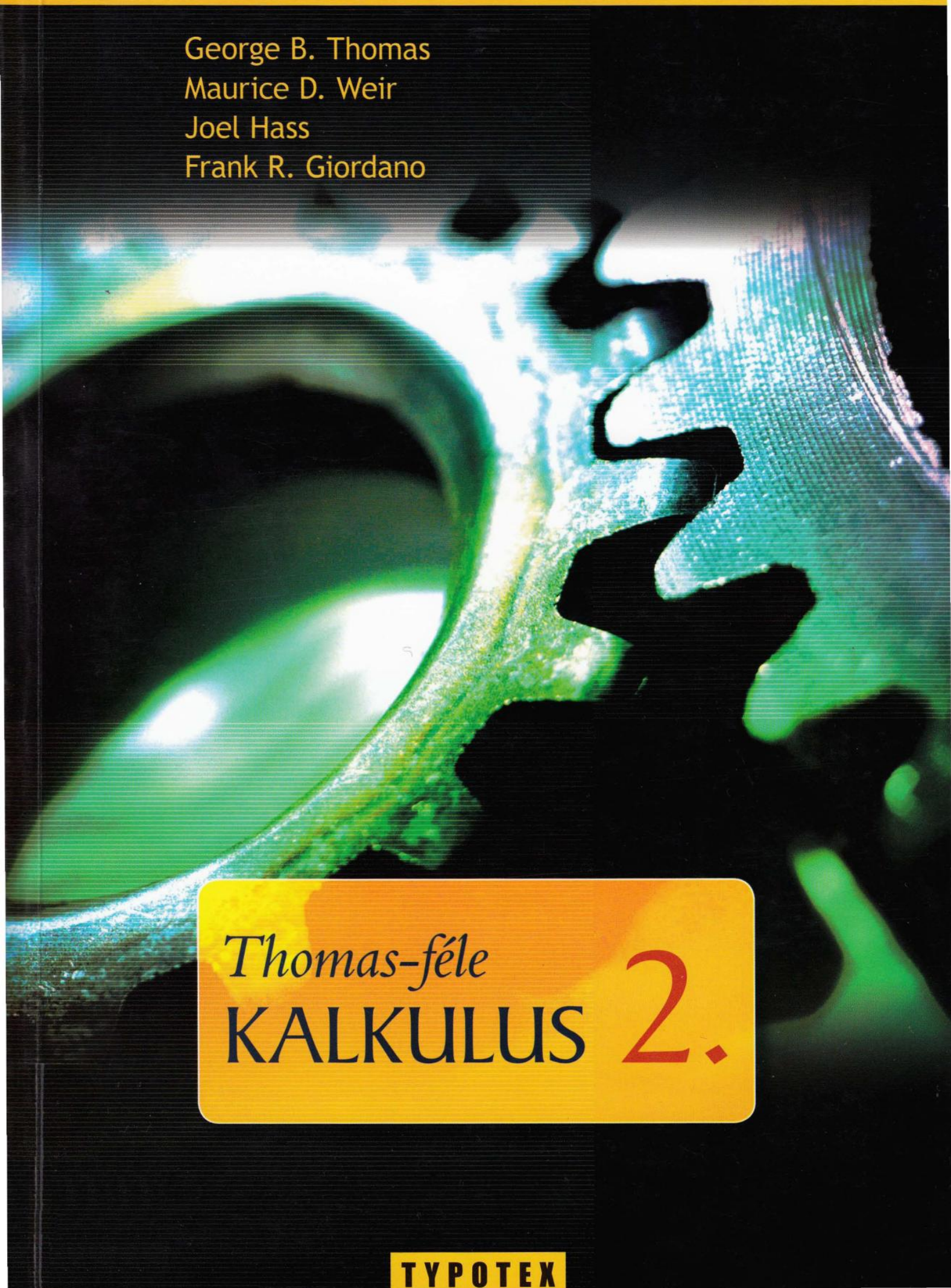
George B. Thomas
Maurice D. Weir
Joel Hass
Frank R. Giordano



Thomas-féle KALKULUS 2.

TYPOTEX

Thomas-féle

Kalkulus

II. kötet

THOMAS-FÉLE
KALKULUS

II. kötet

Az eredeti művet készítette
George B. Thomas, Jr.
Massachusetts Institute of Technology

Átdolgozták

Maurice D. Weir
Naval Postgraduate School

Joel Hass
University of California, Davis

Frank R. Giordano
Naval Postgraduate School

A magyar kiadás főszerkesztője

Szász Domokos
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem



TYPOTEX
Budapest, 2006

Az eredeti mű címe: Thomas' Calculus, 11th Edition.

Authorized translation from the English Language edition, entitled THOMAS' Calculus, 11th Edition, ISBN 0321185587, by Thomas, George B.; Weir, Maurice D.; and Giordano, Frank R., published by Pearson Education, Inc, publishing as Addison-Wesley,
Copyright © 2005 Pearson Education, Inc. All rights reserved.
Hungarian translation © Csaba Ferenc; Gerner József; Ruzsa Zoltán; Szép Gabriella; Typotex, 2006

Oktatási Minisztérium

A könyv az Oktatási Minisztérium támogatásával, a Felsőoktatási Tankönyv- és Szakkönyv-támogatási Pályázat keretében jelent meg.

A megjelenést támogatta a
Korszerű Mérnökért Alapítvány és a
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Rektori Hivatala.

Szakmailag ellenőrizte: Horváth Miklós, Moson Péter, Nagyné Szilvási Márta, Serény György és Szabados Tamás.

ISBN 963 9664 27 8

Témakör: matematikai analízis

Kedves Olvasó!

Önre gondoltunk, amikor a könyv előkészítésén munkálkodtunk. Kapcsolatunkat szorosabbra fűzhetjük, ha belép a Typoklubba, ahonnan értesülhet új kiadványainkról, akcióinkról, programjainkról, és amelyet a www.typotex.hu címen érhet el. Honlapunkon megtalálhatja az egyes könyvekhez tartozó hibajegyzéket is, mert sajnos hibák olykor előfordulnak.

Kiadja a Typotex Elektronikus Kiadó Kft., az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesületének tagja.

Felelős kiadó: Votisky Zsuzsa
Felelős szerkesztő: Szép Gabriella
Műszaki szerkesztő: Hesz Gábor
A borítót Tóth Norbert készítette
Terjedelem: 45 (A/5) ív
Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben, Gyulán
Ügyvezető igazgató: Kovács János

Tartalomjegyzék

5. Integrálszámítás **7**

5.1. Közelítés véges összegekkel 7
5.2. A véges összegek határértéke és a szumma jel 17
5.3. A határozott integrál 24
5.4. Newton–Leibniz-tétel (az analízis alaptétele) 36
5.5. A határozatlan integrál és a helyettesítési szabály 48
5.6. Helyettesítés és görbék által közbezárt terület 55
Áttekintő kérdések 65
Gyakorló feladatok 65
Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok 68

6. A határozott integrál alkalmazásai **73**

6.1. Szeletelés és tengely körüli forgatás 73
6.2. Térfogatszámítás hengerhéj-módszerrel 86
6.3. Síkgörbék hossza 93
6.4. Tehetetlenségi nyomaték és tömegközéppont 100
6.5. Forgásfelületek és Papposz tételei 111
6.6. Munka 121
6.7. A folyadék nyomása és a folyadékra ható erők 128
Áttekintő kérdések 133
Gyakorló feladatok 133
Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok 136

7. Transzcendens függvények **139**

7.1. Inverz függvény deriváltja 139
7.2. A természetes logaritmusfüggvény 148
7.3. Az exponenciális függvény 157
7.4. Az a^x és $\log_a x$ függvények 165
7.5. Exponenciális növekedés és csökkenés 171
7.6. Relatív növekedési ütem 179
7.7. Inverz trigonometrikus függvények 185
7.8. Hiperbolikus függvények 200
Áttekintő kérdések 210
Gyakorló feladatok 210
Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok 213

8. Integrálási technikák **217**

8.1. Egyszerű integrációs formulák 217
8.2. Parciális integrálás 224
8.3. Racionális törtfüggvények integrálása parciális törtekre bontással 232
8.4. Trigonometrikus integrálok 241
8.5. Trigonometrikus helyettesítések 247
8.6. Integráltáblázatok és matematikai programcsomagok 253
8.7. Numerikus integrálás 262
8.8. Improprius integrálok 277
Áttekintő kérdések 291
Gyakorló feladatok 291
Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok 295

9. Az integrálás további alkalmazásai **299**

9.1. Iránymező és szétválasztható változójú differenciálegyenletek 299
9.2. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek 306
9.3. Euler-módszer 313
9.4. Autonóm differenciálegyenletek grafikus megoldása 318
9.5. Elsőrendű differenciálegyenletek alkalmazásai 325
Áttekintő kérdések 332
Gyakorló feladatok 332
További összetettebb feladatok 333

Megoldások **335**

Integráltáblázatok **353**

Tárgymutató **359**

5. fejezet Integrálszámítás

ÁTTEKINTÉS: A klasszikus geometria egyik nagy vívmánya volt, hogy képleteket adott a háromszög, a gömb és a kúpszeletek területének, felszínének, illetve térfogatának meghatározására. Ebben a fejezetben egy olyan módszerrel foglalkozunk, amelynek segítségével ki lehet számolni ezeknek, sőt bonyolultabb alakzatoknak, testeknek a területét, illetve térfogatát is. A kifejtendő módszert *integrálásnak* nevezzük, mely a terület- és térfogatszámításnál jóval többre is alkalmas eszköz. Sokféleképpen alkalmazzuk a statisztikában, a közgazdaságtanban, a természettudományokban és a műszaki tudományokban. Lehetővé teszi egy sor mennyiség, például a valószínűség, az átlagos energiafogyasztás vagy a duzzasztómű zsiliprendszerére ható erők nagyságának kiszámítását.

Az integrálszámítás alapgondolata az, hogy sok mennyiséget hatékonyan ki lehet számolni oly módon, hogy kicsi részekre bontjuk, s azután e kicsi részek járulékát összegezzük. Az integrál elméletét a terület fogalmára alapozva mutatjuk be, mert itt ismerhető fel legvilágosabban az integrálfogalom természete.

Először véges összegekre vonatkozó példákkal fogunk megismerkedni. Így természetesen vetődik fel a kérdés, hogy mi történik, ha egyre több és több tagból álló részösszeggel számolunk. A határérték képzésekor az összeadandók száma a végtelenhez tart, és éppen ekkor kapjuk meg az integrál értékét. Bár az integrál- és a differenciálszámítás szoros kapcsolatban van egymással, az 5.4. szakaszig nem kerül elő a derivált és a primitív függvény szerepe. Kapcsolatuk természetére az analízis alaptétele, a Newton–Leibniz-tétel mutat rá, mely az analízis egyik legfontosabb gondolata.

5.1. Közelítés véges összegekkel

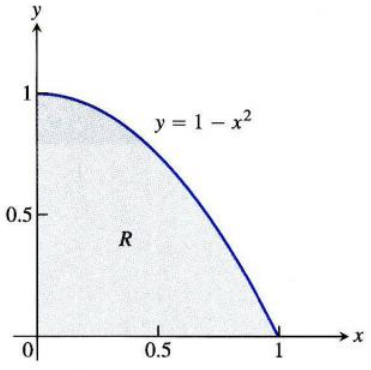
Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogyan lehet véges összegekkel közelíteni a területet, az átlagot és valamely test által bizonyos idő alatt megtett utat. Az integrál 5.3. szakaszbeli definíciója a véges összegekre alapul.

Terület

Egy görbe vonallal határolt tartomány területét téglalapok területének összegével közelíthetjük. Több téglalap alkalmazásával növelni lehet a közelítés pontosságát.

1. PÉLDA: **A terület közelítése**

Mekkora a területe annak az R tartománynak, amelyet az x-tengely, az $y = 1 - x^2$ görbe, valamint az $x = 0$ függőleges egyenes határol (lásd 5.1. ábra)? Egy építész szeretné tudni ennek a területnek a nagyságát azért, hogy meghatározhassa egy

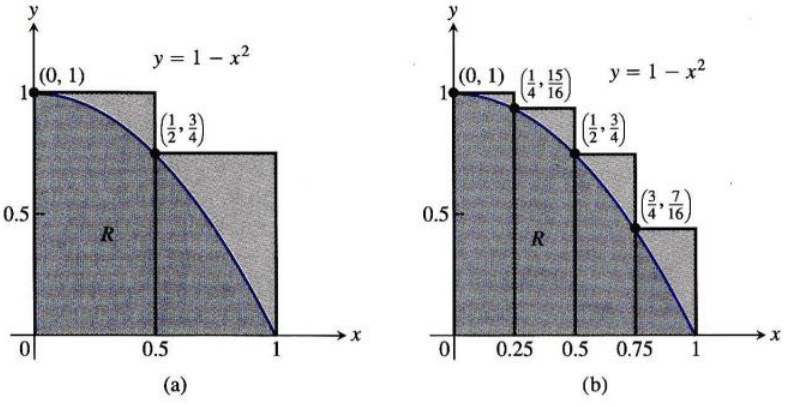


5.1. ÁBRA: Az R tartomány területét nem lehet egyszerű geometriai képlettel kiszámítani (1. példa).

R alakú ablaknak a súlyát. Sajnos nincs olyan egyszerű geometriai összefüggés, amellyel ki lehetne számolni olyan görbe vonalakkal határolt alakzatoknak a területét, mint az R tartomány.

Mindaddig, amíg nem ismerjük az R tartomány területe maghatározásának egzakt módszerét, egyszerű módszerrel közelíthetjük azt. Az 5.2a ábrán két olyan téglalapot látunk, amelyek együttesen az R tartomány egészét tartalmazzák. Mindkét téglalap vízszintes oldaléle 1/2, a bal oldali téglalap magassága 1, a jobb oldalié 3/4. A téglalapok magassága azonos az f függvénynek a $[0,1]$ intervallum megfelelő részintervallumán felvett maximális értékével, mely maximális értéket mindig a részintervallum bal oldali végpontjában veszi fel. A részintervallumok a közelítő téglalapok x-tengelyen fekvő oldalai. A két téglalap együttes területe becslést ad az R tartomány A területére:

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8} = 0{,}875.$$



5.2. ÁBRA: (a) R területére felső becslést kapunk, ha két olyan téglalapot tekintünk, amelyek tartalmazzák R-et. (b) Négy téglalap már jobb felső közelítést ad. Mindkét becslés a terület valóságos értékénél nagyobb értéket ad.

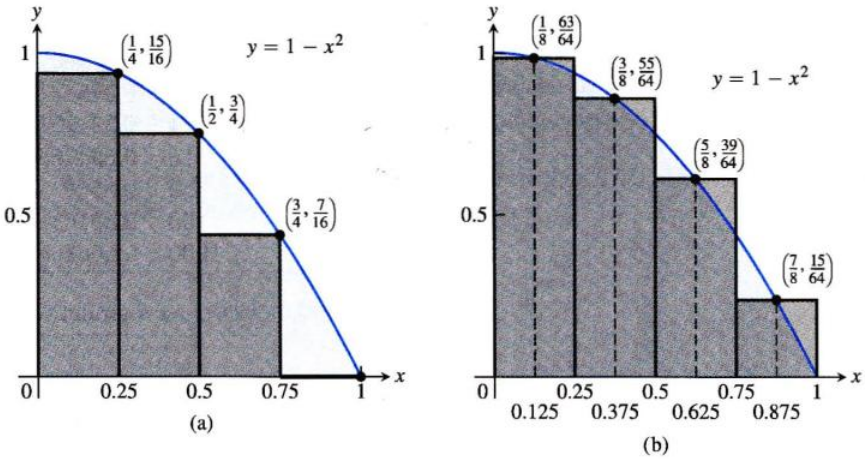
A becsült érték nagyobb az A pontos területénél, mivel a két téglalap tartalmazza R-et. Azt mondjuk, hogy 0,875 egy **felső közelítő összeg**, mivel úgy jutottunk hozzá, hogy a téglalapok vízszintes oldalai által alkotott intervallumokon mindig ahhoz az x ponthoz tartozó $f(x)$ értéket tettük meg az illető téglalap magasságának, amelyik a legnagyobb volt. Az 5.2b ábrán javítottunk a közelítésünkön azáltal, hogy négy olyan, keskenyebb téglalapot vettünk fel, amelyeknek a szélessége 1/4, és együttesen ugyancsak tartalmazzák az R tartományt. Ez a négy téglalap az

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{17}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{32} = 0{,}78125$$

értéket adja, ami még mindig nagyobb mint A, mert a négy téglalap tartalmazza R-et.

Tegyük fel, hogy az eddigiek helyett most a területet négy olyan téglalappal szeretnénk közelíteni, amelyek az R tartomány *belsejében* helyezkednek el (5.3a ábra). A téglalapok szélessége, akárcsak az előbb, most is 1/4, de alacsonyabbak és teljes egészében f grafikonja alatt helyezkednek el. A $[0,1]$ intervallumon az $f(x) = 1 - x^2$ függvény csökkenő, ezért a téglalapok magasságát a téglalapok alapját alkotó részintervallum jobb oldali végpontjában felvett függvényérték adja meg. A negyedik téglalapnak nulla a magassága, így a területhez nem ad járulékot. A közelítő téglalapok magassága az $f(x)$ függvény minimuma az adott részintervallumon, ezért a tényleges területre alsó közelítést adnak, területösszegüket pedig **alsó közelítő összegnek** nevezzük:

$$A \approx \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{32} = 0{,}53125.$$



5.3. ÁBRA: (a) Az R-be beírt téglalapok alulról közelítik a terület valódi értékét. (b) A felezőpont-szabály olyan téglalapokkal közelít, amelyek magassága az adott téglalap alapélének felezőpontjában felvett y=f(x) érték.

Ez a közelítés kisebb az A területnél, mivel az összes téglalap az R tartományon belül fekszik. A valódi értéke valahol az alsó és a felső közelítő összeg között helyezkedik el:

$$0{,}53125 < A < 0{,}78125.$$

Az alsó és felső közelítő összeggel nem csak a terület nagyságára kapunk hozzávetőleges értéket, hanem a becslés lehetséges hibájára is, mivel a terület valódi értéke valahol az alsó és a felső közelítés között van. Itt a hiba nem lehet nagyobb a $0{,}78125 - 0{,}53125 = 0{,}25$ különbségnél.

Egy újabb, másfajta közelítő értékhez jutunk akkor, ha olyan téglalapokat használunk, amelyek magassága az adott téglalap alapélének felezőpontjában felvett y=f(x) érték (5.3b ábra). A terület közelítésének ezt a módszerét **felezőpontszabálynak** nevezzük. A felezőpontszabállyal kapott érték az alsó és a felső közelítő összeg között helyezkedik el, az azonban nem világos, hogy alulról vagy felülről becsli a valódi értéket. Négy darab, egyenként 1/4 szélességű téglalap alkalmazásával a felezőpontszabály R közelítéseként az

$$A \approx \frac{63}{64}\cdot\frac{1}{4} + \frac{55}{64}\cdot\frac{1}{4} + \frac{39}{64}\cdot\frac{1}{4} + \frac{15}{64}\cdot\frac{1}{4} = \frac{172}{64}\cdot\frac{1}{4} = 0{,}671875$$

értéket adja.

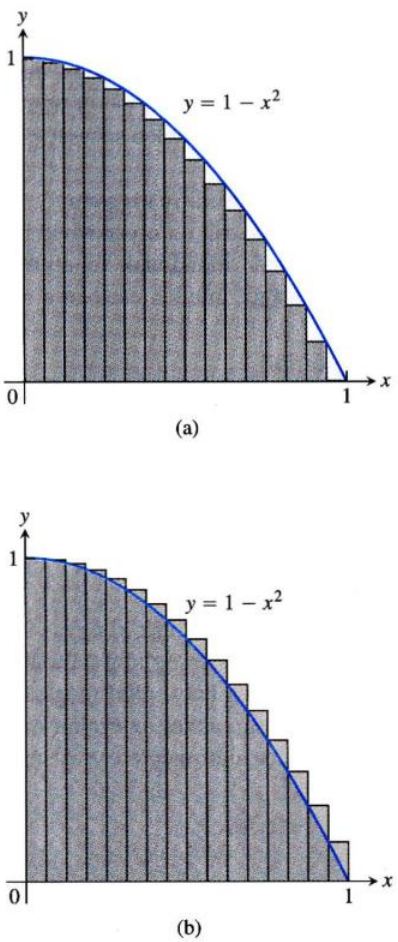
A fenti közelítésekben azt az $[a,b]$ részintervallumot, amelyen az f függvény értelmezve van, mindig n számú, egyenlő $\Delta x = (b-a)/n$ hosszúságú részintervallumra bontottuk fel, és vettük f értékét ezeknek a részintervallumoknak valamely pontjában: az első részintervallumban a c_1 pontban, a második részintervallumban a c_2 pontban és így tovább. Így a véges összeg minden esetben

$$f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + f(c_3)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x$$

alakban írható fel. Ha az eredeti intervallumot egyre több és több részintervallumra bontjuk, s így egyre több és keskenyebb téglalapot használunk a közelítő összegben, akkor látszik, hogy ezek a véges összegek egyre pontosabb közelítést adnak az R tartomány tényleges területére.

Az 5.4a ábra R alsó közelítését mutatja 16, azonos szélességű téglalappal. A téglalapok területösszege 0,634765625, ami már közel van a valódi értékhez, de még mindig kisebb annál, hiszen a téglalapok R-ben fekszenek.

Az 5.4b ábra R felső közelítését mutatja 16, azonos szélességű téglalappal. Ezeknek a téglalapoknak a területösszege 0,697265625, mely érték valamivel nagyobb a tényleges területnél, mivel a téglalapok összessége tartalmazza az R tartományt. A felezőpont-szabály 16 téglalapra a 0,6669921875 közelítést adja, de közvetlenül nem világos, hogy ez az érték kisebb vagy nagyobb-e a terület valódi értékénél.



5.4. ÁBRA: (a) 16 darab egyenlő, $\Delta x = 1/16$ szélességű téglalappal képzett alsó közelítő összeg. (b) 16 téglalapból képzett felső közelítő összeg.

A részintervallumok száma	Alsó közelítő összeg	Felezőpont-szabály	Felső közelítő összeg
2	0,375	0,6875	0,875
4	0,53125	0,671875	0,78125
16	0,634765625	0,6669921875	0,697265625
50	0,6566	0,6667	0,6766
100	0,66165	0,666675	0,67165
1000	0,6661665	0,66666675	0,6671665

5.1. TÁBLÁZAT: Az R terület véges közelítései.

Az 5.1. táblázat az R tartomány területének alsó, illetve felső közelítését mutatja, utolsó sorában már 1000 téglalapra. Az 5.2. szakaszban látni fogjuk, hogyan kaphatjuk meg határértékként az R-hez hasonló tartományok területét, amikor a közelítő téglalapok alapja nullához, számuk pedig végtelenhez tart. Az ott kifejtett módszerrel meg fogjuk tudni mutatni, hogy R területe pontosan 2/3.

Megtett út

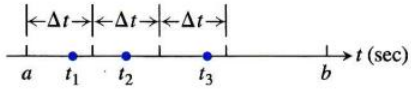
Tegyük fel, hogy ismerjük egy olyan autónak a $v(t)$ sebességfüggvényét, amely irányváltoztatás nélkül halad az országúton, és szeretnénk tudni, mekkora távolságot tesz meg a $t = a$ és a $t = b$ időpontok között. Ha már ismerjük $v(t)$-nek valamely $F(t)$ primitív függvényét, akkor az autó $s(t)$ helyzetfüggvényét az $s(t) = F(t) + C$ összefüggés adja. A megtett utat úgy határozhatjuk meg, hogy kiszámoljuk a helyzetfüggvény $s(a) - s(b)$ változását (lásd a 4.8. szakasz 93. feladatát). Ha viszont a sebességet olyan módon ismerjük csupán, hogy valaki rendszeresen leolvasta az autó sebességmérőjén látható értékeket, akkor nem áll rendelkezésünkre olyan összefüggés, amiből meghatározhatnánk a sebesség egy primitív függvényét. Mit tehetünk ebben a helyzetben?

Ha nem ismerjük a $v(t)$ sebességfüggvény valamely primitív függvényét, akkor a következő módon becsülhetjük a megtett utat. Osszuk fel olyan rövid időintervallumokra az $[a,b]$ intervallumot, amelyeken már állandónak vehetjük az autó sebességét! A részidőközökben megtett távolságot minden esetben a szokásos

$$\text{távolság} = \text{sebesség} \times \text{idő}$$

képlet alapján számoljuk ki, s az eredményt összegezzük a teljes $[a,b]$ intervallumra.

Tegyük fel, hogy a felosztást úgy végezzük, ahogy az az ábrán látható:



azaz az összes részintervallum hossza Δt-vel egyenlő. Válasszunk ki egy t_1 időpontot az első intervallumból. Ha Δt oly kicsi, hogy a sebesség alig változik a Δt időintervallumban, akkor az első időintervallumban a kocsi által megtett út közelítőleg $v(t_1)\Delta t$ lesz. Ha t_2 a második időintervallum, akkor az ezalatt megtett út hozzávetőleg $v(t_2)\Delta t$. Az összes időintervallum alatt megtett távolságok összege:

$$D \approx v(t_1)\Delta t + v(t_2)\Delta t + \cdots + v(t_n)\Delta t,$$

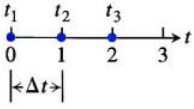
ahol n a részintervallumok számát jelenti.

2. PÉLDA: **Lövedék magasságának becslése**

A levegőbe függőlegesen fellőtt lövedék sebességfüggvénye: $f(t) = 160 - 9{,}8t$ m/s. Az előbbiekben leírt összegzési technikával becsüljük meg, milyen magasra jut a lövedék a kilövést követő első 3 másodpercben! Milyen közel van az összeg a pontos 435,9 m értékhez?

Megoldás: Az eredményt különböző intervallumfelosztásokra és különböző becslési pontokra is ki fogjuk számolni. Vegyük észre, hogy $f(t)$ csökkenő, így ha a részintervallumok bal oldali végpontját választjuk ki, felső becslést; a jobb oldali végpontokhoz tartozó függvényértékekkel pedig alsó közelítést kapunk.

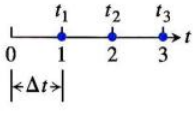
(a) *Három, egységnyi hosszúságú részintervallum a bal oldali végpontokhoz tartozó függvényértékekkel egy felső közelítést ad:*



A $t = 0, 1, 2$ értékekhez tartozó f értékekkel azt kapjuk, hogy

$$D \approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t =$$
$$= [160 - 9{,}8(0)](1) + [160 - 9{,}8(1)](1) + [160 - 9{,}8(2)](1) =$$
$$= 450{,}6.$$

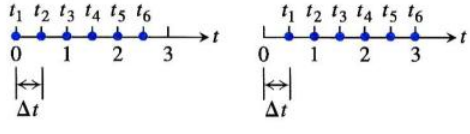
(b) *Három, egységnyi hosszúságú részintervallum a jobb oldali végpontokhoz tartozó függvényértékekkel egy alsó közelítést ad:*



A $t = 1, 2, 3$ értékekhez tartozó f értékekkel azt kapjuk, hogy

$$D \approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t =$$
$$= [160 - 9{,}8(1)](1) + [160 - 9{,}8(2)](1) + [160 - 9{,}8(3)](1) =$$
$$= 421{,}2.$$

(c) *Hat, 1/2 hosszúságú részintervallumra:*



A bal oldali végpontokkal számoló felső közelítő összeg: $D \approx 443{,}25$; a jobb oldali végpontokkal kalkuláló alsó közelítő összeg: $D \approx 428{,}55$.

A hat részintervallumot figyelembe vevő becslés valamivel pontosabb, mint a csak három intervallummal számoló. A részintervallumok hosszának csökkenésével az eredmény javul.

A részintervallumok száma	A részintervallumok hossza	Felső közelítő összeg	Alsó közelítő összeg
3	1	450,6	421,2
6	1/2	443,25	428,55
12	1/4	439,57	432,22
24	1/8	437,74	434,06
48	1/16	436,82	434,98
96	1/32	436,36	435,44
192	1/64	436,13	435,67

5.2. TÁBLÁZAT: A lövedék becsült távolsága.

Amint az az 5.2. táblázatból látható, a bal oldali végpontokkal számoló felső közelítő összeg felülről közelít a valódi 435,9-es értékhez, míg a jobb oldali végpontokat tekintetbe vevő alsó közelítő összeg alulról közelíti azt. A valóságos

érték az alsó és a felső közelítő összeg között helyezkedik el. A legjobb közelítés hibája 0,23, ami a valódi értéknek csak pici hányada.

$$\begin{aligned}\text{A hiba nagysága} &= |\text{ valódi érték } - \text{ számított érték }| = \\ &= |435{,}9 - 435{,}67| = 0{,}23. \\ \text{A hibaszázalék} &= \frac{0{,}23}{435{,}9} \approx 0{,}05\%\end{aligned}$$

A fentiekből levonhatjuk azt az ésszerű következtetést, hogy 3 másodperc elteltével a lövedék körülbelül 436 m-es magasságba emelkedik. □

Elmozdulás kontra megtett út

Ha egy test, amelynek elmozdulásfüggvénye $s(t)$, irányváltoztatás nélkül mozog valamely koordinátatengely mentén, akkor a $t = a$ és $t = b$ időpont között a test által megtett távolságot kiszámolhatjuk úgy, ahogy azt a 2. példában tettük, azaz sok kis részintervallumon megtett távolság összegzésével. Ha azonban a test mozgása közben egy vagy több alkalommal is irányt változtat, akkor $|v(t)|$-t, azaz a $v(t)$ sebességfüggvény abszolút értékét kell használnunk a megtett út meghatározásához. Magával a sebességgel, ahogyan a 2. példában tettük, csak a test $s(b) - s(a)$ **elmozdulását**, vagyis kiindulási és véghelyzetének különbségét tudnánk kiszámítani.

Valóban, osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot elengedően kicsi, egyenlő hosszúságú Δt részintervallumokra, olyan kicsinyekre, hogy a test sebessége ne változhasson sokat a t_{k-1} és t_k időpontok között. Ekkor $v(t_k)$ jól közelíti az adott intervallumon a test tényleges sebességét. Következésképp a test helykoordinátájának változása az adott időintervallumon közelítőleg

$$v(t_k)\Delta t$$

lesz. A változás pozitív, ha $v(t_k)$ pozitív, és negatív, ha $v(t_k)$ negatív.

Az adott részintervallumon megtett út mindkét esetben közelítőleg

$$|v(t_k)|\Delta t.$$

A **teljes megtett út** közelítőleg a

$$|v(t_1)|\Delta t + |v(t_2)|\Delta t + \cdots + |v(t_n)|\Delta t$$

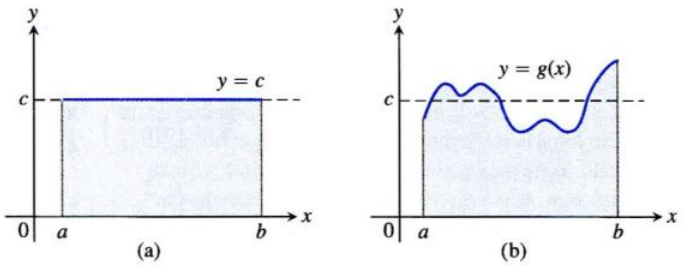
összeg lesz.

Nemnegatív függvény átlagértéke

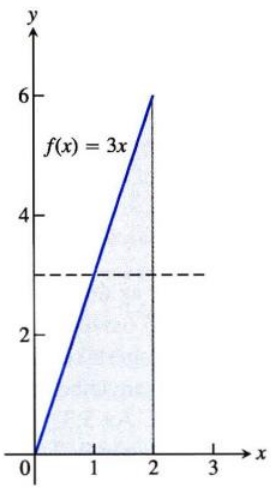
Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok átlagértékét úgy kapjuk meg, hogy az összegüket elosztjuk n-nel. De vajon mi az átlagértéke az $[a,b]$ intervallumon folytonos f függvénynek? Például egy város valamely pontján a hőmérséklet olyan folytonos függvény, amely a nap folyamán hol emelkedik, hol süllyed. Mi a tartalma annak a kijelentésnek, hogy a városban a napi átlaghőmérséklet 18 Celsius fok volt?

Könnyen megválaszolhatjuk ezt a kérdést, amennyiben a függvény állandó. Ha a függvényérték az $[a,b]$ intervallumon mindenütt a c konstanssal egyenlő, akkor az átlagérték is c. Ha c pozitív, akkor a függvény grafikonjával és az $[a,b]$ intervallummal egy c magasságú téglalapot alkothatunk. A függvény átlagértékét ezek után geometriailag úgy értelmezhetjük, mint e téglalap területének és az intervallum $b - a$ hosszának a hányadosát (5.5a ábra).

Mit tegyünk akkor, ha egy nemkonstans függvény átlagértékét szeretnénk meghatározni, amilyet például az 5.5b ábrán is láthatunk? A grafikont felfoghatjuk egy pillanatfelvételként, amely az $x = a$ és $x = b$ falak által határolt tartályban lötyögő víz pillanatnyi magasságát mutatja. Amíg a víz mozgásban van, magassága pontról pontra változik, de az átlagos vízszint mindvégig ugyanaz.



5.5. ÁBRA: (a) f-nek az $[a,b]$ intervallumbeli $f(x) = c$ átlagértékét megkapjuk, ha a területet elosztjuk $b-a$-val. (b) A $g(x)$ függvénynek az $[a,b]$ intervallumon felvett átlagértékét megkapjuk, ha a grafikonja alatti területet elosztjuk $b-a$-val.



5.6. ÁBRA: Az $f(x) = 3x$ függvény átlagértéke a $[0,2]$intervallumon (3. példa).

Hagyjuk, hogy a víz hullámzása lecsillapodjon, s amikor a vízfelszín vízszintes lesz, mérjük meg a folyadék magasságát. Az eredményül kapott c érték egyenlő a grafikon alatti területnek és $b-a$-nak a hányadosával. Ez az értelmezés arra ösztönöz bennünket, hogy valamely függvény $[a,b]$ intervallumra vonatkozó átlagértékét úgy *definiáljuk*, mint a függvénygrafikon alatti terület és $b-a$ hányadosát. Definíciónk megalapozásához pontos jelentést kell hozzárendelnünk a grafikon alatti terület fogalmához. Ezt az 5.3. szakaszban fogjuk megtenni, egyelőre azonban inkább lássunk két egyszerű példát!

3. PÉLDA: **Lineáris függvény átlagértéke**

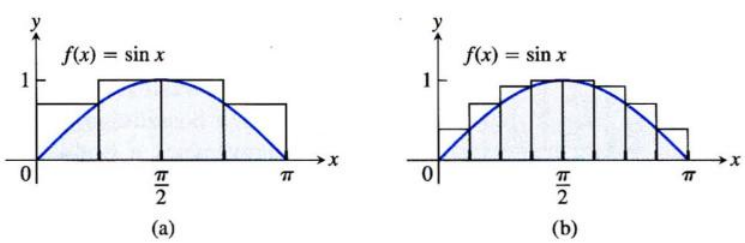
Mi az átlagértéke a $[0,2]$ intervallumon az $f(x) = 3x$ függvénynek?

Megoldás: Az átlagérték a függvénygrafikon alatti terület osztva az intervallum hosszával. Ebben az esetben nincs szükségünk a grafikon alatti tartomány területének véges közelítésére: a 6 egység magasságú és két egység oldalhosszúságú derékszögű háromszög területe 6 egység (5.6. ábra). Az intervallum hossza $b-a = 2-0 = 2$. A függvény átlagértéke $6/2 = 3$. □

4. PÉLDA: **A $\sin x$ függvény átlagértéke**

Számoljuk ki az $f(x) = \sin x$ függvény átlagértékét a $[0,\pi]$ intervallumon!

Megoldás: Rápillantva az 5.7. ábrára láthatjuk, hogy 0 és π között $\sin x$ értéke 0 és 1 között változik. Átlagértékének meghatározásához ki kell számolnunk a függvénygrafikon alatti területet, és azt el kell osztanunk az intervallum hosszával, $\pi - 0 = \pi$-vel.



5.7. ÁBRA: (a) $\sin x$ $[0,\pi]$ intervallumbeli átlagértékének kiszámításához az $f(x) = \sin x$ függvénygörbe alatti területet (a) négy téglalappal, (b) nyolc téglalappal közelítjük (4. példa).

A terület meghatározására most nincs egyszerű képlet, ezért véges összegekkel közelítjük. Egy felső közelítő összeghez úgy jutunk, hogy összeadjuk négy olyan, egyformán $\pi/4$ szélességű négyzetnek a területét, amelyek együttesen tartalmazzák az $y = \sin x$ függvény grafikonja alatt és az x-tengely fölött fekvő tartományt a $[0,\pi]$ intervallumban. A téglalapok magasságául az adott részintervallumon vett legnagyobb függvényértéket választjuk. A maximális értéket a részintervallumnak vagy a bal oldali, vagy a jobb oldali végpontjában, vagy a kettő között találjuk. Az e ponthoz rendelt függvényértéket vesszük a felülről

közelítő téglalapok magasságának. A téglalapok területének összege becslést ad a teljes területre (5.7a ábra):

$$A \approx \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{4}+\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{4}+\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{4}+\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{4}=$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1+1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{\pi}{4}\approx(3{,}32)\cdot\frac{\pi}{4}\approx 2{,}69.$$

$\sin x$ átlagértékének kiszámításához a közelítő területértéket el kell osztani π-vel, s így kapjuk a $2{,}69/\pi \approx 0{,}86$ becslést.

Ha nyolc darab $\pi/8$ oldalhosszúságú téglalapot használunk, amelyek felső vízszintes oldala mindig az $y=\sin x$ grafikonja fölött van (5.7b ábra), akkor a területre az alábbi becslést nyerjük:

$$A \approx \left(\sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{5\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{7\pi}{8}\right)\cdot\frac{\pi}{8}\approx$$
$$\approx(0{,}38+0{,}71+0{,}92+1+1+0{,}92+0{,}71+0{,}38)\cdot\frac{\pi}{8}=(6{,}02)\cdot\frac{\pi}{8}\approx$$
$$\approx 2{,}365.$$

Ez az eredmény az intervallum π hosszúságával elosztva az átlagértékre a jóval pontosabb 0,753 közelítést adja. Mivel a területet felső összeggel közelítettük, közelítésünk a $\sin x$ függvény $[0,\pi]$ intervallumbeli átlagértékénél nagyobb. Egyre több téglalapot használva a téglalapok egyre keskenyebbek lesznek, s egyre közelebb és közelebb jutunk a valódi átlagértékhez. Az 5.3. szakaszbeli módszer felhasználásával be fogjuk látni, hogy a valódi átlagérték $2/\pi \approx 0{,}64$.

Mint korábban, most is tekinthetjük az $y=\sin x$ grafikonja alatt fekvő téglalapokat is, és kiszámolhatunk egy alsó közelítő összeget, vagy dolgozhatunk a felezőpont-szabállyal. Az 5.3. szakaszban látni fogjuk, hogy nincs jelentősége annak, hogy a közelítés során alsó, felső vagy valamilyen más közelítő összeggel számolunk. Approximációnk minden esetben elég jól közelíti a valódi értéket, amennyiben a közelítő téglalapok elég keskenyek. □

Összefoglalás

Mind egy pozitív függvény grafikonja alatti területet, mind egy változatlan irányban mozgó test által megtett utat, mind pedig egy nemnegatív függvény adott intervallumon felvett átlagértékét approximálni lehet véges összegekkel. Az intervallumot először részintervallumokra bontjuk, s az f függvényt minden részintervallumon állandónak tekintjük. Azután a részintervallumok hosszát megszorozzuk f-nek az adott részintervallum valamely pontjában felvett értékével, s ezeket a szorzatokat összeadjuk. Ha az $[a,b]$ intervallumot n számú, $\Delta x = (b-a)/n$ hosszúságú részintervallumra osztottuk fel, és $f(c_k)$-val jelöljük az f függvénynek a k-adik intervallum c_k pontjában felvett értékét, akkor az eljárás a

$$f(c_1)\Delta x+f(c_2)\Delta x+f(c_3)\Delta x+\cdots+f(c_n)\Delta x$$

alakú véges összeghez vezet. c_k-t választhatjuk úgy, hogy f értéke a k-adik intervallumon minimális, maximális vagy valamilyen közbülső érték legyen. A valódi érték a felső, illetve alsó közelítő összeg által adott értékek között helyezkedik el. A tekintett közelítésen javítani lehet oly módon, hogy az adott intervallumot több, rövidebb részintervallumra osztjuk fel.

