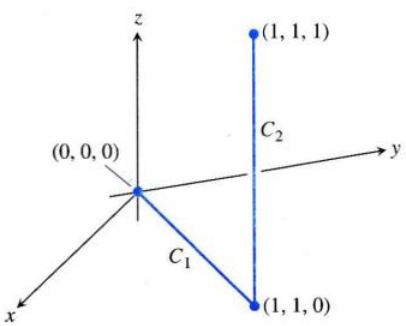
Additivitás

A vonalintegrálok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy ha a görbe véges sok egymáshoz csatlakozó C_1, C_2,... C_n görbedarabból áll, akkor az integrál C felett a részíveken vett integrálok összege:

$$\int_C f\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds + \cdots + \int_{C_n} f\,ds \qquad (16.3)$$

2. PÉLDA: **Vonalintegrál két csatlakozó görbeíven**

A 16.3. ábrán egy másik utat mutatunk az origóból az $(1,1,1)$ pontba, mint az előbbi ábrán. Integráljuk az $f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$ függvényt $C_1 \cup C_2$ fölött!



16.3. ÁBRA: A 2. példa integrálási útja.

Megoldás: A legegyszerűbb paraméterezését választjuk C_1-nek és C_2-nek:

$$C_1: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad q \le t \le 1; \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$C_2: \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1; \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = 1.$$

Ezzel a paraméterezéssel

$$\int_{C_1 \cup C_2} f(x,y,z)\,ds = \int_{C_1} f(x,y,z)\,ds + \int_{C_2} f(x,y,z)\,ds \qquad \text{(16.3) egyenlőség}$$

$$= \int_0^1 f(t,t,0)\sqrt{2}\,dt + \int_0^1 f(1,1,t)(1)\,dt \qquad \text{(16.2) egyenlőség}$$

$$= \int_0^1 (t-3t^2+0)\sqrt{2}dt + \int_0^1 (1-3+t)(1)dt$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{t^2}{2} - t^3\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - 2t\right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}. \qquad \square$$

Néhány dolgot vegyünk észre ezekben a példákban. Először: Mihelyst a görbe koordinátafüggvényeit behelyettesítettük az f függvénybe, már egy közönséges egyváltozós integrálunk van t-re. Másodszor: A két különböző görbén, C-n (1. példa) és $C_1 \cup C_2$-n (2. példa), az integrál értéke különböző. A legtöbb függvény esetén két adott pontot összekötő görbe mentén számított integrál értéke különböző görbéken különböző. Vannak olyan függvények, amelyek integrálja két pont között nem függ a görbétől, ezekről a 16.3. alfejezetben lesz szó.

Tömeg és nyomaték számítása

Spirálrugót vagy huzalt tekinthetünk úgy, mint sima görbe mentén eloszló tömeget a térben. A sűrűség eloszlását egy folytonos $\delta(x,y,z)$ (tömeg/hosszúság-egység) függvény adja meg. A rugó, ill. huzal tömege és momentumai a 16.1. táblázat képletei szerint számíthatók. Ezek az eredmények vékony rudakra is alkalmazhatók.

Tömeg: $M = \int_C \delta(x,y,z)\,ds \quad (\delta = \delta(x,y,z) = \text{sűrűség})$

Statikai nyomatékok (első momentumok) a koordinátasíkokra vonatkoztatva:

$$M_{yz} = \int_C x\delta\,ds, \quad M_{xz} = \int_C y\delta\,ds, \quad M_{xy} = \int_C z\delta\,ds$$

A tömegközéppont koordinátái:

$$\bar{x} = M_{yz}/M, \quad \bar{y} = M_{xz}/M, \quad \bar{z} = M_{xy}/M$$

Tehetetlenségi nyomatékok a koordinátatengelyekre és más egyenesekre vonatkoztatva:

$$I_x = \int_C (y^2+z^2)\delta\,ds, \qquad I_y = \int_C (x^2+z^2)\delta\,ds,$$
$$I_z = \int_C (x^2+y^2)\delta\,ds, \qquad I_L = \int_C r^2\delta\,ds,$$

ahol $r(x,y,z)$ az (x,y,z) pont távolsága az L egyenestől.
A tehetetlenségi sugár az L egyenesre vonatkoztatva: $R_L = \sqrt{I_L/M}$

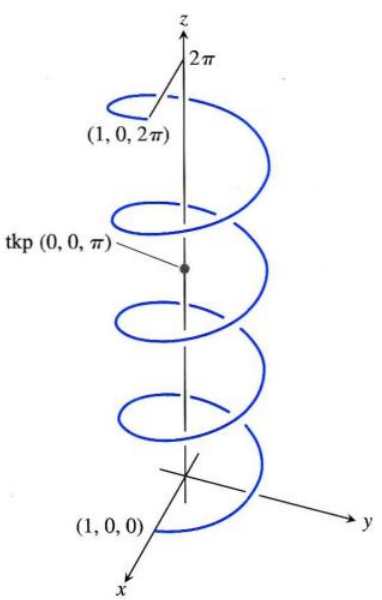
16.1. TÁBLÁZAT: Tömeg és momentumképletek egy C sima görbe mentén eloszló tömegre, mint pl. spirálrugó, huzal, vékony rúd.

3. PÉLDA: **Tömeg, tömegközéppont, tehetetlenségi nyomaték, tehetetlenségi sugár meghatározása**

Egy spirálrugó az

$$\mathbf{r}(t) = (\cos 4t)\mathbf{i} + (\sin 4t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

csavarvonal mentén helyezkedik el. A rugó sűrűsége állandó, $\delta = 1$. Mennyi a rugó tömege, hol a tömegközéppontja, mennyi a tehetetlenségi nyomatéka és mekkora a tehetetlenségi sugara a z-tengelyre vonatkoztatva?



16.4. ÁBRA: A 3. példában szereplő spirálrugó.

Megoldás: Felvázoljuk a rugót (16.4. ábra). A szimmetriatulajdonságokat figyelembe véve a tömegközéppont a z-tengelyen van, a $(0,0,\pi)$ pontban.

A további számításokhoz meg kell határoznunk $|\mathbf{v}(t)|$-t:

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$
$$= \sqrt{(-4\sin 4t)^2 + (4\cos 4t)^2 + 1} = \sqrt{17}.$$

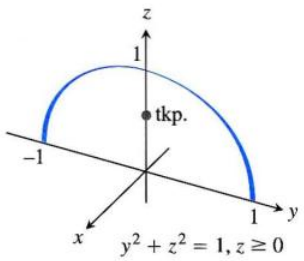
Ezután a 16.1. táblázat képletei alapján számolunk:

$$M = \int_{\text{csavarvonal}} \delta\,ds = \int_0^{2\pi} (1)\sqrt{17}\,dt = 2\pi\sqrt{17}$$

$$I_z = \int_{\text{csavarvonal}} (x^2+y^2)\delta\,ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 4t + \sin^2 4t)(1)\sqrt{17}\,dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{17}\,dt = 2\pi\sqrt{17}$$

$$R_z = \sqrt{I_z/M} = \sqrt{2\pi\sqrt{17}/(2\pi\sqrt{17})} = 1.$$

Vegyük észre, hogy a tehetetlenségi sugár a z-tengelyre vonatkoztatva éppen annak a hengernek a sugara, amire a csavarvonal felcsavarodik. □



16.5. ÁBRA: A 4. példában szereplő fémív.

4. PÉLDA: **Ív tömegközéppontjának meghatározása**

Egy vékony fémív, ami az aljánál nagyobb sűrűségű, mint fent, az $y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ félkör mentén fekszik az yz-síkban (16.5. ábra). Hol van az ív tömegközéppontja, ha a sűrűsége az (x,y,z) pontban $\delta(x,y,z) = 2 - z$?

Megoldás: Tudjuk, hogy $\bar{x} = 0$ és $\bar{y} = 0$, mert az ív az yz-síkban fekszik, és a tömege a z tengelyre szimmetrikusan oszlik el. $\bar{z}$ kiszámításához paraméterezzük a körívet:

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Ezzel a paraméterezéssel a deriváltvektor

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1.$$

A 16.1. táblázat alapján

$$M = \int_C \delta\, ds = \int_C (2-z)ds = \int_0^\pi (2 - \sin t)(1)dt = 2\pi - 2$$

$$M_{xy} = \int_C z\delta\, ds = \int_C z(2-z)ds = \int_0^\pi (\sin t)(2 - \sin t)\, dt =$$

$$= \int_0^\pi (2\sin t - \sin^2 t)dt = \frac{8-\pi}{2}$$

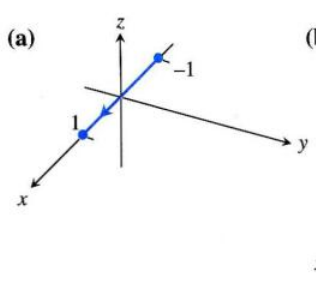
$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{8-\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi - 2} = \frac{8-\pi}{4\pi - 4} \approx 0{,}57.$$

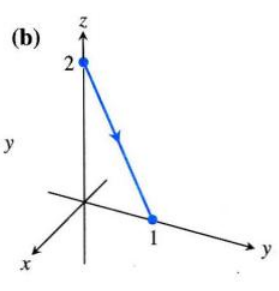
Két tizedesre kerekítve $\bar{z} \approx 0{,}57$, a tömegközéppont $(0,\ 0,\ 0{,}57)$. □

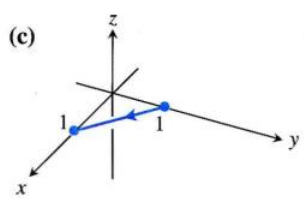
16.1. Feladatok

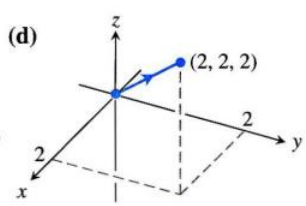
Térgörbék vektoregyenletei

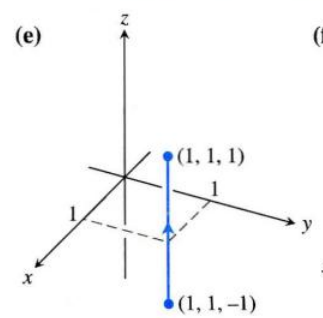
Feleltessük meg az 1–8. feladatokban megadott görbéket az (a)–(h) ábrákon láthatóakkal!

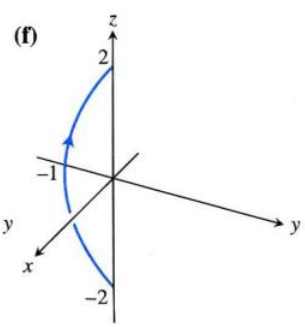


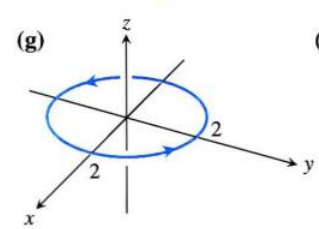


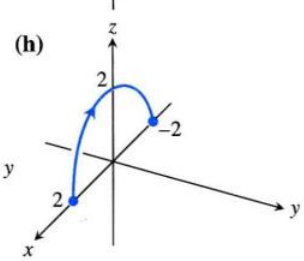












1. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j},\ 0 \leq t \leq 1$
2. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k},\ -1 \leq t \leq 1$
3. $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{j},\ 0 \leq t \leq 2\pi$
4. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i},\ -1 \leq t \leq 1$

5. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$

6. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + (2-2t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$

7. $\mathbf{r}(t) = (t^2-1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $-1 \le t \le 1$

8. $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le \pi$

Vonalintegrálok számítása térgörbék mentén

9. Számítsuk ki a $\int_C (x+y)ds$ integrált, ahol C az $x = t$, $y = (1-t)$, $z = 0$ egyenes szakasz $(0,1,0)$-tól $(1,0,0)$-ig!

10. Számítsuk ki az $\int_C (x-y+z-2)ds$ integrált, ahol C az $x = t$, $y = (1-t)$, $z = 1$ egyenes szakasz $(0,1,1)$-től $(1,0,1)$-ig!

11. Számítsuk ki az $\int_C (xy+y+z)ds$ integrált az $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2-2t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$ görbe mentén!

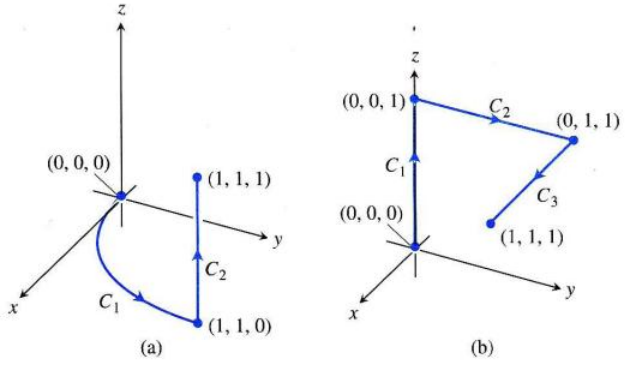
12. Számítsuk ki az $\int_C \sqrt{x^2+y^2}ds$ integrált az $\mathbf{r}(t) = (4\cos t)\mathbf{i} + (4\sin t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, $-2\pi \le t \le 2\pi$ görbe mentén!

13. Mennyi az $f(x,y,z) = x+y+z$ függvény vonalintegrálja az $(1,2,3)$ pontból a $(0,-1,1)$ pontba vezető egyenes szakasz mentén?

14. Mennyi az $f(x,y,z) = \sqrt{3}/(x^2+y^2+z^2)$ függvény vonalintegrálja az $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $1 \le t \le \infty$ görbe mentén?

15. Integráljuk az $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} - z^2$ függvényt a $(0,0,0)$ pontból az $(1,1,1)$ pontba vezető görbe mentén, ha a görbe (16.6a ábra):

$$C_1: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1,$$
$$C_2: \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1!$$



16.6. ÁBRA: A 15. és a 16. feladatban szereplő integrálási utak.

16. Integráljuk az $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} - z^2$ függvényt a $(0,0,0)$ pontból az $(1,1,1)$ pontba vezető görbe mentén, ha a görbe (16.6b ábra):

$$C_1: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1,$$
$$C_2: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1,$$
$$C_3: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1!$$

17. Integráljuk az $f(x,y,z) = (x+y+z)/(x^2+y^2+z^2)$ függvényt az $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 < a \le t \le b$ görbe mentén!

18. Integráljuk az $f(x,y,z) = -\sqrt{x^2+y^2}$ függvényt az

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{j} + (a\sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

körív felett!

Vonalintegrálok síkgörbék felett

A 19–22. feladatokban integráljuk az f függvényt a megadott görbe felett!

19. $f(x,y) = x^3/y$, C: $y = x^2/2$, $0 \le x \le 2$

20. $f(x,y) = (x+y^2)\sqrt{1+x^2}$, C: $y = x^2/2$ az $(1,1/2)$ pontból a $(0,0)$ pontba.

21. $f(x,y) = x+y$, C: $x^2+y^2 = 4$ az első síknegyedben $(2,0)$-ból $(0,2)$-be.

22. $f(x,y) = x^2 - y$, C: $x^2+y^2 = 4$ az első síknegyedben $(2,0)$-ból $(\sqrt{2},\sqrt{2})$-be.

Tömeg és nyomaték

23. Huzal tömege: Mennyi a tömege annak a huzalnak, amelyik az $\mathbf{r}(t) = (t^2-1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$ görbe mentén helyezkedik el, és sűrűsége $\delta = (3/2)t$?

24. Görbe huzal tömegközéppontja: Egy huzal sűrűsége $\delta(x,y,z) = 15\sqrt{y+2}$ és az $\mathbf{r}(t) = (t^2-1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $-1 \le t \le 1$ görbe mentén helyezkedik el. Hol van a tömegközéppontja? Vázoljuk fel a görbét, és jelöljük be a tömegközéppontot!

25. Változó sűrűségű huzal tömege: Mekkora a tömege annak a vékony huzalnak, ami az $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + \sqrt{2}t\mathbf{j} + (4-t^2)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$ görbe mentén fekszik és a sűrűsége **(a)** $\delta = 3t$, ill. **(b)** $\delta = 1$?

26. Változó sűrűségű huzal tömegközéppontja: Hol van a tömegközéppontja annak az $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (2/3)t^{3/2}\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$ görbe mentén elhelyezkedő huzalnak, amelynek sűrűsége $\delta = 3\sqrt{5+t}$?

27. Huzalkarika tehetetlenségi nyomatéka és tehetetlenségi sugara: Egy konstans δ sűrűségű huzalkarika az xy-síkban az $x^2+y^2 = a^2$ kör mentén helyezkedik el. Mekkora a karika tehetetlenségi nyomatéka és tehetetlenségi sugara az x-tengelyre vonatkoztatva?

28. Vékony rúd tehetetlenségi nyomatéka és tehetetlenségi sugara: Egy állandó sűrűségű vékony rúd az $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + (2-2t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$ szakasz mentén fekszik az yz-síkban. Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka és tehetetlenségi sugara a koordinátatengelyekre vonatkoztatva?

29. Két állandó sűrűségű rugó: Egy állandó δ sűrűségű rugó az

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

csavarvonal mentén helyezkedik el.

(a) Határozzuk meg I_z-t és R_z-t!

(b) Tegyük fel, hogy van egy szintén állandó δ sűrűségű, de kétszer olyan hosszú rugónk, mint az (a) pontban, és ez a csavarvonal $0 \le t \le 4\pi$ paraméterértékű pontjaiban van. A hosszabb rugóhoz tartozó I_z, R_z értékeket ugyanakkorának várjuk, mint a rövidebb esetében, vagy különbözőnek? Válaszunk helyességét ellenőrizzük számítással!

30. Állandó sűrűségű huzal: Egy $\delta = 1$ állandó sűrűségű huzal az

$$\mathbf{r}(t) = (t\cos t)\mathbf{i} + (t\sin t)\mathbf{j} + (2\sqrt{2}/3)t^{3/2}\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$$

görbe mentén fekszik. Mennyi $\bar{z}$, I_z, R_z?

31. A 4. példa íve: Mennyi I_x és R_x a 4. példában szereplő ívre?

32. Változó sűrűségű huzal tömegközéppontja, tehetetlenségi nyomatéka és tehetetlenségi sugara: Adjuk meg a tömegközéppontját, tehetetlenségi nyomatékát és tehetetlenségi sugarát a koordinátatengelyekre vonatkoztatva annak a vékony huzalnak, ami az

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2$$

görbe mentén fekszik, és a sűrűsége $\delta = \frac{1}{t+1}$!

Számítógépes vizsgálatok

Vonalintegrálok numerikus számítása

A 33–36. feladatokban használjunk számítógépes programot a következő lépések végrehajtásához a vonalintegrálok kiszámítására.

(a) Határozzuk meg a $ds = |\mathbf{v}(t)|dt$ kifejezést az $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$ integrálási úthoz!

(b) Fejezzük ki az $f(g(t),h(t),k(t))|\mathbf{v}(t)|$ integrandust t függvényeként!

(c) Számítsuk ki az $\int_C f\,ds$ integrált!

33. $f(x,y,z) = \sqrt{1+30x^2+10y}$, $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$

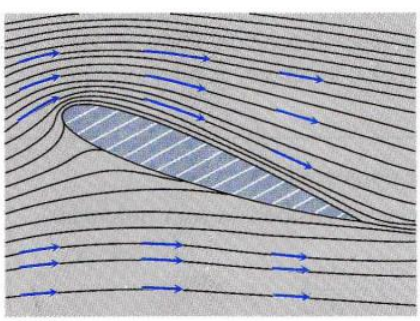
34. $f(x,y,z) = \sqrt{1+x^3+5y^3}$, $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^2\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$

35. $f(x,y,z) = x\sqrt{y} - 3z^2$, $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

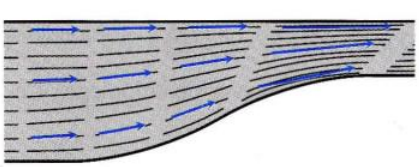
36. $f(x,y,z) = \left(1 + \frac{9}{4}z^{1/3}\right)^{1/4}$, $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j} + t^{5/2}\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

16.2. Vektormezők, cirkuláció, munka, áramlás

Amikor olyan jelenségeket tanulmányozunk, amelyek vektorokkal jellemezhetők, akkor a korlátos, zárt intervallumok feletti integrálok helyett görbék vagy felületek mentén integrálunk. Ebben az alfejezetben görbék mentén vett integrálokkal foglalkozunk. Ilyen integrállal számítható pl. a munka amit egy test elmozdításával végzünk egy görbe mentén változó erővel (mint pl. amit egy rakéta űrbe való kilövésekor végzünk a Föld gravitációs mezője ellenében), vagy amit a vektortér végez, miközben egy részecskét mozgat a téren át (pl. a munka, amit egy gyorsítóban a részecskék energiájának megnövelésére fordítunk).



16.7. ÁBRA: Sebességvektorok egy repülőgépszárny körül egy szélcsatornában. Az áramlás vonalait kerozinfüsttel tették láthatóvá.

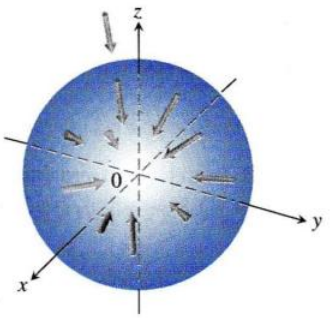


16.8. ÁBRA: Az áramlási vonalak egy szűkülő csatornában. A szűk részen a víz felgyorsul, ezért a sebességvektorok hosszabbak.

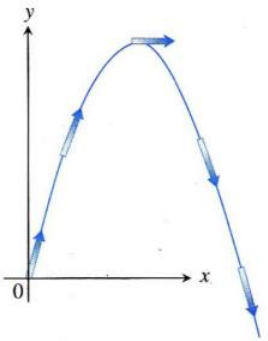
Vektormezők

Tegyük fel, hogy a síknak vagy a térnek egy részét áramló folyadék tölti ki. Képzeljük úgy, hogy a folyadék sok pici mozgó részecskéből áll, és mindegyiknek minden pillanatban van egy **v** sebességvektora. Ha ezeket a vektorokat képzeljük el, akkor a tér minden pontjához tartozik egy más-más irányú és más-más hosszúságú vektor. Így a mozgó folyadék definiál egy *vektormezőt*. A 16.7. ábrán a levegő sebességvektorait láthatjuk egy szélcsatornában egy repülőgépszárny körül. A 16.8. ábra áramló víz sebességvektorait mutatja egy beszűkülő csatornában. Egy adott testre ható gravitációs erőt is szemléltethetünk vektormezővel (16.9. ábra), vagy akár mágneses erőteret, elektromos erőteret is.

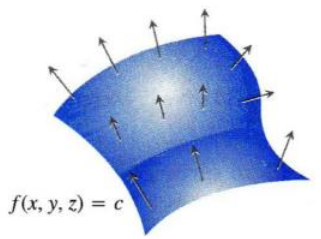
Általában, **vektormezőnek** egy olyan függvényt nevezünk, ami a sík vagy a tér egy tartományának pontjaihoz vektorokat rendel. (Ezt úgy is felfoghatjuk, hogy a vektormező helyvektorokhoz rendel vektorokat, tehát egy vektor-vektor függvény.) A vektormezőt a fizikában, ill. a mérnöki gyakorlatban szokás még **erőtérnek**, **áramlási mezőnek** stb. is nevezni, attól függően, milyen tulajdonságát akarjuk inkább hangsúlyozni. Ha a háromdimenziós tér pontjaihoz rendelünk háromdimenziós vektorokat, és a térben már rögzítve van egy derékszögű koordináta-rendszer a szokásos **i**, **j**, **k** alapvektorokkal, akkor a vektormezőt a



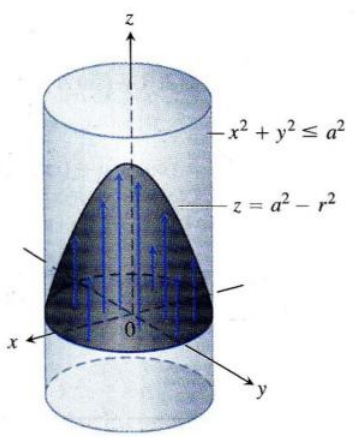
16.9. ÁBRA: A gravitációs vektormező vektorai a tér forrása felé mutatnak, vagyis a teret létrehozó tömeg felé.



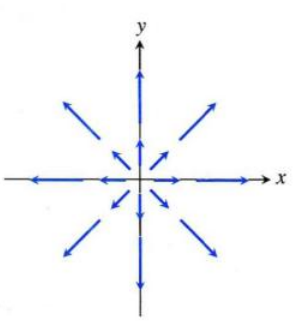
16.10. ÁBRA: Egy hajítás $\mathbf{v}(t)$ sebességvektorai vektormezőt definiálnak a pályagörbe mentén.



16.11. ÁBRA: A ∇f gradiensmező egy $f(x,y,z) = c$ felületen.



16.12. ÁBRA: Folyadék áramlása egy hosszú hengerszerű csőben. A $\mathbf{v} = (a^2 - r^2)\mathbf{k}$ vektorok kezdőpontjai a hengerben az xy-síkon vannak, végpontjuk $z = a^2 - r^2$ paraboloidon.



16.13. ÁBRA: A sugaras vektormező $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Figyeljük meg a jelölésbeli konvenciót: a vektor kiindulópontja van abban a pontban, ahol $\mathbf{F}$-ef számoljuk.

következőképpen adhatjuk meg:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}.$$

Az M, N, P skalár függvények a vektormező **koordinátafüggvényei** (más szóval **komponensfüggvényei** vagy **komponensei i, j, k** irányában). A vektormező **folytonos**, ha a koordinátafüggvényei folytonosak, és **differenciálható**, ha a koordinátafüggvényei differenciálhatóak. A kétdimenziós vektormezőket hasonlóan adhatjuk meg:

$$\mathbf{F}(x,y) = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}.$$

Egy hajítás pályagörbéjének minden pontjához hozzárendelhetjük a sebességvektort. Egy skalár függvény értelmezési tartományának minden olyan pontjához hozzárendelhetjük a gradiensvektort, ahol az létezik. Ilyen függvények illusztrációit láthatjuk a 16.10–16.15. ábrákon.

Megfigyelhetjük, hogy a szokásos ábrázolása ezeknek a függvényeknek eltér attól, ahogy eddig függvényeket ábrázoltunk. Itt a független változó vektor (pont helyvektora), és ennek a végéhez illesztjük a függvényérték-vektor kiindulópontját. (Ha a sík pontjaihoz kétdimenziós vektorokat rendelve „hagyományos" módon akarnánk a függvényt szemléltetni, négy dimenzióra lenne szükség. Az itt alkalmazott szemléltetés jól kifejezi a fizikai tartalmat, és tulajdonképpen ez a szemléltetés egyik legfőbb célja.)

DEFINÍCIÓ: Gradiensmező (vagy potenciáltér)

Egy differenciálható $f(x,y,z)$ függvény **gradiensmezője** vagy **potenciáltere** a

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

gradiensvektort rendeli az (x,y,z) ponthoz.

1. PÉLDA: **Gradiensmező meghatározása**

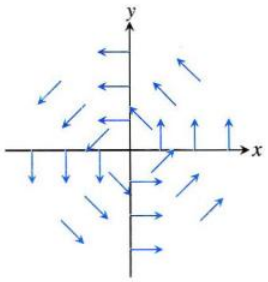
Adjuk meg az $f(x,y,z) = xyz$ függvény gradiensmezőjét (potenciálterét)!

Megoldás: Az f függvény gradiensmezője $\mathbf{F} = \nabla f = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. □

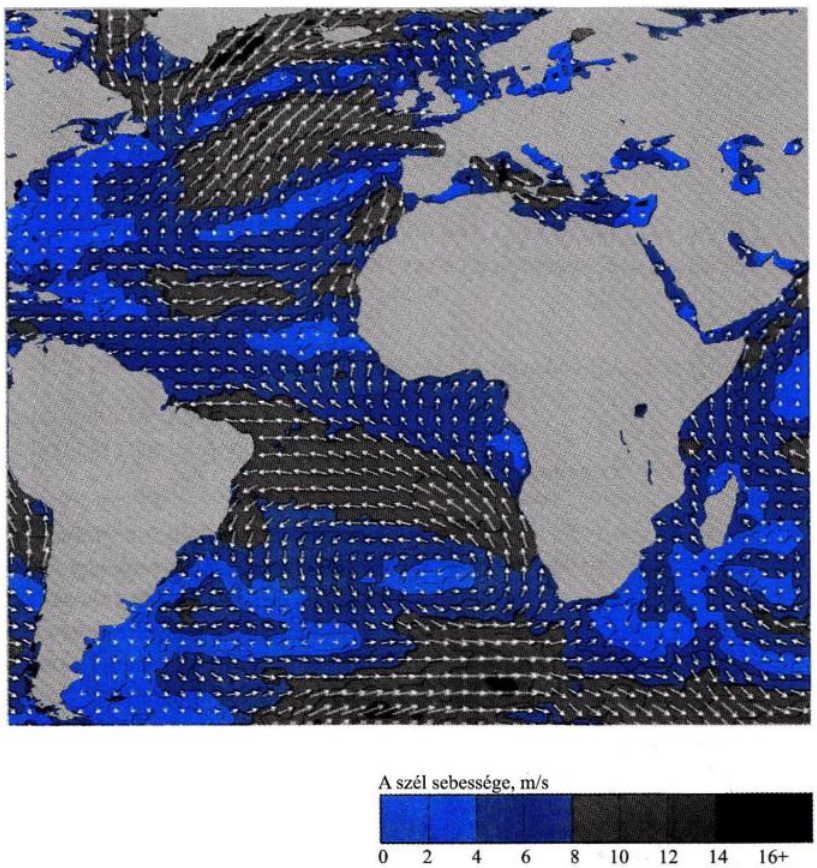
Látni fogjuk a következő alfejezetben, hogy a gradiensmezők különleges szerepet játszanak a mérnöki gyakorlatban.

Erő által végzett munka egy görbe mentén a térben, görbementi integrál

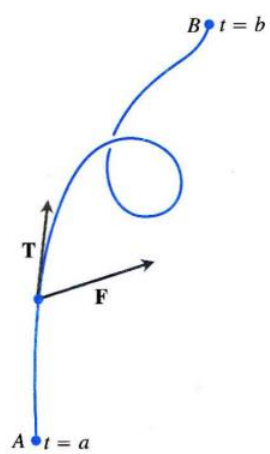
Tegyük fel, hogy az $\mathbf{F} = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}$ vektormező, azaz erőtér képviseli az erőt a tér egy tartományán (pl. gravitációs mező vagy elekt-



16.14. ÁBRA: Egységvektorok „forgó" vektormezője:
$\mathbf{F} = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)^{1/2}$.
A mező nincs definiálva az origóban.



16.15. ÁBRA: NASA Seasat műholdja radarral 350 000 szélmérést végzett az óceánok felett. A nyílak az irányt mutatják, a hosszuk pedig a szél sebességére utal. Érdekes megfigyelni a komoly vihart Grönland déli részénél.



16.16. ÁBRA: Az $\mathbf{F}$ erő által végzett munka az $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ skalárfüggvény integrálja a görbe mentén A-tól B-g.

romágneses mező), és az

$$\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}, \quad a \le t \le b$$

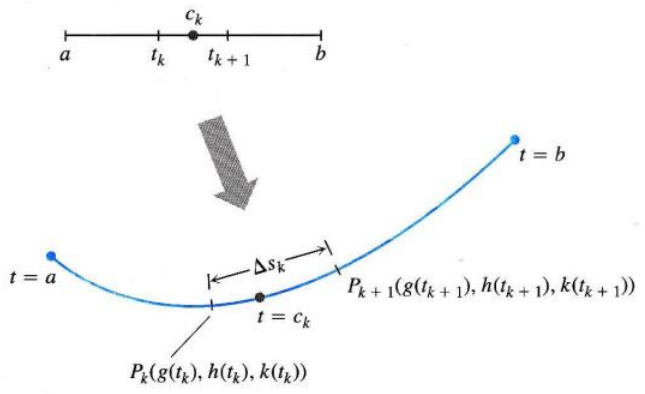
egy sima görbe a tartományban. Ekkor az $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ skalárszorzat az $\mathbf{F}$ komponense a görbe egységnyi hosszú, érintőirányú vektorának irányában. Az $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ integrálját a görbén az $\mathbf{F}$ erőtér munkájának hívjuk a görbe mentén, az a és b paraméterértékek között.

DEFINÍCIÓ: Munka sima görbe mentén

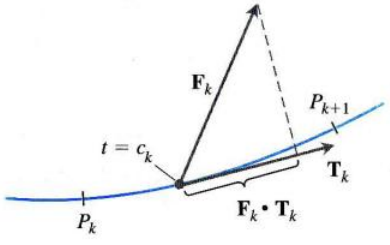
Az $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ erőtér által végzett **munka** az $\mathbf{r}(t)$ sima görbe mentén $t = a$-tól $t = b$-ig

$$W = \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds. \tag{16.4}$$

Hasonlóképpen magyarázzuk a (16.4) egyenlőséget, mint azt tettük a 6. fejezetben a $W = \int_a^b F(x)dx$ képlet levezetésénél. A munka az erőnek az út irányába eső nagysága szorozva az út hosszával. A rektifikálható (véges ívhosszal rendelkező) görbét rövid részívekre osztjuk, és egy-egy ilyen darabon, az erőt konstansnak feltételezve, számítjuk a munkát minden kis részíven, majd összeadjuk ezeket. A munka ezeknek az integrálközelítő összegeknek a határértéke lesz, ahogy a részívek hossza tart a nullához, és így számuk a végtelenhez. Sima görbe esetén a felosztást úgy is csinálhatjuk, hogy az $[a,b]$ paraméterintervallumot osztjuk fel, és így minden osztópontho a paramétertartományban a görbén is tartozik egy osztópont, tehát a paraméterintervallum egy felosztása létrehozza



16.17. ÁBRA: Minden felosztása az $[a,b]$ paramétertartománynak egy felosztást indukál a $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$ görbén.



16.18. ÁBRA: A 16.17. ábra P_kP_{k+1} görbeívének kinagyított képe. Mutatja az egységnyi hosszúságú érintővektort és az erőt is a $t = c_k$ paraméterű pontban.

(más szóval indukálja) a görbeív egy felosztását. Ezután a $[t_k, t_{k+1}]$ paraméterintervallumon választunk egy c_k pontot. Az $\mathbf{r}(t_k)$ helyvektor hegye a P_k pontba mutat, és Δs_k a P_kP_{k+1} ív ívhossza (16.17. ábra).

Ha $\mathbf{F}_k$ jelöli $\mathbf{F}$ helyettesítési értékét a görbe $t = c_k$ paraméterű pontjában, és $\mathbf{T}_k$ jelöli a görbe egységnyi hosszú érintővektorát ebben a pontban, akkor $\mathbf{F}$-nek $\mathbf{T}$ irányú komponense $t = c_k$-nál $\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{T}_k$. Így az $\mathbf{F}$ erő által végzett munka a P_kP_{k+1} ívdarab mentén körülbelül

$$\begin{pmatrix} \text{Erő komponense a} \\ \text{mozgás irányában} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{megtett} \\ \text{távolság} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{T}_k \Delta s_k.$$

A végzett munka egy közelítése a görbe mentén $t = a$-tól $t = b$-ig

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{T}_k \Delta s_k.$$

Ahogy a felosztás normája $[a,b]$-n nullához tart, a görbén indukált felosztás normája is nullához tart és az összegek az

$$\int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

integrálhoz tartanak. Az így kiszámított érték előjele függ a görbe irányításától, azaz attól, hogyan haladunk a görbén, miközben t növekszik. Ha megfordítjuk a mozgás irányát, megfordítjuk $\mathbf{T}$ irányát, így $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ is előjelet vált. Ha zárt görbe mentén integrálunk, akkor az integrált **körintegrálnak** hívjuk.

A 16.2. táblázat a (16.4) egyenlet hat különböző felírását mutatja. Különböző kinézetük ellenére a 16.2 táblázat képleteit ugyanúgy kell kiszámítani. A táblázatban $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ egy sima görbe, és

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = dg\mathbf{i} + dh\mathbf{j} + dk\mathbf{k}$$

a differenciálja.

Munka kiszámítása integrállal

Ahhoz, hogy a végzett munkát kiszámoljuk egy sima görbe mentén, a következő lépéseket kell végrehajtanunk:

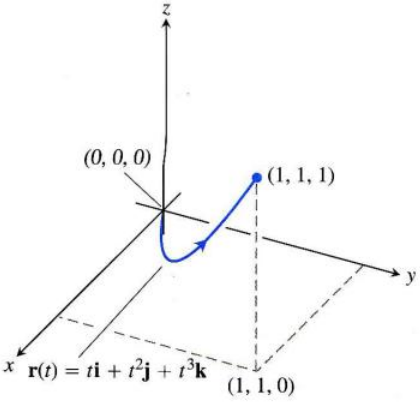
1. fejezzük ki $\mathbf{F}$-et a görbén, mint a t paraméter függvényét,
2. határozzuk meg $d\mathbf{r}/dt$-t,
3. integráljuk az $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt$ kifejezést $t = a$-tól $t = b$-ig!

$\mathbf{W} = \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$	A definíció
$= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$	Differenciál alak
$= \int_a^b \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt$	Kifejtve, hogy tartalmazza dt-t, hangsúlyozza a t paramétert, és a $d\mathbf{r}/dt$ sebességvektort
$= \int_a^b \left(M\frac{dg}{dt}+N\frac{dh}{dt}+P\frac{dk}{dt}\right)$	Hangsúlyozza a koordinátafüggvényeket
$= \int_a^b \left(M\frac{dx}{dt}+N\frac{dy}{dt}+P\frac{dz}{dt}\right)$	Rövidíti $\mathbf{r}$ komponenseit
$= \int_a^b M\,dx+N\,dy+P\,dz$	dt-vel „egyszerűsítve”, a leggyakrabban használt alak

16.2. TÁBLÁZAT: Az $\mathbf{F}$ erőtér görbementi integráljának hat különböző alakja.

2. PÉLDA: **Változó erőtér munkája egy térgörbe mentén**

Mekkora munkát végez az $\mathbf{F} = (y-x^2)\mathbf{i}+(z-y^2)\mathbf{j}+(x-z^2)\mathbf{k}$ erőtér az $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$ görbe mentén a $(0,0,0)$ ponttól az $(1,1,1)$ pontig (16.19. ábra)?



16.19. ÁBRA: A 2. példa görbéje.

Megoldás: Először írjuk fel $\mathbf{F}$-et a görbén:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= (y-x^2)\mathbf{i}+(z-y^2)\mathbf{j}+(x-z^2)\mathbf{k}\\ &= \underbrace{(t^2-t^2)}_{0}\mathbf{i}+(t^3-t^4)\mathbf{j}+(t-t^6)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Ezután meghatározzuk $d\mathbf{r}/dt$-t:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}) = \mathbf{i}+2t\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k}.$$

Végül felírjuk $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}/dt$-t, és integráljuk $t = 0$-tól $t = 1$-ig.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= [(t^3-t^4)\mathbf{j}+(t-t^6)\mathbf{k}]\cdot(\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k})\\ &= (t^3-t^4)(2t)+(t-t^6)(3t^2) = 2t^4-2t^5+3t^3-3t^8,\end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned}\text{Munka} &= \int_0^1 (2t^4-2t^5+3t^3-3t^8)dt\\ &= \left[\frac{2}{5}t^5-\frac{2}{6}t^6+\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{9}t^9\right]_0^1 = \frac{29}{60}.\end{aligned}$$

□

Integrál áramlási mezőben, cirkuláció

Nemcsak erőtérnek tekinthetjük az $\mathbf{F}$ vektormezőt, hanem például áramló folyadék sebességvektormezőjének, más szóval áramlási mezőjének is a tér egy

tartományán definiálva (pl. egy folyammederben, vagy egy hidroelektromos generátor turbinakamrájában). Ebben az esetben $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$ integrálja az áramlást adja meg a görbe mentén.

DEFINÍCIÓ: Áramlási integrál, cirkuláció

Ha $\mathbf{r}(t)$ egy sima görbe egy folytonos $\mathbf{F}$ áramlási mezőben, akkor az áramlás a görbe mentén $t=a$-tól $t=b$-ig

$$\text{áramlás} = \int_a^b \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds. \tag{16.5}$$

Ezt az integrált ebben az esetben **áramlási integrálnak** hívják. Ha a görbe zárt, akkor ezt a zárt görbe menti integrált **cirkulációnak** nevezik.

Az áramlási integrálokat ugyanúgy számoljuk, mint a munkát.

3. PÉLDA: Áramlás egy csavarvonal mentén

Egy áramló folyadék áramlási mezője $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+z\mathbf{j}+y\mathbf{k}$. Adjuk meg az áramlást az $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}$, $0\le t\le \pi/2$ csavarvonal mentén!

Megoldás: Megadjuk $\mathbf{F}$-et a görbe mentén:

$$\mathbf{F}=x\mathbf{i}+z\mathbf{j}+y\mathbf{k}=(\cos t)\mathbf{i}+t\mathbf{j}+(\sin t)\mathbf{k}.$$

Ezután meghatározzuk $d\mathbf{r}/dt$-t:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=(-\sin t)\mathbf{i}+(\cos t)\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

Majd integráljuk $\mathbf{F}\cdot(d\mathbf{r}/dt)$-t $t=0$-tól $t=\frac{\pi}{2}$-ig.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= (\cos t)(-\sin t)+(t)(\cos t)+(\sin t)(1)\\ &= -\sin t\cos t+t\cos t+\sin t,\end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned}\text{áramlás} &= \int_{t=a}^{t=b}\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt=\int_0^{\pi/2}(-\sin t\cos t+t\cos t+\sin t)dt\\ &= \left[\frac{\cos^2 t}{2}+t\sin t\right]_0^{\pi/2}=\left(0+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+0\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

4. PÉLDA: Cirkuláció egy kör mentén

Mennyi az $\mathbf{F}=(x-y)\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ vektormező cirkulációja az $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}$, $0\le t\le 2\pi$ kör mentén?

Megoldás: A körön $\mathbf{F}=(x-y)\mathbf{i}+x\mathbf{j}=(\cos t-\sin t)\mathbf{i}+(\cos t)\mathbf{j}$ és

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=(-\sin t)\mathbf{i}+(\cos t)\mathbf{j}.$$

Ekkor

$$\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=-\sin t\cos t+\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{1},$$

így

$$\begin{aligned}\text{cirkuláció} &= \int_0^{2\pi}\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt=\int_0^{2\pi}(1-\sin t\cos t)dt=\\ &= \left[t-\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{2\pi}=2\pi.\end{aligned}$$

□

Fluxus síkgörbén

Ha az xy-sík egy zárt görbével határolt részét tekintjük, és azt akarjuk kiszámítani, hogy milyen gyorsan áramlik be ide vagy innen ki a folyadék, akkor az $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ skalár kifejezést integráljuk a C görbe mentén. $\mathbf{n}$ a görbére merőleges, kifelé mutató egységvektor, és $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ az áramlási mező $\mathbf{n}$ irányú komponense. Ez az integrál $\mathbf{F}$ fluxusa a C görbén.

DEFINÍCIÓ: Fluxus egy zárt síkgörbén

Ha C egy zárt, sima görbe egy $\mathbf{F} = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$ folytonos vektormező értelmezési tartományában, és $\mathbf{n}$ a kifelé mutató, görbére merőleges egységvektor a C pontjaiban, akkor $\mathbf{F}$ **fluxusa** C-n

$$\mathbf{F} \text{ fluxusa } C\text{-n} = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds. \tag{16.6}$$

Jegyezzük meg a cirkuláció és a fluxus közötti különbséget. A cirkuláció $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$ ívhossz szerinti integrálja, a fluxus $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ ívhossz szerinti integrálja. Az egyik integrandus $\mathbf{F}$ érintőirányú komponense, a másik a kifelé mutató normális irányú komponens. Ha a zárt görbével határolt felületre ugyanannyi folyadék folyik be, mint ki, akkor a fluxus a zárt görbén nulla. (Fluxust számíthatunk nem zárt görbe mentén is, de akkor más szempontok alapján kell a normálist irányítani.)

A (16.6) integrált a következőképpen számíthatjuk ki. Tekintjük a görbe egy sima paraméterezését,

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad a \le t \le b,$$

ami pontosan egyszer járja körbe a görbét miközben t növekszik a-tól b-ig. A kifelé mutató $\mathbf{n}$ normálist úgy határozzuk meg, hogy az érintő irányú $\mathbf{T}$ egységvektort vektoriálisan szorozzuk $\mathbf{k}$-val. De melyik mutat kifelé, $\mathbf{T}\times\mathbf{k}$ vagy $\mathbf{k}\times\mathbf{T}$? Ez attól függ, hogy az általunk választott paraméterezéssel a görbét az óramutató járásával ellentétesen vagy megegyezően járjuk körül. Ha megegyezően, akkor $\mathbf{k}\times\mathbf{T}$, ha ellentétesen, akkor $\mathbf{T}\times\mathbf{k}$ a helyes választás (16.20. ábra). Bár az ívhossz szerinti integrál értéke, amit a fluxus definiálásánál a (16.6) egyenlőségnél felírtunk, nem függ attól, hogy hogyan járjuk körbe a görbét, a továbbiakban a számításoknál óramutató járásával ellentétes körüljárást feltételezünk.

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}\times\mathbf{k} = \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}\right)\times\mathbf{k} = \frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}.$$

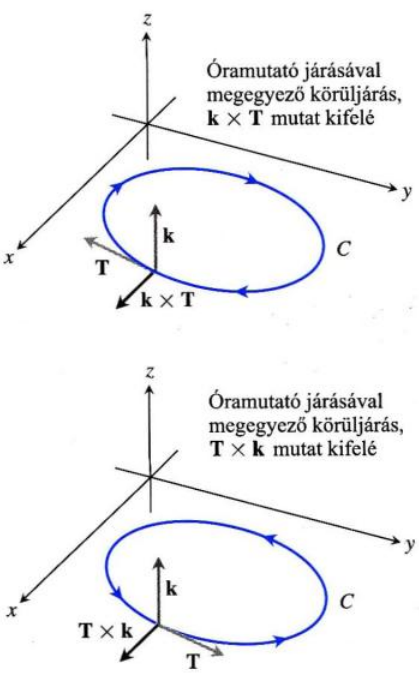
Ha $\mathbf{F} = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$, akkor

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = M(x,y)\frac{dy}{ds} - N(x,y)\frac{dx}{ds}.$$

Következésképp

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \int_C \left(M\frac{dy}{ds} - N\frac{dx}{ds}\right)ds = \oint_c M\,dy - N\,dx.$$

Az utolsó integrálra egy $\circlearrowleft$ irányított kört tettünk, ami azt fejezi ki, hogy zárt görbe mentén az óramutató járásával ellentétes irányban integrálunk. Az integrál kiszámításához az M, N, dx, dy kifejezéseket kell felírnunk, mint t függvényét, nem kell ismernünk sem $\mathbf{n}$-et, sem ds-t.



16.20. ÁBRA: Ahhoz, hogy megadjunk egy kifelé mutató normálvektort, miközben az óramutató járásával ellentétes irányban járjuk be a görbét, az $\mathbf{n} = \mathbf{T}\times\mathbf{k}$ szorzatot számoljuk. Az óramutató járásával megegyező körüljárás esetén $\mathbf{n} = \mathbf{k}\times\mathbf{T}$.

Fluxus számítása egy sima, zárt síkgörbén

$$\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} \text{ fluxusa } C\text{-n} = \oint_C M\,dy - N\,dx. \tag{16.7}$$

Az integrál a C görbe bármilyen sima paraméterezésével számítható, ha azzal a C görbét pontosan egyszer járjuk körbe az óramutató járásával ellentétes irányban.

5. PÉLDA: **Fluxus számítása körön**

Adjuk meg $\mathbf{F} = (x-y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ fluxusát az xy-síkban fekvő $x^2+y^2=1$ körön!

Megoldás: A kör $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ paraméterezésével pontosan egyszer járjuk körbe a kört, az óramutató járásával ellentétes irányban. Ezért ezt a paraméterezést használhatjuk a (16.7) képletben.

$$M = x - y = \cos t - \sin t, \qquad dy = d(\sin t) = \cos t\, dt$$
$$N = x = \cos t, \qquad dx = d(\cos t) = -\sin t\, dt$$

Így

$$\text{Fluxus} = \int_C M\,dy - N\,dx = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin t \cos t + \cos t \sin t)\,dt \quad \text{(16.7) képlet}$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

A fluxus a körön π. Mivel ez pozitív, a nettó áramlás a körön keresztül kifelé irányul (a kifelé mutató normálvektorokkal a kifelé áramlást definiáltuk pozitív irányúnak). Ha a nettó áramlás befelé irányul, azaz több folyik befelé, mint kifelé, akkor a fluxus negatív. □

16.2. Feladatok

Vektormező, gradiensmező

Az 1–4. feladatokban adjuk meg a függvény gradiensmezőjét!

1. $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

2. $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

3. $g(x,y,z) = e^2 - \ln(x^2+y^2)$

4. $g(x,y,z) = xy + yz + xz$

5. Adjunk egy $\mathbf{F} = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$ alakú képletet arra a vektormezőre, ami minden ponthoz olyan vektort rendel, ami az origó irányába mutat, a hossza pedig fordítottan arányos a pont origótól való távolságának négyzetével! (A mező nincs definiálva az origóban.)

6. Adjunk egy $\mathbf{F} = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$ alakú képletet arra a vektormezőre, ami az origóban $\mathbf{0}$, és minden más (a,b) pontban $\mathbf{F}$ az $x^2+y^2 = a^2+b^2$ kör érintőjével párhuzamos, az óramutató járásával megegyező irányba mutat, hossza pedig $|\mathbf{F}| = \sqrt{a^2+b^2}$!

Munka

A 7–12. feladatokban adjuk meg az $\mathbf{F}$ erőtér munkáját, a $(0,0,0)$ pontból az $(1,1,1)$ pontba, a következő görbék mentén (16.21. ábra):

(a) Az egyenes szakasz: $C_1 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$,

(b) Görbe út: $C_2 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^4\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$

(c) A $C_3 \cup C_4$ út, ami a $(0,0,0)$-tól $(1,1,0)$-ig vezető szakaszból, és $(1,1,0)$-tól $(1,1,1)$-be vezető szakaszból áll.

7. $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 4z\,\mathbf{k}$

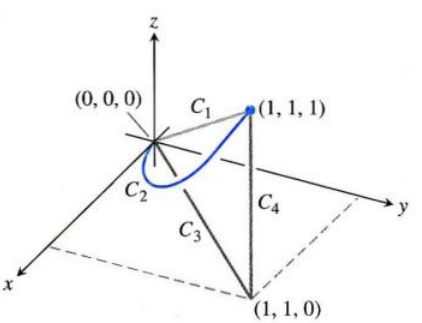
8. $\mathbf{F} = [1/(x^2+1)]\mathbf{j}$

9. $\mathbf{F} = \sqrt{z}\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \sqrt{y}\mathbf{k}$

10. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$

11. $\mathbf{F} = (3x^2 - 3x)\mathbf{i} + 3z\mathbf{j} + \mathbf{k}$

12. $\mathbf{F} = (y+z)\mathbf{i} + (z+x)j\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$



16.21. ÁBRA: A különböző útvonalak a $(0,0,0)$ és az $(1,1,1)$ pont között.

A 13–16. feladatokban számítsuk ki az erőtér munkáját a megadott görbe mentén, a t paraméter növekvő értékeinek irányában!

13. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$
$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} \quad 0 \le t \le 1$

14. $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + (x+y)\,\mathbf{k}$
$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (t/6)\mathbf{k} \quad 0 \le t \le 2\pi$

15. $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$
$\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad 0 \le t \le 2\pi$

16. $\mathbf{F} = 6z\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 12x\,\mathbf{k}$
$\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (t/6)\,\mathbf{k} \quad 0 \le t \le 2\pi$

Vonalintegrálok és vektormezők a síkban

17. Számítsuk ki az $\int_C xy\,dx + (x+y)\,dy$ integrált az $y = x^2$ görbe mentén $(-1,1)$-től $(2,4)$-ig!

18. Számítsuk ki az $\int_C (x-y)\,dx + (x+y)\,dy$ integrált az óramutató járásával ellentétes körüljárással a $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ csúcspontú háromszögön!

19. Számítsuk ki az $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds$ integrált az $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}-y\mathbf{j}$ függvénnyel az $x=y^2$ görbe mentén $(4,2)$-től $(1,-1)$-ig.

20. Számítsuk ki az $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ integrált az $\mathbf{F}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}$ vektormezővel az óramutató járásával ellentétes irányban az $x^2+y^2=1$ egységsugarú kör mentén $(1,0)$-tól $(0,1)$-ig.

21. Munka: Mekkora munkát végez az $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}+(y-x)\mathbf{j}$ erőtér az $(1,1)$-ből $(2,3)$-ba menő egyenes szakasz mentén?

22. Munka: Mekkora munkát végez az $f(x,y)=(x+y)^2$ függvény gradiensmezője az $x^2+y^2=4$ kör mentén az óramutató járásával ellentétes irányba haladva, ha a $(2,0)$ pontból indulunk, és oda is térünk vissza?

23. Cirkuláció és fluxus: Mennyi a cirkulációja és a fluxusa az

$$\mathbf{F}_1=x\mathbf{i}+y\mathbf{j},\quad \mathbf{F}_2=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$$

vektormezőknek a következő görbéken?

(a) Az $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}$, $0\le t\le 2\pi$ körön?

(b) Az $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(4\sin t)\mathbf{j}$, $0\le t\le 2\pi$ ellipszisen?

24. Fluxus egy körön: Mennyi a fluxusa az

$$\mathbf{F}_1=2x\mathbf{i}-3y\mathbf{j},\quad \mathbf{F}_2=2x\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$$

vektormezőknek az

$$\mathbf{r}(t)=(a\cos t)\mathbf{i}+(a\sin t)\mathbf{j},\quad 0\le t\le 2\pi$$

körön?

Görbementi integrálok, cirkuláció és fluxus

A 25–28. feladatokban adjuk meg az $\mathbf{F}$ vektormező cirkulációját és fluxusát azon a zárt görbén, ami az $\mathbf{r}_1(t)=(a\cos t)\mathbf{i}+(a\sin t)\mathbf{j}$, $0\le t\le\pi$ félkörből, majd ezt követően az $\mathbf{r}_2=t\mathbf{i}$, $-a\le t\le a$ szakaszból áll!

25. $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ **26.** $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}$

27. $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ **28.** $\mathbf{F}=-y^2\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}$

29. Görbementi integrál, áramlási integrálok: Adjuk meg az $\mathbf{F}=(x+y)\mathbf{i}-(x^2+y^2)\mathbf{j}$ sebességvektormező görbementi integrálját (áramlását) az xy-sík $(1,0)$ pontjából a $(-1,0)$ pontba a következő utak mentén:

(a) Az $x^2+y^2=1$ kör felső fele.

(b) Az $(1,0)$-ból $(-1,0)$-ba vezető egyenes szakasz.

(c) Az $(1,0)$-ból $(0,-1)$-be, majd onnan a $(-1,0)$-ba vezető egyenes szakaszok egyesítése.

30. Fluxus egy háromszögön: Mennyi a fluxusa a 29. feladatban szereplő $\mathbf{F}$ vektormezőnek azon a háromszögön, aminek csúcsai $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$?

Vektormezők felvázolása a síkban

31. Forgó vektormező: Vázoljuk fel az

$$\mathbf{F}=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}$$

forgó vektormezőt (16.14. ábra), és az $x^2+y^2=4$ kör pár pontjában a függőleges és vízszintes (y-tengellyel, ill. x-tengellyel párhuzamos) összetevőit is!

32. Sugaras vektormező: Vázoljuk fel az

$$\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$$

sugaras vektormezőt (16.13. ábra), és az $x^2+y^2=1$ kör pár pontjában a függőleges és vízszintes (y-tengellyel, ill. x-tengellyel párhuzamos) összetevőit is.

33. Érintővektorok mezője:

(a) Adjunk meg az xy-síkban egy olyan $\mathbf{G}=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$ vektormezőt, hogy minden $(a,b)\neq(0,0)$ pontban $\mathbf{G}$ abszolútértéke $\sqrt{a^2+b^2}$ legyen, az iránya pedig az $x^2+y^2=a^2+b^2$ kör érintőjének iránya az óramutató járásával megegyező irányba mutatva!

(b) Mi a kapcsolata $\mathbf{G}$-nek a 16.14. ábra $\mathbf{F}$ forgó mezőjével?

34. Érintővektorok mezője:

(a) Adjunk meg az xy-síkban egy olyan $\mathbf{G}=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$ vektormezőt, hogy minden $(a,b)\neq(0,0)$ pontban $\mathbf{G}$ legyen egységvektor, az iránya pedig legyen az $x^2+y^2=a^2+b^2$ kör érintőjének iránya az óramutató járásával megegyező irányba mutatva!

(b) Mi a kapcsolata $\mathbf{G}$-nek a 16.14. ábra $\mathbf{F}$ forgó mezőjével?

35. Az origó felé mutató egységvektorok: Adjunk meg az xy-síkban egy olyan $\mathbf{F}=M(x,y)\mathbf{i}+N(x,y)\mathbf{j}$ vektormezőt, hogy minden $(x,y)\neq(0,0)$ pontban $\mathbf{F}$ legyen egységvektor és mutasson az origó felé! (A mező nincs definiálva az origóban.)

36. Két „középpontos" mező: Adjunk meg az xy-síkban egy olyan $\mathbf{F}=M(x,y)\mathbf{i}+N(x,y)\mathbf{j}$ vektormezőt, hogy minden $(x,y)\neq(0,0)$ pontban $\mathbf{F}$ mutasson az origó felé, és $|\mathbf{F}|$ legyen **(a)** az (x,y) pont távolsága az origótól, **(b)** fordítottan arányos az (x,y) pont távolságával az origótól! ($\mathbf{F}$ nincs definiálva az origóban.)

Áramlási integrálok a térben

A 37–40. feladatokban $\mathbf{F}$ egy áramlási mező a térben. Adjuk meg az áramlást az adott görbék mentén az adott irányban!

37. $\mathbf{F}=-4xy\mathbf{i}+8y\mathbf{j}+2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $0\le t\le 2$

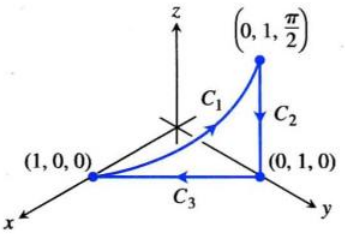
38. $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(t)=3t\mathbf{j}+4t\,\mathbf{k}$, $0\le t\le 1$

39. $\mathbf{F}=(x-z)\mathbf{i}+x\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\,\mathbf{k}$, $0\le t\le\pi$

40. $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(t)=(-2\cos t)\mathbf{i}+(2\sin t)\mathbf{j}+2t\,\mathbf{k}$, $0\le t\le 2\pi$

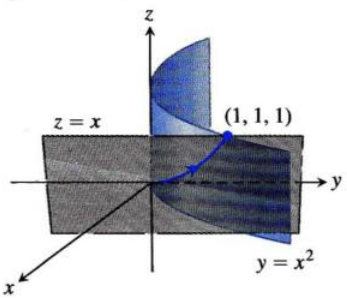
41. Cirkuláció: Adjuk meg az $\mathbf{F}=2x\mathbf{i}+2z\mathbf{j}+2y\,\mathbf{k}$ vektormező cirkulációját a következő három görbeívből álló zárt görbén a t paraméter növekedésének irányában haladva!

$$C_1:\quad \mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+t\,\mathbf{k},\quad 0\le t\le\pi/2$$
$$C_2:\quad \mathbf{r}(t)=\mathbf{j}+(\pi/2)(1-t)\,\mathbf{k},\quad 0\le t\le 1$$
$$C_3:\quad \mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+(1-t)\mathbf{j},\quad 0\le t\le 1$$



42. Nulla cirkuláció: Legyen C az a görbe, amiben a $2x + 3y - z = 0$ sík metszi az $x^2 + y^2 = 12$ hengert. Mutassuk meg az integrálok kiszámítása nélkül, hogy az $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektormező cirkulációja ezen a zárt görbén nulla!

43. Áramlás egy görbe mentén: Az $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} - yz\,\mathbf{k}$ vektormező egy áramló anyag sebességmezője a térben. Adjuk meg az áramlási integrál értékét a $(0,0,0)$ ponttól az $(1,1,1)$ pontig a $z = x$ sík és az $y = x^2$ henger metszésvonalán! (*Útmutatás*: Válasszuk a $t = x$ paramétert!)



44. Gradiensmező integrálja: Adjuk meg az $\mathbf{F} = \nabla(xy^2z^3)$ gradiensmező áramlási integrálját

(a) A 42. feladat görbéjén egyszer körbe, felülről nézve óramutató járásával megegyező körüljárással,

(b) Az $(1,1,1)$ pontból a $(2,1,-1)$ pontba egyenes szakasz mentén!

További példák és feladatok

45. Munka és terület: Tegyük fel, hogy $f(t)$ egy differenciálható pozitív függvény, ha $a \le t \le b$. Legyen $C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}$, $a \le t \le b$ az integrálási út, és $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$ a vektormező. Van valamilyen kapcsolat az

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

görbe mentén végzett munka és a között a felület között, amit a t-tengely, a $t = a$, $t = b$ egyenesek, és f grafikonja zárnak közre?

46. Állandó abszolútértékű sugaras erőtér által végzett munka: Egy részecske mozog egy $y = f(x)$ sima görbe mentén $(a, f(a))$-ból $(b, f(b))$-be az $\mathbf{F}$ erőtérben. Az erőnek mindenhol ugyanaz a k az abszolútértéke, és mindenhol az origótól elfelé mutat. Mutassuk meg, hogy az erőtér által végzett munka

$$\int_c \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = k\left[(b^2 + (f(b))^2)^{1/2} - (a^2 + (f(a))^2)^{1/2}\right]!$$

Számítógépes vizsgálatok

Munka numerikus meghatározása

A 47–52. feladatokban használjunk számítógépes programot az adott $\mathbf{F}$ vektormező által, az adott úton végzett munka kiszámítására, a következő lépések végrehajtásával:

(a) Adjuk meg $d\mathbf{r}$-et az $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$ integrálási útra!

(b) Adjuk meg $\mathbf{F}$-et az út mentén!

(c) Számítsuk ki az $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ integrált!

47. $\mathbf{F} = xy^6\mathbf{i} + 3x(3xy^5 + 2)\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = 2\cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)t\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$

48. $\mathbf{F} = \frac{3}{1+x^2}\mathbf{i} + \frac{2}{1+y^2}\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le \pi$

49. $\mathbf{F} = (y + yz\cos xyz)\mathbf{i} + (x^2 + xz\cos xyz)\mathbf{j} + (z + xy\cos xyz)\,\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = (2\cos(t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

50. $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + ze^x\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = -t\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, $1 \le t \le 4$

51. $\mathbf{F} = (2y + \sin x)\mathbf{i} + (z^2 + (1/3)\cos y)\mathbf{j} + x^4\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\,\mathbf{j} + (\sin 2t)\mathbf{k}$, $-\pi/2 \le t \le \pi/2$

52. $\mathbf{F} = (x^2y)\mathbf{i} + \frac{1}{3}x^3\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (2\sin^2 t - 1)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

16.3. Útfüggetlenség, potenciálfüggvény, konzervatív vektormező

A gravitációs vagy elektromos térben a munka mennyisége, amivel egy tömeget vagy egy töltést az egyik pontból a másikba mozgatunk, csak a kiindulási és a végponttól függ, és nem függ a két pont közötti úttól. Ebben az alfejezetben azzal foglalkozunk, hogy mit jelent a vektormező szempontjából az integrálnak az úttól való függetlensége.

Útfüggetlenség

Ha A és B két pont egy térbeli nyílt D halmazban, akkor az $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ munka, amivel egy részecskét a D-n definiált $\mathbf{F}$ erőtér az A pontból a B pontba visz, rendszerint függ az úttól, amin a részecske az A-ból B-be jutott.

DEFINÍCIÓ: Útfüggetlenség, konzervatív erőtér

Legyen $\mathbf{F}$ egy erőtér a tér egy nyílt D halmazán definiálva, és tegyük fel, hogy bármilyen két A és B pontra D-ben igaz, hogy az $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ munka ugyanannyi minden A-ból B-be vezető út mentén, ami D-n belül halad. Ekkor az $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ integrál **útfüggetlen D-ben**, és az $\mathbf{F}$ erőtér **konzervatív erőtér D-n**.

A „konzervatív" elnevezés onnan ered, hogy olyan erőterekről van szó, ahol érvényes az energia megmaradásának elve.

Bizonyos differenciálhatósági feltételek mellett, ami a gyakorlatban általában teljesül, egy $\mathbf{F}$ tér akkor és csak akkor konzervatív, ha gradiens tere egy f skalár függvénynek, azaz ha $\mathbf{F} = \nabla f$ valamilyen f-re. Ennek az f függvénynek külön neve van.

DEFINÍCIÓ: Potenciálfüggvény

Ha $\mathbf{F}$ egy D-n definiált erőtér, és $\mathbf{F} = \nabla f$ valamilyen f skalár függvényre D-n, akkor **f-et $\mathbf{F}$ potenciálfüggvényének** hívjuk.

Az elektromos potenciál egy olyan skalár függvény, aminek a gradiens mezője egy elektromos tér. A gravitációs potenciál egy olyan skalár függvény, aminek a gradiens mezője egy gravitációs tér stb. Ahogy látni fogjuk, ha egy erőtérnek megtaláltuk a potenciálfüggvényét, akkor bármilyen út mentén A-ból B-be

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A). \tag{16.8}$$

Ha arra gondolunk, hogy ∇f többváltozós függvények esetén ugyanaz, mint f' az egyváltozós függvények esetében, akkor a (16.8) egyenlőség nem más, mint a

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Newton–Leibniz-formula megfelelője vektorterekre.

Az, hogy egy erőtér konzervatív, az előzőekkel összhangban, ekvivalens azzal, hogy minden zárt görbe mentén vett integrál nulla. Természetesen ahhoz, hogy a (16.8) egyenlőség fennálljon, a tartományra, az erőtérre és görbékre bizonyos feltételeknek teljesülniük kell. Ezeket tárgyaljuk az elkövetkezőkben.