5.1. Feladatok

Terület

Az 1–4. feladatokban közelítsük a függvénygrafikon alatti területet

(a) két azonos szélességű, alulról közelítő téglalappal!

(b) négy azonos szélességű, alulról közelítő téglalappal!

(c) két azonos szélességű, felülről közelítő téglalappal!

(d) négy azonos szélességű, felülről közelítő téglalappal!

1. $f(x) = x^2$ az $x = 0$ és az $x = 1$ között.

2. $f(x) = x^3$ az $x = 0$ és az $x = 1$ között.

3. $f(x) = 1/x$ az $x = 1$ és az $x = 5$ között.

4. $f(x) = 4 - x^2$ az $x = -2$ és azt $x = 2$ között.

Közelítsük a következő függvénygörbék alatti területet először két, majd négy olyan téglalapot használva a közelítésben, amelyeknek a magassága az adott téglalap alapéle oldalfelező pontjában felvett függvényérték (*felezőpont-szabály*)!

5. $f(x) = x^2$ $x = 0$ és $x = 1$ között.

6. $f(x) = x^3$ $x = 0$ és $x = 1$ között.

7. $f(x) = 1/x$ $x = 1$ és $x = 5$ között.

8. $f(x) = 4 - x^2$ $x = -2$ és $x = 2$ között.

Út

9. Megtett út: A mellékelt táblázat egy játékmozdony sebességadatait mutatja másodpercenként, 10 másodperc hosszú időintervallumban. Számítsuk ki a mozdony által megtett utat 10, egységnyi hosszúságú intervallumra való felosztással és

(a) bal oldali végpontokban vett függvényértékekkel,

(b) jobb oldali végpontokban vett függvényértékekkel

számolva!

Idő (s)	Sebesség (cm/s)	Idő (s)	Sebesség (cm/s)
0	0	6	11
1	12	7	16
2	22	8	2
3	10	9	6
4	5	10	0
5	13		

10. Felfelé megtett út: A folyó torkolatában ülünk egy padon és figyeljük, amint a dagály a folyón felfelé visz egy palackot. Egy órán keresztül 5 percenként feljegyezzük az ár sebességét. Eredményeinket a mellékelt táblázat tartalmazza. Körülbelül milyen messzire juthat a palack felfelé a folyó mentén ez alatt az idő alatt? 12, egyenként 5 egység hosszú részintervallummal és

(a) bal oldali végpontokhoz tartozó értékekkel

(b) jobb oldali végpontokhoz tartozó értékekkel

adjunk becslést a megtett távolságra!

Idő (s)	Sebesség (m/s)	Idő (s)	Sebesség (m/s)
0	2	35	2,4
5	2,4	40	2,0
10	3,4	45	3,6
15	4,0	50	3,0
20	3,6	55	2,4
25	3,2	60	0
30	2,8		

11. Egy útszakasz hossza: Kanyargós úton autózunk baráti társasággal egy olyan autóban ülve, amelynek sebességmérője működik ugyan, azonban a megtett távolságot nem mutatja. Meg akarjuk tudni, milyen hosszú ez a kanyargós útszakasz, ezért 10 másodperces időközökben feljegyezzük a kocsi sebességét. A mérési eredményeket a mellékelt táblázat tartalmazza. Becsüljük meg az útszakasz hosszát

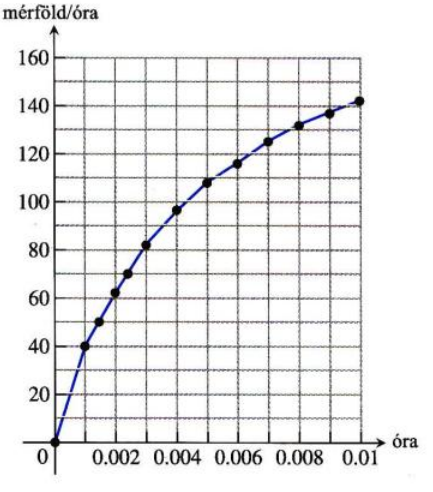
(a) bal oldali végpontokhoz tartozó értékekkel,

(b) jobb oldali végpontokhoz tartozó értékekkel!

Idő (s)	Sebesség (m/s)	Idő (s)	Sebesség (m/s)
0	0	70	5
10	15	80	7
20	5	90	11
30	11	100	15
40	10	110	10
50	15	120	11
60	11		

12. A megtett út meghatározása a sebességadatokból: A mellékelt táblázat egy márkás sportkocsi sebességadatait tartalmazza, amely 36 másodperc (az óra századrésze) alatt nulláról 142 mérföld/óra sebességre gyorsul fel.

Idő (h)	Sebesség (mi/h)	Idő (h)	Sebesség (mi/h)
0,0	0	0,006	116
0,001	40	0,007	125
0,002	62	0,008	132
0,003	82	0,009	137
0,004	96	0,010	142
0,005	108		



(a) Közelítő téglalapokkal becsüljük meg, mekkora utat tett meg az autó 36 másodperc alatt, mialatt elérte a 142 mi/h sebességet!

(b) Nagyjából hány másodperc alatt ért a kocsi félúthoz? Körülbelül mennyivel ment akkor?

Sebesség és út

13. Szabadesés és légellenállás: Egy helikopterből függőleges irányban kiejtünk egy tárgyat. A tárgy egyre gyorsabban zuhan, gyorsulása (sebességváltozásának mértéke) azonban egész idő alatt csökkenni fog a légellenállás miatt. A gyorsulást az elejtést követően 5 másodpercen keresztül mérjük láb/s^2 egységekben:

t	0	1	2	3	4	5
a	10,00	6,06	3,67	2,27	1,35	0,82

(a) Adjunk felső becslést a sebességre a $t = 5$ időpontban!

(b) Adjunk alsó becslést a sebességre a $t = 5$ időpontban!

14. A lövedék által megtett út: A tengerszint magasságából 130 m/s sebességgel függőlegesen fellövünk egy tárgyat.

(a) Tekintsük úgy, hogy a tárgyra csupán csak a nehézségi erő hat, és adjunk felső becslést sebességére a kilövéstől számított 5 másodperc elteltével! A gravitációs gyorsulás értékét vegyük $g = 10$ m/s^2-nek.

(b) Adjunk alsó becslést arra, hogy milyen magasságban van a tárgy 5 másodperc elteltével!

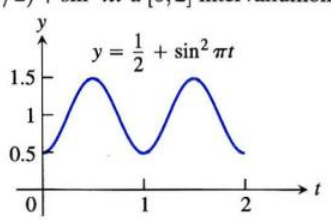
Függvény átlagértéke

A 15–18. feladatokban számítsuk ki az f függvény átlagértékét a megadott intervallumon úgy, hogy az intervallumot négy, egyenlő hosszú részintervallumra osztjuk fel, és vesszük f értékét ezeknek az intervallumoknak a felezőpontjában, majd ezekkel az adatokkal véges összeget képezünk!

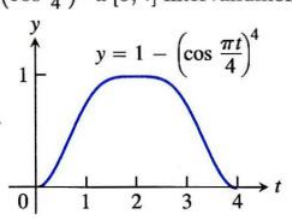
15. $f(x) = x^3$ a $[0,2]$ intervallumon.

16. $f(x) = 1/x$ az $[1,9]$ intervallumon.

17. $f(t) = (1/2) + \sin^2 \pi t$ a $[0,2]$ intervallumon.



18. $f(t) = 1 - \left(\cos \frac{\pi t}{4}\right)^4$ a $[0,4]$ intervallumon.



Szennyezésmérés

19. Vízszennyezés: Egy sérült tankerből olaj szivárog a tengerbe. A tanker sérülése idővel egyre veszélyesebbé válik, aminek nyilvánvaló jele, hogy az elszivárgó olaj mennyisége, ahogy az a mellékelt táblázatból látható, óráról órára nő.

Idő (h)	0	1	2	3	4
Elszivárgó mennyiség (liter/h)	200	280	388	544	760

Idő (h)	5	6	7	8
Elszivárgó mennyiség (liter/h)	1060	1476	2064	2880

(a) Adjunk alsó és felső becslést az 5 óra alatt kiömlő teljes olajmennyiségre!

(b) Ismételjük meg a feladat a) része által megkívánt számítást a 8 óra alatt kiömlő olajmennyiségre!

(c) A tankerből a 8. óra elteltével óránként folyamatosan 2900 liter olaj ömlik ki. Ha eredetileg 100 000 liter olaj volt benne, legkevesebb hány óra alatt ürül ki a tanker? Legfeljebb hány óra alatt?

20. Légszennyezés: Egy erőműben fűtőolajból nyerik az elektromos energiát. Az égési folyamat során felszabaduló szennyezőanyagokat a kéményekbe beépített légtisztítókkal szűrik ki. A tisztítóberendezés hatékonysága az idő előrehaladtával romlik, majd végül, amikor a szennyezőanyagkibocsátás eléri a kormányzat által megengedett értéket, ki kell cserélni. A hónap végén elvégzett mérések a szennyezőanyag-kibocsátásra a következő értékeket adták:

Hónap	Jan.	Febr.	Márc.	Ápr.	Máj.	Jún.
Kibocsátott szennyezőanyag (tonna/nap)	0,20	0,25	0,27	0,34	0,45	0,52

Hónap	Júl.	Aug.	Szept.	Okt.	Nov.	Dec.
Kibocsátott szennyezőanyag (tonna/nap)	0,63	0,70	0,81	0,85	0,89	0,95

(a) 30 napos hónapokkal számolva adjunk felső becslést a január elejétől június végéig összesen kibocsátott szennyezőanyag-mennyiség tonnában mért értékére feltételezve, hogy egy új tisztítóberendezésnél csupán 0,05 tonna/nap szennyezőanyag-kibocsátás megengedett. Mi lenne egy alsó becslés?

(b) A legjobb esetet tekintve hozzávetőleg mikorra kerül 125 tonnányi szennyezőanyag a légkörbe?

Kör területe

21. Írjunk n oldalú szabályos sokszöget az egységsugarú körbe és számoljuk ki a sokszög területét a következő n értékekre:

(a) 4 (négyzet),

(b) 8 (nyolcszög),

(c) 16!

(d) Hasonlítsuk össze a feladat (a), (b) és (c) részében kapott területértékeket a kör területével!

22. *(A 21. feladat folytatása)*

(a) Írjunk n oldalú szabályos sokszöget az egységsugarú körbe, és számoljuk ki a területét azon egybevágó háromszögnek egyikének, amelyeket úgy kapunk, hogy meghúzzuk a körnek a sokszög csúcsaihoz tartozó sugarát!

(b) Számítsuk ki a beírt sokszög területének határértékét $n \to \infty$ esetén!

(c) Ismételjük meg a feladat (a) és (b) részében elvégzett számításokat r sugarú körre!

Számítógépes vizsgálatok

A 23–26. feladatokban a MAPLE vagy a MATHEMATICA csomag segítségével végezzük el a következő lépéseket:

(a) Rajzoljuk fel a függvényeket a megadott intervallumon!

(b) Osszuk fel az intervallumot $n = 100$, 200 és 1000 azonos hosszúságú részintervallumra, és számítsuk ki a függvényértékeket ezeknek az intervallumoknak a felezőpontjában!

(c) A feladat (b) részében kapott értékekkel számítsuk ki a függvény átlagértékét!

(d) Oldjuk meg az $f(x) =$ (átlagérték) egyenletet x-re a feladat (c) részében $n = 1000$ osztás mellett kapott átlagértékre!

23. $f(x) = \sin x$ a $[0, \pi]$ intervallumon.

24. $f(x) = \sin^2 x$ a $[0, \pi]$ intervallumon.

25. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ a $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ intervallumon.

26. $f(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}$ a $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ intervallumon.

5.2. A véges összegek határértéke és a szumma jel

Az 5.1. szakaszban véges összegek kiszámításakor gyakran nagyon sok tagot kellett összegeznünk (az 5.1. táblázatban például 1000-t). Ebben a szakaszban bevezetünk egy jelölést a soktagú összegekre. Miután e jelölést bevezettük, és megállapítottuk néhány tulajdonságát, meg fogjuk vizsgálni, mi történik a véges összegű approximációval, amikor a tagok száma végtelenhez tart.

A véges összegek és a szumma jel

A **szumma jel** segítségével egyszerűen felírhatunk soktagú összegeket:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

A görög Σ jel (nagy görög szigma, mely a magyar Sz megfelelője) itt „összegzést" jelent. A k **szummációs index** megmondja, hogy hol kezdődik (a Σ jel alatt álló szám) és hol végződik (a Σ jel felett álló szám) az összegzés. Az index jelölésére bármilyen betűt használni lehet, de általában az i, j és k betűket szokás.

$$\overset{n \text{ a } k \text{ index legnagyobb értéke}}{\overset{\nearrow}{n}} \qquad \sum_{k=1} a_k \quad \leftarrow a_k \text{ az összeg } k\text{-adik tagja}$$

a szumma jel (görög szigma)

$$\underset{\text{a } k \text{ index kezdőértéke 1.}}{\underset{\searrow}{k=1}}$$

Így írhatjuk azt, hogy

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 = \sum_{k=1}^{11} k^2,$$

és azt is, hogy

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(100) = \sum_{i=1}^{100} f(i).$$

A fenti egyenletek jobb oldalán álló jelölés jóval rövidebb, mint a bal oldalon az összeg hagyományos felírása.

1. PÉLDA: **A szumma jel használata**

Az összeg szumma jellel	**A részletesen kiírt összeg egy tag k egy értékének felel meg**	**Az összeg értéke**
$\sum_{k=1}^{5} k$	$1+2+3+4+5$	15
$\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k$	$(-1)(1)+(-1)^2(2)+(-1)^3(3)$	$-1+2-3=-2$
$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1}$	$\frac{1}{1+1}+\frac{2}{2+1}$	$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$
$\sum_{k=4}^{5} \frac{k^2}{k-1}$	$\frac{4^2}{4-1}+\frac{5^2}{5-1}$	$\frac{16}{3}+\frac{25}{4}=\frac{139}{12}$

Az összegzés kezdőértéke nem feltétlenül egy; bármely egész szám lehet.

2. PÉLDA: **Különféle kezdőindexek használata**

Fejezzük ki a szumma jelölésmódban az $1+3+5+7+9$ összeget!

Megoldás: Az összeg tagjait generáló képletet meg kell változtatnunk, ha az összegzés alsó határát megváltoztatjuk, de az összeg megfelelő tagjait többféleképpen megkaphatjuk. Gyakran az a legegyszerűbb, ha az összegzést $k=0$-val vagy $k=1$-gyel kezdjük.

$$k=0\text{-}val\ kezdve: \quad 1+3+5+7+9=\sum_{k=0}^{4}(2k+1),$$

$$k=1\text{-}gyel\ kezdve: \quad 1+3+5+7+9=\sum_{k=1}^{5}(2k-1),$$

$$k=2\text{-}vel\ kezdve: \quad 1+3+5+7+9=\sum_{k=2}^{6}(2k-3),$$

$$k=-3\text{-}mal\ kezdve: \quad 1+3+5+7+9=\sum_{k=-3}^{1}(2k+7). \qquad \square$$

Ha

$$\sum_{k=1}^{3}(k+k^2)$$

alakú összeggel van dolgunk, akkor az összeg tagjait átcsoportosíthatjuk:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}(k+k^2) &= (1+1^2)+(2+2^2)+(3+3^2)= \\ &= (1+2+3)+(1^2+2^2+3^2)= \qquad \text{átcsoportosítás} \\ &= \sum_{k=1}^{3} k+\sum_{k=1}^{3} k^2.\end{aligned}$$

A fenti példa a véges összegekre vonatkozó általános

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k+\sum_{k=1}^{n} b_k$$

szabályt illusztrálta. Alább négy hasonló szabályt adunk meg. Bizonyításukat teljes indukcióval lehet elvégezni (lásd 1. Függelék).

Véges összegekre vonatkozó algebrai összefüggések:

1. *Összeadási szabály:* $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$.

2. *Kivonási szabály:* $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$.

3. *Konstanssal való szorzás szabálya:* $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$ (c valamilyen szám).

4. *Állandó összegzésének szabálya:* $\sum_{k=1}^{n}c=n\cdot c$ (c valamilyen állandó).

3. PÉLDA: **Véges összegekre vonatkozó algebrai összefüggések alkalmazása**

(a) $\sum_{k=1}^{n}(3k-k^2)=3\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2$ — a kivonás és a konstanssal való szorzás szabálya

(b) $\sum_{k=1}^{n}(-a_k)=\sum_{k=1}^{n}(-1)\cdot a_k=-1\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k=-\sum_{k=1}^{n}a_k$ — a konstanssal való szorzás szabálya

(c) $\sum_{k=1}^{3}(k+4)=\sum_{k=1}^{3}k+\sum_{k=1}^{3}4$ — összeadási szabály

$=(1+2+3)+(3\cdot 4)$ — állandó összegzésének szabálya

$=6+12=18$

(d) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=n\cdot\frac{1}{n}=1$ — állandó összegzésének szabálya (az állandó $\frac{1}{n}$)

Az évek során a matematikusok számos véges összeg kiszámítására találtak képleteket. Ezek közül a legismertebb az első n természetes szám összegére vonatkozó összefüggés (Gauss már 8 éves korában felírta), valamint az első n természetes szám négyzete, illetve köbe.

4. PÉLDA: **Az első n természetes szám összege**

Mutassuk meg, hogy az első n természetes szám összege:

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Megoldás: A képlet szerint az első négy természetes szám összege:

$$\frac{(4)(5)}{2}=10.$$

A számok összeadásával ezt könnyedén ellenőrizhetjük:

$$1+2+3+4=10.$$

Ahhoz, hogy az összefüggést általánosan is igazolni tudjuk, írjuk fel egymás alá kétszer az összeg tagjait először emelkedő, aztán csökkenő sorrendben:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & n, \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots & + & 1. \end{array}$$

Adjuk össze az első oszlop két tagját: $1+n=n+1$. Hasonlóan, a második oszlop két tagját összeadva $2+(n-1)=n+1$. Bármely oszlop két elemének összege $n+1$ lesz. Ha az összes oszlop elemeit összeadjuk, akkor n-szer kapunk eredményül $n+1$-et, azaz összesen $n(n+1)$-et. Mivel ez a keresett mennyiség kétszerese, ezért az első n természetes szám összege $(n)(n+1)/2$ lesz. □

Az első n természetes szám négyzetének, illetve köbének összegére vonatkozó képleteket teljes indukcióval lehet bizonyítani (lásd 1. Függelék). Itt csak felírjuk a képleteket:

Az első n négyzetszám összege: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Az első n köbszám összege: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Véges összegek határértéke

Az 5.1. szakaszban tárgyalt véges összegű közelítés pontossága javul, ha az osztássűrűséget növeljük, azaz a részintervallumok hosszát csökkentjük. A következő példában megmutatjuk, hogyan lehet kiszámítani a közelítés határértékét, amikor a részintervallumok hossza nullához, száma pedig végtelenhez tart.

5. PÉLDA: A terület véges összeggel való közelítésének határértéke

Határozzuk meg alsó közelítéssel annak az R tartománynak a területét, amelyet felülről az az $y = 1 - x^2$ görbe, alulról pedig az x tengely $[0,1]$ intervalluma határol! Használjunk azonos szélességű téglalapokat, amelyeknek a száma végtelenhez, alapélük hossza pedig nullához tart (lásd az 5.4a ábrát)!

Megoldás: Kiszámoljuk az alsó közelítő összeget n számú, egyformán $\Delta x = (1-0)/n$ szélességű téglalapra és azután megvizsgáljuk mi történik, amikor $n \to \infty$. Kezdjük azzal, hogy a $[0,1]$ intervallumot felosztjuk n számú, azonos hosszúságú

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, n\right],$$

részintervallumra. Mindegyik részintervallum hossza $1/n$ lesz. Az $1 - x^2$ függvény csökkenő a $[0,1]$ intervallumon, egy-egy részintervallumon a legkisebb értékét a részintervallum jobb oldali végpontjában veszi fel. Ezért az alsó közelítő összeget úgy írhatjuk fel, hogy a $[(k-1)/n, k/n]$ részintervallumhoz az alulról közelítő téglalap magasságaként az $f(k/n) = 1 - (k/n)^2$ értéket rendeljük hozzá, s így a következő összeget kapjuk:

$$f\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right).$$

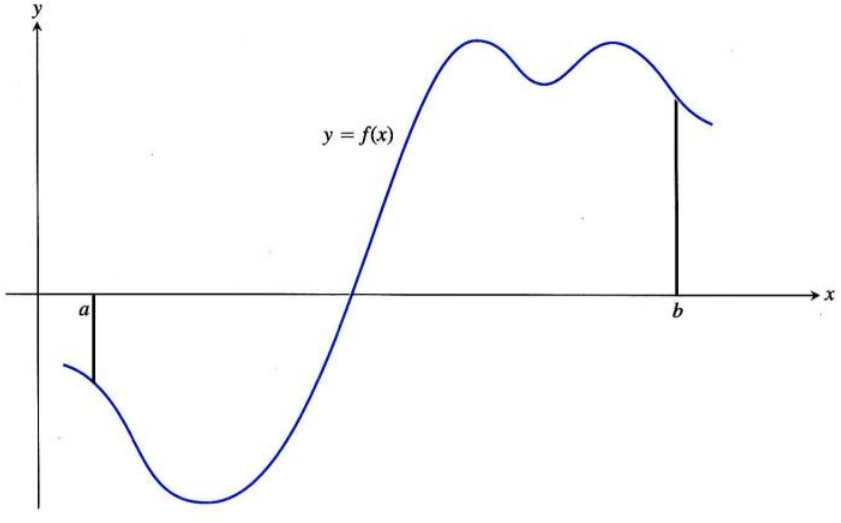
Ezt az összeget felírjuk a szumma jelölésmóddal, majd egyszerűsítünk:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3}\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = && \text{kivonási szabály} \\
&= n \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = && \text{állandó összegzésének szabálya és a konstanssal való szorzás szabálya} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{n^3}\right) \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} = && \text{az első } n \text{ négyzetszám összege} \\
&= 1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}.
\end{aligned}$$

Az alsó közelítő összegre ezzel egy olyan kifejezést kaptunk, amely tetszőleges n-re igaz. E kifejezés határértékét véve $n \to \infty$ esetén azt látjuk, hogy az alsó közelítő összeg konvergál, amint a részintervallumok számát növeljük, hosszukkal pedig nullához tartunk:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\right)=1-\frac{2}{6}=\frac{2}{3}.$$

Az alsó közelítő összeg 2/3-hoz tart. Hasonló számításokkal be lehet látni, hogy a felső közelítő összeg is 2/3-hoz tart (35. feladat). Az 5.1. szakasz végén adott összefoglalásunk értelmében tehát az összes közelítő összeg ugyanahhoz az értékhez, 2/3-hoz konvergál. Ez azért van így, mert meg lehet mutatni, hogy bármely véges közelítő összeg az alsó közelítő összeg és a felső közelítő összeg közé van zárva. Ezért az R tartomány területét e határértékként *definiálhatjuk*. □



5.8. ÁBRA: Egy, az $[a,b]$ zárt intervallumon folytonos $y=f(x)$ függvény.

Riemann-összeg vagy integrálközelítő összeg

A véges közelítések határértékének pontos elméletét Bernhard Riemann német matematikus alkotta meg. Most bevezetjük a *Riemann-összeg, vagy más szóval integrálközelítő összeg fogalmát*, amely a határozott integrál következő szakaszban tárgyalandó elméletének az alapja.

Tekintsünk az $[a,b]$ zárt intervallumon egy tetszőleges f függvényt! Mint az 5.8. ábrán látható függvény esetében is, f mind pozitív, mind negatív értékeket felvehet. Osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot nem feltétlenül egyenlő hosszúságú részintervallumokra, és képezzünk összegeket ugyanolyan módon, ahogy azt az 5.2. szakasz véges közelítéseinél tettük! Válasszunk ki először is a és b között $n-1$ olyan pontot, legyenek ezek $\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1}\}$, amelyekre teljesül, hogy

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<b.$$

A következetesség érdekében jelöljük a-t x_0-lal, b-t x_n-nel, így

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

A

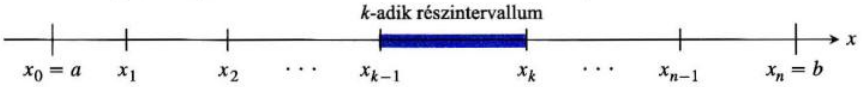
$$P=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n\}$$

halmazt $[a,b]$ **felosztásának** nevezzük.

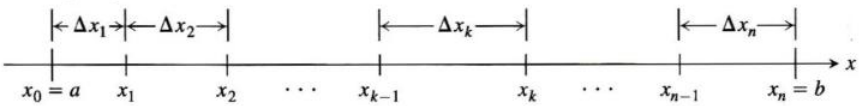
A P felosztás $[a,b]$-t n zárt részintervallumra osztja fel, melyek a következők:

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n].$$

P első részintervalluma az $[x_0,x_1]$, a második az $[x_1,x_2]$, a **k-adik részintervalluma** az $[x_{k-1},x_k]$ intervallum. k az 1 és n közé eső egész szám.



Az első, $[x_0,x_1]$ részintervallum hosszát jelölje Δx_1, a második, $[x_1,x_2]$ részintervallum hosszát Δx_2, a k-adik részintervallumét $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Ha az összes részintervallum ugyanolyan hosszú, akkor közös hosszuk $(b-a)/n$, s ezt Δx-szel jelöljük.

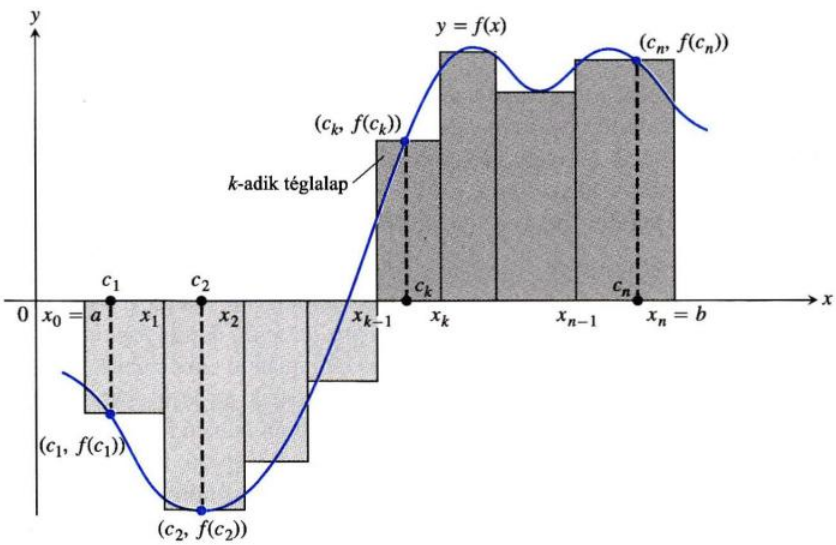


Minden részintervallumnak kiválasztjuk egy pontját. A k-adik, $[x_{k-1},x_k]$ részintervallumból kiválasztott pontot c_k-val jelöljük. Ezután mindegyik részintervallumra egy téglalapot rajzolunk, amely az x-tengelytől a görbe $(c_k,f(c_k))$ pontjáig nyúlik. A téglalapok az x-tengely fölött és alatt is elhelyezkedhetnek attól függően, hogy $f(c_k)$ pozitív vagy negatív, vagy ha $f(c_k)=0$, akkor a téglalap degenerált, mindkét vízszintes éle az x tengelyen fekszik (5.9. ábra).

Minden részintervallummal képezzük az $f(c_k)\cdot\Delta x_k$ szorzatot. Ez a szorzat $f(c_k)$ előjelétől függően pozitív, negatív vagy nulla. Ha $f(c_k)>0$, akkor $f(c_k)\cdot\Delta x_k$ a Δx_k szélességű és $f(c_k)$ magasságú téglalap területe. Ha $f(c_k)<0$, akkor az $f(c_k)\cdot\Delta x_k$ szorzat negatív szám, a Δx_k szélességű és az x-tengelytől a negatív $f(c_k)$ pontig nyúló téglalap területének az ellentettje.

Végül ezeket a szorzatokat összeadva azt kapjuk, hogy

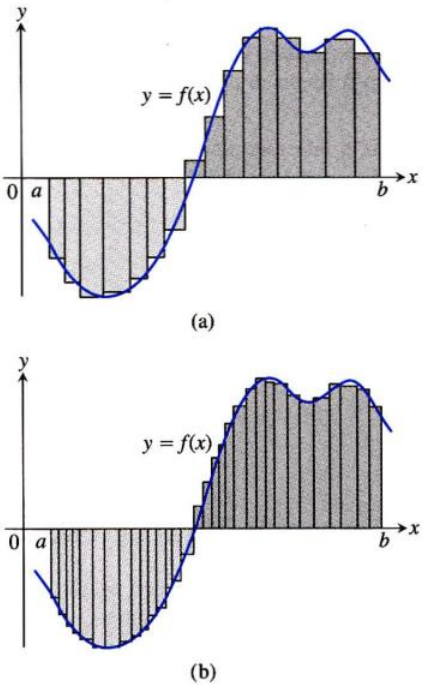
$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k.$$



5.9. ÁBRA: Az $y=f(x)$ függvény grafikonja, és az x-tengely közötti tartományt közelítő téglalapok.

S_P-t **az f függvény $[a,b]$ intervallumra vonatkozó Riemann-összegének,** vagy más szóval **integrálközelítő összegének**, vagy **téglányösszegnek** nevezzük. Sok ilyen összeg van attól függően, hogyan választjuk ki a P felosztást és a részintervallumok c_k pontjait.

Az 5. példában, ahol a részintervallumok mind $\Delta x = 1/n$ hosszúságúak, úgy rövidíthetjük a részintervallumokat, hogy növeljük a számukat. Ha egy felosztás váltakozó hosszúságú részintervallumokból áll, akkor mindig a leghosszabb részintervallum hosszát kell figyelembe venni. Egy P felosztás **normáját** – jele $\|P\|$ – úgy definiáljuk, mint leghosszabb részintervallumának hosszát. Ha $\|P\|$

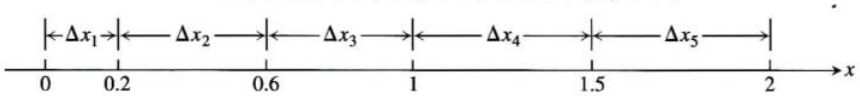


5.10. ÁBRA: Az 5.9. ábrán látható görbe az $[a,b]$ intervallum egy finomabb felosztásával. A finomabb felosztással előálló keskenyebb téglalapok az f függvény grafikonja és az x-tengely által határolt tartományt pontosabban közelítik.

kicsi szám, akkor a P felosztás összes részintervalluma kicsi. Nézzünk erre egy példát!

6. PÉLDA: Egy zárt intervallum felosztása

A $P = \{0;0{,}2;0{,}6;1;1{,}5;2\}$ halmaz a $[0;2]$ intervallum egy felosztása. P-nek öt részintervalluma van: $[0;0{,}2]$, $[0{,}2;0{,}6]$, $[0{,}6;1]$, $[1;1{,}5]$, $[1{,}5;2]$:



A részintervallumok hossza: $\Delta x_1 = 0{,}2$, $\Delta x_2 = 0{,}4$, $\Delta x_3 = 0{,}4$, $\Delta x_4 = 0{,}5$ és $\Delta x_5 = 0{,}5$. A leghosszabb részintervallum hossza 0,5, így a felosztás normája $\|P\| = 0{,}5$. Ebben a példában két olyan intervallum van, amelynek 0,5 a hossza.

Ha f folytonos, minden Riemann-összeg, ami az $[a,b]$ zárt intervallum valamely felosztásához tartozik, téglalapokat definiál, amelyek a folytonos függvény grafikonja és az x-tengely közötti tartomány területét közelítik. Az olyan felosztások, amelyek normája nullához közelít, olyan téglalap-együtteseket adnak, amelyek – mint az az 5.10. ábrán is látható – egyre pontosabban megközelítik ezt a tartományt. A következő szakaszban látni fogjuk, hogy amennyiben f folytonos az $[a,b]$ zárt intervallumon, úgy teljesen mindegy, hogy a Riemann-összeg megkonstruálásához hogyan választjuk ki a P felosztást és a c_k pontokat az egyes részintervallumokban, a Riemann-összeg ugyanazon határértékhez tart, ha a részintervallumok hossza – a felosztás normája – nullához tart.

5.2. Feladatok

A szumma jelölés

Írjuk fel az 1–6. feladatokban szereplő összegeket a szumma jel használata nélkül! Azután számítsuk ki értéküket!

1. $\sum_{k=1}^{2} \frac{6k}{k+1}$ **2.** $\sum_{k=1}^{2} \frac{k-1}{k}$

3. $\sum_{k=1}^{4} \cos k\pi$ **4.** $\sum_{k=1}^{5} \sin k\pi$

5. $\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \sin \frac{\pi}{k}$ **6.** $\sum_{k=1}^{4} (-1)^k \cos k\pi$

7. Az alábbiak közül melyik felírás adja az $1+2+4+8+$ $+16+32$ összeget?

(a) $\sum_{k=1}^{6} 2^{k-1}$ **(b)** $\sum_{k=0}^{5} 2^k$

(c) $\sum_{k=-1}^{4} 2^{k+1}$

8. Az alábbiak közül melyik felírás adja az $1-2+4-8+$ $+16-32$ összeget?

(a) $\sum_{k=1}^{6} (-2)^{k-1}$ **(b)** $\sum_{k=0}^{5} (-1)^k 2^k$

(c) $\sum_{k=-2}^{3} (-1)^{k+1} 2^{k+2}$

9. Melyik kifejezés nem ekvivalens a másik kettővel?

(a) $\sum_{k=2}^{4} \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}$ **(b)** $\sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{k+1}$

(c) $\sum_{k=2}^{4} \frac{(-1)^k}{k+2}$

10. Melyik kifejezés nem ekvivalens a másik kettővel?

(a) $\sum_{k=1}^{4} (k-1)^2$ **(b)** $\sum_{k=-1}^{3} (k+1)^2$

(c) $\sum_{k=-3}^{-1} k^2$

Írjuk fel a 11–16. feladatokban szereplő összegeket szumma jelölésmóddal!

11. $1+2+3+4+5+6$ **12.** $1+4+9+16$

13. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ **14.** $2+4+6+8+10$

15. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ **16.** $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-\frac{5}{5}$

Véges összegek

17. Tegyük fel, hogy $\sum_{k=1}^{n} a_k = -5$ és $\sum_{k=1}^{n} b_k = 6$. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét!

(a) $\sum_{k=1}^{n} 3a_k$ **(b)** $\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{6}$

(c) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$ (d) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)$

(e) $\sum_{k=1}^{n}(b_k-2a_k)$

18. Tegyük fel, hogy $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ és $\sum_{k=1}^{n} b_k = 1$. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét!

(a) $\sum_{k=1}^{n} 8a_k$ (b) $\sum_{k=1}^{n} 250b_k$

(c) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+1)$ (d) $\sum_{k=1}^{n}(b_k-1)$

Számítsuk ki a 19–28. feladatokban szereplő összegek értékét!

19. (a) $\sum_{k=1}^{10} k$ (b) $\sum_{k=1}^{10} k^2$ (c) $\sum_{k=1}^{10} k^3$

20. (a) $\sum_{k=1}^{13} k$ (b) $\sum_{k=1}^{13} k^2$ (c) $\sum_{k=1}^{13} k^3$

21. $\sum_{k=1}^{7}(-2k)$ **22.** $\sum_{k=1}^{5}\frac{\pi k}{15}$

23. $\sum_{k=1}^{6}(3-k^2)$ **24.** $\sum_{k=1}^{6}(k^2-5)$

25. $\sum_{k=1}^{5} k(3k+5)$ **26.** $\sum_{k=1}^{7} k(2k+1)$

27. $\sum_{k=1}^{5}\frac{k^3}{225}+\left(\sum_{k=1}^{5} k\right)^3$ **28.** $\left(\sum_{k=1}^{7} k\right)^2-\sum_{k=1}^{7}\frac{k^3}{4}$

A Riemann-összeg téglalapjai

A 29–32. feladatokban rajzoljuk fel az $f(x)$ függvény grafikonját az adott intervallumban! Osszuk fel az intervallumot négy, azonos hosszúságú részintervallumra! Azután rajzoljuk be az ábrába a $\sum_{k=1}^{4} f(c_k)$ Riemann-összeghez tartozó téglalapokat, ahol c_k a k-adik részintervallum (a) bal oldali, (b) jobb oldali végpontja, (c) felezőpontja! (Mindegyik Riemann-összeghez készítsünk külön ábrát!)

29. $f(x)=x^2-1$, a $[0,2]$ intervallumon.

30. $f(x)=-x^2$, a $[0,1]$ intervallumon.

31. $f(x)=\sin x$, a $[-\pi,\pi]$ intervallumon.

32. $f(x)=\sin x+1$, a $[-\pi,\pi]$ intervallumon.

33. Határozzuk meg a $P=\{0;1,2;1,5;2,3;2,6;3\}$ felosztás normáját!

34. Határozzuk meg a $P=\{-2;-1,6;-0,5;0;0,8;1\}$ felosztás normáját!

Felső közelítő összegek határértéke

A 35–40. feladatokban szereplő függvényekre írjuk fel felső közelítő összeget oly módon, hogy az $[a,b]$ intervallumot n egyforma részintervallumra osztjuk fel! Azután vegyük ezeknek az összegeknek a határértékét $n\to\infty$ esetén, és számítsuk ki az $[a,b]$ intervallumhoz tartozó görbe alatti területet!

35. $f(x)=1-x^2$ a $[0,1]$ intervallumban.

36. $f(x)=2x$ a $[0,3]$ intervallumban.

37. $f(x)=x^2+1$ a $[0,3]$ intervallumban.

38. $f(x)=3x^2$ a $[0,1]$ intervallumban.

39. $f(x)=x+x^2$ a $[0,1]$ intervallumban.

40. $f(x)=3x+2x^2$ a $[0,1]$ intervallumban.

5.3. A határozott integrál

Az 5.2. szakaszban egy zárt $[a,b]$ intervallumon folytonos $f(x)$ függvény véges közelítő összegének határértékét vizsgáltuk oly módon, hogy az intervallumot n egyenlő, $(b-a)/n$ hosszúságú intervallumra bontottuk. Ebben a szakaszban általánosabb Riemann-összegek határértékét vizsgáljuk, amikor az $[a,b]$ intervallum felosztásainak normája nullához tart. Az általános Riemann összegnél a felosztások részintervallumainak nem kell azonos hosszúságúaknak lenniük. Az ilyen összegek határértéke vezet el egy zárt $[a,b]$ intervallumon folytonos függvény *határozott integráljának* fogalmához.

A Riemann-összegek határértéke, Riemann-integrál

A határozott integrál fogalma arra az ismeretre épül, hogy bizonyos függvények esetében, amint $[a,b]$ felosztásainak normája nullához tart, a megfelelő Riemann-összegek határértéke valamilyen I határértékhez konvergál. Konvergencián azt értjük, hogy a Riemann-összeg értéke tetszőlegesen közel kerül az I számhoz feltéve, hogy felosztásának normája elegendően kicsi (vagyis az összes részintervallum elegendően kicsi). Bevezetjük az ε szimbólumot, mint olyan kis pozitív számot, amely megszabja, mennyire közel kell lennie a Riemann-összegnek I-hez, valamint a δ szimbólumot, amely szintén egy pici pozitív szám, és azt mondja meg, hogy milyen kicsinek kell lenni a felosztás normájának ahhoz, hogy ez teljesüljön. Íme a pontos megfogalmazás:

DEFINÍCIÓ: A határozott integrál, mint a Riemann-összegek határértéke

Legyen $f(x)$ az $[a,b]$ zárt intervallumon értelmezett korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy az I szám **az f függvény $[a,b]$ intervallumon vett határozott integrálja** és a $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ Riemann-összegek határértéke, ha teljesülnek a következő feltételek:

Bármely adott $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $[a,b]$ minden olyan $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ felosztására, amelyre $\|P\| < \delta$, bárhogyan is választjuk ki c_k-t az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumból, teljesül, hogy

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - I \right| < \varepsilon.$$

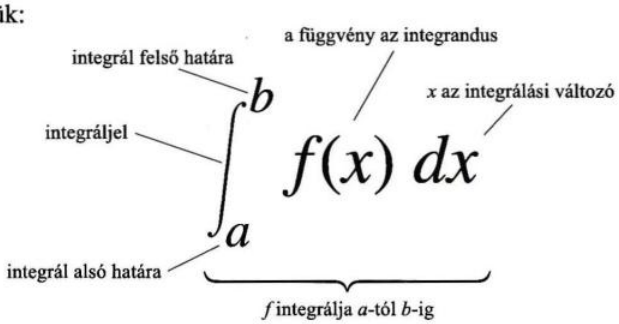
Leibniz a határozott integrálra olyan jelölést vezetett be, amely a Riemann-összegekre emlékeztet. Látta, hogy a $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ véges összegekből az $f(x)$ függvényértéket az „infinitezimális" részintervallumok dx hosszúságával beszorozva végtelen összegeket kapunk. A $\sum$ jelet határértékben a $\int$ jellel helyettesítjük, mely az „S" betűből ered. Az $f(c_k)$ függvényértékeket határértékben az $f(x)$ függvényérték helyettesíti, a részintervallumok Δx_k hosszát a dx differenciál. Olyan, mintha az összes $f(x) \cdot dx$ szorzatot összegeznénk, miközben x az összes értéket felveszi a és b között. Ez a jelölésmód utal az integrál előállításának folyamatára, a Riemann-féle definíció pedig pontos értelmet ad a határozott integrálnak. (A definícióban a korlátosságot nem lenne szükséges kikötni, de nem korlátos függvény Riemann-integrálja nyilvánvalóan amúgy sem létezik, és ez a feltevés a további vizsgálódásokat leegyszerűsíti.)

A határozott integrál jelölése és létezése

A határozott integrál definíciójában az I számot a

$$\int_a^b f(x)dx$$

szimbólum helyettesíti, amit úgy kell kimondani, hogy „integrál a-tól b-ig $f(x)$ dé x" vagy „f x szerinti integrálja a-tól b-ig". A szimbólum összetevőinek is van külön nevük:



Ha a definíció feltételei teljesülnek, akkor azt mondjuk, hogy f $[a,b]$-hez tartozó Riemann-összegei **konvergálnak** az $I = \int_a^b f(x)dx$ határozott integrálhoz, és hogy f integrálható az $[a,b]$ intervallumon. A P felosztást sokféleképpen kiválaszthatjuk úgy, hogy normája nullához tartson, és bármely felosztásra sokféleképpen megválaszthatjuk c_k-t is. A határozott integrál akkor létezik, ha mindig ugyanazt az I határértéket kapjuk függetlenül attól, hogy milyen felosztást és abban milyen c_k-t választottunk. Ha a határérték létezik, akkor azt felírhatjuk, mint a függvény határozott integrálját:

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = I = \int_a^b f(x)dx.$$

Ha mindegyik felosztás n egyenlő nagyságú részintervallumot tartalmaz, amelyek hossza $\Delta x = (b-a)/n$, akkor úgy is írhatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x = I = \int_a^b f(x)dx.$$

A határértéket mindig úgy képezzük, hogy a felosztások normája nullához tartson, a részintervallumok száma pedig végtelenhez.

A függvény egy adott intervallumon vett határozott integráljának értéke a függvénytől függ, nem attól, hogy milyen betűvel jelöljük a független változóját. Ha a t vagy u betűt jobban kedveljük, mint az x-et, nyugodtan írhatjuk

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{helyett azt is, hogy} \quad \int_a^b f(t)dt \quad \text{vagy} \quad \int_a^b f(u)du.$$

Nincs jelentősége az integrál írásmódjának, az mindig ugyanaz a szám, a Riemann-összegek határértéke.

Mivel a Riemann-összegek határértékének képzésekor nagyon sok lehetőség adódik, úgy tűnhet, nehéz lesz megmondani, hogy létezik-e ez a határérték. Ha az integrál létezik, akkor nincs jelentősége, hogyan választottunk felosztást és függvényértékeket, a Riemann-összegek mindig ugyanahhoz a határértékhez konvergálnak. Ez az eset, ha a függvény *folytonos*.

> 1. TÉTEL: **Folytonos függvény határozott integrálja**
>
> Ha az f függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon, akkor az $[a,b]$ intervallumon létezik határozott integrálja.

A szélsőértéktétel (4.1. szakasz, 1. tétel) szerint, amennyiben f folytonos, meg tudjuk választani c_k-t úgy, hogy az $[x_{k-1},x_k]$ részintervallumon f-nek $f(c_k)$ legyen a maximális értéke, s ezzel egy **felső közelítő összeget** kapunk. Úgy is meg tudjuk választani c_k-t, hogy az $[x_{k-1},x_k]$ részintervallumon f-nek $f(c_k)$ a minimális értéke legyen, s így egy **alsó közelítő összeget** kapunk. c_k lehet az $[x_{k-1},x_k]$ intervallum felezőpontja, jobb oldali végpontja vagy egy véletlenszerűen kiválasztott pontja, a felosztás lehet egyenlő közű vagy változó szélességű, $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$-ra mindig ugyanaz a határérték adódik, amikor $\|P\| \to 0$. Az 1. tétel hátterében az az ismeret áll, hogy bármely felosztásához hozzárendelt Riemann-összeg nem lehet nagyobb a felső közelítő összegnél, és nem lehet kisebb az alsó közelítő összegnél. Az alsó és a felső közelítő összeg egyaránt ugyanahhoz a határértékhez konvergál, amikor $\|P\| \to 0$. Minden más Riemann-összeg az alsó és a felső közelítő összeg között fekszik, és mindnek ugyanaz a határértéke. Az 1. tétel bizonyítása a függvények, felosztások és határértékek gondos vizsgálatára épül, ezért ebben a bevezető jellegű könyvben nincs helye. A bizonyítás mikéntjére utalnak a 80. és a 81. feladatok.

Az 1. tétel semmit sem mond arról, hogy hogyan kell a határozott integrált kiszámítani. Ennek módját az 5.4. szakaszban, a primitív függvény meghatározásának problémájával közösen fogjuk vizsgálni.

Integrálható és nem integrálható függvények

Az 1. tétel azt mondja ki, hogy az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvények integrálhatóak. A nem folytonos függvények vagy integrálhatók, vagy nem integrálhatók. A nem folytonos, de integrálható függvények lehetnek pl. *szakaszonként folytonos függvények*, amelyeket e fejezet végén, a további példák és feladatok között fogunk definiálni. (Ezek véges számú pont kivételével folytonosak az $[a,b]$ intervallumon.) Ahhoz, hogy ne legyen integrálható, a függvénynek annyira szakadásosnak kell lennie, hogy a grafikonja és az x-tengely közé eső tartomány ne legyen helyesen közelíthető egyre keskenyedő téglalapokkal. Lássunk egy példát nem integrálható függvényre!

1. PÉLDA:

Az

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

függvény nem Riemann-integrálható a $[0,1]$ intervallumon. Ennek a kijelentésnek az az alapja, hogy bármely két szám között van mind racionális, mind pedig irracionális szám. Azaz a függvény túlságosan szeszélyesen ugrál ahhoz, hogy a grafikonja alatti és az x-tengely fölötti területet közelíteni lehessen akármilyen keskeny téglalapokkal. Megmutatjuk, hogy a felső közelítő összeg és az alsó közelítő összeg különböző határértékekhez konvergál.

Ha kijelöljük a $[0,1]$ egy felosztását, c_k-t pedig úgy választjuk, hogy az az f maximális értéke legyen az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumon, akkor a megfelelő Riemann-összeg

$$U = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (1)\Delta x_k = 1,$$

mivel minden $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumban van racionális szám, s arra $f(c_k) = 1$. Így mindegyik Riemann-összeg 1-gyel egyenlő, s így határértékük is 1.

Másfelől, ha c_k-t úgy választjuk, hogy az az f minimális értéke legyen az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumon, akkor a megfelelő Riemann-összeg

$$L = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (0)\Delta x_k = 0,$$

mert minden $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumban van irracionális szám, s arra $f(c_k) = 0$. Mivel a határérték függ c_k megválasztásától, a függvény nem integrálható.

A határozott integrál tulajdonságai

Mikor $\int_a^b f(x)dx$-et a $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ összeg határértékeként definiáltuk, balról jobbra haladtunk át az $[a,b]$ intervallumon. Mi történik akkor, ha jobbról balra haladunk, azaz $x_0 = b$-től indulva $x_n = a$-ba jutunk? A Riemann-összegben minden Δx_k előjelet vált, $x_k - x_{k-1}$ most nem pozitív, hanem negatív lesz. Ha minden részintervallumból ugyanazt a korábbi c_k pontot választjuk ki, valamennyi Riemann összeg, s így azok határértékének, azaz a $\int_a^b f(x)dx$ integrálnak az előjele is meg fog változni. Mivel előzőleg nem rögzítettük, hogy mit jelent „visszafelé integrálni", most definiálhatjuk úgy, hogy

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Az integrál fogalmát nulla hosszúságú intervallumra is kiterjeszthetjük, amikor is $a = b$. Mivel $f(c_k)\Delta x_k$ nulla, ha $\Delta x_k = 0$, ezért definíció szerint legyen

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

A 2. tétel az integrál hét tulajdonságát, az úgynevezett integrálási szabályokat mondja ki, többek között a fenti kettőt is. Ezek a szabályok nagyon hasznosak, amikor integrálok értékét kell kiszámítani. Újra és újra hivatkozni fogunk rájuk, amikor egyszerűsíteni akarjuk számításainkat.

A hét szabály közül kettőnek geometriai jelentése van, ezt az 5.11. ábra mutatja. Az ábrán látható grafikonok ugyan pozitív függvények grafikonjai, de a szabályok általánosan alkalmazhatók az integrálható függvényekre.

2. TÉTEL:

Ha f és g integrálható, akkor a határozott integrálra igazak az 5.3. táblázatba foglalt szabályok.

1. *Az integrálási határok felcserélése:* $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.
2. *Nulla hosszúságú intervallum:* $\int_a^a f(x)dx = 0$.
3. *Konstanssal való szorzás:* $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.
   $\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.
4. *Összeg és különbség:* $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
5. Additivitás: $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$.
6. *Maximum–minimum egyenlőtlenség:* Ha f-nek van minimális és maximális értéke az $[a,b]$ intervallumon, akkor

$$\min f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \max f \cdot (b-a).$$

7. *Dominációi:*

$$f(x) \geq g(x) \text{ az } [a,b] \text{ intervallumon} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

$$f(x) \geq 0 \text{ az } [a,b] \text{ intervallumon} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

5.3. TÁBLÁZAT: A határozott integrálra vonatkozó szabályok.

Az 1. és a 2. szabály definíció, az 5.3. táblázat 3–7. szabályait azonban bizonyítani kell. Alább megadjuk az egyik szabály bizonyítását. A többi integrálási szabályt is hasonlóképpen lehet belátni.[1]

A 6. szabály bizonyítása: A 6. szabály azt mondja ki, hogy f-nek az $[a,b]$ intervallumon vett integrálja soha nem lehet kisebb, mint f minimális értékének és az intervallum hosszának a szorzata, továbbá soha nem lehet nagyobb, mint f maximális értékének és az intervallum hosszának a szorzata. Ennek az az oka, hogy $[a,b]$ minden felosztására és c_k bármely választása esetén teljesül, hogy

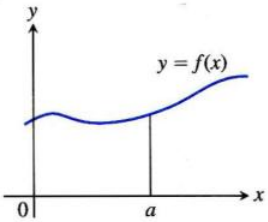
$$\begin{aligned}
\min f \cdot (b-a) = \min f \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = & \qquad \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b-a \\
= \sum_{k=1}^{n} \min f \cdot \Delta x_k \leq & \qquad \text{konstanssal való szorzás szabálya} \\
\leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \leq & \qquad \min f \leq f(c_k) \\
\leq \sum_{k=1}^{n} \max f \cdot \Delta x_k = & \qquad f(c_k) \leq \max f \\
= \max f \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = & \qquad \text{konstanssal való szorzás szabálya} \\
= \max f \cdot (b-a). &
\end{aligned}$$

Röviden, f-nek az $[a,b]$ intervallumhoz tartozó bármely Riemann-összege kielégíti a

$$\min f \cdot (b-a) \leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \leq \max f \cdot (b-a)$$

egyenlőtlenséget. Ezért határértékük, az integrál szintén kielégíti azt. □

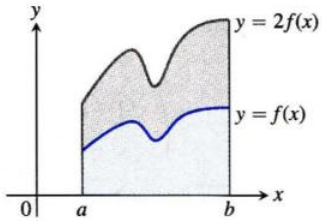
[1] Szerk. megj.: Ezen tulajdonságok között szokták felsorolni azt is, ha f integrálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor integrálható annak minden részintervallumán is.



(a) *Nulla hosszúságú intervallum:*

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

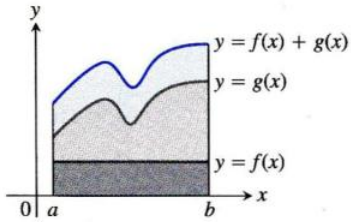
(Egy pont felett 0 területű tartomány van.)



(b) *Konstanssal való szorzás:*

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

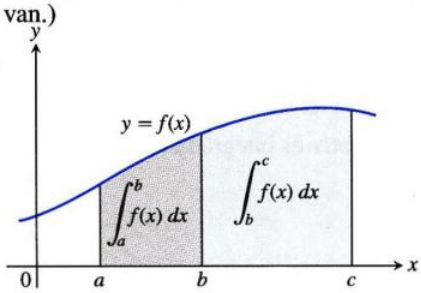
(Lásd $k = 2$-re.)



(c) *Összeg:*

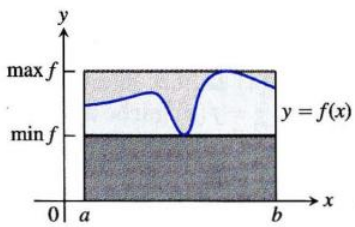
$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(A területeket összeadjuk.)



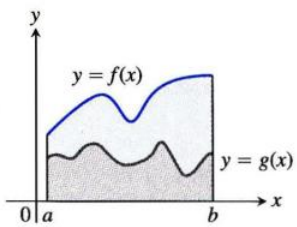
(d) *Additivitás:*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$



(e) *Maximum–minimum egyenlőtlenség:*

$$\min f \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le \max f \cdot (b-a)$$



(f) *Dominációk:*

$$f(x) \ge g(x) \text{ az } [a,b] \text{ intervallumon}$$
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^c g(x)dx$$

5.11. ÁBRA

2. PÉLDA: **A határozott integrálra vonatkozó szabályok alkalmazása**

Legyen

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 5, \quad \int_1^4 f(x)dx = -2, \quad \int_{-1}^{1} h(x)dx = 7.$$

Akkor

1. $\displaystyle\int_4^1 f(x)dx = -\int_1^4 f(x)dx = -(-2) = 2$ 1. szabály

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} [2f(x)+3h(x)]dx = 2\int_{-1}^{1} f(x)dx + 3\int_{-1}^{1} h(x)dx =$ 3. és 4. szabály

$$= 2(5)+3(7) = 31$$

3. $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx = 5+(-2) = 3$ 5. szabály

3. PÉLDA: **Egy integrál felső korlátja**

Mutassuk meg, hogy $\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,dx$ kisebb 3/2-nél!

Megoldás: A határozott integrálra vonatkozó maximum–minimum egyenlőtlenség (6. szabály) azt mondja ki, hogy $\int_a^b f(x)dx$-ra $\min f \cdot (b-a)$ egy *alsó korlátot*, $\max f \cdot (b-a)$ pedig egy *felső korlátot* ad. $\sqrt{1+\cos x}$ maximális értéke

a $[0,1]$ intervallumon $\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, így

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,dx \le \sqrt{2}\cdot(1-0)=\sqrt{2}.$$

Mivel $\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,dx$-nek $\sqrt{2}$ egy felső korlátja ($\sqrt{2}=1{,}414\ldots$), az integrál értéke kisebb 3/2-nél. □

Egy nemnegatív függvény grafikonja alatti terület

Most pontosítani fogjuk egy görbe vonallal határolt tartomány területének fogalmát. Az alapgondolat az, hogy a tartományt egyre növekvő számú téglalappal közelítjük. Valamely nemnegatív függvény grafikonja alatti területet a határozott integrál fogalmával értelmezzük.

DEFINÍCIÓ: **A görbe alatti terület mint határozott integrál**

Ha $y=f(x)$ az $[a,b]$ intervallumon nemnegatív és integrálható függvény, akkor **az $y=f(x)$ görbe alatti A terület:**

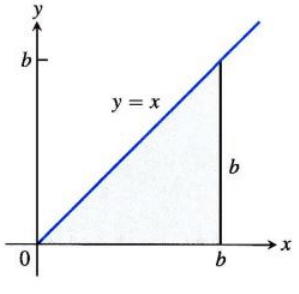
$$A=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Első ízben van pontos definíciónk egy olyan tartomány területére, amelynek határa egy folytonos függvény grafikonja. Definíciónkat alkalmazzuk most egy egyszerű példára, egy egyenes alatti terület kiszámítására, amelyen ellenőrizni tudjuk, hogy új definíciónk egybeesik a terület fogalmáról korábban kialakult intuitív képünkkel.

4. PÉLDA: **Az $y=x$ egyenes alatti terület**

Számítsuk ki $\int_a^b x\,dx$-et és határozzuk meg az $y=x$ alatti területet a $[0,b]$, $b>0$ intervallumon!

Megoldás: A bennünket érdeklő tartomány egy háromszög (5.12. ábra). A háromszög területét kétféle módon is meghatározzuk!



5.12. ÁBRA: A 4. feladatban szereplő tartomány egy háromszög.

(a) Ahhoz, hogy a határozott integrált Riemann-összegek határértékeként meghatározhassuk, $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x_k$-t olyan felosztásokra kell kiszámolnunk, amelyeknek a normája nullához tart. Az 1. tétel kimondja, hogy nem számít, hogyan választjuk a felosztásokat vagy a c_k pontokat, amíg a norma nullához tart. Bármely választás pontosan ugyanahhoz a határértékhez vezet. Tekintsük hát azt a P felosztást, amely a $[0,b]$ intervallumot n azonos, $\Delta x=(b-0)/n$ hosszúságú intervallumra osztja, c_k gyanánt pedig válasszuk minden részintervallumban annak jobb oldali végpontját. Tehát a felosztás: $P=\{0,\frac{b}{n},\frac{2b}{n},\frac{3b}{n},\ldots,\frac{nb}{n}\}$ és $c_k=\frac{kb}{n}$. Így

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x &= \sum_{k=1}^n \frac{kb}{n}\cdot\frac{b}{n}= && f(c_k)=c_k\\
&= \sum_{k=1}^n \frac{kb^2}{n^2}= &&\\
&= \frac{b^2}{n^2}\sum_{k=1}^n k= && \text{konstanssal való szorzás szabálya}\\
&= \frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}= && \text{az első } n \text{ természetes szám összege}\\
&= \frac{b^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right). &&
\end{aligned}$$

Ha $n \to \infty$ és $\|P\| \to 0$, akkor ez utóbbi kifejezésnek $b^2/2$ a határértéke. Ezért

$$\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}.$$

(b) Mivel a terület egy nemnegatív függvény határozott integráljával egyenlő, a határozott integrál értékét könnyen meghatározhatjuk a háromszög területképletéből. A háromszög egyik oldala b, magassága $y = b$. A terület: $A = (1/2)b \cdot b = b^2/2$. Újra azt kaptuk, hogy $\int_0^b x\,dx = b^2/2$. □

A 4. példát általánosíthatjuk tetszőleges $[a,b]$, $0 < a < b$ zárt intervallumra:

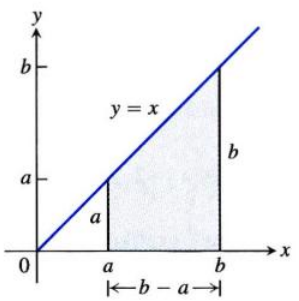
$$\int_a^b x\,dx = \int_a^0 x\,dx + \int_0^b x\,dx = \qquad \text{5. szabály}$$

$$= -\int_0^a x\,dx + \int_0^b x\,dx = \qquad \text{1. szabály}$$

$$= -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}. \qquad \text{4. példa}$$

Végeredményben $f(x) = x$ integráljára a következő szabályt kaptuk:

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, \quad a < b. \tag{5.1}$$



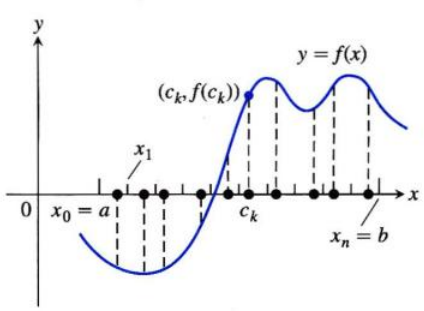
5.13. ÁBRA: A trapéz alakú tartomány területe $A = (b^2 - a^2)/2$.

Az összefüggés egy trapéz területét adja meg (5.13. ábra). Az (5.1) egyenlőség akkor is érvényes, ha a és b negatív. Ha $a < b < 0$, akkor a határozott integrál értéke: $(b^2 - a^2)/2$ negatív szám, az x-tengely alatti, az $y = x$ görbéig nyúló tartomány területének az ellentettje. Ha $a < 0$ és $b > 0$, az (5.1) egyenlőség továbbra is érvényben marad, a határozott integrál két terület különbsége: a $[0,b]$ intervallum fölött és a grafikon alatt húzódó területből ki kell vonni az $[a,0]$ intervallum alatt és a függvénygrafikon felett található tartomány területét.

Az alábbi eredményeket a 4. példához hasonlóan, Riemann-összegek kiszámításával lehet megkapni (75. és 76. feladat).

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a), \quad c \text{ tetszőleges állandó} \tag{5.2}$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, \quad a < b \tag{5.3}$$



5.14. ÁBRA: Példák egy függvény $[a,b]$ intervallumon felvett lehetséges értékeire.

Folytonos függvény átlagértéke – újra

Az 5.1. szakaszban heurisztikusan bevezettük az $[a,b]$ intervallumon folytonos nemnegatív függvény átlagértékének fogalmát. Azt mondtuk, hogy az átlagérték az $y = f(x)$ grafikon alatti terület osztva $b - a$-val. Integrálalakban ezt úgy írhatjuk, hogy

$$\text{átlag} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ezt az összefüggést felhasználhatjuk arra, hogy pontos definíciót adjunk tetszőleges folytonos (vagy integrálható) f függvény átlagértékére akár pozitív, akár negatív a függvény, de lehet egyszerre pozitív is, negatív is.

Gondolatmenetünk a következő: az átlag aritmetikai fogalmából indulunk ki, amely szerint n szám átlagát úgy kapjuk meg, hogy összegüket elosztjuk n-nel. Egy folytonos függvénynek az $[a,b]$ intervallumon végtelen sok értéke van, de ezeket az értékeket reprezentálni tudjuk. Osszuk fel $[a,b]$-t n egyenlő, $\Delta x = (b-a)/n$ hosszúságú részintervallumra, és tekintsük a részintervallumok c_k pontjaihoz tartozó függvényértékeket. Az n reprezentáns érték átlaga:

$$\begin{aligned}\frac{f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_n)}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) = \\ &= \frac{\Delta x}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) = \qquad \Delta x = \tfrac{b-a}{n}, \text{ így } \tfrac{1}{n} = \tfrac{\Delta x}{b-a} \\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x\end{aligned}$$

Az átlagot úgy kapjuk meg, hogy f-nek az $[a,b]$ intervallumra vonatkozó Riemann-összegét elosztjuk $b-a$-val. Ha a reprezentánsok számát növeljük, és a felosztás normája nullához tart, akkor az átlag $(1/(b-a))\int_a^b f(x)dx$-hez közelít. Mindkét szemléletmód a következő definícióhoz vezet.

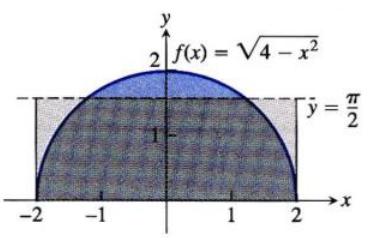
DEFINÍCIÓ: Egy függvény átlag- vagy középértéke

Ha f integrálható $[a,b]$-n, akkor **az $[a,b]$-n vett átlagértéke**, amit **középértéknek** is nevezünk:

$$f_{\text{átlag}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

5. PÉLDA: Az átlagérték meghatározása

Keressük meg az $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ függvény átlagértékét a $[-2,2]$ intervallumon!



5.15. ÁBRA: Az $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ függvény átlagértéke a $[-2,2]$ intervallumon $\pi/2$ (5. példa).

Megoldás: $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ olyan függvény, amelynek grafikonja a $[-2,2]$ intervallumon egy origó középpontú, 2 egység sugarú félkörív (5.15. ábra).

E félkörív és az x-tengely által közbezárt területet a körterület geometriai képletéből kiszámolhatjuk:

$$\text{terület} = \frac{1}{2}\cdot\pi r^2 = \frac{1}{2}\cdot\pi(2)^2 = 2\pi.$$

Mivel f nemnegatív, ezért a terület egyben f integrálja is a $[-2,2]$ intervallumon, azaz

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx = 2\pi.$$

f átlagértéke pedig:

$$f_{\text{átlag}} = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx = \frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

5.3. Feladatok

Az integrál, mint határérték

Az 1–8. feladatokban fejezzük ki a határértéket, mint a függvény határozott integrálját!

1. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \Delta x_k$, ahol P a $[0,2]$ egy felosztása.
2. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} 2c_k^3 \Delta x_k$, ahol P a $[-1,0]$ egy felosztása.
3. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (c_k^2 - 3c_k)\Delta x_k$, ahol P a $[-7,5]$ egy felosztása.
4. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{c_k}\right) \Delta x_k$, ahol P az $[1,4]$ egy felosztása.
5. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-c_k} \Delta x_k$, ahol P a $[2,3]$ egy felosztása.
6. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{4-c_k^2}\Delta x_k$, ahol P a $[0,1]$ egy felosztása.
7. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\sec c_k)\Delta x_k$, ahol P a $[-\pi/4,0]$ egy felosztása.
8. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{tg} c_k)\Delta x_k$, ahol P a $[0,\pi/4]$ egy felosztása.

Integrál meghatározása az integrál tulajdonságainak és ismert integráloknak a felhasználásával

9. Legyen f és g integrálható, és legyen

$$\int_1^2 f(x)dx = -4, \quad \int_1^5 f(x)dx = 6, \quad \int_1^5 g(x)dx = 8.$$

Az 5.3. táblázat szabályait alkalmazva határozzuk meg a következő integrálokat!

(a) $\int_2^2 g(x)dx$ (b) $\int_5^1 g(x)dx$
(c) $\int_1^2 3f(x)dx$ (d) $\int_2^5 f(x)dx$
(e) $\int_1^5 [f(x)-g(x)]dx$ (f) $\int_1^5 [4f(x)-g(x)]dx$

10. Legyen f és h integrálható, és legyen

$$\int_1^9 f(x)dx = -1, \quad \int_7^9 f(x)dx = 5, \quad \int_7^9 h(x)dx = 4.$$

Az 5.3. táblázat szabályait alkalmazva határozzuk meg a következő integrálokat!

(a) $\int_1^9 -2f(x)dx$ (b) $\int_7^9 [f(x)+h(x)]dx$
(c) $\int_7^9 [2f(x)-3h(x)]dx$ (d) $\int_9^1 f(x)dx$
(e) $\int_1^7 f(x)dx$ (f) $\int_9^7 [h(x)-f(x)]dx$

11. Tegyük fel, hogy $\int_1^2 f(x)dx = 5$. Határozzuk meg a következő integrálok értékét!

(a) $\int_1^2 f(u)du$ (b) $\int_1^2 \sqrt{3}f(z)dz$
(c) $\int_2^1 f(t)dt$ (d) $\int_1^2 [-f(x)]dx$

12. Tegyük fel, hogy $\int_{-3}^0 g(t)dt = \sqrt{2}$. Határozzuk meg a következő integrálok értékét!

(a) $\int_0^{-3} g(t)dt$ (b) $\int_{-3}^0 g(u)du$
(c) $\int_{-3}^0 [-g(x)]dx$ (d) $\int_{-3}^0 \frac{g(r)}{\sqrt{2}}dr$

13. Legyen f integrálható, $\int_0^3 f(z)dz = 3$ és $\int_0^4 f(z)dz = 7$. Határozzuk meg a következő integrálokat!

(a) $\int_3^4 f(z)dz$ (b) $\int_4^3 f(t)dt$

14. Legyen h integrálható, $\int_{-1}^1 h(r)dr = 0$ és $\int_{-1}^3 h(r)dr = 6$. Határozzuk meg a következő integrálokat!

(a) $\int_1^3 h(r)dr$ (b) $-\int_3^1 h(u)du$

A határozott integrál meghatározása területszámítással

A 15–22. feladatokban ábrázoljuk az integrandust, és határozzuk meg az integrált területszámítással!

15. $\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2}+3\right)dx$ 16. $\int_{1/2}^{3/2}(-2x+4)dx$
17. $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}dx$ 18. $\int_{-4}^0 \sqrt{160x^2}dx$
19. $\int_{-2}^1 |x|dx$ 20. $\int_{-1}^1 (1-|x|)dx$
21. $\int_{-1}^1 (2-|x|)dx$ 22. $\int_{-1}^1 (1+\sqrt{1-x^2})dx$

A 23–26. feladatokban a megfelelő területek kiszámításával határozzuk meg az integrálok értékét!

23. $\int_0^b \frac{x}{2}dx, \quad b>0$ 24. $\int_0^b 4x\,dx, \quad b>0$
25. $\int_a^b 2s\,ds, \quad 0<a<b$ 26. $\int_a^b 3t\,dt, \quad 0<a<b$

Az integrál kiszámítása

27. $\int_1^{\sqrt{2}} x\,dx$ 28. $\int_{0,5}^{2,5} x\,dx$
29. $\int_{\pi}^{2\pi} \theta\,d\theta$ 30. $\int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} r\,dr$
31. $\int_0^{\sqrt[3]{7}} x^2dx$ 32. $\int_0^{0,3} s^2ds$
33. $\int_0^{1/2} t^2dt$ 34. $\int_0^{\pi/2} \theta^2 d\theta$
35. $\int_a^{2a} x\,dx$ 36. $\int_a^{\sqrt{3}a} x\,dx$
37. $\int_0^{|3|b} x^2dx$ 38. $\int_0^{3b} x^2dx$

Az 5.3. táblázatba foglalt szabályokat, továbbá az (5.1)–(5.3) egyenlőségeket felhasználva számítsuk ki a 39–50. feladatokban megadott integrálokat!

39. $\int_3^1 7\,dx$ 40. $\int_0^{-2} \sqrt{2}dx$
41. $\int_0^2 5x\,dx$ 42. $\int_3^5 \frac{x}{8}dx$
43. $\int_0^2 (2t-3)dt$ 44. $\int_0^{\sqrt{2}} (t-\sqrt{2})dt$
45. $\int_2^1 \left(1+\frac{z}{2}\right)dz$ 46. $\int_3^0 (2z-3)dz$
47. $\int_1^2 3u^2du$ 48. $\int_{1/2}^1 24u^2du$
49. $\int_0^2 (3x^2+x-5)dx$ 50. $\int_1^0 (3x^2+x-5)dx$

Terület meghatározása

Az 51–54. feladatokban a határozott integrál alkalmazásával határozzuk meg az adott görbe és az x-tengely közé eső tartomány területét a $[0,b]$ intervallumon!

51. $y = 3x^2$ **52.** $y = \pi x^2$

53. $y = 2x$ **54.** $y = \frac{x}{2} + 1$

Átlagérték

Az 55–62. feladatban rajzoljuk fel a függvény grafikonját, és keressük meg az átlagértékét az adott intervallumon!

55. $f(x) = x^2 - 1$ a $[0, \sqrt{3}]$ intervallumon.

56. $f(x) = -\frac{x^2}{2}$ a $[0,3]$ intervallumon.

57. $f(x) = -3x^2 - 1$ a $[0,1]$ intervallumon.

58. $f(x) = 3x^2 - 3$ a $[0,1]$ intervallumon.

59. $f(t) = (t-1)^2$ a $[0,3]$ intervallumon.

60. $f(t) = t^2 - t$ a $[-2,1]$ intervallumon.

61. $g(x) = |x| - 1$ az

(a) $[-1,1]$, **(b)** $[1,3]$ és **(c)** $[-1,3]$ intervallumon.

62. $h(x) = -|x|$ az

(a) $[-1,0]$, **(b)** $[0,1]$ és **(c)** $[-1,1]$ intervallumon.

Elmélet és példák

63. a és b mely értékére lesz maximális

$$\int_a^b (x - x^2)dx?$$

(*Útmutatás:* Hol pozitív az integrandus?)

64. a és b mely értékére lesz minimális

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2)dx?$$

65. A maximum–minimum egyenlőtlenséget alkalmazva adjunk alsó és felső korlátot

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

értékére!

66. (*a 65. feladat folytatása*) A maximum–minimum egyenlőtlenséget alkalmazva adjunk alsó és felső korlátot

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{1+x^2}dx \quad \text{és} \quad \int_{0,5}^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

értékére! Adjuk össze ezeket, hogy egy jobb becslést kapjunk

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx\text{-re.}$$

67. Mutassuk meg, hogy $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ értéke nem lehet 2!

68. Mutassuk meg, hogy $\int_0^1 \sqrt{x+8}dx$ értéke $2\sqrt{2} \approx 2{,}8$ és 3 között van.

69. Nemnegatív függvények integrálja: Mutassuk meg a maximum–minimum egyenlőtlenség alkalmazásával, hogy ha f integrálható, akkor

$$f(x) \geq 0 \text{ az } [a,b] \text{ intervallumon} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

70. Nempozitív függvények integrálja: Mutassuk meg a maximum–minimum egyenlőtlenség alkalmazásával, hogy ha f integrálható, akkor

$$f(x) \leq 0 \text{ az } [a,b] \text{ intervallumon} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \leq 0.$$

71. Az $x \geq 0$ esetén igaz $\sin x \leq x$ egyenlőtlenség alkalmazásával adjunk felső korlátot $\int_0^1 \sin x dx$ értékére!

72. A $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallumon fennáll a $\sec x \geq 1 + (x^2/2)$ egyenlőtlenség. Ennek felhasználásával adjunk alsó korlátot $\int_0^1 \sec x dx$ értékére!

73. Ha $f_{\text{átlag}}$ az f függvénynek valóban tipikus értéke az $[a,b]$ intervallumon, akkor $f_{\text{átlag}}$ és f $[a,b]$ intervallumon vett integráljának meg kell egyeznie. Így van? Azaz

$$\int_a^b f_{\text{átlag}}dx = \int_a^b f(x)dx?$$

Válaszunkat indokoljuk!

74. Jó lenne, ha egy integrálható függvény átlagértékére érvényesek lennének az alábbi szabályok:

(a) $(f+g)_{\text{átlag}} = f_{\text{átlag}} + g_{\text{átlag}}$,

(b) $(kf)_{\text{átlag}} = k f_{\text{átlag}}$ (k tetszőleges szám),

(c) $f_{\text{átlag}} \leq g_{\text{átlag}}$ ha $f(x) \leq g(x)$ az $[a,b]$ intervallumon.

Igazak ezek a szabályok? Válaszunkat indokoljuk!

75. Bizonyítsuk be az (5.2) egyenlőséget a Riemann-összegek határértékének felhasználásával, ahogyan azt a 4a példában is tettük!

76. Bizonyítsuk be az (5.3) egyenlőséget a Riemann-összegek határértékének felhasználásával, ahogyan azt a 4a példában is tettük!

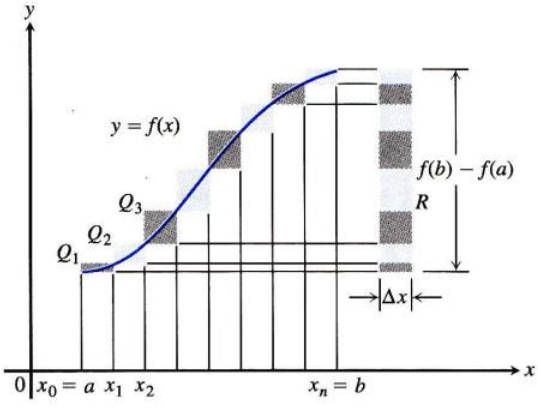
77. Alsó és felső közelítő összeg növekvő függvényre:

(a) Tegyük fel, hogy az $f(x)$ folytonos függvény monoton növekszik, amint x balról jobbra végigfut az $[a,b]$ intervallumon. Legyen P az $[a,b]$ egy olyan felosztása, amely azt n darab egyenlő, $\Delta x = (b-a)/n$ hosszúságú részintervallumra bontja fel. A mellékelt ábra segítségével mutassuk meg, hogy f-nek e felosztással képezett alsó és felső közelítő összegének különbsége grafikusan egy olyan téglalapként ábrázolható, amelynek oldalai Δx és $[f(b) - f(a)]$! (*Útmutatás:* Az $U - L$ különbség olyan téglalapok összege, amelyek $Q_0Q_1, Q_1Q_2, \ldots, Q_{n-1}Q_n$ átlói a görbe mentén húzódnak. Nem történik átfedés, ha ezeket a téglalapokat vízszintesen rácsúsztatjuk R-re.)

(b) Tegyük fel, hogy az $[a,b]$ felosztásának részintervallumai most nem egyenlőek, Δx_k hosszúságuk változó. Mutassuk meg, hogy

$$U - L \leq |f(b) - f(a)|\Delta x_{\max},$$

ahol $\Delta x_{\max}$ a P normája, és ezért $\lim_{\|P\|\to 0}$ esetén $U - L = 0$.



78. Alsó és felső közelítő összeg csökkenő függvényre: (*a 77. feladat folytatása*)

(a) Rajzoljuk egy olyan ábrát, mint a 77. feladatban, de most olyan folytonos $f(x)$ függvényre, amelynek csökkennek az értékei, amint x balról jobbra áthalad az $[a,b]$ intervallumon. Legyen P olyan felosztás, amely az intervallumot egyenlő hosszúságú részintervallumokra bontja! Keressünk a 77a feladatban találttal analóg kifejezést $U - L$ értékére!

(b) Most legyenek P részintervallumai változó hosszúságúak! Mutassuk meg, hogy a 77b feladat

$$U - L \leq |f(b) - f(a)|\Delta x_{\max}$$

egyenlőtlensége továbbra is érvényes és $\lim_{\|P\|\to 0}(U - -L) = 0$.

79. A

$$\sin h + \sin 2h + \sin 3h + \cdots + \sin mh = \\ = \frac{\cos(h/2) - \cos((m+(1/2))h)}{2\sin(h/2)}$$

összefüggés segítségével határozzuk meg az $y = \sin x$ görbe $x = 0$ és $x = \pi/2$ közötti szakasza alatti területet két lépésben:

(a) Osszuk fel a $[0, \pi/2]$ intervallumot n azonos hosszúságú részintervallumra, és számítsuk ki a megfelelő U felső közelítő összeget; azután

(b) határozzuk meg U határértékét, amint $n \to \infty$ és $\Delta x = = (b-a)/n \to 0$!