Tulajdonságok, amelyeket mostantól fogva mindig feltételezünk: Összefüggő, egyszeresen összefüggő tartomány

Ezentúl minden görbéről feltesszük, hogy **szakaszonként sima görbe**, azaz véges sok sima görbéből áll, amelyek végpontjaiknál csatlakoznak egymáshoz, ahogy azt a 13.1. alfejezetben tárgyaltuk. Szintén feltesszük, hogy $\mathbf{F}$-nek folytonos parciális deriváltjai vannak. Ha $\mathbf{F} = \nabla f$, akkor az előbbi feltétel azt eredményezi, hogy f vegyes másodrendű parciális deriváltjai megegyeznek, ami egy könnyen ellenőrizhető tulajdonsága a konzervatív erőtereknek.

Feltesszük továbbá, hogy D nyílt halmaz a térben. Ez azt jelenti, hogy minden pontjához van olyan gömb, aminek az adott pont a középpontja, és a gömb teljes egészében D-ben van. Feltesszük, hogy D **összefüggő**, ami azt jelenti, hogy bármely két pontja összeköthető egy olyan sima görbével, ami teljes egészében D-ben halad. Végül, D-ről feltesszük, hogy **egyszeresen összefüggő**, ami azt jelenti, hogy minden hurok, ami D-ben halad, összehúzható egy pontra úgy, hogy közben nem hagyja el D-t. (Ha D egy olyan tartomány, amiből „kihúztunk" egy egyenes szakaszt akkor már nem egyszeresen összefüggő, mert a szakaszt megkerülő zárt görbe nem húzható úgy össze egy pontra, hogy mindig a tartományban maradjon.)

Összefüggőség és egyszeresen összefüggőség nem ugyanazt jelenti, és egyik sem következik a másikból. Az összefüggőre úgy gondolhatunk, mint ami egy darabból van, az egyszeresen összefüggő az, amiben nincsenek lyukak, amire egy „hurok felakadhat". A teljes tér összefüggő és egyszeresen összefüggő. Ennek a fejezetnek néhány állítása nem áll, ha mindazok a feltételek, amiket eddig felsoroltunk, nem teljesülnek az állításban szereplő görbékre, tartományokra, függvényekre.

Vonalintegrálok konzervatív erőtérben

A következő tétel egy kényelmes módot ad vonalintegrálok kiszámítására konzervatív erőterekben.

1. TÉTEL: A vonalintegrálok alaptétele

1. Legyen $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ egy vektortér, amelynek komponensei folytonosak a tér egy nyílt D tartományán. Akkor és csak akkor létezik egy olyan differenciálható f függvény D-n, hogy

$$\mathbf{F} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k},$$

ha D minden A és B pontjára az $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ független az A-t és B-t összekötő úttól, feltéve, hogy D-ben halad.

2. Ha az integrál független az A-ból B-be vezető úttól, akkor

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A).$$

$\mathbf{F} = \nabla f$-ből következik, hogy az integrál független az úttól: Tegyük fel, hogy A és B D-nek két pontja, és C: $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, $a \le t \le b$, egy sima görbe, ami D-ben halad, és összeköti A-t és B-t. A görbe mentén f differenciálható függvénye t-nek, és

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \qquad \text{Láncszabály, ha } x = g(t),\ y = h(t),\ z = k(t)$$

$$= \nabla f \cdot \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right) = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \qquad \mathbf{F} = \nabla f$$

Következésképp

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_a^b \frac{df}{dt} dt =$$

$$= \Big[f(g(t), h(t), k(t))\Big]_a^b = f(B) - f(A).$$

Azaz a vonalintegrál értéke csak f-nek az A és B pontbeli értékétől függ. Ez a bizonyítása a 2-es állításnak és az 1-es állításnak egyik irányba. Az 1-es állítást a másik irányba most nem bizonyítjuk. □

1. PÉLDA: Konzervatív erőtérben végzett munka meghatározása

Mekkora munkát végez az

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} = \nabla(xyz)$$

erőtér az $A(-1, 3, 9)$ és $B(1, 6, -4)$ pontokat összekötő sima C görbe mentén?

Megoldás: Az $f(x,y,z) = xyz$ függvénnyel

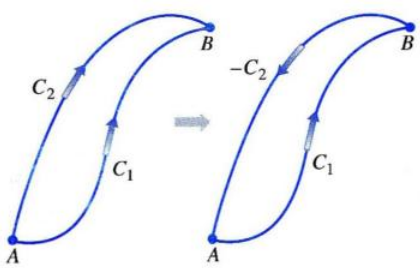
$$\begin{aligned}\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r}\\ &= f(B) - f(A)\\ &= xyz|_{(1,6,-4)} - xyz|_{(-1,3,9)}\\ &= (1)(6)(-4) - (-1)(3)(9)\\ &= -24 + 27 = 3.\end{aligned}$$

□

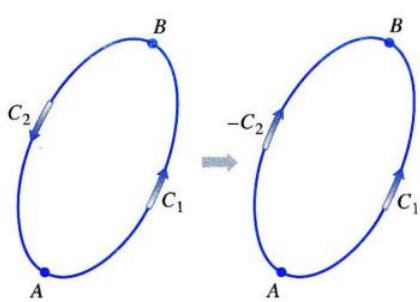
2. TÉTEL: Integrál zárt görbe mentén, konzervatív erőtérben

A következő állítások ekvivalensek:

1. $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ minden zárt görbe mentén D-ben.
2. Az $\mathbf{F}$ erőtér konzervatív.



16.22. ÁBRA: Ha van két út A-ból B-be, egyiket megfordíthatjuk, hogy zárt görbe legyen.



16.23. ÁBRA: Ha van két út A-ból B-be, egyiket megfordíthatjuk, hogy zárt görbe legyen.

Az első állításból következik a második: Azt akarjuk megmutatni, hogy D-nek bármely A és B pontjára $\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ ugyanazt az értéket veszi fel bármely C_1, C_2 út esetén. Ha megfordítjuk az integrálás irányát C_2-n, és B-ből A-ba megyünk, akkor egyrészt C_2-n az integrál előjelet vált, másrészt egy zárt görbét hoztunk létre.

$$\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Azaz az integrál C_1-en és C_2-n ugyanazt az értéket adja.

A második állításból következik az első: Meg akarjuk mutatni, ha $\mathbf{F}$ konzervatív, akkor zárt görbe mentén vett integrálja nulla. Tekintsünk egy zárt görbét és azon két pontot, A-t és B-t. Ezek C-t két részre osztják, a C_1 és C_2 görbére. Ha az egyiken, pl. C_2-n visszafelé megyünk, egyrészt az integrál előjelet vált, másrészt ugyanazt az értéket veszi fel, mint C_1-en:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0.$$

□

A következő diagram összegzi az 1. és 2. Tétel eredményeit:

$$\mathbf{F}=\nabla f \text{ } D\text{-n} \quad \overset{\text{1. Tétel}}{\Longleftrightarrow} \quad \mathbf{F} \text{ konzervatív } D\text{-n} \quad \overset{\text{2. Tétel}}{\Longleftrightarrow} \quad \oint_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 \text{ } D \text{ minden zárt görbéjén}$$

Miután láttuk milyen egyszerű integrált számolni konzervatív erőtérben, két kérdés maradt:

1. Honnan lehet tudni, hogy egy erőtér (vektormező) konzervatív?
2. Ha $\mathbf{F}$ konzervatív, hogyan találjuk meg a potenciálfüggvényét (olyan f-et, amire $\nabla f = \mathbf{F}$)?

Konzervatív erőtér potenciáljának meghatározása

Azt, hogy az erőtér konzervatív-e a következőképp ellenőrizhetjük. Ne felejtsük el, hogy a D tartomány összefüggő és egyszeresen összefüggő.

Komponens-teszt a konzervativitás ellenőrzésére

Legyen $\mathbf{F} = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}$ egy olyan erőtér, ahol a koordinátafüggvényeknek folytonos parciális deriváltjai vannak. Ekkor $\mathbf{F}$ akkor és csak akkor konzervatív, ha

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{16.9}$$

Ha F konzervatív, akkor a (16.9) egyenlőségek teljesülnek: Van olyan f potenciálfüggvény, hogy

$$\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Következésképp

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \qquad \text{Folytonosságból következik, hogy a vegyes deriváltak egyenlőek}$$
$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial z}.$$

A többi egyenlőséget hasonlóképp láthatjuk be. A bizonyítás második fele az, hogy az egyenlőségekből a konzervativitás következik, a 16.7. alfejezetben tárgyalt Stokes-tétel következménye, ami a D tartomány egyszeres összefüggőségét követeli meg. □

Ha már tudjuk, hogy $\mathbf{F}$ konzervatív, általában ismerni szeretnénk egy potenciálfüggvényét. Ehhez meg kell oldanunk a $\nabla f = \mathbf{F}$ egyenletet, azaz a

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$$

egyenletet f-re. Ehhez integrálnunk kell a következő három egyenlőséget:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = P.$$

A következő példában bemutatjuk ezt az eljárást.

2. PÉLDA: **Potenciálfüggvény meghatározása**

Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{F} = (e^x \cos y + yz)\mathbf{i} + (xz - e^x \sin y)\mathbf{j} + (xy + z)\mathbf{k}$ vektormező konzervatív, és adjuk meg egy potenciálfüggvényét!

Megoldás: A (16.9) egyenlőségeket ellenőrizzük az

$$M = e^x \cos y + yz, \quad N = xz - e^x \sin y, \quad P = xy + z$$

függvényekre.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -e^x \sin y + z = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Ezek az egyenlőségek együtt azt jelentik, hogy van potenciálfüggvény. Ezt az f függvényt az

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + zy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz - e^x \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + z \tag{16.10}$$

egyenlőségek integrálásával kapjuk meg. Az első egyenletet x szerint integráljuk, miközben y-t és z-t konstansként kezeljük:

$$f(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + g(y,z).$$

Az x szerinti integrálás konstansa függhet y-tól és z-től. Kiszámítjuk $\partial f/\partial y$-t az így kapott f függvényből, és összevetjük azzal, amit a (16.10) egyenlőségből tudunk:

$$-e^x \sin y + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - e^x \sin y.$$

Így $\partial g/\partial y = 0$, azaz g csak z-től függhet:

$$f(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + h(z).$$

Számítsuk ki ebből $\partial f/\partial z$-t és vessük össze (16.10)-zel.

$$xy + \frac{dh}{dz} = xy + z, \quad \text{azaz} \quad \frac{dh}{dz} = z,$$

így

$$h(z) = \frac{z^2}{2} + C.$$

A potenciálfüggvény tehát

$$f(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C.$$

C-től függően végtelen sok potenciálfüggvényünk van. □

3. PÉLDA: **Annak kimutatása, hogy F nem konzervatív**

Mutassuk meg, hogy $\mathbf{F} = (2x-3)\mathbf{i} - z\mathbf{j} + (\cos z)\mathbf{k}$ nem konzervatív!

Megoldás: A (16.9) egyenlőségből adódik:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos z) = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -1.$$

Ez a kettő nem egyenlő, így $\mathbf{F}$ nem konzervatív. □

Egzakt differenciálkifejezések (differenciálformák)

Ahogy később látni fogjuk, sokszor kényelmes a vonalintegrált „differenciál" alakban kifejezni:

$$\int_A^B M\,dx + N\,dy + P\,dz,$$

amit már a 16.2. alfejezetben említettünk. Ezeket az integrálokat viszonylag könnyű számítani, ha $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ egy f függvény teljes differenciálja. Ebben az esetben

$$\begin{aligned}\int_A^B M\,dx + N\,dy + P\,dz &= \int_A^B \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \\ &= \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(B) - f(A). \qquad \text{1. Tétel}\end{aligned}$$

Azaz

$$\int_A^B df = f(B) - f(A)$$

pontosan úgy, mint egyváltozós esetben.

DEFINÍCIÓ: Egzakt differenciálkifejezések (differenciálformák)

Egy $M(x,y,z)dx+N(x,y,z,)dy+P(x,y,z)dz$ alakú kifejezést **differenciálkifejezésnek**, vagy **differenciálformának** nevezünk. A differenciálforma **egzakt** a tér D tartományán, ha

$$Mdx+Ndy+Pdz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=df$$

valamilyen f skalár függvényre.

A $Mdx+Ndy+Pdz$ differenciálforma egzaktságának ellenőrzése

A $Mdx+Ndy+Pdz$ differenciálforma akkor és csak akkor egzakt, ha

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial z},\quad \frac{\partial M}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial x},\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}. \tag{16.11}$$

Ez egyenértékű azzal, hogy $\mathbf{F}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}+P\mathbf{k}$ konzervatív.

4. PÉLDA: **Differenciálforma egzaktságának megmutatása**

Mutassuk meg, hogy az $y\,dx+x\,dy+4dz$ egzakt forma, és számítsuk ki az

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,dx+x\,dy+4dz$$

integrált az $(1,1,1)$ és $(2,3,-1)$ pontok közötti szakaszon!

Megoldás: Legyen $M=y$, $N=x$, $P=4$, és ellenőrizzük a (16.11) egyenlőségeket:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0=\frac{\partial N}{\partial z},\quad \frac{\partial M}{\partial z}=0=\frac{\partial P}{\partial x},\quad \frac{\partial N}{\partial x}=1=\frac{\partial M}{\partial y}.$$

Ezek az egyenlőségek azt jelentik, hogy $y\,dx+x\,dy+4dz$ egzakt, így

$$y\,dx+x\,dy+4dz=df$$

fennáll valamilyen f függvényre. f-et egy konstans erejéig meghatározhatjuk a

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=4. \tag{16.12}$$

egyenletekből. Az elsőből

$$f(x,y,z)=xy+g(y,z).$$

A másodikból

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x+\frac{\partial g}{\partial y}=x,\quad \text{azaz}\quad \frac{\partial g}{\partial y}=0.$$

Következésképp g csak z-től függ,

$$f(x,y,z)=xy+h(z).$$

(16.12) harmadik egyenletéből

$$\frac{\partial f}{\partial z}=0+\frac{dh}{dz}=4,\quad \text{azaz,}\quad h(z)=4z+C.$$

Így

$$f(x,y,z)=xy+4z+C.$$

Az integrál értéke pedig

$$f(2,3,-1)-f(1,1,1)=2+C-(5+C)=-3.$$ □

16.3. Feladatok

Erőtér konzervativitásának ellenőrzése

Az 1–6. feladatokban mely erőterek konzervatívak, és melyek nem?

1. $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
2. $\mathbf{F} = (y\sin z)\mathbf{i} + (x\sin z)\mathbf{j} + (xy\cos z)\mathbf{k}$
3. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} - y\mathbf{k}$
4. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F} = (z+y)\mathbf{i} + z\mathbf{j} + (y+x)\mathbf{k}$
6. $\mathbf{F} = (e^x\cos y)\mathbf{i} - (e^x\sin y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Potenciálfüggvény meghatározása

A 7–12. feladatokban keressük meg az $\mathbf{F}$ erőtér potenciálfüggvényét!

7. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$
8. $\mathbf{F} = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$
9. $\mathbf{F} = e^{y+2z}(\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2x\mathbf{k})$
10. $\mathbf{F} = (y\sin z)\mathbf{i} + (x\sin z)\mathbf{j} + (xy\cos z)\mathbf{k}$
11. $\mathbf{F} = (\ln x + \sec^2(x+y))\mathbf{i} + \left(\sec^2(x+y) + \dfrac{y}{y^2+z^2}\right)\mathbf{j} + \dfrac{z}{y^2+z^2}\mathbf{k}$
12. $\mathbf{F} = \dfrac{y}{1+x^2y^2}\mathbf{i} + \left(\dfrac{x}{1+x^2y^2} + \dfrac{z}{\sqrt{1-y^2z^2}}\right)\mathbf{j} + \left(\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2z^2}} + \dfrac{1}{z}\right)\mathbf{k}$

Vonalintegrálok kiszámítása

A 13–17. feladatokban mutassuk meg, hogy a differenciálforma egzakt! Azután számítsuk ki az integrálokat!

13. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(2,3,-6)} 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$
14. $\displaystyle\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$
15. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy\,dx + (x^2 - z^2)\,dy - 2yz\,dz$
16. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(3,3,1)} 2x\,dx - y^2\,dy - \frac{4}{1+z^2}\,dz$
17. $\displaystyle\int_{(1,0,0)}^{(0,1,1)} \sin y\cos x\,dx + \cos y\sin x\,dy + dz$

Jóllehet, a 18–22. feladatokban szereplő függvények nincsenek az egész R^3 téren definiálva, az érintett tartományok egyszeresen összefüggőek, így alkalmazhatjuk a (16.9) egyenlőségeket a konzervatív tulajdonság kimutatására. Határozzuk meg mindegyik potenciálfüggvényét is, és számítsuk ki az integrálokat!

18. $\displaystyle\int_{(0,2,1)}^{(1,\pi/2,2)} 2\cos y\,dx + \left(\frac{1}{y} - 2x\sin y\right)dy + \frac{1}{z}dz$
19. $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} 3x^2dx + \frac{z^2}{y}dy + 2z\ln y\,dz$
20. $\displaystyle\int_{(1,2,1)}^{(2,1,1)} (2x\ln y - yz)dx + \left(\frac{x^2}{y} - xz\right)dy - 2yz\,dz$
21. $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{1}{y}dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{y}{z^2}dz$
22. $\displaystyle\int_{(-1,-1,-1)}^{(2,2,2)} \frac{2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz}{x^2+y^2+z^2}$
23. **A 4. példa újra:** Számítsuk ki a 4. példabeli
$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} ydx + xdy + 4dz$$
integrált! Például úgy, hogy felírjuk az $(1,1,1)$-ből induló és $(2,3,-1)$-be érkező szakasz paraméteres egyenleteit, és kiszámítjuk az $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ függvény vonalintegrálját a szakasz mentén. Mivel $\mathbf{F}$ konzervatív, az integrál független az úttól.
24. Számítsuk ki az $\int_C x^2dx + yzdy + (y^2/2)dz$ integrált a $(0,0,0)$ és $(0,3,4)$ pontokat összekötő C egyenes szakasz mentén!

További példák és alkalmazások

Úttól való függetlenség: Mutassuk meg, hogy a 25–26. feladatok integráljainak értéke független az A-t B-vel összekötő úttól!

25. $\displaystyle\int_A^B z^2dx + 2ydy + 2xzdz$
26. $\displaystyle\int_A^B \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

A 27–28. feladatokban adjuk meg $\mathbf{F}$ egy potenciálfüggvényét!

27. $\mathbf{F} = \dfrac{2x}{y}\mathbf{i} + \left(\dfrac{1-x^2}{y^2}\right)\mathbf{j}$
28. $\mathbf{F} = (e^x\ln y)\mathbf{i} + \left(\dfrac{e^x}{y} + \sin z\right)\mathbf{j} + (y\cos z)\mathbf{k}$
29. **Munka, különböző utakon:** Adjuk meg az $\mathbf{F} = (x^2 + y)\mathbf{i} + (y^2 + x)\mathbf{j} + ze^2\mathbf{k}$ erőtér által végzett munkát, ha az út az $(1,0,0)$ pontból az $(1,0,1)$ pontba:

(a) Az $x = 1, y = 0, 0 \le z \le 1$ egyenes szakasz,

(b) Az $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (t/2\pi)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$ csavarvonal,

(c) Az x-tengely $(1,0,0)$-tól a $(0,0,0)$ pontig, azután a $z = x^2, y = 0$ parabola $(0,0,0)$-tól az $(1,0,1)$ pontig!

30. Munka, különböző utakon:
Adjuk meg az $\mathbf{F} = e^{yz}\mathbf{i} + (xze^{yz} + 2\cos y)\mathbf{j} + (xye^{yz} + \sin y)\mathbf{k}$ erőtér által végzett munkát, ha az út az $(1,0,1)$ pontból az $(1,\pi/2,0)$ pontba:

(a) Az $x = 1$, $y = \pi t/2$, $z = 1 - t$, $0 \le t \le 1$ egyenes szakasz,

(b) Az $(1,0,1)$ pontból az origóba vezető egyenes szakasz, majd onnan az $(1,\pi/2,0)$ pontba vezető szakasz,

(c) Az $(1,0,1)$ pontból az $(1,0,0)$ pontba vezető szakasz, innen az x-tengely mentén az origóba, majd innen az $y = \pi x^2/2$, $z = 0$ parabolán az $(1,\pi/2,0)$ pontig!

31. Munka, kétféleképpen: Legyen $\mathbf{F} = \nabla(x^3y^2)$, és C legyen az xy-síkban az a $(-1,1)$ és $(1,1)$ pontokat összekötő azon görbe, amelyik $(-1,1)$-től az origóig, majd onnan $(1,1)$-ig két egyenes szakaszból áll. Számítsuk ki az $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ integrált kétféleképpen:

(a) Adjuk meg a szakaszok paraméterezését, és számítsuk ki az integrált!

(b) Használjuk az $f(x,y) = x^3y^2$ potenciálfüggvényt!

32. Integrál különböző utakon: Számítsuk ki az $\int_C 2x\cos y\,dx - x^2\sin y\,dy$ integrált az xy-sík következő görbéi mentén:

(a) Az $y = (x-1)^2$ parabola $(1,0)$-ból $(0,1)$-be.

(b) Az egyenes szakasz $(-1,\pi)$-ből $(1,0)$-ba.

(c) Az x-tengely $(-1,0)$-ból $(1,0)$-ba.

(d) Az $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ asztroid mentén óramutató járásával ellentétes irányban $(1,0)$-tól vissza $(1,0)$-ba.

33. (a) Egzakt differenciálforma: Mi a-nak, b-nek, c-nek az aránya, ha a következő differenciálkifejezés egzakt?

$$(ay^2 + 2czx)dx + y(bx + cz)dy + (ay^2 + cx^2)dz$$

(b) Gradiens mező: A b és c paraméterek milyen értékeire lesz az

$$\mathbf{F} = (y^2 + 2czx)\mathbf{i} + y(bx + cz)\mathbf{j} + (y^2 + cx^2)\mathbf{k}$$

vektormező gradiensmező ?

34. Vonalintegrál gradiense: Tegyük fel, hogy $\mathbf{F} = \nabla f$ egy konzervatív mező, és

$$g(x,y,z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

Mutassuk meg, hogy $\nabla g = \mathbf{F}$!

35. A legkisebb munka útja: Az a feladatunk, hogy meghatározzuk, egy $\mathbf{F}$ erőtér milyen úton visz egy részecskét a legkevesebb munkával egy adott pontból a másikba. Egy gyors ellenőrzés azt mutatja, hogy $\mathbf{F}$ konzervatív. Mi lesz a válaszunk? Indokoljuk!

36. Kísérlet: Kísérlettel azt tapasztaljuk, hogy az $\mathbf{F}$ erőtérben egy C_1 görbén mozgatva egy tárgyat az A pontból a B-be fele annyi munka, mint egy C_2 görbén. Mit mondhatunk az erőtérről?

37. Állandó erő munkája: Mutassuk meg, hogy az állandó $\mathbf{F} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ erőtér által végzett munka az A ponttól a B pontig mindig $W = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}$!

38. Gravitációs erőtér:

(a) Adjuk meg az

$$\mathbf{F} = -GmM\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

gravitációs erőtér egy potenciálfüggvényét, ahol G, m, és M konstansok.

(b) Legyen P_1 és P_2 két pont rendre s_1, ill. s_2 távolságra az origótól. Mutassuk meg, hogy az (a) pontban adott erőtér által végzett munka, miközben egy részecskét P_1-ből P_2-be visz,

$$GmM\left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}\right).$$

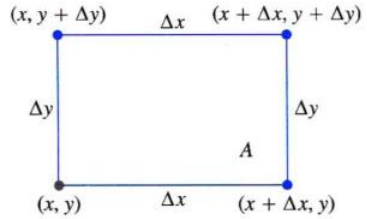
16.4. Green-tétel a síkban

A 16.2. alfejezet 16.2. táblázatából tudjuk, hogy minden $\int_C M\,dx + N\,dy$ integrál felírható, mint egy $\int_a^b \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$ áramlási integrál. Ha az integrál független az úttól, akkor a vektormező konzervatív (a tartományra vonatkozó bizonyos feltételek mellett), és akkor a potenciálfüggvényből az integrálok könnyen számíthatók. Ebben az alfejezetben olyan vektormezőkkel foglalkozunk, amelyek nem konzervatívak. A Green-tétel segítségével a kétdimenziós vektormezők görbementi integráljait, zárt görbék esetén, átírhatjuk kettős integrállá, ami gyakran leegyszerűsíti a számításokat.

Mi sebességvektorterek terminológiáját használjuk, mert azt könnyű elképzelni, de a Green-tétel állításai természetesen bármely más vektormező esetén is érvényesek, ha egyébként a tartományra és a függvényekre tett feltételek teljesülnek.

Divergencia

A Green-tételhez két új fogalomra van szükségünk. Az első a vektormező *divergenciája* egy pontban, amit a fizikusok és a mérnökök *fluxussűrűségnek* is hívnak. Ez a következő.



16.24. ÁBRA: A vektormező (x,y) pontbeli divergenciájának (fluxussűrűségének) definíciójában szereplő téglalap.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{F}(x,y) = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$ egy áramló folyadék sebességvektormezője a síkban, és M-nek és N-nek az első parciális deriváltjai folytonosak egy T tartományon. Legyen (x,y) a T tartomány egy pontja, és A legyen egy olyan kis téglalap, aminek egyik sarka (x,y), és teljes egészében T-ben van (16.24. ábra). A téglalap oldalai párhuzamosak a tengelyekkel, és Δx, Δy hosszúak. A folyadék az alsó oldalon keresztül körülbelül

$$\mathbf{F}(x,y)\cdot(-\mathbf{j})\Delta x = -N(x,y)\Delta x$$

gyorsasággal folyik kifelé a téglalapból. Ugyanis az áramlási sebességvektor $\mathbf{F}$ komponense a kifelé mutató normálvektor irányában az (x,y) pontban $-N(x,y)$, és ezt kell szorozni az ívhosszal, Δx-szel. Ha a sebesség pl. méter per másodperc, akkor a kifolyási sebesség méterszer méter per másodperc, ami négyzetméter per másodperc, hiszen síkban vagyunk. A kifolyási sebességet a többi oldalon is hasonlóképp kapjuk.

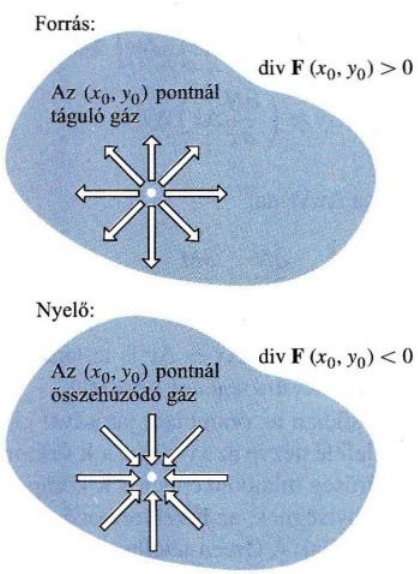
Kifolyási sebesség:

Felül:	$\mathbf{F}(x,y+\Delta y)\cdot\mathbf{j}\Delta x = N(x,y+\Delta y)\Delta x$
Alul:	$\mathbf{F}(x,y)\cdot(-\mathbf{j})\Delta x = -N(x,y)\Delta x$
Jobbra:	$\mathbf{F}(x+\Delta x,y)\cdot\mathbf{i}\Delta y = M(x+\Delta x,y)\Delta y$
Balra:	$\mathbf{F}(x,y)\cdot(-\mathbf{i})\Delta y = M(x,y)\Delta y$

Összeadva a szemközti oldalakat:

$$\text{Alul}+\text{felül:}\quad (N(x,y+\Delta y)-N(x,y))\Delta x \approx \left(\frac{\partial N}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x,$$

$$\text{Jobbra}+\text{balra:}\quad (M(x+\Delta x,y)-M(x,y))\Delta y \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y.$$



16.25. ÁBRA: Ha a gáz (x_0,y_0)-ban kiterjedőben van, az áramlási térnek itt pozitív a divergenciája, ha éppen összehúzódik, akkor pedig negatív.

Összeadva ezeket a mennyiségeket:

$$\text{Fluxus a határon} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y.$$

Ha a téglalap $\Delta x\Delta y$ területével osztunk, akkor a fluxussűrűség egy közelítését kapjuk.

$$\frac{\text{Fluxus a határon}}{\text{téglalap területe}} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right).$$

Végül, ha Δx és Δy tartanak nullához, az $\mathbf{F}$ vektormező fluxussűrűségét, vagy ahogy a matematikában hívjuk, a divergenciáját kapjuk az (x,y) pontban. Jelölése $\operatorname{div}\mathbf{F}$.

DEFINÍCIÓ: Divergencia (fluxussűrűség)

Az $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ vektormező **divergenciája (fluxussűrűsége)** az (x,y) pontban

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}. \tag{16.13}$$

Szemléletesen, ha például valamilyen gáz az (x_0,y_0) pontban éppen kiterjed, akkor az áramlás sebességvektorai elfelé mutatnak a ponttól, és mivel a gáz kifelé folyik az (x_0,y_0)-t tartalmazó kicsi téglalapból, a $\mathbf{F}$ divergenciája pozitív. Ha a gáz összehúzódik, a divergencia negatív lesz (16.25. ábra).

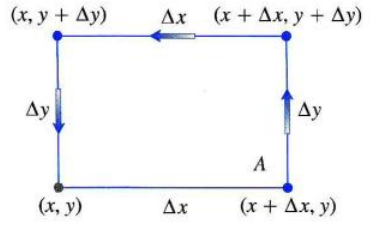
1. PÉLDA: **Divergencia meghatározása**

Adjuk meg $\mathbf{F}(x,y) = (x^2-y)\mathbf{i} + (xy-y^2)\mathbf{j}$ divergenciáját!

Megoldás: A (16.13) képletet használjuk:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{F} &= \frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2-y)+\frac{\partial}{\partial y}(xy-y^2)\\ &= 2x+x-2y = 3x-2y.\end{aligned}$$

□



16.26. ÁBRA: A téglalap, aminek segítségével a rotációt (cirkuláció sűrűséget) definiáljuk a vektormező (x,y) pontjában.

Tengely körüli forgás: a rotáció k-komponense

A másik dolog, amire a Green-tételhez szükségünk van az, hogy mérni tudjuk, hogy síktartományon áramló folyadék esetén a tartomány egy pontjában hogyan forog egy lapátkerék. Ez azt fejezi ki, hogy a folyadék hogyan forog körbe olyan tengelyek körül amelyek a tartományra merőlegesek. Fizikusok ezt a mennyiséget *cirkulációsűrűségnek* is nevezik. A fogalom bevezetéséhez térjünk vissza az

$$\mathbf{F}(x,y) = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$$

sebességmezőhöz és az A téglalaphoz. Ezt a téglalapot újrarajzoltuk a 16.26. ábrán.

$\mathbf{F}$-nek az óramutató járásával ellentétes irányú cirkulációja az A tartomány határán úgy adódik ki, mint az áramlások összege a négy oldal mentén. Az alsó él mentén az áramlás körülbelül

$$\mathbf{F}(x,y)\cdot\mathbf{i}\Delta x = M(x,y)\Delta x.$$

Ezen az oldalon az érintő iránya $\mathbf{i}$, így ez a mennyiség az $\mathbf{F}(x,y)$ sebesség $\mathbf{i}$ irányú összetevője, szorozva az ívhosszal. A többi oldalon is hasonlóképpen járunk el.

$$\begin{aligned}
&\text{Felül:} && \mathbf{F}(x,y+\Delta y)\cdot(-\mathbf{i})\Delta x = -M(x,y+\Delta y)\Delta x\\
&\text{Alul:} && \mathbf{F}(x,y)\cdot(\mathbf{i})\Delta x = M(x,y)\Delta x\\
&\text{Jobbra:} && \mathbf{F}(x+\Delta x,y)\cdot\mathbf{j}\Delta y = N(x+\Delta x,y)\Delta y\\
&\text{Balra:} && \mathbf{F}(x,y)\cdot(-\mathbf{j})\Delta y = -N(x,y)\Delta y
\end{aligned}$$

Összeadva a szemközti oldalakat:

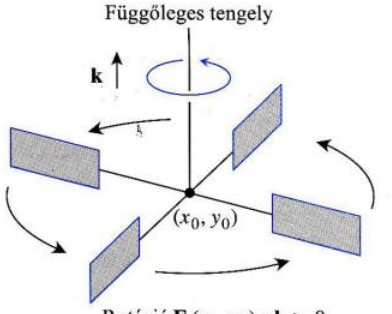
$$\begin{aligned}
\text{Alul}+\text{felül:} &\quad -(M(x,y+\Delta y)-M(x,y))\Delta x \approx -\left(\frac{\partial M}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x,\\
\text{Jobbra}+\text{balra:} &\quad (N(x+\Delta x,y)-N(x,y))\Delta y \approx \left(\frac{\partial N}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y.
\end{aligned}$$

Összeadva ezeket a mennyiségeket, és elosztva $\Delta x\Delta y$-nal

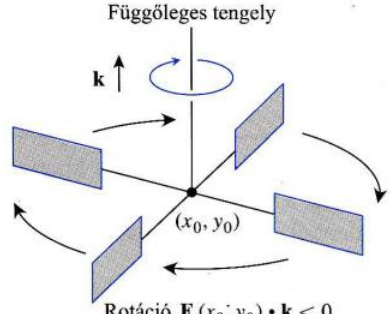
$$\frac{\text{téglalap kerülete menti cirkuláció}}{\text{téglalap területe}} \approx \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Azt a határértéket, ahová ez a kifejezés tart, amikor Δx és Δy is tartanak a nullához, az $\mathbf{F}$ vektormező (x,y) pontbeli *cirkulációsűrűségének* nevezzük.

A cirkulációsűrűség pozitív, ha a forgás a síkban az óramutató járásával ellentétes az xy-síkra merőleges tengely körül, lefelé nézve az xy-síkra, a $\mathbf{k}$ vektor hegye irányából (16.27. ábra). A cirkulációsűrűség tulajdonképpen a $\mathbf{k}$-komponense egy sokkal általánosabban definiált mennyiségnek, az $\mathbf{F}$ vektormező rotációjának, amit a 16.7. alfejezetben fogunk definiálni. A Green-tételhez csak erre a $\mathbf{k}$-komponensre lesz szükségünk.



Rotáció $\mathbf{F}(x_0,y_0)\cdot\mathbf{k} > 0$
Óramutató járásával ellentétes cirkuláció



Rotáció $\mathbf{F}(x_0,y_0)\cdot\mathbf{k} < 0$
Óramutató járásával megegyező cirkuláció

16.27. ÁBRA: Ha egy összenyomhatatlan folyadék áramlik a síkon, akkor a rotáció $\mathbf{k}$-komponense azt méri, hogy milyen gyorsan forog a folyadék egy pontban. A $\mathbf{k}$-komponens pozitív, ha a forgás óramutató járásával ellentétes, negatív, ha azzal megegyező irányú.

DEFINÍCIÓ: A rotáció k-komponense (cirkulációsűrűség)

Egy $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ vektormező **rotációjának k-komponense (cirkulációsűrűsége)** az (x,y) pontban a

$$(\text{rot}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \tag{16.14}$$

skalár mennyiség.

Ha víz áramlik az xy-sík egy tartományán vékony rétegben, akkor a rotáció $\mathbf{k}$-komponense az (x_0,y_0) pontban azt mutatja meg, hogy milyen irányban és milyen gyorsan forogna egy kis lapátkerék, ha a tengelyét az (x_0,y_0) pontba az xy-síkra merőlegesen állítanánk (16.27. ábra).

2. PÉLDA: **A rotáció k-komponensének meghatározása**

Adjuk meg az

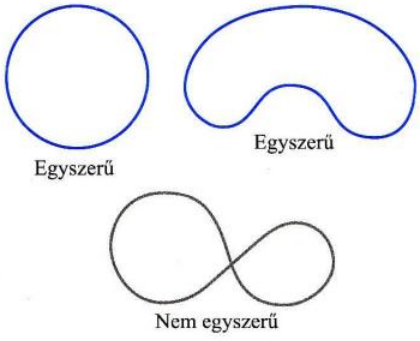
$$\mathbf{F}(x,y) = (x^2 - y)\mathbf{i} + (xy - y^2)\mathbf{j}$$

vektormező rotációjának **k**-komponensét!

Megoldás: A (16.14) képlet alapján:

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xy - y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y) = y + 1. \qquad \square$$

A Green-tétel két formája



16.28. ÁBRA: A Green-tétel bizonyításánál megkülönböztetünk egyszerű és nem egyszerű, zárt görbét. Egyszerű görbe nem metszi át saját magát.

A Green-tétel egyik alakja azt mondja, hogy bizonyos feltételek mellett a sík egyszerű, zárt görbéjén számított fluxust (amit mi kifelé mutató normálvektorral definiáltunk) úgy is kiszámíthatjuk, hogy a zárt görbe által határolt tartományon integráljuk a vektormező divergenciáját (16.28. ábra).

3. TÉTEL: **Green-tétel normálvektoros alakja (fluxusra vonatkozó)**

Az $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ vektormező (kifelé mutató normálvektorral számított) fluxusa egy egyszerű, zárt C görbén egyenlő $\mathrm{div}\,\mathbf{F}$ integráljával azon a T tartományon, amit a C görbe határol. Képlettel:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \oint_C M\, dy - N\, dx = \iint_T \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx\, dy. \qquad (16.15)$$

fluxus — divergencia integrálja

A Green-tétel másik alakja azt mondja, hogy egy egyszerű, zárt görbe mentén, az óramutató járásával ellentétes körüljárással számított cirkulációja egy vektormezőnek számítható úgy, hogy a rotáció **k**-komponensét integráljuk a zárt görbe által határolt tartományon.

4. TÉTEL: **Green-tétel érintővektoros alakja (cirkulációra vonatkozó)**

Az $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ vektormező óramutató járásával ellentétes körüljárással számított cirkulációja egy egyszerű, zárt C görbe mentén egyenlő $(\mathrm{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}$ integráljával a zárt görbe által határolt T tartományon. Képlettel:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \oint_C M\, dx + N\, dy = \iint_T \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy. \qquad (16.16)$$

óramutató járásával ellentétes körüljárással számolt cirkuláció — rotáció integrálja

A Green-tétel két formája ekvivalens. A (16.15) egyenlőséget alkalmazva az $\mathbf{G}_1 = N\mathbf{i} - M\mathbf{j}$ mezőre a (16.16) egyenlőséget, a (16.16) egyenlőséget alkalmazva a $\mathbf{G}_2 = -N\mathbf{i} + M\mathbf{j}$ mezőre a (16.15) egyenlőséget kapjuk.

Matematikai feltételek

A Green-tételhez néhány feltételnek teljesülnie kell. Először is, M-re és N-re kellenek olyan feltételek, hogy az integrálok létezzenek. A szokásos feltételek, hogy parciális deriváltjaik legyenek folytonosak egy olyan tartomány minden pontjában, ami C-t és T-t tartalmazza, elegendőek. Másodszor, feltételeink vannak a C görbére. Annak egyszerű, zárt görbének kell lennie, olyan ívekből összeállítva, amelyeken M és N integrálhatóak. A szokásos feltétel az, hogy ezek a részívek legyenek sima görbék. A Green-tételnek az a bizonyítása, amit itt most majd közlünk, a T tartomány alakjára is tesz megszorításokat. Olyan bizonyításokat, amelyek kevesebb feltételt használnak, magasabb szintű könyvekben

találhatunk. (Mint minden más tételt, a Green-tételt is csak abban az esetben használjuk, ha biztosan tudjuk, hogy a megkövetelt feltételek teljesülnek. Ha akár csak egyetlen pont is van, ahol ezek nem teljesülnek, hamis eredményre juthatunk.) Először lássunk egy példát!

3. PÉLDA: **A Green-tétel érvényességének illusztrációja**

Mutassuk meg a Green-tétel érvényességét az

$$\mathbf{F}(x,y) = (x-y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

vektormezőre, ha a zárt görbe a

$$C: \quad \mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

körvonal!

Megoldás: A tétel jelöléseivel:

$$M = \cos t - \sin t, \quad dx = d(\cos t) = -\sin t\, dt,$$
$$N = \cos t, \quad dy = d(\sin t) = \cos t\, dt,$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = 0.$$

A (16.15) egyenlőség két oldala:

$$\oint_C M\,dy - N\,dx = \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \sin t)(\cos t\, dt) - (\cos t)(-\sin t\, dt) =$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi$$
$$\iint_T \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_T (1+0)\, dx\, dy =$$
$$= \iint_T dx\, dy = \text{egységkör területe} = \pi.$$

A (16.16) egyenlőség két oldala:

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \sin t)(-\sin t\, dt) - (\cos t)(\cos t\, dt) =$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t + 1)\, dt = 2\pi$$
$$\iint_T \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_T (1-(-1))\, dx\, dy = 2\iint_T dx\, dy = 2\pi. \qquad \square$$

A Green-tétel alkalmazása vonalintegrálok kiszámítására

Ha egy olyan zárt görbén kell integrálnunk, amelyik több egymáshoz csatlakozó darabból áll, amelyeket különböző paraméterezéssel tudunk csak megadni, akkor a vonalintegrál számítása meglehetősen hosszadalmas. Előfordul azonban, hogy a Green-tétel feltételei teljesülnek, és a görbe által határolt tartományra a kettős integrált könnyen fel tudjuk írni.

4. PÉLDA: **Vonalintegrál számítása Green-tétellel**

Számítsuk ki a

$$\oint_C xy\,dy - y^2\,dx$$

integrált, ahol C az a négyzetvonal, amit az első síknegyedben a koordinátatengelyek és az $x = 1$, $y = 1$ egyenesek szakaszai alkotnak!

Megoldás: Bármelyik alakját használhatjuk a Green-tételnek, hogy a vonalintegrált a négyzeten való integrállá írjuk át.

1. A fluxusra vonatkozó alak, (16.15) egyenlőség: $M = xy$, $N = y^2$ és C, ill. T a négyzetvonal, ill. a négyzet belseje.

$$\oint_C xy\,dy - y^2\,dx = \iint_T (y+2y)dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 3y\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \Big[3xy\Big]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 3y\,dy = \frac{3}{2}\Big[y^2\Big]_0^1 = \frac{3}{2}.$$

2. A cirkulációra vonatkozó alak, (16.16) egyenlőség:

$$\oint_C -y^2\,dx + xy\,dy = \iint_T (y-(-2y))dx\,dy = \frac{3}{2}. \qquad \square$$

5. PÉLDA: **Fluxus meghatározása**

Számítsuk ki az $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ vektormező fluxusát (kifelé mutató normálissal) az $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ egyenesek által adott négyzetvonalon!

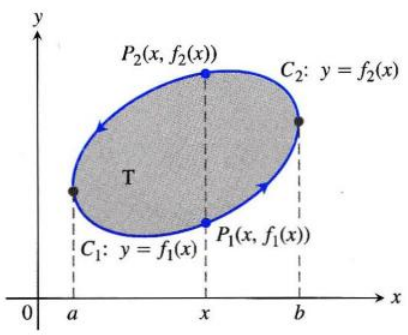
Megoldás: A fluxus vonalintegrállal való meghatározása négy integrál kiszámítását igényelné a négyzet négy oldalán. A Green-tétellel egyetlen kettős integrált számolunk. $M = x$, $N = y^2$ választással

$$\text{Fluxus} = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \oint_C M\,dy - N\,dx =$$

$$= \iint_T \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\,dy = \qquad \text{Green-tétel}$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1+2y)dx\,dy = \int_{-1}^1 \Big[x+2xy\Big]_{x=-1}^{x=1} dy =$$

$$= \int_{-1}^1 (2+4y)dy = \Big[2y+2y^2\Big]_{-1}^1 = 4. \qquad \square$$



16.29. ÁBRA: A határoló C görbét két részre bontjuk, C_1-re, ami az $y = f_1(x)$ függvény grafikonja, és C_2-re, ami az $y = f_2(x)$ függvény grafikonja.

A Green-tétel bizonyítása speciális tartományokra: Legyen a C egyszerű, zárt görbe az xy-síkban olyan, hogy a tengelyekkel párhuzamos egyenesekkel legfeljebb két közös pontja van. Legyen a T tartomány az, amit C közrezár, és tegyük fel, hogy az M, N függvényeknek folytonos parciális deriváltjai vannak egy olyan tartományon, ami T-t és C-t tartalmazza. A Green-tétel cirkulációra vonatkozó változatát bizonyítjuk:

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_T \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy. \qquad (16.17)$$

A 16.29. ábra mutatja, hogyan bontjuk fel C-t két irányított részre:

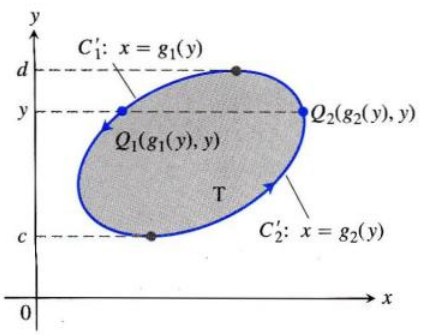
$$C_1 : y = f_1(x),\ a \le x \le b, \quad C_2 : y = f_2(x),\ b \ge x \ge a.$$

Minden a és b közötti értékre a $\partial M/\partial y$ függvényt integráljuk y szerint $y = f_1(x)$-től $y = f_2(x)$-ig, és azt kapjuk, hogy

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy = \Big[M(x,y)\Big]_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} = M(x,f_2(x)) - M(x,f_1(x)).$$

Ezután ezt integrálhatjuk x szerint a-tól b-ig:

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy\,dx &= \int_a^b [M(x,f_2(x)) - M(x,f_1(x))]dx \\ &= -\int_a^b M(x,f_2(x))dx - \int_a^b M(x,f_1(x))dx \\ &= -\int_{C_2} M\,dx - \int_{C_1} M\,dx \\ &= -\oint_C M dx.\end{aligned}$$



16.30. ÁBRA: A határoló C görbét két részre bontjuk, C_1'-re, ami az $x = g_1(y)$ függvény grafikonja, és C_2'-re, ami az $x = g_2(y)$ függvény grafikonja.

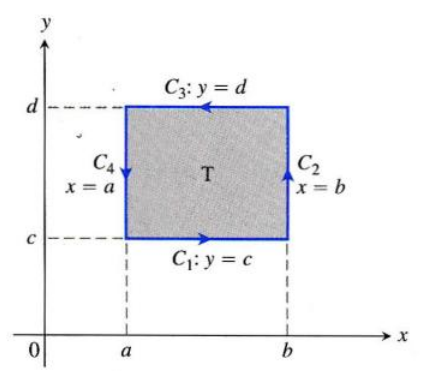
Következésképp

$$\oint_C M\,dx = \iint_T \left(-\frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{16.18}$$

A (16.18) egyenlőség a fele annak, amit bizonyítani akarunk. A másik felét úgy vezetjük le, hogy a $\partial N/\partial x$ függvényt integráljuk x szerint, majd y szerint, ahogy a 16.30. ábra mutatja. Láthatjuk, hogy itt C szintén két irányított darabra van felbontva: $C_1' : x = g_1(y)$, $d \geq y \geq c$ és $C_2' : x = g_2(y)$, $c \leq y \leq d$. A kétszeres integrál eredménye:

$$\oint_C N\,dy = \iint_T \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) dx\,dy. \tag{16.19}$$

A (16.18) és (16.19) egyenlőségeket összeadva a tétel állítását kapjuk. □



16.31. ÁBRA: Ahhoz, hogy bebizonyítsuk a Green-tételt téglalapvonalra, négy részre osztjuk a határt.

A bizonyítás kiterjesztése más tartományokra

A bizonyítás, amit az imént adtunk, nem érvényes olyan téglalaptartományra, ami a 16.31. ábrán látható, mert az $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ egyeneseknek nem csak két közös pontjuk van a határral. Ha a határoló görbét négy irányított szakaszra bontjuk

$$\begin{aligned} &C_1 : y = c,\ a \leq x \leq b, && C_2 : x = b,\ c \leq y \leq d, \\ &C_3 : y = d,\ b \geq x \geq a, && C_4 : x = a,\ d \geq y \geq c, \end{aligned}$$

az érvelésünket a következőképpen folytathatjuk. Úgy haladva, mint az előbb

$$\begin{aligned}\int_c^d \int_a^b \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) dx\,dy &= \int_c^d (N(b,y) - N(a,y))\,dy \\ &= \int_c^d N(b,y)dy + \int_d^c N(a,y)dy \\ &= \int_{C_2} N dy + \int_{C_4} N dy. \end{aligned} \tag{16.20}$$

Mivel y a C_1 és C_3 görbék mentén konstans, $\int_{C_1} N\,dy = \int_{C_3} N\,dy = 0$, így ezeket hozzáadhatjuk a (16.20) jobboldalához anélkül, hogy az egyenlőség megszűnne.

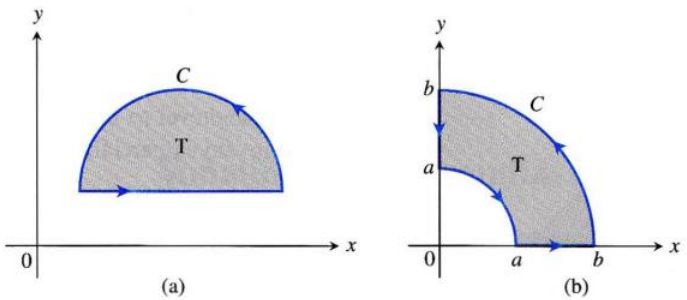
$$\int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x} dx\,dy = \oint_C N\,dy. \tag{16.21}$$

Hasonlóképp megmutatható, hogy

$$\int_a^b \int_c^d \frac{\partial M}{\partial y} dy\, dx = -\oint_C M\, dx. \tag{16.22}$$

A (16.22) egyenletet kivonva a (16.21) egyenletből, kapjuk, hogy

$$\oint_C M\, dx + N\, dy = \iint_T \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy.$$



16.32. ÁBRA: Más tartományok, amelyekre a Green-tételt lehet alkalmazni.

Olyan tartományok, mint pl. a 16.32. ábrán láthatóak, minden nagyobb nehézség nélkül kezelhetők. Szintén működik az olyan patkó alakú tartományokra is, mint pl. a 16.33. ábrán, összetéve az R_1, R_2 tartományokat és a határaikat. A Green-tétel érvényes C_1-re és T_1-re, valamint C_2-re és T_2-re:

$$\int_{C_1} M\, dx + N\, dy = \iint_{T_1} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy$$

$$\int_{C_2} M\, dx + N\, dy = \iint_{T_2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Amikor összeadjuk ezt a két integrált, az y-tengelyen levő szakaszokon az integrálok kiejtik egymást, következésképp

$$\oint_C M\, dx + N\, dy = \iint_T \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy,$$

ahol C két egyenes szakaszból áll az x-tengely mentén, $-b$-től $-a$-ig, és a-tól b-ig, valamint két félkörből, a T tartomány pedig az, amit C közrezár.

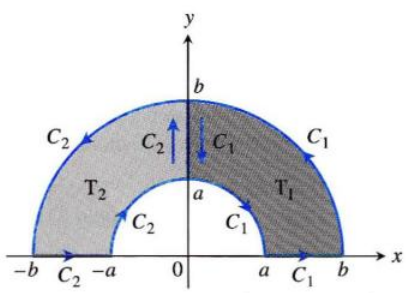
Az ötlet, hogy a vonalintegrált részvonalintegrálok összegére bontsuk, addig alkalmazható, amíg véges sok ilyen összetevőről van szó. A 16.34a ábrán C_1, az óramutató járásával ellentétesen irányítva, a határa T_1-nek, ami az első síknegyedben van, és ugyanígy a többi síknegyedre, C_i a határa a T_i tartománynak $i = 2,3,4$. A Green-tétel alapján

$$\oint_{C_i} M\, dx + N\, dy = \iint_{T_i} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy. \tag{16.23}$$

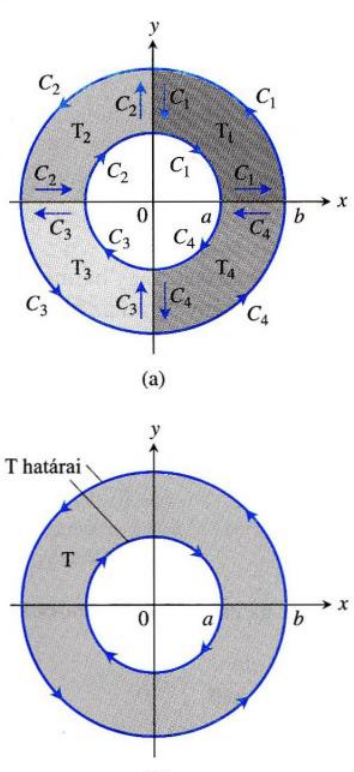
Ha összeadjuk a (16.23) egyenlőségeket $i = 1,2,3,4$-re, akkor

$$\oint_{r=a} M\, dx + N\, dy + \oint_{r=b} M\, dx + N\, dy = \iint_{\cup T_i} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy. \tag{16.24}$$

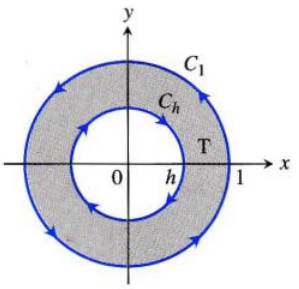
A (16.24) egyenlőség azt mondja, hogy $(\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$ kettős integrálja a T gyűrűtartomány felett egyenlő $M\, dx + N\, dy$ vonalintegráljával a T teljes határán, ha úgy haladunk, hogy a tartomány mindig a bal kezünk felé van (16.34b ábra).



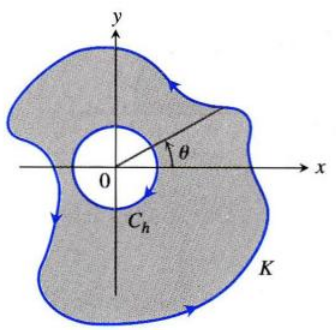
16.33. ÁBRA: A T tartomány, amit két részre osztunk.



16.34. ÁBRA: A T gyűrűtartomány 4 kisebb tartományra bontható. Polárkoordinátákkal a belső kör $r = a$, a külső $r = b$, a tartomány pedig $a \le r \le b$.



16.35. ÁBRA: A Green-tételt alkalmazhatjuk a T gyűrűtartományra a határokon integrálva, ahogy az a 6. példában van.



16.36. ÁBRA: A tartomány, amit C_h és K határolnak.

6. PÉLDA: **A Green-tétel érvényességének ellenőrzése gyűrűtartományon**

Mutassuk meg a Green-tétel érintővektoros alakjának érvényességét ((16.24) egyenlet) a T: $h^2 \le x^2+y^2 \le 1$, $0 < h < 1$ gyűrűtartományon (16.35. ábra), ha

$$M = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad N = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Megoldás: A T tartomány határa

$$C_1: \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

t növekedtével az óramutató járásával ellentétes irányú körüljárással, és

$$C_h: \quad x = h\cos\theta, \quad y = -h\sin\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

θ növekedtével az óramutató járásával megegyező irányú körüljárással. Az M, N függvények parciális deriváltjai folytonosak T-ben. Továbbá:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)(-1)+y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \\ = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

így

$$\iint_T \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_T 0\,dx\,dy = 0.$$

Az $M\,dx+N\,dy$ integrálja a határon

$$\int_C M\,dx+N\,dy = \oint_{C_1} \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2} + \oint_{C_h} \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2} \\ = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t+\sin^2 t)dt - \int_0^{2\pi} \frac{h^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{h^2} d\theta \\ = 2\pi - 2\pi = 0. \qquad \square$$

Az M és N függvények a 6. példában nem folytonosak az origóban, így a Green-tételt nem alkalmazhatjuk a C_1 körre a belsejével. Az origót ki kell hagyni, ahogy ki is hagyjuk, amikor nem tekintjük C_h belsejét.

A 6. példában helyettesíthetnénk a C_1 kört egy ellipszissel, vagy bármely más egyszerű K zárt görbével, ami körülveszi C_h-t, az eredmény ugyanaz lenne:

$$\oint_K (M\,dx+N\,dy) + \oint_{C_h} (M\,dx+N\,dy) = \iint_T \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy = 0,$$

amiből arra következtethetünk, hogy

$$\oint_K (M\,dx+N\,dy) = 2\pi$$

minden ilyen K görbére. Könnyen magyarázhatjuk az eredményt, ha polárkoordinátákra váltunk:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$
$$dx = -r\sin\theta\,d\theta + \cos\theta\,dr, \qquad dy = r\cos\theta\,d\theta + \sin\theta\,dr.$$

Így

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2} = \frac{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,d\theta}{r^2} = d\theta,$$

és θ 2π-vel növekszik, ha egyszer körülmegyünk K-n az óramutató járásával ellentétes irányban.

16.4. Feladatok

A Green-tétel érvényességének megmutatása

Az 1–4. feladatokban mutassuk meg a Green-tétel érvényességét úgy, hogy kiszámítjuk a (16.15) és (16.16) egyenlőség mindkét oldalát az $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ vektormezőre! Az integrálási tartomány minden esetben legyen a T: $x^2 + y^2 \le a^2$ körlap, ill. ennek kerülete, C: $\mathbf{r} = (a\cos t)\mathbf{i} + a(\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$.

1. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$
3. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F} = -x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$

Óramutató járásával ellentétes körüljárással számított cirkuláció és fluxus kifelé mutató normálissal

Az 5–10. feladatokban használjuk a Green-tételt az óramutató járásával ellentétes körüljárással számított cirkuláció és fluxus kifelé mutató normálissal való számítására!

5. $\mathbf{F} = (x-y)\mathbf{i} + (y-x)\mathbf{j}$
   C: négyzet, határai: $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$
6. $\mathbf{F} = (x^2+4y)\mathbf{i} + (x+y^2)\mathbf{j}$
   C: négyzet, határai: $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$
7. $\mathbf{F} = (y^2-x^2)\mathbf{i} + (x^2+y^2)\mathbf{j}$
   C: háromszög, határai: $x = 0, x = 3, y = x$
8. $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} - (x^2+y^2)\mathbf{j}$
   C: háromszög, határai: $y = 0, x = 1, y = x$
9. $\mathbf{F} = (x + e^x \sin y)\mathbf{i} + (x + e^x \cos y)\mathbf{j}$
   C: a $r^2 = \cos 2\theta$ lemniszkátából a jobboldali hurok.
10. $\mathbf{F} = \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)\mathbf{i} + \ln(x^2+y^2)\mathbf{j}$
    C: annak a tartománynak a határa, amit az $1 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi$ polárkoordinátás egyenlőtlenségek definiálnak.

11. Határozzuk meg az óramutató járásával ellentétes körüljárással számított cirkulációt és fluxust kifelé mutató normálissal az $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ vektormezőre az $y = x^2$ és $y = x$ görbékkel határolt tartomány határán!

12. Határozzuk meg az óramutató járásával ellentétes körüljárással számított cirkulációt és fluxust kifelé mutató normálissal az $\mathbf{F} = (-\sin y)\mathbf{i} + (x\cos y)\mathbf{j}$ vektormezőre annak a négyzetnek a határán, amit az $x = \pi/2$ és $y = \pi/2$ egyenesek vágnak ki az első síknegyedből!

13. Mennyi az

$$\mathbf{F} = \left(3xy - \frac{x}{1+y^2}\right)\mathbf{i} + (e^x + \operatorname{arctg} y)\mathbf{j}$$

vektormező kifelé mutató normálissal számított fluxusa az $r = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$ kardioidon?

14. Határozzuk meg az $\mathbf{F} = (y + e^x \ln y)\mathbf{i} + (e^x/y)\mathbf{j}$ vektormezőnek az óramutató járásával ellentétes körüljárással számított cirkulációját annak a tartománynak a határán, amelyet felülről az $y = 3 - x^2$, alulról az $y = x^4 + 1$ görbe határol!

Munka

A 15–16. feladatokban adjuk meg az $\mathbf{F}$ erőtér munkáját, amivel egy részecskét az óramutató járásával ellentétes irányban körbevisz az adott görbén!

15. $\mathbf{F} = 2xy^3\mathbf{i} + 4x^2y^2\mathbf{j}$
    C: Annak a háromszögszerű tartománynak a határa, amely az első síknegyedben van, az x-tengely, az $x = 1$ és az $y = x^3$ görbék határolják.
16. $\mathbf{F} = (4x-2y)\mathbf{i} + (2x-4y)\mathbf{j}$
    C: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ körvonal.

Vonalintegrálok számítása a síkban

Alkalmazzuk a Green-tételt a 17–20. feladatokban!

17. $\oint (y^2\,dx + x^2\,dy)$
    C: háromszög, határai: $x = 0, x + y = 1, y = 0$
18. $\oint (3y\,dx + 2x\,dy)$
    C: a $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \sin x$ tartomány határa.
19. $\oint (6y + x)\,dx + (y + 2x)\,dy$
    C: az $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ kör.
20. $\oint (2x + y^2)\,dx + (2xy + 3y)\,dy$
    C: bármilyen egyszerű, zárt görbe a síkban, amire a Green-tétel érvényes.

Terület számítása Green-tétellel

Ha egy C egyszerű, zárt görbe és az általa körülvett T tartomány kielégítik a Green-tétel feltételeit, akkor T területét számíthatjuk a következő képlettel:

A Green-tétel területképlete

$$T \text{ területe} = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx \qquad (16.25)$$

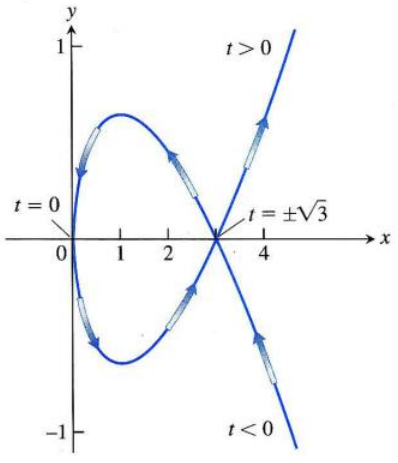
A képletet igazolhatjuk, ha a (16.15) egyenlőséget visszafelé olvassuk:

$$T \text{ területe} = \iint_T dy\,dx = \iint_T \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) dy\,dx =$$
$$= \oint_C \frac{1}{2}x\,dy - \frac{1}{2}y\,dx.$$

Használjuk a Green-tétel területképletét a 21–24. feladatokban adott görbék által határolt területek kiszámítására!

21. Az $\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ kör.
22. Az $\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (b\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ ellipszis.
23. Az $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ asztroid.

24. Az $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \left((t^3/3) - t\right)\mathbf{j}$, $-\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$ görbe (lásd mellékelt ábra).



További példák és feladatok

25. Legyen C egy olyan tartomány határa, amin érvényes a Green-tétel. Használjuk a Green-tételt a következő integrálok kiszámítására!

(a) $\oint_C f(x)dx + g(y)dy$

(b) $\oint_C kydx + hxdy$ (k és h állandó).

26. Csak területtől függő integrál: Mutassuk meg, hogy az

$$\oint_C xy^2dx + (x^2y + 2x)dy$$

integrál értéke akármilyen négyzet mentén csak a négyzet területétől függ, és független attól, hol van ez a négyzet!

27. Mi különleges a következő integrálban?

$$\oint_C 4x^3ydx + x^4dy$$

28. Mi különleges a következő integrálban?

$$\oint_C -y^3dy + x^3dx$$

29. Terület, mint vonalintegrál: Mutassuk meg, hogy ha T egy olyan tartomány a síkon, amit egy szakaszonként sima egyszerű, zárt C görbe határol, akkor

$$T \text{ területe} = \oint_C xdy = -\oint_C ydx.$$

30. Határozott integrál mint vonalintegrál: Tegyük fel, hogy a nemnegatív $y = f(x)$ függvény első deriváltja folytonos az $[a,b]$ intervallumon. Legyen C a határa annak a tartománynak az xy-síkban, amelyet az x-tengely, az f függvény grafikonja és az $x = a$, $x = b$ egyenesek határolnak. Mutassuk meg, hogy

$$\int_a^b f(x)dx = -\oint_C ydx.$$

31. Terület és súlypont: Legyen A egy T tartomány területe, $\bar{x}$ pedig T súlypontjának x-koordinátája. Tegyük fel, T-t egy szakaszonként sima, zárt görbe határolja az xy-síkban. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{2}\oint_C x^2dy = -\oint_C xydx = \frac{1}{3}\oint_C x^2dy - xydx = A\bar{x}.$$

32. Tehetetlenségi nyomaték: Jelölje I_y a 31. feladatban szereplő tartomány y-tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{3}\oint_C x^3dy = -\oint_C x^2ydx = \frac{1}{4}\oint_C x^3dy - x^2ydx = I_y.$$

33. Green-tétel és Laplace-egyenlet: Feltéve, hogy az összes szükséges derivált létezik és folytonos, mutassuk meg, hogy ha $f(x,y)$ kielégíti a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Laplace-egyenletet, akkor

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial f}{\partial x}dy = 0$$

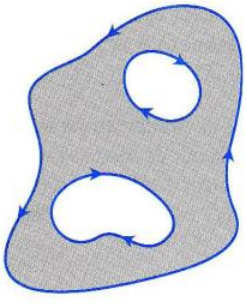
minden olyan zárt görbe mentén, amire a Green-tétel alkalmazható. (Az állítás megfordítható: Ha a vonalintegrál minden zárt görbén nulla, akkor f kielégíti a Laplace-egyenletet.)

34. Munka maximálása: Az összes egyszerű, zárt, sima, az óramutató járásával ellentétesen irányított görbék közül melyik mentén lesz az

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{3}y^3\right)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

vektormező munkája a legnagyobb?
(*Útmutatás*: Hol pozitív (rot $\mathbf{F}$)$\cdot\mathbf{k}$?)

35. Tartományok több lyukkal: A Green-tétel érvényes olyan tartományok esetén is, amelyekben lyukak vannak, ha a tartomány határai egyszerű, zárt és sima görbék, és mindegyiken úgy integrálunk, hogy a körüljárás olyan legyen, hogy a tartomány bal kéz felől essen (16.37. ábra).



16.37. ÁBRA: A Green-tétel érvényes olyan tartományra is, amelyikben több lyuk is van (35. feladat).

(a) Legyen $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, és legyen c az $x^2 + y^2 = a^2$ kör. Számítsuk ki az

$$\oint_C \nabla f \cdot \mathbf{n}\, ds$$

integrál értékét!

(b) Legyen K tetszőleges zárt, sima görbe a síkban, amelyik nem megy át az origón. Mutassuk meg, hogy az integrál értéke attól függ, hogy az origó K-n kívül, vagy belül van!