80. Tegyük fel, hogy f nemnegatív és folytonos az $[a,b]$ intervallumban, ahogy azt a mellékelt ábra mutatja. Az

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_{n-1}$$

pontokkal n részintervallumra bontottuk $[a,b]$-t. $\Delta x_1 = x_1 - a$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_n = b - x_{n-1}$ nem feltétlenül egyenlők.

(a) Tisztázzuk, milyen kapcsolat van az

$$L = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \cdots + m_n\Delta x_n$$

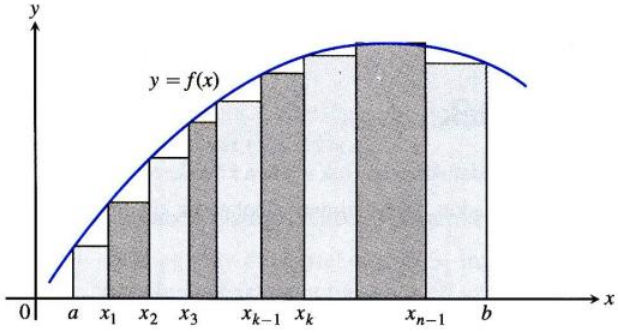
alsó közelítő összeg és a felső ábrán látható satírozott tartomány között, ahol $m_k = \min\{f(x)$ a k-adik részintervallumbeli x-ekre$\}$

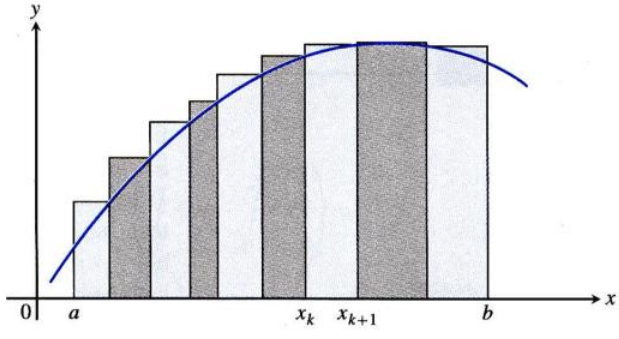
(b) Legyen $M_k = \max\{f(x)$ a k-adik részintervallumbeli x-ekre$\}$, és derítsük ki, milyen kapcsolat áll fenn a középső ábra satírozott tartománya és az

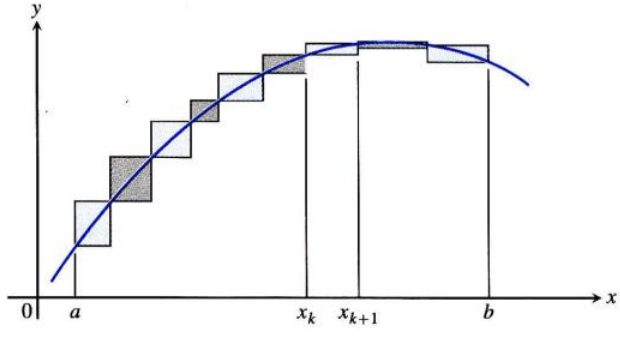
$$U = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \cdots + M_n\Delta x_n$$

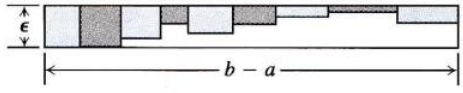
felső közelítő összeg között!

(c) Tisztázzuk azt is, milyen kapcsolat van $U - L$ és az alsó részábra árnyékolt tartománya között!









81. Azt mondjuk, hogy f **egyenletesen folytonos** $[a,b]$-n, ha adott $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha x_1, x_2 eleme az $[a,b]$ intervallumnak és $|x_1 - x_2| < \delta$, akkor $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Meg lehet mutatni, hogy az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvény egyenletesen is folytonos. Ezt a tényt valamint az előző feladat ábráját felhasználva mutassuk meg, hogy ha f folytonos és adva van $\varepsilon > 0$, akkor a Δx_k-k legnagyobbikát elegendően kicsinnyé téve el lehet érni, hogy teljesüljön $U - L \leq \varepsilon \cdot (b-a)$.

82. Ha egy 150 kilométeres útszakaszon 30 km/h az átlagsebességünk, és ugyanezt az utat visszafelé 50 km/h átlagsebességgel tesszük meg, akkor mekkora az átlagsebességünk az odavissza útra számolva? Válaszunkat indokoljuk is! (Forrás: Davis H. Pleacher: *Mathematics Teacher*, Vol. 85. No. 6, pp. 445–446, 1992. szeptember)

Számítógépes vizsgálatok

Ha programunk alkalmas rá, rajzoltassuk ki számítógépünk képernyőjére a 83–88. feladatokban szereplő integrálokhoz konvergáló Riemann-összegeket! Minden esetben $n = 4$, 10, 20 és 50 egyenlő részre bontsuk fel az alapintervallumot!

83. $\int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}$

84. $\int_0^1 (x^2+1)dx = \frac{4}{3}$

85. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = 0$

86. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x dx = 1$

87. $\int_{-1}^{1} |x| dx = 1$

88. $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ (Az integrál értéke hozzávetőleg 0,693.)

Átlagérték

A 89–92. feladatokban hajtsuk végre a következő lépéseket:

(a) Az adott intervallumon rajzoltassuk ki a függvényt!

(b) Osszuk fel az intervallumot $n = 100$, 200 és 1000 azonos hosszúságú részintervallumra, és vegyük a részintervallumok felezőpontjához tartozó függvényértékeket!

(c) Számítsuk ki a feladat (b) részében generált függvényértékek átlagát!

(d) Oldjuk meg x-re az $f(x) =$ (átlagérték) egyenletet a feladat (c) részében $n = 1000$-rel kapott átlagértékkel számolva!

89. $f(x) = \sin x$ a $[0, \pi]$ intervallumon.

90. $f(x) = \sin^2 x$ a $[0, \pi]$ intervallumon.

91. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ a $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ intervallumon.

92. $f(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}$ a $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ intervallumon.

5.4. Newton–Leibniz-tétel (az analízis alaptétele)

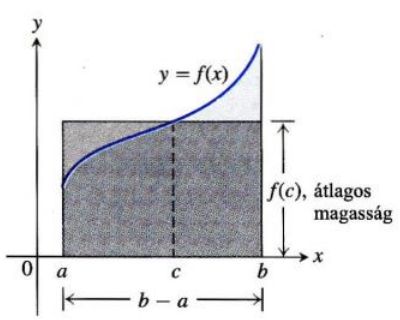
Ebben a szakaszban bemutatjuk a Newton–Leibniz-tételt, az analízis alaptételét, amely az integrálszámítás legfontosabb tétele. Ez a tétel egybekapcsolja a differenciál- és az integrálszámítást, és lehetőséget ad arra, hogy az integrál értékét az integrandus primitív függvényének segítségével kiszámítsuk ahelyett, hogy – mint azt az 5.3. szakaszban tettük – a Riemann-összegek határértékét kellene képeznünk. Ezt a kapcsolatot Newton és Leibniz ismerte fel, olyan fejlődést indítva el ezáltal a matematikában, amely a rá következő 200 évben lezajlott természettudományos forradalom hajtóerejévé vált.

Közben bemutatjuk az integrálszámítás középértéktételét, amelynek szintén fontos szerepe van az integrálszámításban, s fel fogjuk használni a Newton–Leibniz-tétel bizonyításában is.

A középértéktétel határozott integrálokra

Az előző szakaszban a zárt $[a,b]$ intervallumon integrálható f függvény átlagértékét az $\int_a^b f(x)dx$ integrál és az intervallum $b-a$ hosszának hányadosaként definiáltuk. A határozott integrálokra vonatkozó középértéktétel azt állítja, hogy ha f folytonos, akkor ezt az *átlagértéket* az f függvény az adott intervallumon legalább egyszer felveszi.

Az 5.16. ábra egy, az $[a,b]$ intervallumon *pozitív*, folytonos függvény grafikonját mutatja. A középértéktétel geometriailag azt állítja, hogy van egy olyan c pont az $[a,b]$ intervallumban, amelyre a $b-a$ alapélű és $f(c)$ magasságú téglalap területe pontosan megegyezik az f grafikonja és az ab szakasz által meghatározott tartomány területével.

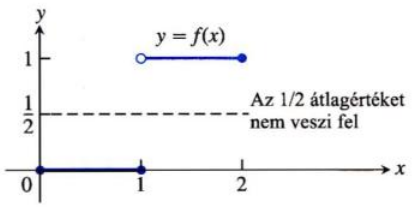


5.16. ÁBRA: A középértéktétel szerint az $f(c)$ érték bizonyos értelemben az f átlagos (*közepes*) magassága az $[a,b]$ intervallumon. Ha $f \geq 0$, a téglalap területe és az f grafikonja alatti terület az a és a b pont között megegyezik: $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

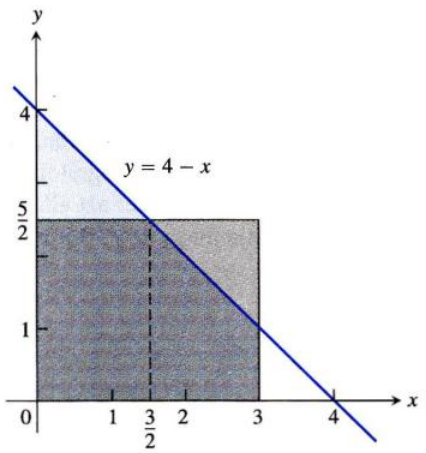
3. TÉTEL: A középértéktétel határozott integrálokra

Ha f folytonos az $[a,b]$ intervallumon, akkor valamilyen $c \in [a,b]$-re

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$



5.17. ÁBRA: Szakadásos függvénynek nem kell felvennie az átlagértékét.



5.18. ÁBRA: A $[0,3]$ alapú, 5/2 magasságú (5/2 az $f(x) = 4 - x$ függvény átlagértéke) téglalap területe egyenlő az f grafikonja és az x-tengely 0 és 3 közé eső darabja által közrefogott tartomány területével.

Bizonyítás: Ha $(b-a)$-val elosztjuk a maximum–minimum egyenlőtlenség (5.3. táblázat, 6. szabály) mindkét oldalát, azt kapjuk, hogy

$$\min f \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \max f.$$

Mivel f folytonos, a folytonos függvényekre vonatkozó közbensőérték-tétel (2.6. szakasz) szerint f-nek minden $\min f$ és $\max f$ közötti értéket fel kell vennie. Így $[a,b]$ valamely c pontjában az $(1/(b-a))\int_a^b f(x)dx$-et is fel kell vennie. □

Itt fontos szerepet játszik f folytonossága. Lehetséges, hogy egy szakadásos függvény sehol nem veszi fel az átlagértékét (5.17. ábra).

1. PÉLDA: **Az integrálra vonatkozó középértéktétel alkalmazása**

Határozzuk meg az $f(x) = 4 - x$ függvény átlagértékét a $[0,3]$ intervallumon, valamint az adott értelmezési tartománynak azt a pontját, ahol ezt az átlagértéket felveszi!

Megoldás:

$$f_{\text{átlag}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{3-0}\int_0^3 (4-x)dx = \frac{1}{3}\left(\int_0^3 4dx - \int_0^3 x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(4(3-0) - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)\right) = \qquad \text{5.3. szakasz, (5.1) és (5.2) egyenlőség}$$

$$= 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

Az $f(x) = 4 - x$ függvény átlagértéke a $[0,3]$ intervallumon 5/2. Ezt az értéket a függvény ott veszi fel, ahol $4 - x = 5/2$, vagyis $x = 3/2$ (5.18. ábra). □

Az 1. példában úgy kerestük meg azt a c pontot, ahol a függvény felveszi az átlagértékét, hogy a számított átlagértéket egyenlővé tettük $f(x)$-szel, és a kapott egyenletet x-re megoldottuk. Ez azonban nem mindig megy ilyen egyszerűen. Mi egyebet tanulhatunk még az integrálokra vonatkozó középértéktételből? Lássunk egy példát!

2. PÉLDA:

Mutassuk meg, hogy ha f folytonos az $[a,b]$ intervallumon, $a \neq b$ és

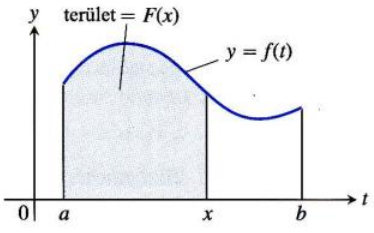
$$\int_a^b f(x)dx = 0,$$

akkor legalább egyszer $f(x) = 0$ az $[a,b]$ intervallumon!

Megoldás: Az $[a,b]$ intervallumon f átlagértéke:

$$f_{\text{átlag}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\cdot 0 = 0.$$

A középértéktétel szerint f valamely $c \in [a,b]$ pontban felveszi ezt az értéket. □



5.19. ÁBRA: Az (5.4) egyenlőséggel definiált $F(x)$ függvény az f grafikonja alatti területet adja meg a és x között, ha f nemnegatív és $x > a$.

Newton–Leibniz-tétel, 1. rész

Ha $f(t)$ a véges I intervallumon integrálható függvény, akkor rögzített $a \in I$-re a függvény a-tól x-ig vett integrálja egy új függvényt definiál, amelynek értéke az $x \in T$ helyen

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{5.4}$$

Például, ha f nemnegatív függvény és x nagyobb a-nál, akkor $F(x)$ az f grafikonja alatti terület a és x közé eső darabja (5.19. ábra). Az x változó az integrál felső határa, és így x a valós változós, valós értékű F függvény változója. Bármely x értékhez egy jól definiált numerikus $F(x)$ tartozik, esetünkben az f függvény a-tól x-ig terjedő integrálja.

Az (5.4) egyenlőség megmutatja, hogyan lehet új függvényeket definiálni, de jelentőségét most az adja számunkra, hogy kapcsolatot teremt az integrálok és a deriváltak között. Ha f egy folytonos függvény, akkor az alaptétel azt állítja, hogy F egy differenciálható függvénye x-nek és deriváltja maga az f. Bármely x értékre

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

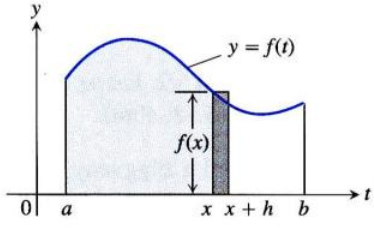
Hogy valamelyes képet alkothassunk arról, miért is igaz ez az állítás, vizsgáljuk meg a geometriai jelentését!

Ha $f \geq 0$ az $[a,b]$ intervallumon, akkor az $F'(x)$ kiszámítása a derivált definíciója értelmében azt jelenti, hogy vennünk kell az

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

differenciahányados határértékét $h \to 0$ esetére. $h > 0$-ra a számláló két terület különbsége, vagyis az f grafikonja alatti terület az x és $x+h$ közötti tartományban (5.20. ábra). Ha h kicsi, akkor ez a terület közelítőleg egyenlő annak a téglalapnak a területével, amelynek alapja h, magassága pedig $f(x)$, amint az az 5.20. ábrán látható. Azaz

$$F(x+h)-F(x) \approx hf(x).$$



5.20. ÁBRA: Az (5.4) egyenlőségben $F(x)$ az x-től balra eső terület. $F(x+h)$ ugyancsak az $x+h$-tól balra eső terület. $[F(x+h)-F(x)]/h$ differenciahányados hozzávetőleg egyenlő $f(x)$-szel, az ábrán látható téglalap magasságával.

A fenti közelítés mindkét oldalát elosztva h-val, és h-val nullához tartva indokolt feltételezni, hogy az

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

egyenlőséghez jutunk. Ha f nem pozitív, akkor is igaz ez az eredmény, mely a Newton–Leibniz-tétel első részét alkotja.

4. TÉTEL: **A Newton–Leibniz-tétel 1. része**

Ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ is folytonos $[a,b]$-n, differenciálható (a,b)-n és deriváltja $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x). \tag{5.5}$$

Mielőtt bebizonyítanánk a 4. tételt, nézzünk néhány példát, hogy jobban megértsük a tétel mondandóját.

3. PÉLDA: **A Newton–Leibniz-tétel alkalmazása**

A Newton–Leibniz-tétel segítségével határozzuk meg a következő kifejezéseket!

(a) $\dfrac{d}{dx}\int_a^x \cos t\,dt$ **(b)** $\dfrac{d}{dx}\int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}dt$

(c) $\dfrac{dy}{dx}$, ha $y=\int_x^5 3t\sin t\,dt$ **(d)** $\dfrac{dy}{dx}$, ha $y=\int_1^{x^2}\cos t\,dt$

Megoldás:

(a) $\dfrac{d}{dx}\int_a^x \cos t\,dt=\cos x$ (5.5) $f(t)=\cos t$-re alkalmazva

(b) $\dfrac{d}{dx}\int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}dt=\dfrac{1}{1+x^2}$ (5.5) $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$-re alkalmazva

(c) Itt az 5.3. szakaszban megismert 5.3. táblázat 1. szabályának van kulcsszerepe:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\int_x^5 3t\sin t\,dt=\frac{d}{dx}\left(-\int_5^x 3t\sin t\,dt\right)= \quad \text{1. szabály}$$

$$=-\frac{d}{dx}\int_5^x 3t\sin t\,dt=$$

$$=-3x\sin x.$$

(d) Az integrál felső határa nem x hanem x^2. Emiatt y-t összetett függvénynek kell tekintenünk:

$$y=\int_1^u \cos t\,dt \quad \text{és} \quad u=x^2.$$

dy/dx meghatározásához ezért a láncszabályt kell felhasználnunk:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=$$

$$=\left(\frac{d}{du}\int_1^u \cos t\,dt\right)\cdot\frac{du}{dx}=$$

$$=\cos u\cdot\frac{du}{dx}=$$

$$=\cos(x^2)\cdot 2x=$$

$$=2x\cos x^2. \qquad \square$$

4. PÉLDA: **Függvény megkonstruálása deriváltjából és egy értékéből**

Keressük meg azt az $y=f(x)$ függvényt, amelynek értelmezési tartománya $(-\pi/2,\pi/2)$, deriváltja

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}x$$

és kielégíti az $f(3)=5$ feltételt!

Megoldás: A Newton–Leibniz-tétel segítségével könnyűszerrel konstruálhatunk olyan függvényt, amelynek deriváltja $\operatorname{tg}x$, és $x=3$-ban nullával egyenlő:

$$y=\int_3^x \operatorname{tg}t\,dt.$$

Mivel $y(3) = \int_3^3 \operatorname{tg} t\, dt = 0$, csupán hozzá kell adnunk 5-öt ehhez a függvényhez, és máris van egy olyan függvényünk, amelynek deriváltja $\operatorname{tg} x$ és $x = 3$-ban 5 az értéke:

$$f(x) = \int_3^x \operatorname{tg} t\, dt + 5. \qquad \square$$

Bár a 4. feladat megoldása kielégíti az előírt feltételeket, mégis felmerül a kérdés, hogy vajon használható-e a fenti alakban. A válasz igen, mivel ma már rendelkezésünkre állnak számítógépek, amelyekkel jól lehet közelíteni az integrálok értékét. A 7. fejezetben meg fogjuk tanulni átírni a 4. feladat megoldását az

$$y = \ln\left|\frac{\cos 3}{\cos x}\right| + 5$$

alakba.

Most pedig tetszőleges folytonos függvényre bebizonyítjuk a Newton–Leibniz-tételt.

A 4. tétel bizonyítása: A Newton–Leibniz-tételt úgy bizonyítjuk be, hogy a derivált definícióját közvetlenül az $F(x)$ függvényre alkalmazzuk úgy, hogy x is, $x+h$ is legyenek az (a,b) intervallumban. Ez azt jelenti, hogy felírjuk a

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \tag{5.6}$$

differenciahányadost, és megmutatjuk, hogy $h \to 0$ esetén határértéke az $f(x)$ szám minden $x \in (a,b)$-re.

Ha $F(x+h)$ és $F(x)$ helyére beírjuk a definíció szerinti integrálokat, akkor az (5.7) egyenlőség számlálója az

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

alakot ölti. Az integrálokra vonatkozó additivitási szabályt alkalmazva (az 5.3. táblázat 5. szabálya) a jobb oldalt egyszerűsíthetjük:

$$\int_x^{x+h} f(t)dt,$$

így végül (5.6)-ra azt kapjuk, hogy

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}[F(x+h) - F(x)] = \\ = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt. \tag{5.7}$$

A határozott integrálra vonatkozó középértéktétel szerint az (5.7) egyenletben szereplő utolsó kifejezés egyike azoknak az értékeknek, amelyet f az x és $x+h$ közé eső intervallumban felvesz. Vagyis ennek az intervallumnak valamely c elemére

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c). \tag{5.8}$$

Amint $h \to 0$, $x+h$ és vele együtt c is x-hez tart (mivel c az x és $x+h$ között van). Mivel f folytonos, $f(c)$ $f(x)$-hez tart:

$$\lim_{h\to 0} f(c) = f(x). \tag{5.9}$$

Most térjünk vissza oda, ahonnan elindultunk! Azt kaptuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = && \text{a derivált definíciója}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = && \text{(5.7) egyenlőség}\\
&= \lim_{h\to 0} f(c) = && \text{(5.8) egyenlőség}\\
&= f(x). && \text{(5.9) egyenlőség}
\end{aligned}$$

Ha $x = a$ vagy b, akkor az (5.6) egyenlőség határértékét egyoldali határértékként kell felfogni: $h \to 0^+$ vagy $h \to 0^-$. Ekkor a 3.1. szakasz 1. tétele szerint F az $[a,b]$ szakasz minden pontjában folytonos. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. □

Newton–Leibniz-tétel 2. rész

Most rátérünk a Newton–Leibniz-tétel 2. részére. Ez leírja, hogyan lehet kiszámítani a határozott integrált anélkül, hogy Riemann-összegek határértékét kellene vizsgálnunk. Ehelyett elegendő lesz megkeresni a függvény egy primitív függvényét, és venni annak értékét az integrálás alsó és felső határának megfelelő pontokban.

4. TÉTEL: (Folytatás) Newton–Leibniz-tétel, 2. rész

Ha f folytonos $[a,b]$ minden pontjában, és F az f primitív függvénye az $[a,b]$-n, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás: A Newton–Leibniz-tétel 1. része kimondja, hogy f-nek létezik egy primitív függvénye, nevezetesen

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Ha F *valamelyik* primitív függvénye f-nek, akkor $F(x) = G(x) + C$ teljesül rá, ahol C valamilyen állandó és $a < x < b$ (a középértéktétel 2. következménye szerint, lásd 4.2. szakasz). Mivel F és G is folytonos $[a,b]$-n, elmondhatjuk, hogy féloldali határértéket véve ($x \to a^+$ és $x \to b^-$) $F(x) = G(x) + C$ akkor is teljesül, ha $x = a$ vagy $x = b$.

$F(b) - F(a)$-t kiszámolva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= [G(b)+C] - [G(a)+C] =\\
&= G(b) - G(a) =\\
&= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt =\\
&= \int_a^b f(t)dt - 0 =\\
&= \int_a^b f(t)dt.
\end{aligned}$$

□

A tétel azt állítja, hogy egy folytonos f függvény $[a,b]$ intervallumra vonatkozó határozott integráljának kiszámításához nem kell mást tennünk, mint

1. megkeresni f egy F primitív függvényét és

2. kiszámítani $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$-t.

$F(b) - F(a)$ szokásos jelölése:

$$\Big[F(x)\Big]_a^b.$$

5. PÉLDA: **Integrálok kiszámítása**

(a) $$\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0.$$

(b) $$\int_{-\pi/4}^{0} \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \Big[\sec x\Big]_{-\pi/4}^{0} = \sec 0 - \sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}$$

(c) $$\int_1^4 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{x^2}\right)dx = \left[x^{3/2} + \frac{4}{x}\right]_1^4 =$$

$$= \left[(4)^{3/2} + \frac{4}{4}\right] - \left[(1)^{3/2} + \frac{4}{1}\right] =$$

$$= [8+1] - [5] = 4.$$

Az 5. példában alkalmazott eljárás jóval egyszerűbb volt, mint a Riemann-összegekkel való számolás.

A Newton–Leibniz-tételnek több következménye is van. Az (5.5) egyenlőséget felírhatjuk

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{dF}{dx} = f(x)$$

alakban is, ami azt mutatja, hogy ha egy folytonos f függvényt először integrálunk, majd deriválunk, akkor visszakapjuk magát az f-et. Hasonlóképpen, az

$$\int_a^x \frac{dF}{dt}dt = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

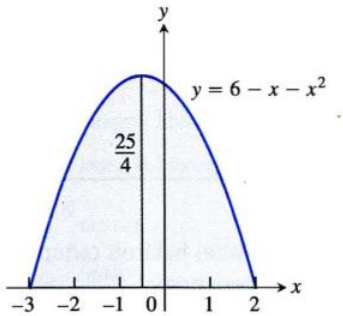
egyenlőség azt mutatja, hogy az F függvényt deriválva majd pedig integrálva a kapott eredmény újra csak F feltéve, hogy F deriváltja folytonos (egy integrációs állandó erejéig). Bizonyos értelemben az integrálás és a deriválás egymás „inverz" műveletei. A Newton–Leibniz-tétel azt is kimondja, hogy minden folytonos f függvénynek van egy F primitív függvénye. Továbbá azt is kimondja, hogy a $dy/dx = f(x)$ differenciálegyenletnek bármely folytonos f függvényre van megoldása (nevezetesen az $y = F(x)$ függvény).

Teljes terület

A Riemann-összeg $f(c_k)\Delta x_k$ alakú kifejezéseket tartalmaz, amelyek egy-egy téglalap területét adják, amennyiben $f(c_k)$ pozitív. Ha $f(c_k)$ negatív, akkor az $f(c_k)\Delta x_k$ szorzat a téglalap területének az ellentettje. Ha egy negatív függvényre összegezzük ezeket a kifejezéseket, akkor megkapjuk a függvénygörbe és az x tengely által közbezárt területnek az ellentettjét. Ha vesszük ennek abszolút értékét, akkor megkapjuk a helyes, pozitív területértéket.

6. PÉLDA: **A terület meghatározása a primitív függvény segítségével**

Számítsuk ki az x-tengely és az $y = 6 - x - x^2$ parabola által határolt tartomány területét!



5.21. ÁBRA: A parabolaszelet területét határozott integrál segítségével számoltuk ki (6. példa).

Megoldás: Először megkeressük a görbe és az x-tengely metszéspontjait:

$$y = 0 = 6 - x - x^2 = (3+x)(2-x),$$

s ebből

$$x = -3 \quad \text{vagy} \quad x - 2$$

adódik. Az 5.21. ábrán felvázoltuk a görbét. Láthatjuk, hogy az nemnegatív a $[-3,2]$ intervallumban.

A terület:

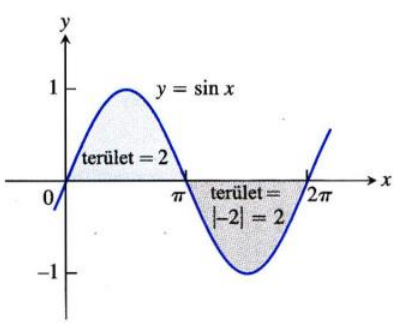
$$\int_{-3}^{2} (6 - x - x^2)dx = \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{2} =$$

$$= \left(12 - 2 - \frac{8}{3}\right) - \left(-18 - \frac{9}{2} + \frac{27}{3}\right) = 20\frac{5}{6}.$$

Az 5.21. ábrán látható görbe egy parabolaív, és érdekes, hogy a parabolaszelet területe pontosan kétharmada az alap és a magasság szorzatának:

$$\frac{2}{3}(5)\left(\frac{25}{4}\right) = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}. \qquad \square$$

Nagyobb körültekintést kíván az $f(x)$ függvény és az x-tengely által határolt tartomány területének a kiszámítása, ha a függvény pozitív és negatív értékeket egyaránt felvesz. Az $[a,b]$ intervallumot ilyenkor gondosan fel kell osztanunk olyan részintervallumokra, amelyeken belül a függvény nem vált előjelet. Ellenkező esetben a negatív illetve pozitív előjelű területek miatt teljesen helytelen eredményre jutnánk. Az összterületet ilyenkor úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk $f(x)$-nek az egyes részintervallumokon vett határozott integráljainak az abszolút értékét. A „terület" kifejezésen ezt a *teljes területet* értjük.



5.22. ÁBRA: Az $y = \sin x$ és az x-tengely által határolt tartomány teljes területe $0 \le x \le 2\pi$ esetén a két integrál abszolút értékének az összege (7. példa).

7. PÉLDA: **Egymást kioltó területrészek**

Az 5.22. ábra az $f(x) = \sin x$ függvény grafikonját mutatja az $x = 0$ és $x = 2\pi$ közötti tartományban. Számítsuk ki

1. $f(x)$ határozott integrálját a $[0, 2\pi]$ intervallumon;
2. az $f(x)$ függvény grafikonja és az x-tengely által határolt tartomány területét a $[0, 2\pi]$ intervallumban!

Megoldás: $f(x) = \sin x$ határozott integrálja:

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\Big[\cos x\Big]_0^{2\pi} = -[\cos 2\pi - \cos 0] = -[1-1] = 0.$$

A határozott integrál nulla, mert a grafikon x-tengely alatti és feletti részének járuléka az integrálhoz kiegyenlíti egymást.

A $[0, 2\pi]$ intervallumon az $f(x)$ függvény grafikonja és az x-tengely közé eső tartomány területét úgy számoljuk ki, hogy $\sin x$ értelmezési tartományát két részre bontjuk: a $[0, \pi]$ intervallumra, amelyben a függvény nemnegatív és a $[\pi, 2\pi]$ intervallumra, amelyen nempozitív.

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\Big[\cos x\Big]_0^{\pi} = -[\cos \pi - \cos 0] = -[-1-1] = 2,$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\Big[\cos x\Big]_{\pi}^{\pi} = -[\cos 2\pi - \cos \pi] = -[1-(-1)] = -2.$$

A második integrál negatív értéket ad. A grafikon és az x-tengely által határolt tartomány területét úgy kapjuk meg, hogy a fenti integrálok abszolút értékét összeadjuk:

$$\text{terület} = |2| + |-2| = 4. \qquad \square$$

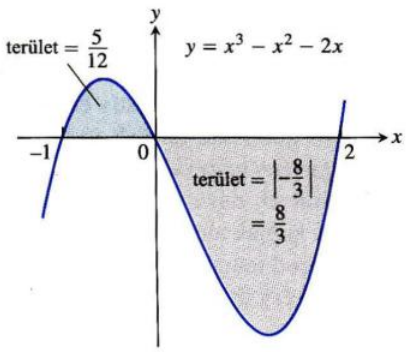
Összegzés

Az $y = f(x)$ függvény grafikonja és az x-tengely által határolt tartomány területét az $[a,b]$ intervallumon úgy határozzuk meg, hogy

1. f zérushelyeivel részintervallumokra bontjuk $[a,b]$-t.
2. Integráljuk minden részintervallumon f-et.
3. Az integrálok abszolút értékét összeadjuk.

8. PÉLDA:

Határozzuk meg $-1 \le x \le 2$-re az $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ grafikonja és az x-tengely által közrefogott tartomány területét!



5.23. ÁBRA: Az $y = x^3 - x^2 - 2x$ görbe és az x-tengely által bezárt tartomány területe (8. példa).

Megoldás: Először keressük meg f zérushelyeit! Mivel

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2),$$

a zérushelyek $x = 0, -1$ és 2 (5.23. ábra). A zérushelyek két részintervallumra osztják a $[-1,2]$ intervallumot: a $[-1,0]$ részintervallumra, amelyen $f \ge 0$ és a $[0,2]$ részintervallumra, amelyen $f \le 0$. Integráljuk f-et mind a két részintervallumon, és a kapott integrálok abszolút értékét adjuk össze!

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right] = \frac{5}{12},$$

$$\int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2} = \left[4 - \frac{8}{3} - 4\right] - 0 = -\frac{8}{3}.$$

A teljes közrefogott területet úgy kapjuk meg, hogy a számított integráloknak az abszolút értékét összeadjuk:

$$\text{teljes közbezárt terület} = \frac{5}{12} + \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{37}{12}. \qquad \square$$

5.4. Feladatok

Az integrál kiszámítása

Az 1–26. feladatokban számítsuk ki az integrálok értékét!

1. $\int_{-2}^{0}(2x+5)dx$
2. $\int_{-3}^{4}\left(5-\frac{x}{2}\right)dx$
3. $\int_{0}^{4}\left(3x-\frac{x^3}{4}\right)$
4. $\int_{-2}^{2}(x^3-2x+3)dx$
5. $\int_{0}^{1}(x^2+\sqrt{x})dx$
6. $\int_{0}^{5}x^{3/2}dx$
7. $\int_{1}^{32}x^{-6/5}dx$
8. $\int_{-2}^{-1}\frac{2}{x^2}dx$
9. $\int_{0}^{\pi}\sin x dx$
10. $\int_{0}^{\pi}(1+\cos x)dx$
11. $\int_{0}^{\pi/3}2\sec^2 x dx$
12. $\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\csc^2 x dx$
13. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\csc\theta\operatorname{ctg}\theta d\theta$
14. $\int_{0}^{\pi/3}4\sec u\operatorname{tg}u du$
15. $\int_{\pi/2}^{0}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$
16. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{1-\cos 2t}{2}dt$
17. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(8y^2+\sin y)dy$
18. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(4\sec^2+\frac{\pi}{t^2}\right)dt$
19. $\int_{1}^{-1}(r+1)^2 dr$
20. $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(t+1)(t^2+4)dt$
21. $\int_{\sqrt{2}}^{1}\left(\frac{u^7}{2}-\frac{1}{u^5}\right)du$
22. $\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{v^3}-\frac{1}{v^4}\right)dv$
23. $\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{s^2+\sqrt{s}}{s^2}ds$
24. $\int_{9}^{4}\frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}du$
25. $\int_{-4}^{4}|x|dx$
26. $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}(\cos x+|\cos x|dx)$

Integrálok deriváltjai

A 27–30. feladatokban keressük meg a deriváltat

(a) az integrál kiszámításával és azt követő deriválással;

(b) az integrál közvetlen deriválásával!

27. $\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} \cos t\,dt$ **28.** $\frac{d}{dx}\int_0^{\sin x} 3t^2\,dt$

29. $\frac{d}{dt}\int_0^{t^4} \sqrt{u}\,du$ **30.** $\frac{d}{d\theta}\int_0^{\operatorname{tg}\theta} \sec^2 y\,dy$

A 31–36. feladatokban keressük meg dy/dx-et.

31. $y = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$ **32.** $y = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0$

33. $y = \int_{\sqrt{x}}^0 \sin(t^2)\,dt$ **34.** $y = \int_0^{x^2} \cos\sqrt{t}\,dt$

35. $y = \int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$

36. $y = \int_{\operatorname{tg} x}^0 \frac{dt}{1+t^2}$

Terület

A 37–42. feladatokban a megadott intervallumban határozzuk meg a a függvénygrafikon és a x-tengely által határolt tartomány teljes területét!

37. $y = -x^2 - 2x, \quad -3 \le x \le 2$

38. $y = 3x^2 - 3, \quad -2 \le x \le 2$

39. $y = x^3 - 3x^2 + 2x, \quad 0 \le x \le 2$

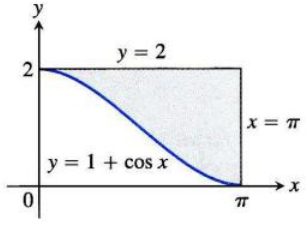
40. $y = x^3 - 4x, \quad -2 \le x \le 2$

41. $y = x^{1/3}, \quad -1 \le x \le 8$

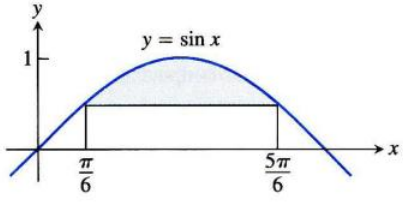
42. $y = x^{1/3} - x, \quad -1 \le x \le 8$

A 43–46. feladatokban határozzuk meg a világosszürke tartományok területét!

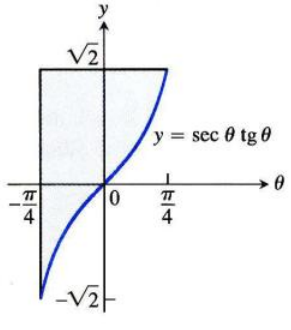
43.



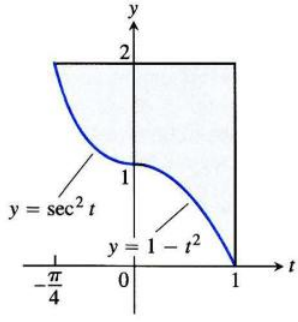
44.



45.



46.



Kezdetiérték-problémák

Az alábbi függvények mindegyike a 47–50. feladatokban szereplő kezdetiérték-problémák közül valamelyiknek a megoldása. Melyik függvény melyik probléma megoldása? Válaszunkat röviden indokoljuk is!

(a) $y = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt - 3$ **(b)** $y = \int_0^x \sec t\,dt + 4$

(c) $y = \int_{-1}^x \sec t\,dt + 4$ **(d)** $y = \int_\pi^x \frac{1}{t}\,dt - 3$

47. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad y(\pi) = -3$ **48.** $y' = \sec x, \quad y(-1) = 4$

49. $y' = \sec x, \quad y(0) = 4$ **50.** $y' = \frac{1}{x}, \quad y(1) = -3$

Az 51–54. feladatokban fejezzük ki integrálokkal a kezdetiérték-problémák megoldásait!

51. $\frac{dy}{dx} = \sec x, \quad y(2) = 3$

52. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+x^2} \quad y(1) = -2$

53. $\frac{ds}{dt} = f(t), \quad s(t_0) = s_0$ **54.** $\frac{dv}{dt} = g(t), \quad v(t_0) = v_0$

Alkalmazások

55. Arkhimédész területképlete a parabolaszeletre: Arkhimédész (i.e. 287–212) feltaláló, hadmérnök, fizikus, s talán az ókor legnagyobb matematikusa volt. Felfedezte, hogy a parabolaszelet területe az alap és a magasság szorzatának a kétharmada. Ábrázoljuk az $y = h - (4h/b^2)x^2$ parabolaívet a $-b/2 \le x \le b/2$ tartományban feltételezve, hogy h és b pozitívak. Azután az analízis eszközeivel határozzuk meg a parabolaív és az x-tengely által közrefogott tartomány területét!

56. A nyereség meghatározása a relatív nyereségből: Egy vállalat habverők gyártásából és eladásából származó relatív nyeresége

$$\frac{dr}{dx} = 2 - 2/(x+1)^2,$$

ahol r-et ezer dollárban, x-et ezer darabban mérik. Mennyi nyereséggel számolhat a vállalat 3000 habverő előállításából és eladásából? Úgy oldjuk meg a feladatot, hogy a relatív nyereséget integráljuk $x = 0$-tól $x = 3$-ig.

57. A költség meghatározása a relatív költségből: Egy poszter kinyomtatásának költsége, ha x posztert nyomtatunk:

$$\frac{dc}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

dollár. Határozzuk meg $c(100) - c(1)$-et, azaz a 2–100. poszterek kinyomtatásának költségét!

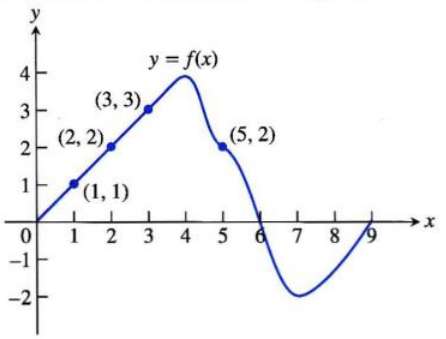
58. (*Az 57. feladat folytatása.*) Keressük meg $c(400) - c(100)$-at, azaz a 101–400. poszterek kinyomtatásának költségét!