36. Bendixson-kritérium: Az *áramvonalak* egy síkban áramló folyadéknál azok a sima görbék, amelyeket egy-egy folyadékrészecske követ az áramlás során. Az $\mathbf{F} = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$ vektormező a sebességvektormező, és vektorai az áramvonalak érintőivel párhuzamosak. Mutassuk meg, hogy ha az áramlás egy egyszeresen összefüggő T tartományban zajlik (nincsenek lyukak vagy hiányzó pontok), és $M_x + N_y \neq 0$ ezen a tartományon, akkor nincs zárt áramvonal! Más szóval, egyik részecskének sincs zárt pályagörbéje. Az $M_x + N_y \neq 0$ kritériumot **Bendixson-kritériumnak** hívják zárt pályagörbék nemlétezésére.

37. Igazoljuk a (16.19) egyenlőséget, hogy teljessé tegyük a Green-tétel speciális esetének bizonyítását!

38. Igazoljuk a (16.22) egyenlőséget, hogy teljessé tegyük a Green-tétel kiterjesztését igazoló érvelést!

39. Konzervatív terek rotáció-komponense: Tudunk mondani valamit egy konzervatív, kétdimenziós vektormező rotációjának **k**-komponenséről? Válaszunkat indokoljuk!

40. Konzervatív terek cirkulációja: Ad a Green-tétel valamilyen információt konzervatív terek cirkulációjáról? Összhangban van ez valami mással, amit már tanultunk? Válaszunkat indokoljuk!

Számítógépes vizsgálatok

Cirkuláció meghatározása

A 41–44. feladatokban használjunk számítógépes programot és a Green-tételt, hogy kiszámítsuk az **F** vektormező cirkulációját a C zárt görbén az óramutató járásával ellentétes körüljárással. Hajtsuk végre a következő lépéseket:

(a) Rajzoltassuk ki C-t az xy-síkon!

(b) Határozzuk meg a Green-tétel érintővektoros alakjának $(\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$ integrandusát!

(c) Határozzuk meg a kettős integrál integrálási határait az (a) pontban felvázolt görbe alapján!

41. $\mathbf{F} = (2x-y)\mathbf{i} + (x+3y)\mathbf{j}$, C: $x^2 + 4y^2 = 4$ ellipszis.

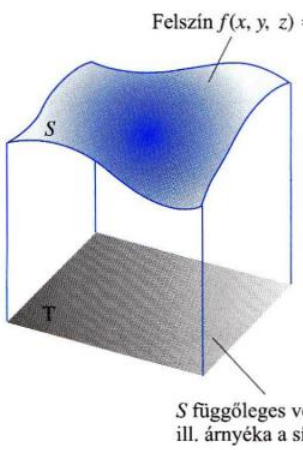
42. $\mathbf{F} = (2x^3 - y^3)\mathbf{i} + (x^3 + y^3)\mathbf{j}$, C: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipszis.

43. $\mathbf{F} = x^{-1}e^y\mathbf{i} + (e^y \ln x + 2x)\mathbf{j}$,
C: annak a tartománynak a határa, amelyet alulról az $y = 1 + x^4$, felülről az $y = 2$ görbék határolnak.

44. $\mathbf{F} = xe^y\mathbf{i} + 4x^2 \ln y\mathbf{j}$,
C: háromszög, melynek csúcsai: $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,4)$.

16.5. Felület felszíne és felületi integrál

Tudjuk, hogyan kell integrálni egy (kétváltozós) függvényt egy síktartományon, de hogyan lehet függvényt integrálni egy görbült felületen? Egy ilyen ún. felületi integrált úgy számítunk ki, hogy átalaktjuk kettős integrállá egy olyan koordinátasíkbeli tartományon, amelyik a felület alatt fekszik (16.38. ábra). Felületi integrálokat használunk pl. ha azt akarjuk meghatározni, hogy mennyi folyadék folyik át egy hártyán, vagy mekkora erő hat felfelé egy ejtőernyőre.



S függőleges vetülete, ill. árnyéka a síkon

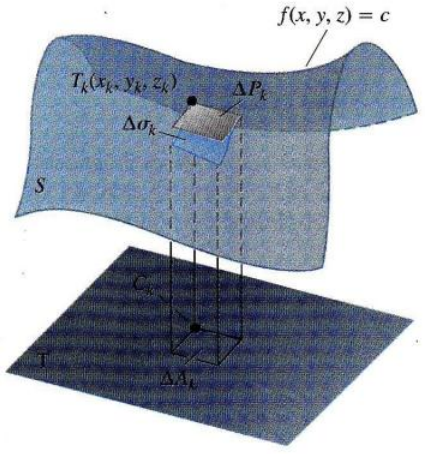
16.38. ÁBRA: Amint hamarosan látni fogjuk, egy $g(x,y,z)$ függvény S felület feletti integrálját ki lehet számítani, mint kettős integrált a felület valamelyik koordinátasíkra eső vetületén.

Felület felszíne

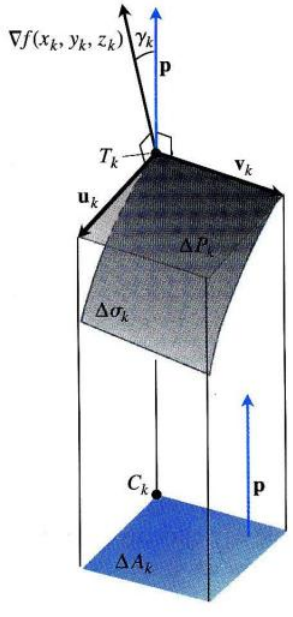
A 16.39. ábra egy felületet mutat az alatta levő síkra eső vetülete fölött. A felület az $f(x,y,z) = c$ egyenlőséggel van definiálva. Ha a felület sima (∇f sehol nem a nulla vektor S-en), akkor definiálhatjuk és ki is számíthatjuk a felszínét a T vetületén vett kettős integrállal. Feltesszük, hogy a felület olyan, hogy a vetületének minden pontja egyetlen pontnak felel meg a felületen, azaz T-nek minden pontjához egyetlen olyan (x,y,z) van, hogy $f(x,y,z) = c$.

A terület definíciójához az első lépés, hogy a T tartományt kis A_k téglalapokra osztjuk fel. Minden ilyen kis téglalap felett egy felületdarab fekszik, amelynek $\Delta\sigma_k$ területét a $T_k(x_k,y_k,z_k)$ ponthoz tartozó érintősíkban levő paralelogramma ΔP_k területével közelítjük. A P_k paralelogramma pontosan A_k felett van. A $T_k(x_k,y_k,z_k)$ pont A_k egyik sarka fölött van, a 16.39. ábrán a bal hátsó C_k sarok fölött. Ha az érintősík párhuzamos T síkjával, akkor a két paralelogramma egybevágó, és területük azonos, más esetben P_k területe nagyobb, mint A_k-é.

A 16.40. ábrán kinagyítva láthatjuk a σ_k felületdarabot, a P_k paralelogrammát és az A_k téglalapot, amelyeknek területei rendre $\Delta\sigma_k$, ΔP_k és ΔA_k. Az ábra mutatja a $\nabla f(x_k,y_k,z_k)$ gradiensvektort és a T-re merőleges **p** egységvektort. Az ábra ∇f és **p** γ_k szögét is mutatja. Az ábrán látható többi vektor, $\mathbf{u}_k$ és $\mathbf{v}_k$, a P_k paralelogramma élei mentén fekszenek. Így $\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k$ és ∇f is merőlegesek az érintősíkra. A vektorgeometriából tudjuk (F.9. függelék), hogy az $\mathbf{u}_k$, $\mathbf{v}_k$ vektorok



16.39. ÁBRA: Az S felület és a vetülete egy alatta levő síkra. Az érintősík P_k paralelogrammája a σ_k felületdarab közelítése.



16.40. ÁBRA: Az előző ábra egy darabjának kinagyítása. Az $\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k$ vektor (itt nincs mutatva) párhuzamos ∇f-fel, mert mindkettő merőleges az érintősíkra.

által meghatározott paralelogramma vetületének területe egy $\mathbf{p}$ normálvektorú síkban $|(\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{p}|$. A mi esetünkben ez azt jelenti, hogy

$$|(\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{p}| = \Delta A_k.$$

Tudjuk, hogy $|\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k|$ éppen a ΔP_k terület, így az utóbbi egyenlőség a következőket jelenti:

$$\underbrace{|\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k|}_{\Delta P_k} \cdot \underbrace{|\mathbf{p}|}_{1} \cdot \underbrace{|\cos(\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k \text{ és } \mathbf{p} \text{ közötti szög})|}_{\substack{\text{Ugyanaz, mint } |\cos\gamma_k|, \text{ mert } \nabla f \\ \text{és } \mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k \text{ mindketten merőlegesek az érintősíkra}}} = \Delta A_k,$$

azaz

$$\Delta P_k |\cos\gamma_k| = \Delta A_k,$$

vagyis

$$\Delta P_k = \frac{\Delta A_k}{|\cos\gamma_k|},$$

feltéve, hogy $\cos\gamma_k \neq 0$. Ha ∇f nem párhuzamos az alapsíkkal, akkor $\cos\gamma_k \neq 0$ és $\nabla f \cdot \mathbf{p} \neq 0$.

Mivel $\Delta P_k\, \Delta\sigma_k$ egy közelítése, és az egymást át nem fedő σ_k-k egyesítése az S felület, a

$$\sum \Delta P_k = \sum \frac{\Delta A_k}{|\cos\gamma_k|} \tag{16.26}$$

összeg annak a közelítésének tűnik, amit S felszínének akarunk hívni. Az is látszik, hogy ha finomítjuk T felosztását, a közelítés egyre jobb lesz. A jobboldal a

$$\iint_T \frac{1}{\cos\gamma}\, dA \tag{16.27}$$

kettős integrál integrálközelítő összege. Ezért az S felület **felszínét** ezzel a kettős integrállal definiáljuk, amennyiben ez létezik. Minden $f(x,y,z) = c$ felület esetén $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = |\nabla f||\mathbf{p}||\cos\gamma|$, így

$$\frac{1}{|\cos\gamma|} = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}.$$

Ezt a (16.27) egyenlőségbe helyettesítve egy igen hasznos képlethez jutunk a felszín számításához.

Képlet a felszín számításához

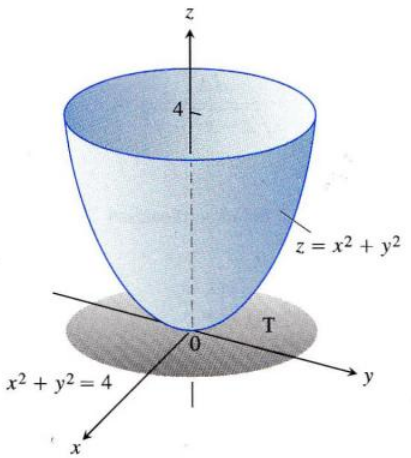
Az $f(x,y,z) = c$ felület felszíne egy korlátos és zárt T síktartomány felett

$$\text{Felületdarab felszíne} = \iint_T \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}\, dA, \tag{16.28}$$

ahol $\mathbf{p}$ a T síkjának egy egységnyi hosszú normálvektora, és $\nabla f \cdot \mathbf{p} \neq 0$.

Azaz a felszín egy T feletti kettős integrál, ahol az integrandus a ∇f abszolút értékének és ∇f T síkja normálvektorának irányába eső komponense abszolút értékének hányadosa.

A (16.28) egyenlőséget azzal a feltétellel kaptuk, hogy $\nabla f \cdot \mathbf{p} \neq 0$ és f folytonos. Ha az integrál létezik, akkor ezt az értéket tekintjük a felület felszínének T felett. (Ne felejtsük el, hogy a vetítésnél T minden pontjába a felületnek egyetlen pontját vetítjük. A 11. feladatban látni fogjuk, hogy a képlet nagyon leegyszerűsödik, ha a felület $z = f(x,y)$ alakban van megadva.



16.41. ÁBRA: A parabolikus felület felszíne az 1. példában.

1. PÉLDA: **Felület felszínének kiszámítása**

Mekkora a felszíne az $x^2 + y^2 - z = 0$ paraboloid azon darabjának, amit a $z = 4$ sík vág le belőle?

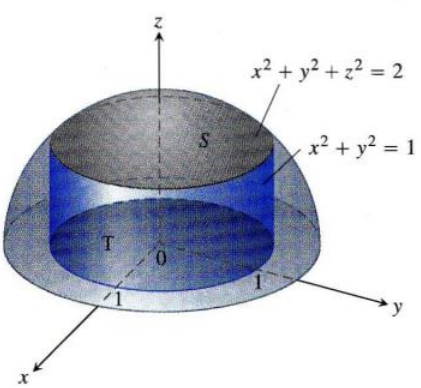
Megoldás: Először felvázoljuk az S felületet és alatta a T tartományt az xy-síkon (16.41. ábra). A felület az $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$ szintfelület, és T az $x^2 + y^2 \le 4$ körlap az xy-síkon. A T-re merőleges egységvektor $\mathbf{p} = \mathbf{k}$. A felület bármely (x,y,z) pontjában

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 + y^2 - z \\ \nabla f &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k} \\ |\nabla f| &= \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \\ |\nabla f \cdot \mathbf{p}| &= |\nabla f \cdot \mathbf{k}| = |-1| = 1. \end{aligned}$$

Ebben a tartományban $dA = dx\,dy$. Így

$$\begin{aligned} \text{Felület felszíne} &= \iint_T \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA && \text{(16.28) egyenlőség} \\ &= \iint_{x^2+y^2 \le 4} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dx\, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta && \text{Polárkoordinátásan} \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12}(4r^2 + 1)^{3/2} \right]_0^2 d\theta \\ &= \int \frac{1}{12}(17^{3/2} - 1) d\theta = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1). \end{aligned}$$

□



16.42. ÁBRA: A félgömbből a henger által kivágott rész vetülete az xy-síkban a $T : x^2 + y^2 \le 1$ körlap (2. példa).

2. PÉLDA: **Felület felszínének kiszámítása**

Mekkora a felszíne annak a felületnek, ami az $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $z \ge 0$ félgömbből az $x^2 + y^2 = 1$ henger belsejébe esik?

Megoldás: Az S felület az $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 2$ szintfelület része. Az xy-síkra való vetülete a T: $x^2 + y^2 \le 1$ körlap, és ennek minden pontjára a felület egyetlen pontjának vetülete esik. A $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ egységvektor merőleges T-re. A felület minden pontjában

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 \\ \nabla f &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \\ |\nabla f| &= 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{2} \\ |\nabla f \cdot \mathbf{p}| &= |\nabla f \cdot \mathbf{k}| = |2z| = 2z. \end{aligned}$$

Következésképp

$$\text{Felület felszíne} = \iint_T \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA = \iint_T \frac{2\sqrt{2}}{2z} dA = \sqrt{2} \iint_T \frac{dA}{z}. \qquad (16.29)$$

Mit csináljunk z-vel? Mivel z a gömbfelület pontjának koordinátája, kifejezhetjük x-szel és y-nal, mint

$$z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$$

Folytatjuk a (16.29) integrál számítását:

$$\text{Felület felszíne} = \sqrt{2}\iint_T \frac{dA}{z} = \sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{dA}{\sqrt{2-x^2-y^2}} =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{2-r^2}} = \quad \text{Polárkoordinátásan}$$

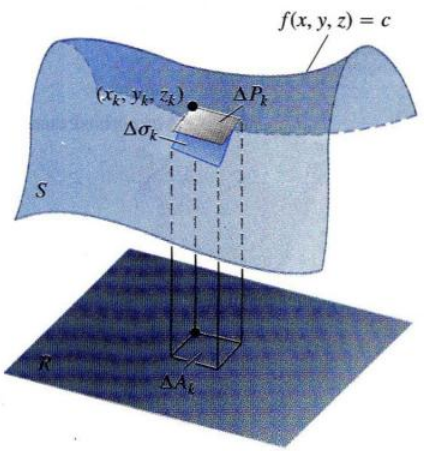
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[-(2-r^2)^{1/2}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}(\sqrt{2}-1)d\theta = 2\pi(2-\sqrt{2}). \qquad \square$$

Felületi integrálok

Most rátérünk arra, hogyan számítunk integrált felület mentén, felhasználva azt a gondolatot, ahogy felszínt számítottunk.

Tegyük fel, hogy elektromos töltés oszlik el egy $f(x,y,z) = c$ felületen, amit a 16.43. ábra mutat. A $g(x,y,z)$ függvény adja a töltés nagyságát egységnyi területre vonatkoztatva (azaz a töltéssűrűséget). A teljes töltést az S felületen a következőképp számítjuk ki.



16.43. ÁBRA: Ha tudjuk, hogy $g(x,y,z)$ elektromos töltés oszlik el egy felületen, akkor a teljes töltést egy megfelelő integrállal számíthatjuk ki.

Felosztjuk a felület T vetületét az alapsíkon a felület alatt kis téglalapokra, ahogy azt a felszínszámításnál is tettük. Ekkor minden A_k téglalap felett van egy σ_k felületdarab, aminek $\Delta\sigma_k$ területét az érintősík paralelogrammájának ΔP_k területével közelítjük (16.43. ábra). Ha a felosztás elég finom, és a felületdarabon a töltés sűrűsége csak kevéssel különbözik az egyik csúcspontban levő értéktől, és a felületdarab felszíne is kevéssel különbözik a paralelogramma területétől, akkor a σ_k felületdarabon levő teljes töltést a $g(x_k,y_k,z_k)\Delta P_k$ szorzat jól közelíti. A felületen levő teljes töltésmennyiség egy közelítése ekkor:

$$\text{Teljes töltés} = \sum g(x_k,y_k,z_k)\Delta P_k = \sum g(x_k,y_k,z_k)\frac{\Delta A_k}{|\cos\gamma_k|}.$$

Ha a felületet definiáló f függvény első parciális deriváltjai folytonosak, és a g függvény is folytonos S felett, akkor a jobboldalon levő összeg a következő integrált közelíti, ha a felosztás a szokott módon finomodik:

$$\iint_T g(x,y,z)\frac{dA}{|\cos\gamma|} = \iint_T g(x,y,z)\frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot\mathbf{p}|}dA. \tag{16.30}$$

Ezt az integrált hívjuk a g függvény S felületen vett integráljának, és úgy számítjuk, mint kettős integrált T-n.

Ahogy sejtjük is, a (16.30) képlet bármely S-en értelmezett g függvény integráljára vonatkozik.

DEFINÍCIÓ: Felületi integrál

Ha T az $f(x,y,z) = c$ egyenlőséggel definiált S felület vetülete, és g egy folytonos függvény, ami S pontjaiban definiálva van, akkor az

$$\iint_T g(x,y,z)\frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot\mathbf{p}|}dA \tag{16.31}$$

integrált g **S-en vett integráljának** nevezzük, magát az integrált **felületi integrálnak** hívjuk.

A (16.31) integrálnak a különböző alkalmazásokban különböző jelentése van. Ha g értéke azonosan 1, akkor az integrál a felület felszíne. Ha g a vékony felületet adó anyag sűrűsége (területegységre vonatkoztatva), akkor az integrál a felület tömegét adja. Az $(|\nabla f|/|\nabla f \cdot \mathbf{p}|)dA$ kifejezést rövidíthetjük $d\sigma$-val.

A felszíndifferenciál, és a felületi integrál differenciálos alakja

$$d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA \qquad \iint_S g\, d\sigma \tag{16.32}$$

felszíndifferenciál — felületi integrál differenciálos alakja

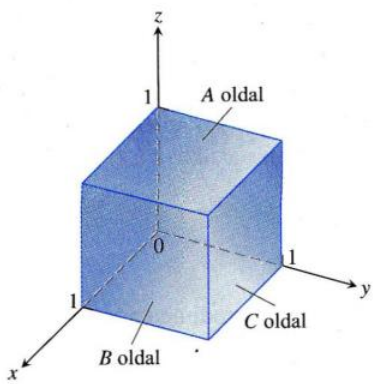
A felületi integráloknak ugyanolyan tulajdonságaik vannak, mint más kettős integráloknak. A tartomány-additivitás alakja a következő:

$$\iint_S g\, d\sigma = \iint_{S_1} g\, d\sigma + \iint_{S_2} g\, d\sigma + \cdots + \iint_{S_n} g\, d\sigma.$$

Ha S felosztható sima görbékkel véges sok, egymást át nem fedő sima felületdarabra (azaz ha S darabonként sima), akkor az S-en vett felületi integrál számolható, mint a részenként vett integrálok összege. Így pl. egy kockafelületen vett integrált számíthatunk úgy, hogy az oldalakra külön-külön kiszámítjuk, majd az eredményeket összeadjuk.

3. PÉLDA: **Felületi integrál**

Integráljuk a $g(x,y,z) = xyz$ függvényt annak a kockának a felületén, amelyet az első térnyolcadból az $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ síkok vágnak ki!



16.44. ÁBRA: A kocka a 3. példában.

Megoldás: Integráljuk xyz-t mind a hat oldal felett, és azután adjuk össze az eredményeket. A koordinátasíkokon $xyz = 0$, így az integrálok nullák. Az egész felületre tehát

$$\iint_{\text{Kocka felszíne}} xyz\, d\sigma = \iint_{A\text{ oldal}} xyz\, d\sigma + \iint_{B\text{ oldal}} xyz\, d\sigma + \iint_{C\text{ oldal}} xyz\, d\sigma.$$

Az A oldalon $f(x,y,z) = z = 1$ az xy-síkbeli T_{xy}: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ négyzettartomány felett. Erre a felületre, ill. tartományra

$$\mathbf{p} = \mathbf{k}, \quad \nabla f = \mathbf{k}, \quad |\nabla f| = 1, \quad |\nabla f \cdot \mathbf{p}| = |\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}| = 1,$$
$$d\sigma \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA = \frac{1}{1} dx\, dy = dx\, dy,$$
$$xyz = xy(1) = xy$$

és

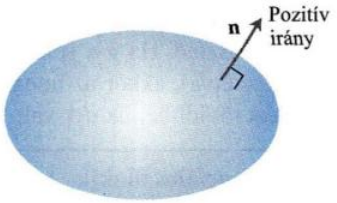
$$\iint_{A\text{ oldal}} xyz\, d\sigma = \iint_{T_{xy}} xy\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 xy\, dx\, dy = \int_0^1 \frac{y}{2} dy = \frac{1}{4}.$$

A szimmetriatulajdonságok alapján a B és C oldalakon az integrál szintén 1/4, így

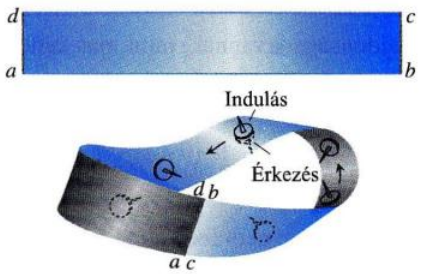
$$\iint_{\text{Kocka felszíne}} xyz\, d\sigma = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \qquad \square$$

Irányítás

Egy sima felületet **irányíthatónak** vagy **kétoldalasnak** nevezünk, ha létezik egy olyan vektormező, ami a felület egységnyi hosszú, a helytől függően folytonosan változó normálvektoraiból áll.



16.45. ÁBRA: Sima, zárt felületek a térben irányíthatóak. A kifelé mutató normálvektor definiálja a pozitív irányt minden pontban.



16.46. ÁBRA: Egy Möbius-szalagot úgy csinálhatunk, hogy egy *abcd* papírcsík egyik végén egyet csavarunk, és úgy ragasztjuk össze, hogy az *a* csúcs *c*-hez kerüljön, *ab* csúcs pedig *d*-hez. A Möbius szalag nem irányítható, egyoldalú felület.

Egy irányítható felület minden részfelülete is irányítható. A gömbök és más sima, zárt felületek a térben (olyan sima felületek, amelyek testeket határolnak) irányíthatóak.

Ha **n**-et megválasztottuk, akkor azt mondjuk, hogy **irányítottuk a felületet**, és a felületet az egységnyi hosszú normálisainak mezőjével együtt **irányított felületnek** nevezzük. Minden pontban az **n** iránya a pozitív irány (16.45. ábra). Tradicionálisan az **n** vektort egy zárt felületen kifelé mutatónak választjuk.

A Möbius-szalag (16.46. ábra) nem irányítható. Bárhol is kezdünk egy normálvektormezőt létesíteni (ami rajzszögekkel van az ábrán ábrázolva), folytonosan haladva úgy jutunk vissza a kiindulóponthoz, hogy a normálvektorok ellenkező irányba mutatnak. Egy vektor nem mutathat kétfelé, így a vektorok nem változhatnak folytonosan az egész felületen.

Vektormező felületmenti integrálja

Tegyük fel, hogy **F** egy folytonos vektormező, ami definiálva van egy irányított felületen. Jelölje **n** az irányított normálvektormezőt a felületen (ami egységvektorokból áll). Az **F**·**n** szorzat integrálját az *S* felületen az **F** függvény felületmenti integráljának, vagy más szóval fluxusának nevezzük az *S* felületen pozitív irányban.

DEFINÍCIÓ: Felületmenti integrál, másszóval fluxus

Egy háromdimenziós **F** vektormező **felületmenti integrálja** az irányított *S* felület mentén **n** irányában

$$\text{Felületmenti integrál} = \text{Fluxus} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma. \tag{16.33}$$

Ez a definíció teljesen megegyezik a kétdimenziós esetre adott definíciójával a fluxusnak, bár azt ott kizárólag zárt görbékre, és nem irányított görbékre definiáltuk, sőt nem is említettük, hogy a normálvektorokat lehetne másképp is választani, mint kifelé. A kétdimenziós **F** mező fluxusa a síkban a zárt *C* görbén kifelé mutató normálisokkal:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds.$$

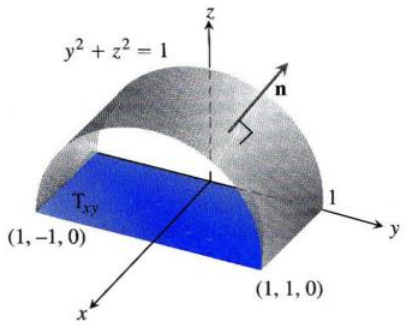
Ha **F** egy áramló folyadék sebességvektormezője a háromdimenziós térben, akkor a fluxus az *S* felületen átáramló folyadékmennyiség nettó sebessége, azaz annyi, amennyi a folyadék mennyiségének megváltozása egy időegység alatt a felület pozitív oldalán. Ha egy zárt felületen ugyanannyi folyadék folyik be, mint ki, akkor a felületmenti integrál értéke, vagyis a fluxus, nulla.

Ha *S* egy része egy $g(x,y,z) = c$ szintfelületnek, akkor **n** a következő két mező közül választható

$$\mathbf{n} = \pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|} \tag{16.34}$$

attól függően, melyik oldalt szeretnénk pozitívnak tekinteni. A megfelelő felületmenti integrál

$$\begin{aligned}
\text{Felületmenti integrál} &= \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma \\
&= \iint_T \left(\mathbf{F}\cdot\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g|}\right)\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\mathbf{p}|}\,dA \quad \text{(16.32) és (16.34) egyenlőség} \\
&= \iint_T \mathbf{F}\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g\cdot\mathbf{p}|}\,dA. \qquad (16.35)
\end{aligned}$$



16.47. ÁBRA: Felületmenti integrál számítása kifelé mutató normálissal. A vetület területe 2 (4. példa).

4. PÉLDA: **Felületmenti integrál (fluxus) meghatározása**

Határozzuk meg az $\mathbf{F} = yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ mező felületmenti integrálját a hengerből kifelé irányított normálissal az $y^2 + z^2 = 1$, $0 \le z$ hengerfelület azon darabján, amelyet az $x = 0$, $x = 1$ síkok vágnak ki belőle!

Megoldás: S-en a kifelé irányított normálvektormezőt számolhatjuk $g(x,y,z) = y^2 + z^2$ gradienséből (16.47. ábra):

$$\mathbf{n} = +\frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{2y\mathbf{i} + 2z\mathbf{k}}{\sqrt{4y^2 + 4z^2}} = \frac{2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{2\sqrt{1}} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

(Ezek a vektorok valóban elfelé mutatnak az x-tengelytől.) Mivel $\mathbf{p} = \mathbf{k}$,

$$d\sigma = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \mathbf{k}|} dA = \frac{2}{|2z|} dA = \frac{1}{z} dA.$$

Mivel $z \ge 0$, az abszolútértékjel elhagyható.

$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ a felületen

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} &= (yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k})\cdot(y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \\ &= y^2 z + z^3 = z(y^2 + z^2) = \\ &= z. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y^2+z^2=1 \end{aligned}$$

Következésképp a felületmenti integrál (fluxus) S-en kifelé mutató normálissal

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = \iint_S (z)\left(\frac{1}{z} dA\right) = \iint_{T_{xy}} dA = (T_{xy}\text{területe}) = 2. \qquad \square$$

Vékony héjak tömege és nyomatékai

Vékony anyagi héjakat, mint pl. edényeket, fémdobokat, kupolákat felületekkel modellezünk. Tömegük és nyomatékaik a 16.3. táblázatban szereplő képletek alapján számíthatók.

Tömeg: $M = \iint_S \delta(x,y,z)\, d\sigma$ ($\delta(x,y,z) =$ sűrűség az (x,y,z) pontban tömeg egységnyi területre)

Statikai nyomatékok (első momentum) a koordinátasíkokra vonatkoztatva:

$$M_{yz} = \iint_S x\delta\, d\sigma, \quad M_{xz} = \iint_S y\delta\, d\sigma, \quad M_{xy} = \iint_S z\delta\, d\sigma$$

Tömegközéppont koordinátái:

$$\bar{x} = M_{yz}/M, \quad \bar{y} = M_{xz}/M, \quad \bar{z} = M_{xy}/M$$

Tehetetlenségi nyomaték a koordinátatengelyekre vonatkoztatva:

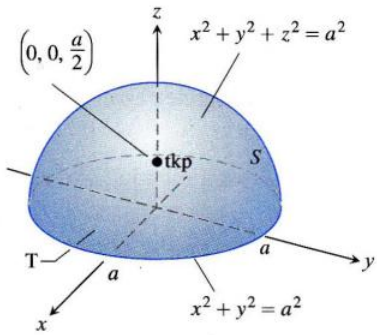
$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2)\delta\, d\sigma, \qquad I_y = \iint_S (x^2 + z^2)\delta\, d\sigma,$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\delta\, d\sigma, \qquad I_L = \iint_S r^2\delta\, d\sigma,$$

$r(x,y,z) =$ az (x,y,z) pont távolsága az L egyenestől.

Tehetetlenségi sugár az L egyenesre vonatkoztatva: $R_L = \sqrt{I_L/M}$

16.3. TÁBLÁZAT: Tömeg és nyomatékképletek igen vékony héjakra.



16.48. ÁBRA: A vékony félgömbhéj tömegközéppontja a szimmetriatengelyen van, félúton az alap és a csúcs között (5. példa).

5. PÉLDA: **Tömegközéppont meghatározása**

Hol van az a sugarú és konstans δ sűrűségű félgömbhéj tömegközéppontja?

Megoldás: A félgömbhéjat az

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=a^2, \quad z\geq 0$$

függvénnyel modellezzük (16.48. ábra). A felület szimmetriája azt sugallja, hogy a tömegközéppont a szimmetriatengelyen van, $\bar{x}=0$, $\bar{y}=0$. Már csak $\bar{z}=$ $=M_{xy}/M$-t kell meghatározni. A héj tömege

$$M=\iint_S \delta\, d\sigma=\delta\iint_S d\sigma=(\delta)(S \text{ területe})=2\pi a^2\delta.$$

M_{xy} meghatározásához **p=k**-t veszünk, és

$$|\nabla f|=|2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}|=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2a$$
$$|\nabla f\cdot\mathbf{p}|=|\nabla f\cdot\mathbf{k}|=|2z|=2z$$
$$d\sigma=\frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot\mathbf{p}|}dA=\frac{a}{z}dA.$$

Ezután

$$M_{xy}=\iint_S z\delta\, d\sigma=\delta\iint_T z\frac{a}{z}dA=\delta a\iint_T dA=\delta a(\pi a^2)=\delta\pi a^3$$
$$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{\pi a^3\delta}{2\pi a^2\delta}=\frac{a}{2}.$$

A héj tömegközéppontja $(0,0,a/2)$. □

16.5. Feladatok

Felület felszíne

1. Mekkora a felszíne annak a felületnek, amelyet $z=2$ sík vág le az $x^2+y^2-z=0$ paraboloidból?

2. Mekkora a felszíne annak a felületnek, amelyet $z=2$ és $z=6$ síkok vágnak ki az $x^2+y^2-z=0$ paraboloidból?

3. Mekkora a felszíne annak a felületnek, amelyet az $x+2y+$ $+2z=5$ síkból vágnak ki az $x=y^2$ és $x=2-y^2$ hengerek?

4. Mekkora a felszíne az $x^2-2z=0$ felület azon darabjának, amely az $x=\sqrt{3}$, $y=0$, $y=x$ egyenesek által határolt xy-síkbeli háromszög felett van?

5. Mekkora a felszíne az $x^2-2y-2z=0$ felület azon darabjának, amely az $x=2$, $y=0$, $y=3x$ egyenesek által határolt xy-síkbeli háromszög felett van?

6. Mekkora a felszíne az $x^2+y^2+z^2=2$, gömbből a $z=$ $=\sqrt{x^2+y^2}$ kúp által kivágott rész tetejének?

7. Mekkora a területe annak az ellipszisnek, amelyet a $z=cx$ (c konstans) síkból vág ki az $x^2+y^2=1$ henger?

8. Mekkora a felszíne az $x^2+z^2=1$ henger $x=\pm 1/2$, $y=$ $=\pm 1/2$ síkok között fekvő felső darabjának?

9. Mekkora a felszíne az $x=4-y^2-z^2$ paraboloid azon darabjának, amelyik az yz-síkbeli $1\leq y^2+z^2\leq 4$ körgyűrű felett van?

10. Mekkora a felszíne annak a felületnek, amelyet az $y=0$ sík vág le az $x^2+y+z^2=2$ paraboloidból?

11. Mekkora a felszíne az $x^2-2\ln x+\sqrt{15}y-z=0$ felület azon darabjának, amelyik az $T: 1\leq x\leq 2$, $0\leq y\leq 1$ xy-síkbeli négyzet felett fekszik?

12. Mekkora a felszíne az $2x^{3/2}+y^{3/2}-z=0$ felület azon darabjának, amelyik az $T: 0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$ xy-síkbeli négyzet felett fekszik?

Felületi integrálok

13. Integráljuk a $g(x,y,z)=x+y+z$ függvényt annak a kockának a felületén, amelyet az $x=a$, $y=a$, $z=a$ síkok vágnak le az első térnyolcadból!

14. Integráljuk a $g(x,y,z)=y+z$ függvényt annak az éknek a felületén, amelyik az első térnyolcadban van és a koordinátasíkok, valamint az $x=2$, $y+z=1$ síkok határolják!

15. Integráljuk a $g(x,y,z)=xyz$ függvényt annak a téglatestnek a felületén, amelyet az $x=a$, $y=b$, $z=c$ síkok vágnak le az első térnyolcadból!

16. Integráljuk a $g(x,y,z)=xyz$ függvényt annak a téglatestnek a felületén, amelyet az $x=\pm a$, $y=\pm b$, $z=\pm c$ síkok határolnak!

17. Integráljuk a $g(x,y,z)=x+y+z$ függvényt a $2x+2y+z=2$ sík első térnyolcadba eső része felett!

18. Integráljuk a $g(x,y,z)=x\sqrt{y^2+4}$ függvényt afölött a felület fölött, amelyet az $x=0$, $x=1$, $z=0$ síkok vágnak ki az $y^2+4z=16$ hengerből!

Felületmenti integrál (fluxus)

A 19–20. feladatokban számítsuk ki az $\mathbf{F}$ vektormező felületmenti integrálját (fluxusát) a megadott felületdarabon a megadott irányítással!

19. $\mathbf{F}(x,y,z) = -\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$
S : téglalap, $z=0$, $0\le x\le 2$, $0\le y\le 3$,
az irány: $\mathbf{k}$

20. $\mathbf{F}(x,y,z) = yx^2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$
S : téglalap, $y=0$, $-1\le x\le 2$, $2\le z\le 7$,
az irány: $-\mathbf{j}$.

A 21–26. feladatokban számítsuk ki az $\mathbf{F}$ függvény felületmenti integrálját (fluxusát) az $x^2+y^2+z^2=a^2$ gömb első nyolcadba eső darabján, az origótól elfelé mutató normálissal!

21. $\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{k}$

22. $\mathbf{F}(x,y,z) = -y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$

23. $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+\mathbf{k}$

24. $\mathbf{F}(x,y,z) = zx\mathbf{i}+zy\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$

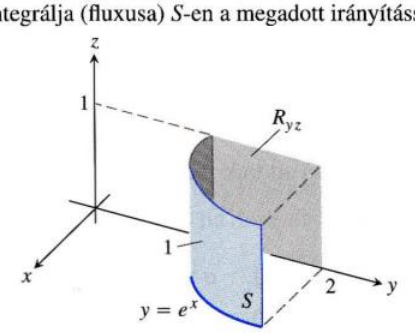
25. $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

26. $\mathbf{F}(x,y,z) = \dfrac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

27. Határozzuk meg az $\mathbf{F}(x,y,z) = z^2\mathbf{i}+x\mathbf{j}-3z\mathbf{k}$ vektormező felületmenti integrálját (fluxusát) azon a felületdarabon, amelyet az $x=0$, $x=1$, $z=0$ síkok vágnak ki a $z=4-y^2$ hengerből, kifelé való irányítással!

28. Határozzuk meg az $\mathbf{F}(x,y,z) = 4x\mathbf{i}+4y\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ vektormező felületmenti integrálját (fluxusát) azon a felületen, amelyet a $z=1$ sík vág le $z=x^2+y^2$ paraboloid aljából, a z tengelytől elfelé mutató normálissal!

29. Legyen az S felület az $y=e^x$ henger azon darabja, amelynek az x-tengellyel párhuzamos vetítés esetén az yz-síkra eső vetülete az R_{yz} : $1\le y\le 2$, $0\le z\le 1$ téglalap (lásd a mellékelt ábrát). A felület $\mathbf{n}$ normálisa legyen úgy irányítva, hogy elfelé mutasson a yz-síktól. Mennyi az $\mathbf{F}(x,y,z) = -2\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ vektormező felületmenti integrálja (fluxusa) S-en a megadott irányítással?



30. Legyen az S felület az $y=\ln x$ henger azon darabja, amelyik az első térnyolcadban van, és amelynek az y-tengellyel párhuzamos vetítés esetén az xz-síkra eső vetülete R_{xz} : $1\le x\le e$, $0\le z\le 1$ téglalap. A felület $\mathbf{n}$ normálisa mutasson elfelé az xz-síktól. Mennyi az $\mathbf{F}(x,y,z) = 2y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ vektormező felületmenti integrálja (fluxusa) S-en a megadott irányítással?

31. Mennyi az $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i}+2yz\mathbf{j}+2xz\mathbf{k}$ vektormező felületmenti integrálja (fluxusa) kifelé való irányítással annak a kockának a felszínén, amelyet az első térnyolcadból vágnak ki az $x=a$, $y=a$, $z=a$ síkok?

32. Mennyi az $\mathbf{F} = xz\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+\mathbf{k}$ vektormező felületmenti integrálja (fluxusa) felfelé mutató normálissal annak a gömbsüvegnek a felső felületén, amelyet a $z=3$ sík vág le az $x^2+y^2+z^2\le 25$ gömbből?

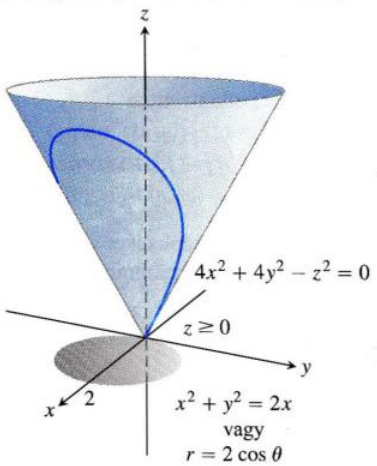
Tömeg és nyomaték

33. Súlypont: Hol van a súlypontja az $x^2+y^2+z^2=a^2$ gömbfelület azon darabjának, amelyik az első térnyolcadban fekszik?

34. Súlypont: Hol van a súlypontja az $y^2+z^2=9$, $z\ge 0$ hengerfelület azon darabjának, amely az $x=0$ és $x=3$ síkok közé esik? (A felületdarab hasonló a 4. példában szereplőhöz)

35. Állandó sűrűségű vékony héj: Hol van a tömegközéppontja, és mennyi a z tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka és tehetetlenségi sugara annak az állandó δ sűrűségű vékony héjnak, amelyet a $z=1$ és $z=2$ síkok vágnak ki az $x^2+y^2-z^2=0$ kúpból?

36. Állandó sűrűségű kúpfelület: Mennyi a z-tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka annak az állandó δ sűrűségű héjnak, amelyet az $x^2+y^2=2x$ henger vág ki a $4x^2+4y^2-z^2=0$, $z\ge 0$ kúpból? (Lásd a mellékelt ábrát.)



37. Gömbhéjak:

(a) Mennyi az a sugarú, állandó δ sűrűségű vékony, teljes gömbhéjnak a tehetetlenségi nyomatéka az egyik átmérőjére vonatkoztatva? (Számoljuk egy félgömbét, majd duplázzuk meg!)

(b) Használjuk a Párhuzamos tengelyek tételét (15.5. alfejezet feladatai) és az (a) pont eredményét, hogy megmondjuk a tehetetlenségi nyomatékot egy érintő egyenesre vonatkoztatva!

38. Kúp:

(a) Hol van a súlypontja az a alapkörsugarú és h magasságú kúppalástnak (kúppalást alapkör nélkül)?

(b) Használjuk a Papposz-formulát (15.5. alfejezet feladatai) és az (a) pont eredményét, hogy megmondjuk a teljes kúpfelület súlypontját (kúppalást és alapkör)!

(c) Az a alapkörsugarú és h magasságú kúp alapjához egy a sugarú félgömböt csatlakoztatunk. Használjuk a Papposz-formulát és az (a) pont, valamint az 5. példa eredményét az így kapott felület súlypontjának meghatározásához. Milyen magas legyen a kúp, hogy a súlypont a csatlakozás síkjában legyen?

Különböző alakú képletek felszín meghatározására

Ha az S felület egy $z = f(x,y)$ alakú képlettel van megadva, ahol f-nek folytonosak a parciális deriváltjai egy, az xy-síkban fekvő T_{xy} tartományon (16.49. ábra), akkor S az $F(x,y,z) = f(x,y) - z$ függvény $F(x,y,z) = 0$ szintfelülete. A T_{xy} tartomány egységnyi normálisát $\mathbf{p} = \mathbf{k}$-nak véve

$$|\nabla F| = |f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} - \mathbf{k}| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$$
$$|\nabla F \cdot \mathbf{p}| = |(f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}| = |-1| = 1$$

és

$$\iint_{T_{xy}} \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|}\, dA = \iint_{T_{xy}} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dx\, dy. \qquad (16.36)$$

Hasonlóképpen, ha a sima felület felszínét más koordinátasíkokra való vetítéssel akarjuk kiszámítani, akkor pl. $x = f(y,z)$ esetén az yz-síkra való vetítéssel

$$A = \iint_{T_{yz}} \sqrt{f_y^2 + f_z^2 + 1}\, dy\, dz, \qquad (16.37)$$

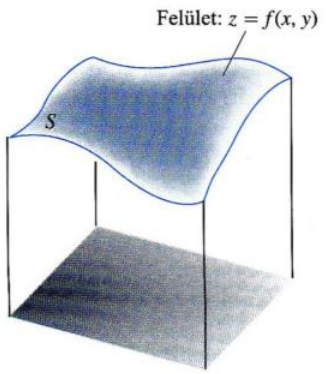
és $y = f(x,z)$ esetén az xz-síkra vetítve

$$A = \iint_{T_{xz}} \sqrt{f_x^2 + f_z^2 + 1}\, dx\, dz. \qquad (16.38)$$

Használjuk a (16.36)–(16.38) képleteket a 39–44. feladatokban szereplő felületek felszínének kiszámításához!

39. A $z = x^2 + y^2$ paraboloid azon darabja, amelyet a $z = 3$ sík vág le.

40. A felületet az yz-sík vágja le az $x = 1 - y^2 - z^2$ paraboloidból.



16.49. ÁBRA: A $z = f(x,y)$ alakban megadott felületek esetén a (16.28) felszínképlet alakja:

$$A = \iint_{T_{xy}} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dx\, dy.$$

41. A $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúpfelület azon része, amely az $x^2 + y^2 = 1$ kör és a $9x^2 + 4y^2 = 36$ ellipszis közötti tartomány felett van. (*Útmutatás*: A geometriából ismert képletekkel számítsuk ki a tartomány területét.)

42. A felület az, amely a $2x + 6y + 3z = 6$ síkból az első térnyolcadba esik. Számoljuk ki a területet háromféleképpen, minden képlettel egyszer!

43. A felület az első térnyolcadban van, az $y = (2/3)z^{3/2}$ hengerből az $x = 1$ és $y = 16/3$ síkok vágják ki.

44. A felület az $y + z = 4$ sík azon darabja, amely azon tartomány fölött helyezkedik el, amit az xz-sík első negyedéből vág ki az $x = 4 - z^2$ parabola.

16.6. Paraméteresen adott felületek

Görbéket a síkban eddig háromféleképpen adtunk meg

Explicit alak: $y = f(x)$
Implicit alak: $F(x,y) = 0$
Paraméteres alak: $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}, \quad a \le t \le b.$

Hasonló megadási formái felületeknek a térben:

Explicit alak: $z = f(x,y)$
Implicit alak: $F(x,y,z) = 0.$

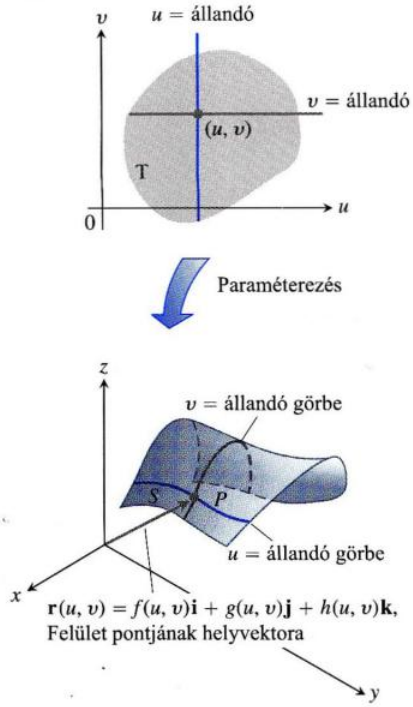
A térbeli felületeknek is van paraméteres megadási formája, ahol a felület pontjait két változótól függő helyvektorokkal adjuk meg. Ebben az alfejezetben paraméteresen adott felületet felszínszámításával, és ilyen felületek mentén való integrálással foglalkozunk.

Felületek paraméterezése

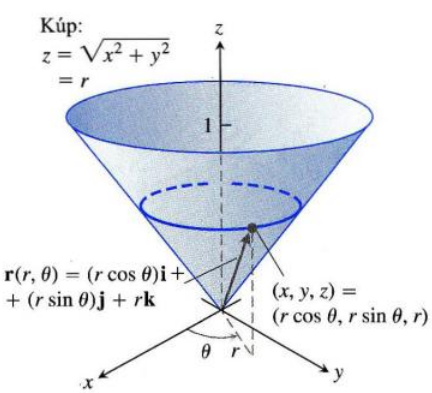
Legyen

$$\mathbf{r}(u,v) = f(u,v)\mathbf{i} + g(u,v)\mathbf{j} + h(u,v)\mathbf{k} \qquad (16.39)$$

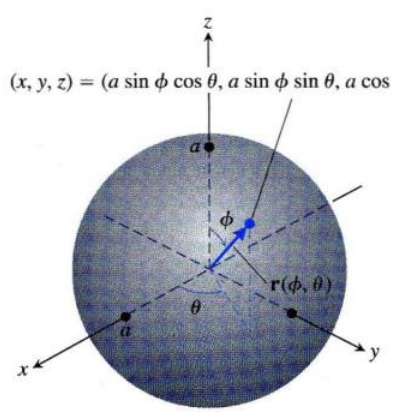
egy olyan vektorfüggvény, amelynek koordinátafüggvényei folytonosak az uv-sík egy T tartományán, és amely a T tartomány belső pontjaiban invertálható. (Azaz a T tartomány két különböző belső pontjához nem tartozhat ugyanaz az



16.50. ÁBRA: A paraméterezett S felület egy kétváltozós vektorfüggvénnyel van megadva, aminek értelmezési tartománya T.



16.51. ÁBRA: A kúp az 1. példában könnyen paraméterezhető, ha hengerkoordinátákat használunk.



16.52. ÁBRA: A gömb a 2. példában könnyen paraméterezhető, ha gömbkoordinátákat használunk.

r vektor.) Azok a pontok, amelyeknek helyvektorai **r** értékkészletének vektorai, egy S **felületet** alkotnak a térben. A (16.39) függvényt a T értelmezési tartományával együtt, az S felület egy **paraméterezésének** nevezzük. Az u, v változók a **paraméterek**, T a **paramétertartomány**. Minden felületnek végtelen sok különböző paraméterezése lehetséges, ezek között vannak könnyebben, vannak nehezebben kezelhetőek. Nézzük néhány gyakran előforduló geometriai alakzat leggyakrabban használt paraméterezéseit.

Általában egyszerűsíti a további számításokat, (amelyek gyakran integrálások,) ha úgy paraméterezünk, hogy a paramétertartomány téglalaptartomány legyen, azaz $a \le u \le b$, $c \le v \le d$ alakú egyenlőtlenségekkel lehessen megadni. Az invertálhatóság követelményéből következik, hogy a felület nem metszi át magát.

A (16.39) egyenlőség ekvivalens a következő hárommal:

$$x = f(u,v), \quad y = g(u,v), \quad z = h(u,v).$$

A paramétereket, természetesen, más betűkkel is jelölhetjük.

1. PÉLDA: Kúp egy paraméterezése

Paraméterezzük a

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad 0 \le z \le 1$$

kúpot!

Megoldás: Itt a hengerkoordináták éppen azt adják, amire szükségünk van. A kúp egy (x,y,z) pontjára $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = \sqrt{x^2+y^2} = r$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$ (16.51. ábra). A (16.39) függvényből $u = r$, $v = \theta$ helyettesítéssel nyerjük:

$$\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

(Az invertálhatóság csak a paramétertartomány $r = 0$, $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$ határán nem teljesül.) □

2. PÉLDA: Gömb paraméterezése

Paraméterezzük az $x^2+y^2+z^2 = a^2$ gömböt!

Megoldás: A gömbkoordináták jó megoldást kínálnak (16.52. ábra). A gömb (x,y,z) pontjára $x = a\sin\phi\cos\theta$, $y = a\sin\phi\sin\theta$, $z = a\cos\phi$, $0 \le \phi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$. A (16.39) függvényből $u = \phi$, $v = \theta$ helyettesítéssel nyerjük:

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = (a\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (a\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (a\cos\phi)\mathbf{k},$$

$$0 \le \phi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

(Az invertálhatóság csak a paramétertartomány határán nem teljesül: $\theta = 0$ és $\theta = 2\pi$, valamint az „Északi" és „Déli" sarkon, azaz $\phi = 0$ és $\phi = \pi$ esetén.) □

3. PÉLDA: Henger paraméterezése

Paraméterezzük az

$$x^2 + (y-3)^2 = 9, \quad 0 \le z \le 5$$

hengert!

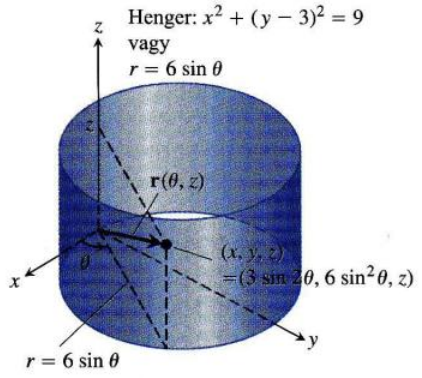
Megoldás: Hengerkoordinátákat használva az (x,y,z) pontra $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$ (16.53. ábra). Az $x^2+(y-3)^2 = 9$ egyenlet átírva:

$$x^2 + (y^2 - 6y + 9) = 9,$$

$$r^2 - 6r\sin\theta = 0,$$

azaz

$$r = 6\sin\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$



16.53. ÁBRA: A henger a 3. példában könnyen paraméterezhető, ha hengerkoordinátákat használunk.

Az (x,y,z) koordináták tehát

$$x = r\cos\theta = 6\sin\theta\cos\theta = 3\sin 2\theta,$$
$$y = r\sin\theta = 6\sin^2\theta,$$
$$z = z.$$

A (16.39) függvényből $u = \theta$, $v = z$ helyettesítéssel nyerjük:

$$\mathbf{r}(\theta,z) = (3\sin 2\theta)\mathbf{i} + (6\sin^2\theta)\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le z \le 5. \qquad \square$$

Felület felszíne

Az a célunk, hogy egy alkalmas képletet találjunk, amivel paraméteresen adott felület felszínét kettős integrállal tudjuk számítani.

Tekintsük az

$$\mathbf{r}(u,v) = f(u,v)\mathbf{i} + g(u,v)\mathbf{j} + h(u,v)\mathbf{k}, \quad a \le u \le b, \quad c \le v \le d$$

vektorfüggvénnyel definiált S felületet. Az S felületről feltesszük, hogy sima, aminek a definiálásához szükségünk van $\mathbf{r}$ parciális deriváltjaira. Ha az $u = u_0$ értéket rögzítjük, $\mathbf{r}(u_0,v)$ már csak v-től függ, így egy térgörbét határoz meg, ami a felületen fut, és **paramétervonalnak** hívjuk. Ennek v-szerinti deriváltja, ha létezik, és nem nulla, ennek a görbének érintő irányú vektora. Ez nem más, mint $\mathbf{r}$ v szerinti parciális deriváltja. Ugyanezt elmondhatjuk, ha a $v = v_0$ értéket rögzítjük, és u a változó. Ahol az $\mathbf{r}$ függvény invertálható, ott v két különböző paraméterértékéhez tartozó paramétervonalnak nem lehet közös pontja. Ugyanezt elmondhatjuk u-ról is. A $\mathbf{r}$ függvény parciális deriváltjai:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial u}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial v}\mathbf{k}.$$

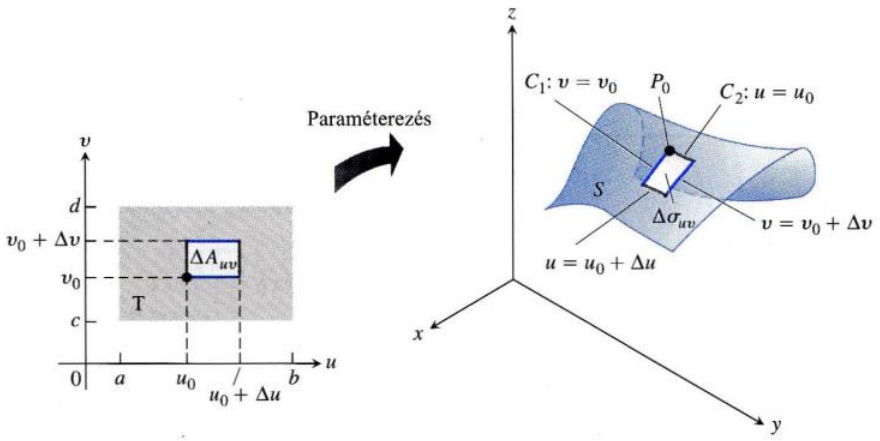
DEFINÍCIÓ: Paraméteresen adott sima felület

A paraméteresen adott $\mathbf{r}(u,v) = f(u,v)\mathbf{i} + g(u,v)\mathbf{j} + h(u,v)\mathbf{k}$ felület **sima**, ha a paramétertartományban az $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ parciális deriváltak folytonosak, és $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ sehol nem a nullavektor.

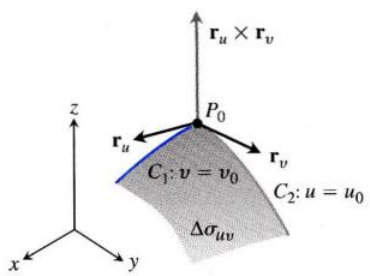
Az $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ sehol sem nulla azt jelenti, hogy a két vektor, $\mathbf{r}_u$ és $\mathbf{r}_v$ semelyik pontban nem párhuzamosak, így minden pontban meghatározzák az érintősíkot a felülethez. Itt ugyanúgy, mint a görbéknél, előfordulhat, hogy ugyanarra a felületdarabra az egyik paraméterezéssel $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ sehol sem nulla, egy másikkal viszont igen. Ha találunk olyan paraméterezést, amellyel a felület sima, akkor arra minden olyan állítás igaz, amely sima felületre vonatkozik. „Csúnya" felületnek nincs sima paraméterezése, pl. egy egyszerű kúpot nem tudunk úgy paraméterezni, hogy a csúcsnál simának minősüljön.

Tekintsünk most egy kis A_{uv} téglalapot a paramétertartományban, melynek oldalai az $u = u_0$, $u = u_0 + \Delta u$, $v = v_0$, $v = v_0 + \Delta v$ egyenesek. A_{uv} minden oldalának van képe az S felületen, a megfelelő paramétervonalak ívei, és ezek határolják A_{uv} képét, a σ_{uv} „felületelemet". A 16.54. ábra jelöléseivel: $v = v_0$ képe a C_1 felületi görbe, $u = u_0$ képe a C_2 felületi görbe, és a közös (u_0, v_0) pont képe a görbék P_0 metszéspontja.

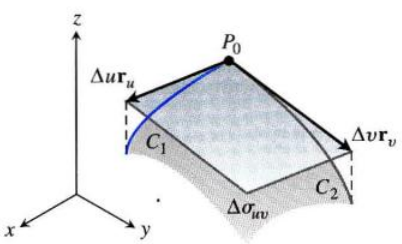
A 16.55. ábra mutatja a σ_{uv} felületelem kinagyított képét. Az $\mathbf{r}_u(u_0,v_0)$ vektor érintőirányú a C_1 görbéhez a P_0 pontban, a $\mathbf{r}_v(u_0,v_0)$ vektor pedig C_2-höz. Az $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ vektor az érintősík normálvektora P_0-ban (itt szükség van arra, hogy ez a vektor ne legyen nullavektor).



16.54. ÁBRA: Az uv-sík A_{uv} téglalapelemének képe az S felület görbült σ_{uv} eleme. Területeik ΔA_{uv} és $\Delta\sigma_{uv}$.



16.55. ÁBRA: Nagyított kép σ_{uv}-ről.



16.56. ÁBRA: A $\Delta u\mathbf{r}_u$ és $\Delta v\mathbf{r}_v$ vektorok által meghatározott paralelogramma területével közelítjük a σ_{uv} felületelem $\Delta\sigma_{uv}$ területét.

A felületelem területét az érintősíkban levő paralelogramma területével közelítjük, annak oldalait pedig a $\Delta u\mathbf{r}_u$, $\Delta v\mathbf{r}_v$ vektorok határozzák meg (16.56. ábra). A paralelogramma területe

$$|\Delta u\mathbf{r}_u \times \Delta v\mathbf{r}_v| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\Delta u\Delta v. \tag{16.40}$$

Az uv-síkon levő T tartomány minden téglalapokra való felosztása generálja az S felületnek egy felosztását felületelemekre. A σ_{uv} felületelem területét tehát a (16.40) képlettel számolt paralelogramma területtel közelítjük, majd ezeket összadjuk, hogy a teljes felületnek egy közelítését kapjuk:

$$\sum_u \sum_v |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\Delta u\Delta v. \tag{16.41}$$

Ahogy Δu és Δv tartanak nullához, az $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ parciális deriváltak folytonossága garantálja, hogy a (16.41) jobboldala az $\int_c^d \int_a^b |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv$ kettős integrálhoz tart. Akár ezzel a kettős integrállal is definiálhatjuk a sima felület felszínét, ez meg fog egyezni minden korábbival.

DEFINÍCIÓ: Sima felület felszíne

Az

$$\mathbf{r}(u,v) = f(u,v)\mathbf{i} + g(u,v)\mathbf{j} + h(u,v)\mathbf{k}, \quad a \le u \le b, \quad c \le v \le d$$

sima felület felszíne

$$A = \int_c^d \int_a^b |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv. \tag{16.42}$$

Ahogy az előző alfejezetben is tettük, a (16.42) egyenletben a $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv$ kifejezést írhatjuk röviden $d\sigma$-nak, így

A felszíndifferenciál és a felszín differenciálos alakja

$$d\sigma = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv \qquad \iint_S d\sigma \tag{16.43}$$

felszíndifferenciál — felszín differenciálos alakja

4. PÉLDA: **Felszín kiszámítása (kúp)**

Határozzuk meg az 1. példában szereplő kúp felszínét (16.51. ábra)!

Megoldás: Az 1. példában már meghatároztunk egy paraméterezést:

$$\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

A (16.42) egyenlőség alkalmazásához először számítsuk ki $\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta$-t:

$$\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -(r\cos\theta)\mathbf{i} - (r\sin\theta)\mathbf{j} + \underbrace{(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)}_{r}\mathbf{k}.$$

Azaz $|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r$. A kúp felszíne

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta|\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2}\, d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(2\pi) = \pi\sqrt{2}. \qquad \square$$

(Az $|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| \neq 0$ feltétel $r = 0$ esetén nem teljesül, de mindenütt máshol igen. A képlet levezetéséből látható, hogy ez a nulla területű határon fellépő jelenség itt és most az integrál értékét nem befolyásolja. Ha egy tételt úgy akarunk alkalmazni, hogy egy feltétele nem teljesül, mindig egyedileg kell elbírálni, hogy eltekinthetünk-e tőle, és miért.)

5. PÉLDA: **Felszín kiszámítása (gömb)**

Határozzuk meg az a sugarú gömb felszínét!

Megoldás: A 2. példában már meghatároztunk egy paraméterezést:

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = (a\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (a\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (a\cos\phi)\mathbf{k},$$
$$0 \le \phi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

A (16.42) egyenlőség alkalmazásához először számítsuk ki $\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta$-t:

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (a^2\sin^2\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (a^2\sin^2\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (a^2\sin\phi\cos\theta)\mathbf{k}.$$

Azaz

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{a^4\sin^4\phi\cos^2\theta + a^4\sin^4\phi\sin^2\theta + a^4\sin^2\phi\cos^2\phi} =$$
$$= \sqrt{a^4\sin^4\phi + a^4\sin^2\phi\cos^2\phi} = \sqrt{a^4\sin^2\phi(\sin^2\phi + \cos^2\phi)} =$$
$$= a^2\sqrt{\sin^2\phi} = a^2\sin\phi,$$

mivel $\sin\phi \ge 0$, ha $0 \le \phi \le \pi$. Következésképp a gömb felszíne

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\phi\, d\phi\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[-a^2\cos\phi\right]_0^{\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} 2a^2 d\theta = 4\pi a^2. \qquad \square$$

(Ha $\phi = 0$, akkor $|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = 0$, de ugyanaz a következtetés, mint az előző példában.)

Felületi integrálok

Miután tudjuk, hogyan számíthatjuk paraméteresen adott felületek felszínét, már integrálhatunk is ezeken a felületeken.

DEFINÍCIÓ: Paraméteres felületi integrál

Ha S egy

$$\mathbf{r}(u,v) = f(u,v)\mathbf{i} + g(u,v)\mathbf{j} + h(u,v)\mathbf{k}, \quad a \le u \le b, \quad c \le v \le d$$

paraméteresen definiált sima felület, és $G(x,y,z)$ egy folytonos függvény, amely értelmezve van ezen a felületen, akkor G **integrálja** S **felett**:

$$\iint_S G(x,y,z)\,d\sigma = \int_c^d \int_a^b G(f(u,v),h(u,v))|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv.$$

6. PÉLDA: **Integrálás paraméteresen adott felületen**

Integráljuk $G(x,y,z) = x^2$ függvényt a $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 1$ kúp felett!

Megoldás: Az 1. és 4. példák alapján $|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{2}r$ már rendelkezésünkre áll.

$$\begin{aligned}\iint_S x^2\,d\sigma &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\cos^2\theta)(\sqrt{2}r)\,dr\,d\theta \qquad x = r\cos\theta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

□

7. PÉLDA: **Felületmenti integrál (fluxus)**

Számítsuk ki az $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$ vektormező felületmenti integrálját (fluxusát) kifelé mutató normálissal az $y = x^2$ parabolikus hengerfelület azon darabján, amelyre $0 \le x \le 1$, $0 \le z \le 4$ (16.57. ábra)!

Megoldás: A felületen $x = x$, $y = x^2$, $z = z$, így a paraméterezés automatikusan adódik: $\mathbf{r}(x,z) = x\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $0 \le x \le 1$, $0 \le z \le 4$. Az érintővektorok szorzata

$$\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x\mathbf{i} - \mathbf{j}.$$

Az egységnyi hosszú normálvektor, ami kifelé mutat:

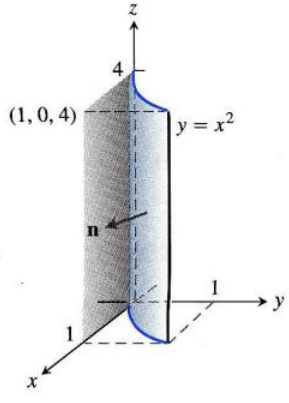
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z|} = \frac{2x\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{4x^2+1}}.$$

A felületen $y = x^2$, így a vektormező a felületen

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k} = x^2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}.$$

Azaz az integrandus

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\left((x^2z)(2x) + (x)(-1) + (-z^2)(0)\right) \\ &= \frac{2x^3z - x}{\sqrt{4x^2+1}}.\end{aligned}$$



16.57. ÁBRA: Parabolikus hengeren vett felületi integrál (7. példa).

A felületmenti integrál kifelé mutató normálissal tehát

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_0^4\int_0^1 \frac{2x^3z-x}{\sqrt{4x^2+1}}|\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_z|\,dx\,dz =$$

$$= \int_0^4\int_0^1 \frac{2x^3z-x}{\sqrt{4x^2+1}}\sqrt{4x^2+1}\,dx\,dz =$$

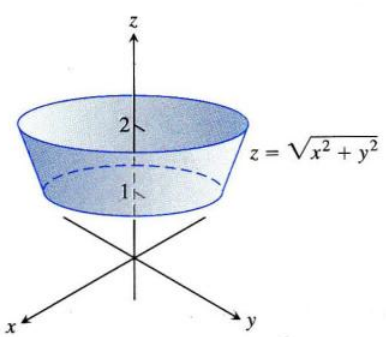
$$= \int_0^4\int_0^1 (2x^3z-x)\,dx\,dz = \int_0^4 \left[\frac{1}{2}x^4z-\frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=1} dz =$$

$$= \int_0^4 \frac{1}{2}(z-1)dz = \left[\frac{1}{4}(z-1)^2\right]_0^4 =$$

$$= \frac{1}{4}(9)-\frac{1}{4}(1) = 2. \qquad \square$$

8. PÉLDA: **Tömegközéppont meghatározása**

Hol van a tömegközéppontja annak az állandó sűrűségű vékony héjnak, amelyet a $z=1$ és $z=2$ síkok vágnak ki a $z=\sqrt{x^2+y^2}$ kúpfelületből (16.58. ábra)?



16.58. ÁBRA: A csonkakúp úgy keletkezik, hogy a $z=\sqrt{x^2+y^2}$ kúpból levágunk a $z=1$ és $z=2$ síkokkal (8. példa).

Megoldás: A felület szimmetriája sugallja, hogy a tömegközéppont a szimmetriatengelyen van, azaz $\bar{x}=\bar{y}=0$. Nekünk $\bar{z}=M_{xy}/M$-et kell kiszámítani. Az 1. és 4. példák alapján már tudjuk, hogy

$$\mathbf{r}(r,\theta) = r\cos\theta\mathbf{i}+r\sin\theta\mathbf{j}+r\mathbf{k}, \quad 1\le r\le 2, \quad 0\le\theta\le 2\pi,$$

és

$$|\mathbf{r}_r\times\mathbf{r}_\theta| = \sqrt{2}r.$$

Ezért

$$M = \iint_S \delta\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \delta\sqrt{2}r\,dr\,d\theta =$$

$$= \delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 d\theta = \delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(2-\frac{1}{2}\right)d\theta =$$

$$= \delta\sqrt{2}\left[\frac{3\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 3\pi\delta\sqrt{2}$$

$$M_{xy} = \iint_S \delta z\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \delta r\sqrt{2}r\,dr\,d\theta =$$

$$= \delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2\,dr\,d\theta = \delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 d\theta =$$

$$= \delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{7}{3}d\theta = \frac{14}{3}\pi\delta\sqrt{2}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{14\pi\delta\sqrt{2}}{3(3\pi\delta\sqrt{2})} = \frac{14}{9}.$$

A héj tömegközéppontja $(0,0,14/9)$. $\square$

16.6. Feladatok

Felületek paraméterezése

Az 1–16. feladatokban adjuk meg a felület egy paraméterezését! (Sok különböző jó megoldás van, a megoldási részben ezek közül csak az egyiket közöljük).

1. A $z = x^2 + y^2$, $z \leq 4$ paraboloid.

2. A $z = 9 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ paraboloid.

3. Csonkított kúp: A $z = \sqrt{x^2 + y^2}/2$ kúpfelület első térnyolcadba eső része a $z = 0$ és $z = 3$ síkok között.

4. Csonkakúp: A $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ kúpfelület $z = 2$ és $z = 4$ síkok közé eső része.

5. Gömbsüveg: Az $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ gömbfelület süvegje, amit a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp vág ki belőle.

6. Gömbfelület darabja: Az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ gömbfelület azon darabja, amelyik az első térnyolcadban van, az xy-sík és a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp között.

7. Gömböv: Az $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ gömbfelület azon része, amely a $z = \sqrt{3}/2$ és $z = -\sqrt{3}/2$ síkok között van.

8. Gömbsüveg: Az $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ gömbfelület azon darabja, amelyik a $z = -2$ sík felett van.

9. Parabolikus henger síkok között: Az a felületdarab, amelyet az $x = 0$, $x = 2$, $z = 0$ síkok vágnak ki a $z = 4 - y^2$ parabolikus hengerből.

10. Parabolikus henger síkok között: Az a felületdarab, amelyet a $z = 0$, $z = 3$, $y = 2$ síkok vágnak ki az $y = x^2$ parabolikus hengerből.

11. Hengergyűrű: Az $y^2 + z^2 = 9$ hengerfelület azon része, amely az $x = 0$ és $x = 3$ síkok között van.

12. Hengerfelület darabja: Az $x^2 + z^2 = 4$ hengerfelület xy-sík feletti darabja, ami az $y = -2$ és $y = 2$ síkok között van.

13. Síkdarab hengerben: Az $x + y + z = 1$ síknak az a része, amely az

(a) $x^2 + y^2 = 9$ hengeren belül van.

(b) $y^2 + z^2 = 9$ hengeren belül van.

14. Síkdarab hengerben: Az $x - y + 2z = 2$ síknak az a része, amely az

(a) $x^2 + z^2 = 3$ hengeren belül van.

(b) $y^2 + z^2 = 2$ hengeren belül van.

15. Hengeröv: Az $(x-2)^2 + z^2 = 4$ hengernek az a része, amely az $y = 0$ és $y = 3$ síkok között van.

16. Hengeröv: Az $y^2 + (z-5)^2 = 25$ hengernek az a része, amely az $x = 0$ és $x = 10$ síkok között van.

Paraméteresen adott felületek felszíne

A 17–26. feladatokban adjuk meg a felületek egy paraméterezését és ezzel írjul fel azt a kettős integrált, ami a felület felszínét adja meg. Számítsuk ki az integrált! (Sok különböző helyes paraméterezés létezik, ezekből csak egyet közlünk a megoldásoknál. Az integrál értéke, természetesen, ugyanaz kell, hogy legyen.)

17. Síkdarab hengerben: Az $y + 2z = 2$ sík $x^2 + y^2 = 1$ hengerbe eső része.

18. Síkdarab hengerben: A $z = -x$ sík $x^2 + y^2 = 4$ hengerbe eső része.

19. Csonkakúp: A $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ kúpfelület $z = 2$ és $z = 6$ síkok közé eső darabja.

20. Csonkakúp: A $z = \sqrt{x^2 + y^2}/3$ kúpfelület $z = 1$ és $z = \frac{4}{3}$ síkok közé eső darabja.

21. Hengergyűrű: Az $x^2 + y^2 = 1$ hengerfelület $z = 1$ és $z = 4$ síkok közé eső darabja.

22. Hengergyűrű: Az $x^2 + z^2 = 10$ hengerfelület $y = -1$ és $y = 1$ síkok közé eső darabja.

23. Paraboloidcsúcs: A $z = 2 - x^2 - y^2$ paraboloidfelület csúcsi része, amelyet a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp vág ki belőle.

24. Paraboloidöv: A $z = x^2 + y^2$ paraboloidfelület $z = 1$ és $z = 4$ síkok közé eső darabja.

25. Gömbsüveg: Az $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ gömbfelület alsó része, amit a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp vág le.

26. Gömböv: Az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ gömbfelület $z = -1$ és $z = \sqrt{3}$ síkok közé eső darabja.

Felületi integrálok paraméteresen adott felületeken

A 27–34. feladatokban számítsuk ki az adott függvény integrálját az adott felületen!

27. Parabolikus henger: $G(x,y,z) = x$ az $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$ parabolikus hengerfelületen.

28. Körhenger: $G(x,y,z) = z$ az $y^2 + z^2 = 4$, $1 \leq x \leq 4$, $0 \leq z$ hengerfelületen.

29. Gömb: $G(x,y,z) = x^2$ az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gömbfelületen.

30. Félgömb: $G(x,y,z) = z^2$ az $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $0 \leq z$ félgömbfelületen.

31. Síkdarab: $F(x,y,z) = z$ az $x + y + z = 4$ síknak azon a darabján, ami a $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ négyzet felett van.

32. Kúp: $F(x,y,z) = z - x$ a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$ kúpfelületen.

33. Parabolikus kupola: $H(x,y,z) = x^2\sqrt{5 - 4z}$ a $z = 1 - x^2 - y^2$, paraboloid $0 \leq z$ csúcsi részén.

34. Gömbsüveg: $H(x,y,z) = yz$ az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ gömbfelület $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp feletti részén.

Felületmenti integrál (fluxus) paraméteresen adott felületeken

A 35–44. feladatokban számítsuk ki az $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ integrált az adott felületen az adott irányítással!

35. Parabolikus henger: $\mathbf{F}=z^2\mathbf{i}+x\mathbf{j}-3z\mathbf{k}$ a $z=4-y^2$ parabolikus hengerfelület azon darabján, amelyet az $x=0$, $x=1$, $z=0$ síkok vágnak le belőle, és a normális az x-tengelytől elfelé mutat.

36. Parabolikus henger: $\mathbf{F}=x^2\mathbf{j}-xz\mathbf{k}$ az $y=x^2$, $-1\le x\le 1$ parabolikus hengerfelület azon darabján, amelyet a $z=0$ és $z=2$ síkok vágnak le belőle, és a normális az yz-síktól elfelé mutat.

37. Gömb: $\mathbf{F}=z\mathbf{k}$ az $x^2+y^2+z^2=a^2$ gömb első térnyolcadba eső részén, az origótól elfelé mutató irányítással.

38. Gömb: $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ az $x^2+y^2+z^2=a^2$ gömbfelület mentén, kifelé mutató irányítással.

39. Sík: $\mathbf{F}=2xy\mathbf{i}+2yz\mathbf{j}+2xz\mathbf{k}$ az $x+y+z=2a$ sík azon darabján, amely a $0\le x\le a$, $0\le y\le a$ négyzet felett van, felfelé mutató irányítással.

40. Henger: $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ az $x^2+y^2=1$ hengerfelület azon darabja felett, amelyik a $z=0$ és $z=a$ síkok között van, kifelé mutató irányítással.

41. Kúp: $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}-z\mathbf{k}$ a $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 1$ kúpfelületen a z-tengelytől elfelé mutató irányítással.

42. Kúp: $\mathbf{F}=y^2\mathbf{i}+xz\mathbf{j}-\mathbf{k}$ a $z=2\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 2$ kúpfelületen a z-tengelytől elfelé mutató irányítással.

43. Csonkakúp: $\mathbf{F}=-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ a $z=\sqrt{x^2+y^2}$, kúpfelület $z=1$ és $z=2$ síkok közötti részén a z-tengelytől elfelé mutató irányítással.

44. $\mathbf{F}=4x\mathbf{i}+4y\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ a $z=x^2+y^2$ paraboloid csúcsi részén a $z=1$ síkig, a z-tengelytől elfelé mutató irányítással.

Tömeg és nyomaték

45. Hol van a súlypontja az $x^2+y^2+z^2=a^2$ gömbfelület első térnyolcadba eső részének?

46. Hol van a tömegközéppontja és mennyi a tehetetlenségi nyomatéka és a tehetetlenségi sugara a z-tengelyre vonatkoztatva annak az állandó δ sűrűségű vékony héjnak, amelyet a $z=1$ és $z=2$ síkok vágnak ki az $x^2+y^2-z^2=0$ hengerből?

47. Mennyi a z-tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka az állandó δ sűrűségű $x^2+y^2+z^2=a^2$ vékony gömbhéjnak?

48. Mennyi a z-tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka az állandó δ sűrűségű $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 1$ kúp alakú vékony héjnak?

Paraméteresen adott felületek érintősíkjai

Egy $\mathbf{r}(u,v)=f(u,v)\mathbf{i}+g(u,v)\mathbf{j}+h(u,v)\mathbf{k}$ paraméteresen adott sima felület $P_0(f(u_0,v_0),g(u_0,v_0),h(u_0,v_0))$ pontjában az érintősík normálvektora $\mathbf{r}_u(u_0,v_0)\times\mathbf{r}_v(u_0,v_0)$. A 49–52. feladatokban adjuk meg a megadott felület érintősíkját a megadott pontban! Azután írjuk fel a felület egyenletét Descartes-féle koordináta-rendszerben, és vázoljuk fel a felületet az érintősíkkal együtt!

49. Kúp: Az $\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+r\mathbf{k}$, $r\ge 0$, $0\le\theta\le 2\pi$ kúpfelület, az $(r,\theta)=(2,\pi/4)$ paraméterű pont, azaz $P_0(\sqrt{2},\sqrt{2},2)$ pont.

50. Félgömb: Az $\mathbf{r}(\phi,\theta)=(4\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i}+(4\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j}+4(\cos\phi)\mathbf{k}$, $0\le\phi\le\pi/2$, $0\le\theta\le 2\pi$ félgömbfelület, a $(\phi,\theta)=(\pi/6,\pi/4)$ paraméterű pont, azaz a $P_0(\sqrt{2},\sqrt{2},2\sqrt{3})$ pont.

51. Körhenger: Az $\mathbf{r}(\theta,z)=(3\sin 2\theta)\mathbf{i}+(6\sin^2\theta)\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $0\le\theta\le\pi$ körhengerfelület, a $(\theta,z)=(\pi/3,0)$ paraméterű pont, azaz a $P_0(3\sqrt{3}/2,9/2,0)$ pont.

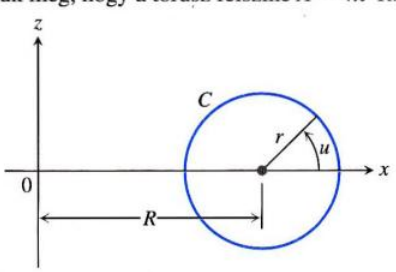
52. Parabolikus henger: Az $\mathbf{r}(x,y)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}-x^2\mathbf{k}$, $-\infty<x<\infty$, $-\infty<y<\infty$, az $(x,y)=(1,2)$ paraméterű pont, azaz a $P_0(1,2,-1)$ pont.

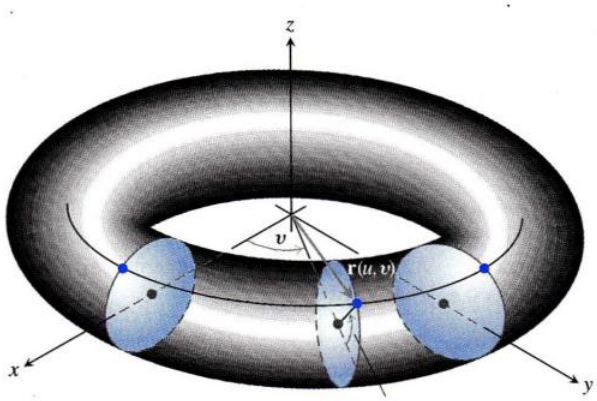
További példák paraméterezésre

53. **(a)** Egy **tóruszt** úgy kapunk, hogy egy C kört, amely az xz-síkban van, megforgatunk a z-tengely körül. (Lásd a mellékelt ábrát.) Mutassuk meg, hogy ha C sugara $r>0$, és a középpontja az $(R,0,0)$, $r\le R$ pontban van, akkor a tórusz egy paraméterezése

$$\mathbf{r}(u,v)=((R+r\cos u)\cos v)\mathbf{i}+((R+r\cos u)\sin v)\mathbf{j}+(r\sin u)\mathbf{k},$$

ahol $0\le u\le 2\pi$, $0\le v\le 2\pi$ az ábrán levő szögek!
(b) Mutassuk meg, hogy a tórusz felszíne $A=4\pi^2Rr$!





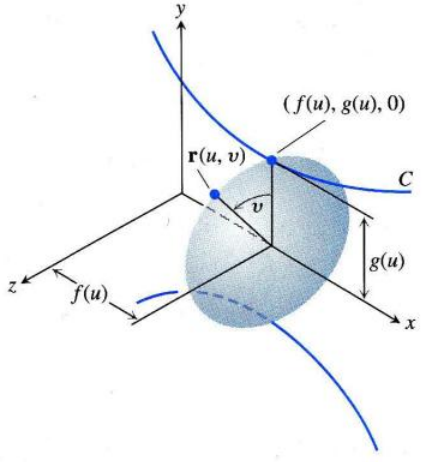
54. Forgástestek paraméterezése: Legyen C: $(f(u),g(u))$ egy paraméteresen adott görbe és $g(u)\ge 0$ és $f(u)$ monoton, ha $a\le u\le b$. A görbét megforgatjuk az x-tengely körül.

(a) Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{r}(u,v)=f(u)\mathbf{i}+(g(u)\cos v)\mathbf{j}+(g(u)\sin v)\mathbf{k}$$

a felület egy paraméterezése, ahol $0\le v\le 2\pi$, mivel v a $g(u)$ hosszúságú forgó sugár szöge az xy-síkkal, amikor

$\mathbf{r}(u,v)$-ben van a végpontja, ahogy azt a mellékelt ábra mutatja! Vegyük észre, hogy $f(u)$ a forgástengely menti távolságot adja meg, $g(u)$ pedig a tengelytől való távolságot.



(b) Adjuk meg a paraméteres egyenletét annak a felületnek, amelyet úgy kapunk, hogy az $x = y^2$, $y \geq 0$ görbét megforgatjuk az x-tengely körül!

55. **(a)** Emlékezzünk az $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ ellipszis $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ paraméterezésére. A gömbkoordináta-rendszer θ és ϕ szögét használva mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{r}(\theta,\phi) = (a\cos\theta\cos\phi)\mathbf{i} + (b\sin\theta\cos\phi)\mathbf{j} + (c\sin\phi)\mathbf{k}$$

az $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z/c^2) = 1$ ellipszoid paraméterezése!
(b) Írjuk fel az ellipszis felszínét megadó integrált, de ne számítsuk ki!

56. **Egyköpenyű hiperboloid:**

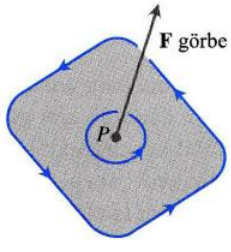
(a) Adjuk meg az $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ egyköpenyű hiperboloid egy θ-tól és u-tól függő paraméterezését, ahol θ az $x^2 + y^2 = r^2$ körrel van kapcsolatban, u pedig az $r^2 - z^2 = 1$ hiperbolával (7.8. alfejezet, 84. példa)!

(b) Általánosítsuk az előző pont eredményét az $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) - (z^2/c^2) = 1$ hiperboloidra!

57. (*Az előző feladat folytatása.*) Adjuk meg a Descartes-féle koordinátákkal adott egyenletét az $x^2 + y^2 - z^2 = 25$ hiperboloid érintősíkjának abban az $(x_0, y_0, 0)$ pontban, ahol $x_0^2 + y_0^2 = 25$.

58. **Kétköpenyű hiperboloid:** Adjuk meg a $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ kétköpenyű hiperboloid egy paraméterezését!

16.7. Stokes-tétel



16.59. ÁBRA: A cirkulációvektor a háromdimenziós áramlási tér egy P pontjában. Az ábra mutatja a pozitív cirkuláció irányát.

Ahogy a 16.4. alfejezetben láttuk, a kétdimenziós $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ vektormező cirkulációsűrűsége (örvénysűrűsége) az (x,y) pontban a $\partial N/\partial x - \partial M/\partial y$ skalár mennyiség volt. Már ott is emlegettük, hogy ez egy vektor $\mathbf{k}$-komponense. Három dimenzióban egy adott síkban levő adott P pont körüli cirkuláció egy vektorral van jellemezve. A vektor merőleges a síkra a P pontban, és olyan irányú, hogy ha a hegye felől nézve a síkra a cirkulációt pozitív körüljárású görbén számoljuk, akkor nemnegatív cirkulációt kapunk (16.59. ábra). A vektor hossza a cirkulációsűrűséget adja, így a sík irányától függően változik. Be lehet látni, hogy a leghosszabb ilyen vektor az (x,y,z) pontban az $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ vektormező esetén a **rotációvektor**

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \qquad (16.44)$$

Ezt az információt a Stokes-tételből nyerjük, ami a Green-tétel általánosítása három dimenzióra.

Vegyük észre, hogy $(\operatorname{rot}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k} = (\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)$ összhangban van a korábbi definíciónkkal, amikor a mező kétdimenziós $\mathbf{F} = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$ vektormező. A (16.44) képlet $\mathbf{F}$ rotációjának definíciójában egy rövid, jól megjegyezhető alakba is írható, ha a ∇ operátort használjuk:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (16.45)$$

$\mathbf{F}$ rotációja $\nabla \times \mathbf{F}$:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$
$$= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$
$$= \operatorname{rot}\mathbf{F}.$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} \tag{16.46}$$

1. PÉLDA: **F rotációjának meghatározása**

Adjuk meg $\mathbf{F} = (x^2 - y)\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ rotációját!

Megoldás:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = & \qquad \text{(16.46) egyenlőség} \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y & 4z & x^2 \end{vmatrix} = \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(4z)\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - y)\right)\mathbf{j} + \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(4z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y)\right)\mathbf{k} = \\
&= (0-4)\mathbf{i} - (2x-0)\mathbf{j} + (0+1)\mathbf{k} = \\
&= -4\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \mathbf{k}.
\end{aligned}$$

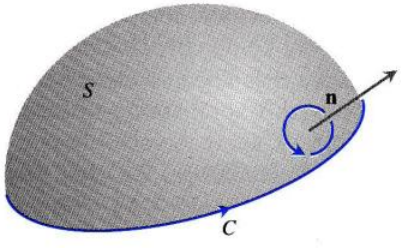
□

A ∇ operátorral már korábban is találkoztunk. Most a vektorértékű $\mathbf{F}$ függvénnyel „vektoriálisan szoroztuk", de korábban, a skalárértékű $f(x,y,z)$ függvénnyel „mintha skalárként szoroztunk volna" koordinátánként, és az eredmény a gradiensvektor lett:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Stokes-tétel

A Stokes-tétel azt mondja ki, hogy bizonyos feltételek mellett, amelyek a gyakorlatban általában teljesülnek, egy irányított felületet határoló zárt görbén vett cirkuláció, amennyiben a görbén a körüljárás a felület normálvektormezőjének irányából nézve az óramutató járásának irányával ellentétes, megegyezik a rotáció felületre merőleges komponensének integráljával a felületen (16.60. ábra).



16.60. ÁBRA: Az irányított felület normálvektormezőjének irányából nézve az óramutató járásával ellentétes a határoló görbe körüljárási iránya.

5. TÉTEL: **Stokes-tétel**

Az $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ vektormező cirkulációja egy irányított S felület C határológörbéjén a felület $\mathbf{n}$ normálvektormezőjének irányából nézve óramutató járásával ellentétes körüljárással egyenlő a $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ függvény S felületmenti integráljával.

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \tag{16.47}$$

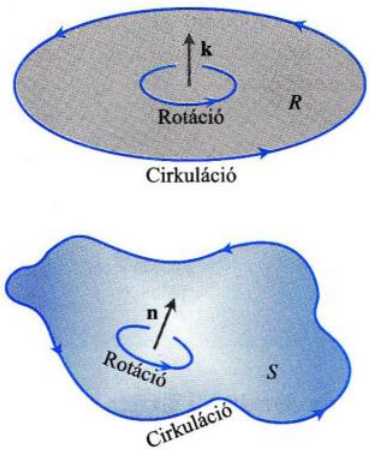
cirkuláció — rotáció integrálja

Természetesen az állítás csak bizonyos matematikai feltételek mellett igaz. A vektormezőre, a felületre és a határára is bizonyos kikötéseket kell tenni, pl. már csak azért is, hogy a szóbanforgó integrálok létezzenek. A legtöbbször egyszerűen azt tesszük fel, hogy a képletben előforduló összes függvény (beleértve a görbét és felületet definiálókat is) rendelkezzen folytonos deriválttal.[1]

Vegyük észre, hogy a (16.47) egyenlőségből az is következik, hogy ha S_1 és S_2 két irányított felület ugyanazzal a C határológörbével, akkor

$$\iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1\, d\sigma = \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2\, d\sigma.$$

[1]Figyelem: Az integráltranszformációs képleteknél az adott feltételeknek minden pontban teljesülniük kell. Egyetlen pont kivétel is elronthatja az egyenlőség érvényességét!



16.61. ÁBRA: A Green-tétel és a Stokes-tétel összehasonlítása.

Ha C egy görbe az xy-síkban, óramutató járásával ellentétes körüljárással, és T az xy-sík C által határolt tartománya, akkor

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Ezeket az adatokat a Stokes-tételbe helyettesítve

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_T \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy,$$

ami nem más, mint az érintővektoros formája a Green-tételnek (16.61. ábra). Tehát a Green-tételt is felírhatjuk operátoros formában a kétdimenziós vektormezőkre

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_T \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA. \tag{16.48}$$

2. PÉLDA: **A Stokes-tétel ellenőrzése félgömbön**

Számítsuk ki a (16.47) egyenlőség mindkét oldalán álló kifejezést, ha az S felület az $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$ félgömbfelület, a normálisok felfelé mutatnak, a határoló görbe így $C: x^2 + y^2 = 9$, a vektormező pedig $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$.

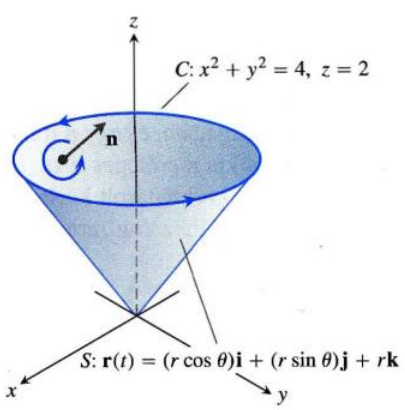
Megoldás: Felülről nézve óramutató járásával ellentétes körüljárással $C: \mathbf{r}(\theta) = (3\cos\theta)\mathbf{i} + (3\sin\theta)\mathbf{j}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$d\mathbf{r} = (-3\sin\theta\, d\theta)\mathbf{i} + (3\sin\theta\, d\theta)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} = (3\sin\theta)\mathbf{i} - (3\cos\theta)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -9\sin^2\theta\, d\theta - 9\cos^2\theta\, d\theta = -9\theta.$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} -9\, d\theta = -18\pi.$$

A rotáció integrálja pedig:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)\mathbf{k} =$$
$$= (0-0)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{j} + (-1-1)\mathbf{k} = -2\mathbf{k}$$
$$\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{3}$$
$$d\sigma = \frac{3}{z} dA$$
$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = -\frac{2z}{3}\frac{3}{z} dA = -2dA.$$



16.62. ÁBRA: A kúp és a görbe a 4. példában.

és

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 9} -2dA = -18\pi.$$

Tehát a két integrál megegyezik. □

3. PÉLDA: **Cirkuláció meghatározása**

Számítsuk ki az $\mathbf{F} = (x^2 - y)\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ vektormező cirkulációját a $z = 2$ sík és a $z = \sqrt{x^2+y^2}$ kúp metszetgörbéje mentén, felülről nézve óramutató járásával ellentétes irányítású körüljárással (16.62. ábra)!

Megoldás: A Stokes-tétel lehetővé teszi, hogy a kúpon integráljunk. A görbe körüljárása miatt, a kúp normálisainak befelé-felfelé kell mutatniuk. Ez azt jelenti, $\mathbf{n}$ z-koordinátája pozitív. A kúp paraméterezése:

$$\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \quad 0 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Ebből nyerjük:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta|} = \frac{-(r\cos\theta)\mathbf{i} - (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}}{r\sqrt{2}} = \quad \text{16.6. alfejezet 4. példa}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}(-(\cos\theta)\mathbf{i} - (\sin\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

$$d\sigma = r\sqrt{2}\,dr\,d\theta \quad \text{16.6. alfejezet, 4. példa}$$

$$\nabla\mathbf{F} = -4\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \mathbf{k} = \quad \text{1. példa}$$

$$= -4\mathbf{i} - 2r\cos\theta\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Következésképp

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(4\cos\theta + 2r\cos\theta\sin\theta + 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(4\cos\theta + r\sin 2\theta + 1),$$

a cirkuláció pedig

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2}}(4\cos\theta + r\sin 2\theta + 1)(r\sqrt{2}\,dr\,d\theta) = 4\pi. \qquad \square$$

$\nabla \times \mathbf{F}$ szemléltetése lapátkerékkel

Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}(x,y,z)$ egy áramló folyadék sebessége, aminek sűrűsége az (x,y,z) pontban $\delta(x,y,z)$, és legyen $\mathbf{F} = \delta\mathbf{v}$. Ekkor

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

a folyadék cirkulációja a zárt C görbén. A Stokes-tétel szerint a cirkuláció egyenlő $\nabla\times\mathbf{F}$ felületmenti integráljával a C által kifeszített S felületen.

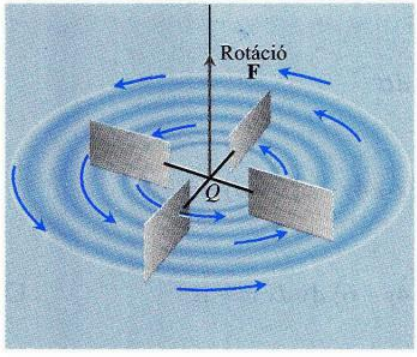
$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma.$$

Tegyük fel, rögzítünk egy Q pontot $\mathbf{F}$ értelmezési tartományában, és egy $\mathbf{u}$ irányt Q-ban. Legyen C egy ρ sugarú kör, középpontja Q és a síkja merőleges $\mathbf{u}$-ra. Ha $\nabla\times\mathbf{F}$ folytonos Q-ban, akkor $\nabla\times\mathbf{F}$ $\mathbf{u}$-komponensének C-vel határolt körlapon vett integráljának középértéke $\nabla\times\mathbf{F}$ Q-beli $\mathbf{u}$-komponenséhez fog tartani, ha $\rho\to 0$.

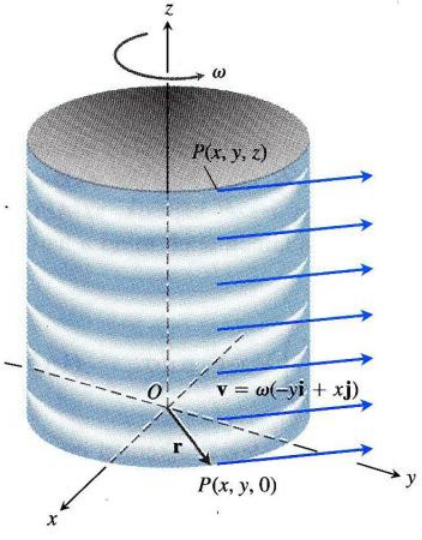
$$(\nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{u})_Q = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}\,d\sigma.$$

Ha ebbe az egyenlőségbe behelyettesítjük a cirkulációt, azt kapjuk, hogy

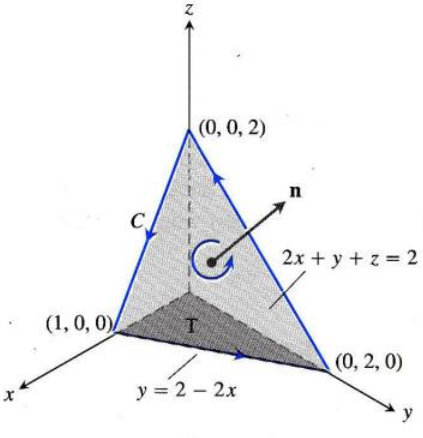
$$(\nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{u})_Q = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \qquad (16.49)$$



16.63. ÁBRA: rot**F** lapátkerék-szemléltetése.



16.64. ÁBRA: Egy egyenletesen forgó áramlás konstans szögsebességgel pozitív forgásirányban (4. példa).



16.65. ÁBRA: A sík felület (5. példa).

A (16.49) egyenlőség bal oldala akkor maximális, ha **u** ugyanolyan irányú, mint $\nabla \times \mathbf{F}$. Ha ρ kicsi, a (16.49) egyenlőség jobb oldala megközelítőleg

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

ami a C-n vett cirkuláció osztva a körlemez területével (örvénysűrűség). Tegyük fel, hogy egy kicsi ρ sugarú lapátkereket helyezünk el Q-ba, aminek tengelye **u** irányú. A kis kerék forgási sebessége a cirkulációtól (örvényléstől) függ, nagyobb cirkulációnál gyorsabb. Akkor fog a leggyorsabban forogni, ha tengelye $\nabla \times \mathbf{F}$ irányába esik (16.63. ábra).

4. PÉLDA: $\nabla \times \mathbf{F}$ viszonya a cirkulációhoz

Egy állandó sűrűségű folyadék forog a z-tengely körül $\mathbf{v} = \omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$ sebességgel, ahol ω pozitív konstans, úgynevezett *szögsebesség* (16.64. ábra). Ha $\mathbf{F} = \mathbf{v}$, adjuk meg $\nabla \times \mathbf{F}$-et, és viszonyítsuk a cirkulációsűrűséghez!

Megoldás: Mivel $\mathbf{F} = \mathbf{v} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$
$$= (0-0)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{j} + (\omega - (-\omega))\mathbf{k} = 2\omega\mathbf{k}.$$

A Stokes-tétel szerint **F** cirkulációja egy ρ sugarú C körön ami egy S körlapot határol egy $\nabla \times \mathbf{F}$-re merőleges síkban, mondjuk pl. az xy-síkban:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = \iint_S 2\omega\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\, dx\, dy = (2\omega)(\pi\rho^2).$$

Azaz

$$(\nabla \times \mathbf{F})\cdot\mathbf{k} = 2\omega = \frac{1}{\pi\rho^2}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

ami összecseng a (16.49) egyenlőséggel, ha $\mathbf{u} = \mathbf{k}$. □

5. PÉLDA: Stokes-tétel alkalmazása

Alkalmazzuk a Stokes-tételt az $\int_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ integrál kiszámítására, ha $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}$, és C a $2x+y+z=2$ sík első térnyolcadba eső részének határoló görbéje, felülről nézve óramutató járásával ellentétes irányítással (16.65. ábra)!

Megoldás: A sík az $f(x,y,z) = 2$ szintfelülete az $f(x,y,z) = 2x+y+z$ függvénynek. Az egységnyi normálvektor

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})}{|2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\right)$$

éppen megfelelő irányú a körüljáráshoz. A Stokes-tétel alkalmazásához ki kell számítanunk

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & 3xz \end{vmatrix} = (x-3z)\mathbf{j} + y\mathbf{k}.$$

A síkon $z = 2-2x-y$, így

$$\nabla \times \mathbf{F} = (x-3(2-2x-y))\mathbf{j} + y\mathbf{k} = (7x+3y-6)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

és

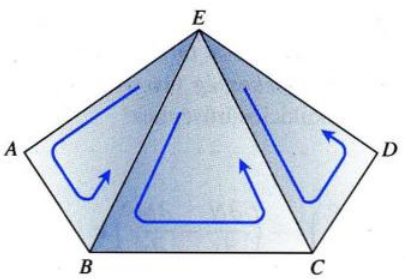
$$\nabla \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(7x+3y-6+y) = \frac{1}{\sqrt{6}}(7x+4y-6).$$

A felületi területelem

$$d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot\mathbf{k}|}dA = \frac{\sqrt{6}}{1}dx\, dy.$$

A cirkuláció

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$
$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \frac{1}{\sqrt{6}}(7x+4y-6)\sqrt{6}\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} (7x+4y-6)\,dy\,dx = -1. \qquad \square$$



16.66. ÁBRA: Egy poliéderfelület egy részlete.

A Stokes-tétel bizonyítása poliéderfelületre: Legyen S olyan felület, ami véges sok síktartományból áll (például 16.66. ábra). A Green-tételt alkalmazzuk minden egyes síkelemre. Kétféle síkelemet különböztetünk meg.

1. Amelyeket minden oldalról más elemek határolnak,
2. Amelyeknek egy vagy több élük mentén nincs másik kapcsolódó elem.

Ha az S-et határoló görbét Δ-val jelöljük, akkor Δ azokból az élekből áll, amelyekhez nem csatlakozik másik elem. Ha pl. a 16.66. ábrát vesszük, akkor az EAB, BCE, CDE háromszögekből az S felület egy részét képezik, az $ABCD$ poligon pedig a Δ határ egy részét. Alkalmazzuk a Green-tételt mind a három háromszögre, és adjuk össze

$$\left(\oint_{EAB} + \oint_{BCE} + \oint_{CDE}\right)\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \left(\iint_{EAB} + \iint_{BCE} + \iint_{CDE}\right)\nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma. \qquad (16.50)$$

A bal oldali három vonalintegrál összesen egy vonalintegrál a kerület mentén, mert a csatlakozó éleken oda-vissza integrálás kiejti egymást. Pl. a BE szakaszon az ABE háromszögön való integráláskor ellenkező irányba megyünk, mint amikor az EBC vonalon integrálunk. Tehát ezekre a háromszögekre azt kaptuk, hogy

$$\oint_{ABCDE} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{ABCDE} \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma.$$

Ha a Green-tételt a síktartományokból álló felület minden elemére alkalmazzuk és összeadjuk az eredményeket, azt kapjuk, hogy

$$\oint_{\Delta} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma. \qquad \square$$

Ez a Stokes-tétel bizonyítása poliéderfelületre. Általánosabb felületekre komolyabb könyvekben keressünk bizonyítást.



16.67. ÁBRA: A Stokes-tétel olyan irányított felületekre is érvényes, amelyen lyukak vannak.

A Stokes-tétel olyan felületekre, amelyeken lyukak vannak

Hasonló meggondolással, mint azt a Green-tételnél tettük, a Stokes-tétel is kiterjeszthető olyan irányított felületekre, amelyeken lyukak vannak: A $\nabla\times\mathbf{F}$ normálkomponensének integrálja az S felületen egyenlő a határokon számított vonalintegrálok összegével, ha a körüljárásukat megfelelően választjuk meg.

Egy fontos azonosság

A következő azonosságra gyakran van szükségünk matematikai és fizikai számításokban:

$$\text{rot}\,\text{grad}\,f = \mathbf{0} \quad \text{vagy} \quad \nabla\times\nabla f = \mathbf{0}. \qquad (16.51)$$

Ez az azonosság minden olyan $f(x,y,z)$ függvényre fennáll, amelyiknek második parciális deriváltjai folytonosak. A bizonyítás:

$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz})\mathbf{i} - (f_{zx} - f_{xz})\mathbf{j} + (f_{yx} - f_{xy})\mathbf{k}.$$

Ha a második parciális deriváltak folytonosak, akkor a vegyes parciális deriváltak egyenlők (2. Tétel), így ez a vektor a nullavektor.

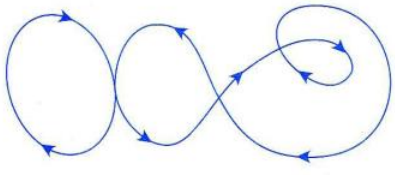
Konzervatív vektormezők és a Stokes-tétel

A 16.3. alfejezetben megállapítottuk, hogy ha $\mathbf{F}$ konzervatív egy nyílt D tartományon, az ekvivalens azzal, hogy ebben a tartományban haladó minden zárt görbén vett integrálja nulla. Ez egyszeresen összefüggő nyílt tartomány esetében azzal is ekvivalens, hogy $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

6. TÉTEL: A zárt görbén vett integrál nulla volta, és a $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = 0$ közötti összefüggés

Ha $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ egy egyszeresen összefüggő D nyílt tartomány minden pontjában, akkor bármely a D-ben haladó szakaszonként sima, zárt C görbére érvényes, hogy

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$



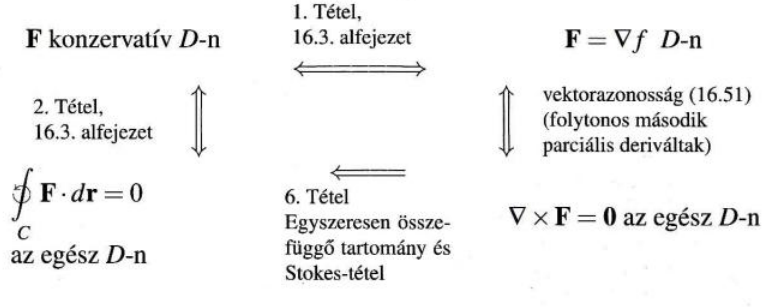
16.68. ÁBRA: Egy egyszeresen összefüggő, nyílt tartományban olyan differenciálható görbék, amelyek átmetszik magukat, felbonthatók olyan zárt részgörbékre, amelyekre a Stokes-tétel már érvényes.

A bizonyítás vázlata: A tétel bizonyítását általában két lépésben végzik. Először egyszerű, zárt görbékre. A topológia egy tétele azt mondja ki, hogy egy egyszeresen összefüggő, nyílt tartományban minden differenciálható egyszerű, zárt C görbe határa egy irányítható sima S felületnek, ami szintén D-ben van. Következésképp, a Stokes-tétel szerint

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0.$$

A második lépés olyan görbék vizsgálata, amelyek átmetszik magukat, mint pl. a 16.68. ábrán. Az ötlet az, hogy ezeket a görbéket egyszerű görbékre daraboljuk fel, ezekre alkalmazzuk a Stokes-tételt, majd az eredményeket összeadjuk. □

A következő diagram összegzi a konzervatív vektormezők tulajdonságait összefüggő és ugyanakkor egyszeresen összefüggő, nyílt tartományokon.



16.7. Feladatok

A Stokes-tétel alkalmazása cirkuláció számítására

Az 1–6. feladatokban használjuk a Stokes-tételben szereplő felületi integrált az adott görbén a cirkuláció kiszámítására!

1. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$
C: A $4x^2 + y^2 = 4$ ellipszis az *xy*-síkban, felülről nézve az óramutató járásával ellentétes irányú körüljárás.

2. $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$
C: Az $x^2 + y^2 = 9$ kör az *xy*-síkban, felülről nézve az óramutató járásával ellentétes irányú körüljárás.

3. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$
C: Annak a háromszögnek a határa, amely az $x+y+z=1$ síkból az első térnyolcadba esik. Felülről nézve az óramutató járásával ellentétes irányú körüljárás.

4. $\mathbf{F} = (y^2+z^2)\mathbf{i} + (x^2+z^2)\mathbf{j} + (x^2+y^2)\mathbf{k}$
C: Annak a háromszögnek a határa, amely az $x+y+z=1$ síkból az első térnyolcadba esik. Felülről nézve az óramutató járásával ellentétes irányú körüljárás.

5. $\mathbf{F} = (y^2+z^2)\mathbf{i} + (x^2+y^2)\mathbf{j} + (x^2+y^2)\mathbf{k}$
C: Az *xy*-síkban futó négyzetvonal, az $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ egyenesekkel megadva, felülről nézve az óramutató járásával ellentétes irányú körüljárás.

6. $\mathbf{F} = x^2y^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$
C: Az $x^2 + y^2 = 4$ henger és az $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$ félgömb metszésvonala, felülről nézve az óramutató járásával ellentétes irányú körüljárás.

Rotáció felületmenti integrálja

7. Legyen $\mathbf{n}$ az

$$S: \quad 4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36, \quad z \geq 0$$

ellipszisfelület kifelé (felfelé) mutató egységnyi normálvektora, és legyen

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (x^2+y^4)^{3/2}\sin e^{\sqrt{xyz}}\mathbf{k}.$$

Határozzuk meg az

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

integrál értékét! (*Útmutatás*: Az ellipszis alapvonalának paraméterezése $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.)

8. Legyen $\mathbf{n}$ az

$$S: \quad 4x^2 + y + z^2 = 4, \quad y \geq 0$$

paraboloidfelület kifelé (origótól elfelé) mutató egységnyi normálvektora, és legyen

$$\mathbf{F} = \left(-z + \frac{1}{2+x}\right)\mathbf{i} + (\operatorname{arctg} y)\mathbf{j} + \left(x + \frac{1}{4+z}\right)\mathbf{k}.$$

Határozzuk meg az $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ integrál értékét!

9. Legyen *S* az $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq h$ henger az $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = h$ tetejével együtt, és legyen $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$. Használjuk a Stokes-tételt a $\nabla \times \mathbf{F}$ függvény *S* felületmenti integráljának kiszámítására kifelé mutató normálissal!

10. Számítsuk ki az

$$\iint_S \nabla \times (y\mathbf{i}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

integrált, ahol *S* az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ félgömbfelület, kifelé mutató normálissal!

11. Rotáció felületmenti integrálja: Mutassuk meg, hogy az

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

integrál ugyanannyi minden olyan irányított felületre, amit *C* határol, ha úgy van irányítva, hogy ugyanazt a pozitív körüljárást generálja *C*-n!

12. Legyen $\mathbf{F}$ egy differenciálható vektormező egy olyan tartományon, ami magában foglal egy sima, zárt *S* felületet és annak teljes belsejét. Legyen $\mathbf{n}$ a felület egységnyi hosszú vektorokból álló normálvektormezője. Tegyük fel, hogy az *S* felület az S_1 és S_2 sima felületek egyesítése, amelyek egy sima görbében csatlakoznak egymáshoz. Tudunk mondani valamit az

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

integrálról? Válaszunkat indokoljuk!

A Stokes-tétel paraméteresen adott felületekre

A 13–18. feladatokban használjuk a Stokes-tételt az $\mathbf{F}$ vektormező rotációja felületmenti integráljának kiszámításához az adott felületen, kifelé mutató normálissal!

13. $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$
S: $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + (4-r^2)\mathbf{k}$
$0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

14. $\mathbf{F} = (y-z)\mathbf{i} + (z-x)\mathbf{j} + (x+z)\mathbf{k}$
S: $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + (9-r^2)\mathbf{k}$
$0 \leq r \leq 3$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

15. $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + 2y^3z\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$
S: $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$
$0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

16. $\mathbf{F} = (x-y)\mathbf{i} + (y-z)\mathbf{j} + (z-x)\mathbf{k}$
S: $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + (5-r)\mathbf{k}$
$0 \leq r \leq 5$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

17. $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} + (5-2x)\mathbf{j} + (z^2-2)\mathbf{k}$
S: $\mathbf{r}(\phi,\theta) = (\sqrt{3}\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (\sqrt{3}\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (\sqrt{3}\cos\phi)\mathbf{k}$
$0 \leq \phi \leq \pi/2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

18. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x\mathbf{k}$
S: $\mathbf{r}(\phi,\theta) = (2\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (2\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (2\cos\phi)\mathbf{k}$
$0 \leq \phi \leq \pi/2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

További példák és feladatok

19. Nulla cirkuláció: Használjuk a $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$ azonosságot ((16.51) egyenlőség) és a Stokes-tételt annak kimutatására, hogy a következő vektormezők cirkulációja a térben minden irányítható sima felület határán nulla!

(a) $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{F} = \nabla(xy^2z^3)$

(c) $\mathbf{F} = \nabla \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

(d) $\mathbf{F} = \nabla f$

20. Nulla cirkuláció: Legyen $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{F} = \nabla f$ vektormezőnek az xy-síkban az $x^2+y^2 = a^2$ kör mentén az óramutató járásával megegyező körüljárással számított integrálja nulla úgy, hogy

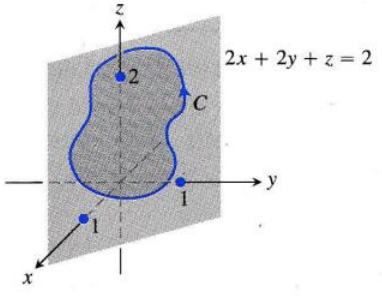
(a) az $\mathbf{r} = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ paraméterezéssel integráljuk $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$-et,

(b) használjuk a Stokes-tételt!

21. Legyen C egy egyszerű, zárt görbe a $2x+2y+z=2$ síkban olyan körüljárással, ahogy az ábrán látható. Mutassuk meg, hogy az

$$\oint_C 2y\,dx + 3z\,dy - x\,dz$$

integrál csak a körülzárt terület nagyságától függ, és nem függ attól, hol van, és milyen alakú a görbe!



22. Mutassuk meg, ha $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, akkor $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$!

23. Adjunk meg egy olyan kétszer differenciálható komponensekkel rendelkező vektormezőt, amelynek rotációja $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, vagy mutassuk meg, hogy ilyen nem létezik!

24. Következik-e valami a Stokes-tételből olyan vektortérben számított cirkulációra, amelynek rotációja nulla? Válaszunkat indokoljuk!

25. Legyen T egy tartomány az xy-síkban, amelyet egy szakaszonként sima görbe határol, és tegyük fel, hogy ismerjük az x- és y-tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékait, legyenek ezek I_x, ill. I_y. Fejezzük ki I_x és I_y segítségével az

$$\oint_C \nabla(r^4) \cdot \mathbf{n}\,ds$$

integrált, ahol $r = \sqrt{x^2+y^2}$!

26. Nulla rotáció, de a tér mégsem konzervatív: Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

tér rotációja nulla, de az

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

integrál nem nulla, ha C az xy-síkban az $x^2+y^2 = 1$ kör! (A 6. Tétel itt nem alkalmazható, mert $\mathbf{F}$ értelmezési tartománya nem egyszeresen összefüggő, a teljes z tengely hiányzik belőle. Az adott C görbét nem lehet egy pontra összehúzni úgy, hogy közben mindig teljes egészében az értelmezési tartományban maradjon.)

16.8. A Gauss–Osztrogradszkij-tétel

A síkbeli Green-formula normálvektoros alakja szerint egy vektormező egyszerű, zárt görbe menti vonalintegrálja megegyezik a vektormező divergenciájának a görbe által körülzárt felületen vett integráljával. A tétel háromdimenziós általánosítása, a Gauss–Osztrogradszkij-tétel azt mondja ki, hogy egy térbeli vektormező zárt felületen vett felületi integrálja egyenlő a vektormező divergenciájának a felület által határolt térrészen vett integráljával. A 16.8. részben bebizonyítjuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt, és megnézzük, hogy hogyan lehet felületi integrált számolni a segítségével. Levezetjük Gauss törvényét az elektromos mező fluxusáról, a hidrodinamika folytonossági törvényét, végül a vektormezők integráljáról szóló tételek eredményét egy közös, egyesített elvként foglaljuk össze.

Divergencia a háromdimenziós térben

Az $\mathbf{F} = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}$ vektormező **divergenciája** a következő skalárfüggvény:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{16.52}$$

A div**F** jelölést „**F** divergenciájának" vagy „div **F**"-nek olvassuk. A $\nabla \cdot \mathbf{F}$ kiolvasva „nabla **F**".

A háromdimenziós div**F** fizikai értelmezése hasonló a kétdimenzióshoz. Ha **F** egy áramló folyadék sebességmezője, akkor div**F** értéke egy (x,y,z) pontban megmutatja, hogy a folyadéknak milyen bő forrása vagy nyelője az (x,y,z) pont. (Tehát, hogy az adott pontban keletkezik vagy eltűnik-e folyadék, és ha igen, milyen sebességgel?)

A divergencia az egységnyi térfogatra eső fluxus, vagy másképpen a pontbeli fluxussűrűség.

1. PÉLDA: **A divergencia kiszámolása**

Számoljuk ki az $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} - xy\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ vektormező divergenciáját!

Megoldás: **F** divergenciája

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-xy) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = 2z - x - 1. \qquad \square$$

A Gauss–Osztrogradszkij-tétel

A Gauss–Osztrogradszkij-tétel azt mondja ki, hogy megfelelő feltételek teljesülése esetén egy vektormezőnek egy zárt (kifelé irányított) felületen vett felületi integrálja egyenlő a vektormező divergenciájának a felület által határolt térrészen vett integráljával. A Gauss–Osztrogradszkij-tételt szokás Gauss-tételnek, vagy divergenciatételnek is nevezni.

7. TÉTEL: **Gauss–Osztrogradszkij-tétel (divergenciatétel)**

Legyen S egy irányított felület, amelynek **n** a kifelé mutató egységvektorokból álló normálmezője, és D a felület által határolt tartomány. Ekkor az **F** vektormezőnek az S-en vett felületi integrálja egyenlő $\nabla \cdot \mathbf{F}$ D-n vett integráljával:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV. \tag{16.53}$$

felületi integrál — a divergencia integrálja

2. PÉLDA: **A Gauss–Osztrogradszkij-tétel két oldala**

Számoljuk ki a (16.53) egyenlőség két oldalán szereplő mennyiségeket, ha a vektormező $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ és a zárt felület az $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ gömbhéj!

Megoldás: Az S gömb kifelé mutató normálmezőjét az $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$ függvény gradiensmezőjének normálásával kapjuk:

$$\mathbf{n} = \frac{2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a}.$$

Így

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} = \frac{a^2}{a} = a,$$

mivel a gömb felszínén $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Tehát a (16.53) képlet bal oldala:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_S a\, d\sigma = a \iint_S d\sigma = a(4\pi a^2) = 4\pi a^3.$$

F divergenciája

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3,$$

így (16.53) jobb oldala:

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iiint_D 3\,dV = 3\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = 4\pi a^3. \qquad \square$$

3. PÉLDA: **Felületmenti integrál (fluxus) kiszámolása**

Számoljuk ki az $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ vektormező felületmenti integrálját a pozitív térnyolcadból az $x = 1$, $y = 1$ és $z = 1$ síkok által kivágott kocka felszínén!

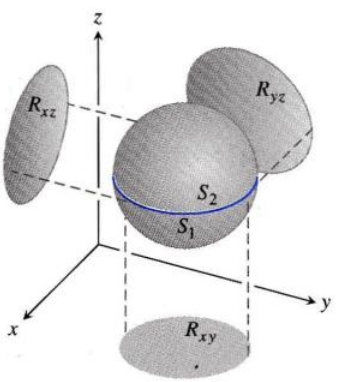
Megoldás: Ahelyett, hogy a felületi integrált a kocka hat oldalán kiszámolt integrál összegeként keresnénk, integráljuk inkább a

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = y + z + x$$

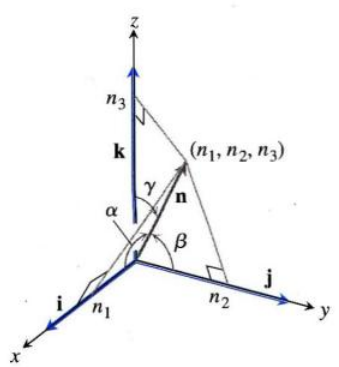
divergenciát a kocka belsején:

$$\text{felületi integrál} = \underset{\substack{\text{kocka}\\ \text{felszíne}}}{\iint} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \underset{\substack{\text{kocka}\\ \text{belseje}}}{\iiint} \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV \qquad \text{Gauss–Osztrogradszkij-tétel}$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \frac{3}{2}. \qquad \text{rutinszámolás} \qquad \square$$



16.69. ÁBRA: A Gauss–Osztrogradszkij-tételt először ilyen speciális tartományokra bizonyítjuk, majd kiterjesztjük általánosabb tartományokra is.



16.70. ÁBRA: Az **n** egységnormális komponensei az **i**, **j** és **k** bázisvektorokkal bezárt α, β és γ szögek koszinusza.

A Gauss–Osztrogradszkij-tétel bizonyítása speciális tartományokra

A bizonyításhoz tegyük fel, hogy $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ első parciális deriváltjai folytonosak, D egy konvex tartomány lyukak és buborékok nélkül, mint például egy gömb, kocka vagy ellipszoid, és hogy az S felszíne néhány, külön-külön sima felületből áll. Jelöljük D-nek az xy-síkra való vetületét R_{xy}-nal, és tegyük fel azt is, hogy minden olyan egyenes, amely merőleges az xy-síkra, és azt R_{xy}-nak belső pontjában metszi, pontosan két pontban metszi S-t. Ez a két metszéspont két részre bontja S-t, egy alsó S_1 és egy felső S_2 részre:

$$S_1 = \left\{(x,y,z)\in S \;\middle|\; z = f_1(x,y),\ (x,y)\in R_{xy}\right\},$$
$$S_2 = \left\{(x,y,z)\in S \;\middle|\; z = f_2(x,y),\ (x,y)\in R_{xy}\right\},$$

ahol $f_1 \le f_2$. Feltesszük, hogy D az yz- és zx-síkokra merőleges irányokból is hasonlóan viselkedik. (Lásd a 16.69. ábrát.)

Jelölje az $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ egységnormális **i**, **j** és **k** bázisvektorokkal bezárt szögét α, β és γ. Ekkor **n** komponensei α, β és γ koszinuszai lesznek (16.70. ábra), hiszen **n** egységvektor. Tehát

$$n_1 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{i} = |\mathbf{n}||\mathbf{i}|\cos\alpha = \cos\alpha,$$
$$n_2 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{j} = |\mathbf{n}||\mathbf{j}|\cos\beta = \cos\beta,$$
$$n_3 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = |\mathbf{n}||\mathbf{k}|\cos\gamma = \cos\gamma.$$

Így

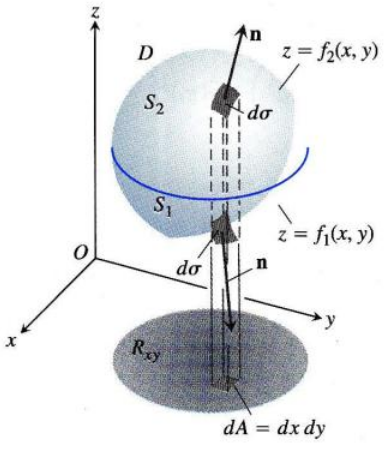
$$\mathbf{n} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\beta)\mathbf{j} + (\cos\gamma)\mathbf{k}$$

és

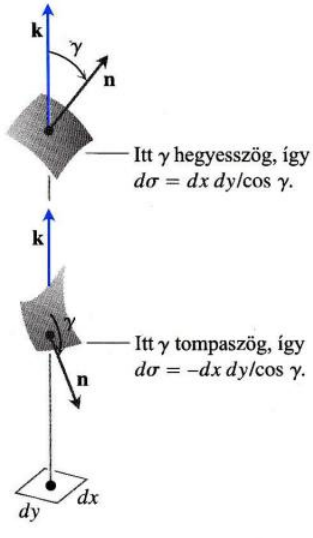
$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = M\cos\alpha + N\cos\beta + P\cos\gamma.$$

Kiírva a komponenseket, a Gauss–Osztrogradszkij-tétel így szól:

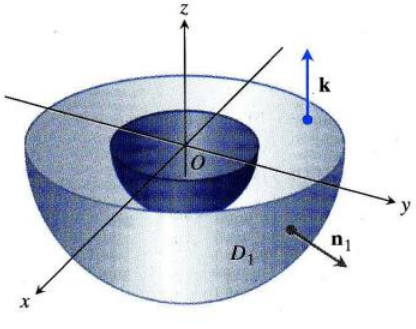
$$\iint_S (M\cos\alpha + N\cos\beta + P\cos\gamma)\,d\sigma = \iiint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$



16.71. ÁBRA: A háromdimenziós D tartományt az S_1 és S_2 felületek fogják közre. Ezeknek az xy-síkra vett merőleges vetülete R_{xy}.



16.72. ÁBRA: A 16.71. ábrán látható felületdarab kinagyítva. A $d\sigma = \pm dx\,dy/\cos\gamma$ összefüggést a 16.5. részben vezettük le.



16.73. ÁBRA: A két gömb által közrefogott D tartomány alsó fele.

A bizonyítást a következő egyenlőségek igazolásával hajtjuk végre:

$$\iint_S M\cos\alpha\,d\sigma = \iiint_D \frac{\partial M}{\partial x}\,dx\,dy\,dz, \tag{16.54}$$

$$\iint_S N\cos\beta\,d\sigma = \iiint_D \frac{\partial N}{\partial y}\,dx\,dy\,dz, \tag{16.55}$$

$$\iint_S P\cos\gamma\,d\sigma = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z}\,dx\,dy\,dz. \tag{16.56}$$

(16.56) bizonyítása: (16.56) belátásához átalakítjuk a bal oldalon szereplő felületi integrált az xy-sík R_{xy} halmazán vett kettős integrállá (16.71. ábra). Az S felület két részből áll, a felső S_2-ből, amelyet a $z = f_2(x,y)$ definiál, illetve az alsó S_1-ből, melynek definiáló egyenlete $z = f_1(x,y)$. S_2-n a kifelé mutató $\mathbf{n}$ normális $\mathbf{k}$-komponense pozitív (16.72. ábra), így

$$\cos\gamma\,d\sigma = dx\,dy, \qquad \text{mivel} \qquad d\sigma = \frac{dA}{|\cos\gamma|} = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}.$$

S_1-en a kifelé mutató normális $\mathbf{k}$-komponense negatív, azaz

$$\cos\gamma\,d\sigma = -dx\,dy.$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned}\iint_S P\cos\gamma\,d\sigma &= \iint_{S_2} P\cos\gamma\,d\sigma + \iint_{S_1} P\cos\gamma\,d\sigma \\ &= \iint_{R_{xy}} P(x,y,f_2(x,y))\,dx\,dy - \iint_{R_{xy}} P(x,y,f_1(x,y))\,dx\,dy \\ &= \iint_{R_{xy}} \big[P(x,y,f_2(x,y)) - P(x,y,f_1(x,y))\big]\,dx\,dy \\ &= \iint_{R_{xy}} \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\right] dx\,dy = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx\,dy.\end{aligned}$$

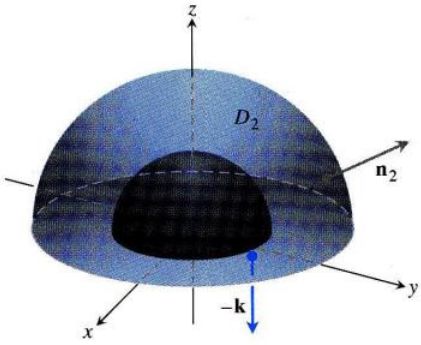
Ezzel (16.56) bizonyítását befejeztük. □

A (16.54) és (16.55) egyenletek bizonyítása hasonlóan történhet, illetve azt is mondhatjuk, hogy x,y,z; M,N,P; α,β,γ permutálásával (16.56) egyenletből megkaphatjuk ezeket.

A Gauss–Osztrogradszkij-tétel kiterjesztése más tartományokra

A Gauss–Osztrogradszkij-tételt egyszerűen kiterjeszthetjük olyan tartományokra, amelyek felbonthatóak véges sok, az előző részben tárgyalt egyszerűbb tartományra, illetve olyanokra, amelyek egyszerűbb tartományok bizonyos értelemben vett „határértékeként" definiálhatóak. Például legyen D két koncentrikus gömb közötti térrész, és tegyük fel, hogy $\mathbf{F}$ komponensei folytonosan differenciálhatóak D-n és a D-t határoló felületeken. Osszuk fel D-t az „egyenlítőjén" átmenő síkkal két részre, és alkalmazzuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt különkülön ezekre. Az alsó rész, D_1, a 16.73. ábrán látható. S_1, azaz D_1 felszíne egy külső félgömbhéjból, egy kilyukasztott korong alakú fedőből és egy belső félgömbhéjból áll. A Gauss–Osztrogradszkij-tétel szerint

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1\,d\sigma_1 = \iiint_{D_1} \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV_1. \tag{16.57}$$



16.74. ÁBRA: A két gömb által közrefogott D tartomány alsó fele.

Az $\mathbf{n}_1$ egységnormális kifelé mutat D_1-ből, azaz a külső félgömbhéjon az origótól távolodó irányba, a lyukas fedőkorongon $\mathbf{k}$ irányába, a belső félgömbhéjon az origó felé mutat. Most írjuk fel a Gauss–Osztrogradszkij-tételt a D_2-vel jelölt felső félgömbre is (16.74. ábra):

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2\,d\sigma_2 = \iiint_{D_2} \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV_2. \tag{16.58}$$

Ahogy az ábrán is látható, az $\mathbf{n}_2$ egységnormális a külső félgömbön origótól távolodó irányba, a lyukas alsó korongon $-\mathbf{k}$ irányába, a belső félgömbhéjon az origó felé mutat. Ha összeadjuk a (16.57) és (16.58) egyenlőségeket, akkor a lyukas korongon vett integrálok kiesnek, hiszen a korongon $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ ellentétes irányúak. Így (16.57) és (16.58) összegeként ezt kapjuk:

$$\iint_{S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_{D} \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV,$$

ahol D a két gömbhéj által határolt tartomány, S a határoló két gömbhéj, és az $\mathbf{n}$ egységnormális S-en D-ből kifelé mutat.

4. PÉLDA: Felületi integrál számolása

Számoljuk ki az

$$\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\rho^3}, \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

vektormező felületi integrálját a következő D tartományt határoló felületen:

$$D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 < a^2 \le x^2+y^2+z^2 \le b^2\right\}.$$

Megoldás: A Gauss–Osztrogradszkij-tétel értelmében a felületi integrált kiszámolhatjuk úgy is, hogy $\nabla\cdot\mathbf{F}$-et integráljuk D-n.

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\rho},$$

így

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\rho^{-3}\right) = \rho^{-3} - 3x\rho^{-4}\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3x^2}{\rho^5}.$$

Hasonlóan

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3y^2}{\rho^5} \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3z^2}{\rho^5}.$$

Ezek szerint

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3}{\rho^5}\left(x^2+y^2+z^2\right) = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3\rho^2}{\rho^5} = 0$$

és

$$\iiint_{D} \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = 0.$$

Tehát $\nabla\cdot\mathbf{F}$ D-n vett integrálja nulla, így a D-t határoló felületen vett felületi integrál is az. De ez a példa érdekesebb ennél. A belső S_a gömbhéjon vett felületi integrál a külső S_b-n vett felületi integrál -1-szerese, mivel a két integrál összege 0. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{F}$ vektormező felületi integrálja egy origó közepű gömbhéjon nem függ a gömb sugarától. De mekkora ez az érték?

Hogy megtudjuk, számoljuk ki a felületi integrált közvetlenül. Az a sugarú gömbhéj kifelé mutató felületi normálisa az (x,y,z) pontban

$$\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{a}.$$

Így a gömbfelületen

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{a^3}\cdot\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{a}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^4}=\frac{a^2}{a^4}=\frac{1}{a^2},$$

és a felületi integrál

$$\iint_{S_a}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\frac{1}{a^2}\iint_{S_a}d\sigma=\frac{1}{a^2}(4\pi a^2)=4\pi.$$

Tehát $\mathbf{F}$ felületi integrálja egy tetszőleges sugarú, origó közepű gömbhéjon 4π. □

Az elektrosztatika Gauss-törvénye

Érdemes még tovább tanulmányozni a 4. példát. Az elektrosztatikából tudjuk, hogy az origóba helyezett q pontszerű töltés által létrehozott elektromos mező

$$\mathbf{E}(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{r}|^2}\left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\rho^3},$$

ahol $\mathbf{r}$ az (x,y,z) pont helyvektora, $\rho=|\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ε_0 pedig egy fizikai konstans. A 4. példában bevezetett $\mathbf{F}$-et használva

$$\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{F}.$$

A 4. példában kiszámolt eredmény szerint egy tetszőleges, origó közepű gömbhéjon $\mathbf{E}$ felületi integrálja, azaz az elektromos mező fluxusa q/ε_0. Azonban ez az eredmény nem csak gömbökre igaz. Egy tetszőleges, az origót körbefogó zárt felület mentén (amelyre a Gauss–Osztrogradszkij-tétel feltételei teljesülnek) az integrál szintén q/ε_0. Ennek igazolásához tekintsünk egy olyan nagy S_a origó közepű gömbfelületet, hogy az általa határolt tartomány tartalmazza S-t. Mivel

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\nabla\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{F}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\cdot\mathbf{F}=0,$$

ha $\rho>0$, az S és S_a által határolt D tartományon $\nabla\cdot\mathbf{E}$ integrálja nulla. Így a Gauss–Osztrogradszkij-tétel szerint

$$\iint_{D\text{ határa}}\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=0,$$

és így az S-en vett felületi integrálnak meg kell egyeznie az S_a-n vett felületi integrállal, amely q/ε_0. A most bebizonyított állítást *Gauss-törvénynek* nevezzük, és az itteninél általánosabb töltéseloszlásokra is igaz.