Következtetések a mozgás grafikonjából

59. Legyen f egy differenciálható függvény, amelynek grafikonját a mellékelt ábra mutatja és tegyük fel, hogy az x-tengely mentén mozgó részecske helyzetét a t időpontban az

$$s = \int_0^t f(x)dx$$

függvény adja meg méterben. A grafikon segítségével válaszoljuk meg a következő kérdéseket és indokoljuk is!



(a) Mekkora a részecske sebessége a $t = 5$ időpontban?

(b) A $t = 5$ időpontban a részecske gyorsulása pozitív vagy negatív?

(c) Hol tartózkodik a részecske a $t = 3$ időpontban?

(d) Az első 9 másodpercben mikor veszi fel s a legnagyobb értéket?

(e) Hozzávetőleg mikor lesz a gyorsulása nulla?

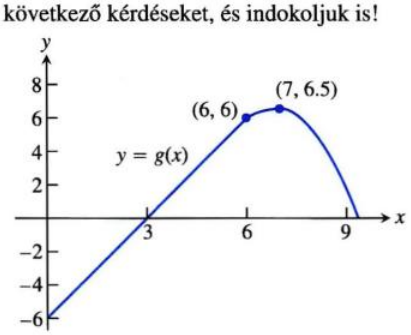
(f) Mikor távolodik a részecske a kezdőponttól? Mikor közeledik hozzá?

(g) A $t = 9$ időpontban az origótól jobbra vagy balra van a részecske?

60. Legyen g egy differenciálható függvény, amelynek grafikonját a mellékelt ábra mutatja és tegyük fel, hogy az x-tengely mentén mozgó részecske helyzetét a t időpontban az

$$s = \int_0^t g(x)dx$$

függvény adja meg méterben. A grafikon segítségével válaszoljuk meg a következő kérdéseket, és indokoljuk is!



(a) Mekkora a részecske sebessége a $t = 3$ időpontban?

(b) A $t = 3$ időpontban a részecske gyorsulása pozitív vagy negatív?

(c) Hol tartózkodik a részecske a $t = 3$ időpontban?

(d) Az első 9 másodpercben mikor veszi fel s a legnagyobb értéket?

(e) Mikor lesz nulla a gyorsulása?

(f) Mikor távolodik a részecske a kezdőponttól? Mikor közeledik hozzá?

(g) A $t = 9$ időpontban az origótól jobbra vagy balra van a részecske?

Elmélet és példák

61. Mutassuk meg, hogy ha k egy pozitív állandó, akkor az $y = \sin kx$ görbe két gyöke közé eső egy darabja és az x-tengely közé eső tartomány területe $2/k$.

62. Határozzuk meg

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t^4+1} dt$$

értékét!

63. Tegyük fel, hogy $\int_1^x f(t)dt = x^2 - 2x + 1$. Keressük $f(x)$-et!

64. Határozzuk meg $f(4)$ értékét, ha $\int_0^x f(t)dt = x\cos \pi x$!

65. Keressük meg

$$f(x) = 2 - \int_2^{x+1} \frac{9}{1+t} dt$$

linearizációját az $x = 1$ pontban!

66. Keressük meg

$$g(x) = 3 + \int_1^{x^2} \sec(t-1)dt$$

linearizációját az $x = -1$ pontban!

67. Tegyük fel, hogy f-nek minden x-re létezik deriváltja és az pozitív, továbbá, hogy $f(1) = 0$. A következő állítások közül melyek igazak a

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

függvényre?

(a) g az x-nek differenciálható függvénye.

(b) g az x-nek folytonos függvénye.

(c) Az $x = 1$ pontban g grafikonjának vízszintes az érintője.

(d) g-nek lokális maximuma van az $x = 1$ pontban.

(e) g-nek lokális minimuma van az $x = 1$ pontban.

(f) g-nek inflexiós pontja van az $x = 1$ pontban.

(g) dg/dx grafikonja az x-tengelyt az $x = 1$ pontban metszi.

68. Tegyük fel, hogy f-nek minden x-re létezik deriváltja és az negatív, továbbá hogy $f(1) = 0$. A következő állítások közül melyek igazak a

$$h(x) = \int_0^x f(t)dt$$

függvényre?

(a) h az x-nek kétszer differenciálható függvénye.

(b) h és dh/dx mindketten folytonosak.

(c) Az $x = 1$ pontban h grafikonjának vízszintes az érintője.

(d) h-nak lokális maximuma van az $x = 1$ pontban.

(e) h-nak lokális minimuma van az $x = 1$ pontban.

(f) h-nak inflexiós pontja van az $x = 1$ pontban.

(g) dh/dx grafikonja az x-tengelyt az $x = 1$ pontban metszi.

69. A Newton–Leibniz-tétel: Ha f folytonos, akkor azt várjuk, hogy

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$$

egyenlő legyen $f(x)$-szel, mint azt a Newton–Leibniz-tétel bizonyításának első részében láttuk. Például, ha $f(t) = \cos t$, akkor

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} \cos t dt = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}. \tag{5.10}$$

Az (5.10) egyenlőség jobb oldala a szinuszfüggvény differenciahányadosa, s azt várjuk, hogy annak határértéke $\cos x$.

Ábrázoljuk $\cos x$-et a $-\pi \le x \le 2\pi$ intervallumban! Azután, lehetőleg egy másik színnel, ábrázoljuk az (5.10) egyenlőség jobb oldalát is mint x függvényét a $h = 2$, 1, 0,5 és 0,1 értékek mellett! Figyeljük meg, hogyan konvergál ez a görbe a $\cos x$ grafikonjához, amint $h \to 0$!

70. A feladat ugyanaz, mint a 69. gyakorlatban, csak most legyen $f(t) = 3t^2$. Mi lesz az

$$\lim_{h\to 0} \int_0^{x+h} 3t^2 dt = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

határérték? Ábrázoljuk az $f(x) = 3x^2$ függvényt a $-1 \le x \le 1$ intervallumon! Azután ábrázoljuk a $((x+h)^3 - x^3)/h$ hányadost is mint x függvényét a $h = 1$, 0,5, 0,2 és 0,1 értékek esetén! Figyeljük meg, hogy az utóbbi görbe miként konvergál a $3x^2$ gráfhoz, amint $h \to 0$!

Számítógépes vizsgálatok

A 71–74 gyakorlatokban legyen $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, adott f függvényre és $[a,b]$ intervallumra. Számítógépes program (Maple, Mathematica stb.) segítségével hajtsuk végre a következő lépéseket, és válaszoljunk a feltett kérdésekre!

(a) Szerkesszük meg az f és az F függvényeket az $[a,b]$ intervallumon!

(b) Oldjuk meg az $F'(x) = 0$ egyenletet! Mit állíthatunk az f és az F függvények grafikonjairól abban a pontban, ahol $F'(x) = 0$? Megfigyelésünk túlmegy-e az Newton-Leibniz tétel első részéből, valamint az első deriváltból leszűrhető információkon? Válaszunkat indokoljuk!

(c) Hozzávetőleg mely intervallumokon nő illetve csökken az F függvény? Mit mondhatunk f-ről ezekben az intervallumokban?

(d) Számítsuk ki az f' deriváltat és ábrázoljuk F-fel közös koordinátarendszerben! Mit mondhatunk F grafikonjáról azokban a pontokban, amelyekben $f'(x) = 0$? Megfigyelésünk túlmutat az Newton-Leibniz tétel első részén? Válaszunkat indokoljuk!

71. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, $[0,4]$

72. $f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 46x^2 - 43x + 12$, $[0, \frac{9}{2}]$

73. $f(x) = \sin 2x \cos \frac{x}{3}$, $[0, 2\pi]$

74. $f(x) = x \cos \pi x$, $[0, 2\pi]$

A 75–78 feladatokban legyen $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)dt$, adott a-ra, u-ra és f-re. Számítógépes program (Maple, Mathematica stb.) segítségével hajtsuk végre a következő lépéseket, és válaszoljunk a feltett kérdésekre!

(a) Keressük meg F értelmezési tartományát!

(b) Számítsuk ki $F'(x)$-et, és határozzuk meg zérushelyeit! Értelmezési tartományának mely pontjaiban csökkenő, illetve növekvő az F függvény?

(c) Számítsuk ki $F''(x)$-et, és határozzuk meg zérushelyeit! Azonosítsuk be F lokális szélsőértékeit és inflexiós pontjait!

(d) A feladat (a)–(c) részében nyert információk alapján vázoljuk fel hozzávetőlegesen az $y = F(x)$ görbét F értelmezési tartományában! Vázlatos görbénk ellenőrzésére számítógéppel is rajzoltassuk meg $F(x)$ grafikonját!

75. $a = 1$, $u(x) = x^2$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

76. $a = 0$, $u(x) = x^2$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

77. $a = 0$, $u(x) = 1 - x$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$

78. $a = 0$, $u(x) = 1 - x^2$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$

A 79–80 gyakorlatokban feltesszük, hogy f folytonos és $u(x)$ kétszeresen differenciálható!

79. Számítsuk ki $\frac{d}{dx} \int_a^{u(x)} f(t)dt$ értékét, és eredményünket ellenőrizzük számítógépes program segítségével!

80. Számítsuk ki $\frac{d^2}{dx^2} \int_a^{u(x)} f(t)dt$ értékét, és eredményünket ellenőrizzük számítógépes program segítségével!

5.5. A határozatlan integrál és a helyettesítési szabály

A határozott integrál egy szám, amelyet egy véges, zárt intervallum felosztásaihoz rendelt Riemann-összegek határértékeként definiálunk, amikor a felosztások normája nullához tart. A Newton–Leibniz-tétel azt mondja ki, hogy egy folytonos függvény határozott integrálját könnyedén kiszámíthatjuk, ha ismerjük a függvény primitív függvényét. A primitív függvényt általában nehezebb meghatározni, mint a deriváltat. Ugyanakkor sok előnnyel jár, ha elsajátítjuk a primitív függvény meghatározására alkalmas módszereket.

Most emlékeztetünk arra (lásd 4.8. szakasz), hogy az f függvény *összes* primitív függvényének halmazát az f x szerinti **határozatlan integráljának** nevezzük és a

$$\int f(x)dx$$

szimbólummal jelöljük. Ezt a jelölést a primitív függvény és a határozott integrál között fennálló, a Newton–Leibniz-tételben megfogalmazott kapcsolat indokolja. Ha valamely f függvény határozatlan integrálját keressük, mindig gondoljunk arra, hogy az csupán egy tetszőleges C állandó erejéig meghatározott.

A határozott és a határozatlan integrált gondosan meg kell különböztetnünk egymástól. Az $\int_a^b f(x)dx$ határozott integrál egy *szám*. Az $\int f(x)dx$ határozatlan integrál egy tetszőleges C állandóval kiegészített *függvény*.

Eddig csupán olyan függvények primitív függvényeit voltunk képesek meghatározni, amelyekről nyilvánvaló volt, hogy deriváltak. Ebben a szakaszban általánosabb módszereket keresünk a primitív függvény meghatározására. Az elsőként vizsgált integrálási technikák olyan, a derivált meghatározására alkalmas módszereknek az inverzei, amilyen a hatványfüggvény deriváltjának szabálya és a láncszabály.

Hatványfüggvény deriváltja integrálalakban

Ha u az x differenciálható függvénye, és n a -1-től különböző racionális szám, akkor a láncszabály szerint

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u^n \frac{du}{dx}.$$

Másfelől viszont ez az egyenlőség azt jelenti, hogy $u^{n+1}/(n+1)$ az $u^n(du/dx)$ függvény egyik primitív függvénye. Ezért

$$\int \left(u^n \frac{du}{dx}\right) dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C.$$

Az egyenlőség bal oldalán álló integrált szokás átírni az egyszerűbb

$$\int u^n du$$

„differenciális" alakba, amit úgy kapunk, hogy a dx-eket differenciáloknak tekintjük, és egyszerűsítünk velük. Ezzel a következő szabályhoz jutunk.

Ha u differenciálható függvény, akkor

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1,\ n \text{ racionális}), \tag{5.11}$$

ahol $du = u'(x)dx$ az u differenciálja.

Amint azt a 7. fejezetben látni fogjuk, az (5.11) egyenlőség minden $n \neq -1$ kitevőre teljesül.

Az (5.11) egyenlőség levezetése során u-t az x változó differenciálható függvényének tekintettük, de a változó nevének semmi jelentősége nincs, és nem is jelenik meg az egyenlőség végső alakjában. A változót ugyanúgy jelölhette volna θ, t, y vagy bármilyen más betű. Az (5.11) egyenlőség azt mondja ki, hogy ha egy integrált fel tudunk írni

$$\int u^n du, \quad (n \neq -1)$$

alakban, ahol u egy differenciálható függvény és du a differenciálja, akkor az integrál értéke $[u^{n+1}/(n+1)]+C$.

1. PÉLDA: **A hatványfüggvény deriválási szabályának alkalmazása**

$$\int \sqrt{1+y^2}\cdot 2y dy = \int \sqrt{u}\cdot\left(\frac{du}{dy}\right)dy = \qquad \text{Legyen } u = 1+y^2,\ du/dv = 2v.$$

$$= \int u^{1/2} du = $$

$$= \frac{u^{(1/2)+1}}{(1/2)+1} + C = \qquad \text{Integrálunk, az (5.11) egyenlőséget alkalmazzuk } n = 1/2\text{-re.}$$

$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \qquad \text{Egyszerűbb alakra hozzuk.}$$

$$= \frac{2}{3}(1+y^2)^{3/2} + C. \qquad u \text{ helyére } 1+y^2\text{-et írunk.}$$

2. PÉLDA: **Konstans szorzó kiemelése az integrandusban**

$$\int \sqrt{4t-1}dt = \int \frac{1}{4}\cdot\sqrt{4t-1}\cdot 4dt = $$

$$= \frac{1}{4}\int \sqrt{u}\cdot\left(\frac{du}{dt}\right)dt = \qquad \text{Legyen } u = 4t-1,\ du/dt = 4.$$

$$= \frac{1}{4}\int u^{1/2} du = \qquad \text{Azzal, hogy az } 1/4\text{-et kivittük az integráljel elé, az integrál egyszerű alakot öltött.}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \qquad \text{Integrálunk, az (5.11) egyenlőséget alkalmazzuk } n = 1/2\text{-re.}$$

$$= \frac{1}{6}u^{3/2} + C = \qquad \text{Egyszerűbb alakra hozzuk.}$$

$$= \frac{1}{6}(4t-1)^{3/2} + C. \qquad u \text{ helyére } 4t-1\text{-et írunk.}$$

Helyettesítés: a láncszabály fordított irányú alkalmazása

Az 1. és 2. példákban alkalmazott helyettesítések az alábbi általános szabály egyedi esetei.

5. TÉTEL: **Helyettesítési szabály**

Ha az $u = g(x)$ függvény differenciálható az I intervallumon és f folytonos I-n, akkor

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

Bizonyítás: A szabály azért igaz, mert a láncszabály szerint $F(g(x))$ az $f(g(x))\cdot g'(x)$ egy primitív függvénye, ha F primitív függvénye f-nek:

$$\frac{d}{dx}F'(g(x)) = F'(g(x))\cdot g'(x) = \qquad \text{láncszabály}$$

$$= f(g(x))\cdot g'(x). \qquad \text{mert } F' = f$$

Ha elvégezzük az $u = g(x)$ helyettesítést, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int f(g(x))g'(x)dx &= \int \frac{d}{dx}F(g(x))dx = \\
&= F(g(x)) + C = && \text{Newton–Leibniz-tétel} \\
&= F(u) + C = && u = g(x) \\
&= \int F'(u)du = && \text{Newton–Leibniz-tétel} \\
&= \int f(u)du. && F' = f
\end{aligned}$$

□

A helyettesítési szabály, amennyiben f és g' folytonos függvények, az

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

integrál meghatározására a következő módszert kínálja:

1. Az $u = g(x)$ és $du = g'(x)dx$ helyettesítésekkel hozzuk az integrált az

$$\int f(u)du$$

alakra!

2. Integráljunk u szerint!

3. Az eredményben u helyére írjunk $g(x)$-et!

3. PÉLDA: **A helyettesítési szabály alkalmazása**

$$\begin{aligned}
\int \cos(7\theta + 5)d\theta &= \int \cos u \cdot \frac{1}{7}du = && \text{Legyen } u = 7\theta + 5,\ du = 7d\theta,\ (1/7)du = d\theta. \\
&= \frac{1}{7}\int \cos u du = && \text{Ha az } 1/7\text{-et kivisszük az integráljel elé, az integrál egyszerű alakot ölt.} \\
&= \frac{1}{7}\sin u + C = && \text{Integrálunk } u \text{ szerint (lásd 4.2. táblázat).} \\
&= \frac{1}{7}\sin(7\theta + 5) + C. && u\text{-t helyettesítjük } 7\theta + 5\text{-tel.}
\end{aligned}$$

Az eredményt deriválással ellenőrizhetjük, és látni fogjuk, hogy visszakapjuk az eredeti $\cos(7\theta + 5)$ függvényt.

4. PÉLDA: **A helyettesítési szabály alkalmazása**

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin(x^3)dx &= \int \sin(x^3) \cdot x^2 dx = \\
&= \int \sin u \cdot \frac{1}{3}du = && \text{Legyen } u = x^3,\ du = 3x^2dx,\ (1/3)du = x^2dx. \\
&= \frac{1}{3}\int \sin u du = \\
&= \frac{1}{3}(-\cos u) + C = && \text{Integrálunk } u \text{ szerint.} \\
&= -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C. && u\text{-t helyettesítjük } x^3\text{-nel.}
\end{aligned}$$

5. PÉLDA: **Azonosságok és helyettesítés**

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos^2 2x}dx &= \int \sec^2 2x dx = && \tfrac{1}{\cos 2x} = \sec 2x \\
&= \int \sec^2 u \cdot \frac{1}{2} du = && u = 2x,\ du = 2dx,\ dx = (1/2)du \\
&= \frac{1}{2}\int \sec^2 u du = \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{tg} u + C = && \tfrac{d}{du}\operatorname{tg} u = \sec^2 u \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x + C. && u = 2x
\end{aligned}$$

A helyettesítéses módszer sikere azon áll vagy bukik, hogy megtaláljuk-e azt a helyettesítést, amely integrálunkat olyan integrállá változtatja, amelyet már közvetlenül ki tudunk számítani. Ha az első helyettesítés nem hoz eredményt, próbáljuk meg további helyettesítéssel vagy helyettesítésekkel egyszerűsíteni az integrált (lásd a 49. és 50. feladatot)! A másik lehetőség, hogy elölről kezdjük. A megoldáshoz többféle úton is eljuthatunk, amint azt a következő példa is mutatja.

6. PÉLDA: **Különféle helyettesítések**

Számítsuk ki az

$$\int \frac{2zdz}{\sqrt[3]{z^2+1}}$$

integrált!

Megoldás: A helyettesítéses integrálás módszerét afféle kutatóeszközként használhatjuk: helyettesítsük az integrandus legzavaróbb részét és nézzük meg, mire jutunk. A fenti integrálban alkalmazhatjuk az $u = z^2 + 1$ helyettesítést, de szerencsét próbálhatunk úgy is, hogy az egész köbgyökös kifejezést tekintjük u-nak. Lássuk mi történik ezekben az esetekben!

1. megoldás: Tekintsük az $u = z^2 + 1$ helyettesítést:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2zdz}{\sqrt[3]{z^2+1}} &= \int \frac{du}{u^{1/3}} = && \text{Legyen } u = z^2+1,\ du = 2zdz. \\
&= \int u^{-1/3} du = && \text{Az integrált } \textstyle\int u^n du \text{ alakra hoztuk.} \\
&= \frac{u^{2/3}}{2/3} + C = && \text{Integráltunk } u \text{ szerint.} \\
&= \frac{3}{2}u^{2/3} + C = \\
&= \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C. && u\text{-t helyettesítettük } z^2+1\text{-gyel.}
\end{aligned}$$

2. megoldás: Tekintsük az $u = \sqrt[3]{z^2+1}$ helyettesítést:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2zdz}{\sqrt[3]{z^2+1}} &= \int \frac{3u^2 du}{u} = && \text{Legyen } u = \sqrt[3]{z^2+1},\ u^3 = z^2+1,\ 3u^2du = 2zdz \\
&= 3\int u du = \\
&= 3 \cdot \frac{u^2}{2} + C = && \text{Integráltunk } u \text{ szerint.} \\
&= \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C. && u\text{-t helyettesítettük } (z^2+1)^{1/3}\text{-nal.}
\end{aligned}$$

□

$\sin^2 x$ és $\cos^2 x$ integrálja

Az integrálok átalakításában néha hasznos szerepet játszanak a trigonometrikus azonosságok. Íme egy példa, amelynek eredménye a gyakorlati alkalmazásokban sűrűn előforduló $\sin^2 x$ és $\cos^2 x$ integrálképlete.

7. PÉLDA:

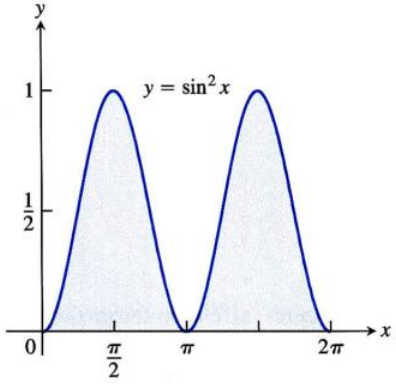
Mivel $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

(a)
$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx =$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

(b)
$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx =$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

Mint a feladat (a) részében, csak ellentétes előjellel.



5.24. ÁBRA: Az $y = \sin^2 x$ görbe alatti terület a $[0, 2\pi]$ intervallumon π területegység (8. példa).

8. PÉLDA: **Az $y = \sin^2 x$ görbe alatti terület**

Az 5.24. ábra a $g(x) = \sin^2 x$ grafikonját mutatja a $[0, 2\pi]$ intervallumon. Számítsuk ki

(a) $g(x)$ határozott integrálját a $[0, 2\pi]$ intervallumon,

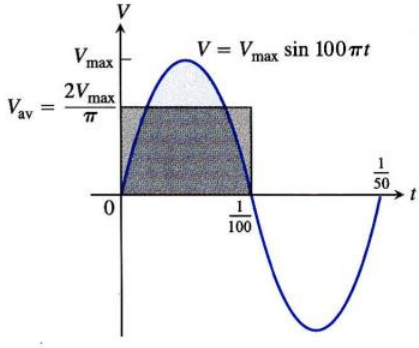
(b) a függvény grafikonja és az az x-tengely közötti területet a $[0, 2\pi]$ intervallumon!

Megoldás:

(a) A 7(a) példa alapján a határozott integrál:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{2\pi} = \left[\frac{2\pi}{2} - \frac{\sin 4\pi}{4}\right] - \left[\frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4}\right] =$$
$$= [\pi - 0] - [0 - 0] = \pi.$$

(b) A $\sin^2 x$ függvény nemnegatív, ezért a terület egyenlő a határozott integrállal, azaz π-vel. □



5.25. ÁBRA: A $V = V_{\max} \sin 100\pi t$ feszültség grafikonja egy teljes periódusban. Egy félperiódusban a feszültség átlagértéke $2V_{\max}/\pi$. Egy teljes periódusban az átlagérték nulla (9. példa).

9. PÉLDA: **Háztartási elektromosság**

A lakásokban alkalmazott vezetékes áram feszültségét a

$$V = V_{\max} \sin 100\pi t$$

szinuszfüggvénnyel írhatjuk le, ahol a feszültséget voltban, az időt másodpercben mérjük. A függvény másodpercenként 50 perióduson fut végig (frekvenciája 50 Herz). A $V_{\max}$ pozitív állandó a **csúcsfeszültség**.

A 0 és 1/100 másodperc közötti fél ciklusban (lásd az 5.25. ábrát) V átlagértéke:

$$V_{\text{átlag}} = \frac{1}{(1/100)-0}\int_0^{1/100} V_{\max} \sin 100\pi dt =$$
$$= 100V_{\max}\left[-\frac{1}{100\pi}\cos 100\pi t\right]_0^{1/100} =$$
$$= \frac{V_{\max}}{\pi}[-\cos\pi + \cos 0] =$$
$$= \frac{2V_{\max}}{\pi}.$$

Egy teljes periódusban a feszültség átlagértéke nulla, mint azt az 5.25. ábráról láthatjuk. (Lásd még a 63. feladatot.) Ha a feszültséget egy szabványos forgótekercses galvanométerrel mérjük, az nulla feszültséget fog mutatni. A feszültséget valójában egy olyan műszerrel mérhetjük meg, amely a feszültségnégyzet átlagértékének négyzetgyökét méri, azaz

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{(V^2)_{\text{átlag}}}.$$

Mivel $V^2 = (V_{\max})^2 \sin^2 100\pi t$ átlagértéke egy teljes periódusra:

$$(V^2)_{\text{átlag}} = \frac{1}{(1/50)-0} \int_0^{1/50} (V_{\max})^2 \sin^2 100\pi t dt = \frac{(V_{\max})^2}{2}$$

(63. feladat (c) része), ezért az effektív feszültség:

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{(V_{\max})^2}{2}} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

A háztartási elektromosság áramerősségére és feszültségére mindig az effektív értékeket adjuk meg. A „230 voltos váltakozó áram" kifejezés valójában azt jelenti, hogy az effektív feszültség 230 V. A legutóbbi egyenlőségből kiszámíthatjuk ennek az áramnak a csúcsfeszültségét is:

$$V_{\max} = \sqrt{2} V_{\text{eff}} = \sqrt{2} \cdot 230 \approx 325 \text{ volt},$$

ami lényegesen magasabb érték.

5.5. Feladatok

Az integrál kiszámítása

Az 1–12. feladatokban számítsuk ki a határozatlan integrálok értékét és hozzuk őket a megszokott alakra!

1. $\int \sin 3x\,dx, \quad u = 3x$
2. $\int x \sin(2x^2)dx, \quad u = 2x^2$
3. $\int \sec 2t \operatorname{tg} 2t\,dt, \quad u = 2t$
4. $\int \left(1-\cos\frac{t}{2}\right)^2 \sin\frac{t}{2}\,dt, \quad u = 1-\cos\frac{t}{2}$
5. $\int 28(7x-2)^{-5}dx, \quad u = 7x-2$
6. $\int x^3(x^4-1)dx, \quad u = x^4-1$
7. $\int \frac{9r^2dr}{\sqrt{1-r^3}}, \quad u = 1-r^3$
8. $\int 12(y^4+4y^2+1)^2(y^3+2y)dy, \quad u = y^4+4y^2+1$
9. $\int \sqrt{x}\sin^2(x^{3/2}-1)dx, \quad u = x^{3/2}-1$
10. $\int \frac{1}{x^2}\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)dx, \quad u = -\frac{1}{x}$
11. $\int \csc^2 2\theta \operatorname{ctg} 2\theta\,d\theta$
    (a) Legyen $u = \operatorname{ctg} 2\theta$
    (b) Legyen $u = \csc 2\theta$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+8}}$
    (a) Legyen $u = 5x+8$
    (b) Legyen $u = \sqrt{5x+8}$

A 13–48. feladatokban számítsuk ki az integrálokat!

13. $\int \sqrt{3-2s}\,ds$
14. $\int (2x+1)^3 dx$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}}$
16. $\int \frac{3dx}{(2-x)^2}$
17. $\int \theta\sqrt[4]{1-\theta^2}\,d\theta$
18. $\int 8\theta\sqrt[3]{\theta^2-1}d\theta$
19. $\int 3y\sqrt{7-3y^2}dy$
20. $\int \frac{4ydy}{\sqrt{2y^2+1}}$
21. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}dx$
22. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}dx$
23. $\int \cos(3z+4)dz$
24. $\int \sin(8z-5)dz$
25. $\int \sec^2(3x+2)dx$
26. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\,dx$
27. $\int \sin^5\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}dx$
28. $\int \operatorname{tg}^7\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx$
29. $\int r^2\left(\frac{r^3}{18}-1\right)dr$
30. $\int r^4\left(7-\frac{r^5}{10}\right)^3 dr$
31. $\int x^{1/2}\sin(x^{3/2}+1)dx$
32. $\int x^{1/3}\sin(x^{4/3}-8)dx$
33. $\int \sec\left(v+\frac{\pi}{2}\right)dv$
34. $\int \csc\left(\frac{v-\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{v-\pi}{2}\right)dv$
35. $\int \frac{\sin(2t+1)}{\cos^2(2t+1)}dt$
36. $\int \frac{5\cos t}{(2+\sin t)^3}dt$
37. $\int \sqrt{\operatorname{ctg} y}\csc^2 z\,dz$
38. $\int \frac{\sec y \operatorname{tg} y}{\sqrt{\sec y}}dy$
39. $\int \frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{1}{t}-1\right)dt$
40. $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\cos(\sqrt{t}+3)dt$
41. $\int \frac{1}{\theta^2}\sin\frac{1}{\theta}\cos\frac{1}{\theta}\,d\theta$
42. $\int \frac{\cos\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}\sin^2\sqrt{\theta}}d\theta$
43. $\int (s^3+2s^2-5s+5)(3s^2+4s-5)ds$
44. $\int (\theta^4-2\theta^2+8\theta-2)(\theta^3-\theta+2)d\theta$
45. $\int t^3(1+t^4)^3dt$
46. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}dx$
47. $\int x^3\sqrt{x^2+1}dx$
48. $\int 3x^5\sqrt{x^3+1}dx$

Az integrál egyszerűsítése lépésről lépésre

Ha nem tudjuk eldönteni, milyen helyettesítést lenne célszerű alkalmaznunk, akkor próbáljuk meg helyettesítéssel lépésről lépésre egyszerűsíteni az adott integrált! Rögtön látni fogják, mire gondolunk, ha rendre elvégzik a 49. és 50. feladatokban javasolt helyettesítéseket.

49. $\int \frac{18\,\mathrm{tg}^2 x \sec^2 x}{(2+\mathrm{tg}^3 x)^2}\,dx$

(a) Először legyen $u = \mathrm{tg}\,x$, aztán $v = u^3$, majd $w = 2+v$.

(b) Először legyen $u = \mathrm{tg}^3 x$, aztán $v = 2+u$.

(c) Legyen $u = 2+\mathrm{tg}^3 x$.

50. $\int \sqrt{1+\sin^2(x-1)}\sin(x-1)\cos(x-1)\,dx$

(a) Először legyen $u = x-1$, aztán $v = \sin u$, majd $w = 1+v^2$.

(b) Először legyen $u = \sin(x-1)$, aztán $v = 1+u^2$.

(c) Legyen $u = 1+\sin^2(x-1)$.

Számítsuk ki az 51. és 52. feladatok integráljait!

51. $\int\int \frac{(2r-1)\cos\sqrt{3(2r-1)^2+6}}{\sqrt{3(2r-1)^2+6}}\,dr$

52. $\int \frac{\sin\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}\cos^3\sqrt{\theta}}\,d\theta$

Kezdetiérték-problémák

Oldjuk meg az 53–58. feladatok kezdetiérték-problémáit!

53. $\frac{ds}{dt} = 12t(3t^2-1),\quad s(1) = 3$

54. $\frac{dy}{dx} = 4x(x^2+8)^{-1/3},\quad y(0) = 0$

55. $\frac{ds}{dt} = 8\sin^2\left(t+\frac{\pi}{12}\right),\quad s(0) = 8$

56. $\frac{dr}{d\theta} = 3\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right),\quad r(0) = \frac{\pi}{8}$

57. $\frac{d^2s}{dt^2} = -4\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right),\quad s'(0) = 100,\quad s(0) = 0$

58. $\frac{d^2y}{dx^2} = 4\sec^2 2x\,\mathrm{tg}\,2x,\quad y'(0) = 4,\quad y(0) = -1$

59. Egy egyenes mentén előre-hátra mozgó részecske sebességét bármely t időpontban a $v = ds/dt = 6\sin 2t$ m/s összefüggés adja meg. Határozzuk meg s értékét a $t = \pi/2$ időpontban, ha $t = 0$ esetén $s = 0$!

60. Egy egyenes mentén előre-hátra mozgó részecske gyorsulása $a = d^2s/dt^2 = \pi^2\cos\pi t$ m/s. Határozzuk meg s értékét a $t = 1$ s időpontban, ha $t = 0$ esetén $s = 0$ és $v = 8$ m/s!

Elmélet példákkal

61. Úgy tűnik, hogy $2\sin x\cos x$-et 3 különböző módon integrálhatjuk x szerint:

(a)

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = \int 2u\,du = \qquad u = \sin x$$
$$= u^2 + C_1 = \sin^2 x + C_1,$$

(b)

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = \int -2u\,du = \qquad u = \cos x$$
$$= -u^2 + C_2 = -\cos^2 x + C_2,$$

(c)

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = \int \sin 2x\,dx = \qquad 2\sin x\cos x = \sin 2x$$
$$= -\frac{\cos 2x}{2} + C_3.$$

Lehet-e helyes mindhárom integrál? Válaszunkat indokoljuk!

62. Az $u = \mathrm{tg}\,x$ helyettesítés az

$$\int \sec^2 x\,\mathrm{tg}\,x\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} + C$$

eredményt adja. Az $u = \sec x$ helyettesítés a

$$\sec^2 x\,\mathrm{tg}\,x\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sec^2 x}{2} + C$$

eredményt adja. Lehet-e helyes mindkét integrál? Válaszunkat indokoljuk!

63. *(A 9. példa folytatása.)*

(a) A

$$\frac{1}{(1/50)-0}\int_0^{1/50} V_{\max}\sin 100\pi t\,dt$$

kifejezésben szereplő integrált kiszámítva mutassuk meg, hogy egy teljes periódus alatt $V = V_{\max}\sin 100\pi t$ átlagértéke nulla!

(b) Az elektromos kandallók 240 volt névleges effektív feszültséget igényelnek. Mi az engedélyezett feszültség csúcsértéke?

(c) Mutassuk meg, hogy

$$\int_0^{1/50} (V_{\max})^2\sin^2 100\pi t\,dt = \frac{(V_{\max})^2}{100}.$$

5.6. Helyettesítés és görbék által közbezárt terület

A helyettesítéssel való integrálás kétféle módon is történhet. Az első módszer az, hogy helyettesítéssel megkeressük a primitív függvényt, s az integrált a Newton–Leibniz-tételre támaszkodva számítjuk ki. A második módszer az eljárást közvetlenül a *határozott* integrálra alkalmazza. Az itt bevezetett új képletet két görbe közötti terület meghatározására fogjuk alkalmazni.

Helyettesítéses formula

A következő képletben az integrálás határai is megváltoznak azzal, hogy az integrál változója a helyettesítés miatt megváltozik.

6. TÉTEL: **Helyettesítés a határozott integrálban**
Ha g' folytonos az $[a,b]$ intervallumon és f folytonos g értékkészletének halmazán, akkor

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Bizonyítás: Jelölje F az f egy primitív függvényét! Akkor

$$\int_a^b f(g(x))dx\cdot g'(x)dx = \Big[F(g(x))\Big]_{x=a}^{x=b} = \qquad \tfrac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

$$= F(g(b)) - F(g(a)) =$$

$$= \Big[F(u)\Big]_{u=g(a)}^{u=g(b)} =$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du. \qquad \text{Newton–Leibniz-tétel 2. része}$$

□

A képlet alkalmazásához ugyanúgy el kell végezni az $u = g(x)$ és $du = g'(x)dx$ helyettesítést, mintha a megfelelő határozatlan integrálra lennénk kíváncsiak. Aztán ezt az átalakított integrált u szerint integráljuk a $g(a)$ (u értéke az $x = a$ helyen) és $g(b)$ (u értéke az $x = b$ helyen) határok között.

1. PÉLDA: **Helyettesítés két módszerrel**
Számítsuk ki az $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ integrált!

Megoldás: Két választásunk van.
Első módszer: átalakítjuk az integrált, majd azt a 6. tételben megszabott határok között integráljuk.

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx = \int_0^2 \sqrt{u}du = \qquad \begin{array}{l}\text{Legyen } u = x^3+1,\ du = 3x^2dx.\\ \text{Ha } x=-1,\ u=(-1)^3+1=0.\\ \text{Ha } x=1,\ u=(1)^3+1=2.\end{array}$$

$$= \frac{2}{3}\Big[u^{3/2}\Big]_0^2 = \qquad \text{Értéket adunk az új integrálnak.}$$

$$= \frac{2}{3}\Big[2^{3/2} - 0^{3/2}\Big] = \frac{2}{3}\Big[2\sqrt{2}\Big] = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Második módszer: az integrált határozatlan integrálként kezelve átalakítjuk, integrálunk, majd visszahelyettesítjük x-et és az eredeti integrálási határokkal számolunk.

$$\int 3x^2\sqrt{x^3+1}dx = \int \sqrt{u}du = \qquad \text{Legyen } u = x^3+1,\ du = 3x^2dx$$

$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \qquad \text{Integrálunk } u \text{ szerint}$$

$$= \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2} + C \qquad u\text{-t } x^3+1\text{-gyel helyettesítjük.}$$

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx = \frac{2}{3}\left[(x^3+1)^{3/2}\right]_{-1}^{1} = \qquad \text{A kapott integrált az } x \text{ szerinti határokra kiértékeljük.}$$

$$= \frac{2}{3}\left[((1)^3+1)^{3/2} - ((-1)^3+1)^{3/2}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[2^{3/2} - 0^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\left[2\sqrt{2}\right] = \frac{4\sqrt{2}}{3}. \qquad \square$$

Hogy melyik módszer a célravezetőbb – a 6. tétel alkalmazásával a transzformált határozott integrált a transzformált határok között kiértékelni, vagy átalakítani az integrált, integrálni, és visszaállítani az eredeti integrálási határokat? Az 1. példában az első módszer tűnik az egyszerűbbnek, de nem mindig ez a helyzet. Általánosságban az a legjobb, ha mindkét módszert ismerjük, és mindig azt használjuk, amelyik az adott szituációban inkább megfelel.

2. PÉLDA: **A helyettesítéses formula használata**

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg}\theta \csc^2\theta d\theta = \int_{1}^{0} u\cdot(-du) = \qquad \begin{array}{r} \text{Legyen } u = \operatorname{ctg}\theta,\ du = -\csc^2\theta\, d\theta, \\ -du = \csc^2\theta\, d\theta, \\ \text{ha } \theta = \pi/4,\ u = \operatorname{ctg}(\pi/4) = 1, \\ \text{ha } \theta = \pi/2,\ u = \operatorname{ctg}(\pi/2) = 0. \end{array}$$

$$= -\int_{1}^{0} udu =$$

$$= -\left[\frac{u^2}{2}\right]_{1}^{0} =$$

$$= -\left[\frac{(0)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$

Szimmetrikus függvények határozott integrálja

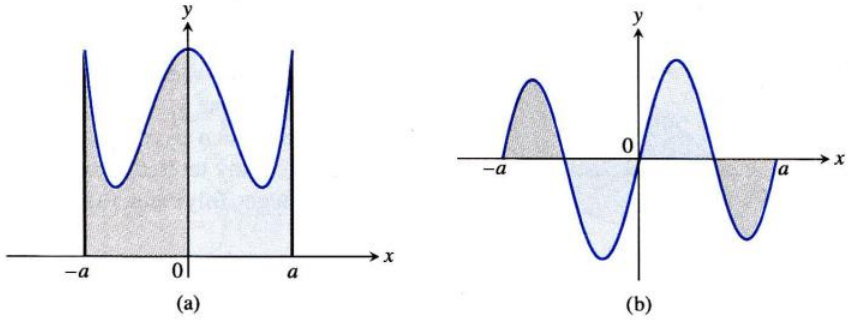
A 6. tétel helyettesítéses képlete leegyszerűsíti a páros és páratlan függvények (1.4. szakasz) határozott integráljának kiszámítását egy szimmetrikus $[-a,a]$ intervallumon (5.26. ábra).