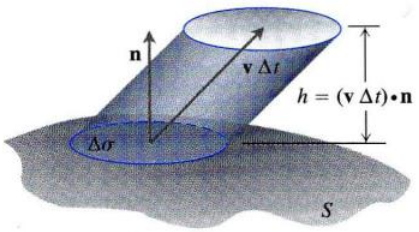
Gauss törvénye: $$\iint_S\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\frac{q}{\varepsilon_0}.$$

A hidrodinamika folytonossági törvénye

Legyen D egy S irányított zárt felület által közrefogott tartomány. Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}(x,y,z)$ egy D-n átfolyó folyadék sebességmezője, $\delta=\delta(t,x,y,z)$ a folyadék sűrűsége (x,y,z)-ben a t időpillanatban, és $\mathbf{F}=\delta\mathbf{v}$. A hidrodinamika **folytonossági törvénye** azt mondja ki, hogy ekkor

$$\nabla\cdot\mathbf{F}+\frac{\partial\delta}{\partial t}=0.$$

Ha a szereplő függvények folytonosan deriválhatóak, akkor a folytonossági törvény könnyen levezethető a Gauss–Osztrogradszkij-tételből.



16.75. ÁBRA: A $\Delta\sigma$ felületdarabon átfolyó folyadék egy rövid Δt időintervallum alatt egy olyan ferde „hengert" tölt meg, amelynek térfogata körülbelül

$$\text{alap} \cdot \text{magasság} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \Delta\sigma\, \Delta t.$$

Először lássuk be, hogy az

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

azt méri, hogy milyen sebességgel csökken a D tartományban levő folyadék tömege. (A csökkenést méri, mivel $\mathbf{n}$ kifelé mutat.) Ehhez válasszunk egy piciny $\Delta\sigma$ felületdarabot S-ről (16.75. ábra). Egy rövid Δt időintervallum alatt a $\Delta\sigma$-n átfolyó folyadék ΔV térfogata körülbelül egyenlő egy olyan ferde henger térfogatával, amelynek alapterülete $\Delta\sigma$, és a magassága $(\mathbf{v}\Delta t) \cdot \mathbf{n}$, ahol $\mathbf{v}$ a folyadék sebességvektora a $\Delta\sigma$ felületdarab egy pontjában. Tehát

$$\Delta V \approx \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \Delta\sigma\, \Delta t.$$

Az átfolyó folyadék tömege körülbelül

$$\Delta m \approx \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \Delta\sigma\, \Delta t,$$

így Δt időegység alatt D-ből

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \approx \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \Delta\sigma$$

tömegű folyadék távozik. Ha összeadjuk az összes S-t alkotó felületdarabra az azon át kiáramló folyadék tömegét, megkapjuk a Δt idő alatt az S-en át kiáramló folyadék tömegének

$$\frac{\sum \Delta m}{\Delta t} \approx \sum \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \Delta\sigma$$

közelítését. Végül ha $\Delta\sigma \to 0$ és $\Delta t \to 0$, akkor megkapjuk a D-ben levő folyadék tömegének S-en át történő csökkenési sebességét:

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

Ez a mi folyadékunk esetén

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

Most vegyünk egy B tömör gömböt a folyam Q pontja körül. $\nabla \cdot \mathbf{F}$ átlagos értéke B-ben

$$\frac{1}{(B \text{ térfogata})} \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV.$$

A divergencia folytonossága miatt valamely $P \in B$ pontban $\nabla \cdot \mathbf{F}$ fel is veszi ezt az értéket. Így, ha S jelöli B határát, akkor

$$(\nabla \cdot \mathbf{F})(P) = \frac{1}{(B \text{ térfogata})} \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \frac{1}{(B \text{ térfogata})} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

$$= \frac{(\text{az } S\text{-en keresztüli tömegcsökkenés sebessége})}{(B \text{ térfogata})}. \qquad (16.59)$$

A jobb oldali hányados az egységnyi térfogatra jutó tömegcsökkenést jelenti.

Most vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha rögzített Q középpont mellett a B gömb sugarával nullához tartunk. A (16.59) egyenlőség bal oldala $(\nabla \cdot \mathbf{F})(Q)$-hoz tart, a jobb oldal határértéke $(-\partial\delta/\partial t)(Q)$. Ennek a két függvénynek az egyenlősége a folytonossági törvény:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\frac{\partial \delta}{\partial t}.$$

A folytonossági törvény „megmagyarázza" $\nabla \cdot \mathbf{F}$ jelentését: $\mathbf{F}$ divergenciája valamely pontban az áramló anyag sűrűségének pontbeli csökkenési sebességével egyenlő.

Ezek alapján a

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV$$

Gauss–Osztrogradszkij-tétel úgy is értelmezhető, hogy a teljes D tartományból eltűnő anyag tömege egyenlő a tartomány S határán kiáramló anyag tömegével. Így a Gauss–Osztrogradszkij-tétel tömegmegmaradásként is interpretálható (lásd a 31. feladatot).

Az integráltételek egyesítése

Egy kétdimenziós $\mathbf{F} = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$ vektormezőt tekinthetünk egy olyan háromdimenziós vektormezőnek, melynek $\mathbf{k}$-komponense nulla. Ekkor $\nabla\cdot\mathbf{F} = = (\partial M/\partial x) + (\partial N/\partial y)$, és a Green-tétel normálvektoros alakja így írható:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_T \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_T \nabla\cdot\mathbf{F}\,dA.$$

Hasonlóan $\nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{k} = (\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$, és ezzel a Green-tétel érintővektoros alakja így alakul:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_T \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_T \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dA.$$

Most, hogy a Green-tétel két formáját átalakítottuk, vizsgáljuk meg a Stokes-tétellel, illetve a Gauss–Osztrogradszkij-tétellel való hasonlóságukat.

A Green-tétel és a háromdimenziós általánosításai

Green-tétel, normálvektoros alak:	$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_T \nabla\cdot\mathbf{F}\,dA$
Gauss–Osztrogradszkij-tétel:	$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV$
Green-tétel, érintővektoros alak:	$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_T \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dA$
Stokes-tétel:	$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$

Láthatjuk, hogy a Stokes-tétel a síkbeli Green-tétel normálvektoros (cirkulációra vonatkozó) alakját terjeszti ki egy háromdimenziós térben elhelyezkedő felületre. Mindkét tétel azt mondja ki, hogy rot$\mathbf{F}$ normálkomponsének integrálja valamely felületen egyenlő $\mathbf{F}$-nek a felület határán vett cirkulációjával.

Hasonlóan, a Gauss–Osztrogradszkij-tétel a síkbeli Green-tétel normálvektoros (fluxusra vonatkozó) alakját általánosítja egy térbeli tartományra. Mindkét tétel szerint div$\mathbf{F}$ valamely tartományon vett integrálja egyenlő $\mathbf{F}$-nek a tartomány határán vett integráljával.

Töprengjünk tovább erről a négy tételről, próbáljuk meg egy közös, *univerzális tétellé* összefogni őket. Ehhez idézzük fel az 5.3. részben tárgyalt Newton–Leibniz-formulát. A Newton–Leibniz-formula szerint ha $f(x)$ differenciálható (a,b)-n és folytonos $[a,b]$-n, deriváltja pedig integrálható $[a,b]$-n, akkor

$$\int_a^b \frac{df}{dx}\,dx = f(b) - f(a).$$



16.76. ÁBRA: A kifelé mutató egységnormálisok az egydimenziós térben fekvő $[a,b]$ intervallum határán.

Legyen $\mathbf{F}(x) = f(x)\mathbf{i}$ az $[a,b]$ intervallumon, ekkor $(df/dx) = \nabla\cdot\mathbf{F}$. Legyen $\mathbf{n}$ az $[a,b]$ intervallum határán definiált kifelé mutató egységnormálmező, azaz $\mathbf{n}(a) = -\mathbf{i}$ és $\mathbf{n}(b) = \mathbf{i}$ (16.76. ábra). Ekkor

$$f(b)-f(a)=f(b)\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+f(a)\mathbf{i}\cdot(-\mathbf{i})=$$
$$=\mathbf{F}(b)\cdot\mathbf{n}+\mathbf{F}(a)\cdot\mathbf{n}=$$
$$=\mathbf{F}\text{-nek }[a,b]\text{ határán vett integrálja.}$$

Ezekkel a jelölésekkel a Newton–Leibniz-tétel így szól:

$$\mathbf{F}(b)\cdot\mathbf{n}+\mathbf{F}(a)\cdot\mathbf{n}=\int_{[a,b]}\nabla\cdot\mathbf{F}\,dx.$$

A Newton–Leibniz-tétel, a Green-tétel normálvektoros alakja és a Gauss–Osztrogradszkij-tétel mind azt mondja, hogy ha egy $\mathbf{F}$ vektormezőre alkalmazzuk a divergencia operátort $(\nabla\cdot)$ és ezt integráljuk valamely tartományon, akkor az integrál értéke megegyezik $\mathbf{F}$ normálkomponensének a tartomány határán vett integráljával. (A Newton-Leibniz-tétel esetén a tartomány határa két pont, ezért integrál helyett összeg szerepel.)

A Stokes-tétel és a Green-tétel érintővektoros alakja (a megfelelő irányítások mellett) arról szól, hogy ha az $\mathbf{F}$ vektormezőre alkalmazzuk a rotáció operátort $(\nabla\times)$, akkor a keletkező vektormező normálkomponensének egy felületen vett integrálja megegyezik $\mathbf{F}$-nek a felületet határoló, zárt görbementi vonalintegráljával.

A tételek ily módon történő interpretációjának a szépsége az, hogy a két tételcsoport eredményeit egy egységes elvként foglalhatjuk össze:

> Egy vektormezőn ható differenciáloperátor valamely tartományon vett integrálja egyenlő a vektormező differenciáloperátorhoz tartozó komponensének a tartomány határán vett integráljával.

16.8. Feladatok

Divergenciaszámolás

Számoljuk ki az 1–4. feladatban szereplő vektormező divergenciáját!

1. A 16.14. ábrán definiált vektormező.

2. A 16.13. ábrán definiált identikus vektormező.

3. A 16.9. ábrán definiált gravitációs mező.

4. A 16.12. ábrán definiált sebességmező.

Felületi integrál kiszámolása a Gauss–Osztrogradszkij-tétellel

A Gauss–Osztrogradszkij-tétel használatával számoljuk ki az $\mathbf{F}$ vektormező felületi integrálját a megadott D tartományt határoló felületen (5–16. feladatok).

5. **Kocka:** $\mathbf{F}=(y-x)\mathbf{i}+(z-y)\mathbf{j}+(y-x)\mathbf{k}$,
D: az $x=\pm1$, $y=\pm1$ és a $z=\pm1$ síkok által határolt kocka.

6. $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$,

(a) Kocka: D: az $x=1$, $y=1$ és $z=1$ síkok által az első térnyolcadból kivágott kocka.

(b) Kocka: D: az $x=\pm1$, $y=\pm1$ és a $z=\pm1$ síkok által határolt kocka.

(c) Hengeres konzervdoboz: D: az $x^2+y^2\le4$ tömör henger $z=0$ és $z=1$ síkok közötti része.

7. **Henger és paraboloid metszete:** $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+xy\mathbf{j}-z\mathbf{k}$,
D: az $x^2+y^2\le4$ tömör hengernek a $z=0$ sík és a $z=x^2+y^2$ paraboloid közé eső része.

8. **Gömb:** $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$,
D: az $x^2+y^2+z^2\le4$ tömör gömb.

9. **Gömbcikk:** $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}-2xy\mathbf{j}+3xz\mathbf{k}$,
D: az első térnyolcadnak az $x^2+y^2+z^2=4$ gömb által határolt része.

10. **Henger:** $\mathbf{F}=(6x^2+2xy)\mathbf{i}+(2y+x^2z)\mathbf{j}+4x^2y^3\mathbf{k}$,
D: az első térnyolcadnak az $x^2+y^2=4$ henger és a $z=3$ sík által határolt része.

11. **Ék:** $\mathbf{F}=2xz\mathbf{i}-xy\mathbf{j}-z^2\mathbf{k}$,
D: az első térnyolcadból az $y+z=4$ sík és a $4x^2+y^2=16$ elliptikus henger által kivágott „ék".

12. **Gömb:** $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$,
D: az $x^2+y^2+z^2\le a^2$ tömör gömb.

13. **Üreges gömb:** $\mathbf{F}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$,
D: az $1\le x^2+y^2+z^2\le2$ egyenlettel meghatározott tartomány.

14. **Üreges gömb:** $\mathbf{F}=(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,
D: az $1\le x^2+y^2+z^2\le4$ egyenlettel meghatározott tartomány.

15. **Üreges gömb:**
$\mathbf{F}=(5x^3+12xy^2)\mathbf{i}+(y^3+e^y\sin z)\mathbf{j}+(5z^3+e^y\cos z)\mathbf{k}$,
D: az $x^2+y^2+z^2=1$ és $x^2+y^2+z^2=2$ gömbhéjak közötti tartomány.

16. **Üreges henger:**
$\mathbf{F}=\ln\left(x^2+y^2\right)\mathbf{i}-\left(\frac{2z}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)\mathbf{j}+z\sqrt{x^2+y^2}\mathbf{k}$,
D: az $1\le x^2+y^2\le2$, $-1\le z\le2$ üreges henger.

Rotáció és divergencia

17. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} G) = 0$

(a) Lássuk be, hogy ha a $\mathbf{G} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ vektormező komponensei megfelelően sokszor folytonosan differenciálhatóak, akkor $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{G} = 0$.

(b) Mit mondhatunk a $\nabla \times \mathbf{G}$ vektormező zárt felületen vett felületi integráljáról?

18. Legyen $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ differenciálható vektormező, a és b tetszőleges valós szám. Igazoljuk a következő egyenlőségeket:

(a) $\nabla \cdot (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \cdot \mathbf{F}_1 + b\nabla \cdot \mathbf{F}_2$,

(b) $\nabla \times (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \times \mathbf{F}_1 + b\nabla \times \mathbf{F}_2$,

(c) $\nabla \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_2$.

19. Legyen $\mathbf{F}$ egy differenciálható vektormező, $g(x,y,z)$ pedig egy differenciálható valós függvény. Igazoljuk a következő egyenlőségeket:

(a) $\nabla \cdot (g\mathbf{F}) = g\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla g \cdot \mathbf{F}$,

(b) $\nabla \times (g\mathbf{F}) = g\nabla \times \mathbf{F} + \nabla g \times \mathbf{F}$.

20. Ha $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ egy differenciálható vektormező, akkor legyen

$$\mathbf{F} \cdot \nabla = M\frac{\partial}{\partial x} + N\frac{\partial}{\partial y} + P\frac{\partial}{\partial z}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ differenciálható vektormezők, akkor

(a) $\nabla \times (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 - (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\nabla \cdot \mathbf{F}_2)\mathbf{F}_1 - (\nabla \cdot \mathbf{F}_1)\mathbf{F}_2$,

(b) $\nabla(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1 \times (\nabla \times \mathbf{F}_2) + \mathbf{F}_2 \times (\nabla \times \mathbf{F}_1)$.

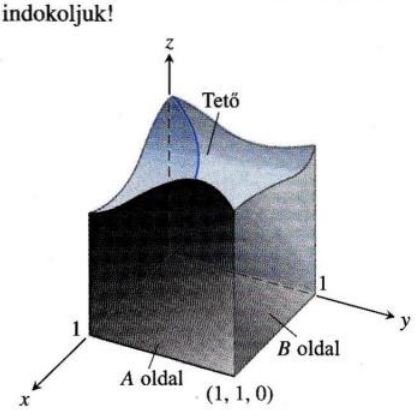
További példák és feladatok

21. Legyen D az S sima zárt felület által határolt tartomány, $\mathbf{F}$ pedig egy ezeken értelmezett vektormező, melynek első parciális deriváltjai folytonosak. Adhatunk valamilyen korlátot

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

értékére, ha tudjuk, hogy $|\mathbf{F}| \leq 1$? Válaszunkat indokoljuk!

22. Az ábrán látható kockaszerű test alapja az xy-sík egységnégyzete, a négy oldala az $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, illetve $y = 1$ síkokon fekszik, míg a teteje valamilyen számunkra ismeretlen sima felület. Legyen $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + (z+3)\mathbf{k}$, és tegyük fel, hogy tudjuk, hogy $\mathbf{F}$ felületi integrálja az A oldalon 1, a B oldalon -3. Mondhatunk valamit a tetőn vett felületi integrál értékéről? Válaszunkat indokoljuk!



23. **(a)** Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektormező felületi integrálja valamely sima, zárt felületen a háromszorosa a felület által körülzárt térrész térfogatának!

(b) Legyen S egy sima, zárt felület, és n az S-en értelmezett egységnormális vektormező. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{F}$ nem lehet merőleges $\mathbf{n}$-re az S minden pontjában!

24. **Maximális felületi integrál:** Melyik az a $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq 1$ egyenletekkel definiált téglatest, amely felületén az $\mathbf{F} = (-x^2 - 4xy)\mathbf{i} - 6yz\mathbf{j} + 12z\mathbf{k}$ vektormező felületi integrálja a lehető legnagyobb? Mi ez a maximális érték?

25. **Térfogat:** Legyen $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, és D egy olyan térbeli tartomány, amely az S felületével együtt kielégíti a Gauss–Osztrogradszkij-tétel feltételeit. Bizonyítsuk be, hogy

$$D \text{ térfogata} = \frac{1}{3}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

26. **Konstans vektormező felületi integrálja:** Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ egy konstans értékű vektormező, S pedig egy olyan zárt felület, amelyre teljesülnek a Gauss–Osztrogradszkij-tétel feltételei, akkor $\mathbf{F}$ felületi integrálja S-en nulla!

27. **Harmonikus függvények:** Egy $f(x,y,z)$ függvény *harmonikus* a D térbeli tartományon, ha D-n kielégíti a Laplace-egyenletet:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

(a) Legyen S egy sima, zárt felület, D az általa határolt tartomány, f a D-n értelmezett harmonikus függvény, $\mathbf{n}$ pedig az S-en értelmezett egységnormális-mező. Bizonyítsuk be, hogy

$$\iint_S \nabla f \cdot \mathbf{n} = 0.$$

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha f harmonikus D-n, akkor

$$\iint_S f\nabla f \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D |\nabla f|^2\, dV.$$

($\nabla f \cdot \mathbf{n}$ az f $\mathbf{n}$ irányú összetevőjének a deriváltja.)

28. Legyen S az $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ gömb első térnyolcadba eső részének a felülete, és $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Számoljuk ki a következő integrált:

$$\iint_S \nabla f \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

($\nabla f \cdot \mathbf{n}$ az f függvény $\mathbf{n}$ irányú összetevőjének a deriváltja.)

29. **Az első Green-formula:** Legyen f és g olyan skalárfüggvény, amelynek az első két parciális deriváltjai folytonosak egy olyan D korlátos tartományon, amelynek S határa darabonként sima felületekből áll. Bizonyítsuk be az **első Green-formulát**:

$$\iint_S f\nabla g \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D \left(f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g\right) dV. \qquad (16.60)$$

(*Útmutatás:* Alkalmazzuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt az $\mathbf{F} = f\nabla g$ vektormezőre.)

30. A második Green-formula: (*A 29. feladat folytatása.*) Cseréljük fel f-et és g-t (16.60)-ben, és a kapott formulát vonjuk ki (16.60)-ból! Ezzel bebizonyítjuk a **második Green-formulát**:

$$\iint_S (f\nabla g - g\nabla f)\cdot \mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV. \quad (16.61)$$

31. A tömegmegmaradás törvénye: Legyen D a háromdimenziós tér egy tartománya, $\mathbf{v}(t,x,y,z)$ folytonosan differenciálható vektormező $\mathbb{R}\times D$-n, $p(t,x,y,z)$ folytonosan differenciálható skalárfüggvény. (A t változó az időt jelöli.) A tömegmegmaradás törvénye azt mondja ki, hogy ha S a D határa, akkor

$$\frac{d}{dt}\iiint_D p(t,x,y,z)\,dV = -\iint_S p\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma.$$

(a) Adjuk meg a képlet fizikai értelmezését, ha $\mathbf{v}$ valamely áramló anyag sebességmezője, $p(t,x,y,z)$ pedig az anyag (x,y,z) pontbeli sűrűsége a t időpillanatban!

(b) A Gauss–Osztrogradszkij-tétel és a Leibniz-féle

$$\frac{d}{dt}\iiint_D p(t,x,y,z)\,dV = \iiint_D \frac{\partial p(t,x,y,z)}{\partial t}\,dV$$

szabály segítségével lássuk be, hogy a tömegmegmaradás törvénye ekvivalens a

$$\nabla\cdot p\mathbf{v} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

folytonossági törvénnyel! (Az első tagban $\nabla\cdot p\mathbf{v}$ kiszámolásakor a t változó rögzített, a másodikban $\partial p/\partial t$ kiszámolásakor az $(x,y,z)\in D$ pont rögzített.)

32. A hővezetés egyenlete: A $T(t,x,y,z)$ kétszer folytonosan deriválható függvény egy D tömör test (x,y,z) pontbeli hőmérsékletét adja meg a t időpontban. Jelölje c a test hőkapacitását, ρ a tömegsűrűségét. Ekkor a $c\rho T$ mennyiség a test **térfogategységre eső hőenergiája**.

(a) Magyarázzuk meg, hogy $-\nabla T$ miért mutat a hő terjedésének irányába!

(b) A $-k\nabla T$ vektor az **energiafluxus-vektor**, ahol a k konstans az anyagra jellemző **hővezetési tényező**. Alkalmazzuk a 31. feladatban tárgyalt anyagmegmaradás törvényét a $\mathbf{v} = -k\nabla T$ és $p = c\rho T$ szereposztással, és vezessük le a hővezetés egyenletét:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\nabla^2 T,$$

ahol $K = k/(c\rho) > 0$ a *diffúziós állandó*! (Figyeljük meg, hogy ha $T(t,x)$-el jelöljük egy homogén rúd x pontbeli hőmérsékletét a t időpillanatban, akkor $\nabla^2 T = \partial^2 T/\partial x^2$, és a hővezetés egyenlete visszaadja a 14. fejezet egyik feladatában szereplő 1 dimenziós hővezetés egyenletét.)

16. fejezet Áttekintő kérdések

1. Mi a vonalintegrál, és hogyan számítjuk ki? Adjunk példát!

2. Hogyan tudjuk a vonalintegrál segítségével rugók tömegközéppontját meghatározni? Adjunk példát!

3. Mi a vektormező? Mi a gradiensmező? Adjunk példát!

4. Hogyan tudjuk kiszámítani az erőtér által végzett munkát, amikor egy részecskét mozgat egy görbe mentén? Adjunk példát!

5. Mi az áramlás, a cirkuláció és a fluxus?

6. Milyen különleges tulajdonságokkal bírnak azok a vektormezők, ahol a mező útirányú komponensének integrálja nem függ az úttól, csak a végponttól?

7. Hogyan tudjuk megállapítani, hogy egy vektormező konzervatív?

8. Mi a potenciálfüggvény? Mutassunk példát arra, hogyan határozzuk meg egy vektormező potenciálfüggvényét!

9. Mit jelent az, hogy differenciálforma? Mit jelent az, hogy egy differenciálforma egzakt? Hogyan ellenőrizhetjük, hogy egzakt-e?

10. Mi egy vektormező divergenciája? Hogyan szemléltetjük?

11. Mi egy vektormező rotációja? Hogyan szemléltetjük?

12. Mi a Green-tétel? Hogyan szemléltetjük?

13. Hogyan számítjuk egy felület felszínét? Adjunk példát!

14. Mi az, hogy irányított felület? Hogyan számítjuk a háromdimenziós vektormező felületmenti integrálját egy irányított felületen?

15. Mi a felületi integrál? Mit tudunk ezzel számítani? Adjunk példát!

16. Mi a paraméterezett felület? Hogyan számítjuk a felszínét? Adjunk példát!

17. Hogyan integrálunk egy paraméteresen adott felületen? Adjunk példát!

18. Mi a Stokes-tétel? Hogyan szemléltetjük?

19. Foglaljuk össze, ebben a fejezetben mi mindent tanultunk a konzervatív vektormezőkről?

20. Mi a Gauss-Osztrogradszkij-tétel? Hogyan szemléltetjük?

21. Hogyan általánosítja a Gauss-Osztrogradszkij-tétel a Green-tételt?

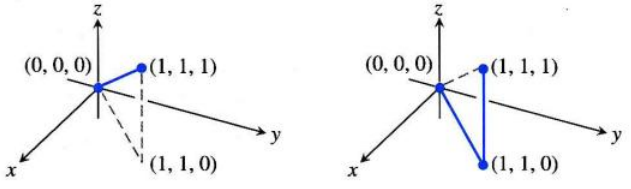
22. Hogyan általánosítja a Stokes-tétel a Green-tételt?

23. Hogyan lehet a Green-tételt, Stokes-tételt, Gauss–Osztrogradszkij-tételt úgy tekinteni mint egy alapvető általános tétel különböző formáit?

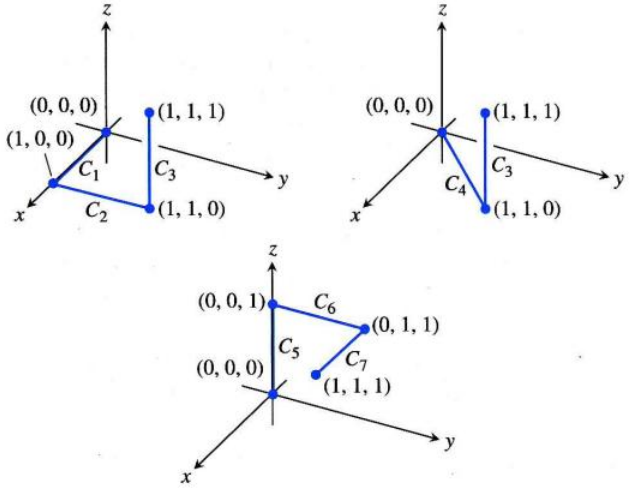
16. fejezet Gyakorló feladatok

Vonalintegrálok számítása

1. A mellékelt ábra két töröttvonalat mutat, amelyek összekötik az origót az $(1,1,1)$ ponttal. Integráljuk az $f(x,y,z) = 2x - 3y^2 - 2z + 3$ függvényt mindkét úton!



2. A mellékelt ábra három töröttvonalat mutat az origóból az $(1,1,1)$ pontba. Integráljuk az $f(x,y,z) = x^2 + y - z$ függvényt mindegyik úton!



3. Integráljuk az $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+z^2}$ függvényt az

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{j} + (a\sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

körön!

4. Integráljuk az $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ függvényt az

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$$

evolvensen!

Számítsuk ki az 5–6. feladatokban szereplő integrálokat!

5. $\displaystyle\int_{(-1,1,1)}^{(4,-3,0)} \frac{dx+dy+dz}{\sqrt{x+y+z}}$

6. $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(10,3,3)} dx - \sqrt{\frac{z}{y}}\,dy - \sqrt{\frac{y}{z}}\,dz$

7. Integráljuk az $\mathbf{F} = -(y\sin z)\mathbf{i} + (x\sin z)\mathbf{j} + (xy\cos z)\mathbf{k}$ függvényt akörül a kör körül, amelyet a $z = -1$ sík vág ki az $x^2+y^2+z^2 = 5$ gömbből, a körüljárás pedig felülről nézve legyen óramutató járásával megegyező!

8. Integráljuk az $\mathbf{F} = 3x^2y\mathbf{i} + (x^3+1)\mathbf{j} + (9z^2)\mathbf{k}$ függvényt akörül a kör körül, amelyet az $x = 2$ sík vág ki az $x^2+y^2+z^2 = 9$ gömbből!

Számítsuk ki a 9–10. feladatokban szereplő integrálokat!

9. $\displaystyle\int_C 8x\sin y\,dx - 8y\cos x\,dy,$

ahol C a négyzetvonal az első térnegyedben, amit a koordinátatengelyek, az $x = \pi/2$ és $y = \pi/2$ egyenesek szakaszai alkotnak.

10. $\displaystyle\int_C y^2\,dx + x^2\,dy,$

ahol C az $x^2+y^2 = 4$ kör.

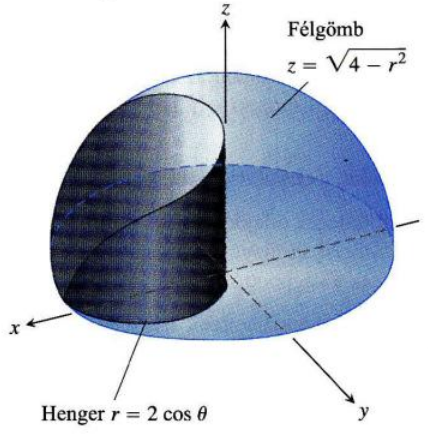
Felületi integrálok számítása

11. Ellipszistartomány területe: Mekkora a területe annak az ellipszisnek, amelyet az $x+y+z = 1$ sík vág ki az $x^2+y^2 = 1$ hengerből?

12. Paraboloidsüveg felszíne: Mekkora a felszíne az $y^2 + z^2 = 3x$ paraboloid azon darabjának, amelyet az $x = 1$ sík vág le belőle?

13. Gömbsüveg felszíne: Mekkora a felszíne annak a gömbsüvegnek, amelyet a $z = \sqrt{2}/2$ sík vág le az $x^2+y^2+z^2 = 1$ gömbből?

14. (a) Félgömb metszése hengerrel: Mekkora annak a gömbfelületdarabnak a felszíne, amelyet az $x^2+y^2 = 2x$ henger vág ki az $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z \ge 0$ félgömbből?
(b) Mekkora az a hengerfelület, ami a gömbben van? (*Útmutatás*: Vetítsük az xz-síkra, vagy számítsuk az $\int h\,ds$ integrált, ahol h a henger félgömbbe eső magassága, az integrálás útja pedig az $x^2+y^2 = 2x$ kör az xy-síkban.)



15. Háromszög területe: Mekkora a területe annak a háromszögnek, amely az $(x/a)+(y/b)+(z/c) = 1$ síkból az első térnyolcadba esik. Számításainkat ellenőrizzük elemi geometriával.

16. Parabolikus henger síkokkal metszve: Integráljuk az
(a) $g(x,y,z) = \dfrac{yz}{\sqrt{4y^2+1}}$, **(b)** $g(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{4y^2+1}}$
függvényeket az $y^2 - z = 1$ parabolikus henger azon darabja felett, amelyet az $x = 0$, $x = 3$, $z = 0$ síkok vágnak ki belőle!

17. Körhenger síkokkal metszve: Integráljuk a $g(x,y,z) = x^4y(y^2+z^2)$ függvényt az $y^2+z^2 = 25$ hengerfelület első térnyolcadba eső részén, az $x = 0$ és $x = 1$ síkok között, a $z = 3$ sík fölött!

18. Wyoming területe: Wyoming államot a 111°3' és 104°3' nyugati hosszúsági, és az 41° és 45° északi szélességi körök határolják. Feltéve, hogy a Föld egy 6372 km sugarú gömb, kb. mekkora Wyoming állam területe?

Paraméteresen adott felületek

A 19–24. feladatokban adjuk meg a függvények egy paraméterezését! (Sok különböző helyes megoldás van, ezek közül hátul csak egyet közlünk.)

19. Gömböv: Az $x^2+y^2+z^2=36$ gömbfelület azon része, amely a $z=-3$ és $z=3\sqrt{3}$ síkok közé esik.

20. Parabolasüveg: A $z=-(x^2+y^2)/2$ paraboloidfelület azon része, amely $z=-2$ sík felett van.

21. Kúp: A $z=1+\sqrt{x^2+y^2}$, $z\le 3$ kúpfelület.

22. Sík négyzet felett: A $4x+2y+4z=12$ síknak az a darabja, amely a $0\le x\le 2$, $0\le y\le 2$ négyzet fölött van.

23. Paraboloid darabja: Az $y=2(x^2+y^2)$, $y\le 2$ paraboloid azon darabja, amely az xy-sík fölött van.

24. Félgömb darabja: Az $x^2+y^2+z^2=10$, $y\ge 0$ félgömb első térnyolcadba eső darabja.

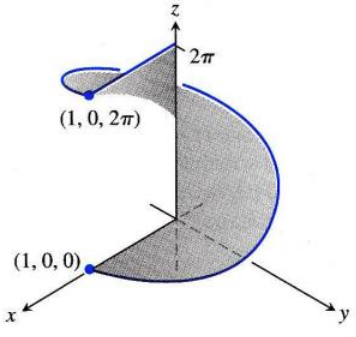
25. Felület felszíne: Mekkora az

$$\mathbf{r}(u,v)=(u+v)\mathbf{i}+(u-v)\mathbf{j}+v\mathbf{k},$$
$$0\le u\le 1,\quad 0\le v\le 1$$

felület felszíne?

26. Felületi integrál: Integráljuk az $f(x,y,z)=xy-z^2$ függvényt a 25. feladatban megadott felületen!

27. Csavarfelület felszíne: Mekkora az $\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+\theta\mathbf{k}$, $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le r\le 1$ csavarfelület felszíne?



28. Felületi integrál: Számítsuk ki az $\iint_S \sqrt{x^2+y^2+1}\,d\sigma$ integrált, ha S a 27. feladatban adott felület!

Konzervatív vektormezők

A 29–32. feladatokban adott vektormezők közül melyek konzervatívak, és melyek nem?

29. $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

30. $\mathbf{F}=(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$

31. $\mathbf{F}=xe^y\mathbf{i}+ye^z\mathbf{j}+ze^x\mathbf{k}$

32. $\mathbf{F}=(\mathbf{i}+z\mathbf{j}+y\mathbf{k})/(x+yz)$

A 33–34. feladatokban adjuk meg a potenciálfüggvényt!

33. $\mathbf{F}=2\mathbf{i}+(2y+z)\mathbf{j}+(y+1)\mathbf{k}$

34. $\mathbf{F}=(z\cos xz)\mathbf{i}+e^y\mathbf{j}+(x\cos xz)\mathbf{k}$

Munka és cirkuláció

A 35–36. feladatokban számítsuk ki az elvégzett munkát az 1. feladat minden útja mentén!

35. $\mathbf{F}=2xy\mathbf{i}+\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$ **36.** $\mathbf{F}=2xy\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+\mathbf{k}$

37. Munka két úton: Számítsuk ki az

$$\mathbf{F}=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

erőtér munkáját az $\mathbf{r}(t)=(e^t\cos t)\mathbf{i}+(e^t\sin t)\mathbf{j}$ görbe mentén az $(1,0)$ pontból az $(e^{2\pi},0)$ pontba kétféle módon:

(a) Kiszámítva a görbementi munkát a görbe paraméteres alakjának segítségével.

(b) A potenciálfüggvény meghatározásával.

38. Áramlás különböző utakon: Számítsuk ki az $\mathbf{F}=\nabla(x^2ze^y)$ vektormező áramlási integrálját

(a) Azon C ellipszis körül, amelyben az $x+y+z=1$ sík metszi az $x^2+z^2=25$ hengert, a pozitív y-tengely felől nézve óramutató járásával megegyező irányítással.

(b) A 27. feladat csavarfelületének csavarvonal határgörbéjén az $(1,0,0)$ pontból az $(1,0,2\pi)$ pontba.

A 39–40. feladatokban használjuk a Stokes-tételben szereplő felületi integrált az $\mathbf{F}$ vektormező C görbementi cirkulációjának kiszámításához, a megadott körüljárással!

39. Cirkuláció egy ellipszis körül: $\mathbf{F}=y^2\mathbf{i}-y\mathbf{j}+3z^2\mathbf{k}$, C: az az ellipszis, amit a $2x+6y-3z=6$ sík metsz ki az $x^2+y^2=1$ hengerből, felülről nézve az óramutató járásával ellentétes körüljárással.

40. Cirkuláció egy kör körül:
$\mathbf{F}=(x^2+y)\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}+(4y^2-z)\mathbf{k}$,
C: az a kör, amelyet a $z=-y$ sík metsz ki az $x^2+y^2+z^2=4$ gömbből, felülről nézve óramutató járásával ellentétes körüljárással.

Tömeg és nyomaték

41. Változó sűrűségű huzal: Mennyi a tömege annak a vékony huzalnak, amelyik az $\mathbf{r}(t)=\sqrt{2}t\mathbf{i}+\sqrt{2}t\mathbf{j}+(4-t^2)\mathbf{k}$, $0\le t\le 1$ görbe mentén fekszik, és sűrűsége a t paraméterértékű pontban **(a)** $\delta=3t$, ill. **(b)** $\delta=1$?

42. Változó sűrűségű huzal: Hol van a tömegközéppontja annak a vékony huzalnak, amelyik az $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+$ $+(2/3)t^{3/2}\mathbf{k}$, $0\le t\le 2$ görbe mentén fekszik, és a sűrűsége a t paraméterértékű pontban $\delta=3\sqrt{5+t}$?

43. Változó sűrűségű huzal: Hol van a tömegközéppontja, mennyi a tehetetlenségi nyomatéka és a tehetetlenségi sugara a koordinátatengelyekre vonatkoztatva annak a vékony huzalnak, amelyik az

$$\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+\frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\mathbf{j}+\frac{t^2}{2}\mathbf{k},\quad 0\le t\le 2$$

görbe mentén fekszik, és a sűrűsége a t paraméterértékű pontban $\delta=1/(t+1)$?

44. Ív tömegközéppontja: Egy vékony fémív fekszik az xy-síkban az $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ félkör mentén. A sűrűsége az (x, y) pontban $\delta(x, y) = 2a - y$. Hol van a tömegközéppontja?

45. Állandó sűrűségű huzal: Egy állandó $\delta = 1$ sűrűségű huzal fekszik az $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$, $0 \le t \le \ln 2$ görbe mentén. Mennyi $\bar{z}$, I_z, R_z ?

46. Állandó sűrűségű csavarodó huzal: Hol van a tömegközéppontja annak az állandó δ sűrűségű huzalnak, amelyik az $\mathbf{r}(t) = (2\sin t)\mathbf{i} + (2\cos t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$ görbe mentén fekszik?

47. Héj tehetetlenségi nyomatéka, tehetetlenségi sugara, tömegközéppontja: Mennyi I_z, R_z és hol van a tömegközéppontja annak a vékony héjnak, amelynek sűrűsége $\delta(x, y, z) = z$, és amely a felső része a $z = 3$ síkkal elvágott $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ gömbfelületnek?

48. Kocka tehetetlenségi nyomatéka: Mennyi a tehetetlenségi nyomatéka a z-tengelyre vonatkoztatva annak a kockának, amelyet az első térnyolcadból az $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ síkok vágnak ki, és amelynek sűrűsége $\delta = 1$?

Fluxus síkgörbéken és térben

A 49–50. feladatokban használjuk a Green-tételt az óramutató járásával ellentétes körüljárással számított cirkuláció és a kifelé irányított normálissal számolt fluxus meghatározására!

49. Négyzet: $\mathbf{F} = (2xy + x)\mathbf{i} + (xy - y)\mathbf{j}$,
C: Négyzet, az $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ egyenesek határolják.

50. Háromszög: $\mathbf{F} = (y - 6x^2)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j}$,
C: Háromszög, az $y = 0$, $y = x$, $x = 1$ egyenesek határolják.

51. Nulla vonalintegrál: Mutassuk meg, hogy

$$\oint_C \ln x \sin y\, dy - \frac{\cos y}{x} dx = 0$$

minden olyan C görbén, amire a Green-tétel vonatkozik.

52. (a) Kifelé irányított normálissal számított fluxus és felszín: Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ vektormezőnek a kifelé irányított normálissal számított fluxusa minden olyan zárt görbén, amire a Green-tétel vonatkozik, éppen a kétszerese azon felület felszínének, amit a görbe közrefog.

(b) Legyen $\mathbf{n}$ a kifelé irányított egységnyi normálvektora egy olyan zárt C görbének, amire a Green-tétel vonatkozik. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ nem lehet merőleges $\mathbf{n}$-re a C minden pontjában!

Az 53–56. feladatokban határozzuk meg $\mathbf{F}$ kifelé mutató normálissal számított felületi integrálját (fluxusát) a D tartomány határán!

53. Kocka: $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$,
D: Kocka, amelyet az első térnyolcadból az $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ síkok vágnak ki.

54. Gömbsüveg: $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + \mathbf{k}$,
D: A teljes felülete annak a felső gömbsüvegnek, amelyet a $z = 3$ sík vág le az $x^2 + y^2 + z^2 \le 25$ gömbből.

55. Gömb és paraboloid: $\mathbf{F} = -2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,
D: Az $x^2 + y^2 + z^2 \le 2$ gömbből a $z = x^2 + y^2$ paraboloid által kivágott felső rész.

56. Kúp és henger: $\mathbf{F} = (6x + y)\mathbf{i} - (x + z)\mathbf{j} + 4yz\mathbf{k}$,
D: Az első térnyolcad azon része, amelyet $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp, az $x^2 + y^2 = 1$ henger és a koordinátasíkok határolnak.

57. Félgömb, henger és sík: Legyen S a felülete annak a D tartománynak, amelyet balról az $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y \le 0$ félgömbfelület, középen az $x^2 + z^2 = a^2$, $0 \le y \le a$ hengerfelület, jobbról az $y = a$ sík határolnak. Határozzuk meg az $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ vektormező kifelé mutató normálissal számított felületi integrálját (fluxusát) S-en!

58. Henger és síkok: Határozzuk meg az $\mathbf{F} = 3xz^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z^3\mathbf{k}$ vektormező kifelé mutató normálissal számított felületi integrálját (fluxusát) annak a testnek a felületén, amelyet az $x^2 + 4y^2 = 16$ henger és az $y = 2z$, $x = 0$, $z = 0$ síkok határolnak!

59. Henger alakú doboz: Használjuk a Gauss-Osztrogradszkij-tételt az $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ vektormező kifelé mutató normálissal számított felületi integráljának (fluxusának) kiszámítására annak a testnek a felületén, amelyet az $x^2 + y^2 = 1$ henger és a $z = 1$, $z = -1$ síkok határolnak.

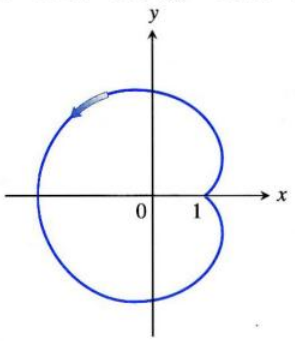
60. Félgömb: Számítsuk ki az $\mathbf{F} = (3z + 1)\mathbf{k}$ vektormező felfelé mutató normálissal számított felületi integrálját (fluxusát) az $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$ félgömbön, **(a)** a Gauss-Osztrogradszkij-tétellel, **(b)** direkt integrálással!

16. fejezet Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

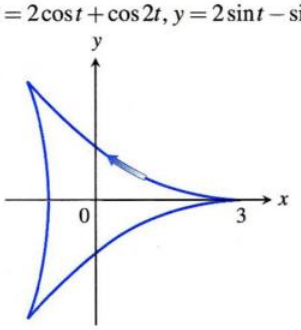
Terület számítása Green-tétellel

Használjuk a Green-tétel területképletét (16.4. alfejezet (16.25) képlet) az 1–4. feladatokban adott görbék által határolt tartományok területének kiszámítására!

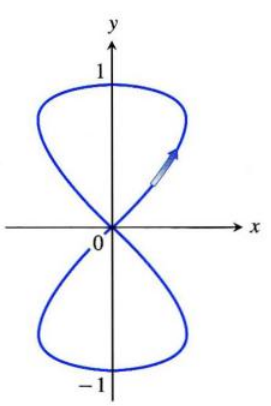
1. A limakon: $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$, $0 \le t \le 2\pi$



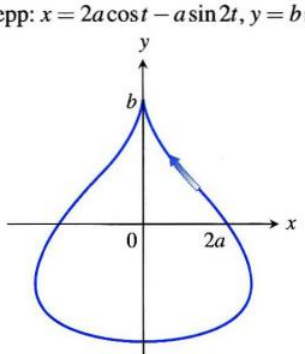
2. A deltoid: $x = 2\cos t + \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$, $0 \le t \le 2\pi$



3. A nyolcasgörbe: $x = (1/2)\sin 2t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$ (egy hurok)



4. A könnycsepp: $x = 2a\cos t - a\sin 2t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$



További példák és feladatok

5. **(a)** Adjunk példát olyan $\mathbf{F}(x,y,z)$ vektormezőre, ami egyetlen pontban $\mathbf{0}$, és aminek rotációja sehol sem nulla. Adjuk meg a pontot, és számítsuk ki a rotációt!
(b) Adjunk példát olyan $\mathbf{F}(x,y,z)$ vektormezőre, ami egyetlen egyenes mentén $\mathbf{0}$, és aminek sehol sem nulla a rotációja. Adjuk meg az egyenest, és számítsuk ki a rotációt!
(c) Adjunk példát olyan $\mathbf{F}(x,y,z)$ vektormezőre, ami egy felület mentén $\mathbf{0}$, és aminek sehol sem nulla a rotációja. Adjuk meg a felületet, és számítsuk ki a rotációt!

6. Adjuk meg az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömbön az összes olyan (a,b,c) pontot, amelyben az $\mathbf{F} = yz^2\mathbf{i} + xz^2\mathbf{j} + 2xyz\mathbf{k}$ merőleges a felületre és $\mathbf{F}(a,b,c) \neq \mathbf{0}$.

7. Mennyi a tömege annak a gömbhéjnak, amelyiknek sugara R, és a felület bármely pontjában a $\delta(x,y,z)$ sűrűség egyenlő a pontnak a gömbfelület egy rögzített (a,b,c) pontjától való távolságával?

8. Mennyi a tömege az

$$\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \theta\mathbf{k}$$

csavarfelület azon darabjának, amelyre $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$ és a sűrűségfüggvény $\delta(x,y,z) = 2\sqrt{x^2+y^2}$? (Ábra a 27. feladatnál.)

9. Az összes $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ téglalapok közül találjuk meg azt, amelyikre a kifelé mutató normálvektorral számított teljes fluxus az $\mathbf{F} = (x^2 + 4xy)\mathbf{i} - 6y\mathbf{j}$ vektormező esetén a legkisebb. Mennyi ez a legkisebb érték?

10. Melyik az origón átmenő síkok közül az, amelyiknek az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ gömbbel való metszésvonalán az $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ vektormező cirkulációja a legnagyobb?

11. Egy zsinór fekszik az $x^2 + y^2 = 4$ kör mentén az első síknegyedben $(2,0)$-tól $(0,2)$-ig. A sűrűsége $\delta(x,y) = xy$.

(a) Osszuk fel a zsinórt véges sok részívre, hogy megmutassuk, a munka, amit a gravitációs tér végez, amikor a zsinórt egyenesen leviszi az x-tengelyre

$$\text{Munka} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g x_k y_k^2 \Delta s_k = \int_C g x y^2 \, ds,$$

ahol g a gravitációs konstans!

(b) Számítsuk ki a munkát, meghatározva az (a) pontbeli vonalintegrált!

(c) Mutassuk meg, hogy az egész munka annyi, mintha a zsinór $(\bar{x},\bar{y})$ tömegközéppontját levittük volna az x-tengelyre!

12. Egy vékony lap fekszik az $x + y + z = 1$ sík első térnyolcadba eső részén. A lap sűrűsége $\delta(x,y,z) = xy$.

(a) Osszuk fel a lapot véges sok kis részlapra, hogy megmutassuk, a gravitációs tér által végzett munka amíg leviszi a lapot az xy-síkra

$$\text{Munka} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g x_k y_k z_k \Delta\sigma_k = \iint_S g x y z \, d\sigma,$$

ahol g a gravitációs konstans!

(b) Számítsuk ki a munkát, meghatározva az (a) pontbeli felületi integrált!

(c) Mutassuk meg, hogy az egész munka annyi, mintha a lap $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ tömegközéppontját levittük volna az xy-síkra!

13. Archimédesz törvénye: Ha egy tárgyat, mint pl. egy labda, valamilyen folyadékba teszünk, akkor vagy lesüllyed az aljára, vagy úszik, vagy elmerülve lebeg a folyadékban. Tegyük fel, hogy egy állandó sűrűségű folyadék felszíne a $z=4$ síknak tekinthető. Egy gömb alakú labdát helyezünk bele, ami lebeg a folyadékban, és az $x^2+y^2+(z-2)^2\le 1$ térrészt foglalja el.

(a) Mutassuk meg, hogy a felületi integrál, ami a folyadék labdára gyakorolt teljes nyomását megadja, a következő:

$$\text{Erő}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} w(4-z_k)\Delta\sigma_k=\iint_S w(4-z)d\sigma.$$

(b) Mivel a labda nem mozog, a folyadék felhajtóereje tartja egyensúlyban. Mutassuk meg, hogy a felhajtóerő

$$\text{Felhajtóerő}=\iint_S w(z-4)\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma,$$

ahol $\mathbf{n}$ a kifelé mutató egységnyi normálvektor az (x,y,z) pontban! Ez illusztrálja Archimédesz törvényét, hogy minden folyadékba merülő testre akkora felhajtóerő hat, amekkora az általa elfoglalt folyadékmennyiség súlya.

(c) Használjuk a Gauss-Osztrogradszkij-tételt a **(b)** pontban megadott integrál kiszámítására!

14. Folyadék nyomóereje egy görbült felületre: Egy $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 2$ alakú kúp egy állandó w sűrűségű folyadékkal van megtöltve. Feltételezve, hogy az xy-sík a „földfelszín", mutassuk meg, hogy a teljes nyomóerő, amit a folyadék a kúpfelületre $z=1$-től $z=2$-ig gyakorol, a

$$F=\iint_S w(2-z)d\sigma$$

felületi integrál!

15. Faraday törvénye: Ha $\mathbf{E}(t,x,y,z)$ és $\mathbf{B}(t,x,y,z)$ jellemzik az elektromos, ill. mágneses mezőt az (x,y,z) pontban t időpillanatban, akkor az elektromágneses tér elméletének egyik fontos alapelve szerint $\nabla\times\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t$. Ebben az egyenletben $\nabla\times\mathbf{E}$ számolásakor t fixen van tartva, $\partial\mathbf{B}/\partial t$ pedig úgy van számolva, hogy (x,y,z) van fixen tartva. Használjuk a Stokes-tételt a Faraday-tétel levezetéséhez:

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}=-\frac{\partial}{\partial t}\iint \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma,$$

ahol C a zárt vezető, amelyben az

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

indukált feszültség hatására az áram a felületi $\mathbf{n}$ normális irányából nézve az óramutató járásával ellentétes irányban folyik. A jobboldalon álló felületi integrált *mágneses fluxusnak* hívják, és S bármilyen irányított felület, aminek határa C.

16. Legyen

$$\mathbf{F}=-\frac{GmM}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$$

a gravitációs erőtér az $\mathbf{r}\neq\mathbf{0}$ helyvektorú pontban. A 16.8. alfejezetben tárgyalt Gauss-szabály segítségével mutassuk meg, hogy nincs olyan folytonosan differenciálható $\mathbf{H}$ vektormező, amelyre $\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{H}$ fennállna!

17. Mutassuk meg, ha $f(x,y,z)$ és $g(x,y,z)$ folytonosan differenciálható skalár függvények egy C határológörbéjű irányított S felületen, akkor

$$\iint_S(\nabla f\times\nabla g)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\oint_C f\nabla g\cdot d\mathbf{r}.$$

18. Tegyük fel, $\nabla\cdot\mathbf{F}_1=\nabla\cdot\mathbf{F}_2$ és $\nabla\times\mathbf{F}_1=\nabla\times\mathbf{F}_2$ egy S kifelé irányított felülettel határolt D tartományon, ahol a kifelé irányított $\mathbf{n}$ normálisra $\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{n}=\mathbf{F}_2\cdot\mathbf{n}$ az S felületen. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{F}_1=\mathbf{F}_2$ a D tartományon!

19. Igaz vagy nem igaz, hogy ha $\nabla\cdot\mathbf{F}=0$ és $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$, akkor $\mathbf{F}=\mathbf{0}$? Válaszunkat indokoljuk!

20. Legyen S egy $\mathbf{r}(u,v)$ paraméteresen adott irányított felület. Legyen $d\sigma=\mathbf{r}_u du\times\mathbf{r}_v dv$, azaz $d\sigma$ a felület egy normálvektora. Egyben, a $d\sigma=|d\sigma|$ a felület elemi területe ((16.43) képlet). Vezessük le a

$$d\sigma=(EG-F^2)^{1/2}du\,dv$$

összefüggést, ahol

$$E=|\mathbf{r}_u|^2,\quad F=\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v,\quad G=|\mathbf{r}_v|^2.$$

21. Mutassuk meg, hogy egy S kifelé irányított felülettel határolt D tartomány V térfogatára fennáll

$$V=\frac{1}{3}\iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma,$$

ahol $\mathbf{r}$ a D tartomány (x,y,z) pontjának helyvektora, $\mathbf{n}$ pedig a felület egységnyi normálvektora!

Függelékek

F.6. Gyakran előforduló határértékek

Ez a függelék a 11.1. alfejezet 5. tételének (4)–(6) állításait bizonyítja.

4. határérték: Ha $|x| < 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

Azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan N, hogy minden $n > N$ esetén $|x^n| < \varepsilon$. Mivel $\varepsilon^{1/n} \to 1$, és $|x| < 1$, van olyan N, hogy $\varepsilon^{1/N} > |x|$. Azaz

$$|x^N| = |x|^N < \varepsilon. \tag{F.1}$$

Ez az az egész szám, amire szükségünk volt, hiszen

$$|x^n| < |x^N| \quad \text{minden} \quad n > N \tag{F.2}$$

Az (F.1) és (F.2) egyenlőtlenségekből $|x^n| < \varepsilon$ minden $n > N$ esetén.

5. határérték: Bármilyen x számra $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Legyen

$$a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Ekkor

$$\ln a_n = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \to x,$$

ahogy azt L'Hospital szabállyal megmutatjuk, ahol n „szerint" differenciálunk (4. Tétel)

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+x/n)}{1/n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{1+x/n}\right)\cdot\left(-\frac{x}{n^2}\right)}{-1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+x/n} = x.$$

A 4. Tétel szerint az $f(x) = e^x$ függvénnyel

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = a_n = e^{\ln a_n} \to e^x.$$

6. határérték: Bármilyen x számra $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

Mivel

$$-\frac{|x|^n}{n!} \le \frac{x^n}{n!} \le \frac{|x|^n}{n!},$$

azt kell megmutatnunk, hogy $|x|^n/n! \to 0$. A sorozatokra vonatkozó „szendvics tételt" (11.1. alfejezet 2. Tétel) alkalmazzuk, hogy megmutassuk, $x^n/n! \to 0$.

Először választunk egy olyan M számot, hogy $(|x|/M) < 1$ teljesüljön. Az imént bizonyított 4. határérték-állítás szerint $(|x|/M)^n \to 0$. Ha $n > M$, akkor

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^n}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot M\cdot \underbrace{(M+1)(M+2)\cdot\cdots\cdot n}_{(n-M)\text{tényező}}}$$
$$\leq \frac{|x|^n}{M!M^{n-M}} = \frac{|x|^n M^M}{M!M^n} = \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n.$$

Azaz

$$0 \leq \frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n.$$

Mivel $M^M/M!$ egy n-től független konstans és $(|x|/M)^n$ nullához tart, ezért $|x|^n/n! \to 0$.

F.7. A vektoriális szorzás disztributivitása

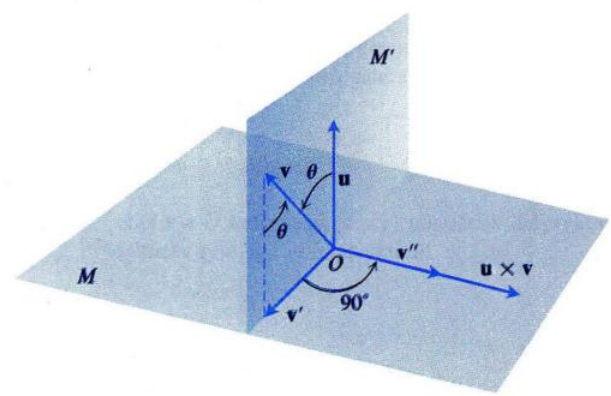
Ebben a pontban bebizonyítjuk, hogy a vektoriális szorzás disztributív a vektorok összeadására nézve, azaz

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}.$$

A vektoriális szorzatnak ezt a tulajdonságát már kimondtuk a 12.4. alfejezetben.

Bizonyítás: A disztributivitás bizonyításához felhasználjuk az $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ vektornak egy érdekes felírását. Rajzoljuk fel $\mathbf{u}$-t és $\mathbf{v}$-t egy közös O kiindulási pontból, és nevezzük M-nek az $\mathbf{u}$-ra merőleges, O-n átmenő síkot (F.10. ábra). Jelöljük $\mathbf{v}'$-vel a $\mathbf{v}$ vektor M-re való merőleges vetületét. Látható, hogy $\mathbf{v}'$ hossza $|\mathbf{v}|\sin\theta$ lesz. Forgassuk el $\mathbf{v}'$-t $\mathbf{u}$ körül 90°-al pozitív irányba, és szorozzuk meg az így kapott $\mathbf{v}''$ vektort $\mathbf{u}$ hosszával. A keletkező $|\mathbf{u}|\mathbf{v}''$ vektor éppen $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ lesz, hiszen az iránya megegyezik $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ irányával (F.10. ábra), és a hossza

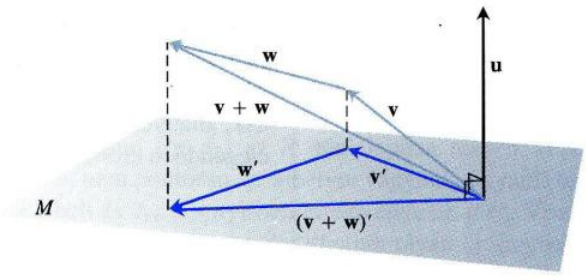
$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}''| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}'| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta = |\mathbf{u}\times\mathbf{v}|.$$



F.10. ÁBRA: Az ábráról leolvasható, hogy $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\mathbf{v}''$.

Vizsgáljuk meg azt a három műveletet, amelyet $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ előállítása során használtunk! Ez a három művelet az

1. M-re való vetítés,
2. $\mathbf{u}$ körüli 90°-os forgatás,
3. $|\mathbf{u}|$ skalárral való szorzás.



F.11. ÁBRA: A $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ vektorok, és merőleges vetületük az M síkra.

Ha a műveletek bármelyikét egy olyan háromszögre alkalmazzuk, amelynek egyik oldala sem párhuzamos $\mathbf{u}$-val, akkor a háromszögből keletkező alakzat is egy ilyen háromszög lesz. Induljunk ki egy olyan háromszögből, amelynek oldalai $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ és $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, és alkalmazzuk egymás után a fenti három műveletet (F.11. ábra). Rendre a következőket kapjuk:

1. Egy háromszöget, amelynek oldalai $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ és $(\mathbf{v}+\mathbf{w})'$, és ezek kielégítik a következő vektoregyenletet:

$$\mathbf{v}'+\mathbf{w}'=(\mathbf{v}+\mathbf{w})'.$$

2. Egy háromszöget, amelynek oldalai $\mathbf{v}''$, $\mathbf{w}''$ és $(\mathbf{v}+\mathbf{w})''$, és ezek kielégítik a következő vektoregyenletet:

$$\mathbf{v}''+\mathbf{w}''=(\mathbf{v}+\mathbf{w})''.$$

(A vesszős és kétvesszős vektorok jelentése ugyanaz, amely az F.10. ábrán volt.)

3. Egy háromszöget, amelynek oldalai $|\mathbf{u}|\mathbf{v}''$, $|\mathbf{u}|\mathbf{w}''$ és $|\mathbf{u}|(\mathbf{v}+\mathbf{w})''$, és ezek kielégítik a következő vektoregyenletet:

$$|\mathbf{u}|\mathbf{v}''+|\mathbf{u}|\mathbf{w}''=|\mathbf{u}|(\mathbf{v}+\mathbf{w})''.$$

Az utolsó egyenletben hajtsuk végre a bizonyítás elején igazolt $|\mathbf{u}|\mathbf{v}''=\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, $|\mathbf{u}|\mathbf{w}''=\mathbf{u}\times\mathbf{w}$, illetve $|\mathbf{u}|(\mathbf{v}+\mathbf{w})''=\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ helyettesítéseket, és megkapjuk a keresett

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}=\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w})$$

összefüggést. □

F.8. A vegyes deriváltak egyenlőségéről és a kétváltozós függvények megváltozásáról szóló tétel bizonyítása

A függeléknek ebben a pontjában bebizonyítjuk a vegyes parciális deriváltak egyenlőségéről szóló tételt (14.3. alfejezet, 2. Tétel), és a kétváltozós függvények megváltozásáról szóló tételt (14.3. alfejezet, 3. Tétel). Az előbbi tételt először Euler publikálta 1734-ben, egy hidrodinamikáról szóló cikkben.

1. TÉTEL: A vegyes parciális deriváltak egyenlősége

Ha $f(x,y)$ és az f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} parciális deriváltak léteznek egy (a,b) körüli nyílt tartományon és valamennyi folytonos az (a,b) pontban, akkor

$$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b).$$

Bizonyítás: $f_{xy}(a,b)$ és $f_{yx}(a,b)$ egyenlőségét a Lagrange-féle középértéktétel (4.2. alfejezet, 4. Tétel) négyszeri alkalmazásával fogjuk megmutatni. A feltételek szerint az (a,b) pont belső pontja egy olyan, az xy-síkban fekvő R téglalapnak, amelyen f, f_x, f_y, f_{xy} és f_{yx} mindegyike létezik. Válasszuk h-t és k-t olyan elegendően kicsiny számnak, hogy az $(a+h,b+k)$ pont is R-be essen, és legyen

$$\Delta = F(a+h) - F(a), \tag{F.3}$$

ahol

$$F(x) = f(x,b+k) - f(x,b). \tag{F.4}$$

Alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt F-re. F folytonos és differenciálható, hiszen f is az, az első változója szerint. A középértéktétel és (F.3) alapján

$$\Delta = hF'(c_1) \tag{F.5}$$

egy alkalmas $c_1 \in (a,a+h)$ számmal. Az (F.4) egyenlőséget deriválva

$$F'(x) = f_x(x,b+k) - f_x(x,b),$$

amit felhasználva (F.5) így alakul:

$$\Delta = h\big[f_x(c_1,b+k) - f_x(c_1,b)\big]. \tag{F.6}$$

Most alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt a $g(y) = f_x(c_1,y)$ függvényre. Azt kapjuk, hogy alkalmas $d_1 \in (b,b+k)$-val

$$g(b+k) - g(b) = kg'(d_1),$$

vagyis

$$f_x(c_1,b+k) - f_x(c_1,b) = kf_{xy}(c_1,d_1).$$

Ha ezt behelyettesítjük az (F.6)-ba, azt kapjuk, hogy

$$\Delta = hkf_{xy}(c_1,d_1), \tag{F.7}$$

ahol a (c_1,d_1) pont egy olyan R' téglalap belső pontja, melynek négy csúcsa (a,b), $(a+h,b)$, $(a+h,b+k)$ és $(a,b+k)$. (Lásd az F.12. ábrát.)

Az (F.4) egyenlőségbeli definíciót felhasználva (F.3) így írható:

$$\begin{aligned}\Delta &= f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)\\ &= \big[f(a+h,b+k) - f(a,b+k)\big] - \big[f(a+h,b) - f(a,b)\big]\\ &= \phi(b+k) - \phi(b),\end{aligned} \tag{F.8}$$

ahol

$$\phi(y) = f(a+h,y) - f(a,y). \tag{F.9}$$

A Lagrange-féle középértéktételt (F.8) egyenletre alkalmazva

$$\Delta = k\phi'(d_2) \tag{F.10}$$

valamely $d_2 \in (b,b+k)$-val. (F.9) alapján

$$\phi'(y) = f_y(a+h,y) - f_y(a,y), \tag{F.11}$$

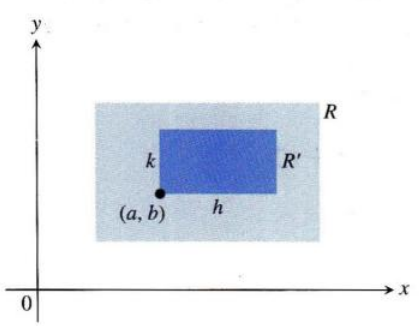
amelyet (F.10) egyenletbe beírva azt kapjuk, hogy

$$\Delta = k\big[f_y(a+h,d_2) - f_y(a,d_2)\big].$$

Végül alkalmazzuk a középértéktételt a szögletes zárójelben szereplő kifejezésre:

$$\Delta = khf_{yx}(c_2,d_2), \tag{F.12}$$

valamely $c_2 \in (a,a+h)$-val.



F.12. ÁBRA: Az $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ egyenlőség bizonyításának a kulcsa az, hogy bármilyen kicsi is R', f_{xy} és f_{yx} felvesz azonos értékeket R' belsejében (bár nem feltétlenül azonos pontokban).

Az (F.7) és (F.12) egyenletek alapján

$$f_{xy}(c_1,d_1) = f_{yx}(c_2,d_2), \tag{F.13}$$

ahol mind (c_1,d_1), mind (c_2,d_2) az R' téglalapban fekszik (F.12. ábra). Az (F.13)-beli egyenlet nem pontosan az, amelyre vágyunk, ugyanis csak azt állítja, hogy f_{xy} (c_1,d_1)-beli és f_{yx} (c_2,d_2)-beli értéke egyezik meg. Viszont az R' téglalap oldalait alkotó h és k számot választhatjuk olyan kicsinynek, amilyennek szeretnénk. Az a feltétel, hogy f_{xy} és f_{yx} folytonos (a,b)-ben azt jelenti, hogy

$$f_{xy}(c_1,d_1) = f_{xy}(a,b) + \varepsilon_1 \qquad \text{és} \qquad f_{yx}(c_2,d_2) = f_{yx}(a,b) + \varepsilon_2,$$

ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$, ahogy h és k mindketten nullához tartanak. Így $h,k \to 0$ mellett megkapjuk, hogy $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$. □

A tétel következtetése, azaz $f_{xy}(a,b)$ és $f_{yx}(a,b)$ egyenlősége gyengébb feltételekkel is igazolható. Például elég feltenni, hogy f, f_x és f_y léteznek R-ben, és hogy f_{xy} folytonos (a,b)-ben. Ebből következik, hogy f_{yx} létezik (a,b)-ben, és hogy értéke megegyezik $f_{xy}(a,b)$-vel.

2. TÉTEL: Kétváltozós függvények megváltozása

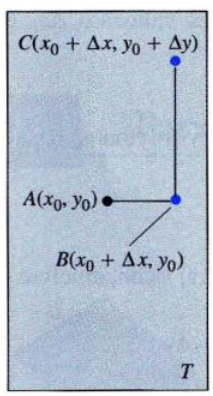
Tegyük fel, hogy a $z = f(x,y)$ függvény parciális deriváltjai léteznek egy nyílt R tartományon, és hogy f_x és f_y folytonosak az $(x_0,y_0) \in R$ pontban. Ekkor az f függvény (x_0,y_0) és $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ közötti

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

megváltozása felírható

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

alakban, ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$, ahogy Δx és Δy mindketten nullához tartanak.



F.13. ÁBRA: A növekedési tételben szereplő T téglalap. Az ábrán Δx és Δy pozitívnak van rajzolva, de bármelyik lehet nulla vagy negatív is.

Bizonyítás: Vegyünk fel egy olyan R-ben fekvő T téglalapot, amelynek középpontja $A(x_0,y_0)$, és legyen Δx, Δy olyan kicsi, hogy az A-t $B(x_0+\Delta x, y_0)$-lal, és a B-t $C(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$-nal összekötő szakasz T belsejében feküdjön (F.13. ábra).

Bontsuk fel Δz-t $\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2$ alakba, ahol

$$\Delta z_1 = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)$$

az f függvény A és B közötti megváltozása, míg

$$\Delta z_2 = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)$$

a B és C közötti megváltozás (F.14. ábra).

Az $[x_0, x_0+\Delta x]$ zárt intervallumon az $F(x) = f(x,y_0)$ függvény x differenciálható (így folytonos) függvénye, amelynek deriváltja

$$F'(x) = f_x(x,y_0).$$

A Lagrange-féle középértéktétel szerint (4.2. alfejezet, 4. Tétel) létezik egy $c \in (x_0, x_0+\Delta x)$ szám, amelyre

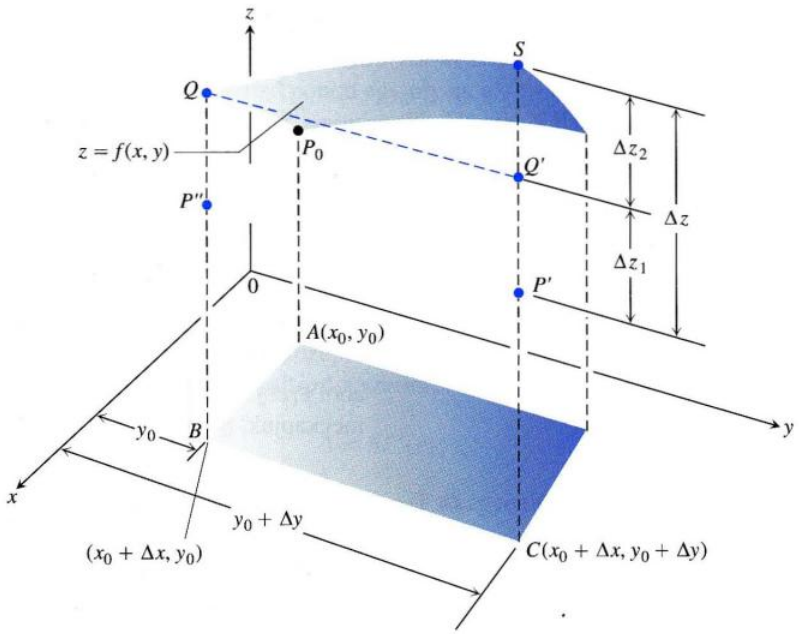
$$F(x_0+\Delta x) - F(x_0) = F'(c)\Delta x,$$

vagy másképp

$$f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0) = f_x(c,y_0)\Delta x,$$

azaz

$$\Delta z_1 = f_x(c,y_0)\Delta x. \tag{F.14}$$



F.14. ÁBRA: A $z = f(x,y)$ függvény képe a $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pont körül. A P_0, P' és P'' pontok azonos $z_0 = f(x_0, y_0)$ magasságra vannak az xy-sík fölött. A függvény, azaz z megváltozása $\Delta z = P'S$. A

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

megváltozás, amelyet x-nek rögzített $y = y_0$ melletti x_0 és $x_0 + \Delta x$ közötti megváltozása okoz, $P''Q = P'Q'$-ként van feltüntetve. Végül rögzített $x = x_0 + \Delta x$ mellett a függvény

$$\Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

változása, amelyet y-nak az y_0 és $y_0 + \Delta y$ közötti megváltozása okoz, $Q'S$-ként szerepel az ábrán. A függvény teljes változása Δz_1 és Δz_2 összege.

Hasonlóan, $G(y) = f(x_0 + \Delta x, y)$ deriválható (így folytonos) az $[y_0, y_0 + \Delta y]$ intervallumon, és

$$G'(y) = f_y(x_0 + \Delta x, y).$$

A középértéktétel szerint létezik egy $d \in (y_0, y_0 + \Delta y)$ szám, amelyre

$$G(y_0 + \Delta y) - G(y_0) = G'(d)\Delta y,$$

vagy másképp

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y) = f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y,$$

azaz

$$\Delta z_2 = f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y. \tag{F.15}$$

Tudjuk, hogy ha Δx és Δy nullához tartanak, akkor $c \to x_0$ és $d \to y_0$. Mivel f_x és f_y folytonos (x_0, y_0)-ban, az

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= f_x(c, y_0) - f_x(x_0, y_0), \\ \varepsilon_2 &= f_y(x_0 + \Delta x, d) - f_y(x_0, y_0) \end{aligned} \tag{F.16}$$

mennyiségek is nullához tartanak, ahogy $\Delta x \to 0$ és $\Delta y \to 0$.

Végül, ahogy bizonyítani akartuk,

$$\begin{aligned}\Delta z &= \Delta z_1 + \Delta z_2 \\ &= f_x(c,y_0)\Delta x + f_y(x_0+\Delta x,d)\Delta y && \text{(F.14) és (F.15) alapján} \\ &= \big[f_x(x_0,y_0)+\varepsilon_1\big]\Delta x + \big[f_y(x_0,y_0)+\varepsilon_2\big]\Delta y && \text{(F.16) miatt} \\ &= f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,\end{aligned}$$

ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$, ahogy Δx és Δy nullához tartanak. □

A kétváltozós függvény megváltozásáról szóló tétel tetszőleges, véges sok változós függvényre általánosítható. Például, ha a $w = f(x,y,z)$ háromváltozós függvény parciálisan differenciálható egy (x_0,y_0,z_0) körüli nyílt tartományon, és az f_x, f_y, f_z parciális deriváltak folytonosak (x_0,y_0,z_0)-ban, akkor

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0) \\ &= f_x\Delta x + f_y\Delta y + f_z\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z, \qquad \text{(F.17)}\end{aligned}$$

ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to 0$, ahogy $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$. (Az (F.17) egyenletben szereplő parciális deriváltakat az (x_0,y_0,z_0) pontban kell venni.)

Az (F.17) egyenlőség bizonyításához Δw-t három megváltozás összegére bontjuk:

$$\Delta w_1 = f(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - f(x_0,y_0,z_0) \qquad \text{(F.18)}$$

$$\Delta w_2 = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0) - f(x_0+\Delta x, y_0, z_0) \qquad \text{(F.19)}$$

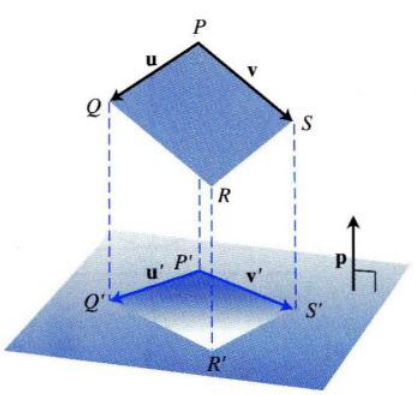
$$\Delta w_3 = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0), \qquad \text{(F.20)}$$

és mindegyikre alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt. A Δw_1, Δw_2, Δw_3 részmegváltozások mindegyikében két koordináta rögzített, és a harmadik változik. Például (F.19) egyenletben csak y változik, x értéke $x_0+\Delta x$-re van rögzítve, z értéke pedig z_0. Mivel $f(x_0+\Delta x, y, z_0)$ folytonos és differenciálható függvénye y-nak, alkalmazható rá a Lagrange-féle középértéktétel, azaz létezik olyan $y_1 \in (y_0, y_0+\Delta y)$, amellyel

$$\Delta w_2 = f_y(x_0+\Delta x, y_1, z_0)\Delta y.$$

F.9. Paralelogramma síkra eső vetületének területe

A függeléknek ebben a fejezetében bebizonyítjuk azt a 16.5. alfejezetben használt állítást, hogy az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ oldalvektorok által kifeszített térbeli paralelogramma $\mathbf{p}$ normálvektorú síkra vett merőleges vetületének a területe $|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{p}|$. (Lásd az F.15. ábrát.)



F.15. ÁBRA: Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok által kifeszített paralelogramma és a vetülete. Az egyenesek, amelyek mentén a vetítés történik, merőlegesek a síkra, azaz párhuzamosak a sík $\mathbf{p}$ normált normálvektorával.

3. TÉTEL:

Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ oldalvektorok által kifeszített paralelogramma $\mathbf{p}$ normált (azaz egységnyi hosszúságú) normálvektorú síkra vett merőleges vetületének a területe

$$A = |(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{p}|.$$

Bizonyítás: Az F.15. ábrán egy általános helyzetű, $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok által kifeszített paralelogrammát, és a $\mathbf{p}$ egységnyi normálvektorú síkra való vetületét láthatjuk. Az ábráról leolvasható, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \overrightarrow{PP'} + \mathbf{u}' + \overrightarrow{Q'Q} \\ &= \mathbf{u}' + \overrightarrow{PP'} - \overrightarrow{QQ'} && \overrightarrow{Q'Q} = -\overrightarrow{QQ'} \\ &= \mathbf{u}' + s\mathbf{p}. && \text{valamely } s \text{ skalárral, mivel} \\ & && \overrightarrow{PP'} - \overrightarrow{QQ'} \text{ párhuzamos } \mathbf{p}\text{-vel}\end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + t\mathbf{p}$$

valamely t skalárral. Így

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= (\mathbf{u}'+s\mathbf{p})\times(\mathbf{v}'+t\mathbf{p})\\ &= (\mathbf{u}'\times\mathbf{v}')+s(\mathbf{p}\times\mathbf{v}')+t(\mathbf{u}'\times\mathbf{p})+st\underbrace{(\mathbf{p}\times\mathbf{p})}_{0}.\end{aligned} \tag{F.21}$$

Az egyenlőségben szereplő $\mathbf{p}\times\mathbf{v}'$ és $\mathbf{u}'\times\mathbf{p}$ vektor merőleges $\mathbf{p}$-re, így amikor az egyenlet mindkét oldalát skalárisan szorozzuk $\mathbf{p}$-vel, a jobb oldalon az egyetlen nullától különböző tag $(\mathbf{u}'\times\mathbf{v}')\cdot\mathbf{p}$ lesz. Ezek szerint

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{p} = (\mathbf{u}'\times\mathbf{v}')\cdot\mathbf{p},$$

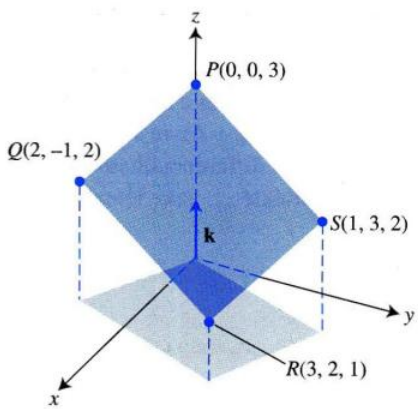
vagyis

$$|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{p}| = |(\mathbf{u}'\times\mathbf{v}')\cdot\mathbf{p}|. \tag{F.22}$$

Az egyenlőség jobb oldalán szereplő érték az $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ és $\mathbf{p}$ által kifeszített paralelogramma alapú egyenes hasáb térfogata. A hasáb magassága $|\mathbf{p}| = 1$, azaz a térfogat numerikusan megegyezik az alaplap területének, a $P'Q'R'S'$ paralelogrammának mérőszámával. Tehát (F.22) alapján:

$$\text{A } P'Q'R'S' \text{ paralelogramma területe} = |(\mathbf{u}'\times\mathbf{v}')\cdot\mathbf{p}| = |(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{p}|,$$

azaz az eredeti, $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ által kifeszített paralelogramma $\mathbf{p}$ normált normálvektorú síkra való merőleges vetületének a területe $|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{p}|$. □



F.16. ÁBRA: Az 1. példában a $PQRS$ paralelogramma xy-síkra vetített képének a területét számoljuk ki.

1. PÉLDA: **Síkra vetített paralelogramma területének kiszámolása**

Merőlegesen levetítjük a $P(0,0,3)$, $Q(2,-1,2)$, $R(3,2,1)$ és $S(1,3,2)$ csúcsokkal rendelkező paralelogrammát az xy-síkra. Mekkora a keletkező vetület területe (F.16. ábra)?

Megoldás: Ebben az esetben

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = 2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}, \qquad \mathbf{v} = \overrightarrow{PS} = \mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{p} = \mathbf{k},$$

így

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{p} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 7.$$

A keresett terület $|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{p}| = |7| = 7$. □

Megoldások

10. fejezet

10.1. Kúpszeletek és másodfokú egyenletek

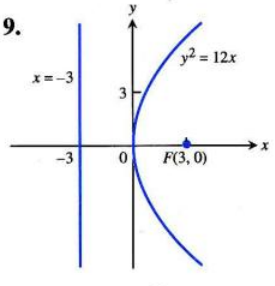
1. $y^2 = 8x$, $F(2,0)$, vezéregyenes: $x = -2$

3. $x^2 = -6y$, $F(0,-3/2)$, vezéregyenes: $y = 3/2$

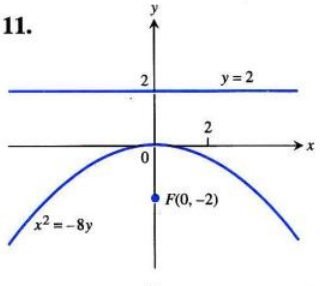
5. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, $F(\pm\sqrt{13},0)$, $V(\pm 2,0)$, aszimptoták: $y = \pm\frac{3}{2}x$

7. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, $F(\pm 1,0)$, $V(\pm\sqrt{2},0)$

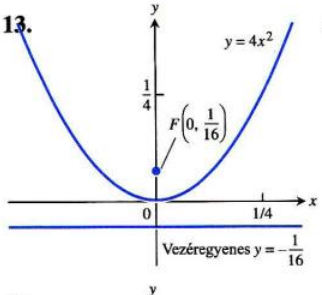
9.



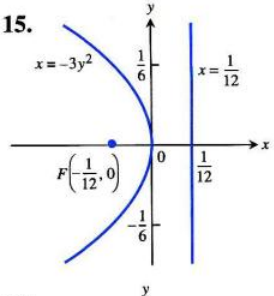
11.



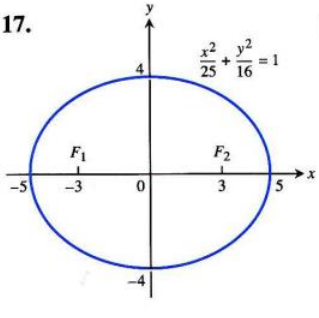
13.



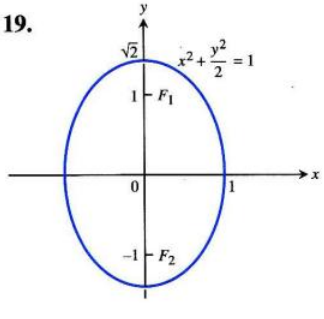
15.



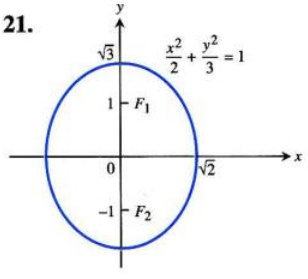
17.



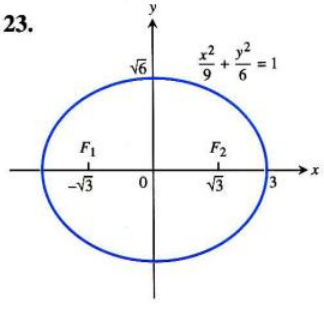
19.



21.

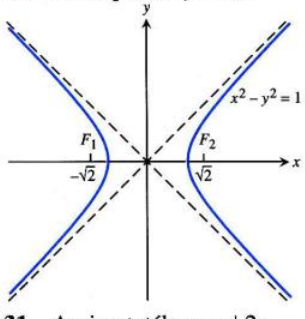


23.

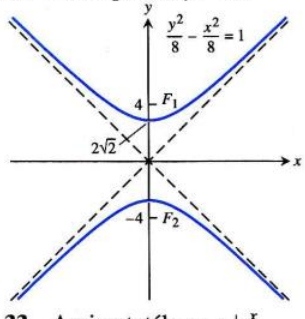


25. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

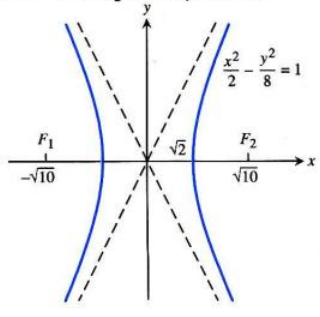
27. Aszimptoták: $y = \pm x$



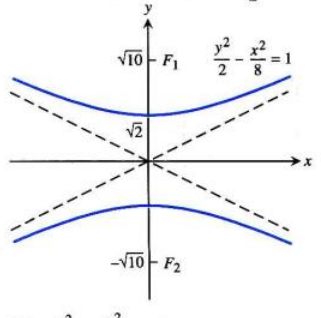
29. Aszimptoták: $y = \pm x$



31. Aszimptoták: $y = \pm 2x$



33. Aszimptoták: $y = \pm\frac{x}{2}$

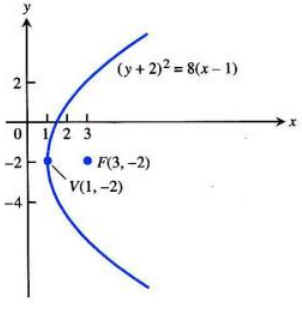


35. $y^2 - x^2 = 1$

37. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

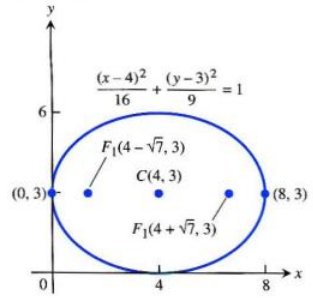
39. **(a)** tengelypont: $(1,-2)$, fókusz: $(3,-2)$, vezéregyenes: $x = -1$

(b)



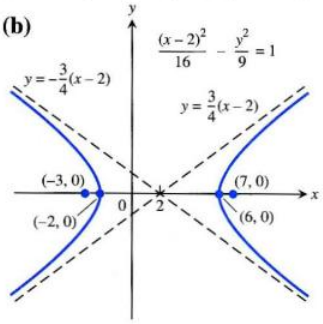
41. **(a)** fókuszok: $(4\pm\sqrt{7},3)$; tengelypontok: $(8,3)$ és $(0,3)$, középpont: $(4,3)$

(b)



43. **(a)** centrum: $(2,0)$; fókuszok: $(7,0)$ és $(-3,0)$, tengelypontok: $(6,0)$ és $(-2,0)$; aszimptoták: $y=\pm\frac{3}{4}(x-2)$

(b)



45. $(y+3)^2=4(x+2)$, $V(-2,3)$, $F(-1,-3)$, vezéregyenes: $x=-3$

47. $(x-1)^2=8(y+7)$, $V(1,-7)$, $F(1,-5)$, vezéregyenes: $y=-9$

49. $\frac{(x+2)^2}{6}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$, $F(-2\pm\sqrt{3}-1)$, $V(-2,\pm3-1)$, $C(-2,-1)$

51. $\frac{(x-2)^2}{3}+\frac{(y-3)^2}{2}=1$, $F(3,3)$ és $F(1,3)$, $V(\pm\sqrt{3}+2,3)$, $C(2,3)$

53. $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{5}=1$, $C(2,2)$, $F(5,2)$ és $F(-1,2)$, $V(4,2)$ és $V(0,2)$; aszimptoták: $(y-2)=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x-2)$

55. $(y+1)^2-(x+1)^2=1$, $C(-1,-1)$, $F(-1,\sqrt{2}-1)$ és $F(-1,-\sqrt{2}-1)$, $V(-1,0)$ és $(V(-1,-2)$; aszimptoták: $(y+1)=\pm(x+1)$

57. $C(-2,0)$, $a=4$

59. $V(-1,1)$, $F(-1,0)$

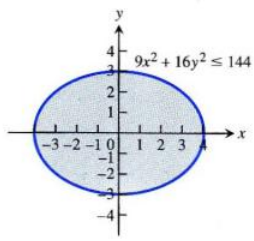
61. Ellipszis: $\frac{(x+2)^2}{5}+y^2=1$, $C(-2,0)$, $F(0,0)$ és $F(-4,0)$, $V(\sqrt{5}-2,0)$ és $V(-\sqrt{5}-2,0)$

63. Ellipszis: $\frac{(x-1)^2}{2}+(y-1)^2=1$, $C(1,1)$, $F(2,1)$ és $F(0,1)$, $V(\sqrt{2}+1,1)$ és $V(-\sqrt{2}+1,1)$

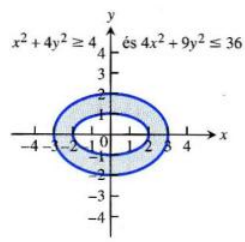
65. Hiperbola: $(x-1)^2-(y-2)^2=1$, $C(1,2)$, $F(1+\sqrt{2},2)$ és $F(1-\sqrt{2},2)$, $V(2,2)$ és $V(0,2)$; aszimptoták: $(y-2)=\pm(x-1)$

67. Hiperbola: $\frac{(y-3)^2}{6}-\frac{x^2}{3}=1$, $C(0,3)$, $F(0,6)$ és $F(0,0)$, $V(0,\sqrt{6}+3)$ és $V(0,-\sqrt{6}+3)$; aszimptoták: $y=\sqrt{2}x+3$ vagy $y=-\sqrt{2}x+3$

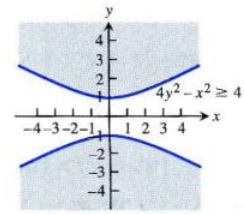
69.



71.



73.



77. $3x^2+3y^2-7x-7y+4=0$

79. $(x+2)^2+(y-1)^2=13$. A pont a kör belsejében van.

81. **(b)** $1:1$

83. Hosszúság: $2\sqrt{2}$, szélesség: $\sqrt{2}$, terület: 4

85. 24π **87.** $(0,16/(3\pi))$

10.2. Kúpszeletek osztályozása excentricitásuk alapján

1. $e=3/5$, $F(\pm3,0)$, $x=\pm25/3$

3. $e=1/\sqrt{2}$, $F(0,\pm1)$, $y=\pm2$

5. $e=1/\sqrt{3}$, $F(0,\pm1)$, $y=\pm3$

7. $e=\sqrt{2}/3$, $F(\pm\sqrt{3},0)$, $x=\pm3\sqrt{3}$

9. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{36}=1$ **11.** $\frac{x^2}{4851}+\frac{y^2}{4900}=1$

13. $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ **15.** $e=1/2$, $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$

19. $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$, $F(1,4+\pm\sqrt{5})$, $e=\sqrt{5}/3$, $y=4\pm(9\sqrt{5}/5)$

21. $a=0$, $b=-4$, $c=0$, $e=\sqrt{3}/2$

23. $e=\sqrt{2}$, $F(\pm\sqrt{2},0)$, $x=\pm1/\sqrt{2}$

25. $e=\sqrt{2}$, $F(0,\pm4)$, $y=\pm2$

27. $e=\sqrt{5}$, $F(\pm\sqrt{10},0)$, $x=\pm2/\sqrt{10}$

29. $e=\sqrt{5}$, $F(0,\pm\sqrt{10})$, $y=\pm2/\sqrt{10}$

31. $y^2-\frac{x^2}{8}=1$ **33.** $x^2-\frac{y^2}{8}=1$

35. $e=\sqrt{2}$, $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$ **37.** $e=2$, $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

39. $\frac{(y-6)^2}{36}-\frac{(x-1)^2}{45}=1$

10.3. Másodfokú egyenletek és forgatások

1. hiperbola **3.** ellipszis **5.** parabola

7. parabola **9.** hiperbola **11.** hiperbola

13. ellipszis **15.** ellipszis

17. $x'^2-y'^2=4$, hiperbola

19. $4x'^2+16y'=0$, parabola

21. $y'^2=1$, párhuzamos egyenesek

23. $2\sqrt{2}x'^2+8\sqrt{2}y'=0$, parabola

25. $4x'^2+2y'^2=19$, ellipszis

27. $\sin\alpha=1/\sqrt{5}$, $\cos\alpha=2/\sqrt{5}$

29. $A' = 0{,}88$, $B' = 0{,}00$, $C' = 3{,}10$, $D' = 0{,}74$, $E' = -1{,}20$, $F' = -3$; $088x'^2 + 3{,}10y'^2 + 0{,}74x' - 1{,}20y' - 3 = 0$, ellipszis

31. $A' = 0{,}00$, $B' = 0{,}00$, $C' = 5{,}00$, $D' = 0$, $E' = 0$, $F' = -5$; $5{,}00y'^2 - 5 = 0$ vagy $y' = \pm 1{,}00$, párhuzamos egyenesek

33. $A' = 5{,}05$, $B' = 0{,}00$, $C' = -0{,}05$, $D' = -5{,}07$, $E' = -6{,}18$, $F' = -1$; $5{,}05x'^2 - 0{,}05y'^2 - 5{,}07x' - 6{,}18y' - 1 = 0$, hiperbola

35. **(a)** $\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$ **(b)** $\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$

(c) $x'^2 + y'^2 = a^2$ **(d)** $y' = -\frac{1}{m}x'$

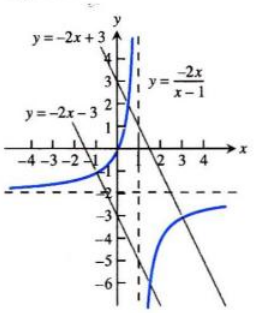
(e) $y' = -\frac{1}{m}x' + \frac{b}{m}$

37. **(a)** $x'^2 - y'^2 = 2$ **(b)** $x'^2 - y'^2 = 2a$

43. **(a)** parabola

45. **(a)** hiperbola

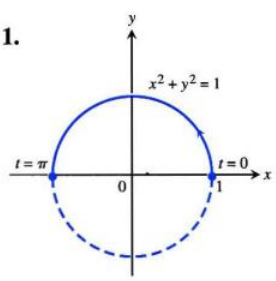
(b)



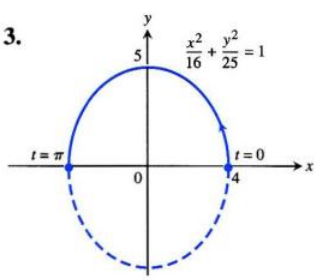
(c) $y = -2x - 3$, $y = -2x + 3$

10.4. Kúpszeletek és paraméteres egyenletek; a ciklois

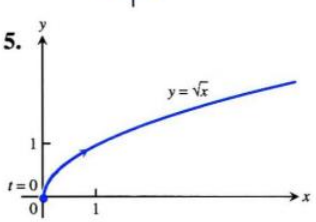
1.



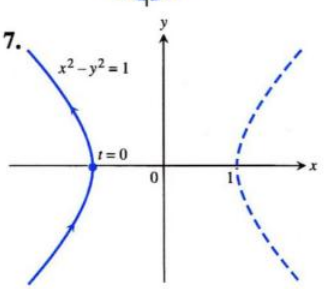
3.



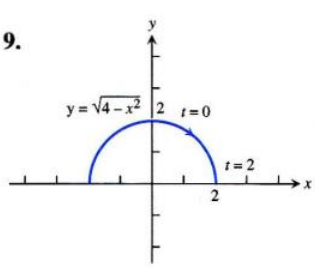
5.



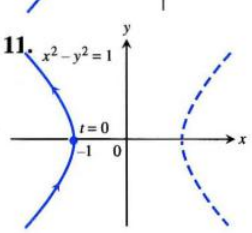
7.



9.



11.



13. $x = (a-b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$

$y = (a-b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$

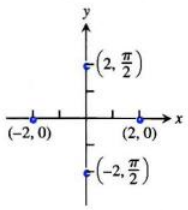
15. $x = a\sin^2 t\,\mathrm{tg}\,t$, $y = a\sin^2 t$

17. $(1,1)$

10.5. Polárkoordináták

1. a, e; b, g; c, h; d, f

3.



(a) $\left(2, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ és $\left(-2, \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi\right)$, n egész szám

(b) $(2, 2n\pi)$ és $(-2, (2n+1)\pi)$, n egész szám

(c) $\left(2, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right)$ és $\left(-2, \frac{3\pi}{2} + (2n+1)\pi\right)$, n egész szám

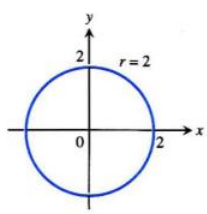
(d) $(2, (2n+1)\pi)$ és $(-2, 2n\pi)$, n egész szám

5. **(a)** $(3,0)$ **(b)** $(-3,0)$ **(c)** $(-1, \sqrt{3})$

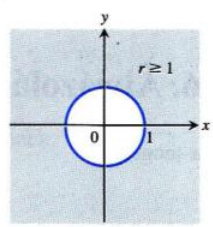
(d) $(1, \sqrt{3})$ **(e)** $(3,0)$ **(f)** $(1, \sqrt{3})$

(g) $(-3,0)$ **(h)** $(-1, \sqrt{3})$

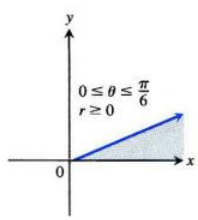
7.



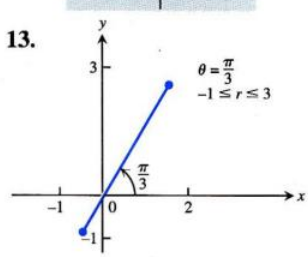
9.



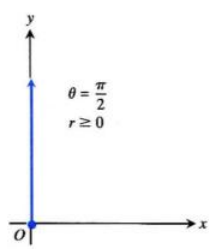
11.



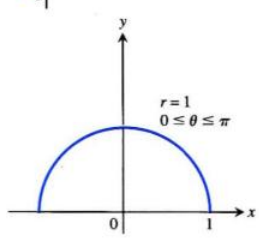
13.



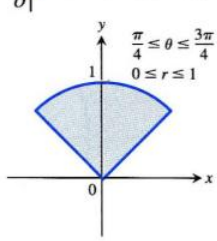
15.



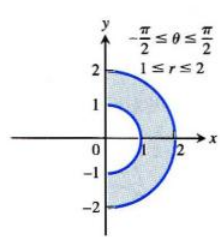
17.



19.



21.



23. $x = 2$, a $(2,0)$ ponton átmenő függőleges egyenes

25. $y = 0$, az x-tengely

27. $y = 4$, a $(0,4)$ ponton átmenő vízszintes egyenes

29. $x + y = 1$, egyenes, $m = -1$, $b = 1$

31. $x^2+y^2=1$, kör, $C(0,0)$, a sugár 1

33. $y-2x=5$, egyenes, $m=2$, $b=5$

35. $y^2=x$, parabola, tengelypontja a $(0,0)$ pont, jobbról nyitott

37. $y=e^x$, a természetes alapú logaritmusfüggvény grafikonja

39. $x+y=\pm 1$, két egyenes vonal, meredekségük -1, az y-tengelyt a $b=\pm 1$ pontokban metszi

41. $(x+2)^2+y^2=4$, kör, $C(-2,0)$, sugár 2

43. $x^2+(y-4)^2=16$, kör, $C(0,4)$, sugár 4

45. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$, kör, $C(1,1)$, sugár $\sqrt{2}$

47. $\sqrt{3}y+x=4$

49. $r\cos\theta=7$

51. $\theta=\pi/4$

53. $r=2$ vagy $r=-2$

55. $4r^2\cos^2\theta+9r^2\sin^2\theta=36$

57. $r\sin^2\theta=4\cos\theta$

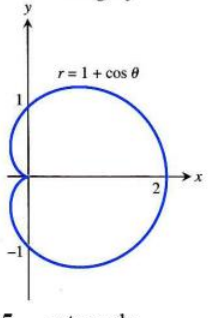
59. $r=4\sin\theta$

61. $r^2=6r\cos\theta-2r\sin\theta-6$

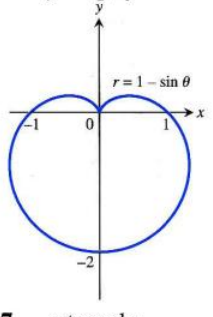
63. $(0,\theta)$, ahol θ valamilyen szög

10.6. Ábrázolás polárkoordinátákban

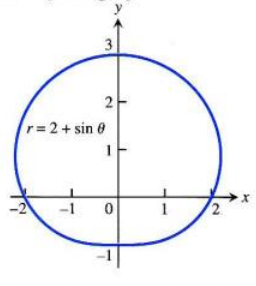
1. x-tengely



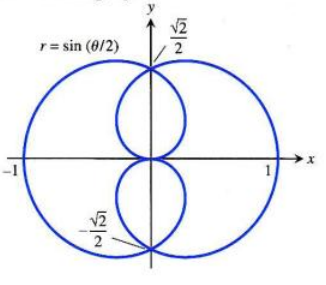
3. y-tengely



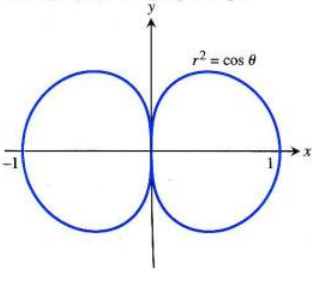
5. y-tengely



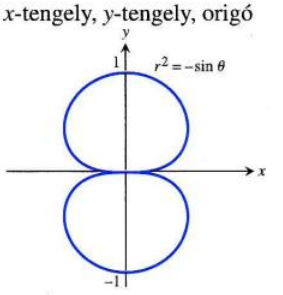
7. x-tengely



9. x-tengely, y-tengely, origó



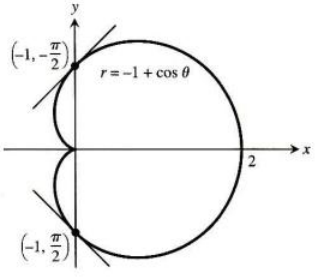
11. x-tengely, y-tengely, origó



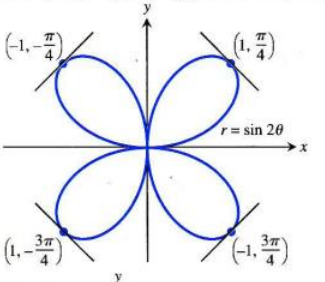
13. x-tengely, y-tengely, origó

15. origó

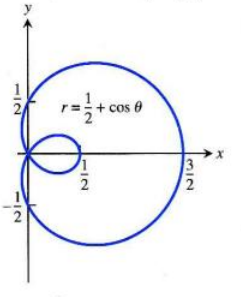
17. A $(-1,\pi/2)$ pontban a meredekség -1, a $(-1,-\pi/2)$ pontban 1



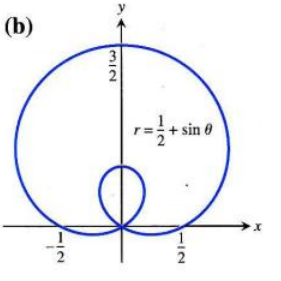
19. Az $(1,\pi/4)$ pontban a meredekség -1, a $(-1,-\pi/4)$ pontban 1, a $(-1,3\pi/4)$ pontban 1, az $(1,-3\pi/4)$ pontban -1



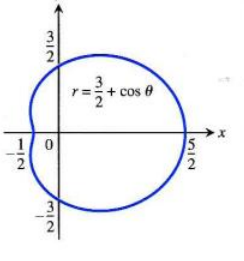
21. (a)



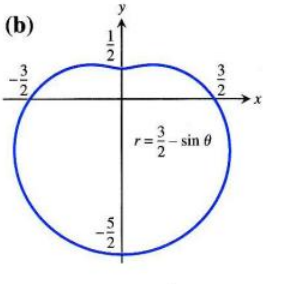
(b)



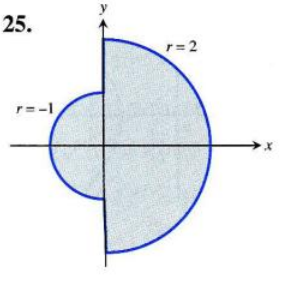
23. (a)



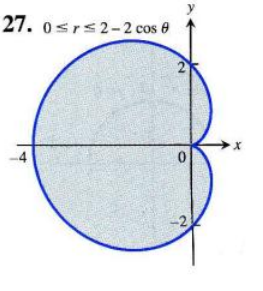
(b)



25.



27. $0 \le r \le 2-2\cos\theta$



31. $(0,0), (1,\pi/2), (1,3\pi/2)$

33. $(0,0), (\sqrt{3},\pi/3), (-\sqrt{3},-\pi/3)$

35. $(\sqrt{2},\pm\pi/6), (\sqrt{2},\pm 5\pi/6)$

37. $(1,\pi/12), (1,5\pi/12), (1,13\pi/12), (1,17\pi/12)$

43. (a)

51. $2y = \frac{2\sqrt{6}}{9}$

10.7. Terület és hosszúság polárkoordinátákban

1. 18π **3.** $\pi/8$ **5.** 2

7. $\frac{\pi}{2} - 1$ **9.** $5\pi - 8$ **11.** $3\sqrt{3} - \pi$

13. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ **15.** $12\pi - 9\sqrt{3}$ **17.** (a) $\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$

19. 19/3 **21.** 8 **23.** $3(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$

25. $\frac{\pi}{8} + \frac{3}{8}$ **27.** 2π **29.** $\pi\sqrt{2}$

31. $2\pi(2-\sqrt{2})$ **37.** $\left(\frac{5}{6}a, 0\right)$

10.8. Kúpszeletek polárkoordinátákban

1. $r\cos(\theta - \pi/6) = 5$, $y = -\sqrt{3}x + 10$

3. $r\cos(\theta - 4\pi/3) = 3$, $y = -(\sqrt{3}/3)x - 2\sqrt{3}$

5. $y = 2 - x$ **7.** $y = (\sqrt{3}/3)x + 2\sqrt{3}$

9. $r\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 3$ **11.** $r\cos\left(\theta \frac{\pi}{2}\right) = 5$

13. $r = 8\cos\theta$ **15.** $r = 2\sqrt{\sin\theta}$

17. $C(2,0)$, a sugár = 2 **19.** $C(1,\pi)$, a sugár = 1

21. $(x-6)^2 + y^2 = 36$, $r = 12\cos\theta$

23. $x^2 + (y-5)^2 = 25$, $r = 10\sin\theta$

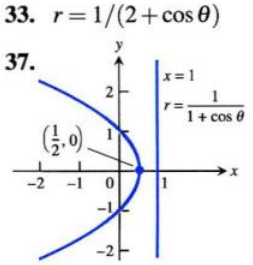
25. $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $r = -2\cos\theta$

27. $x^2 + (y+1/2)^2 = 1/4$, $r = -\sin\theta$

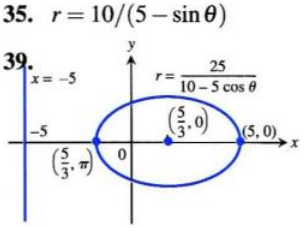
29. $r = 2/(1+\cos\theta)$ **31.** $r = 30/(1-5\sin\theta)$

33. $r = 1/(2+\cos\theta)$ **35.** $r = 10/(5-\sin\theta)$

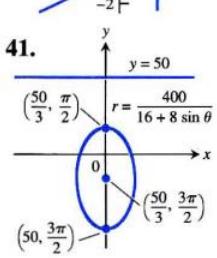
37.



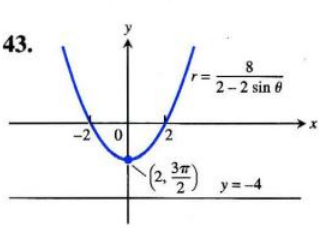
39.



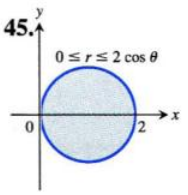
41.



43.



45.

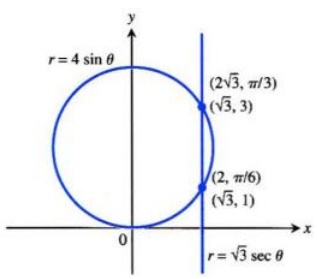


57. (b)

Bolygó	Perihélium	Afélium
Merkúr	0,3075 AU	0,4667 AU
Vénusz	0,7184 AU	0,7282 AU
Föld	0,9833 AU	1,0167 AU
Mars	1,3817 AU	1,6663 AU
Jupiter	4,9512 AU	5,4548 AU
Szaturnusz	9,0210 AU	10,0570 AU
Uránusz	18,2977 AU	20,0623 AU
Neptunusz	29,8135 AU	30,3065 AU
Plútó	29,6549 AU	49,2251 AU

59. (a) $x^2 + (y-2)^2 = 4$, $x = \sqrt{3}$

(b)



61. $r = 4/(1+\cos\theta)$

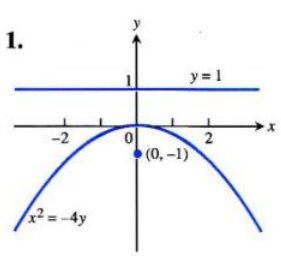
63. (b) A tűk egymástól 2 cm-re legyenek.

65. $r = 2a\sin\theta$ (kör)

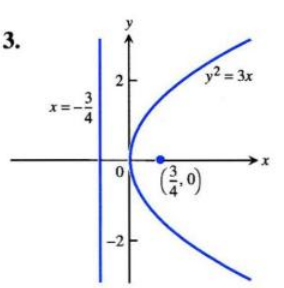
67. $r\cos(\theta - a) = p$ (egyenes)

Gyakorló feladatok

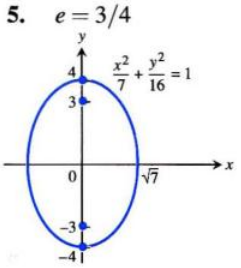
1.



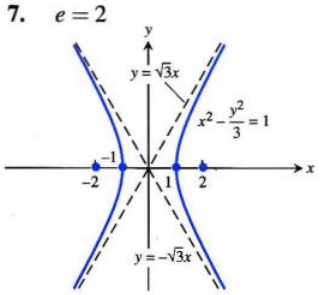
3.



5. $e = 3/4$



7. $e = 2$



9. $(x-2)^2 = -12(y-3)$, $V(2,3)$, $F(2,0)$; vezéregyenes: $y = 6$

11. $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+5)^2}{25} = 1$, $C(-3,-5)$, $V(-3,0)$ és $V(-3,-10)$, $F(-3,-1)$ és $F(-3,-9)$

13. $\frac{(y-2\sqrt{2})^2}{8} - \frac{(x-2)^2}{2} = 1$, $C(2,2\sqrt{2})$, $V(2,4\sqrt{2})$ és $V(2,0)$, $F(2,\sqrt{10}+2\sqrt{2})$ és $F(2,-\sqrt{10}+2\sqrt{2})$; aszimptoták: $y = 2x-4+2\sqrt{2}$ és $y = -2x+4+2\sqrt{2}$

15. Hiperbola: $\frac{(x-2)^2}{4} - y^2 = 1$, $F(2\pm\sqrt{5},0)$, $V(2\pm 2,0)$, $C(2,0)$; aszimptoták: $y = \pm\frac{1}{2}(x-2)$

17. Parabola: $(y-1)^2 = -16(x+3)$, $V(-3,1)$, $F(-7,1)$; vezéregyenes: $x = 1$

19. Ellipszis: $\frac{(x+3)}{16} + \frac{(y-2)}{9} = 1$, $F(\pm\sqrt{7}-3,2)$, $V(\pm 4-3,2)$, $C(-3,2)$

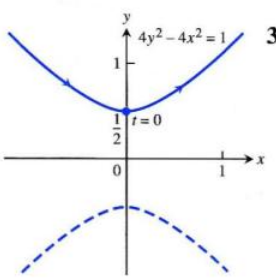
21. Kör: $(x-1)^2+(y-1)^2 = 2$, $C(1,1)$, sugár: $= \sqrt{2}$

23. Ellipszis **25.** Hiperbola **27.** Egyenes

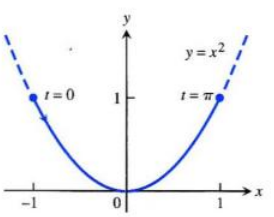
29. Ellipszis, $5x'^2 + 3y'^2 = 30$

31. Hiperbola, $y'^2 - x'^2 = 2$

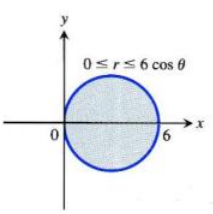
33.



35.



37.



39. (d) **41.** (l)

43. (k)

45. (i) **47.** $(0,0)$

49. $(0,0)$, $(1,\pm\pi/2)$ **51.** A grafikonok egybeesnek.

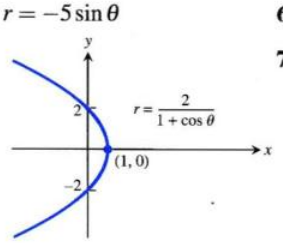
53. $\left(\sqrt{2},\pi/4\right)$ **55.** $y = \left(\sqrt{3}/3\right)x - 4$

57. $x = 2$ **59.** $y = -3/2$

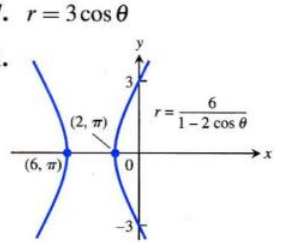
61. $x^2+(y+2)^2 = 4$ **63.** $(x-\sqrt{2})^2+y^2 = 2$

65. $r = -5\sin\theta$ **67.** $r = 3\cos\theta$

69.



71.



73. $r = \frac{4}{1+2\cos\theta}$ **75.** $r = \frac{2}{2+\sin\theta}$

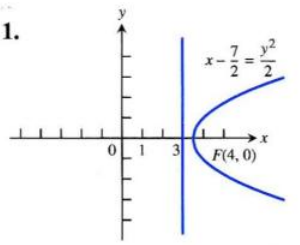
77. $9\pi/2$ **79.** $2+\pi/4$

81. 8 **83.** $\pi-3$

85. $(2-\sqrt{2})\pi$ **87.** (a) 24π (b) 16π

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1.

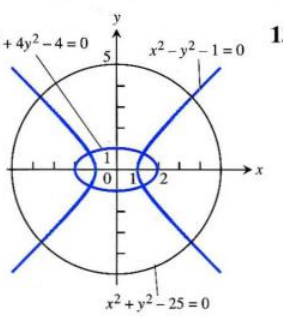


3. $3x^2+3y^2-8y+4 = 0$

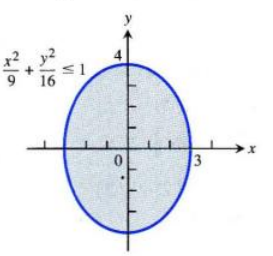
5. $(0,\pm 1)$

7. (a) $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{x^2}{48} = 1$ (b) $\frac{16\left(y+\frac{3}{4}\right)^2}{25} - \frac{2x^2}{75} = 1$

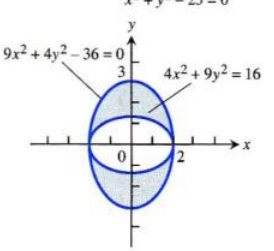
11.



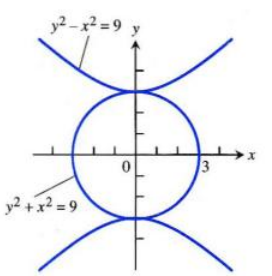
13.



15.



17.



19. $x = (a+b)\cos\theta - b\cos\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$, $y = (a+b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$

21. (a) $r = e^{2\theta}$ (b) $\frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi}-1)$

23. $\frac{32\pi-4\pi\sqrt{2}}{5}$ **25.** $r = \frac{4}{1+2\cos\theta}$

27. $r = \frac{2}{2+\sin\theta}$ **29.** (a) 120°

31. $1{,}6\times 10^7$ km **33.** $e = \sqrt{2/3}$

35. Igen, egy parabola.

37. (a) $r = \frac{2a}{1+\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$ (b) $r = \frac{8}{3-\cos\theta}$ (c) $r = 31+2\sin\theta$

43. $\pi/2$ **47.** $\left(2,\pm\frac{\pi}{3}\right), \frac{\pi}{2}$

51. $\pi/2$ **53.** $\pi/4$

11. fejezet

11.1. Sorozatok

1. $a_1 = 0$, $a_2 = -1/4$, $a_3 = -2/9$, $a_4 = -3/16$

3. $a_1 = 1$, $a_2 = -1/3$, $a_3 = 1/5$, $a_4 = -1/7$

5. $a_1 = 1/2,\ a_2 = 1/2,\ a_3 = 1/2,\ a_4 = 1/2$

7. $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \frac{63}{32}, \frac{127}{64}, \frac{255}{128}, \frac{511}{256}, \frac{1023}{512}$

9. $2, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, -\frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$

11. 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55

13. $a_n = (-1)^{n+1}, n \geq 1$

15. $a_n = (-1)^{n+1} n^2, n \geq 1$

17. $a_n = n^2 - 1, n \geq 1$

19. $a_n = 4n - 3, n \geq 1$

21. $a_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}, n \geq 1$

23. Konvergens, 2

25. Konvergens, -1

27. Konvergens, -5

29. Divergens

31. Divergens

33. Konvergens, $\frac{1}{2}$

35. Konvergens, 0

37. Konvergens, $\sqrt{2}$

39. Konvergens, 1

41. Konvergens, 0

43. Konvergens, 0

45. Konvergens, 0

47. Konvergens, 1

49. Konvergens, e^7

51. Konvergens, 1

53. Konvergens, 1

55. Divergens

57. Konvergens, 4

59. Konvergens, 0

61. Divergens

63. Konvergens, e^{-1}

65. Konvergens, $e^{2/3}$

67. Konvergens, x, $(x > 0)$

69. Konvergens, 0

71. Konvergens, 1

73. Konvergens, 1/2

75. Konvergens, $\pi/2$

77. Konvergens, 0

79. Konvergens, 0

81. Konvergens, 1/2

83. Konvergens, 0

85. $x_n = 2^{n-2}$

87. **(a)** $f(x) = x^2 - 2$, $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$,
(b) $f(x) = \operatorname{tg}(x) - 1$, $\pi/4 \approx 0{,}7853981635$,
(c) $f(x) = e^x$, divergens

89. **(b)** 1

97. Növekvő, korlátos

99. Korlátos

101. Konvergens, Weierstrass tétele

103. Konvergens, Weierstrass tétele

105. Divergens, definíció

109. Konvergens

111. Konvergens

121. $N = 692$, $a_n = \sqrt[n]{0,5}$, $L = 1$

123. $N = 65$, $a_n = 0{,}9^n$, $L = 0$

125. **(b)** $\sqrt{3}$

11.2. Végtelen sorok

1. $s_n = \dfrac{2(1-(1/3)^n)}{1-(1/3)}$, 3

3. $s_n = \dfrac{1-(-1/2)^n}{1-(-1/2)^n}$, 2/3

5. $s_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+2}$, $\dfrac{1}{2}$

7. $1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{64} + \ldots, \dfrac{4}{5}$

9. $\dfrac{7}{4} + \dfrac{7}{16} + \dfrac{7}{64} + \ldots, \dfrac{7}{3}$

11. $(5+1) + \left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{9}\right) + \left(\dfrac{5}{8} + \dfrac{1}{27}\right) + \ldots, \dfrac{23}{2}$

13. $(1+1) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5}\right) + \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{25}\right) + \left(\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{125}\right) + \ldots, \dfrac{17}{6}$

15. 1

17. 5

19. 1

21. $-\frac{1}{\ln 2}$

23. Konvergens, $2 + \sqrt{2}$

25. Konvergens, 1

27. Divergens

29. Konvergens, $\frac{e^2}{e^2-1}$

31. Konvergens, 2/9

33. Konvergens, 3/2

35. Divergens

37. Divergens

39. Konvergens, $\frac{\pi}{\pi - e}$

41. $a = 1$, $r = -x$, ha $|x| < 1$, akkor $1/(1+x)$-hez konvergál

43. $a = 3$, $r = (x-1)/2$, ha $x \in (-1,3)$, akkor $6/(3-x)$-hez tart

45. $|x| < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{1-2x}$

47. $-2 < x < 0$, $\frac{1}{2+x}$

49. $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, k egész szám; $\frac{1}{1-\sin x}$

51. 23/99

53. 7/9

55. 1/15

57. 41 333/33 300

59. **(a)** $\displaystyle\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$, **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$,
(c) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-3)(n-2)}$

69. **(a)** $r = 3/5$, **(b)** $r = -3/10$

71. $|r| < 1$, $\frac{1+2r}{1-r^2}$

73. 28 m

75. $8\,\text{m}^2$

77. **(a)** $3\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$,
(b) $A_n = A + \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)A + \ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}A$,
$A = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 2\sqrt{3}/5$

11.3. Az integrálkritérium

1. Konvergens: mértani sor, $r = \frac{1}{10} < 1$

3. Divergens: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

5. Divergens: p-sor, $p < 1$

7. Konvergens: mértani sor, $r = \frac{1}{8} < 1$

9. Divergens: integrálkritérium

11. Konvergens: mértani sor, $r = 2/3 < 1$

13. Divergens: integrálkritérium

15. Divergens: $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n+1} \neq 0$

17. Divergens: $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n}/\ln n) \neq 0$

19. Divergens: mértani sor, $r = \frac{1}{ln2} > 1$

21. Konvergens: integrálkritérium

23. Divergens: n-edik tag

25. Konvergens: integrálkritérium

27. Konvergens: integrálkritérium

29. Konvergens: integrálkritérium

31. $a = 1$

33. **(b)** kb. 41,55

35. Igaz

11.4. Összehasonlító kritériumok

1. Divergens, vö. $\sum(1/\sqrt{n})$

3. Konvergens, vö. $\sum(1/2^n)$

5. Divergens: vö. n-edik tagok sorozata

7. Konvergens: $\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n < \left(\frac{n}{3n}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

9. Divergens: vö. $\sum(1/n)$

11. Konvergens: vö. $\sum(1/n^2)$

13. Divergens: vö. $\sum(1/n)$

15. Divergens: vö. $\sum(1/n)$

17. Divergens: integrálkritérium

19. Konvergens: vö. $\sum(/n^{3/2})$

21. Konvergens: $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$

23. Konvergens: $\frac{1}{3^{n-1}+1} < \frac{1}{3^{n-1}}$

25. Divergens: vö. $\sum(1/n)$

27. Konvergens: vö. $\lim(1/n^2)$

29. Konvergens: $\frac{\operatorname{arctg} n}{n^{1,1}} < \frac{\pi/2}{n^{1,1}}$

31. Konvergens: vö. $\sum(1/n^2)$

33. Divergens: vö. $\sum(1/n)$

35. Konvergens: vö. $\sum(1/n^2)$

11.5. A hányados- és a gyökkritérium

1. Konvergens: hányadoskritérium

3. Divergens: hányadoskritérium

5. Konvergens: hányadoskritérium

7. Konvergens: vö. $\sum(3/(1,25)^n)$

9. Divergens: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n = e^{-3} \neq 0$

11. Konvergens: vö. $\sum(1/n^2)$

13. Divergens: vö. $\sum(1/(2n))$

15. Divergens: vö. $\sum(1/n)$

17. Konvergens: hányadoskritérium

19. Konvergens: gyökkritérium

21. Konvergens: gyökkritérium

23. Konvergens: gyökkritérium

25. Konvergens: vö. $\sum(1/n^2)$

27. Konvergens: hányadoskritérium

29. Divergens: hányadoskritérium

31. Konvergens: hányadoskritérium

33. Konvergens: hányadoskritérium

35. Divergens: $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/n!} \to 1$

37. Konvergens: hányadoskritérium

39. Divergens: gyökkritérium

41. Konvergens: gyökkritérium

43. Konvergens: hányadoskritérium

47. Igen

11.6. Alternáló sorok, abszolút és feltételes konvergencia

1. Konvergens: 16. Tétel

3. Divergens: $a_n \not\to 0$

5. Konvergens: 16. Tétel

7. Divergens: $a_n \to \frac{1}{2}$

9. Konvergens: 16. Tétel

11. Abszolút konveergens: a tagok abszolútértékei mértani sort alkotnak

13. Feltételesen konvergens: $1/\sqrt{n} \to 0$, de $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergens

15. Abszolút konvergens: vö. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$

17. Feltételesen konvergens: $1/(n+3) \to 0$, de $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$ divergens (vö. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1/n)$)

19. Divergens: $\frac{3+n}{5+n} \to 1$

21. Feltételesen konvergens: $\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right) \to 0$, de $(1+n)/n^2 > 1/n$.

23. Abszolút konvergens: hányadoskritérium

25. Abszolút konvergens: integrálkritérium

27. Divergens: $a_n \not\to 0$

29. Abszolút konvergens: hányadoskritérium

31. Abszolút konvergens: $\frac{1}{n^2+2n+1} < \frac{1}{n^2}$

33. Abszolút konvergens: $\left|\frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}\right| = \frac{1}{n^{3/2}}$ (konvergens p-sor)

35. Abszolút konvergens: gyökkritérium

37. Divergens: $a_n \to \infty$

39. Feltételesen konvergens: $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = 1/\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right) \to 0$, de a tagok abszolútértékeiből álló sor divergens (vö. $\sum(1/\sqrt{n})$)

41. Divergens: $a_n \to 1/2 \neq 0$

43. Abszolút konvergens: $\operatorname{sech} n = \frac{2}{e^n+e^{-n}} = \frac{2e^n}{e^{2n}+1} < \frac{2e^n}{e^{2n}} = \frac{2}{e^n}$, az utóbbi konvergens mértani sor tagja

45. $|\text{hiba}| < 0,2$

47. $|\text{hiba}| < 2\cdot 10^{-11}$

49. 0,54030

51. **(a)** $a_n \geq a_{n+1}$, **(b)** $-1/2$

11.7. Hatványsorok

1. **(a)** 1, $-1<x<1$, **(b)** $-1<x<1$, **(c)** sehol sem

3. **(a)** $1/4$, $-1/2<x<0$, **(b)** $-1/2<x<0$, **(c)** sehol sem

5. **(a)** 10, $-8<x<12$, **(b)** $-8<x<12$, **(c)** sehol sem

7. **(a)** 1, $-1<x<1$, **(b)** $-1<x<1$, **(c)** sehol sem

9. **(a)** 3, $-3\le x\le 3$, **(b)** $-3\le x\le 3$, **(c)** sehol sem

11. **(a)** ∞, minden x-re, **(b)** minden x-re, **(c)** sehol sem

13. **(a)** ∞, minden x-re, **(b)** minden x-re, **(c)** sehol sem

15. **(a)** 1, $-1\le x<1$, **(b)** $-1<x<1$, **(c)** $x=-1$

17. **(a)** 5, $-8<x<2$, **(b)** $-8<x<2$, **(c)** sehol sem

19. **(a)** 3, $-3<x<3$, **(b)** $-3<x<3$, **(c)** sehol sem

21. **(a)** 1, $-1<x<1$, **(b)** $-1<x<1$, **(c)** sehol sem

23. **(a)** 0, $x=0$, **(b)** $x=0$, **(c)** sehol sem

25. **(a)** 2, $-4<x\le 0$, **(b)** $-4<x<0$, **(c)** $x=0$

27. **(a)** 1, $-1\le x\le 1$, **(b)** $-1\le x\le 1$, **(c)** sehol sem

29. **(a)** $1/4$, $1\le x\le 3/2$, **(b)** $1\le x\le 3/2$, **(c)** sehol sem

31. **(a)** 1, $(-1-\pi)\le x<(1-\pi)$, **(b)** $(-1-\pi)<x<(1-\pi)$, **(c)** $x=-1-\pi$

33. $-1<x<3$, $4/(3+2x-x^2)$

35. $0<x<16$, $2/(4-\sqrt{x})$

37. $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$, $3/(2-x^2)$

39. $1<x<5$, $2/(x-1)$; $1<x<5$, $-2/(x-1)^2$

41. **(a)** $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\dots$ minden x-re konv.