7. TÉTEL:

Legyen f folytonos a szimmetrikus $[-a,a]$ intervallumon.

(a) Ha f páros, akkor $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

(b) Ha f páratlan, akkor $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.



5.26. ÁBRA: (a) f páros, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$; (b) f páratlan, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

A tétel (a) részének bizonyítása:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

A határozott integrálra érvényes additivitási szabály miatt.

$$= -\int_{0}^{-a} f(x)dx + \int_{0}^{a} d(x)dx =$$

$$= -\int_{0}^{a} f(-u)(-du) + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

Legyen $u = -x$, $du = -dx$. Ha $x = 0$, akkor $u = 0$. Ha $x = -a$, akkor $u = a$.

$$= \int_{0}^{a} f(-u)du + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{a} f(u)du + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

f páros, így $f(-u) = f(u)$.

$$= 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

A tétel (b) részének bizonyítása teljesen hasonlóan történik, ez lesz a 86. feladat. □

A 7. tétel akkor is érvényes, ha f integrálható (nem kell teljesítenie a folytonosság erősebb kritériumát), de ekkor a tétel bizonyítása már jóval nehezebb, az integrálközelítő összegekre kell visszavezetni.

3. PÉLDA: **Páros függvény integrálja**

Számítsuk ki a $\int_{-2}^{2}(x^4 - 4x^2 + 6)dx$ határozott integrált!

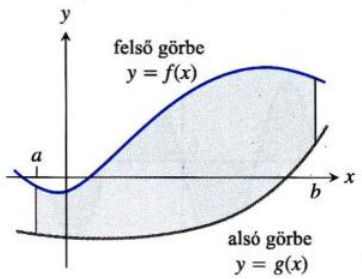
Megoldás: Mivel az $f(x) = x^4 - 4x^2 + 6$ függvény a $[-2,2]$ intervallumon teljesíti az $f(-x) = f(x)$ feltételt, ezért páros, így

$$\int_{-2}^{2}(x^4 - 4x^2 + 6)dx = 2\int_{0}^{2}(x^4 - 4x^2 + 6)dx =$$

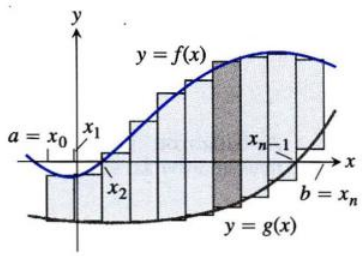
$$= 2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 6x\right]_0^2 =$$

$$= 2\left(\frac{32}{5} - \frac{32}{3} + 12\right) = \frac{232}{15}.$$

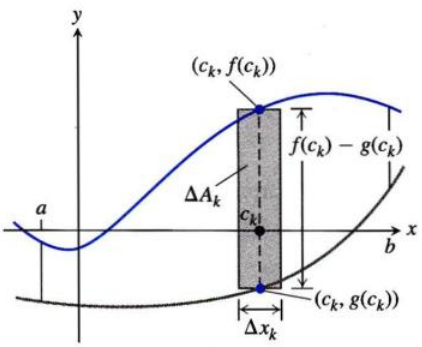
□



5.27. ÁBRA: Az $y = f(x)$ és $y = g(x)$ valamint az $x = a$ és $x = b$ egyenesek által határolt tartomány.



5.28. ÁBRA: A tartományt az x-tengelyre merőleges téglalapokkal közelítjük.



5.29. ÁBRA: A k-adik téglalap ΔA_k területe a téglalap $f(c_k) - g(c_k)$ magasságának és Δx_k szélességének a szorzata.

Görbék által határolt tartományok területe

Tegyük fel, hogy szeretnénk meghatározni annak a tartománynak a területét, amelyet felülről az $y = f(x)$ görbe, alulról az $y = g(x)$ görbe, balról és jobbról pedig az $x = a$ és $x = b$ egyenesek határolnak (5.27. ábra). Előfordulhat, hogy a tartomány területét meg lehet határozni geometriai módszerrel, ám ha f és g tetszőleges folytonos függvények lehetnek, akkor általában az integrálás a megoldás.

Hogy lássuk, milyen is lesz ez az integrál, először közelítsük a tartományt n függőleges téglalappal, amelyeket $[a,b]$ egy $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ felosztásával nyerünk (5.28. ábra)! A k-adik téglalap területe

$$\Delta A_k = \text{magasság} \times \text{szélesség} = [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k$$

lesz (lásd 5.29. ábra). A tartomány területét úgy közelítjük, hogy az n téglalap területét összeadjuk:

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} [f)c_k) - g(c_k)]\Delta x_k. \qquad \text{Riemann-összeg}$$

Ahogy $\|P\| \to 0$, a jobb oldali összeg a $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ határértékhez tart, mert f és g folytonosak. A tartomány területét ennek az integrálnak az értékeként határozzuk meg, azaz

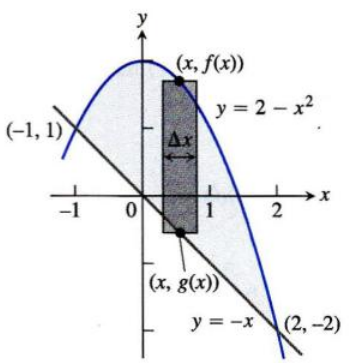
$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

DEFINÍCIÓ: **Görbék által határolt terület**

Ha f és g az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvények, továbbá $f(x) \geq g(x)$, akkor az $y = f(x)$ **és** $y = g(x)$ **görbék közötti tartomány** a **és** b **közé eső darabjának területe** az $(f - g)$ függvény a-tól b-ig vett integrálja:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

A definíció alkalmazását megkönnyíti, ha fölrajzoljuk a görbéket. Az ábra megmutatja, melyik lesz a felső f görbe és melyik az alsó g görbe. A rajzból könnyebben kideríthetjük az integrálás határait is, ha azok nem ismertek. Az integrálás határainak megállapításához tudnunk kell, hogy hol metszik egymást a görbék, s ehhez meg kell oldanunk x-re az $f(x) = g(x)$ egyenletet. Ezután integrálhatjuk az $f - g$ függvényt a metszéspontok között.



5.30. ÁBRA: A 4. példában megadott tartomány egy közelítő téglalappal.

4. PÉLDA: **Metsző görbék által közbezárt tartomány területe**

Határozzuk meg az $y = 2 - x^2$ parabola és az $y = -x$ egyenes által közbezárt tartomány területét!

Megoldás: Először rajzoljuk fel a két görbét (5.30. ábra)! Az integrációs határokat a $2 - x^2 = -x$ megoldásai adják:

$2 - x^2 = -x$	$f(x)$-et és $g(x)$-et egymással egyenlővé tesszük.
$x^2 - x - 2 = 0$	Átrendezünk.
$(x+1)(x-2) = 0$	Szorzattá alakítunk.
$x = -1, \quad x = 2.$	A két megoldás.

A tartomány az $x = -1$ és $x = 2$ értékek között helyezkedik el. Az integrálás határai: $a = -1, b = 2$.

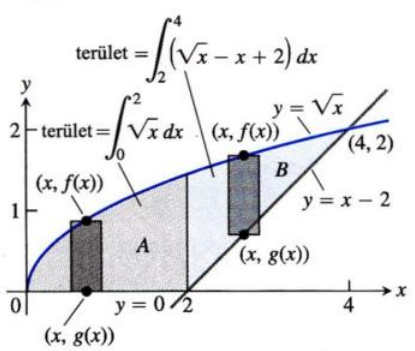
A görbék által közrefogott tartomány területe:

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx=\int_{-1}^{2}[(2-x^2)-(-x)]dx=$$
$$=\int_{-1}^{2}(2+x-x^2)dx=\left[2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=$$
$$=\left(4+\frac{4}{2}-\frac{8}{3}\right)-\left(-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{2}. \qquad \square$$

Ha a határoló görbét megadó képlet egy vagy több pontban is megváltozik, akkor a tartományt megfelelő résztartományokra kell bontani, s a résztartományok területét egyenként, a megfelelő képlet alkalmazásával kell meghatározni.

5. PÉLDA: Az integrál változása a határgörbe változásának függvényében

Határozzuk meg annak az első síknegyedbeli tartománynak a területét, amelyet felülről az $y=\sqrt{x}$ görbe, alulról pedig az x-tengely és az $y=x-2$ egyenes határolnak.



5.31. ÁBRA: Ha a határoló görbét megadó képlet változik, akkor a területet integrálok összegeként kapjuk meg, az 5. példa esetében pl. a két különböző árnyalatban satírozott tartományok területösszegeként.

Megoldás: A rajz (5.31. ábra) mutatja, hogy a tartományt felülről az $f(x)=\sqrt{x}$ függvény grafikonja határolja. Az alsó határvonala $0\le x\le 2$ közötti értékekre a $g(x)=0$ egyenes, $2\le x\le 4$ közötti értékekre pedig a $g(x)=x-2$ egyenes. A tartományt az 5.31. ábrán látható módon az $x=2$ helyen két tartományra, A-ra és B-re bontjuk.

Az A tartományra $a=0$ és $b=2$ lesznek az integrálási határok. A B tartományra az integrálás alsó határa $a=2$. A felső határt úgy állapíthatjuk meg, hogy megnézzük, milyen x értékre lesz egyenlő $y=\sqrt{x}$ és $y=x-2$:

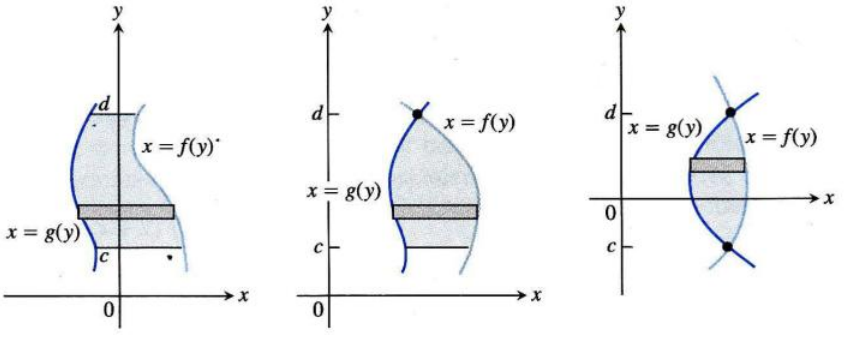
$\sqrt{x}=x-2$	$f(x)$-et és $g(x)$-et egymással egyenlővé tesszük.
$x=(x-2)^2=x^2-4x+4$	Vesszük mindkét oldal négyzetét.
$x^2-5x+4=0$	Egy oldalra rendezünk.
$x=1, \quad x=4.$	A két megoldás.

A $\sqrt{x}=x-2$ egyenletet csak az $x=4$ érték elégíti ki. $x=1$ hamis gyök, amit a négyzetreemelés hozott be a megoldások közé. A felső határ $b=4$ lesz.

$0\le x\le 2$ esetén: $f(x)-g(x)=\sqrt{x}-0=\sqrt{x}$.
$2\le x\le 4$ esetén: $f(x)-g(x)=\sqrt{x}-(x-2)=\sqrt{x}-x+2$.

Az összterületet az A és B résztartományok területének összege adja:

$$\text{a teljes terület} = \underbrace{\int_0^2 \sqrt{x}dx}_{A\text{ területe}}+\underbrace{\int_2^4(\sqrt{x}-x+2)dx}_{B\text{ területe}}=$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2+\left[\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_2^4=$$
$$=\frac{2}{3}(2)^{3/2}-0+\left(\frac{2}{3}(4)^{3/2}-8+8\right)-\left(\frac{2}{3}(2)^{3/2}-2+4\right)=$$
$$=\frac{2}{3}(8)-2=\frac{10}{3}. \qquad \square$$



y szerinti integrálás

Ha a tartományt határoló görbék y függvényeiként vannak megadva, akkor a közelítő téglalapok nem függőlegesek, hanem vízszintesek lesznek. Ilyenkor az alapképletünk nem x-re, hanem y-ra alkalmazandó.

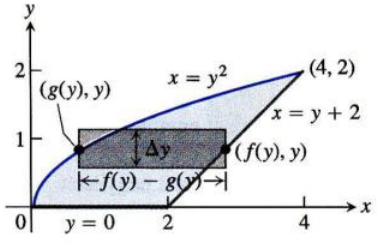
A fentiekhez hasonló tartományokra az

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$

képletet alkalmazzuk. Ebben az egyenlőségben f mindig a jobb, g pedig a bal oldali görbét jelenti, ezért $f(y) - g(y)$ nemnegatív.

6. PÉLDA:

Keressük meg az 5. példában szereplő tartomány területét y szerinti integrálással!



5.32. ÁBRA: Ha ennek a tartománynak a területét x szerint integrálva határozzuk meg, akkor két integrálást kell elvégeznünk, viszont ha y szerint integrálunk, akkor csak egyet (6. példa).

Megoldás: Először készítünk egy ábrát a tartományról, s ezen az ábrán egy *vízszintesen elnyúló* téglalapot is felveszünk, amely az y-tengely valamely intervallumának egy felosztásával áll elő (5.32. ábra). A tartomány jobb oldali határvonala az $x = y+2$ egyenes, így $f(y) = y+2$. A bal oldali határvonal az $x = y^2$ görbe, így $g(y) = y^2$. Az integrálás alsó határa az $y = 0$ érték. A felső határt úgy kapjuk meg, hogy megvizsgáljuk mely y értékekre lesz egyenlő $x = y+2$ és $x = y^2$:

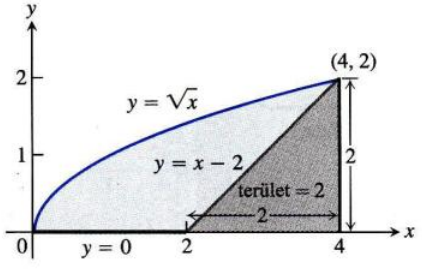
$$\begin{aligned} y+2 &= y^2 && f(x)\text{-et és } g(x)\text{-et egymással egyenlővé tesszük.} \\ y^2 - y - 2 &= 0 && \text{Egy oldalra rendezünk.} \\ (y+1)(y-2) &= 0 && \text{Szorzattá alakítunk.} \\ y = -1, \qquad & z = 2. && \text{A két megoldás.} \end{aligned}$$

Az integrálás felső határa $b = 2$. (Az $y = -1$ érték az x-tengely alatt elhelyezkedő metszéspontot ad.)

A tartomány területe:

$$\begin{aligned} A = \int_a^b [f(y) - g(y)]dy &= \int_0^2 [y+2-y^2]dy = \\ &= \int_0^2 [2+y-y^2]dy = \\ &= \left[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \\ &= 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Ez megegyezik az 5. példa eredményével, csak most kevesebb munkával jutottunk el hozzá. □



5.33. ÁBRA: A kék tartomány területe egyenlő az $y = \sqrt{x}$ parabola alatti terület mínusz a háromszög területe (7. példa).

A geometriai területképletek és az integrál együttes alkalmazása

A területet gyakran úgy tudjuk a leggyorsabban meghatározni, ha az analízis és a geometria módszereit vegyítjük egymással.

7. PÉLDA: **Az 5. példában szereplő tartomány területének leggyorsabb meghatározása**

Határozzuk meg az 5. példában szereplő tartomány területét!

Megoldás: A kérdéses terület az $y = \sqrt{x}$ $0 \le x \le 4$ parabola és az x-tengely közötti terület mínusz a 2 egység alapú és 2 egység magasságú háromszög területe (5.33. ábra):

$$\text{a terület} = \int_0^4 \sqrt{x}dx - \frac{1}{2}(2)(2) =$$
$$= \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^4 - 2 =$$
$$= \frac{2}{3}(8) - 0 - 2 = \frac{10}{3}. \qquad \square$$

Az 5–7. példákból levonható következtetés: néha egyszerűbb két görbe által határolt területet x helyett y szerint integrálva meghatározni. Az is segíthet, ha a kalkulus és a geometria módszereit kombináljuk. A tartomány felvázolását követően először gondoljuk végig, hogy mi legyen a követendő eljárás!

5.6. Feladatok

A határozott integrál kiszámítása

Az 1–24. feladatokban a 6. tétel helyettesítési képletének segítségével számítsuk ki az integrálok értékét!

1. (a) $\int_0^3 \sqrt{y+1}dy$ (b) $\int_{-1}^0 \sqrt{y+1}dy$

2. (a) $\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr$ (b) $\int_{-1}^1 r\sqrt{1-r^2}dr$

3. (a) $\int_0^{\pi/4} \text{tg}\, x \sec^2 x\, dx$ (b) $\int_{-\pi/4}^0 \text{tg}\, x \sec^2 x\, dx$

4. (a) $\int_0^{\pi} 3\cos^2 x \sin x\, dx$ (b) $\int_{2\pi}^{3\pi} 3\cos^2 x \sin x\, dx$

5. (a) $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3 dt$ (b) $\int_{-1}^1 t^3(1+t^4)^3 dt$

6. (a) $\int_0^{\sqrt{7}} t(t^2+1)^{1/3} dt$ (b) $\int_{-\sqrt{7}}^0 t(t^2+1)^{1/3} dt$

7. (a) $\int_{-1}^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2} dr$ (b) $\int_0^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2} dr$

8. (a) $\int_0^1 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2} dv$ (b) $\int_1^4 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2} dv$

9. (a) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ (b) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

10. (a) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}} dx$ (b) $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}} dx$

11. (a) $\int_0^{\pi/6} (1-\cos 3t)\sin 3t\, dt$ (b) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1-\cos 3t)\sin 3t\, dt$

12. (a) $\int_{-\pi/2}^0 \left(2+\text{tg}\,\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2} dt$ (b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2+\text{tg}\,\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2} dt$

13. (a) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\sin z}} dz$ (b) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\sin z}} dz$

14. (a) $\int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin w}{(3+2\cos w)^2} dw$ (b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin w}{(3+2\cos w)^2} dw$

15. $\int_0^t \sqrt{t^5+2t}(5t^4+2)dt$

16. $\int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^2}$

17. $\int_0^{\pi/6} \cos^{-3} 2\theta \sin 2\theta\, d\theta$

18. $\int_{\pi}^{3\pi/2} \text{ctg}^2\left(\frac{\theta}{6}\right)\sec^2\left(\frac{\theta}{6}\right) d\theta$

19. $\int_0^{\pi} 5(5-4\cos t)^{t/4}\sin t\, dt$

20. $\int_0^{\pi/4} (1-\sin 2t)^{3/2}\cos 2t\, dt$

21. $\int_0^1 (4y-y^2+4y^3+1)^{-2/3}(12y^2-2y+4)dy$

22. $\int_0^1 (y^3+6y^2-12y+9)^{-1/2}(y^2+4y-4)dy$

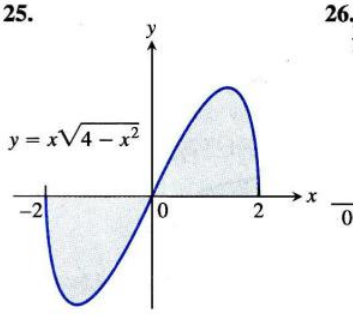
23. $\int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{\theta}\cos^2(\theta^{3/2})d\theta$

24. $\int_{-1}^{-1/2} t^{-2}\sin^2\left(1+\frac{1}{t}\right) dt$

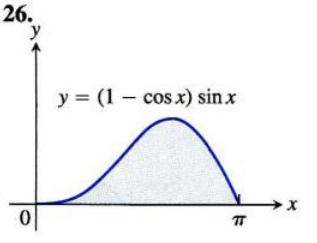
Terület

A 25–40. feladatokban határozzuk meg a satírozott tartományok összterületét!

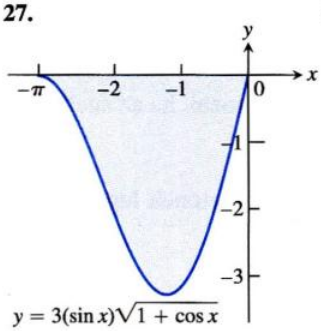
25.



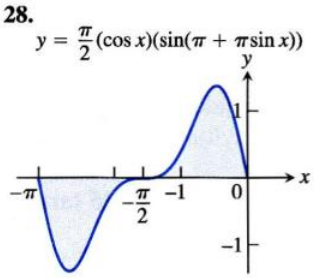
26.



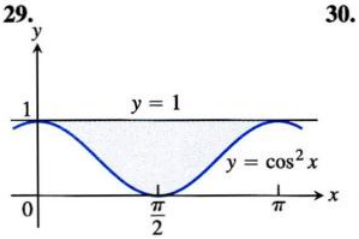
27.



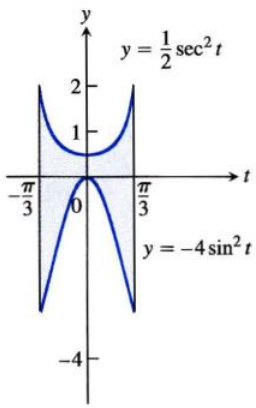
28.



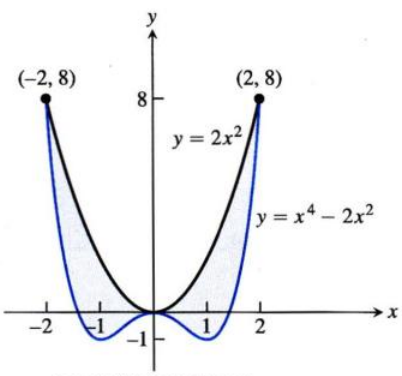
29.



30.

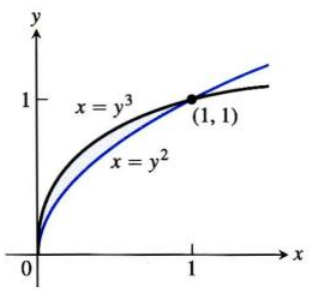


31.

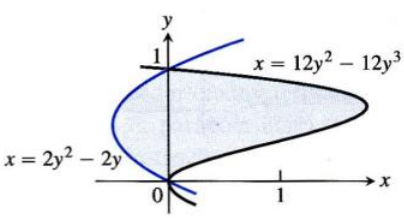


NEM MÉRETARÁNYOS

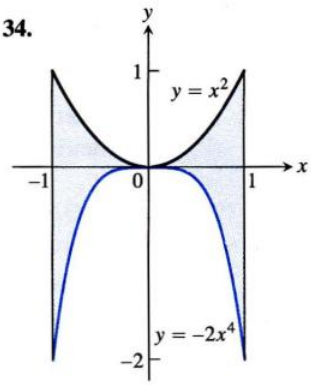
32.



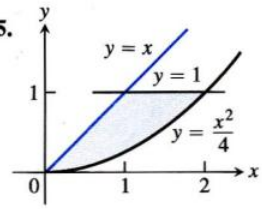
33.



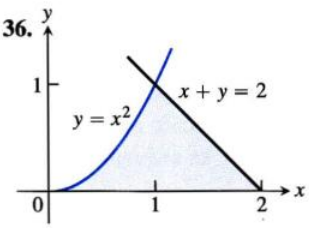
34.



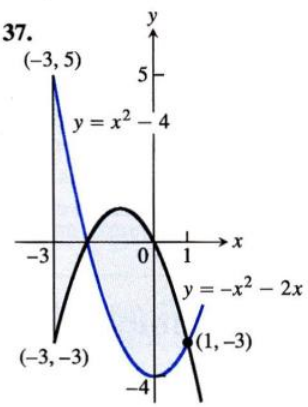
35.



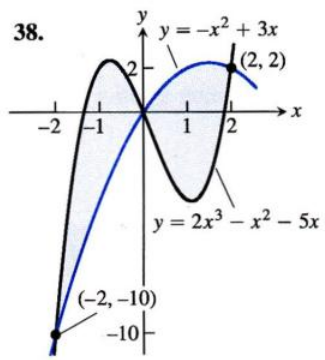
36.



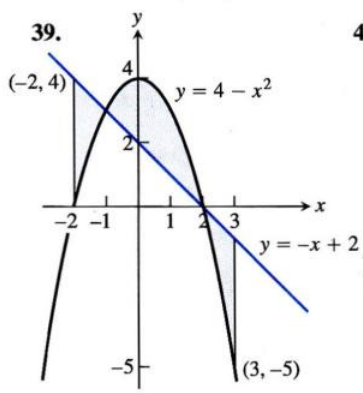
37.



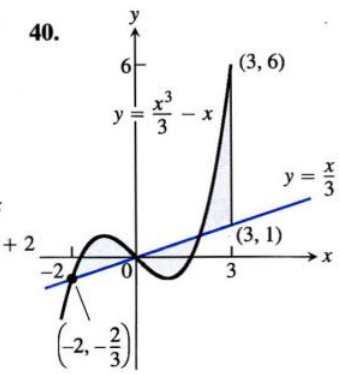
38.



39.



40.



A 41–50. feladatokban határozzuk meg a görbe és az egyenes által határolt tartomány területét!

41. $y = x^2 - 2$ és $y = 2$

42. $y = 2x - x^2$ és $y = -3$

43. $y = x^4$ és $y = 8x$

44. $y = x^2 - 2x$ és $y = x$

45. $y = x^2$ és $y = -x^2 + 4x$

46. $y = 7 - 2x^2$ és $y = x^2 + 4$

47. $y = x^4 - 4x^2 + 4$ és $y = x^2$

48. $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$ és $y = 0$

49. $y = |x|$ és $5y = x + 6$ (Hány metszéspont van itt?)

50. $y = |x^2 - 4|$ és $y = (x^2/2) + 4$

Az 51–58. feladatokban határozzuk meg a görbék és egyenesek által határolt tartomány területét!

51. $x = 2y^2$, $x = 0$ és $y = 3$

52. $x = y^2$ és $x = y + 2$

53. $y^2 - 4x = 4$ és $4x - y = 16$

54. $x - y^2 = 0$ és $x + 2y^2 = 3$

55. $x + y^2 = 0$ és $x + 3y^2 = 2$

56. $x - y^{2/3} = 0$ és $x + y^4 = 2$

57. $x = y^2 - 1$ és $x = |y|\sqrt{1 - y^2}$

58. $x = y^3 - y^2$ és $x = 2y$

Az 59–62. feladatokban határozzuk meg a görbék által határolt tartomány területét!

59. $4x^2 + z = 4$ és $x^4 - z = 1$

60. $x^3 - y = 0$ és $3x^2 - y = 4$

61. $x + 4y^2 = 4$ és $x + y^4 = 1$ $x \geq 0$-ra

62. $x + y^2 = 3$ és $4x + y^2 = 0$

A 63–70. feladatokban határozzuk meg a görbék és egyenesek által határolt tartományok területét!

63. $y = 2\sin x$ és $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$

64. $y = 8\cos x$ és $y = \sec^2 x$, $-\pi/3 \leq x \leq \pi/3$

65. $y = \cos(\pi x/2)$ és $y = 1 - x^2$

66. $y = \sin(\pi x/2)$ és $y = x$

67. $y = \sec^2 x$ $y = \mathrm{tg}^2 x$, $x = -\pi/4$ és $x = \pi/4$

68. $x = \mathrm{tg}^2 y$ és $x = -\mathrm{tg}^2 y$, $-\pi/4 \leq y \leq \pi/4$

69. $x = 3\sin y\sqrt{\cos y}$ és $x = 0$, $0 \leq y \leq \pi/2$

70. $y = \sec^2(\pi x/3)$ és $y = x^{1/3}$, $-1 \leq x \leq 1$

71. Határozzuk meg az $x - y^3 = 0$ görbe és az $x - y = 0$ egyenes által határolt propeller alakú tartománynak a területét!

72. Határozzuk meg az $x - y^{1/3} = 0$ és az $x - y^{1/5} = 0$ görbék által határolt propeller alakú tartomány területét!

73. Határozzuk meg annak az első síknegyedbeli tartománynak a területét, amelyet az $y = x$, $x = 2$ egyenesek, az $y = 1/x^2$ görbe és az x-tengely határolnak!

74. Határozzuk meg annak az első síknegyedbeli „háromszög-tartománynak" a területét, amelyet balról az y-tengely, jobbról pedig az $y = \sin x$ és $y = \cos x$ görbék határolnak!

75. Tekintsük azt a tartományt, amelyet alulról az $y = x^2$ parabola, felülről pedig az $y = 4$ egyenes határol! Ezt a tartományt az $y = c$ vízszintes egyenes két azonos területű résztartományra osztja.

(a) Vázoljuk fel a tartomány, és húzzuk meg nagyjából helyesen az $y = c$ egyenest is! c-vel kifejezve mik lesznek az egyenes és a parabola metszéspontjának koordinátái? A metszéspont koordinátáit vezessük rá rajzunkra!

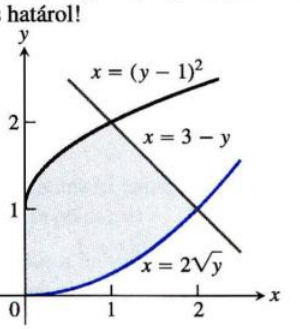
(b) y szerinti integrálással határozzuk meg c értékét! (c az integrálás egyik határa lesz.)

(c) x szerinti integrálással határozzuk meg c értékét! (c most is szerepelni fog az integrálás egyik határában.)

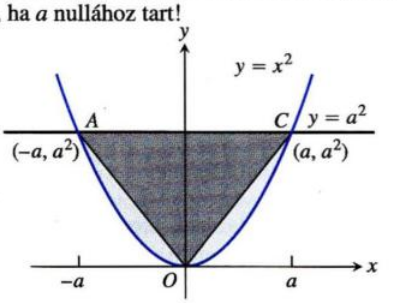
76. Határozzuk meg az $y = 3 - x^2$ görbe és az $y = -1$ egyenes által határolt tartomány területét **(a)** x, **(b)** y szerinti integrálással!

77. Keressük meg annak az első síknegyedbeli tartománynak a területét, amelyet balról az y-tengely, alulról az $y = x/4$ görbe, felülről és balról az $y = 1 + \sqrt{x}$ görbe, felülről és jobbról az $y = 2 - \sqrt{x}$ egyenes határol!

78. Keressük meg annak az első síknegyedbeli tartománynak a területét, amelyet balról az y-tengely, alulról az $x = 2\sqrt{y}$ görbe, felülről és balról az $x = (y-1)^2$ görbe, felülről és jobbról az $x = 3 - y$ egyenes határol!



79. Az ábra egy olyan tartományba beírt AOC háromszöget mutat, amelyet az $y = x^2$ parabolából az $y = a^2$ metsz ki. Keressük meg a háromszög és a parabolikus tartomány hányadosának határértékét, ha a nullához tart!

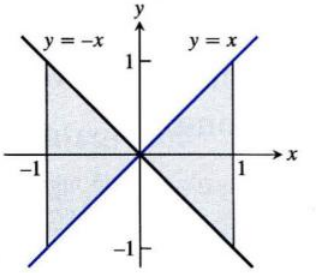


80. Tegyük fel, hogy a folytonos f függvény grafikonja és az x-tengely által határol tartomány $x = a$ és $x = b$ közé eső darabjának területe 4 egység. Határozzuk meg az $y = f(x)$, valamint az $y = 2f(x)$ görbe közötti terület nagyságát az $x = a$ és $x = b$ közötti szakaszon!

81. A következő integrálok közül melyik adja meg – ha egyáltalán van köztük ilyen – az ábra satírozott részének területét? Válaszunkat indokoljuk is!

(a) $\int_{-1}^{1}(x-(-x))dx = \int_{-1}^{1} 2x\,dx$,

(b) $\int_{-1}^{1}(-x-(x))dx = \int_{-1}^{1} -2x\,dx$.



82. Igaz, néha igaz vagy sohasem igaz? Az $y = f(x)$ és $y = g(x)$ folytonos függvények, valamint az $x = a$ és $x = b$ $(a < b)$ egyenesek által közrefogott tartomány területe

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Válaszunkat indokoljuk!

Elmélet és példák

83. Tegyük fel, hogy $F(x)$ az $f(x) = (\sin x)/x$, $x > 0$ függvény egy primitív függvénye. Fejezzük ki F segítségével az

$$\int_1^2 \frac{\sin 2x}{x}\,dx$$

integrált!

84. Mutassuk meg, hogy ha f folytonos, akkor

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(1-x)dx.$$

85. Tegyük fel, hogy

$$\int_0^1 f(x)dx = 3.$$

Számítsuk ki az

$$\int_{-1}^0 f(x)dx$$

integrál értékét, ha **(a)** f páratlan, **(b)** f páros!

86. **(a)** Mutassuk meg, hogy ha f folytonos és páratlan a $[-a,a]$ intervallumon, akkor

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0!$$

(b) A feladat (a) részének eredményét ellenőrizzük az $f(x) = \sin x$ függvény esetében, legyen $a = \pi/2$!

87. Az f folytonos függvényre számítsuk ki az

$$I = \int_0^a \frac{f(x)dx}{f(x)+f(a-x)}$$

integrált értékét az $u = a - x$ helyettesítéssel!

88. Helyettesítést alkalmazva bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív x és y számra

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t}dt = \int_1^y \frac{1}{t}dt!$$

A határozott integrálra vonatkozó eltolási tulajdonság

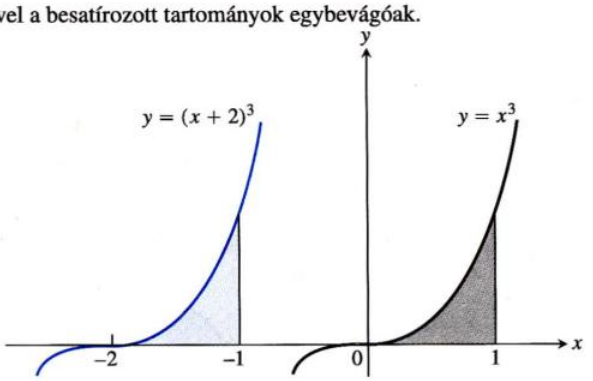
A határozott integrál egyik alapvető tulajdonsága az eltolással szembeni invariancia, amit a következő egyenlettel fejezhetünk ki:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c)dx. \qquad (5.12)$$

Ez az egyenlőség mindig fennáll, amennyiben f integrálható és a szükséges x értékekre értelmezve van. A mellékelt ábrán jól látható például, hogy

$$\int_{-2}^{-1} (x+2)^3 dx = \int_0^1 x^3 dx,$$

mivel a besatírozott tartományok egybevágóak.



89. Helyettesítéssel igazoljuk az (5.12) egyenlőséget!

90. Az alábbi függvényekre rajzoljuk fel $f(x)$ grafikonját az $[a,b]$ intervallumon és $f(x+c)$ grafikonját az $[a-c, b-c]$ intervallumon – így meggyőződhetünk az (5.12) egyenlőség helyességéről.

(a) $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$

(b) $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$, $c = \pi/2$

(c) $f(x) = \sqrt{x-4}$, $a = 4$, $b = 8$, $c = 5$

Számítógépes vizsgálatok

A 91–94. feladatokban olyan esetekben kell meghatároznunk a síkbeli görbék által határolt tartomány területét, amikor egyszerű algebrai eszközökkel nem tudjuk megkeresni a metszéspontokat. Számítógépes programunkkal hajtsuk végre a következő lépéseket:

(a) Ábrázoljuk a görbéket együttesen, hogy lássuk alakjukat és metszéspontjaikat!

(b) Programunk egyenletmegoldó algoritmusával határozzuk meg valamennyi metszéspont koordinátáit!

(c) Integráljuk rendre $|f(x) - g(x)|$-et a szomszédos metszéspontok által meghatározott intervallumokon!

(d) Összegezzük a feladat (c) részében kiszámított integrálokat!

91. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$, $g(x) = x - 1$

92. $f(x) = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + 10$, $g(x) = x^3$

93. $f(x) = x + \sin(2x)$, $g(x) = x^3$

94. $f(x) = x^2 \cos x$, $g(x) = x^3 - x$

5. fejezet Áttekintő kérdések

1. Hogyan tudunk véges összeggel megbecsülni olyan mennyiségeket, amilyen a valamely test által megtett út, vagy egy függvény grafikonja által határolt terület? Mi az alapja ennek az eljárásnak?

2. Mi a szigma-jelölés? Mi az előnye? Adjunk példákat!

3. Mit nevezünk Riemann-összegnek? Mire alkalmas egy ilyen összeg?

4. Mit nevezünk egy zárt intervallum felosztása normájának?

5. Mit nevezünk az f függvény zárt $[a,b]$ intervallumon vett határozott integráljának? Mikor lehetünk biztosak a határozott integrál létezésében?

6. Milyen összefüggés áll fenn a határozott integrál és a terület között? Vázoljuk a határozott integrál valamilyen más megközelítését!

7. Mit nevezünk valamely zárt intervallumon integrálható függvény átlagértékének? A függvénynek fel kell-e vennie az átlagértékét? Fejtsük ezt ki!

8. Soroljuk fel a határozott integrállal való számolás szabályait (5.3. táblázat)! Mutassunk példát az egyes szabályok alkalmazására!

9. Mi a Newton–Leibniz-tétel? Miért annyira fontos ez a tétel? A tétel mindegyik részét illusztráljuk egy-egy példán!

10. Hogy ad megoldást a Newton–Leibniz-tétel a $dy/dx = f(x)$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-problémára, amennyiben f folytonos függvény?

11. Hogyan viszonyul egymáshoz a helyettesítéses integrálás és a láncszabály?

12. Hogyan számíthatunk ki határozatlan integrálokat helyettesítéssel? Mutassunk rá példákat!

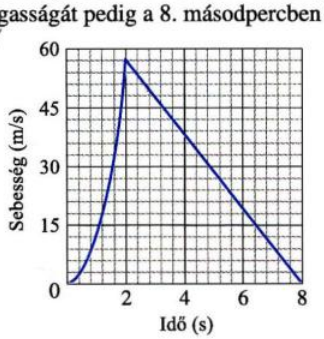
13. Hogyan működik a helyettesítéses módszer határozott integrálokra? Mutassunk példákat!

14. Hogyan definiáljuk és hogyan számítjuk ki két folytonos függvény grafikonja által határolt tartomány területét? Mutassunk példákat!

5. fejezet Gyakorló feladatok

Véges összegek és becslések

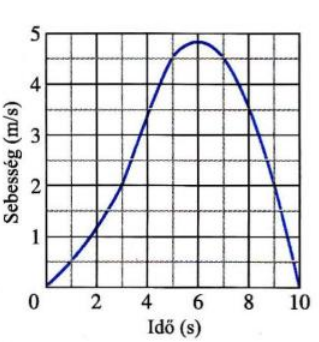
1. A mellékelt ábra egy rakéta sebességét mutatja a kilövést követő első 8 másodpercben. A rakéta 2 másodpercig gyorsul, legnagyobb magasságát pedig a 8. másodpercben éri el.



(a) Körülbelül milyen magasra jut a rakéta, ha a földfelszínről indították? (Ez a 3.3. szakasz 17. feladatában szereplő rakéta, de a mostani feladat megoldásához nem kell megoldani a 17. feladatot.)

(b) Rajzoljuk fel a rakéta földfelszíntől mért magasságát mint az idő függvényét a $0 \le t \le 8$ időintervallumban!

2. **(a)** A mellékelt ábra egy az x-tengely mentén mozgó test sebességét mutatja a $t = 0$ és $t = 10$ másodperc időpontok közötti időintervallumban. 10 másodperc alatt körülbelül milyen messzire jut a test?



(b) Rajzoljuk fel s grafikonját mint t függvényét a $0 \le t \le$ ≤ 10 intervallumban, feltéve, hogy $s(0) = 0$!

3. Tegyük fel, hogy $\sum_{k=1}^{10} a_k = -2$ és $\sum_{k=1}^{10} b_k = 25$. Számítsuk ki a következő összegeket!

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{4}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} (b_k - 3a_k)$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k - 1)$ **(d)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{5}{2} - b_k\right)$

4. Tegyük fel, hogy $\sum_{k=1}^{20} a_k = 0$ és $\sum_{k=1}^{20} b_k = 7$. Számítsuk ki a következő összegeket!

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} 3a_k$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} (a_k + b_k)$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{2} - \frac{2b_k}{7}\right)$ **(d)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} (a_k - 2)$

Határozott integrálok

Az 5–8. gyakorlatokban a határértéket fejezzük ki határozott integrállal! Azután számítsuk ki az integrál értékét, s ezzel egyben a határértéket is megkapjuk. P minden esetben az adott intervallum egy felosztását jelenti, a c_k-k pedig P részintervallumaiból valók.