(b) és **(c)** $2x-\frac{2^3x^3}{3!}+\frac{2^5x^5}{5!}-\frac{2^7x^7}{7!}+\frac{2^9x^9}{9!}-\frac{2^{11}x^{11}}{11!}+\dots$

43. **(a)** $\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{45}+\frac{17x^8}{2520}+\frac{31x^{10}}{14175}$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

(b) $1+x^2+\frac{2x^4}{3}+\frac{17x^6}{45}+\frac{62x^8}{315}+\dots$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

11.8. Taylor- és Maclaurin-sorok

1. $P_0(x)=0$,
$P_1(x)=x-1$, $P_2(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2$,
$P_3(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3$

3. $P_0(x)=\frac{1}{2}$, $P_1(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)$,
$P_2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2$,
$P_3(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3$

5. $P_0(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$P_1(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$,
$P_2(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2$,
$P_3(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3$

7. $P_0(x)=2$, $P_1(x)=2+\frac{1}{4}(x-4)$,
$P_2(x)=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2$,
$P_3(x)=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3$

9. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\dots$

11. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+\dots$

13. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ **15.** $7\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

17. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

19. x^4-2x^3-5x+4

21. $8+10(x-2)+6(x-2)^2+(x-2)^3$

23. $21-36(x+2)+25(x+2)^2-8(x+2)^3+(x+2)^4$

25. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n$ **27.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^2}{n!}(x-2)^n$

33. $L(x)=0$, $Q(x)=-x^2/2$

35. $L(x)=1$, $Q(x)=1+x^2/2$

37. $L(x)=x$, $Q(x)=x$

11.9. A Taylor-sorok konvergenciája, Taylor tétele

1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5x)^n}{n!}=1-5x+\frac{5^2x^2}{2!}-\frac{5^3x^3}{3!}+\dots$

3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5(-1)^n(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}=$

$=-5x+\frac{5x^3}{3!}-\frac{5x^5}{5!}+\frac{5x^7}{7!}-\dots$

5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^n}{(2n)!}$

7. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\frac{x^5}{4!}+\dots$

9. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\dots$

11. $x-\frac{\pi^2x^3}{2!}+\frac{\pi^4x^5}{4!}-\frac{\pi^6x^7}{6!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}x^{2n+1}}{(2n)!}$

13. $1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}=$

$=1-\frac{(2x)^2}{2\cdot 2!}+\frac{(2x)^4}{2\cdot 4!}-\frac{(2x)^6}{2\cdot 6!}+\frac{(2x)^8}{2\cdot 8!}-\dots$

15. $x^2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n=x^2+2x^3+4x^4+\dots$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=1+2x+3x^2+4x^3+\dots$

19. $|x|<0{,}06^{1/5}<0{,}56968$

21. $|\text{hiba}|<(10^{-3})^3/6<1{,}67\cdot 10^{-10}$, $-10^{-3}<x<0$

23. $|\text{hiba}|<(3^{0{,}1})\cdot 0{,}1^3/6<1{,}87\cdot 10^{-4}$

25. 0,000293653 **27.** $|x|<0{,}02$

31. $\sin x$, $x=0{,}1$, $\sin(0{,}1)$ **33.** $\operatorname{arctg} x$, $x=\pi/3$

35. $e^x\sin x=x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}-\frac{x^6}{90}\dots$

43. **(a)** $Q(x) = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2$, **(b)** ha $0 \le x < 100^{-1/3}$

49. **(a)** -1, **(b)** $(1/\sqrt{2})(1+i)$, **(c)** $-i$

53. $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 \ldots$, minden x-re konvergens

11.10. Hatványsorok alkalmazása

1. $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$

3. $1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3$

5. $1 - x + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{2}$

7. $1 - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^6}{8} - \frac{5x^9}{16}$

9. $1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3}$

11. $(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$

13. $(1-2x)^3 = 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3$

15. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^n = e^{-x}$

17. $y = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n/n!) = e^x - 1$

19. $y = \sum_{n=2}^{\infty} (x^n/n!) = e^x - x - 1$

21. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} = e^{x^2/2}$

23. $y = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^n = \frac{2}{1-x}$

25. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh} x$

27. $y = 2 + x - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)!}$

29. $y = x - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

31. $y = a + bx + \frac{1}{6}x^3 - \frac{ax^4}{3\cdot4} - \frac{bx^5}{4\cdot5} - \frac{x^7}{6\cdot6\cdot7} + \frac{ax^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8} + \frac{bx^9}{4\cdot5\cdot8\cdot9} \cdots$

33. 0,00267

35. 0,1

37. 0,0999444611

39. 0,100001

41. $1/(13\cdot6!) \approx 0{,}00011$

43. $\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot5!}$

45. **(a)** $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$

(b) $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3\cdot4} + \frac{x^6}{5\cdot6} - \frac{x^8}{7\cdot8} + \ldots + (-1)^{15}\frac{x^{32}}{31\cdot32}$

47. $1/2$

49. $-1/24$

51. $1/3$

53. -1

55. 2

59. 500 tag

61. 4 tag

63. **(a)** $x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112}$, konvergenciasugár $= 1$

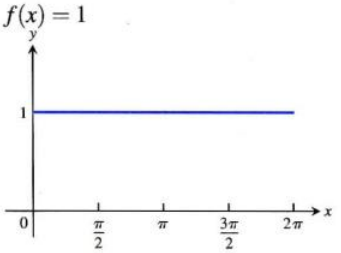
(b) $\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112}$

65. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots$

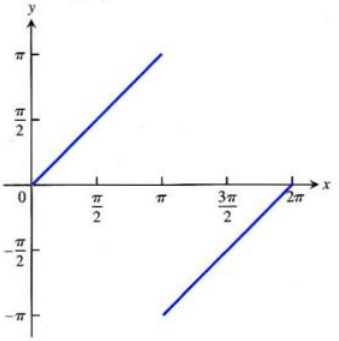
71. **(c)** $3/4$

11.11. Fourier-sorok

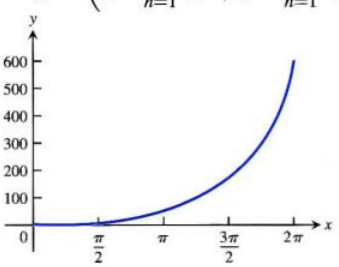
1. $f(x) = 1$



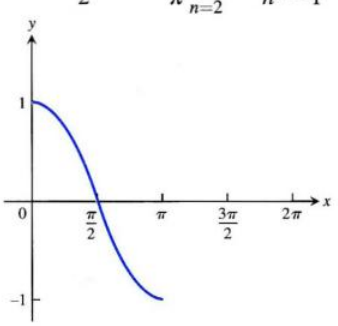
3. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$



5. $\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2+1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin(nx)}{n^2+1}\right)$



7. $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(1+(-1)^n)}{n^2-1}\sin nx$



Gyakorló feladatok

1. Konvergens, a határérték 1

3. Konvergens, a határérték -1

5. Divergens

7. Konvergens, a határérték 0

9. Konvergens, a határérték 1

11. Konvergens, a határérték e^{-5}

13. Konvergens, a határérték 3

15. Konvergens, a határérték $\ln 2$

17. Divergens

19. $1/6$

21. $3/2$

23. $e/(e-1)$

25. Divergens

27. Feltételesen konvergens

29. Feltételesen konvergens

31. Abszolút konvergens

33. Abszolút konvergens

35. Abszolút konvergens

37. Abszolút konvergens

39. Abszolút konvergens

41. **(a)** 3, $-7 \le x < -1$, **(b)** $-7 < x < -1$, **(c)** $x = -7$

43. **(a)** $1/3$, $0 \le x \le 2/3$, **(b)** $0 \le x \le 2/3$, **(c)** nincs ilyen

45. **(a)** ∞, minden x, **(b)** minden x, **(c)** nincs ilyen

47. (a) $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, (b) $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, (c) nincs ilyen

49. (a) e, $-e < x < e$, (b) $-e < x < e$, (c) üres halmaz

51. $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{5}$ **53.** $\sin x$, π, 0 **55.** e^x, $\ln 2$, 2

57. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ **59.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

61. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{5n}}{(2n)!}$ **63.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{((\pi x)/2)^n}{n!}$

65. $2 - \frac{(x+1)}{2 \cdot 1!} + \frac{3(x+1)^2}{2^3 \cdot 2!} + \frac{9(x+1)^3}{2^5 \cdot 3!} + \dots$

67. $\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2}(x-3) + \frac{1}{4^3}(x-3)^2 - \frac{1}{4^4}(x-3)^3$

69. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} x^n = -e^{-x}$

71. $y = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} x^n = 3e^{-2x}$

73. $y = -1 - x + 2\sum_{n=2}^{\infty} (x^n/n!) = 2e^x - 3x - 3$

75. $y = 1 + x + 2\sum_{n=0}^{\infty} (x^n/n!) = 2e^x - 1 - x$

77. 0,4849171431 **79.** $\approx 0{,}4872223583$

81. 7/2 **83.** 1/12

85. -2 **87.** $r = -3$, $s = 9/2$

89. (b) $|\text{hiba}| < |\sin(1/42)| < 0{,}02381$, a becslés alsó, mivel a maradék pozitív

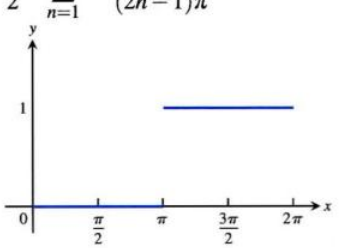
91. 2/3

93. $\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$, a sor összege $\ln\frac{1}{2}$

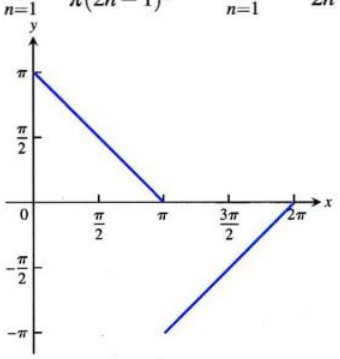
95. (a) ∞, (b) $a = 1$, $b = 0$

97. Konvergál

105. $\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin((2n-1)x)}{(2n-1)\pi}$



107. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos((2n-1)x)}{\pi(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin((2n-1)x)}{2n-1}$



Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. Konvergens: összehasonlító kritérium

3. Divergens: a tagokból álló sorozatra vonatkozó kritérium

5. Konvergens: összehasonlító kritérium

7. Divergens: a tagokból álló sorozatra vonatkozó kritérium

9. $a = \pi/3$-mal

$$\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \dots$$

11. $a = 0$-val $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

13. $a = 22\pi$-vel

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}(x - 22\pi)^2 + \frac{1}{4!}(x - 22\pi)^4 - \frac{1}{6!}(x - 22\pi)^6 + \dots$$

15. Konvergens, a határérték b

17. $\pi/2$ **23.** $b = \pm 1/5$

25. $a = 2$, $l = -7/6$ **29.** (b) Igen

35. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, (b) 6, (c) $1/q$

37. (a) $R_n = C_0 e^{-kt_0}(1 - e^{-nkt_0})/(1 - e^{-kt_0})$,
$R = C_0(e^{-kt_0})/(1 - e^{-kt_0}) = C_0/(e^{kt_0} - 1)$

(b) $R_1 = 1/e \approx 0{,}368$,
$R_{10} = R(1 - e^{-10}) \approx R \cdot 0{,}9999546 \approx 0{,}58195$,
$R \approx 0{,}58198$, $0 < (R - R_{10})/R < 0{,}0001$

(c) 7

12. fejezet

12.1. Háromdimenziós koordináta-rendszerek

1. A $(2,3,0)$ ponton átmenő egyenes párhuzamos a z-tengellyel.

3. Az x-tengely

5. Az xy-sík $x^2 + y^2 = 4$ köre.

7. Az $x^2 + z^2 = 4$ kör az xz-síkon.

9. Az $y^2 + z^2 = 1$ kör az yz-síkon.

11. Az $x^2 + y^2 = 16$ kör az xy-síkon.

13. (a) Az xy-sík első síknegyede.
(b) Az xy-sík negyedik síknegyede.

15. (a) Az origó középpontú, 1 sugarú gömbtest.

(b) Az összes olyan pont, amely 1-nél nagyobb távolságra van az origótól.

17. (a) Az 1 sugarú, origó középpontú felső félgömb.
(b) Az 1 sugarú, origó középpontú felső félgömbtest.

19. (a) $x = 3$ (b) $y = -1$ (c) $z = -2$

21. (a) $z = 1$ (b) $x = 3$ (c) $y = -1$

23. (a) $x^2 + (y-2)^2 = 4$, $z = 0$

(b) $(y-2)^2 + z^2 = 4$, $x = 0$

(c) $x^2+z^2=4, y=2$

25. **(a)** $y=3, z=-1$ **(b)** $x=1, z=-1$ **(c)** $x=1, y=3$

27. $x^2+y^2+z^2=25, z=3$

29. $0\le z\le 1$ **31.** $z\le 0$

33. **(a)** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2<1$
(b) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2>1$

35. 3 **37.** 7 **39.** $2\sqrt{3}$

41. $C(-2,0,2), a=2\sqrt{2}$

43. $C(\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2}), a=\sqrt{2}$

45. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$

47. $(x+2)^2+y^2+z^2=3$

49. $C(-2,0,2), a=\sqrt{8}$

51. $C\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right), a=\frac{5\sqrt{3}}{4}$

53. **(a)** $\sqrt{y^2+z^2}$ **(b)** $\sqrt{x^2+z^2}$ **(c)** $\sqrt{x^2+y^2}$

55. $\sqrt{17}+\sqrt{33}+6$

12.2. Vektorok

1. **(a)** $\langle 9,-6\rangle$ **(b)** $3\sqrt{13}$

3. **(a)** $\langle 1,3\rangle$ **(b)** $\sqrt{10}$

5. **(a)** $\langle 12,-19\rangle$ **(b)** $\sqrt{505}$

7. **(a)** $\left\langle \frac{1}{5},\frac{14}{5}\right\rangle$ **(b)** $\frac{\sqrt{197}}{5}$

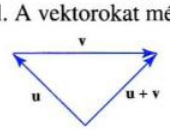
9. $\langle 1,-4\rangle$ **11.** $\langle -2,-3\rangle$

13. $\left\langle -\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$ **15.** $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$

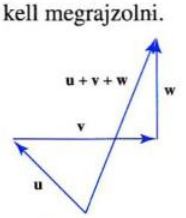
17. $\langle -3,2,-1\rangle$ **19.** $\langle -3,16,0\rangle$ **21.** $\langle 3,5,-8\rangle$

23. **v** vízszintes, **w** függőleges vektor, **u** 45° szöget zár be a vízszintessel. A vektorokat méretarányosan kell megrajzolni.

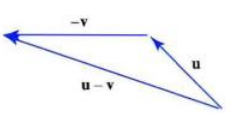
(a)



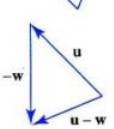
(b)



(c)



(d)



25. $3\left(\frac{2}{3}\mathbf{i}+\frac{1}{3}\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$

27. $5(\mathbf{k})$

29. $\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right)$

31. **(a)** $2\mathbf{i}$ **(b)** $-\sqrt{3}\mathbf{k}$ **(c)** $\frac{3}{10}\mathbf{j}+\frac{2}{5}\mathbf{k}$ **(d)** $6\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

33. $\frac{7}{13}(12\mathbf{i}-5\mathbf{k})$

35. **(a)** $\frac{3}{5\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{4}{5\sqrt{2}}\mathbf{j}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$ **(b)** $(1/2,3,5/2)$

37. **(a)** $-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$ **(b)** $\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$

39. $A(4,-3,5)$ **41.** $a=\frac{3}{2}, b=\frac{1}{2}$ **43.** $5\sqrt{3}\mathbf{i}, 5\mathbf{k}$

45. $\approx\langle -338{,}095, 725{,}046\rangle$

47. **(a)** $(5\cos 60°, 5\sin 60°)=\left(\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

(b) $(5\cos 60°+10\cos 315°, 5\sin 60°+10\sin 315°)=$
$=\left(\frac{5+10\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{3}-10\sqrt{2}}{2}\right)$

49. **(a)** $\frac{3}{2}\mathbf{i}+\frac{3}{2}\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ **(b)** $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ **(c)** $(2,2,1)$

12.3. Skalárszorzat

1. **(a)** $-25, 5, 5$ **(b)** -1 **(c)** -5 **(d)** $-2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\sqrt{5}\mathbf{k}$

3. **(a)** $25, 15, 5$ **(b)** $\frac{1}{3}$ **(c)** $\frac{5}{3}$ **(d)** $\frac{1}{9}(10\mathbf{i}+11\mathbf{j}-2\mathbf{k})$

5. **(a)** $2, \sqrt{34}\sqrt{3}$ **(b)** $\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{34}}$ **(c)** $\frac{2}{\sqrt{34}}$ **(d)** $\frac{1}{17}(5\mathbf{j}-3\mathbf{k})$

7. **(a)** $1-\sqrt{17}, \sqrt{26}, \sqrt{21}$ **(b)** $\frac{10+\sqrt{17}}{\sqrt{546}}$

(c) $\frac{10+\sqrt{17}}{\sqrt{26}}$ **(d)** $\frac{10+\sqrt{17}}{\sqrt{26}}(5\mathbf{i}+\mathbf{j})$

9. 0,75 radián **11.** 1,77 radián

13. Az A csúcsnál lévő szög $=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\approx 63{,}435$ fok, a B csúcsnál lévő szög $=\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\approx 53{,}130$ fok, a C csúcsnál lévő szög $=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\approx 63{,}435$ fok.

17. $\left(\frac{3}{2}\mathbf{i}+\frac{3}{2}\mathbf{j}\right)+\left(-\frac{3}{2}\mathbf{i}+\frac{3}{2}\mathbf{j}+4\mathbf{k}\right)$

19. $\left(\frac{14}{3}\mathbf{i}+\frac{28}{3}\mathbf{j}-\frac{14}{3}\mathbf{k}\right)+\left(\frac{10}{3}\mathbf{i}-\frac{16}{3}\mathbf{j}-\frac{22}{3}\mathbf{k}\right)$

21. Két egyenlő hosszúságú vektor összege *mindig* merőleges a különbségükre, amint az a $(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)\cdot(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)=\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_1-$ $-\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2=|\mathbf{v}_1|^2-|\mathbf{v}_2|^2=0$ azonosságból látható.

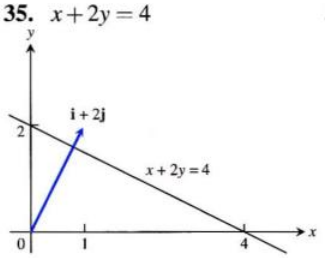
27. A vízszintes összetevő ≈ 396 m/s, a függőleges összetevő ≈ 55 m/s.

29. **(a)** Mivel $|\cos\theta|\le 1$, ezért
$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|=|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,|\cos\theta|\le|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|(1)=|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$.

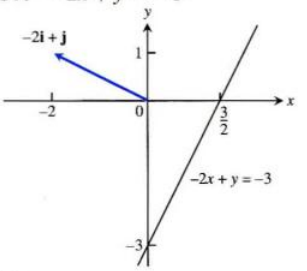
(b) Egyenlőséget akkor kapunk, ha $|\cos\theta|=1$ vagy ha **u** és **v** legalább egyike nulla. Ha a vektorok nem nullák, akkor egyenlőséget $\theta=0$ vagy π esetén kapunk, azaz amikor a vektorok párhuzamosak.

31. a

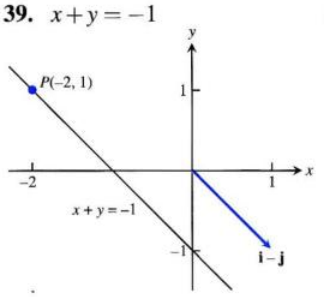
35. $x+2y=4$



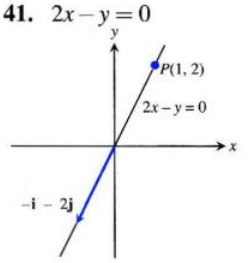
37. $-2x+y=-3$



39. $x+y=-1$



41. $2x-y=0$



43. 5 J **45.** 3464 J **47.** $\frac{\pi}{4}$

49. $\frac{\pi}{6}$ **51.** 0,14

53. $\frac{\pi}{3}$ és $\frac{2\pi}{3}$ minden pontra.

55. $(0,0)$-ban $\frac{\pi}{2}$; $(1,1)$-ben $\frac{\pi}{4}$ és $\frac{3\pi}{4}$

12.4. Vektoriális szorzat

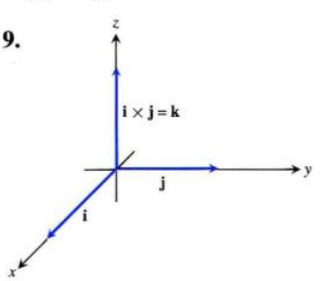
1. $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|=3$, az irány $\frac{2}{3}\mathbf{i}+\frac{1}{3}\mathbf{j}+\frac{2}{3}\mathbf{k}$; $|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|=3$, az irány $-\frac{2}{3}\mathbf{i}-\frac{1}{3}\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}$.

3. $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|=0$, az irány nincs meghatározva; $|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|=0$, az irány nincs meghatározva.

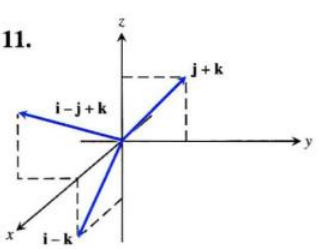
5. $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|=6$, az irány $-\mathbf{k}$; $|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|=6$, az irány $\mathbf{k}$.

7. $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|=6\sqrt{5}$, az irány $\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i}-\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$; $|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|=6\sqrt{5}$, az irány $-\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i}+\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$.

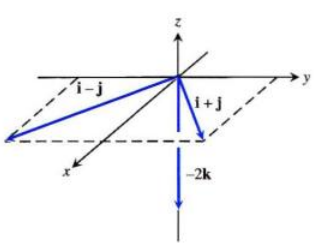
9.



11.



13.



15. (a) $2\sqrt{6}$ (b) $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

17. (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{j})$

19. 8 **21.** 7

23. (a) Egyik sem (b) $\mathbf{u}$ és $\mathbf{w}$

25. $10\sqrt{3}$ Nm.

27. (a) Igaz (b) Nem mindig igaz
(c) Igaz (d) Igaz
(e) Nem mindig igaz (f) Igaz
(g) Igaz (h) Igaz

29. (a) $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}$ (b) $\pm\mathbf{u}\times\mathbf{v}$
(c) $\pm(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ (d) $|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}|$

31. (a) igen (b) nem (c) igen (d) nem

33. Nem, $\mathbf{v}$-nek nem feltétlenül kell egyenlőnek lennie $\mathbf{w}$-vel. Például, $\mathbf{i}+\mathbf{j}\neq-\mathbf{i}+\mathbf{j}$, de $\mathbf{i}\times(\mathbf{i}+\mathbf{j})=\mathbf{i}\times\mathbf{i}+\mathbf{i}\times\mathbf{j}=0+\mathbf{k}=\mathbf{k}$ és $\mathbf{i}\times(-\mathbf{i}+\mathbf{j})=-\mathbf{i}\times\mathbf{i}+\mathbf{i}\times\mathbf{j}=0+\mathbf{k}=\mathbf{k}$.

35. 2 **37.** 13 **39.** 11/2 **41.** 25/2

43. Ha $\mathbf{A}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}$ és $\mathbf{B}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}$, akkor

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_1&a_2&0\\b_1&b_2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

és a háromszög területe:

$$\frac{1}{2}\left|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right|=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}.$$

A + előjelet kell használni, ha az xy-síkon a $\mathbf{A}$-tól $\mathbf{B}$ felé mutató irányított szög az óramutató járásával ellentétes, és a − előjelet, ha az óramutató járásával azonos irányú.

12.5. Egyenesek és síkok a térben

1. $x=3+t, y=-4+t, z=-1+t$

3. $x=-2+5t, y=5t, z=3-5t$

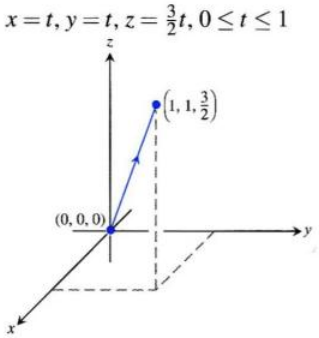
5. $x=0, y=2t, z=t$

7. $x=1, y=1, z=1+t$

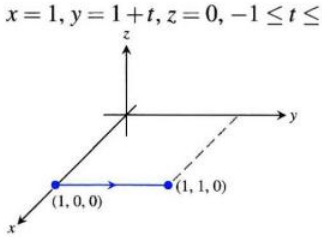
9. $x=t, y=-7+2t, z=2t$

11. $x=t, y=0, z=0$

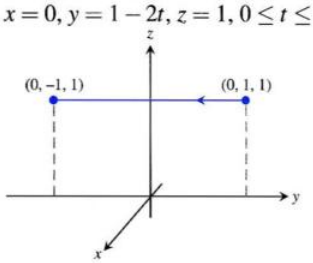
13. $x=t, y=t, z=\frac{3}{2}t, 0\le t\le 1$



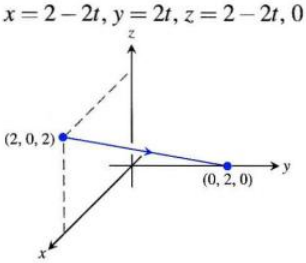
15. $x=1, y=1+t, z=0, -1\le t\le 0$



17. $x = 0, y = 1 - 2t, z = 1, 0 \le t \le 1$



19. $x = 2 - 2t, y = 2t, z = 2 - 2t, 0 \le t \le 1$



21. $3x - 2y - z = -3$ **23.** $7x - 5y - 4z = 6$

25. $x + 3y + 4z = 34$ **27.** $(1,2,3), -20x + 12y + z = 7$

29. $y + z = 3$ **31.** $x - y + z = 0$ **33.** $2\sqrt{30}$

35. 0 **37.** $\frac{9\sqrt{42}}{7}$ **39.** 3

41. 19/5 **43.** 5/3 **45.** $9/\sqrt{41}$

47. $\pi/4$ **49.** 1,76 radián **51.** 0,82 radián

53. $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **55.** $(1,1,0)$

57. $x = 1 - t, y = 1 + t, z = -1$

59. $x = 4, y = 3 + 6t, z = 1 + 3t$

61. $L1$ metszi $L2$-t; $L2$ párhuzamos $L3$-mal; $L1$ és $L3$ kitérők.

63. $x = 2 + 2t, y = -4 - t, z = 7 + 3t$;
$x = -2 - t, y = -2 + (1/2)t, z = 1 - (3/2)t$

65. $\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right), (-1,0,-3), (1,-1,0)$

69. Több válasz lehetséges. Az egyik: $x + y = 3$ és $2y + z = 7$.

71. $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ az összes síkot leírja az origón átmenő síkok és a koordinátatengelyekkel párhuzamos síkok kivételével.

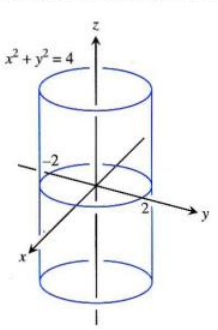
12.6. Hengerek és másodrendű felületek

1. **(d)** ellipszoid **3.** **(a)** henger

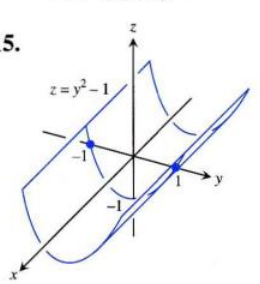
5. **(l)** hiperbolikus paraboloid **7.** **(b)** henger

9. **(k)** hiperbolikus paraboloid **11.** **(h)** kúp

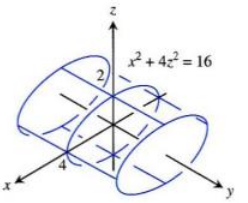
13.



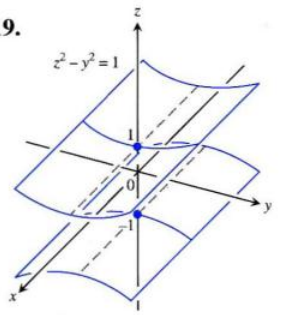
15.



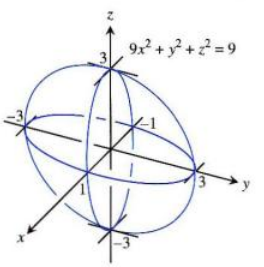
17.



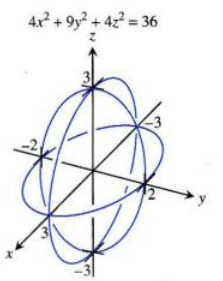
19.



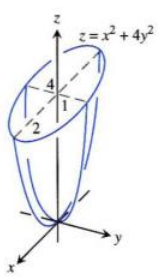
21.



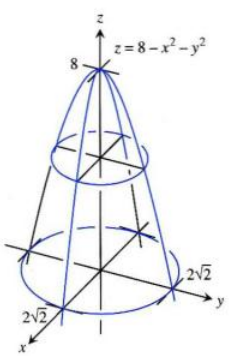
23.



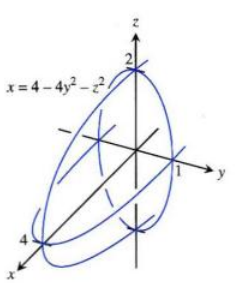
25.



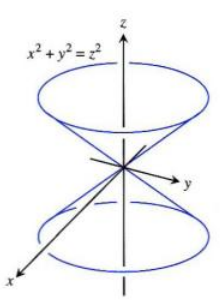
27.



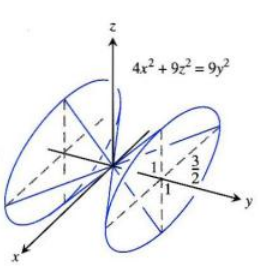
29.



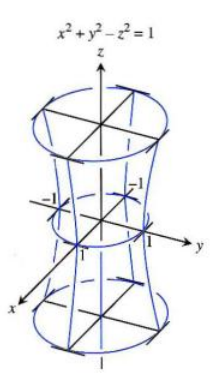
31.

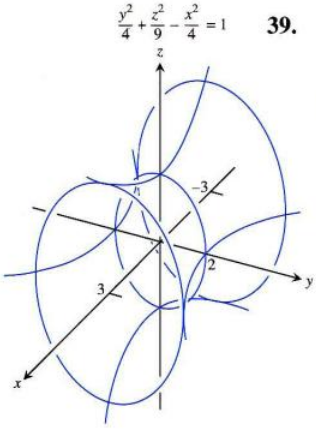


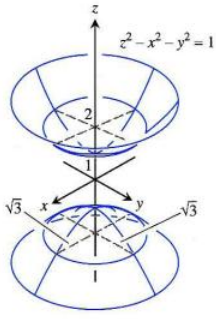
33.

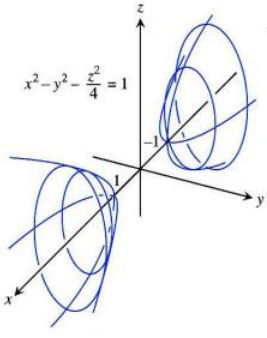


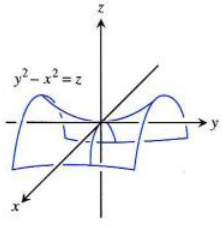
35.

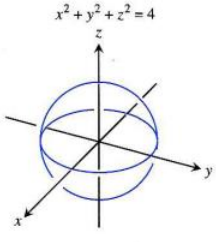


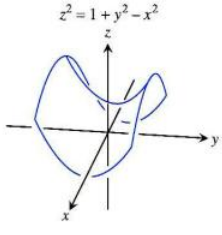
37. 

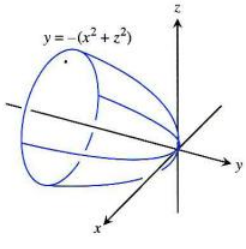
39. 

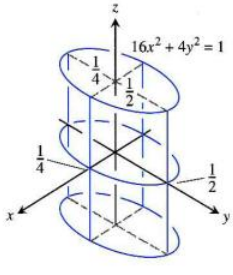
41. 

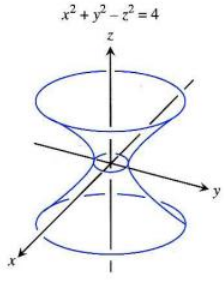
43. 

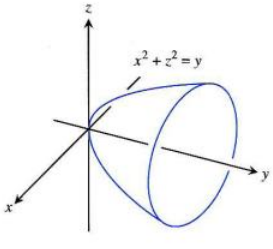
45. 

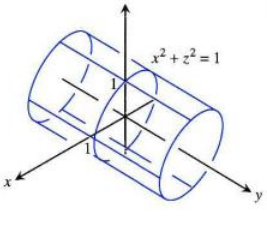
47. 

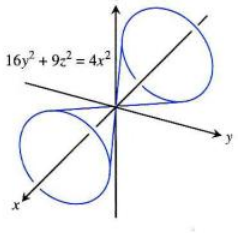
49. 

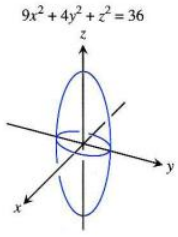
51. 

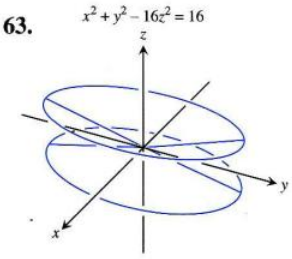
53. 

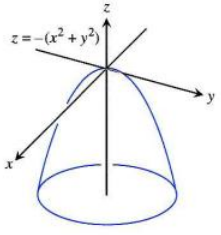
55. 

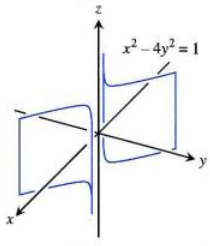
57. 

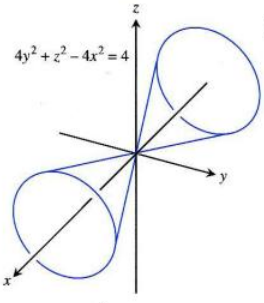
59. 

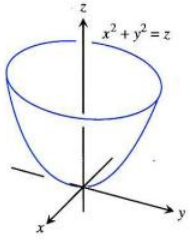
61. 

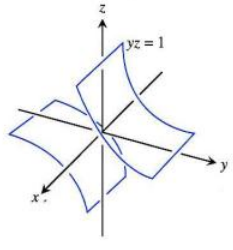
63. 

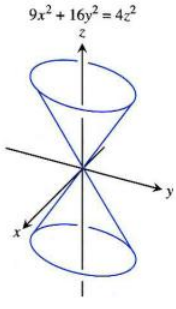
65. 

67. 

69. 

71. 

73. 

75. 

77. **(a)** $\frac{2\pi(9-c^2)}{9}$ **(b)** 8π **(c)** $\frac{4\pi abc}{3}$

81. Csúcspont: $(0,y_1,cy_1^2/b^2)$,
fókusz: $(0,y_1,c(y_1^2/b^2)-a^2/(4c))$

Gyakorló feladatok

1. **(a)** $\langle -17,32\rangle$ **(b)** $\sqrt{1313}$

3. **(a)** $\langle 6,-8\rangle$ **(b)** 10

5. $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$ (az óramutató járásával ellentétes forgásirányt feltételezve)

7. $\left\langle \frac{8}{\sqrt{17}},-\frac{2}{\sqrt{17}}\right\rangle$

9. A hosszúság = 2, az irány $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$.

11. $\mathbf{v}(\pi/2)=2(-\mathbf{i})$

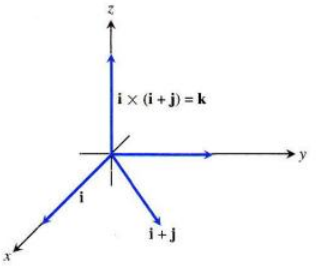
13. A hosszúság = 7, az irány $\frac{2}{7}\mathbf{i}-\frac{3}{7}\mathbf{j}+\frac{6}{7}\mathbf{k}$.

15. $\frac{8}{\sqrt{33}}\mathbf{i}-\frac{2}{\sqrt{33}}\mathbf{j}+\frac{8}{\sqrt{33}}\mathbf{k}$.

17. $|\mathbf{v}|=\sqrt{2}$, $|\mathbf{u}|=3$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=3$, $\mathbf{v}\times\mathbf{u}=-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|=3$, $\theta=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}$, $|\mathbf{u}|\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=\frac{3}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$

19. $\frac{4}{3}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})-\frac{1}{3}(5\mathbf{i}+\mathbf{j}+11\mathbf{k})$

21. $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{k}$



23. $2\sqrt{7}$ **25.** (a) $\sqrt{14}$ (b) 1

29. $\sqrt{78}/3$ **31.** $x=1-3t, y=2, z=3+7t$

33. $\sqrt{2}$ **35.** $2x+y+z=5$ **37.** $-9x+y+7z=4$

39. $\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right), (-1,0,-3), (1,-1,0)$ **41.** $\pi/3$

43. $x=-5+5t, y=3-t, z=-3t$

45. (b) $x=-12t, y=19/12+15t, z=1/6+6t$

47. Igen, $\mathbf{v}$ párhuzamos a síkkal.

49. 3 **51.** $-3\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

53. $\frac{2}{\sqrt{35}}(5\mathbf{i}-\mathbf{j}-3\mathbf{k})$ **55.** $\left(\frac{11}{9},\frac{26}{9},\frac{7}{9}\right)$

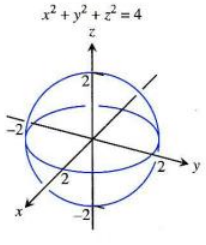
57. $(1,-2,-1)$; $x=1-5t, y=-2+3t, z=-1+4t$

59. $2x+7y+2z+10=0$

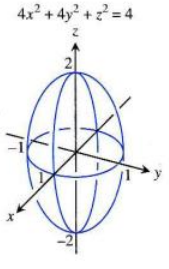
61. (a) nem (b) nem (c) nem (d) nem (e) igen

63. $11/\sqrt{107}$

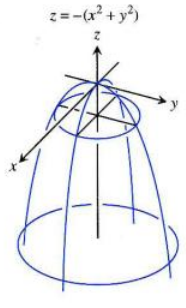
65.



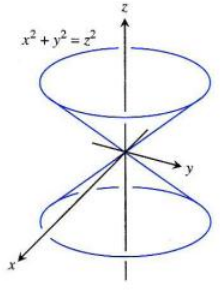
67.



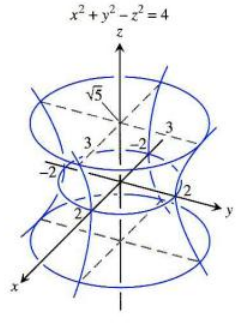
69.



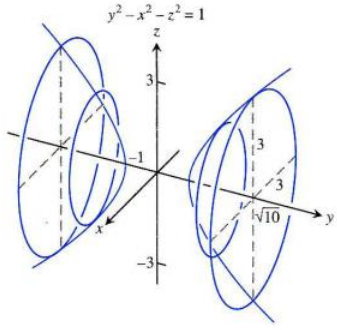
71.



73.



75.



Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. $(26,23,-1/3)$ **3.** $|\mathbf{F}|=81.6N$

7. (a) $\vec{BD}=\vec{AD}-\vec{AB}$ (b) $\vec{AP}=\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AD}$

13. $\frac{32}{41}\mathbf{i}+\frac{23}{41}\mathbf{j}-\frac{13}{41}\mathbf{k}$

15. (a) $0,0$ (b) $-10\mathbf{i}-2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ $-9\mathbf{i}-2\mathbf{j}+7\mathbf{k}$
(c) $-4\mathbf{i}-6\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{i}-2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ (d) $-10\mathbf{i}-10\mathbf{k}$, $-12\mathbf{i}-4\mathbf{j}-8\mathbf{k}$

25. (a) $|\mathbf{F}|=\frac{GMm}{d^2}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{(i^2+1)^{3/2}}\right)$ (b) igen

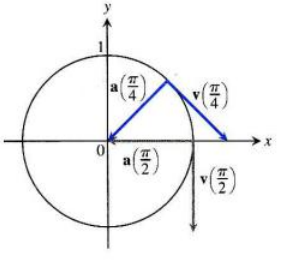
13. fejezet

13.1. Vektorfüggvények

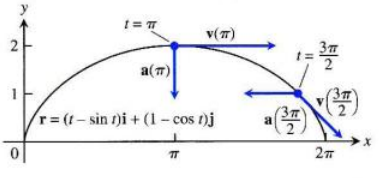
1. $y=x^2-2x$, $\mathbf{v}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}$, $\mathbf{a}=2\mathbf{j}$

3. $y=\frac{2}{9}x^2$, $\mathbf{v}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$, $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+8\mathbf{j}$

5. $t=\frac{\pi}{4}$: $\mathbf{v}=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$, $\mathbf{a}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$;
$t=\frac{\pi}{2}$: $\mathbf{v}=-\mathbf{j}$, $\mathbf{a}=-\mathbf{i}$



7. $t=\pi$: $\mathbf{v}=2\mathbf{i}$, $\mathbf{a}=-\mathbf{j}$; $t=\frac{3\pi}{2}$: $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $\mathbf{a}=-\mathbf{i}$



9. $\mathbf{v}=\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{a}=2\mathbf{j}$, sebesség: 3, irány: $\frac{1}{3}\mathbf{i}+\frac{2}{3}\mathbf{j}+\frac{2}{3}\mathbf{k}$,
$\mathbf{v}(1)=3\left(\frac{1}{3}\mathbf{i}+\frac{2}{3}\mathbf{j}+\frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$

11. $\mathbf{v} = (-2\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = (-2\cos t)\mathbf{i} - (3\sin t)\mathbf{j}$, sebesség: $2\sqrt{5}$, irány: $\left(-1/\sqrt{5}\right)\mathbf{i} + \left(2/\sqrt{5}\right)\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(\pi/2) = 2\sqrt{5}\left[\left(-1/\sqrt{5}\right)\mathbf{i} + \left(2/\sqrt{5}\right)\mathbf{k}\right]$

13. $\mathbf{v} = \left(\frac{2}{t+1}\right)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = \left(\frac{-2}{(t+1)^2}\right)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, sebesség: $\sqrt{6}$, irány: $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(1) = \sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}\right)$

15. $\pi/2$ **17.** $\pi/2$

19. $t = 0,\ \pi,\ 2\pi$ **21.** $(1/4)\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + (3/2)\mathbf{k}$

23. $\left(\frac{\pi + 2\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ **25.** $(\ln 4)\mathbf{i} + (\ln 4)\mathbf{j} + (\ln 2)\mathbf{k}$

27. $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{-t^2}{2} + 1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{-t^2}{2} + 2\right)\mathbf{j} + \left(\frac{-t^2}{2} + 3\right)\mathbf{k}$

29. $\mathbf{r}(t) = \left((t+1)^{3/2} - 1\right)\mathbf{i} + \left(-e^{-t} + 1\right)\mathbf{j} + (\ln(t+1) + 1)\mathbf{k}$

31. $\mathbf{r}(t) = 8t\mathbf{i} + 8t\mathbf{j} + (-16t^2 + 100)\mathbf{k}$

33. $x = t,\ y = -1,\ z = 1 + t$

35. $x = at,\ y = a,\ z = 2\pi b + bt$

37. **(a)** (i): konstans 1 (ii): igen (iii): ↶ (iv): igen

(b) (i): konstans 2 (ii): igen (iii): ↶ (iv): igen

(c) (i): konstans 1 (ii): igen (iii): ↶ (iv): nem, a $(0,-1)$-ből

(d) (i): konstans 1 (ii): igen (iii): ↷ (iv): igen

(e) (i): változó (ii): nem (iii): ↶ (iv): igen

39. $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 + \frac{6}{\sqrt{11}}t + 1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{11}}t - 2\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{11}}t + 3\right)\mathbf{k} = \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2t}{\sqrt{11}}\right)(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$

41. $\mathbf{v} = 2\sqrt{5}\mathbf{i} + \sqrt{5}\mathbf{j}$

43. $\max|\mathbf{v}| = 3$, $\min|\mathbf{v}| = 2$, $\max|\mathbf{a}| = 3$, $\min|\mathbf{a}| = 2$

13.2. Egy lövedék röppályájának leírása

1. 50 s

3. **(a)** 72,2 s, 25,51 m **(b)** 4020 m **(c)** 6378 m

5. $t \approx 2{,}139$ s, $x \approx 19{,}96$ m

7. **(a)** $v_0 \approx 9{,}9$ m/s **(b)** $\alpha \approx 18{,}4°$ vagy $\alpha \approx 71{,}6°$

9. 84,9 m/s

11. A golflabda nekimegy a fának.

13. **(a)** 45,4 m/s **(b)** 2,25 s

15. 39,9° vagy 50,7° **17.** 14,2 m/s

21. 1,92 s, 22,5 m **23.** 1,22 m, 2,38 m/s

25. $\mathbf{v_0}$-nak feleznie kell az *AOR* szöget.

27. **(a)** Feltéve, hogy az $x = 0$ helyen történik az ütés: $\mathbf{r}(t) = (x(t))\mathbf{i} + (y(t))\mathbf{j}$, ahol $x(t) = ((10{,}67)\cos 27°)t$ és $y(t) = 1{,}22 + ((10{,}67)\sin 27°)t - (4{,}9)t^2$.

(b) $t \approx 0{,}497$ másodpercnél, a maximális magasság $\approx 2{,}42$ m.

(c) A labda $t \approx 1{,}201$ másodperc múlva $\approx 11{,}41$ m távolságra ér földet.

(d) $t \approx 0{,}254$ és $t \approx 0{,}74$ másodpercnél, amikor ≈ 9 és $\approx 4{,}38$ méter távolságra van az ütés helyétől.

(e) Igen, a megemelt háló felett nem megy át a labda.

31. **(a)** $\mathbf{r}(t) = (x(t))\mathbf{i} + (y(t))\mathbf{j}$, ahol $x(t) = \left(\frac{1}{0{,}08}\right)\left(1 - e^{-0{,}08t}\right)(47\cos 20° - 5{,}36)$ és $y(t) = 1 + \left(\frac{47}{0{,}08}\right)\left(1 - e^{-0{,}08t}\right)(\sin 20°) + \left(\frac{9{,}8}{0{,}08^2}\right)\left(1 - 0{,}08t - e^{-0{,}08t}\right)$.

(b) $t \approx 1{,}54$ másodpercnél, a maximális magasság $\approx 13{,}13$ m.

(c) A labda $t \approx 3{,}2$ másodperc múlva $\approx 109{,}8$ m távolságra ér földet.

(d) $t \approx 0{,}88$ és $t \approx 2{,}21$ másodpercnél, amikor $\approx 33{,}1$ és $\approx 78{,}6$ méter távolságra van az ütés helyétől.

(e) Nem. Legalább 3,9 m/s erősségű, az ütéssel egyező irányú széllökés szükséges ahhoz, hogy a labda átmenjen a kerítés felett.

13.3. Ívhossz és a normált érintővektor

1. $\mathbf{T} = \left(-\frac{2}{3}\sin t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2}{3}\cos t\right)\mathbf{j} + \frac{\sqrt{5}}{3}\mathbf{k}$, 3π

3. $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t}}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}\mathbf{k}$, $\frac{52}{3}$

5. $\mathbf{T} = -(\cos t)\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}$, $\frac{3}{2}$

7. $\mathbf{T} = \left(\frac{\cos t - t\sin t}{t+1}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sin t + t\cos t}{t+1}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\sqrt{2}t^{1/2}}{t+1}\right)\mathbf{k}$, $\frac{\pi^2}{2} + \pi$

9. $(0{,}5, 24\pi)$

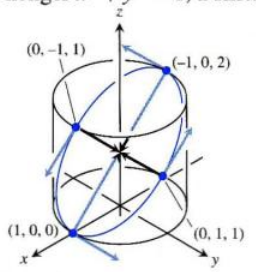
11. $s(t) = 5t$, $L = \frac{5\pi}{2}$

13. $s(t) = \sqrt{3}e^t - \sqrt{3}$, $L = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

15. $\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$

17. **(a)** A henger $x^2+y^2=1$, a sík $x+z=1$.

(b) és **(c)**



(d) $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin^2 t}\,dt$ **(e)** $L\approx 7{,}64$

13.4. Görbület és a normált főnormális

1. $\mathbf{T}=(\cos t)\mathbf{i}-(\sin t)\mathbf{j}$, $\mathbf{N}=(-\sin t)\mathbf{i}-(\cos t)\mathbf{j}$, $\kappa=\cos t$

3. $\mathbf{T}=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i}-\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}$, $\mathbf{N}=\dfrac{-t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i}-\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}$,
$\kappa=\dfrac{1}{2\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3}$

5. **(b)** $\cos x$

7. **(b)** $\mathbf{N}=\dfrac{-2e^{2t}}{\sqrt{1+4e^{4t}}}\mathbf{i}+\dfrac{1}{\sqrt{1+4e^{4t}}}\mathbf{j}$
(c) $\mathbf{N}=-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{4-t^2}\mathbf{i}+t\mathbf{j}\right)$

9. $\mathbf{T}=\dfrac{3\cos t}{5}\mathbf{i}-\dfrac{3\sin t}{5}\mathbf{j}+\dfrac{4}{5}\mathbf{k}$, $\mathbf{N}=(-\sin t)\mathbf{i}-(\cos t)\mathbf{j}$,
$\kappa=\dfrac{3}{25}$

11. $\mathbf{T}=\left(\dfrac{\cos t-\sin t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i}+\left(\dfrac{\cos t+\sin t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}$,
$\mathbf{N}=\left(\dfrac{-\cos t-\sin t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i}+\left(\dfrac{-\sin t+\cos t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}$,
$\kappa=\dfrac{1}{e^t\sqrt{2}}$

13. $\mathbf{T}=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}\mathbf{i}+\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathbf{j}$, $\mathbf{N}=\dfrac{\mathbf{i}}{\sqrt{t^2+1}}-\dfrac{t\mathbf{j}}{\sqrt{t^2+1}}$,
$\kappa=\dfrac{1}{t(t^2+1)^{3/2}}$

15. $\mathbf{T}=\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}(t/a)}\right)\mathbf{i}+\left(\operatorname{th}\dfrac{t}{a}\right)\mathbf{j}$,
$\mathbf{N}=\left(-\operatorname{th}\dfrac{t}{a}\right)\mathbf{i}+\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}(t/a)}\right)\mathbf{j}$,
$\kappa=\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(t/a)}$

19. $1/(2b)$

21. $\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2+y^2=1$

23. $\kappa(x)=\dfrac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$

25. $\kappa(x)=\dfrac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$

13.5. Torzió és a normált binormális

1. $\mathbf{B}=\left(\dfrac{4}{5}\cos t\right)\mathbf{i}-\left(\dfrac{4}{5}\sin t\right)\mathbf{j}-\dfrac{3}{5}\mathbf{k}$, $\tau=-\dfrac{4}{25}$

3. $\mathbf{B}=\mathbf{k}$, $\tau=0$ **5.** $\mathbf{B}=-k$, $\tau=0$

7. $\mathbf{B}=\mathbf{k}$, $\tau=0$ **9.** $\mathbf{a}=|a|\mathbf{N}$

11. $\mathbf{a}(1)=\dfrac{4}{3}\mathbf{T}+\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\mathbf{N}$ **13.** $\mathbf{a}(0)=2\mathbf{N}$

15. $\mathbf{r}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{T}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$,
$\mathbf{N}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$, $\mathbf{B}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\mathbf{k}$,
simulósík: $z=-1$, normálsík: $-x+y=0$,
rektifikáló sík: $x+y=\sqrt{2}$

17. Igen. Ha az autó kanyarban halad ($\kappa\neq 0$), akkor $a_N=\kappa|\mathbf{v}|^2\neq 0$ és $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$.

21. $|\mathbf{F}|=\kappa\left(m\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2\right)$

23. $\kappa=1/t$, $\rho=t$

29. $\mathbf{v}=(-1{,}8701,\ 0{,}7089,\ 1{,}000)$, $|\mathbf{v}|=2{,}2361$,
$\mathbf{a}=(-1{,}6960,\ -2{,}0307,\ 0)$, $\mathbf{T}=(-0{,}8364,\ 0{,}3170,\ 0{,}4472)$,
$\mathbf{N}=(-0{,}4143,\ -0{,}8998,\ -0{,}1369)$,
$\mathbf{B}=(0{,}3590,\ -0{,}2998,\ 0{,}8839)$,
$\kappa=0{,}5060$, $\tau=0{,}2813$, $a_T=0{,}7746$, $a_N=2{,}5298$

31. $\mathbf{v}=(2{,}0000,\ 0,\ 0{,}1629)$, $|\mathbf{v}|=2{,}0066$,
$\mathbf{a}=(0,\ -1{,}0000,\ 0{,}0086)$, $\mathbf{T}=(0{,}9967,\ 0,\ 0{,}0812)$,
$\mathbf{N}=(-0{,}0007,\ -1{,}0000,\ 0{,}0086)$,
$\mathbf{B}=(0{,}0812,\ -0{,}0086,\ -0{,}9967)$,
$\kappa=0{,}2484$, $\tau=-0{,}0411$, $a_T=0{,}0007$, $a_N=1{,}0000$

13.6. Bolygómozgás és műholdpályák

1. $T=93{,}2$ perc **3.** $a=6764$ km **5.** $D=6501$ km

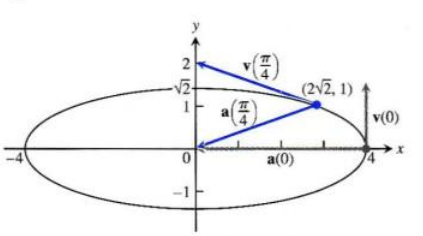
7. **(a)** 42168 km **(b)** 35789 km
(c) *Syncom 3*, *GOES4* és *Intelsat 5*

9. $a=383200$ km a Föld középpontjától, vagy körülbelül 376821 km a Föld felszínétől.

11. $2{,}97\cdot 10^{-19}$ sec^2/m^3, $9{,}902\cdot 10^{-14}$ sec^2/m^3, $8{,}045\cdot 10^{-12}$ sec^2/m^3

Gyakorló feladatok

1. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{2}=1$



A $t=0$-ban: $a_T=0$, $a_N=4$, $\kappa=2$;
A $t=\dfrac{\pi}{4}$-ben: $a_T=\dfrac{7}{3}$, $a_N=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$, $\kappa=\dfrac{4\sqrt{2}}{27}$.

3. $|\mathbf{v}|_{\max}=1$ **5.** $\kappa=1/5$ **7.** $dy/dt=-x$, ↷

11. A súlygolyó a földön van, körülbelül 19,05 méterre a dobás helyétől.

15. **(a)** 18,04 m/s **(b)** 22,73 m/s

19. $\kappa = \pi s$

21. $\frac{\pi}{4}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{16}} + \ln\left(\frac{\pi}{4}+\sqrt{1+\frac{\pi^2}{16}}\right)$

23. $\mathbf{T}(0) = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$, $\mathbf{N}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$,
$\mathbf{B}(0) = -\frac{1}{3\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{4}{3\sqrt{2}}\mathbf{k}$, $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\tau = \frac{1}{6}$

25. $\mathbf{T}(\ln 2) = \frac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{j}$, $\mathbf{N}(\ln 2) = -\frac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{j}$,
$\mathbf{B}(\ln 2) = \mathbf{k}$, $\kappa = \frac{8}{17\sqrt{17}}$, $\tau = 0$

27. $\mathbf{a}(0) = 10\mathbf{T} + 6\mathbf{N}$

29. $\mathbf{T} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\mathbf{k}$,
$\mathbf{N} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)\mathbf{k}$,
$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$, $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tau = 0$

31. $\pi/3$

33. $x = 1+t$, $y = t$, $z = -t$

35. 5971 km, $1{,}639 \cdot 10^7$ km^2, a Föld 3,21%-a látható

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. **(a)** $\mathbf{r}(t) = \left(-\frac{8}{15}t^3 + 4t^2\right)\mathbf{i} + (-20t+100)\mathbf{j}$;
(b) $\frac{100}{3}$ m

3. **(a)** $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=2\pi} = 2\sqrt{\frac{\pi g b}{a^2+b^2}}$

(b) $\theta = \frac{gbt^2}{2(a^2+b^2)}$, $z = \frac{gb^2t^2}{2(a^2+b^2)}$

(c) $\mathbf{v}(t) = \frac{gbt}{\sqrt{a^2+b^2}}$,
$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{bg}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{T} + a\left(\frac{bgt}{a^2+b^2}\right)^2\mathbf{N}$
A **B** irányú komponens együtthatója 0.

7. **(a)** $\frac{dx}{dt} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$, $\frac{dy}{dt} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$

(b) $\frac{dr}{dt} = \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta$, $r\frac{d\theta}{dt} = -\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta$

9. **(a)** $\mathbf{a}(1) = -9\mathbf{u}_r - 6\mathbf{u}_\theta$, $\mathbf{v}(1) = -\mathbf{u}_r + 3\mathbf{u}_\theta$
(b) 6,5 cm

11. **(c)** $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{k}$,
$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}$

14. fejezet

14.1. Többváltozós függvények

1. **(a)** Az xy-sík minden pontja **(b)** Minden valós **(c)** Az $y-x = c$ egyenesek **(d)** Nincsenek határpontok **(e)** Nyílt is és zárt is **(f)** Nem korlátos

3. **(a)** Az xy-sík minden pontja **(b)** $z \geq 0$ **(c)** $f(x,y) = 0$-ra z origó, $f(x,y) \neq 0$-ra ellipszisek, nagytengelyük az x-, kistengelyük az y-tengelyen **(d)** Nincsenek határpontok **(e)** Nyílt is és zárt is **(f)** Nem korlátos

5. **(a)** Az xy-sík minden pontja **(b)** Minden valós **(c)** $f(x,y) = 0$-ra az x- és y-tengely, $f(x,y) \neq 0$-ra hiperbolák, amelyeknek a koordinátatengelyek az aszimptotáik
(d) Nincsenek határpontok **(e)** Nyílt is és zárt is **(f)** Nem korlátos

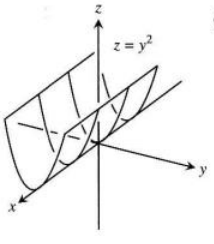
7. **(a)** Minden (x,y), amire fennáll $x^2+y^2 < 16$ **(b)** $z \geq 1/4$ **(c)** Origó középpontú körök négynél kisebb sugárral **(d)** A határ az $x^2+y^2 = 16$ kör **(e)** Nyílt **(f)** Korlátos

9. **(a)** $(x,y) \neq (0,0)$ **(b)** minden valós **(c)** Origó középpontú körök pozitív sugárral **(d)** A határ egyetlen pont, (0,0) **(e)** Nyílt **(f)** Nem korlátos

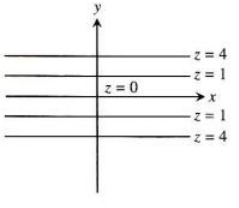
11. **(a)** Minden (x,y), amelyikre $-1 \leq y-x \leq 1$ **(b)** $-\pi/2 \leq z \leq \pi/2$ **(c)** $y-x = c$ alakú egyenesek, ahol $-1 \leq c \leq 1$ **(d)** A határ két egyenes: $y = 1+x$, $y = -1+x$ **(e)** Zárt **(f)** Nem korlátos

13. (f) **15.** (a) **17.** (d)

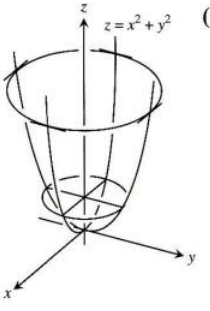
19. **(a)**



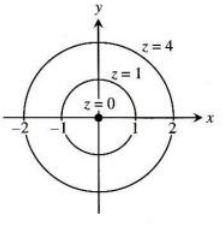
(b)



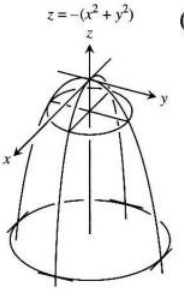
21. **(a)**



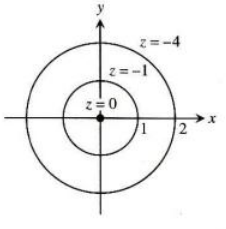
(b)



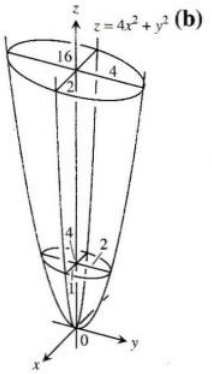
23. **(a)**



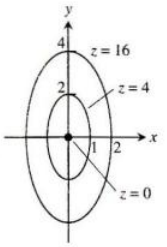
(b)



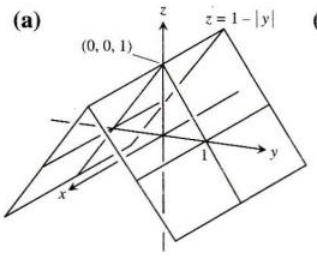
25. **(a)**



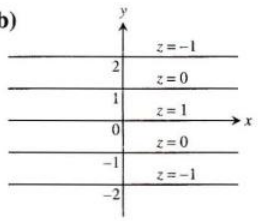
(b)



27. **(a)**



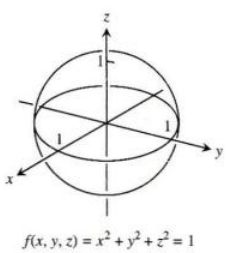
(b)



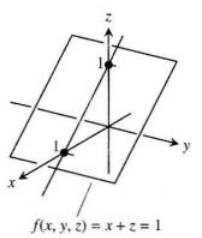
29. $x^2 + y^2 = 10$

31. $\operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} x = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{2}$

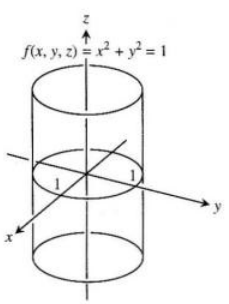
33.



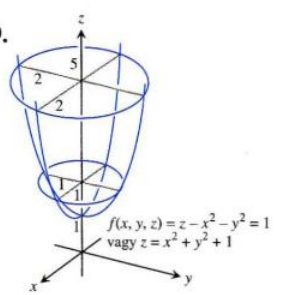
35.



37.



39.



41. $\sqrt{x-y} - \ln z = 2$

43. $\frac{x+y}{z} = \ln 2$

45. Igen, 2000

47. 63 km

14.2. Határérték és folytonosság magasabb dimenzióban

1. 5/2 **3.** $2\sqrt{6}$ **5.** 1 **7.** 1/2 **9.** 1

11. 0 **13.** 0 **15.** -1 **17.** 2 **19.** 1/4

21. 19/12 **23.** 2 **25.** 3

27. **(a)** Minden (x,y) **(b)** Minden (x,y), kivéve (0,0)

29. **(a)** Minden (x,y), kivéve, ahol $xy = 0$ **(b)** Minden (x,y)

31. **(a)** Minden (x,y,z)
(b) Minden (x,y,z), kivéve az $x^2 + y^2 = 1$ henger belsejét

33. **(a)** Minden (x,y,z) ahol $z \neq 0$
(b) Minden (x,y,z), ahol $x^2 + z^2 \neq 1$

35. Közelítsünk $y = x$, $x > 0$, ill. $y = x$, $x < 0$ mentén

37. Közelítsünk $y = kx^2$ mentén, ahol k konstans

39. Közelítsünk $y = mx$ mentén, ahol $m \neq -1$ konstans

41. Közelítsünk $y = kx^2$ mentén, ahol $k \neq 0$ konstans

43. Nem **45.** A limesz 1 **47.** A limesz 0

49. **(a)** $f(x,y)|_{y=mx} = \sin 2\theta$, ahol $\operatorname{tg} \theta = m$

51. 0 **53.** Nem létezik **55.** $\pi/2$

57. $f(0,0) = \ln 3$ **59.** $\delta = 0{,}1$ **61.** $\delta = 0{,}005$

63. $\delta = \sqrt{0{,}015}$ **65.** $\delta = 0{,}005$

14.3. Parciális deriváltak

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -3$

3. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(y+2)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$

5. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y(xy-1)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x(xy-1)$

7. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

9. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{(x+y)^2}$

11. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y^2-1}{(xy-1)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x^2-1}{(xy-1)^2}$

13. $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y+1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y+1}$

15. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+y}$

17. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2\sin(x-3y)\cos(x-3y)$,
$\frac{\partial f}{\partial y} = -6\sin(x-3y)\cos(x-3y)$,

19. $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$

21. $\frac{\partial f}{\partial x} = -g(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = g(y)$

23. $f_x = y^2$, $f_y = 2xy$, $f_z = -4z$

25. $f_x = 1$, $f_y = -y(y^2+z^2)^{-1/2}$, $f_z = -z(y^2+z^2)^{-1/2}$

27. $f_x = \frac{yz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$, $f_y = \frac{xz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$, $f_z = \frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$

29. $f_x = \frac{1}{x+2y+3z}$, $f_y = \frac{2}{x+2y+3z}$, $f_z = \frac{3}{x+2y+3z}$

31. $f_x = -2xe^{-(x^2+y^2+z^2)}$, $f_y = -2ye^{-(x^2+y^2+z^2)}$,
$f_z = -2ze^{-(x^2+y^2+z^2)}$

33. $f_x = 1/\operatorname{ch}^2(x+2y+3z)$, $f_y = 2/\operatorname{ch}^2(x+2y+3z)$,
$f_z = 3/\operatorname{ch}^2(x+2y+3z)$

35. $\frac{\partial f}{\partial t} = -2\pi\sin(2\pi t - \alpha)$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \sin(2\pi t - \alpha)$

37. $\frac{\partial h}{\partial \rho} = \sin\phi\cos\theta$, $\frac{\partial h}{\partial \phi} = \rho\cos\phi\cos\theta$, $\frac{\partial h}{\partial \theta} = -\rho\sin\phi\sin\theta$

39. $W_p(P,V,\delta,v,g) = V$, $W_V(P,V,\delta,v,g) = P + \frac{\delta v^2}{2g}$,
$W_\delta(P,V,\delta,v,g) = \frac{Vv^2}{2g}$, $W_v(P,V,\delta,v,g) = \frac{V\delta v}{g}$,
$W_g(P,V,\delta,v,g) = -\frac{V\delta v^2}{2g^2}$

41. $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$

43. $\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy + y\cos x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = x^2 - \sin y + \sin x$,
$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2y - y\sin x$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x^2 - \cos y$,

$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 2x + \cos x$

45. $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{x+y}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{x+y}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{-1}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{-1}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{(x+y)^2}$

47. $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2}{2x+3y}$, $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{2x+3y}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{-6}{(2x+3y)^2}$

49. $\frac{\partial w}{\partial x} = y^2 + 2xy^3 + 3x^2y^4$, $\frac{\partial w}{\partial y} = 2xy + 3x^2y^2 + 4x^3y^3$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} 2y + 6xy^2 + 12x^2y^3$

51. **(a)** x először **(b)** y először **(c)** x először **(d)** x először **(e)** y először **(a)** y először

53. $f_x(1,2) = -13$, $f_y(1,2) = -2$

55. 12 **57.** -2

59. $\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{a}{bc \sin A'}$ $\frac{\partial A}{\partial b} = \frac{c\cos A - b}{bc \sin A}$

61. $v_x = \frac{\ln v}{(\ln u)(\ln v) - 1}$

77. Igen

14.4. A láncszabály

1. **(a)** $\frac{dw}{dt} = 0$, **(b)** $\frac{dw}{dt}(\pi) = 0$

3. **(a)** $\frac{dw}{dt} = 1$, **(b)** $\frac{dw}{dt}(3) = 1$

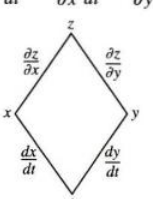
5. **(a)** $\frac{dw}{dt} = 4t \operatorname{arctg} t + 1$, **(b)** $\frac{dw}{dt}(1) = \pi + 1$

7. **(a)** $\frac{\partial z}{\partial u} = 4\cos v \ln(u \sin v) + 4\cos v$, $\frac{\partial z}{\partial v} = -4u \sin v \ln(u \sin v) + \frac{4u\cos^2 v}{\sin v}$
(b) $\frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{2}(\ln 2 + 2)$, $\frac{\partial z}{\partial v} = -2\sqrt{2}(\ln 2 - 2))$

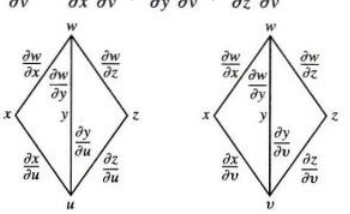
9. **(a)** $\frac{\partial w}{\partial u} = 2u + 4uv$, $\frac{\partial w}{\partial v} = -2v + 2u^2$ **(b)** $\frac{\partial w}{\partial u} = 3$, $\frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{3}{2}$

11. **(a)** $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{(z-y)^2}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-y}{(z-y)^2}$
(b) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -2$

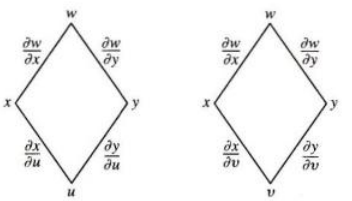
13. $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dy}{dt}$



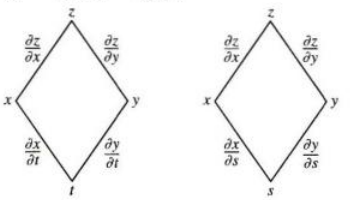
15. $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$



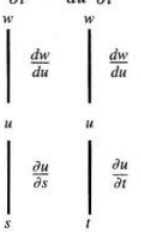
17. $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$



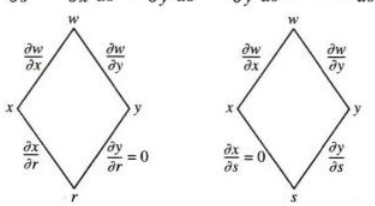
19. $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$



21. $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{du}\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{dw}{du}\frac{\partial u}{\partial t}$



23. $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dr} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dr} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dr}$, mivel $\frac{dy}{dr} = 0$
$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{ds}$, mivel $\frac{dx}{ds} = 0$



25. 4/3 **27.** $-4/5$ **29.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{4}$

31. $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$ **33.** 12 **35.** -7

37. $\frac{\partial z}{\partial u} = 2$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 1$ **39.** $-0{,}00005$ A/s

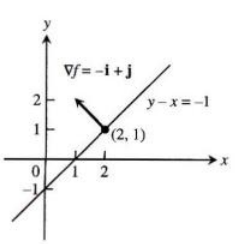
45. $(\cos 1, \sin 1, 1)$ és $(\cos(-2), \sin(-2), -2)$

47. **(a)** Maximum $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$-nél és $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$-nél, minimum $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$-nél és $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$-nél.
(b) Max.=6, Min.=2

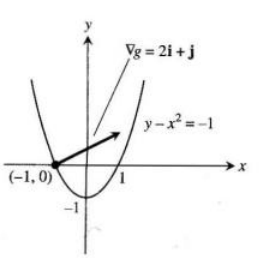
49. $2x\sqrt{x^8 + x^3} + \int_0^{x^2} \frac{3x^2}{2\sqrt{t^4 + x^3}}\,dt$

14.5. Iránymenti deriváltak és gradiens vektor

1.