5. $\displaystyle\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (2c_k - 1)^{-1/2} \Delta x_k$, ahol P az $[1,5]$ intervallum egy felosztása.

6. $\displaystyle\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k (c_k^2 - 1)^{1/3} \Delta x_k$, ahol P az $[1,3]$ intervallum egy felosztása.

7. $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{c_k}{2}\right)\right)\Delta x_k$, ahol P a $[-\pi,0]$ intervallum egy felosztása.

8. $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}(\sin c_k)(\cos c_k)\Delta x_k$, ahol P a $[0,\pi/2]$ intervallum egy felosztása.

9. Számítsuk ki az alábbi integrálok értékét, ha $\int_{-2}^{2}3f(x)dx=12$, $\int_{-2}^{5}f(x)dx=6$ és $\int_{-2}^{5}g(x)dx=2$!

(a) $\int_{-2}^{2}f(x)dx$ **(b)** $\int_{2}^{5}f(x)dx$

(c) $\int_{5}^{-2}g(x)dx$ **(d)** $\int_{-2}^{5}(-\pi g(x)dx$

(e) $\int_{-2}^{5}\left(\frac{f(x)+g(x)}{5}\right)dx$

10. Számítsuk ki az alábbi integrálok értékét, ha $\int_{0}^{2}f(x)dx=\pi$, $\int_{0}^{2}7g(x)dx=7$ és $\int_{0}^{1}g(x)dx=2$!

(a) $\int_{0}^{2}g(x)dx$ **(b)** $\int_{1}^{2}g(x)dx$

(c) $\int_{2}^{0}f(x)dx$ **(d)** $\int_{0}^{2}\sqrt{2}f(x)dx$

(e) $\int_{0}^{2}(g(x)-3f(x))dx$

Terület

A 11–14. gyakorlatokban keressük meg az f függvény grafikonja és az x-tengely közé eső tartomány területét!

11. $f(x)=x^2-4x+3$, $0\le x\le 3$

12. $f(x)=1-(x^2/4)$, $-2\le x\le 3$

13. $f(x)=5-5x^{2/3}$, $-1\le x\le 8$

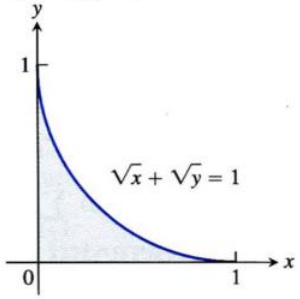
14. $f(x)=1-\sqrt{x}$, $0\le x\le 4$

A 15–26. gyakorlatokban határozzuk meg a görbe és az egyenesek által közrefogott tartomány területét!

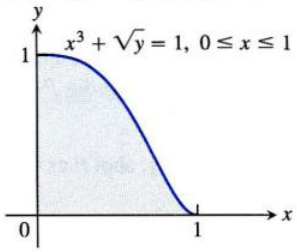
15. $y=x$, $y=1/x^2$, $x=2$

16. $y=x$, $y=1/\sqrt{x}$, $x=2$

17. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, $x=0$, $y=0$



18. $x^3+\sqrt{y}=1$, $x=0$, $y=0$, ha $0\le x\le 1$



19. $x=2y^2$, $x=0$, $y=3$

20. $x=4-y^2$, $x=0$

21. $y^2=4x$, $y=4x-2$

22. $y^2=4x+4$, $y=4x-16$

23. $y=\sin x$, $y=x$, $0\le x\le \pi/4$

24. $y=|\sin x|$, $y=1$, $-\pi/2\le x\le \pi/2$

25. $y=2\sin x$, $y=\sin 2x$, $0\le x\le \pi$

26. $y=8\cos x$, $y=\sec^2 x$, $-\pi/3\le x\le \pi/3$

27. Számítsuk ki annak a „háromszögtartománynak" a területét, amelyet balról az $x+y=2$ egyenes, jobbról az $y=x^2$ parabola és felülről az $y=2$ egyenes határol!

28. Számítsuk ki annak a „háromszögtartománynak" a területét, amelyet balról az $y=\sqrt{x}$, jobbról az $y=6-x$ egyenes és alulról az $y=1$ egyenes határol!

29. Keressük meg az $f(x)=x^3-3x^2$ függvény szélsőértékeit és határozzuk meg a függvény grafikonja és az x-tengely által határolt tartománynak a területét!

30. Határozzuk meg annak a tartománynak a területét, amelyet az $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$ görbe vág ki az első síknegyedből!

31. Határozzuk meg annak a tartománynak az összterületét, amelyet az $x=y^{2/3}$ görbe és az $x=y$ valamint az $y=-1$ egyenesek fognak közre!

32. Határozzuk az $y=\sin x$ és $y=\cos x$ görbék által közbezárt tartománynak az összterületét a $0\le x\le 3\pi/2$ intervallumban!

Kezdetiérték-problémák

33. Mutassuk meg, hogy $y=x^2+\int_1^x\frac{1}{t}dt$ megoldása a

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2-\frac{1}{x^2};\ y'(1)=3,\ y(1)=1$$

kezdetiérték-problémának!

34. Mutassuk meg, hogy $y=\int_0^x(1+2\sqrt{\sec t})dt$ megoldása a

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{\sec x}\,\mathrm{tg}\,x;\ y'(0)=3,\ y(0)=0$$

kezdetiérték-problémának!

A 35. és 36. gyakorlatokban a kezdetiérték-probléma megoldását fejezzük ki integrál alakban!

35. $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x}{x}$, $y(5)=-3$

36. $\frac{dy}{dx}=\sqrt{2-\sin^2 x}$, $y(-1)=2$

A határozatlan integrál kiszámítása

A 37–44. gyakorlatokban számítsuk ki az integrálokat!

37. $\int 2(\cos x)^{-1/2}\sin x dx$

38. $\int(\mathrm{tg}\,x)^{-3/2}\sec^2 x dx$

39. $\int(2\theta+1+2\cos(2\theta+1))d\theta$

40. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{2\theta-\pi}}+2\sec^2(2\theta-\pi)\right)d\theta$

41. $\int\left(t-\frac{2}{t}\right)\left(t+\frac{2}{t}\right)dt$

42. $\int\frac{(t+1)^2-1}{t^2}dt$

43. $\int\sqrt{t}\sin(2t^{3/2})dt$

44. $\int\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\sqrt{1+\sec\theta}d\theta$

A határozott integrál kiszámítása

45. $\int_{-1}^{1}(3x^2-4x+7)dx$

46. $\int_{0}^{1}(8s^2-12s^2+5)ds$

47. $\int_{1}^{2}\frac{4}{v^2}dv$

48. $\int_{1}^{27}x^{-4/3}dx$

49. $\int_{1}^{4}\frac{dt}{t\sqrt{t}}$

50. $\int_{1}^{4}\frac{(1+\sqrt{u})^{1/2}}{\sqrt{u}}du$

51. $\int_{0}^{1}\frac{36dx}{(2x+1)^3}$

52. $\int_{0}^{1}\frac{dr}{\sqrt[3]{(7-5r)^2}}$

53. $\int_{1/8}^{1}x^{-1/3}(1-x^{2/3})^{3/2}dx$

54. $\int_{0}^{1/2}x^3(1+9x^4)^{-3/2}dx$

55. $\int_{0}^{\pi}\sin^2 5r dr$

56. $\int_{0}^{\pi/4}\cos^2\left(4t-\frac{\pi}{4}\right)dt$

57. $\int_{0}^{\pi/3}\sec^2\theta d\theta$

58. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\csc^2 x dx$

59. $\int_{\pi}^{3\pi}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{6}dx$

60. $\int_{0}^{\pi}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{3}d\theta$

61. $\int_{-\pi/3}^{0}\sec x\operatorname{tg}x dx$

62. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\csc z\operatorname{ctg}z dz$

63. $\int_{0}^{\pi/2}5(\sin x)^{3/2}\cos x dx$

64. $\int_{-1}^{1}2x\sin(1-x^2)dx$

65. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}15\sin^4 3x\cos 3x dx$

66. $\int_{0}^{2\pi/3}\cos^{-4}\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$

67. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{3\sin x\cos x}{\sqrt{1+3\sin^2 x}}dx$

68. $\int_{0}^{\pi/4}\frac{\sec^2 x}{(1+7\operatorname{tg}x)^{2/3}}dx$

69. $\int_{0}^{\pi/3}\frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{2\sec\theta}}d\theta$

70. $\int_{\pi^2/36}^{\pi^2/4}\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}\sin\sqrt{t}}$

Átlagérték

71. Számítsuk ki az $f(x)=mx+b$ függvény átlagértékét a

(a) $[-1,1]$, **(b)** $[-k,k]$

intervallumon!

72. Számítsuk ki az

(a) $y=\sqrt{3x}$ átlagértékét a $[0,3]$ intervallumon,

(b) $y=\sqrt{ax}$ átlagértékét a $[0,a]$ intervallumon!

73. Legyen f az $[a,b]$ intervallumon differenciálható függvény! A 2. fejezetben f átlagos változását az $[a,b]$ intervallumon az

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

hányadossal definiáltuk, f pillanatnyi változását pedig $f'(x)$-szel. Valamely függvény átlagértékét ebben a fejezetben értelmeztük. Tegyük fel, hogy f' folytonos. Az átlag új, az eredetivel konzisztens definíciója lehet a következő:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \text{az } f' \text{ átlagértéke az } [a,b] \text{ intervallumon.}$$

Igaz ez? Válaszunkat indokoljuk!

74. Igaz-e, hogy egy integrálható függvény átlagértéke valamely 2 hosszúságú intervallumon egyenlő a függvény ezen intervallumon vett integráljának a felével?

T **75.** Számítsuk ki egy 365 napos évre az

$$f(x)=37\sin\left(\frac{2\pi}{365}(x-101)\right)+25$$

hőmérsékletfüggvény átlagértékét! Ez is egy lehetséges módszer arra, hogy a levegő átlaghőmérsékletét az alaszkai Fairbanks-ben kiszámítsuk. A Nemzeti Meteorológiai Szolgálat hivatalos adata a levegő normál napi átlaghőmérsékletére 25,7 °F, ami lényegesen magasabb $f(x)$ átlagértékénél. A 3.33. ábra mutatja, hogy miért.

T **76. Gázok fajhője:** A C_v fajhő az a hőmennyiség, amely ahhoz szükséges, hogy adott tömegű gáz hőmérsékletét 1 Celsius fokkal megemeljük. Mértékegysége a cal/fok·gramm-molekulasúly. Az oxigén fajhője a T hőmérséklet függvénye:

$$C_v=8{,}27+10^{-5}(26T-1{,}87T^2).$$

Számítsuk ki C_v átlagértékét a $20° \le T \le 675°$C hőmérséklet-tartományban és határozzuk meg az a hőmérsékletet is, ahol a fajhő egyenlő az átlagértékkel!

Integrálok differenciálása

A 77–80. gyakorlatokban számítsuk ki dy/dx-et!

77. $y=\int_{2}^{x}\sqrt{2+\cos^3 t}dt$

78. $y=\int_{2}^{7x^2}\sqrt{2+\cos^3 t}dt$

79. $y=\int_{x}^{1}\frac{6}{3+t^4}dt$

80. $y=\int_{\sec x}^{2}\frac{1}{t^2+1}dt$

Elmélet és példák

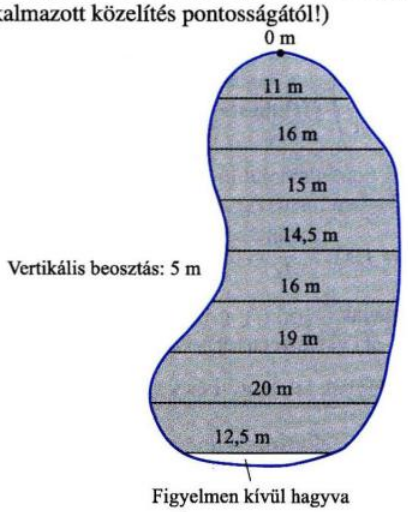
81. Igaz-e, hogy minden olyan függvény, amely differenciálható az $[a,b]$ intervallumon, maga is valamely függvénynek a deriváltja az $[a,b]$-n?

82. Tegyük fel, hogy $F(x)$ az $f(x)=\sqrt{1+x^4}$ függvény egy primitív függvénye. Fejezzük ki $\int_{0}^{1}\sqrt{1+x^4}$-t F segítségével, és adjunk indoklást is!

83. Számítsuk ki dy/dx-et, ha $y=\int_{x}^{1}\sqrt{1+t^2}dt$! Értelmezzük számításunk főbb lépéseit!

84. Számítsuk ki dy/dx-et, ha $y=\int_{\cos x}^{0}(1/(1-t^2))dt$! Értelmezzük számításunk főbb lépéseit!

85. Új parkolóhely: A parkolási igények kielégítésére a város az ábrán látható területet jelölte ki. A városi tanács megkérdez bennünket, mint a város mérnökeit, hogy 10 000 dollárért ki lehet-e alakítani az új parkolót. A terület megtisztításának költsége 1 dollár négyzetméterenként, a kövezés pedig 20 dollár négyzetméterenként. Elég lesz-e 10 000 dollár? A becsléshez használjunk alsó összeget! (Válaszunk nagy mértékben függ az alkalmazott közelítés pontosságától!)



86. A 2000 méter magasan lebegő helikopterből kiugró A ejtőernyős 4 másodpercen át szabadon esik, mielőtt kinyitná ernyőjét. A helikopter ezután 2100 méterre emelkedik. A kiugrásától

számított 45 másodperc múlva ebből a magasságból ugrik ki a B ejtőernyős, aki 13 másodpercig zuhan, majd kinyitja ernyőjét. Nyitott ernyővel mindketten 4,8 m/s sebességgel ereszkednek. Vegyük úgy, hogy az ernyő nyitása előtt az ejtőernyősök szabadon esnek (azaz a levegő ellenállásától eltekintünk).

(a) Milyen magasságban nyitotta ki A az ernyőjét?

(b) Milyen magasságban nyitotta ki B az ernyőjét?

(c) Melyik ejtőernyős ér földet elsőként?

Átlagos napi leltárkészlet

Az átlagértéket a közgazdaságtan is használja olyan dolgok vizsgálatára, amilyen pl. a napi átlagos leltárkészlet. Ha $I(t)$ valamely cégnél a t napon rendelkezésre álló rádiók, piperecikkek, cipők vagy más termékek száma (I-t **leltárfüggvénynek** nevezzük), akkor I átlagértéke a $[0,T]$ időszakban a cég átlagos leltárkészlete az adott időszakban.

$$\textbf{Átlagos napi leltárkészlet} = I_{\text{átlag}} = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)dt.$$

Ha h egy tétel napi tárolási költsége dollárban, akkor az $I_{\text{átlag}} \cdot h$ szorzat az adott időszakra vonatkozó átlagos napi tárolási költség.

87. A Tracey Burr Distributors 30 naponként kap egy-egy rakomány, azaz 1200 láda táblacsokoládét. A TBD rögzített áron adja tovább a csokoládét a kiskereskedőknek, s átlagos napi leltárkészlete a szállítmány megérkezése után t nappal $I(t) = 1200 - 40t$, $0 \le t \le 30$. Mekkora az átlagos napi raktározási költség, ha egy láda raktározása 3 centbe kerül?

88. A Rich Wholesale Foods egy süteménygyártó üzem, mely 14 naponta szállítja ki az addig hűtőházban tárolt termékeit. A cég 600 doboznyi süteményt tartalékol a véletlenszerűen előálló plusz kereslet kielégítésére, így 14 napos leltárkészletfüggvénye $I(t) = 600 + 600t$, $0 \le t \le 14$. Egy-egy doboz napi raktározási költsége 4 cent. Számítsuk ki a Rich Wholesale Foods átlagos napi leltárkészletét és átlagos napi raktározási költségét!

89. A Solon Container 30 naponként 450 hordónyi műanyaggolyót kap. A leltárfüggvény (a készleten lévő hordók száma mint a napok függvénye) $I(t) = 450 - t^2/2$. Számítsuk ki az átlagos napi leltárkészletet! Adjuk meg az átlagos napi raktározási költséget, ha egy hordó raktáron tartása naponta 2 centbe kerül.

90. A Mitchell Mailorder 60 naponta kap 600 láda edzőzoknit. A szállítmány érkezése után t nappal a készletet az $I(t) = 600 - 20\sqrt{15t}$ függvény adja meg. Határozzuk meg a napi átlagos leltárkészletet! Ha egy láda napi tárolási költsége 1/2 cent, mekkora lesz az átlagos napi raktározási költség?

5. fejezet Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. **(a)** Ha $\int_0^1 7f(x)dx = 7$, lehet-e $\int_0^1 f(x)dx = 1$?

(b) Ha $\int_0^1 f(x)dx = 4$ és $f(x) \ge 0$, lehet-e $\int_0^1 \sqrt{f(x)}dx = \sqrt{4} = 2$?

Válaszunkat indokoljuk is!

2. Tegyük fel, hogy $\int_{-2}^2 f(x)dx = 4$, $\int_2^5 f(x)dx = 3$, $\int_{-2}^5 g(x)dx = 2$. Igaz-e valamelyik az alábbi állítások közül?

(a) $\int_5^2 f(x)dx = -3$,

(b) $\int_{-2}^5 (f(x) + g(x))dx = 9$,

(c) $f(x) \ge g(x)$ a $-2 \le x \le 5$ intervallumon.

3. **Kezdetiérték-probléma:** Mutassuk meg, hogy

$$y = \frac{1}{a}\int_0^x f(t)\sin a(x-t)dt$$

megoldása a

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ay^2 = f(x), \quad \frac{dy}{dx} = 0 \text{ és } y = 0 \text{ ha } x = 0$$

kezdetiérték-problémának.
(*Útmutatás:* $\sin(ax - at) = \sin ax \cos at - \cos ax \sin at$.)

4. **Arányosság:** Tegyük fel, hogy x és y között az

$$x = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}dt$$

összefüggés áll fenn. Mutassuk meg, hogy d^2y/dx^2 arányos y-nal, és határozzuk meg az arányossági tényezőt!

5. Számítsuk ki $f(4)$ értékét, ha

(a) $\int_0^{x^2} f(t)dt = x\cos \pi x$,

(b) $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x\cos \pi x$.

6. Az alábbi információk alapján számítsuk ki $f(\pi/2)$ értékét!

i. f pozitív és folytonos.

ii. Az $x = 0$ és $x = a$ közötti szakaszon az $y = f(x)$ görbe alatti terület:

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2}\sin a + \frac{\pi}{2}\cos a.$$

7. Az xy-síkon az x-tengely, az $y = f(x)$ $f(x) \ge 0$ görbe és az $x = 1$ valamint az $x = b$ egyenesek által határolt tartomány területe $\sqrt{b^2+1} - \sqrt{2}$, ha $b < 1$. Határozzuk meg $f(x)$-et!

8. Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du = \int_0^x f(u)(x-u)du!$$

(*Útmutatás:* A jobb oldalon álló integrált fejezzük ki két integrál különbségeként. Azután mutassuk meg, hogy az egyenlőség mindkét oldalának ugyanaz az x szerinti deriváltja!)

9. **Görbe meghatározása:** Határozzuk meg annak az xy-síkbeli görbének az egyenletét, amely átmegy az $(1,-1)$ ponton, és x szerinti iránytangense mindig $3x^2 + 2$!

10. **Lapátolás:** Egy lapát földet 10,5 m/s sebességgel hajítunk ki egy gödör aljából. A földnek 5 métert kell emelkednie ahhoz, hogy ne hulljon vissza a gödörbe. Elegendő lesz ez a kezdősebesség vagy nagyobbat kell dobnunk?

Szakaszonként folytonos függvények

Bár mi többnyire folytonos függvényekkel foglalkozunk, a gyakorlati életben sűrűn előfordulnak szakaszonként folytonos függvények. Az $f(x)$ függvény szakaszonként folytonos az I zárt intervallumon, ha f-nek csak véges sok szakadása van I-n, léteznek a

$$\lim_{c\to c^-} f(x) \text{ és } \lim_{x\to c^+} f(x)$$

határértékek és végesek I minden belső pontjában, és I végpontjaiban is léteznek a megfelelő féloldali határértékek és azok is végesek. Minden szakaszonként folytonos függvény integrálható. A szakadási pontok olyan nyílt és félig nyílt részintervallumokra bontják fel I-t, amelyeken f folytonos lesz, s a határértékekre kiszabott fenti kritérium pedig biztosítja, hogy f-nek valamennyi részintervallum lezárására létezik folytonos kiterjesztése. A szakaszonként folytonos függvényt úgy integráljuk, hogy integráljuk ezeket az egyedi kiterjesztéseket, az eredményeket pedig összeadjuk. Az

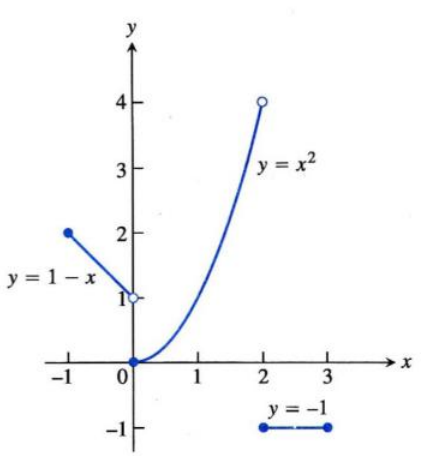
$$f(x)=\begin{cases}1-x & -1\le x<0\\ x^2, & 0\le x<2\\ -1, & 2\le x\le 3\end{cases}$$

függvény (5.34. ábra) integrálja a $[-1,3]$ intervallumon:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0}(1-x)dx+\int_{0}^{2}x^2dx+\int_{2}^{3}(-1)dx=$$
$$=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}+\left[-x\right]_{2}^{3}=$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{8}{3}-1=\frac{19}{6}.$$

A Newton–Leibniz-tétel érvényes a szakaszonként folytonos függvényekre is azzal a megszorítással, hogy $(d/dx)\int_a^x f(t)dt$ csak olyan x értékekre egyenlő $f(x)$-szel, ahol f folytonos. Hasonló megszorítás érvényes a később tárgyalandó Leibniz-szabályra is.

A 11–16. feladatokban ábrázoljuk a függvényeket, és integráljuk őket a megadott tartományban!



5.34. ÁBRA: A szakaszonként folytonos függvényeket, amilyen az ábrán is látható, szakaszonként integráljuk.

11. $f(x)=\begin{cases}x^{2/3}, & -8\le x<0\\ -4, & 0\le x\le 3\end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & -4\le x<0\\ x^2-4, & 0\le x\le 3\end{cases}$

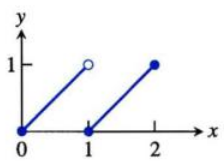
13. $g(t)=\begin{cases}t, & 0\le t<1\\ \sin\pi t, & 1\le t\le 2\end{cases}$

14. $h(z)=\begin{cases}\sqrt{1-z}, & 0\le z<1\\ (7z-6)^{-1/3}, & 1\le z\le 2\end{cases}$

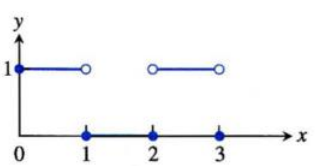
15. $f(x)=\begin{cases}1, & -2\le x<-1\\ 1-x^2, & -1\le x<1\\ 2, & 1\le x\le 2\end{cases}$

16. $h(r)=\begin{cases}r, & -1\le r<0\\ 1-r^2, & 0\le r<1\\ 1, & 1\le r\le 2\end{cases}$

17. Határozzuk meg a mellékelt ábrán látható függvény átlagértékét!



18. Határozzuk meg a mellékelt ábrán látható függvény átlagértékét!



Leibniz-szabály

A gyakorlatban olykor találkozunk olyan függvényekkel, amelyek integrállal vannak megadva, s az integrál alsó és felső határa is változó. Ilyenek például:

$$f(x)=\int_{\sin x}^{x^2}(1+t)dt \text{ vagy } g(x)=\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\sin t^2 dt.$$

Az első integrált még kiszámíthatjuk közvetlenül, a másodikat azonban már nem. A Leibniz-szabálynak nevezett összefüggéssel azonban mindkét integrálnak meg tudjuk keresni a deriváltját.

Leibniz-szabály

Ha f folytonos az $[a,b]$ intervallumon és ha $u(x)$ és $v(x)$ az x differenciálható függvényei, melyek értékei az $[a,b]$ intervallumban fekszenek, akkor

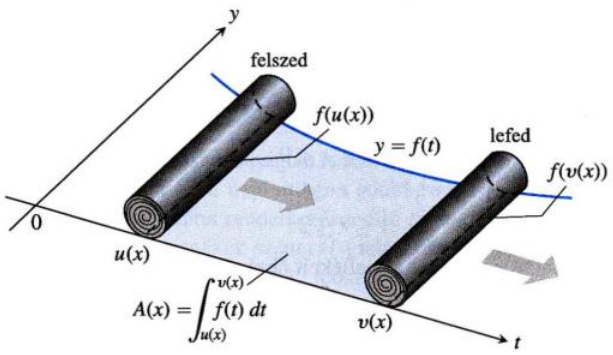
$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt=f(v(x))\frac{dv}{dx}-f(u(x))\frac{du}{dx}.$$

Az 5.9. ábra a Leibniz-szabály geometriai értelmezését mutatja. Az ábrán egy szőnyeget látunk, amelynek változó szélessége $f(t)$ és balról felgöngyölődik, jobbról pedig letekeredik ugyanabban az x időpontban. (Ebben az interpretációban x lesz az idő, nem pedig t.) Az x időpontban a szőnyeg $u(x)$ és $v(x)$ közötti darabja fekszik a padlón. A szőnyeg du/dx feltekeredési

sebessége nem feltétlenül azonos a dv/dx legöngyölödési sebességével. Adott x időpontban a szőnyeg által lefedett terület nagysága

$$A(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

lesz.



5.35. ÁBRA: Fel- és letekeredő szőnyeg: a Leibniz-szabály geometriai értelmezése: $\frac{dA}{dx} = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$.

Milyen arányban változik a lefedett terület? Egy x időpillanatban $A(x)$-et az $f(v(x))$ szélességű szőnyeg dv/dx sebességű letekeredése növeli. Azaz $A(x)$

$$f(v(x))\frac{dv}{dx}$$

-szel nő. Ugyanakkor $A(x)$

$$f(u(x))\frac{du}{dx}$$

-nyit csökken is, mert a feltekeredő vég szélességét meg kell szoroznunk a feltekeredés sebességével. A nettó változása

$$\frac{dA}{dx} = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$$

lesz, ami éppen a Leibniz-szabály.

A szabály bizonyításához tegyük fel, hogy F az f egy primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon. Akkor

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = F(v(x)) - F(u(x)).$$

Ennek az egyenlőségnek mindkét oldalát x szerint deriválva éppen a kívánt egyenlőséget kapjuk:

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = \frac{d}{dx}\Big[F(v(x)) - F(u(x))\Big] =$$

$$= F'(v(x))\frac{dv}{dx} - F'(u(x))\frac{du}{dx} = \quad \text{láncszabály}$$

$$= f(v(x)\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.$$

A Leibniz-szabály alkalmazásával keressük meg a 19–21. feladatokban szereplő függvények deriváltját!

19. $f(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{1}{t}dt$

20. $f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \frac{1}{1-t^2}dt$

21. $g(y) = \int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} \sin t^2 dt$

22. A Leibniz-szabály alkalmazásával határozzuk meg azt az x értéket, amely mellett az

$$\int_{x}^{x+3} t(5-t)dt$$

integrál a lehető legnagyobb lesz! (Az ilyen jellegű problémák a politikai választások matematikai elméletéből erednek.)

Véges összegek közelítése integrálokkal

A gyakorlati életben az integrált sokszor használjuk véges összegek közelítésére – az általában megszokott eljárással éppen ellentétesen, amikor is az integrál közelítésére használunk véges összegeket.

Számítsuk ki például az első n egész szám négyzetgyökének összegét, azaz a $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}$ kifejezésnek az értékét! Az

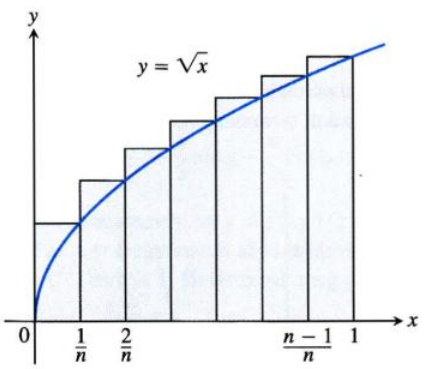
$$\int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\Big[x^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

integrál az

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{n} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^{3/2}}$$

határértéke.



Ezért n növekedtével S_n 2/3-hoz tart és azt kapjuk, hogy

a gyökök összege: $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n} = S_n \cdot n^{3/2} \approx \frac{2}{3}n^{3/2}$.

Az alábbi táblázat mutatja a közelítés „jóságát".

n	a gyökösszeg	$(2/3)n^{3/2}$	a relatív hiba
10	22,468	21,082	$1{,}386/22{,}468 \approx 6\%$
50	239,04	235,70	1,4%
100	671,46	666,67	0,7%

23. Számítsuk ki

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5}{n^6}$$

értékét! Először mutassuk meg, hogy a határérték

$$\int_0^1 x^5\,dx,$$

azután számítsuk ki az integrál értékét!

24. Számítsuk ki

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)$$

értékét! Lásd a 23. feladatot!

25. Legyen $f(x)$ folytonos függvény! Fejezzük ki határozott integrál alakban a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

határértéket!

26. A 25. feladat eredményét felhasználva számítsuk ki a következő határértékeket!

(a) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(2+4+6+\cdots+2n)$

(b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{16}}(1^{15}+2^{15}+3^{15}+\cdots+n^{15})$

(c) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$

Mit mondhatunk a következő határértékekről?

(d) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{17}}(1^{15}+2^{15}+3^{15}+\cdots+n^{15})$

(e) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{15}}(1^{15}+2^{15}+3^{15}+\cdots+n^{15})$

27. **(a)** Mutassuk meg, hogy az r sugarú körbe írt n oldalú szabályos sokszög A_n területe

$$A_n=\frac{nr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}!$$

(b) Számítsuk ki A_n határértékét $n\to\infty$-re! A kapott eredmény megfelel a kör területképletének?

28. **Egy differenciálegyenlet:** Mutassuk meg, hogy

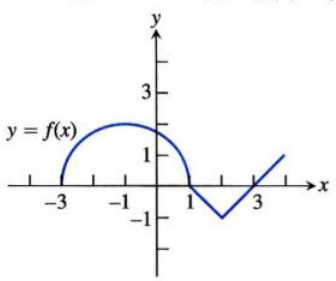
$$y=\sin x+\int_x^{\pi}\cos 2t\,dt+1$$

teljesíti az alábbi két feltételt:

i. $y''=-\sin x+2\sin 2x$,

ii. ha $x=\pi$, akkor $y=1$ és $y'=-2$!

29. **Integrállal értelmezett függvény:** Az f függvény grafikonja egy félkörből és két szakaszból áll, melyek az ábrán látható módon csatlakoznak egymáshoz. Legyen $g(x)=\int_1^x f(t)dt$!



Határozzuk meg

(a) $g(1)$-et,

(b) $g(3)$-et,

(c) $g(-1)$-et!

(d) Keressük meg a $(-3,4)$ nyílt intervallumban azokat az x értékeket, amelyekre g-nek relatív maximuma van!

(e) Írjuk fel g érintőegyenesének egyenletét az $x=-1$ pontban!

(f) Határozzuk meg a g grafikonjának összes $(-3,4)$ intervallumbeli inflexiós pontjának abszcisszáját!

(g) Határozzuk meg g értékkészletét!

6. fejezet
A határozott integrál alkalmazásai

ÁTTEKINTÉS: Az 5. fejezetben kiderítettük, milyen kapcsolat áll fenn valamely véges zárt $[a,b]$ intervallum egy P felosztásához rendelt

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

véges összegek és az integrál között. Megállapítottuk, hogy amennyiben a felosztás $\|P\|$ normája nullához tart, úgy az $[a,b]$ intervallumon folytonos f függvényre S_P határértéke az

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

szám, ahol F az f-nek egy primitív függvénye. Ezt az eredmény felhasználva kiszámítottuk, mekkora területet fog közre az x-tengely és az $y = f(x)$ grafikonja $a \le x \le b$ esetén, továbbá meghatároztuk két görbe által határolt terület nagyságát is.

Ebben a fejezetben tovább bővítjük az integrál alkalmazási körét, térfogatszámítással, síkbeli görbék hosszával, a tömegközépponttal, forgástestek felszínével, munkával és azokkal az erőhatásokkal fogunk foglalkozni, amelyet a folyadékok sík felületekre gyakorolnak. Mindezeket a problémákat zárt intervallumon folytonos függvények Riemann-összegének határértékeként kezeljük – vagyis határozott integrálokként, amelyet a Newton–Leibniz-tétel segítségével ki tudunk számolni.

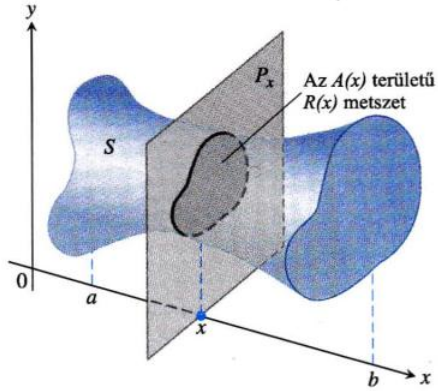
6.1. Szeletelés és tengely körüli forgatás

Ebben a szakaszban olyan testeknek definiáljuk a térfogatát, amelyek keresztmetszetei tartományok a síkban.[1] Az S test **metszetét** úgy állítjuk elő, hogy S-et egy síkkal átmetsszük (6.1. ábra).

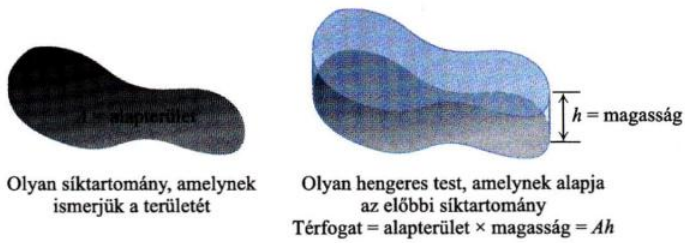
Tegyük fel, hogy a 6.1. ábrán látható testhez hasonló test térfogatát szeretnénk meghatározni. Először is a klasszikus geometriából ismert hengerfogalmat kell kiterjesztenünk tetszőleges alapú hengeres testekre (6.2. ábra). Ha ismerjük a hengeres test alapjának A területét és h magasságát, akkor a térfogata:

$$\text{térfogat} = \text{alapterület} \times \text{magasság} = A \cdot h.$$

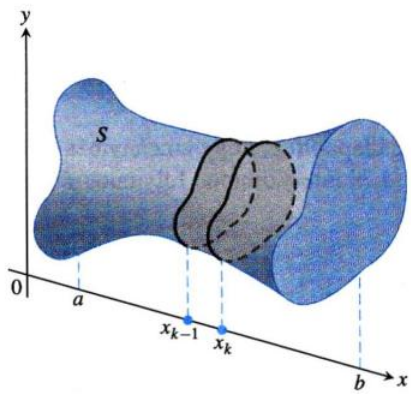
[1] Szerk. megj.: Eddig nem szerepelt sem geometriai test, sem tartomány definíciója. Pedig ezekre a fogalmakra szükség lenne ahhoz, hogy tudjuk, mikor érvényesek az itt következő állítások.



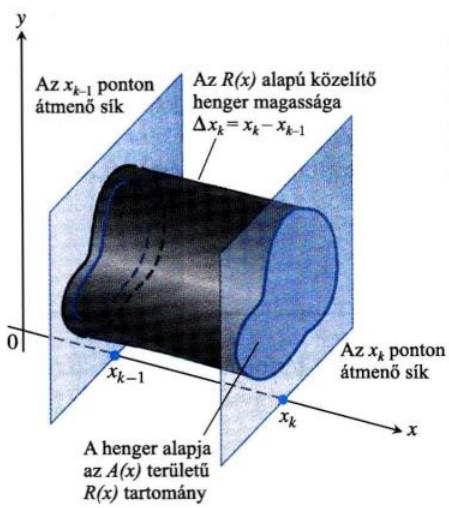
6.1. ÁBRA: Az S test P_x síkkal való metszete. P_x merőleges az x-tengelyre, x az $[a,b]$ intervallum valamely pontja.



6.2. ÁBRA: Hengeres test térfogatát mindig az alaplap területének és a magasságnak a szorzataként definiáljuk.



6.3. ÁBRA: Az S szilárd test egy keskeny szelete.



6.4. ÁBRA: Az S testnek a 6.3. ábrán látható keskeny szeletét olyan hengeres testtel approximáljuk, amelynek alapja az $A(x)$ területű $R(x_k)$ tartomány, magassága pedig $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Ez a definíció lesz az alapja a térfogatfogalom kiterjesztésének nem hengeres testekre.

Ha az $[a,b]$ intervallum valamely x pontjában az S test síkmetszete az $R(x)$ tartomány, s ennek $A(x)$ területe az x-nek folytonos függvénye, akkor S térfogatát határozott integrállal definiálhatjuk és számíthatjuk ki az alábbi módon.

Az $[a,b]$ intervallumot Δx_k hosszúságú (vagy szélességű) részintervallumokra osztjuk fel, s a testet – akárcsak egy cipót – az $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ osztópontokon átmenő, az x-tengelyre merőleges síkokkal felszeleteljük. Az x-tengelyre merőleges P_{x_k} síkok S-et vékony rétegekre osztják (mintha nagyon vékony kenyérszeleteket vágnánk). A 6.3. ábra egy ilyen réteget mutat. Az x_{k-1} és x_k pontokon átmenő síkok közötti réteget egy olyan hengeres testtel közelítjük, amelynek alapterülete $A(x_k)$, magassága pedig $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (6.4. ábra). Ennek a hengeres testnek a V_k térfogata $A(x_k) \cdot \Delta x_k$, s ez közelítőleg megegyezik az adott réteg térfogatával:

$$\text{a } k\text{-adik réteg térfogata } \approx V_k = A(x_k)\Delta x_k.$$

Az S test egészének térfogata hozzávetőleg e hengertérfogatok összege lesz:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x_k.$$

Ez az $A(x)$ függvény Riemann-összege az $[a,b]$ intervallumon. Azt várjuk, hogy a közelítés javulni fog, amint $[a,b]$ felosztásának normája nullához tart, ezért S térfogatát e Riemann-összeg határértékeként előálló határozott integrállal definiáljuk.

DEFINÍCIÓ: **Térfogat**

Ha valamely test metszetének területét az ismert és integrálható $A(x)$ függvény adja meg, akkor a test $x = a$ és $x = b$ közé eső darabjának térfogata:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

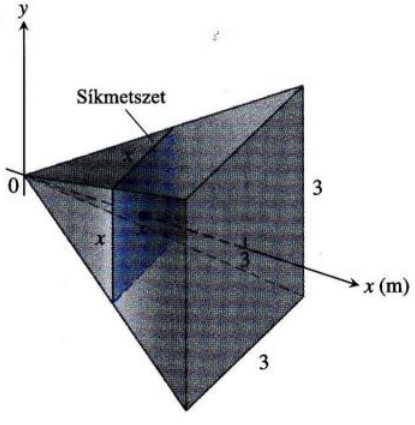
A képlet[2] akkor alkalmazható, ha $A(x)$ folytonos vagy kicsit általánosabban, ha $A(x)$ integrálható függvény. Ha a definícióban szereplő képlettel akarjuk meghatározni a test térfogat, a következőket kell tennünk:

Egy test térfogatának kiszámítása

1. *Ábrázoljuk a testet és annak egy tipikus metszetét!*
2. *Keressünk összefüggést $A(x)$-re, a metszet területére!*
3. *Tűzzük ki az integrálási határokat!*
4. *A Newton–Leibniz-tétel alkalmazásával integráljuk $A(x)$-et!*

1. PÉLDA: **Gúla térfogata**

Egy 3 m magas gúla alapja 3 m oldalélű négyzet. Ekkor a gúla x magasságára merőleges, a csúcsától x m távolságra lévő síkmetszete egy x m oldalhosszúságú négyzet lesz. Határozzuk meg a gúla térfogatát!