3.



5. $\nabla f = 3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ **7.** $\nabla f = -\frac{26}{27}\mathbf{i}+\frac{23}{54}\mathbf{j}-\frac{23}{54}\mathbf{k}$

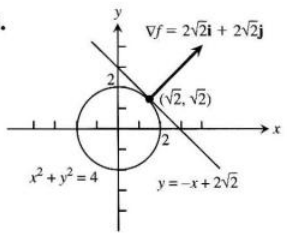
9. -4 **11.** 31/13 **13.** 3 **15.** 2

17. $\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$, $(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = \sqrt{2}$, $-\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$, $(D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -\sqrt{2}$

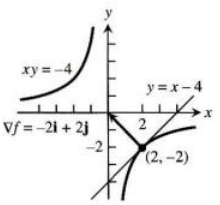
19. $\mathbf{u} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i}-\frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{j}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{k}$, $(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = 3\sqrt{3}$
$-\mathbf{u} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i}+\frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{j}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{k}$, $(D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -3\sqrt{3}$

21. $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = 2\sqrt{3}$, $-\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $(D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -2\sqrt{3}$

23.



25.



27. $\mathbf{u} = \frac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{i}-\frac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{j}$, $-\mathbf{u} = -\frac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{i}+\frac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{j}$

29. Nem, a változás maximális gyorsasága $\sqrt{185} < 14$

31. $-\frac{7}{\sqrt{5}}$

14.6. Érintősíkok és differenciálok

1. **(a)** $x+y+z=3$ **(b)** $x=1+2t, y=1+2t, z=1+2t$

3. **(a)** $2x-z-2=0$ **(b)** $x=2-4t, y=0, z=2+2t$

5. **(a)** $2x+2y+z-4=0$
(b) $x=2t, y=1+2t, z=2+t$

7. **(a)** $x+y+z-1=0$ **(b)** $x=t, y=1+t, z=t$

9. $2x-z-2=0$ **11.** $x-y+2z-1=0$

13. $x=1, y=1+2t, z=1-2t$

15. $x=1-2t, y=1, z=\frac{1}{2}+2t$

17. $x=1+90t, y=1-90t, z=3$

19. $df = \frac{9}{11\,830} \approx 0{,}0008$ **21.** $dg=0$

23. **(a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}-\frac{1}{2}\cos\sqrt{3} \approx 0{,}935$
(b) $\sqrt{3}\sin\sqrt{3}-\cos\sqrt{3} \approx 1{,}87$

25. **(a)** $L(x,y)=1$ **(b)** $L(x,y)=2x+2y-1$

27. **(a)** $L(x,y)=3x-4y+5$ **(b)** $L(x,y)=3x-4y+5$

29. **(a)** $L(x,y)=1+x$ **(b)** $L(x,y)=-y+\frac{\pi}{2}$

31. $L(x,y)=7+x-6y$; 0,06 **33.** $L(x,y)=x+y+1$; 0,08

35. $L(x,y)=1+x$; 0,0222

37. **(a)** $L(x,y,z)=2x+2y+2z-3$; **(b)** $L(x,y,z)=y+z$
(c) $L(x,y,z)=0$

39. **(a)** $L(x,y,z)=x$; **(b)** $L(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y$
(c) $L(x,y,z)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z$

41. **(a)** $L(x,y,z)=2+x$
(b) $L(x,y,z)=x-y-z+\frac{\pi}{2}+1$
(c) $L(x,y,z)=x-y-z+\frac{\pi}{2}+1$

43. $L(x,y,z)=2x-6y-2z+6$; 0,0024

45. $L(x,y,z)=x+y-z-1$; 0,00135

47. Maximális becslési hiba $\leq 0{,}31$

49. Maximális hiba százalékban $\pm 4{,}83\%$

51. A két dimenzió közül a kisebbnek kell több figyelmet szentelni, mert az eredményez nagyobb parciális deriváltat.

53. **(a)** 0,30% **55.** f a legérzékenyebb d változására.

57. Q a h-beli változásokra a legérzékenyebb.

61. $-\frac{\pi}{4}$-nél $-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; 0-nál 0; $\frac{\pi}{4}$-nél $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

14.7. Szélsőértékek és nyeregpontok

1. $f(-3,3)=-5$, lokális minimum

3. $f\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)=0$, lok.max. **5.** $f(-2,1)$, nyeregpont

7. $f\left(\frac{6}{5},\frac{69}{25}\right)$, nyeregpont **9.** $f(2,1)$, nyeregpont

11. $f(2,-1)=-6$, lok.min. **13.** $f(1,2)$, nyeregpont

15. $f(0,0)$, nyeregpont

17. $f(0,0)$, nyeregpont; $f\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{170}{27}$, lok.min.

19. $f(0,0)=0$, lok.min.; $f(1,-1)$, nyeregpont

21. $f(0,0)$, nyeregpont; $f\left(\frac{4}{9},\frac{4}{3}\right)=-\frac{64}{81}$, lok.min.

23. $f(0,0)$, nyeregpont; $f(0,2)=-12$, lok. min.;
$f(-2,0)=-4$, lok.max.; $f(-2,2)$, nyeregpont

25. $f(0,0)$, nyeregpont; $f(1,1)=2$, $f(-1,-1)=2$,lok.max.

27. $f(0,0)=-1$, lok.max.

29. $f(n\pi,0)$, nyeregpont; $f(n\pi,0)=0$ minden n-re

31. Absz.max.: 1, (0,0)-nál; absz.min.: -5, (1,2)-nél

33. Absz.max.: 4, (0,2)-nél; absz.min.:0, (0,0)-nál

35. Absz.max.: 11, (0,-3)-nál; absz.min.:-10, (4,-2)-nél

37. Absz.max.: 4, (2,0)-nál; absz.min.:$\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $(3,-\frac{\pi}{4})$-nél, $(3,\frac{\pi}{4})$-nél, $(1,-\frac{\pi}{4})$-nél, $(1,\frac{\pi}{4})$-nél

39. $a=-3, b=2$

41. Legmelegebb: $2\frac{1^\circ}{4}$ $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$-nél és $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$-nél; a leghidegebb $-\frac{1^\circ}{4}$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$-nál.

43. **(a)** $f(0,0)$, nyeregpont **(b)** $f(1,2)$, lok.min.
(c) $f(1,-2)$, lok.min.; $f(-1,-2)$, nyeregpont

49. $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{355}{36}\right)$

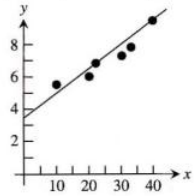
53. **(a)** A félkörön max $f=2\sqrt{2}$, $t=\pi/4$-nél, min $f=-2$, $t=\pi$-nél. A negyedkörön max $f=2\sqrt{2}$, $t=\pi/4$-nél, min $f=2$, $t=0,\pi/2$-nél.
(b) A félkörön max $g=2$, $t=\pi/4$-nél, min $g=-2$, $t=3\pi/4$-nél. A negyedkörön max $g=2\sqrt{2}$, $t=\pi/4$-nél, min $g=0$, $t=0,\pi/2$-nél.
(c) A félkörön max $h=8$, $t=0$-nál, π-nél, min $h=4$, $t=\pi/2$-nél. A negyedkörön max $h=8$, $t=0$-nál, min $h=4$, $t=\pi/2$-nél.

55. i) min $f=-1/2$, $t=-1/2$-nél; max nincs; ii) max $f=0$, $t=-1$nél, $t=0$-nál; min $f=-1/2$, $t=-1/2$-nél, iii) max $f=4$, $t=1$-nél; min $f=0$, $t=0$-nál.

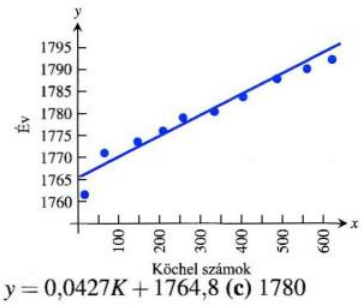
57. $y=-\frac{20}{13}x+\frac{9}{13}$, $y|_{x=4}=-\frac{71}{13}$

59. $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{6}$, $y|_{x=4}=\frac{37}{6}$

61. $y = 0{,}122x + 3{,}59$



63. **(a)**



(b) $y = 0{,}0427K + 1764{,}8$ **(c)** 1780

14.8. Lagrange-multiplikátorok

1. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ **3.** 39 **5.** $(3, \pm 3\sqrt{2})$

7. **(a)** 8 **(b)** 64 **9.** $r = 2\text{cm}$ $h = 4\text{cm}$

11. Hossz$= 4\sqrt{2}$, szélesség$= 3\sqrt{2}$

13. $f(0,0) = 0$ min., $f(2,4) = 20$ max.

15. Legalacsonyabb=0°, legmagasabb=125°

17. $\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$ **19.** 1 **21.** $(0,0,2), (0,0,-2)$

23. $f(1,-2,5) = 30$ max., $f(-1,2,-5) = -30$ min.

25. 3,3,3 **27.** $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ egység

29. $(\pm 4/3, -4/3, -4/3)$ **31.** $U(8,14) = \$128$

33. $f(2/3, 4/3, -4/3) = \frac{4}{3}$ **35.** (2,4,4)

37. Maximum$=1 + 6\sqrt{3}$, $(\pm\sqrt{6}, \sqrt{3}, 1)$-nél;
minimum$=1 - 6\sqrt{3}$, $(\pm\sqrt{6}, -\sqrt{3}, 1)$-nél

39. Max.=4, $(0, 0 \pm 2)$-nél; min.=2, $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 0)$-nál

14.9. Feltételes parciális deriváltak

1. **(a)** 0 **(b)** $1 + 2z$ **(c)** $1 + 2z$

3. **(a)** $\frac{\partial U}{\partial P} + \frac{\partial U}{\partial T}\left(\frac{V}{nR}\right)$ **(b)** $\frac{\partial U}{\partial P}\left(\frac{nR}{V}\right) + \frac{\partial U}{\partial T}$

5. **(a)** 5 **(b)** 5

7. $\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta = \cos\theta \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

14.10. Kétváltozós Taylor-formula

1. Másodfokú: $x + xy$; harmadfokú: $x + xy + \frac{1}{2}xy^2$

3. Másodfokú: xy; harmadfokú: xy

5. Másodfokú: $y + \frac{1}{2}(2xy - y^2)$;
harmadfokú: $y + \frac{1}{2}(2xy - y^2) + \frac{1}{6}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3)$

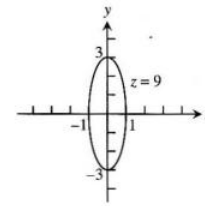
7. Másodf.: $\frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2) = x^2 + y^2$; harmadf.: $x^2 + y^2$

9. Másodfokú: $1 + (x+y) + (x+y)^2$
harmadfokú: $1 + (x+y) + (x+y)^2 + (x+y)^3$

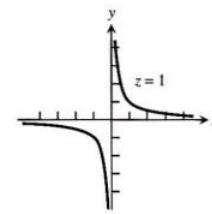
11. Másodfokú: $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$; $E(x,y) \le 0{,}00134$

Gyakorló feladatok

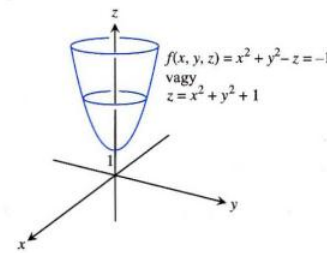
1. Értelmezési tartomány: minden (x,y) ; értékkészlet: $z \ge 0$; szintvonalak: ellipszisek, nagytengely az y-tengelyen, kistengely az x-tengelyen



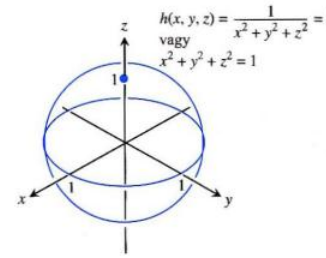
3. Értelmezési tartomány: minden (x,y) amire $x \neq 0$, $y \neq 0$; értékkészlet: $z \neq 0$; szintvonalak: hiperbolák, aszimptotáik az x- és y-tengely



5. Értelmezési tartomány: minden (x,y,z) pont; értékkészlet: minden valós szám; szintfelületek: forgásparaboloidok, tengelyük a z-tengely



7. Értelmezési tartomány: minden (x,y,z), ahol $(x,y,z) \neq (0,0,0)$; értékkészlet: pozitív valós számok; szintfelületek: gömbök, origó középponttal, pozitív sugárral.



9. -2 **11.** 1/2 **13.** 1 **15.** Legyen $y = kx^2$, $k \neq 1$

17. Nem; $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nem létezik

19. $\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta + \sin\theta$, $\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta + r\cos\theta$

21. $\frac{\partial f}{\partial R_1} = -\frac{1}{R_1^2}$, $\frac{\partial f}{\partial R_2} = -\frac{1}{R_2^2}$, $\frac{\partial f}{\partial R_3} = -\frac{1}{R_3^2}$

23. $\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{RT}{V}$, $\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{nT}{V}$, $\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{nR}{V}$, $\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}$

25. $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{y^2}$

27. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -30x + \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$

29. $\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0} = -1$

31. $\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{(r,s)=(\pi,0)} = 2$, $\left.\frac{\partial w}{\partial s}\right|_{(r,s)=(\pi,0)} = 2-\pi$

33. $\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=1} = -(\sin 1+\cos 2)(\sin 1)+$
$+(\cos 1+\cos 2)(\cos 1)-2(\sin 1+\cos 1)(\sin 2)$

35. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(0,1)} = -1$

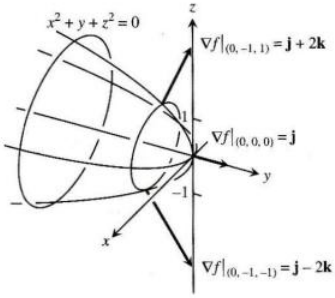
37. Leggyorsabb növekedés iránya: $\mathbf{u}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$;
leggyorsabb csökkenés iránya: $-\mathbf{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$;
$D_{\mathbf{u}}f=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $D_{-\mathbf{u}}f=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $D_{\mathbf{u}_1}f=-\frac{7}{10}$, ahol $\mathbf{u}_1=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

39. Leggyorsabb növekedés iránya: $\mathbf{u}=\frac{2}{7}\mathbf{i}+\frac{3}{7}\mathbf{j}+\frac{6}{7}\mathbf{k}$;
leggyorsabb csökkenés iránya: $-\mathbf{u}=-\frac{2}{7}\mathbf{i}-\frac{3}{7}\mathbf{j}-\frac{6}{7}\mathbf{k}$;
$D_{\mathbf{u}}f=7$; $D_{-\mathbf{u}}f=-7$; $D_{\mathbf{u}_1}f=7$, ahol $\mathbf{u}_1=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

41. $\pi/\sqrt{2}$

43. **(a)** $f_x(1,2)=f_y(1,2)=2$ **(b)** 14/5

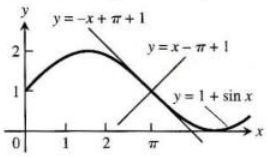
45.



47. Érintősík: $4x-y-5z=4$;
normálegyenes: $x=2+4t$, $y=-1-t$, $z=1-5t$

49. $2y-z-2=0$

51. Érintő: $x+y=\pi+1$; normálegyenes: $y=x-\pi+1$



53. $x=1-2t$, $y=1$, $z=1/2+2t$

55. A válasz $|f_{xx}|$, $|f_{yx}|$, $|f_{yy}|$-ra megállapított felső korláttól függ. Ha $M=\sqrt{2}/2$, akkor $|E|\le 0{,}0142$. Ha $M=1$, $|E|\le 0{,}02$.

57. $L(x,y,z)=y-3z$, $L(x,y,z)=x+y-z-1$

59. Ügyeljünk nagyon az átmérőre.

61. $dI=0{,}038$, %-os változása I-nek: 15,83%, érzékenyebb a feszültségre

63. qbf (a) 5%

65. lokális minimum:-8, $(-2,-2)$-nél

67. Nyeregpont (0,0)-nál, $f(0,0)=0$; lok.max.:1/4, $(-1/2,-1/2)$-nél

69. Nyeregpont (0,0)-nál, $f(0,0)=0$; lok.min.:-4, (0,2)-nél; lok.max.:4, $(-2,0)$-nál; nyeregpont $(-2,2)$-nél, $f(-2,2)=0$

71. Absz.max.: 28, (4,0)-nál; absz.min.: $-9/4$, (3/2,0)-nál

73. Absz.max.: 18, $(2,-2)$-nél; absz.min.: $-17/4$, $(-2,1/2)$-nél

75. Absz.max.: 8, $(-2,0)$-nál; absz.min.: -1, (1,0)-nál

77. Absz.max.: 4, (1,0)-nál; absz.min.: -4, $(0,-1)$-nél

79. Absz.max.: 1, $(0,\pm 1)$-nél és (1,0)-nál; absz.min.: -1, $(-1,0)$-nál

81. Max.: 5, (0,1)-nél; min.:$-1/3$, $(0,-1/3)$-nál

83. Max: $\sqrt{3}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$-nál;
min: $-\sqrt{3}$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$-nál

85. Szélesség: $\left(\frac{c^2V}{ab}\right)^{1/3}$, mélység: $\left(\frac{b^2V}{ab}\right)^{1/3}$,
magasság: $\left(\frac{a^2V}{ab}\right)^{1/3}$

87. Max.: $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$-nél és $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right)$-nél;
min.: $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right)$-nél és $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$-nél

89. **(a)** $(2y+x^2z)e^{yz}$ **(b)** $x^2e^{yz}\left(y-\frac{z}{2y}\right)$
(c) $(1+x^2y)e^{yz}$

91. $\frac{\partial w}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}$, $\frac{\partial w}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}$

97. $(t,-t\pm 4,t)$, t valós

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. $f_{xy}(0,0)=-1$, $f_{yx}(0,0)=1$

7. **(c)** $\frac{r^2}{2}=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$ **13.** $V=\frac{\sqrt{3}abc}{2}$

17. $f(x,y)=\frac{y}{2}+4$, $g(x,y)=\frac{x}{2}+\frac{9}{2}$

19. $y=2\ln|\sin x|+\ln 2$

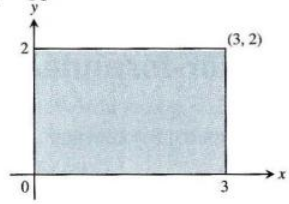
21. **(a)** $\frac{1}{\sqrt{53}}(2\mathbf{i}+7\mathbf{j})$ **(b)** $\frac{-1}{\sqrt{29097}}(98\mathbf{i}-127\mathbf{j}+58\mathbf{k})$

23. $w=e^{-c^2\pi^2t}\sin\pi x$

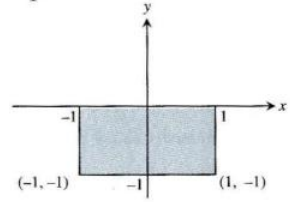
15. fejezet

15.1. Kettős integrál

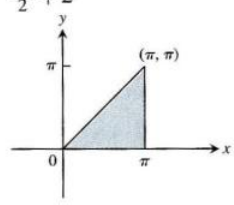
1. 16



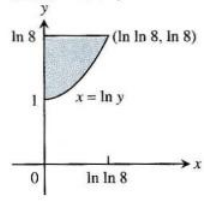
3. 1



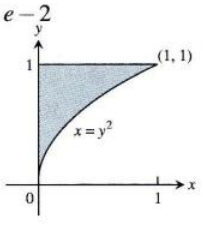
5. $\frac{\pi^2}{2}+2$



7. $8\ln 8-16+e$

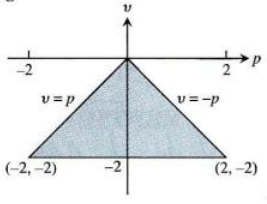


9. $e-2$

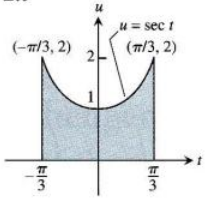


11. $\frac{3}{2}\ln 2$ **13.** $1/6$ **15.** $-1/10$

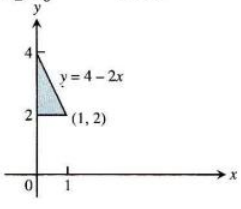
17. 8



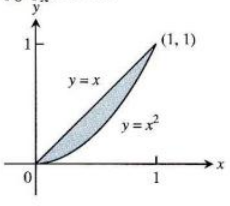
19. 2π



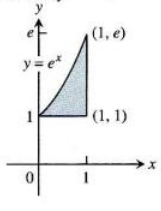
21. $\int_2^4 \int_0^{(4-y)/2} dx\,dy$



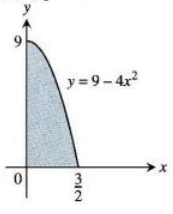
23. $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\,dx$



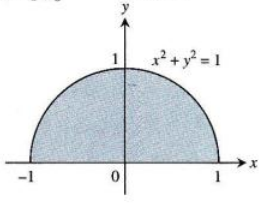
25. $\int_1^e \int_{\ln y}^1 dx\,dy$



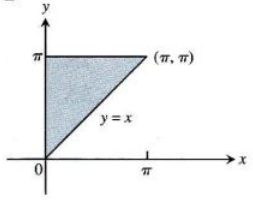
27. $\int_0^9 \int_0^{(\sqrt{9-y})/2} 16x\,dx\,dy$



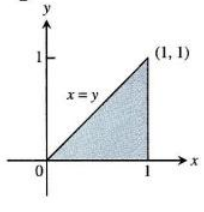
29. $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3y\,dy\,dx$



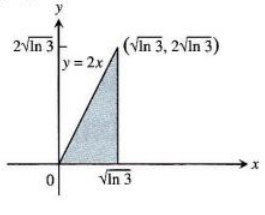
31. 2



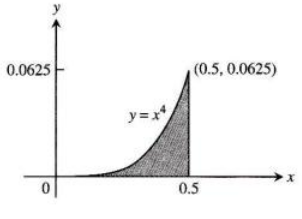
33. $\frac{e-2}{2}$



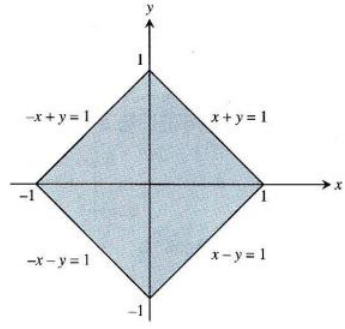
35. 2



37. $1/(80\pi)$



39. $\frac{-2}{3}$

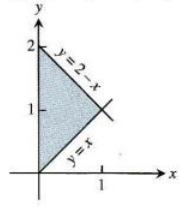


41. $\frac{4}{3}$ **43.** $\frac{625}{12}$ **45.** 16

47. 20 **49.** $2(1+\ln 2)$ **51.** 1

53. π^2 **55.** $-\frac{3}{32}$ **57.** $\frac{20\sqrt{3}}{9}$

59. $\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2+y^2)\,dy\,dx = \frac{4}{3}$



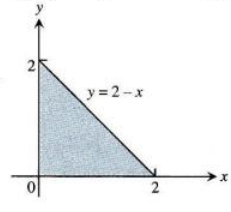
61. T azon (x,y) pontok halmaza, amelyekre $x^2 + 2y^2 < 4$

63. Nem, Fubini tétele szerint a két megoldásnak ugyanaz az eredménye kell legyen.

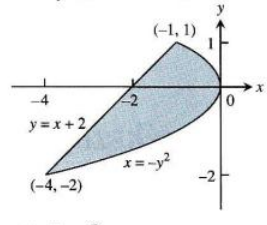
67. 0,603 **69.** 0,233

15.2. Terület, nyomaték, tömegközéppont

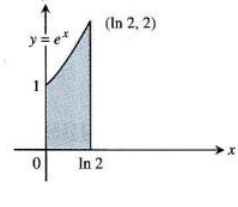
1. $\int_0^2 \int_0^{2-x} dy\,dx = 2$ vagy $\int_0^2 \int_0^{2-y} dx\,dy = 2$



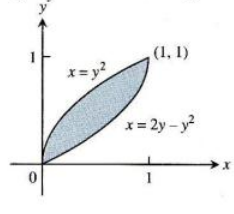
3. $\int_{-2}^1 \int_{y-2}^{-y^2} dx\,dy = \frac{9}{2}$



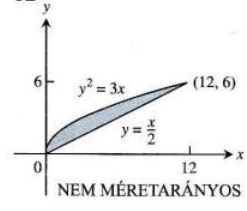
5. $\int_0^{\ln 2} \int_0^{e^x} dx\,dy = 1$



7. $\int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} dx\,dy = \frac{1}{3}$

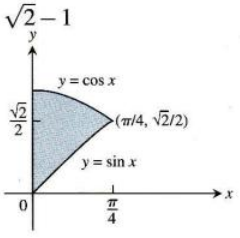


9. 12

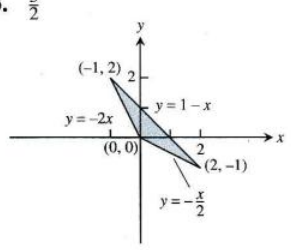


NEM MÉRETARÁNYOS

11. $\sqrt{2}-1$



13. $\frac{3}{2}$



15. (a) 0 (b) $\frac{4}{\pi^2}$ **17.** $\frac{8}{3}$

19. $\bar{x}=\frac{5}{14}$, $\bar{y}=\frac{38}{35}$ **21.** $\bar{x}=\frac{64}{35}$, $\bar{y}=5/7$

23. $\bar{x}=0, \bar{y}=4/(3\pi)$ **25.** $\bar{x}=\bar{y}=4a/(3\pi)$

27. $I_x=I_y=4\pi, I_0=8\pi$ **29.** $\bar{x}=-1, \bar{y}=1/4$

31. $I_x=\frac{64}{105}, R_x=2\sqrt{\frac{2}{7}}$ **33.** $\bar{x}=3/8, \bar{y}=17/16$

35. $\bar{x}=11/3, \bar{y}=14/27, I_y=432, R_y=4$

37. $\bar{x}=0, \bar{y}=13/31, I_y=7/5, R_y=\sqrt{21/31}$

39. $\bar{x}=0, \bar{y}=7/10; I_x=9/10, I_y=3/10, I_0=6/5;$
$R_x=\frac{3\sqrt{6}}{10}, R_y=\frac{3\sqrt{2}}{10}, R_0=\frac{3\sqrt{2}}{5}$

41. $40\,000(1-e^{-2})\ln 7/2 \approx 43329$

43. Ha $0 < a \le 5/2$, akkor a szerkezetnek 45°-nál nagyobb szögben kell megdőlnie, hogy felboruljon.

45. $(\bar{x},\bar{y})=(\frac{2}{\pi},0)$

47. (a) 3/2 (b) Ugyanazok.

53. (a) (7/5, 31/10) (b) (19/7, 18/7)
(c) (9/2, 19/8) (d) (11/4, 43/16)

55. Ahhoz, hogy a tömegközéppont a határon legyen, $h=a\sqrt{2}$ kell legyen. Hogy belül legyen, $h > a\sqrt{2}$

15.3. Kettős integrálás polárkoordinátákkal

1. $\pi/2$ **3.** $\pi/8$ **5.** πa^2

7. 36 **9.** $(1-\ln 2)\pi$

11. $(2\ln 2-1)(\pi/2)$ **13.** $(\pi/2)+1$

15. $\pi(\ln 4-1)$ **17.** $2(\pi-1)$ **19.** 12π

21. $(\frac{3\pi}{8})+1$ **23.** 4 **25.** $6\sqrt{3}-2\pi$

27. $\bar{x}=5/6, \bar{y}=0$ **29.** $\frac{2a}{3}$ **31.** $\frac{2a}{3}$

33. $2\pi(2-\sqrt{e})$ **35.** $\frac{4}{3}+\frac{5\pi}{8}$ **37.** (a) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (b) 1

39. $\pi\ln 4$, nem **41.** $\frac{1}{2}(a^2+2h^2)$

15.4. Hármas integrál derékszögű koordináta-rendszerben

1. 1/6

3. $\int_0^1\int_0^{2-2x}\int_0^{3-3x-3y/2} dz\,dy\,dx$, $\int_0^2\int_0^{1-y/2}\int_0^{3-3x-3y/2} dz\,dx\,dy$,
$\int_0^1\int_0^{3-3x}\int_0^{2-2x-2z/3} dy\,dz\,dx$, $\int_0^3\int_0^{1-z/3}\int_0^{2-2x-2z/3} dy\,dx\,dz$,
$\int_0^2\int_0^{3-3y/2}\int_0^{1-y/2-z/3} dx\,dz\,dy$, $\int_0^3\int_0^{2-2z/3}\int_0^{1-y/2-z/3} dx\,dy\,dz$.
Mind a hat integrál értéke 1.

5. $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\,dz\,dx\,dy$,
$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\,dz\,dx\,dy$,
$\int_{-2}^{2}\int_{4}^{8-y^2}\int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} 1\,dx\,dz\,dy+\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4}\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} 1\,dx\,dz\,dy$,
$\int_{4}^{8}\int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}}\int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} 1\,dx\,dy\,dz+\int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} 1\,dx\,dy\,dz$,
$\int_{-2}^{2}\int_{4}^{8-x^2}\int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} 1\,dy\,dz\,dx+\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1\,dy\,dz\,dx$
$\int_{4}^{8}\int_{-\sqrt{8-x}}^{\sqrt{8-x}}\int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} 1\,dy\,dx\,dz+\int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1\,dy\,dx\,dz$
Mind a hat integrál értéke 16π.

7. 1 **9.** 1 **11.** $\frac{\pi^3}{2}(1-\cos 1)$

13. 18 **15.** 7/6 **17.** 0

19. $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$

21. (a) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{x^2}^{1-x} dy\,dz\,dx$
(b) $\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}}\int_{x^2}^{1-x} dy\,dx\,dz$
(c) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy\,dz$
(d) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-y}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dz\,dy$
(e) $\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{0}^{1-y} dz\,dx\,dy$

23. 2/3 **25.** 20/3 **27.** 1 **29.** 16/3

31. $8\pi-\frac{32}{3}$ **33.** 2 **35.** 4π **37.** 31/3

39. 1 **41.** $2\sin 4$ **43.** 4

45. a = 3 vagy a = 13/3

47. Az értelmezési tartomány mindazon (x,y,z) pontok halmaza, amelyekre $4x^2+4y^2+z^2 \le 4$.

15.5. Tömeg és nyomaték három dimenzióban

1. $R_x=\sqrt{\frac{b^2+c^2}{12}}, R_y=\sqrt{\frac{a^2+c^2}{12}}, R_z=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{12}}$

3. $I_x=\frac{M}{3}(b^2+c^2), I_y=\frac{M}{3}(a^2+c^2), I_z=\frac{M}{3}(a^2+c^2)$

5. $\bar{x}=\bar{y}=0, \bar{z}=12/5, I_x=7904/105 \approx 75{,}28,$
$I_y=4832/63 \approx 76{,}70, I_z=256/45 \approx 5{,}69$

7. (a) $\bar{x}=\bar{y}=0, \bar{z}=8/3$ (b) $c=2\sqrt{2}$

9. $I_L=1386, R_L=\sqrt{\frac{77}{2}}$

11. $I_L=\frac{40}{3}, R_L=\sqrt{\frac{5}{3}}$

13. (a) 4/3 (b) $\bar{x}=4/5, \bar{y}=\bar{z}=2/5$

15. **(a)** $5/2$
(b) $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=8/15$
(c) $I_x=I_y=I_z=11/6$
(d) $R_x=R_y=R_z=\sqrt{\frac{11}{15}}$

17. 3

19. **(a)** $\frac{4}{3}g$ **(b)** $\frac{4}{3}$g

23. **(a)** $I_{tkp.}=\frac{abc(a^2+b^2)}{12}, R_{tkp.}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{12}}$
(b) $I_L=\frac{abc(a^2+7b^2)}{3}, R_L=\sqrt{\frac{a^2+7b^2}{3}}$

27. **(a)** $h=a\sqrt{3}$ **(b)** $h=a\sqrt{2}$

15.6. Hármas integrálok henger- és gömbi koordináta-rendszerben

1. $\frac{4\pi(\sqrt{2}-1)}{3}$ **3.** $\frac{17\pi}{5}$ **5.** $\pi(6\sqrt{2}-8)$

7. $\frac{3\pi}{10}$ **9.** $\frac{\pi}{3}$

11. **(a)** $\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$

(b) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{1} r\,dr\,dz\,d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{3}}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} r\,dr\,dz\,d\theta$

(c) $\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{4-r^2}}\int_0^{2\pi} r\,d\theta\,dz\,dr$

13. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\int_0^{3r^2} f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$

15. $\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_0^{4-r\sin\theta} f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$

17. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_1^{1+\cos\theta}\int_0^{4} f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$

19. $\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\theta}\int_0^{2-r\sin\theta} f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$

21. π^2 **23.** $\frac{\pi}{3}$ **25.** 5π **27.** 2π

29. $(\frac{8-5\sqrt{2}}{2})\pi$

31. **(a)** $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{2}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta+$
$+\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^{\csc\phi}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

(b) $\int_0^{2\pi}\int_1^{2}\int_{\pi/6}^{\arcsin(1/\rho)}\rho^2\sin\phi\,d\phi\,d\rho\,d\theta+$
$+\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{\pi/6}\rho^2\sin\phi\,d\phi\,d\rho\,d\theta$

33. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_{\cos\phi}^{2}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\frac{31\pi}{6}$

35. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1-\cos\phi}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\frac{8\pi}{3}$

37. $\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\phi}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\frac{\pi}{3}$

39. **(a)** $8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

(b) $8\int_0^{\pi/2}\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$

(c) $8\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$

41. **(a)** $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\phi}^{2}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

(b) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$

(c) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$ **(d)** $5\pi/3$

43. $8\pi/3$ **45.** 9/4 **47.** $\frac{3\pi-4}{18}$

49. $\frac{2\pi a^3}{3}$ **51.** $5\pi/3$ **53.** $\pi/2$

55. $\frac{4(2\sqrt{2}-1)\pi}{3}$ **57.** 16π **59.** $5\pi/2$

61. $\frac{4\pi(8-3\sqrt{3})}{3}$ **63.** 2/3 **65.** 3/4

67. $\bar{x}=\bar{y}=0, \bar{z}=3/8$ **69.** $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,3/8)$

71. $\bar{x}=\bar{y}=0, \bar{z}=5/6$ **73.** $I_z=30\pi, R_z=\sqrt{\frac{5}{2}}$

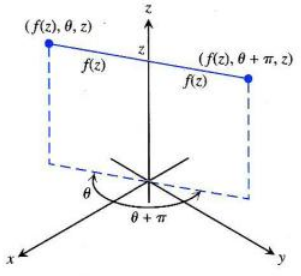
75. $I_x=\pi/4$ **77.** $\frac{a^4h\pi}{10}$

79. **(a)** $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,\frac{4}{5}), I_z=\frac{\pi}{12}, R_z=\sqrt{\frac{1}{3}}$
(b) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,\frac{5}{6}), I_z=\frac{\pi}{14}, R_z=\sqrt{\frac{5}{14}}$

83. $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,\frac{2h^2+3h}{3h+6}), I_z=\frac{\pi a^4(h^2+2h)}{4}, R_z=\frac{a}{\sqrt{2}}$

85. $\frac{3M}{\pi R^3}$

89. A felszín $r = f(z)$ egyenlete mutatja, hogy az $(r,\theta,z) = (f(z),\theta,z)$ pont minden θ esetén a felületen van. $(f(z),\theta+\pi,z)$ a felületen van, ha $(f(z),\theta,z)$ a felületen van, így a felület szimmetrikus a z-tengelyre.



15.7. Helyettesítés többes integráloknál

1. **(a)** $x = \frac{u+v}{3}, y = \frac{v-2u}{3}$; $\frac{1}{3}$ **(b)** Háromszögtartomány, határai: u=0, v=0, u + v = 3

3. **(a)** $x = \frac{1}{5}(2u-v), y = \frac{1}{10}(3v-u)$; $\frac{1}{10}$ **(b)** Háromszögtartomány, határai: 3v=u, v=2u, 3u + v = 10

7. 64/5

9. $\int_1^2 \int_1^3 (u+v)\frac{2u}{v}\,du\,dv = 8 + \frac{52}{3}\ln 2$

11. $\frac{\pi ab(a^2+b^2)}{4}$ **13.** $\frac{1}{3}(1+\frac{3}{e^2}) \approx 0{,}4687$

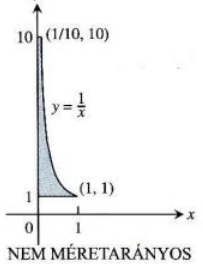
15. **(a)** $\begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u\cos^2 v + u\sin^2 v = u$

(b) $\begin{vmatrix} \sin v & u\cos v \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = -u\sin^2 v - u\cos^2 v = -u$

19. 12 **21.** $\frac{a^2b^2c^2}{6}$

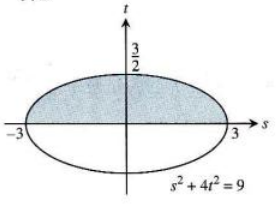
Gyakorló feladatok

1. $9e-9$

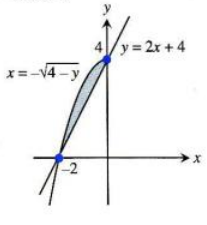


NEM MÉRETARÁNYOS

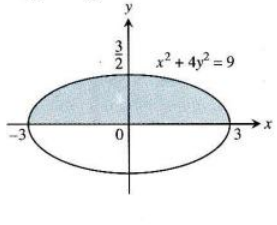
3. 9/2



5. $\int_{-2}^{0} \int_{2x+4}^{4-x^2} dy\,dx = \frac{4}{3}$



7. $\int_{-3}^{3} \int_{0}^{(1/2)\sqrt{9-x^2}} y\,dy\,dx = \frac{9}{2}$



9. $\sin 4$ **11.** $\frac{\ln 17}{4}$ **13.** 4/3

15. 4/3 **17.** 1/4 **19.** $\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{2-\ln 4}$

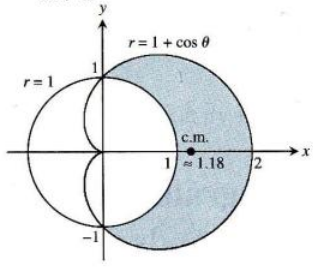
21. $I_0 = 104$ **23.** $I_x = 2\delta, R_x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

25. $M = 4, M_x = 0, M_y = 0$ **27.** π

29. $\bar{x} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}, \bar{y} = 0$

31. **(a)** $\bar{x} = \frac{15\pi+32}{6\pi+48}, \bar{y} = 0$

(b)



33. $\frac{\pi-2}{4}$ **35.** 0 **37.** 8/35

39. $\pi/2$ **41.** $\frac{2(31-3^{5/2})}{3}$

43. **(a)** $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 3\,dz\,dx\,dy$

(b) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^2 3\rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

(c) $2\pi(8-4\sqrt{2})$

45. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec\phi} \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{\pi}{3}$

47. $\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2xy\,dz\,dy\,dx +$
$+ \int_1^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2xy\,dz\,dy\,dx$

49. **(a)** $\frac{8\pi(4\sqrt{2}-5)}{3}$ **(b)** $\frac{8\pi(4\sqrt{2}-5)}{3}$

51. $I_z = \frac{8\pi\delta(b^5-a^5)}{15}$

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. **(a)** $\int_{-3}^{2} \int_{x}^{6-x^2} x^2\,dy\,dx$ **(b)** $\int_{-3}^{2} \int_{x}^{6-x^2} \int_{0}^{x^2} dz\,dy\,dx$

(c) 125/4

3. 2π **5.** $3\pi/2$

7. **(a)** Lyuk sugara =1, gömb sugara =2. **(b)** $4\sqrt{3}\pi$

9. $\pi/4$ **11.** $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ **15.** $1/\sqrt[4]{3}$

17. Tömeg $= a^2 \arccos\left(\frac{b}{a}\right) - b\sqrt{a^2-b^2}$,

$I_0 = \frac{a^4}{2}\arccos\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{b^3}{2}\sqrt{a^2-b^2} - \frac{b^3}{6}(a^2-b^2)^{3/2}$

19. $\frac{1}{ab}(e^{a^2b^2}-1)$ **21.** **(b)** 1 **(c)** 0

25. $h=\sqrt{20}\,\text{cm}, h=\sqrt{60}\,\text{cm}$ **27.** $2\pi\left[\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

16. fejezet

16.1. Vonalintegrál

1. (c) ábra **3.** (g) ábra **5.** (d) ábra

7. (f) ábra **9.** $\sqrt{2}$ **11.** $\frac{13}{2}$

13. $3\sqrt{14}$ **15.** $\frac{1}{6}(5\sqrt{5}+9)$ **17.** $\sqrt{3}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

19. $\frac{10\sqrt{5}-2}{3}$ **21.** 8 **23.** $2\sqrt{2}-1$

25. **(a)** $4\sqrt{2}-2$ **(b)** $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$

27. $I_z=2\pi\delta a^3$, $R_z=a$

29. **(a)** $I_z=2\pi\sqrt{2}\delta$, $R_z=1$ **(b)** $I_z=4\pi\sqrt{2}\delta$, $R_z=1$

31. $I_x=2\pi-2, R_x=1$

16.2. Vektormezők, cirkuláció, munka, áramlás

1. $\nabla f=-(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$

3. $\nabla g=-\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\mathbf{i}-\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)\mathbf{j}+e^z\mathbf{k}$

5. $\mathbf{F}=-\frac{kx}{(x^2+y^2)3/2}\mathbf{i}-\frac{ky}{(x^2+y^2)3/2)}\mathbf{j}$, bármely $k>0$

7. **(a)** 9/2 **(b)** 13/3 **(c)** 9/2

9. **(a)** 1/3 **(b)** - 1/5 **(c)** 0

11. **(a)** 2 **(b)** 3/2 **(c)** 1/2

13. 1/2 **15.** $-\pi$ **17.** 69/4

19. $-39/2$ **21.** 25/6

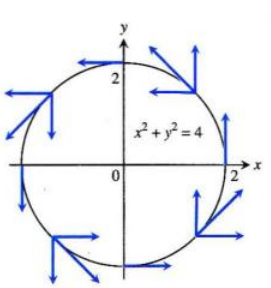
23. **(a)** $\text{cirk}_1=0$, $\text{cirk}_2=2\pi$, $\text{flux}_1=2\pi$, $\text{flux}_2=0$
(b) $\text{cirk}_1=0$, $\text{cirk}_2=8\pi$, $\text{flux}_1=8\pi$, $\text{flux}_2=0$

25. cirk = 0, flux $=a^2\pi$

27. cirk $=a^2\pi$, flux = 0

29. **(a)** $-\frac{\pi}{2}$ **(b)** 0 **(c)** 1

31.



33. **(a)** $\mathbf{G}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ **(b)** $\mathbf{G}=\sqrt{x^2+y^2}\mathbf{F}$

35. $\mathbf{F}=-\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

37. 48 **39.** π **41.** 0 **43.** $\frac{1}{2}$

16.3. Útfüggetlenség, potenciálfüggvény, konzervatív vektormező

1. Konzervatív **3.** Nem konzervatív

5. Nem konzervatív

7. $f(x,y,z)=x^2+\frac{3y^2}{2}+2z^2+C$

9. $f(x,y,z)=xe^{y+2z}+C$

11. $f(x,y,z)=x\ln x-x+\text{tg}(x+y)+\frac{1}{2}\ln(y^2+z^2)+C$

13. 49 **15.** -16 **17.** 1 **19.** $9\ln 2$

21. 0 **23.** -3

27. $\mathbf{F}=\nabla\left(\frac{x^2-1}{y}\right)$

29. **(a)** 1 **(b)** 1 **(c)** 1

31. **(a)** 2 **(b)** 2

33. **(a)** $c=b=2a$ **(b)** $c=b=2$

35. Bármelyik utat választhatjuk. A munka mindig ugyanakkora, mivel a mező konzervatív.

37. Az $\mathbf{F}$ erő konzervatív, mivel az M, N és P parciális deriváltja mind nulla. $f(x,y,z)=ax+by+cz+C$; $A=(xa,ya,za)$ és $B=(xb,yb,zb)$. Ezért $\int\mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}=f(B)-f(A)=a(xb-xa)+$ $+b(yb-ya)+c(zb-za)=\mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}$.

16.4. Green-tétel a síkban

1. fluxus = 0, cirk. $=2\pi a^2$ **3.** fluxus $=-\pi a^2$, cirk. = 0

5. fluxus = 2, cirk.= 0 **7.** fluxus = -9, cirk. = 9

9. fluxus = 1/2, cirk. =1/2

11. fluxus = 1/5, cirk. $=-1/12$

13. 0 **15.** 2/33 **17.** 0 **19.** -16π

21. πa^2 **23.** $\frac{3}{8}\pi$

25. **(a)** 4π, ha C pozitív irányítású
(b) $(h-k)$ (a tartomány területe)

35. **(a)** 0

16.5. Felület felszíne és felületi integrál

1. $\frac{13}{3}\pi$ **3.** 4

5. $6\sqrt{6}-2\sqrt{2}$ **7.** $\pi\sqrt{c^2+1}$

9. $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})$ **11.** $3+2\ln 2$

13. $9a^3$ **15.** $\frac{abc}{4}(ab+ac+bc)$

17. 2 **19.** 18

21. $\frac{\pi a^3}{6}$ **23.** $\frac{\pi a^2}{4}$

25. $\frac{\pi a^3}{2}$ **27.** -32

29. -4 **31.** $3a^4$

33. $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$

35. $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$, $I_z=\frac{15\pi\sqrt{2}}{2}\delta$, $R_z=\frac{\sqrt{10}}{2}$

37. (a) $\frac{8\pi}{3}a^4\delta$ (b) $\frac{20\pi}{3}a^4\delta$

39. $\frac{\pi}{6}(13\sqrt{13}-1)$

41. $5\pi\sqrt{2}$

43. $\frac{2}{3}(5\sqrt{5}-1)$

16.6. Paraméteresen adott felületek

1. $\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+r^2\mathbf{k}, 0\le r\le 2,$
$0\le\theta\le 2\pi$

3. $\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+(r/2)\mathbf{k}, 0\le r\le 6,$
$0\le\theta\le\pi/2$

5. $\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+\sqrt{9-r^2}\mathbf{k},$
$0\le r\le 3\sqrt{2}/2, 0\le\theta\le 2\pi$; tehát
$\mathbf{r}(\phi,\theta)=(3\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i}+(3\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j}+(3\cos\phi)\mathbf{k},$
$0\le\phi\le\pi/4, 0\le\theta\le 2\pi$

7. $\mathbf{r}(\phi,\theta)=(\sqrt{3}\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i}+(\sqrt{3}\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j}+$
$+(\sqrt{3}\cos\phi)\mathbf{k}, \pi/3\le\phi\le 2\pi/3, 0\le\theta\le 2\pi$

9. $\mathbf{r}(x,y)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(4-y^2)\mathbf{k}, 0\le x\le 2, -2\le y\le 2$

11. $\mathbf{r}(u,v)=u\mathbf{i}+(3\cos v)\mathbf{j}+(3\sin v)\mathbf{k}, 0\le u\le 3, 0\le v\le 2\pi$

13. (a) $\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+(1-r\cos\theta-r\sin\theta)\mathbf{k},$
$0\le r\le 3, 0\le\theta\le 2\pi$
(b) $\mathbf{r}(u,v)=(1-u\cos v-u\sin v)\mathbf{i}+(u\cos v)\mathbf{j}+(u\sin v)\mathbf{k},$
$0\le u\le 3, 0\le v\le 2\pi$

15. $\mathbf{r}(u,v)=(4\cos^2 v)\mathbf{i}+u\mathbf{j}+(4\cos v\sin v)\mathbf{k},$
$0\le u\le 3, -(\pi/2)\le v\le(\pi/2)$;
Más módon: $\mathbf{r}(u,v)=(2+2\cos v)\mathbf{i}+u\mathbf{j}+(2\sin v)\mathbf{k},$
$0\le u\le 3, 0\le v\le 2\pi$

17. $\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{5}}{2}r\,dr\,d\theta=\frac{\pi\sqrt{5}}{2}$

19. $\int_0^{2\pi}\int_1^3 r\sqrt{5}dr\,d\theta=8\pi\sqrt{5}$

21. $\int_0^{2\pi}\int_1^4 1\,du\,dv=6\pi$

23. $\int_0^{2\pi}\int_0^1 u\sqrt{4u^2+1}\,du\,dv=\frac{(5\sqrt{5}-1)}{6}\pi$

25. $\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi} 2\sin\phi\,d\phi\,d\theta=(4+2\sqrt{2})\pi$

27. $\iint_S x\,d\sigma=\int_0^3\int_0^2 u\sqrt{4u^2+1}\,du\,dv=\frac{17\sqrt{17}-1}{4}$

29. $\iint_S x^2\,d\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\phi\cos^2\theta\,d\phi\,d\theta=\frac{4\pi}{3}$

31. $\iint_S z\,d\sigma=\int_0^1\int_0^1(4-u-v)\sqrt{3}\,dv\,du=3\sqrt{3}$
(amennyiben $x=u$, $y=v$)

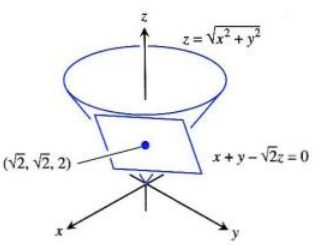
33. $\iint_S x^2\sqrt{5-4z}\,d\sigma=$
$=\int_0^1\int_0^{2\pi}u^2\cos^2 v\sqrt{4u^2+1}u\sqrt{4u^2+1}dv\,du=$
$=\int_0^1\int_0^{2\pi}u^3(4u^2+1)\cos^2 v\,dv\,du=\frac{11\pi}{12}$

35. -32 **37.** $\frac{\pi a^3}{6}$ **39.** $\frac{13a^4}{6}$

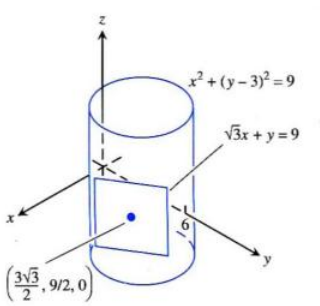
41. $2\pi/3$ **43.** $-73\pi/6$ **45.** (a/2, a/2, a/2)

47. $8\delta\pi a^4/3$

49.



51.



55. (b) $A=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[a^2b^2\sin^2\phi\cos^2\phi+b^2c^2\cos^4\phi\cos^2\theta+\right.$
$\left.+a^2c^2\cos^4\phi\sin^2\theta\right]^{1/2}d\phi\,d\theta$

57. $x_0x+y_0y=25$

16.7. Stokes-tétel

1. 4π **3.** $-5/6$ **5.** 0

7. -6π **9.** $2\pi a^2$ **13.** 12π

15. $-\pi/4$ **17.** -15π **25.** $16I_y+16I_x$

16.8. Gauss–Osztrogradszkij-tétel

1. 0 **3.** 0 **5.** -16

7. -8π **9.** 3π **11.** $-40/3$

13. 12π **15.** $12\pi\left(4\sqrt{2}-1\right)$

21. Az integrál értéke soha nem haladja meg a felület felszínét.

Gyakorló feladatok

1. Út1: $2\sqrt{3}$; Út2: $1+3\sqrt{2}$

3. $4a^2$ **5.** 0 **7.** $8\pi\sin(1)$

9. 0 **11.** $\pi\sqrt{3}$ **13.** $2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

15. $\frac{abc}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$ **17.** 50

19. $\mathbf{r}(\phi,\theta)=(6\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i}+(6\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j}+(6\cos\phi)\mathbf{k}$, $\frac{\pi}{6}\le\phi\le\frac{2\pi}{3}, 0\le\theta\le 2\pi$

21. $\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+(1+r)\mathbf{k}$, $0\le r\le 2, 0\le\theta\le 2\pi$

23. $\mathbf{r}(u,v)=(u\cos v)\mathbf{i}+2u^2\mathbf{j}+(u\sin v)\mathbf{k}$, $0\le u\le 1, 0\le v\le\pi$

25. $\sqrt{6}$ **27.** $\pi\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$

29. Konzervatív **31.** Nem konzervatív

33. $f(x,y,z)=y^2+yz+2x+z$ **35.** Út 1: 2; út 2: 8/3

37. **(a)** $1-e^{-2\pi}$ **(b)** $1-e^{-2\pi}$ **39.** 0

41. **(a)** $4\sqrt{2}-2$ **(b)** $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$

43. $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(1,\frac{16}{15},\frac{2}{3}\right)$;
$I_x=\frac{232}{45}, I_y=\frac{64}{15}, I_z=\frac{56}{9}$,
$R_x=\frac{2\sqrt{29}}{3\sqrt{5}}, R_y=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{15}}, R_z=\frac{2\sqrt{7}}{3}$

45. $\bar{z}=\frac{3}{2}, I_z=\frac{7\sqrt{3}}{3}, R_z=\sqrt{\frac{7}{3}}$

47. $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,49/12), I_z=640\pi, R_z=2\sqrt{2}$

49. fluxus: 3/2; cirk.: $-1/2$

53. 3 **55.** $\frac{2\pi}{3}\left(7-8\sqrt{2}\right)$

57. 0 **59.** π

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. 6π **3.** 2/3

5. **(a)** $\mathbf{F}(x,y,z)=z\mathbf{i}+x\mathbf{j}+y\mathbf{k}$
(b) $\mathbf{F}(x,y,z)=z\mathbf{i}+y\mathbf{k}$
(c) $\mathbf{F}(x,y,z)=z\mathbf{i}$

7. $\frac{16\pi R^3}{3}$

9. $a=2, b=1$. A flux minimuma -4.

11. **(b)** $\frac{16}{3}g$

(c) Munka $=\left(\int_C gxy\,ds\right)\bar{y}=g\int_C xy^2\,ds=\frac{16}{3}g$

13. **(c)** $\frac{4}{3}\pi w$

19. Akkor, ha $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$.

Tárgymutató

A, Á
abszolút
  maximum 314
  minimum 314
abszolút konvergencia 103
alaptétel
  vonalintegrál 434
alkotó, hengeré 191
alsó korlát 74
alulról korlátos 74
áramlás 428
áramlási integrál 428
áramlási mező 427
aszimptota 14
  függvényé 362
átlagérték, függvényé 382

B
balsodrású rendszer 155
belső pont 258, 261
binomiális sor 132
binormális 238

C
cirkuláció 428
Clairaut-tétel 280

Cs
csillagászati egység 249

D
deriválás
  implicit 276, 288
derivált
  iránymenti 292
  parciális 274
  vektorfüggvény 209
differenciál 305
differenciálforma 438
  egzakt 438
differenciálható függvény 281
differenciálhatóság 281
direktrix 9
diszkrimináns, másodrendű görbéé 28
divergencia 477
divergenciatétel 478

E, É
egzakt differenciálforma 438
egyenes 183
egyköpenyű hiperboloid 194
együtthatók, hatványsoré 108
ellipszis 11
  excentricitás 20
  kistengely 12
  nagytengely 12
  tengelyegyenes 12
  tengelypont 12
ellipszoid 192
elliptikus kúp 194
elliptikus paraboloid 193
első momentum 365, 386
első oktáns 155
első térnyolcad 155
energiafluxus 487
érintőegyenes 209
érintősík 300
érintővektor 209
erőtér 423
erőtér, konzervatív 433
Euler-konstans 92
evolvens 232
excentricitás
  ellipszis 20
  hiperbola 21
  parabola 22

F
felosztás normája 348
felszín, felületé 452, 463
feltételes konvergencia 103
felület 461
  érintősíkja 300
  felszíne 452, 463
  irányított 456
  normálegyenese 300
  sima 462
felületi integrál 454
felületmenti integrál 456
felülről korlátos sorozat 74
Fibonacci-sorozat 73
fluxus 429, 456
fókusz 9, 11, 13
folytonos
  függvény 269
  vektormező 424
forgásellipszoid 193
forgássugár 365
forgatónyomaték 365
főnormális 233
Fubini tétele 349, 350
függvény
  átlagérték 362
  átlagértéke 382
  differenciálható 281
  folytonos 269
  homogén n-edfokú 343
  középértéke 382

G
Gauss–Osztrogradszkij-tétel 478
generáló görbe, hengeré 191
görbe 205
  sima 209
  szakaszonként sima 209
görbementi integrál 418
görbület 232
gradiens 293
gradiensmező 424
gradiensvektor 293
Green-formula
  első 486
  második 487

Gy
gyökkritérium 99

H
hajlásszög, síkoké 188
halmaz
  korlátos 259
  nyílt 258
  zárt 258
hármas integrál 376
harmonikus sor 88
határérték, kétváltozós függvény 267
határpont 258, 261
hatványsor 108
hatványsor középpontja 108
helyi maximum 311
helyi minimum 311
helyvektor, részecskéé 205
henger
  alkotója 191
  parabolikus 191
hengerkoordináták 391

Hess-determináns 313
hiba 306
  lineáris közelítés 304
  lineáris közelítésé 306
hiperbola 13
  aszimptota 14
  excentricitás 21
  tengelyegyenes 14
  tengelypont 14
hiperboloid 194, 195
  egyköpenyű 194
  kétköpenyű 196
hullámegyenlet 283

I, Í
implicit deriválás 276, 288
improprius kettős integrál 359
integrál
  felületi 454
  hármas 377
  háromszoros 377
  kétszeres 350
  kettős 347, 348
integrálható 348
integrálható függvény 376
integrálközelítő összeg 348, 352
integrál útja 418
irányított felület 456
iránymenti derivált 292

J
Jacobi-determináns 404, 406
jobbsodrású rendszer 155

K
Kepler-törvények 246
kétköpenyű hiperboloid 196
kétszeres integrál 350
kettős integrál 347, 348
  improprius 359
kétváltozós függvény
  -diszkriminánsa 313
  folytonos 269
kistengely
  ellipszis 12
komponens 205, 424
kontúrvonal 260
konzervatív erőtér 433
koordinátafüggvény 205, 424
korlátos
  halmaz 259
  sorozat 74
  tartomány 259
körintegrál 426
középérték, függvényé 382
középpont, hatványsoré 108
kritikus pont 312
kúp 194
kvadratikus közelítés 122

L
Lagrange-féle maradéktag 123
Lagrange-féle multiplikátor 321
Lagrange-féle multiplikátoros
  módszer 323
Lagrange-multiplikátor 323
láncszabály 284, 286
  három változóra 286
  két változóra 284
Laplace-egyenlet 283
legnagyobb alsó korlát 74
Leibniz-formula 138
lineáris kombináció 162
lineáris közelítés hibája 306
linearizáció 303, 306
lokális maximum 311
lokális minimum 311

M
Maclaurin-sor 119
maradéktag 123
második momentum 365, 387
másodrendű felület 192
maximum
  abszolút 314
  helyi 311
  lokális 311
merőleges tengelyek tétele 365
minimum
  abszolút 314
  helyi 311
  lokális 311
momentum
  első 365, 386
  második 365, 387
multiplikátor, Lagrange-féle 321
munka 425

N
nagytengely
  ellipszis 12
n-edfokú homogén függvény 343
nívóvonal 259
norma
  felosztásé 348
normál alak
  parabola 10
normálegyenes 300
normális, síké 185
normálsík 239
normálvektor 179, 462
növekvő sorozat 73

Ny
nyeregpont 312
nyílt
  halmaz 258
  tartomány 258
nyílt tartomány 261
nyomaték
  forgató 365
  statikai 386
  tehetetlenségi 365

O, Ó
oktáns,első 155
operátor
  ∇ 470
  „nabla" 470
ortogonalitás 170

Ö, Ő
örvénysűrűség 473
őskép 403
összefüggő tartomány 433

P
pálya 205
Papposz-formula 369, 390
parabola 9, 10
  excentricitás 22
  normál alak 10
  tengelypont 10
parabolikus henger 191
paraboloid 193
paralelogramma szabály 162
paraméterezés 205, 461
paramétertartomány 461
paramétervonal 462
parciális derivált 274
poláris momentum 365
polár pólus 35
polártengely 35
pont
  belső 258, 261
  határpont 258
potenciálfüggvény 433
potenciáltér 424

R
regressziós egyenes 319
rektifikáló sík 239
rekurzív képlet 73
rekurzív sorozat 73
relatív maximum 311
relatív minimum 311
részsorozat 77
Riemann-összeg 348, 352
rotációvektor 469

S
sík 186
sík hajlásszöge 188
sík normális 185
sima felület 462
sima görbe 209, 433
simulókör 234
simulósík 239
skalár 162

skalárfüggvény 206
skaláris szorzás 168
skalárszorzat 168
sorozat 66
  felülről korlátos 74
  korlátos 74
  növekvő 73
  részsorozata 77
statikai nyomaték 386
Stokes-tétel 470
súlypont 366, 387

Sz
szakaszonként sima görbe 209, 433
szektor 371
szintfelület 261
szintvonal 259

T
tartomány
  korlátos 259
  nyílt 258, 261
  összefüggő 433
  zárt 258, 261
Taylor-polinom 120
Taylor-sor 119
tehetetlenségi
  nyomaték 365, 386
  sugár 365
teljes differenciál 305, 307
tengelyegyenes
  ellipszis 12
  hiperbola 14
  parabola 10
tengelypont
  ellpiszis 12
  hiperbola 14
  parabola 10
térfogat 348
térgörbe 205
térnyolcad, első 155
terület 361
tétel
  Clairaut 280
  Fubini 350
  Gauss–Osztrogradszkij 478
  Green 443
  merőleges tengelyeké 365
  Stokes 470
  Weierstrass 74
  Young 280
tórusz 468
torzió 239
tömeg 386
tömegközéppont 363
trend egyenes 319

U, Ú
útfüggetlen 433

V
várható érték 153
végtelen szorzat 153
  konvergens 153
vektorfüggvény 205
vektorfüggvény deriváltja 209
vektoriális szorzat 177
vektormező 423
  differenciálható 424
  folytonos 424
vektorok
  abszolút értéke 161
  hossza 161
  összeadása 162
  skaláris szorzása 168
  skalárral szorzása 162
  vektoriális szorzata 177
vezéregyenes 9
vonalintegrál 418
vonalmenti integrál 418

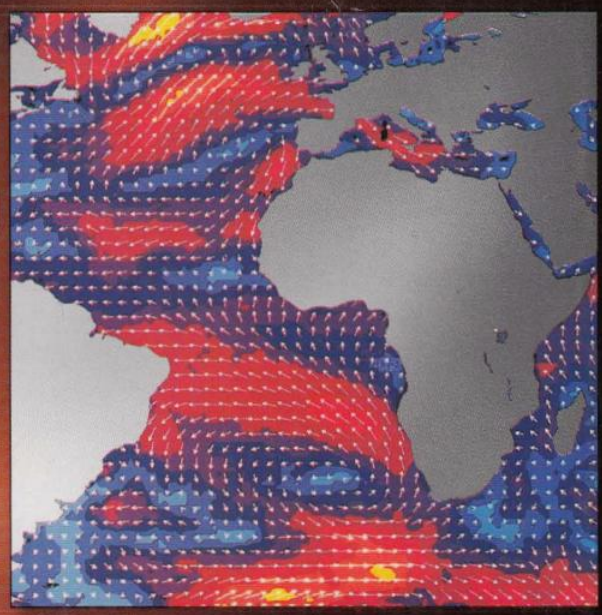
W
Weierstrass-tétel 74
Wilson-féle kritikusmennyiség képlet 309

Y
Young tétel 280

Z
zárt
  halmaz 258
  tartomány 258, 261

A Thomas-féle Kalkulus a mérnökök matematikai oktatásában világszerte fogalommá vált. Az eredeti, 15 fejezetből álló terjedelmes tankönyv központi témája a differenciál- és az integrálszámítás, célja pedig, hogy az olvasót bevezesse az analízis e két alapvető eszközének legfontosabb alkalmazásaiba, a kúpszeletek, a véges sorok és sorozatok, a vektorszámítás, a vektorfüggvények, a parciális deriváltak és a többszörös integrálok elméletébe. A magyar kiadás 3 kötetben jelenik meg.

Az Olvasó most a harmadik kötetet tartja a kezében. Mivel a fejezetek folyamatos számozását a három kötetben végig fenntartottuk, a 3. kötet a 10. fejezettel kezdődik. A 10. fejezetben a kúpszeletekkel és a polárkoordinátákkal ismerkedhetünk meg. A 11. fejezet tárgya a véges sorok és sorozatok elmélete. A 12. fejezetbe került a tér koordinátageometriájának ismertetése. A 13. fejezet a vektor értékű függvényekkel és a térbeli mozgások leírásával foglalkozik. A 14. fejezet tárgya a parciális deriváltak, a 15. fejezeté a többszörös integrálok. A 16. fejezet az integrálfogalom kiterjesztése vektorterekre. Az első kettőhöz hasonlóan ez a kötet is nagy számban tartalmaz kidolgozott példákat, illetve különböző szintű gyakorlófeladatokat, így egységes komplex tankönyvként és példatárként használható.



A Thomas-féle Kalkulust első lépcsőben (hosszas és alapos mérlegelést követően) a BME választotta a BSc-képzés alaptankönyvének. Ez a nagyszabású vállalkozás lehetőséget teremt más egyetemek és főiskolák számára, hogy olyan tankönyvsorozatra tervezzék a BSc-szintű analízistanításukat, amely mind hazai, mind világviszonylatban konvertálható tudást ad a hallgatóknak. A Thomas-féle Kalkulus magyar kiadását és használatát éppen ez indokolja. Számtalan kiváló magyar nyelvű analízistankönyv létezik, de a Thomas-féle Kalkulussal egyik sem vetekedhet ismertség és elfogadottság tekintetében.
Az 1. és 2. kötet már korábban megjelent, kapható az üzletekben.
Az eredeti művet George B. Thomas, a Massachusetts Institute of Technology néhai professzora írta a differenciál- és integrálszámítás oktatására szolgáló tankönyvként.

TYPOTEX

4500 Ft

ISBN 978-9-639664-28-9

9 789639 664289