6.5. ÁBRA: Az 1. példában szereplő gúla metszetei négyzetek.

Megoldás:

1. *Ábrázolás.* A gúla magassága essen az x-tengelyre, csúcsa pedig legyen az origóban. Rajzoljuk fel a gúla egy síkmetszetét is (6.5. ábra).

2. *Összefüggés $A(x)$-re.* Az x pontbeli síkmetszet egy x méter oldalélű négyzet lesz, így annak területe:

$$A(x) = x^2.$$

3. *Az integrálás határai.* A vizsgálandó metszetek az $x = 0$ és az $x = 3$ értékek között helyezkednek el.

4. *A térfogatot integrálással meghatározzuk.*

$$V = \int_0^3 A(x)\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9\ \mathrm{m}^3. \qquad \square$$

2. PÉLDA: **A Cavalieri-elv**

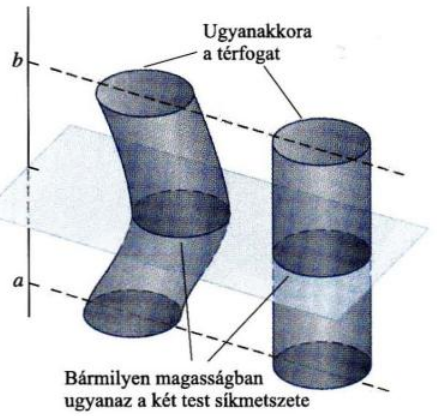
A Cavalieri-elv azt mondja ki, hogy az olyan testeknek, amelyeknek ugyanakkora a magassága és minden magasságnál a megfelelő síkmetszeteik területe azonos, megegyezik a térfogata[3] (6.6. ábra). Ez közvetlenül következik a térfogat definíciójából, mert ebben az esetben az $A(x)$ területfüggvény és az $[a, b]$ intervallum is azonos lesz.

3. PÉLDA: **Ék térfogata**

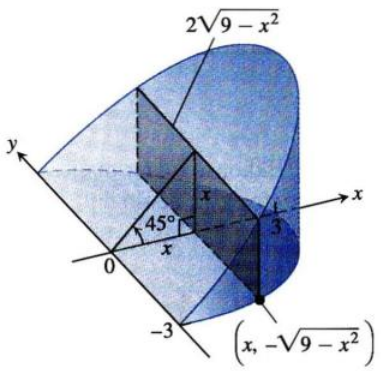
3 egység sugarú hengerből két síkkal éket vágunk ki. A metsző síkok egyike merőleges a henger tengelyére. A második sík az első síkot 45°-os szögben, a henger egy átmérőjében metszi. Határozzuk meg az ék térfogatát!

[2] Szerk. megj.: Az előbbi defínició, nem definíció, hanem képlet a térfogatra, ha az létezik. Az x tengelyre merőleges síkokban lehetnek úgy is „szép" metszetek, hogy összességüknek nincs térfogata. Az ilyen térbeli ponthalmazokat az állításból ki kell zárni.

[3] Szerk. megj.: A tétel így pontatlan, hamis, csak további pontosítással válik igazzá ld. Hajós György, Bevezetés a Geometriába, 226. old., Tankönyvkiadó, 1966.



6.6. ÁBRA: *A Cavalieri-elv.* Ezeknek a testeknek ugyanakkora a térfogatuk, amit egymásra helyezett érmékkel is illusztrálhatunk (1. példa).



6.7. ÁBRA: A 3. példában szereplő ék. A metszetei téglalapok.

Megoldás: Rajzoljuk fel az éket és annak egy síkmetszetét, amely merőleges az x-tengelyre (6.7. ábra). Az x pontbeli síkmetszet egy téglalap lesz, amelynek területe:

$$A(x) = (\text{magasság}) \cdot (\text{szélesség}) = (x)\left(2\sqrt{9-x^2}\right) = 2x\sqrt{9-x^2}.$$

A síkmetszetek az $x = 0$ és az $x = 3$ közötti szakaszon futnak végig, így

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,dx$$

$$= -\frac{2}{3}\left[(9-x^2)^{3/2}\right]_0^3$$

Legyen $u = 9 - x^2$, $du = -2xdx$, integrálunk, majd visszahelyettesítünk.

$$= 0 + \frac{2}{3}(9)^{3/2}$$

$$= 18. \qquad \square$$

Forgástestek: a korong-módszer

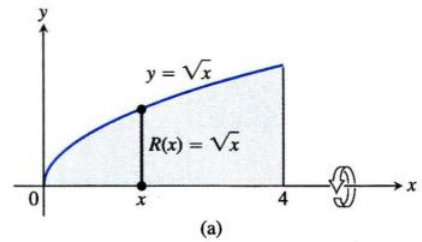
Az olyan testeket, amelyek úgy állnak elő, hogy egy síktartományt egy a síkban fekvő tengely körül megforgatunk, **forgástest**eknek nevezzük. A 6.8. ábrán láthatóhoz hasonló testek térfogatának kiszámításához csupán annyit kell észrevennünk, hogy a síkmetszet $A(x)$ területe nem más, mint az $R(x)$ sugarú körlemeznek a területe, ahol $R(x)$ a síktartomány határvonalának a forgástengelytől való távolságát jelenti. Ezért a terület

$$A(x) = \pi(\text{sugár})^2 = \pi[R(x)]^2.$$

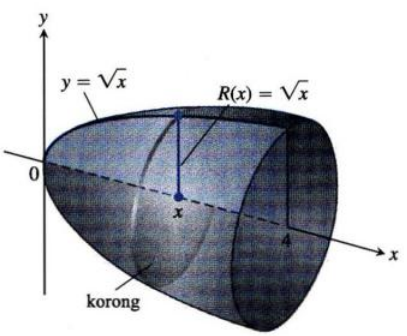
Így a térfogat definíciója szerint:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2\,dx.$$

A forgástest e térfogatszámítási módszerét gyakran korong-módszernek is nevezik, mert a síkmetszet egy $R(x)$ sugarú körlap.



(a)



(b)

6.8. ÁBRA: A 4. példában szereplő tartomány (a) és forgástest (b).

4. PÉLDA: **Egy forgástest (x-tengely körüli forgatás)**

Tekintsük az $y = \sqrt{x}$ görbe és az x-tengely által közbezárt tartományt a $0 \le x \le 4$ intervallumban. Forgassuk meg ezt a tartományt az x-tengely körül és számítsuk ki a keletkezett forgástestnek a térfogatát!

Megoldás: Vázoljuk fel a tartományt, az előálló forgástestet és annak egy síkmetszetét (6.8. ábra)! A térfogat:

$$V = \int_a^b \pi[R(x)]^2\,dx =$$

$$= \int_0^4 \pi\left[\sqrt{x}\right]^2 dx = \qquad R(x) = \sqrt{x}$$

$$= \int_0^4 x\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi\frac{4^2}{2} = 8\pi. \qquad \square$$

5. PÉLDA: **Gömb térfogata**

Az

$$x^2 + y^2 = a^2$$

kört forgassuk meg az x-tengely körül! Számítsuk ki az így keletkezett gömb térfogatát!

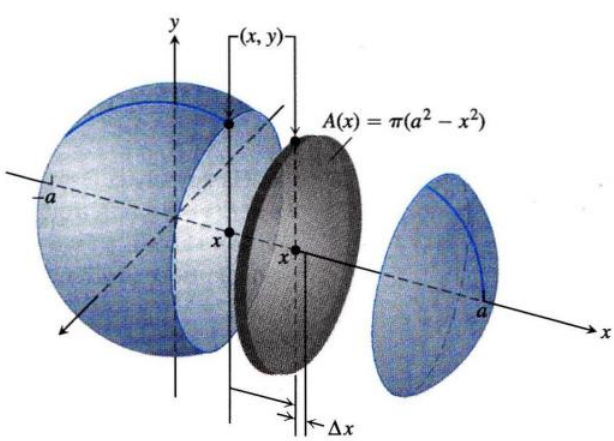
Megoldás: Képzeljük el, hogy a gömböt az x-tengelyre merőleges síkokkal vékony szeletekre vágjuk (6.9. ábra). A $-a$ és a között fekvő x pontot tartalmazó síkmetszet területe:

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(a^2 - x^2).$$

Ezért a térfogat:

$$V = \int_{-a}^{a} A(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \pi(a^2 - x^2)\,dx = \pi\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a^3. \qquad \square$$

A következő példánkban nem az x-tengely lesz a forgástengely, de a térfogatszámítás módszere változatlan marad: az alkalmasan megválasztott határok között integrálni kell a $\pi(\text{sugár})^2$ függvényt.



6.9. ÁBRA: Az $x^2 + y^2 = a^2$ kör x-tengely körüli forgatásával előálló gömb. A metszet sugara: $R(x) = y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (5. példa).

6. PÉLDA: **Forgástest térfogata (a forgástengely az $y = 1$ egyenes)**

Határozzuk meg annak a forgástestnek a térfogatát, amely az $y = \sqrt{x}$ görbe valamint az $y = 1$ és $x = 4$ egyenesek által határolt tartománynak az $y = 1$ egyenes körüli forgatásával jön létre!

Megoldás: Vázoljuk fel a tartományt, egyik körbeforgó sugarat és az előállt forgástestet (6.10. ábra)! A térfogat:

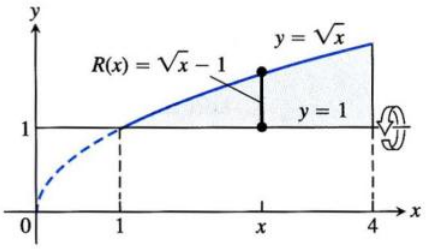
$$V = \int_1^4 \pi[R(x)]^2\,dx =$$

$$= \int_1^4 \pi\left[\sqrt{x}-1\right]^2\,dx =$$

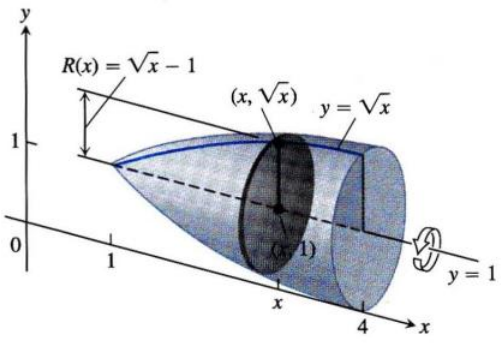
$$= \pi\int_1^4 \left[x-2\sqrt{x}+1\right]\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}-2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}+x\right]_1^4 = \frac{7\pi}{6}.$$

□



(a)



(b)

6.10. ÁBRA: A 6. példában szereplő tartomány (a) és forgástest (b).

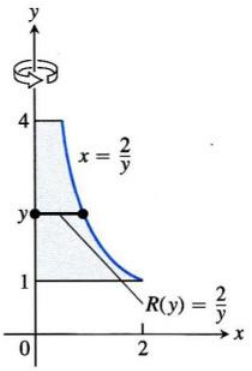
Ha egy olyan testnek kell kiszámítani a térfogatát, amely az y-tengely és az $x = R(y)$, $c \le y \le d$ görbe által határolt tartomány y-tengely körüli forgatásával áll elő, akkor is a fenti módszert használhatjuk, csupán x-et y-nal kell helyettesítenünk. Ebben az esetben a kör alakú síkmetszet területe

$$A(y) = \pi[\text{rádiusz}]^2 = \pi[R(y)]^2$$

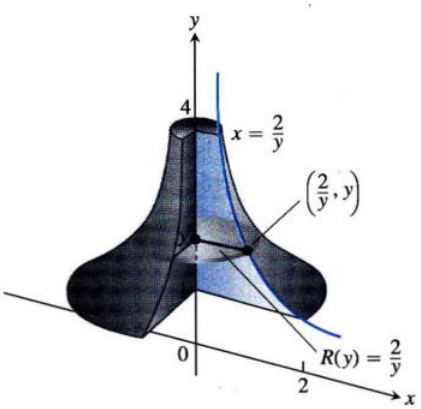
lesz.

7. PÉLDA: **y-tengely körüli forgatás**

Számítsuk ki az y-tengely és az $x = 2/y$, $1 \le y \le 4$ görbe által közbezárt tartomány y-tengely körüli forgatásával előálló forgástest térfogatát!



(a)



(b)

6.11. ÁBRA: A 7. példában szereplő tartomány (a) és forgástest egy részlete (b).

Megoldás: Rajzoljuk fel a tartományt, az egyik forgó sugarat, és a forgatással generált forgástestet (6.11. ábra)! A térfogat:

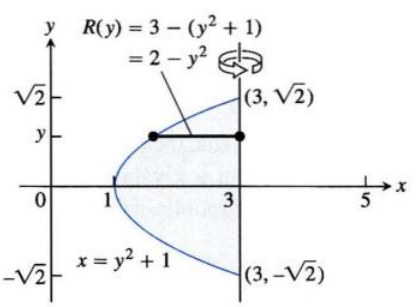
$$V = \int_1^4 \pi[R(y)]^2\,dy =$$
$$= \int_1^4 \pi\left(\frac{2}{y}\right)^2 dy =$$
$$= \int_0^4 \frac{4}{y^2}\,dy = 4\pi\left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 = 4\pi\left[\frac{3}{4}\right] =$$
$$= 3\pi. \qquad \square$$

8. PÉLDA: Függőleges tengely körüli forgatás

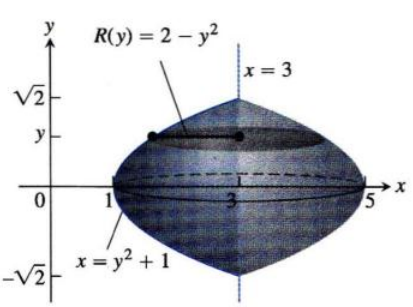
Határozzuk meg annak a forgástestnek a térfogatát, amely úgy keletkezik, hogy az $x = y^2 + 1$ parabola és az $x = 3$ egyenes által közrefogott tartományt megforgatjuk az $x = 3$ egyenes körül!

Megoldás: Rajzoljuk fel a tartományt, az egyik forgó sugarat és a forgatással generált forgástestet (6.12. ábra)! Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a síkmetszetek merőlegesek lesznek az $x = 3$ egyenesre. A térfogat:

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[R(y)]^2\,dy =$$
$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[2 - y^2]^2\,dy = \qquad R(y) = 3 - (y^2 + 1) = 2 - y^2$$
$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4 - 4y^2 + y^4]\,dy =$$
$$= \left[4y - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}. \qquad \square$$

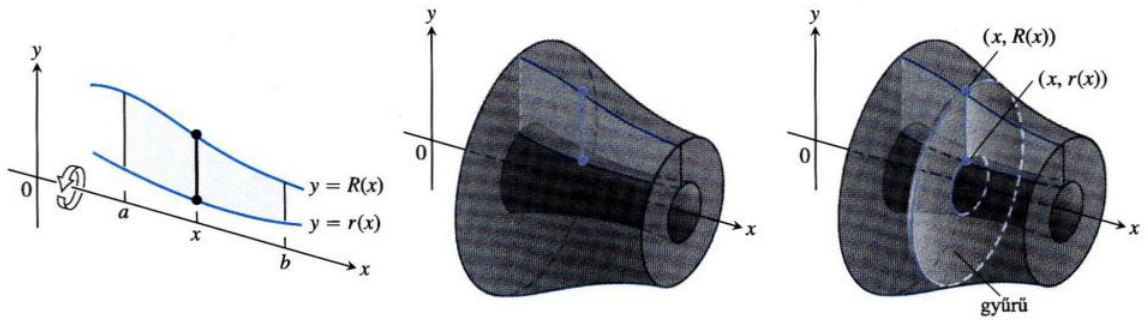


(a)

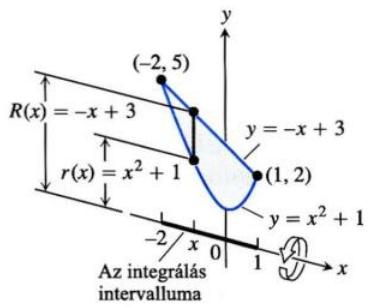


(b)

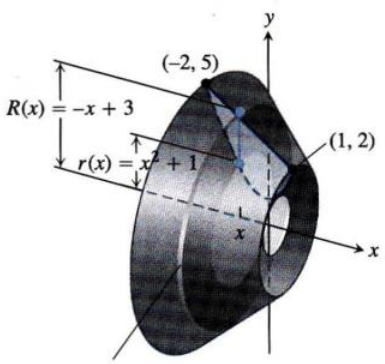
6.12. ÁBRA: A 8. példában szereplő tartomány (a) és forgástest (b).



6.13. ÁBRA: Az itt látható forgástest síkmetszete nem körlap, hanem körgyűrű, ezért az $\int_a^b A(x)\,dx$ integrál némileg bonyolultabb összefüggésre vezet.



(a)



(b)

6.14. ÁBRA: (a) A 4. példában szereplő tartományt egy, a forgástengelyre merőleges szakasz feszíti ki. (b) Amikor a tartományt az x-tengely körül megforgatjuk, a szakasz egy gyűrűt hoz létre.

Forgástestek: a gyűrűmódszer

Ha a forgástest létrehozásához olyan kiindulási tartományt választunk, amelynek egyik határvonala sem esik a forgástengelyre és nem is metszi azt, akkor a forgástest lyukas lesz (6.13. ábra). A forgástengelyre merőleges síkmetszetek nem körlapok hanem körgyűrűk lesznek (lásd az ábrát). Egy ilyen gyűrű méretei a következők:

külső sugár: $R(x)$,
belső sugár: $r(x)$.

A gyűrű területe:

$$A(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2 = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2).$$

A térfogat definíciója ezek után azt adja, hogy

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx.$$

A forgástest térfogatszámításának ezt a módszerét gyűrűmódszernek nevezik, mert az elemi közelítő összeg az $R(x)$ külső és $r(x)$ belső sugarú körgyűrű.[4]

9. PÉLDA: A gyűrű egy metszete (x-tengely körüli forgatás)

Forgassuk meg az x-tengely körül az $y = x^2 + 1$ görbe és az $y = -x + 3$ egyenes által határol tartományt! Határozzuk meg a forgástest térfogatát!

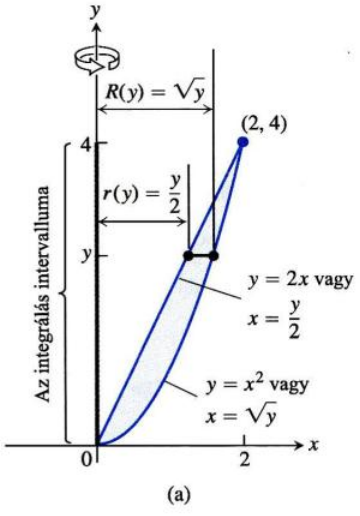
Megoldás:

1. Rajzoljuk fel a tartományt és vegyük fel a tartománynak egy olyan szakaszát, amely merőleges az x-tengelyre (6.14. ábra (a) része)!

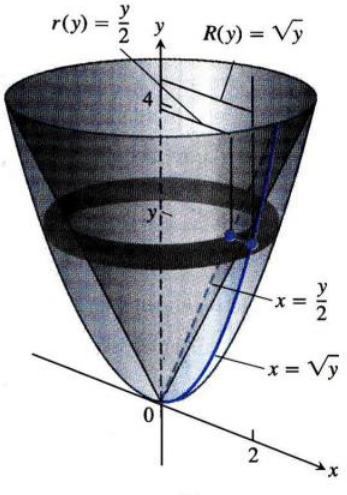
2. Határozzuk meg annak a gyűrűnek a külső és belső sugarát, amelyet a forgatás során a kiválasztott szakasz végigsöpör! A külső és a belső sugár a szakasz végpontjainak a forgástengelytől mért távolságát adja meg (6.14. ábra).

Külső sugár: $R(x) = -x + 3$.
Belső sugár: $r(x) = x^2 + 1$.

[4] A szerk. megjegyzése: Az eredmény nyilvánvalóan két térfogat különbsége, minden további levezetés nélkül.



(a)



(b)

6.15. ÁBRA: (a) Az y tengely körül megforgatandó tartomány, a gyűrű külső és belső sugara valamint az integrálási határok (10. példa). (b) Az ábra (a) részén megrajzolt szakasz egy körgyűrűt söpör végig.

3. Most határozzuk meg az integrálási határokat! Ezt úgy tesszük meg, hogy kiszámítjuk a görbe és az egyenes metszéspontjainak x-koordinátáját (6.14a ábra).

$$\begin{aligned} x^2+1 &= -x+3 \\ x^2+x-2 &= 0 \\ (x+2)(x-1) &= 0 \\ x=-2, \quad x &= 1 \end{aligned}$$

4. Határozzuk meg az integrál értékét!

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi([R(x)]^2-[r(x)]^2)\,dx = \\ &= \int_{-2}^{1} \pi((-x+3)^2-(x^2+1)^2\,dx = \quad \text{a 2. és 3. lépésből átvett értékek} \\ &= \int_{-2}^{1} \pi(8-6x-x^2-x^4)\,dx = \\ &= \pi\left[8x-3x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} = \frac{117\pi}{5}. \end{aligned}$$

□

Ha az y-tengely körüli forgatással előálló forgástestnek a térfogatát kell meghatároznunk, akkor ugyanazt az eljárást alkalmazhatjuk mint a 9. példában, csupán annyi a különbség, hogy x helyett y szerint kell integrálnunk. Ez esetben a gyűrűfelületet végigsöprő szakasz az y-tengelyre (azaz megint csak a forgástengelyre) lesz merőleges, s a gyűrű belső illetve külső sugara is az y változó függvénye lesz.

10. PÉLDA: A gyűrű egy metszete (y-tengely körüli forgatás)

Tekintsük az $y=x^2$ parabola és az $y=2x$ egyenes által határolt tartományt, s forgassuk azt meg az y-tengely körül. Határozzuk meg a keletkezett forgástestnek a térfogatát!

Megoldás: Felrajzoljuk a feladatban szereplő tartományt, majd felveszünk egy, a tartomány két határpontját összekötő, a forgástengelyre (az y-tengelyre) merőleges szakaszt. Lásd a 6.15a ábrát!

A szakasz egy körgyűrűn söpör végig, amelynek sugarai $R(x)=\sqrt{y}$, $r(x)=y/2$ (6.15. ábra).

A parabola és az egyenes az $y=0$ és $y=4$ pontokban metszik egymást, ezért az integrálási határok: $c=0$ és $d=4$. Integrálással megkapjuk a keresett térfogatot:

$$\begin{aligned} V &= \int_c^d \pi([R(x)]^2-[r(x)]^2)\,dy = \\ &= \int_0^4 \pi\left([\sqrt{y}]^2-\left[\frac{y}{2}\right]^2\right)dy = \\ &= \pi\int_0^4 \left(y-\frac{y^2}{4}\right)dy = \pi\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

□

Összefoglalás

A fenti példák mindegyikében a megoldás legfontosabb lépése az volt, hogy a térfogat definíciójára támaszkodva kiszámítottuk a $V = \int_a^b A(x)\,dx$ határozott integrál értékét függetlenül attól, hogy miként volt meghatározva a test egy síkmetszetének $A(x)$ területe.

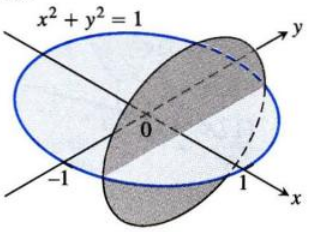
6.1. Feladatok

Síkmetszetek területe

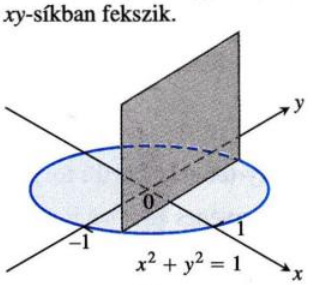
Az 1–2. feladatokban keressük meg a forgástest x-tengelyre merőleges síkmetszetének $A(x)$ területképletét!

1. A test az x-tengelyre merőleges $x = -1$ és $x = 1$ síkok között helyezkedik el. A síkmetszetek minden esetben e két sík között, az x-tengelyre merőlegesen az $y = -\sqrt{1-x^2}$ félkörtől az $y = \sqrt{1-x^2}$ félkörig futnak.

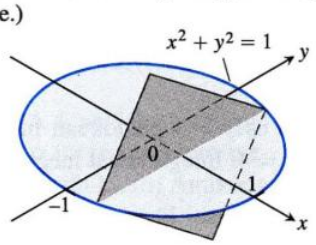
(a) A síkmetszetek olyan körlapok, amelyek átmérője az xy-síkban van.



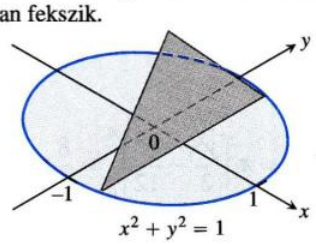
(b) A síkmetszetek olyan négyzetek, amelyeknek egyik oldaléle az xy-síkban fekszik.



(c) A síkmetszetek olyan négyzetek, amelyeknek egyik átlója az xy-síkban fekszik. (A négyzet átlója az oldalhossz $\sqrt{2}$-szerese.)

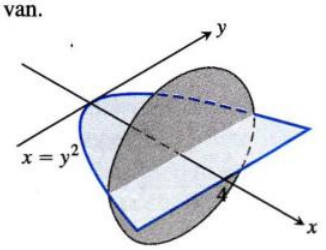


(d) A síkmetszetek egyenlő oldalú háromszögek, alapjuk az xy-síkban fekszik.

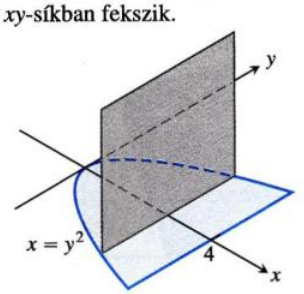


2. A test az x-tengelyre merőleges $x = -1$ és $x = 1$ síkok között helyezkedik el. A síkmetszetek minden esetben e két sík között, az x-tengelyre merőlegesen az $y = -\sqrt{x}$ parabolától az $y = \sqrt{x}$ paraboláig futnak.

(a) A síkmetszetek olyan körlapok, amelyek átmérője az xy-síkban van.



(b) A síkmetszetek olyan négyzetek, amelyeknek egyik oldaléle az xy-síkban fekszik.



(c) A síkmetszetek olyan négyzetek, amelyeknek egyik átlója az xy-síkban fekszik.

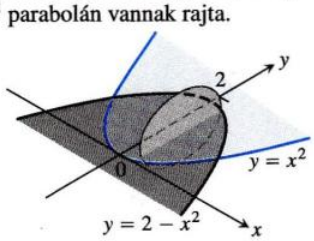
(d) A síkmetszetek egyenlő oldalú háromszögek, alapjuk az xy-síkban fekszik.

Térfogatszámítás felszeleteléssel

A 3–10. feladatokban számítsuk ki a testek térfogatát!

3. A test az x-tengelyre merőleges $x = 0$ és $x = 4$ síkok között helyezkedik el. A tengelyre merőleges síkmetszetek a $0 \le x \le 4$ intervallumban olyan négyzetek, amelyek átlóinak végpontja az $y = -\sqrt{x}$ parabolán és az $y = \sqrt{x}$ parabolán van rajta.

4. A test az x-tengelyre merőleges $x = -1$ és $x = 1$ síkok között helyezkedik el. A tengelyre merőleges síkmetszetei olyan körlapok, amelyek átmérőinek végpontjai az $y = x/2$ parabolán és az $y = 2 - x^2$ parabolán vannak rajta.

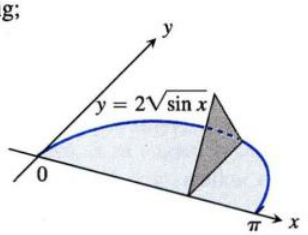


5. A test az x-tengelyre merőleges $x=-1$ és $x=1$ síkok között helyezkedik el. A tengelyre merőleges, és e két sík között elhelyezkedő síkmetszetek olyan négyzetek, amelyek egyik oldalélének végpontjai az $y=-\sqrt{1-x^2}$ félkörön, illetve az $y=\sqrt{1-x^2}$ félkörön futnak végig.

6. A test az x-tengelyre merőleges $x=-1$ és $x=1$ síkok között helyezkedik el. A tengelyre merőleges, e két sík között fekvő síkmetszetek olyan négyzetek, amelyek átlóinak végpontjai az $y=-\sqrt{1-x^2}$ félkörön, illetve az $y=\sqrt{1-x^2}$ félkörön futnak végig.

7. Egy test alaplapja az $y=2\sqrt{\sin x}$ görbe és az x-tengely $[0,\pi]$ intervalluma által közbezárt tartomány. Az x-tengelyre merőleges síkmetszetek:

(a) egyenlő oldalú háromszögek, amelyek alapjainak végpontjai az ábrán látható módon az x-tengelyen és a görbén futnak végig;



(b) négyzetek, amelyeknek egyik oldalainak végpontjai az x-tengelyen és a görbén futnak végig.

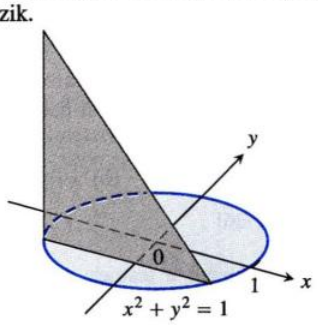
8. A test az x-tengelyre merőleges $x=-\pi/3$ és $x=\pi/3$ síkok között helyezkedik el. Az x-tengelyre merőleges síkmetszetei:

(a) körlapok, amelyek átmérőinek végpontjai az $y=\operatorname{tg}x$ és az $y=\sec x$ görbéken futnak végig;

(b) négyzetek, amelyeknek egyik oldalainak végpontjai az $y=\operatorname{tg}x$ és az $y=\sec x$ görbéken futnak végig.

9. A test az y-tengelyre merőleges $y=0$ és $y=2$ síkok között fekszik. Az y-tengelyre merőleges síkmetszetei olyan körlapok, amelyek átmérőinek végpontjai az y tengelyen és az $x=\sqrt{5}y^2$ parabolán futnak végig.

10. A test alaplapja az $x^2+y^2\le 1$ körlap. Az y-tengelyre merőleges síkmetszetei az $y=-1$ és $y=1$ közötti intervallumon olyan egyenlő szárú derékszögű háromszögek, amelyek egyik befogója a körlapon fekszik.

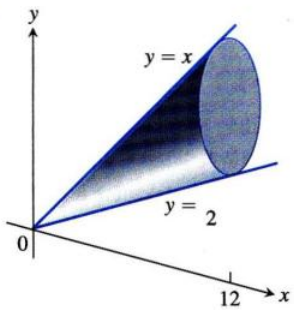


11. Csavart test: Az s oldalélű négyzet az L egyenesre merőleges síkban fekszik. A négyzet egyik csúcsa illeszkedik L-re. Miközben a négyzetet h távolságnyit elmozdítjuk az L egyenes mentén, L mint forgástengely körül meg is forgatjuk, miáltal az egy csigavonalszerű oszlopot hoz létre, amelynek síkmetszetei négyzetek.

(a) Határozzuk meg az oszlop térfogatát!

(b) Mi történik a térfogattal, ha a négyzetet nem egyszer, hanem kétszer forgatjuk körbe? Válaszunkat indokoljuk!

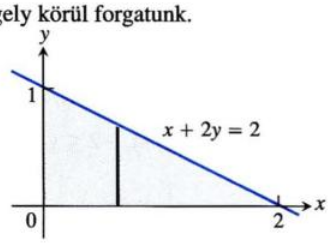
12. A Cavalieri-elv: A test az x-tengelyre merőleges $x=0$ és $x=12$ síkok között fekszik. Az x-tengelyre merőleges síkmetszetei olyan körlapok, amelyek átmérőinek végpontjai az $y=x/2$ és az $y=x$ egyeneseken futnak végig, amint azt az ábra is mutatja. Indokoljuk, hogy a testnek miért lesz ugyanakkora a térfogata, mint egy 3 egység sugarú és 12 egység magasságú egyenes körkúpnak!



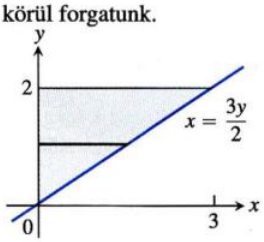
Térfogatszámítás korong-módszerrel

A 13–16. feladatokban számítsuk ki annak a forgástestnek a térfogatát, amely a satírozott tartomány forgatásával áll elő!

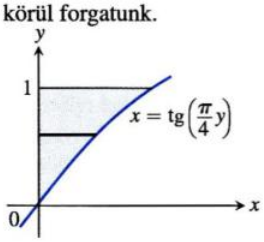
13. Az x-tengely körül forgatunk.



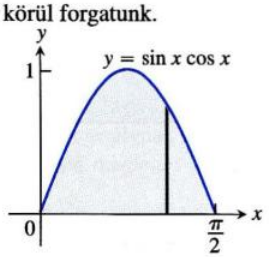
14. Az y-tengely körül forgatunk.



15. Az y-tengely körül forgatunk.



16. Az x-tengely körül forgatunk.



Határozzuk meg azoknak a forgástesteknek a térfogatát, amelyek a 17–22. feladatokban megadott egyenesek és görbék által meghatározott tartományok x-tengely körüli forgatásával jönnek létre!

17. $y=x^2, y=0, x=2$ **18.** $y=x^3, y=0, x=2$

19. $y=\sqrt{9-x^2}, y=0$ **20.** $y=x-x^2, y=0$

21. $y=\sqrt{\cos x}, 0\le x\le \pi/2, y=0, x=0$

22. $y=\sec x, y=0, x=-\pi/4, x=\pi/4$

A 23. és a 24. feladatban határozzuk meg a tartomány megadott tengely körüli forgatásával előálló forgástest térfogatát!

23. Az első síknegyedbeli alakzatot felülről az $y=\sqrt{2}$ egyenes, alulról az $y=\sec x\operatorname{tg} x$ görbe, balról az y-tengely határolja. A forgástengely az $y=\sqrt{2}$ egyenes.

24. Az első síknegyedbeli alakzatot felülről az $y=2$ egyenes, alulról az $y=2\sin x, 0\le x\le \pi/2$ görbe, balról pedig az y-tengely határolja. A forgástengely az $y=2$ egyenes.

Határozzuk meg azoknak a forgástesteknek a térfogatát, amelyek a 25–30. feladatokban megadott egyenesek és görbék által meghatározott tartományok y-tengely körüli forgatásával jönnek létre.

25. A tartományt $x=\sqrt{5}y^2, x=0, y=-1, y=1$ határolják.

26. A tartományt $x=y^{3/2}, x=0, y=2$ határolják.

27. A tartományt $x=\sqrt{2\sin 2y}, 0\le y\le \pi/2, x=0$ határolják.

28. A tartományt $x=\sqrt{\cos(\pi y/4)}, -2\le y\le 0, x=0$ határolják.

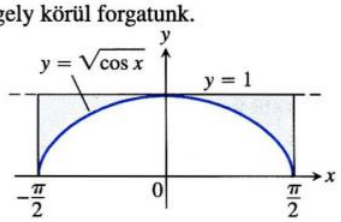
29. $x=2/(y+1), x=0, y=0, y=3$

30. $x=\sqrt{2y}/(y^2+1), x=0, y=1$

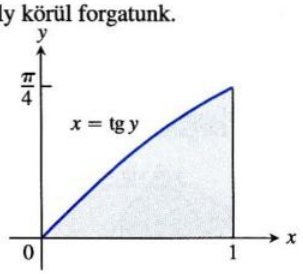
Térfogatszámítás gyűrűmódszerrel

A 31. és a 32. feladatban határozzuk meg a satírozott tartomány megadott tengely körüli forgatásával előálló forgástest térfogatát!

31. Az x-tengely körül forgatunk.



32. Az y-tengely körül forgatunk.



A 33–38. feladatokban határozzuk meg a megadott egyenesek és görbék által közbezárt tartomány x-tengely körüli forgatásával előálló forgástest térfogatát!

33. $y=x, y=1, x=0$ **34.** $y=2\sqrt{x}, y=2, x=0$

35. $y=x^2+1, y=x+3$ **36.** $y=4-x^2, y=2-x$

37. $y=\sec x, y=\sqrt{2}, -\pi/4\le x\le \pi/4$

38. $y=\sec x, y=\operatorname{tg} x, x=0, x=1$

A 39–42. feladatokban határozzuk meg a tartományok y-tengely körüli forgatásával keletkező forgástest térfogatát!

39. A tartomány az $(1,0)$, $(2,1)$ és $(1,1)$ csúcspontú háromszög.

40. A tartomány az $(0,1)$, $(1,0)$ és $(1,1)$ csúcspontú háromszög.

41. Az első síknegyedbeli tartományt felülről az $y=x^2$ parabola, alulról az x-tengely, jobbról pedig az $x=2$ egyenes határolja.

42. Az első síknegyedbeli tartományt balról az $x^2+y^2=3$ kör, jobbról az $x=\sqrt{3}$ egyenes, felülről pedig az $y=\sqrt{3}$ egyenes határolja.

A 43. és a 44. feladatban a megadott tartománynak a megadott tengely körüli forgatásával keletkező test térfogatát kell meghatározni.

43. Az első síknegyedbeli tartományt felülről az $y=x^2$ görbe, alulról az x-tengely, jobbról pedig az $x=2$ egyenes határolja. A forgástengely az $x=-1$ egyenes.

44. A második síknegyedbeli tartományt felülről az $y=-x^3$ görbe, alulról az x-tengely, balról az $x=-1$ egyenes határolja. A forgástengely az $x=-2$ egyenes.

Forgástestek térfogata

45. Határozzuk meg annak a testnek a térfogatát, amely az $y=\sqrt{x}$ és az $y=2, x=0$ egyenesek által határolt tartomány

(a) x-tengely, **(b)** y-tengely,

(c) $y=2$ egyenes, **(d)** $x=4$ egyenes

körüli forgatásával áll elő!

46. Határozzuk meg annak a testnek a térfogatát, amely az $y=2x$, $y=0$ és $x=1$ egyenesek által határolt háromszögtartománynak az

(a) $x=1$ egyenes, **(b)** $x=2$ egyenes

körüli forgatásával áll elő!

47. Határozzuk meg annak a testnek a térfogatát, amely az $y=x^2$ parabola és az $y=1$ egyenes által határolt tartomány

(a) $y=1$ egyenes, **(b)** $y=2$ egyenes,

(c) $y=-1$ egyenes

körüli forgatásával áll elő!

48. Határozzuk meg integrálással annak a testnek a térfogatát, amely a $(0,0)$, $(b,0)$, $(0,h)$ csúcspontú háromszög

(a) x-tengely, **(b)** y-tengely

körüli forgatásával áll elő!

Elmélet és alkalmazások

49. A tórusz térfogata: Forgassuk meg az $x^2 + y^2 \le a^2$ körlapot az $x = b$ $(b > a)$ egyenes körül! Így egy fánkszerű alakzatot kapunk, amelyet *tórusznak* nevezünk. Határozzuk meg a térfogatát! (*Útmutatás:* $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = \pi a^2/2$, mivel az egy a sugarú félkörnek a területe.)

50. Serleg térfogata: Serlegformát úgy készíthetünk, hogy az $y = x^2/2$ grafikonjának $y = 0$ és $y = 5$ közé eső darabját megforgatjuk az y-tengely körül.

(a) Számítsuk ki a serleg térfogatát!

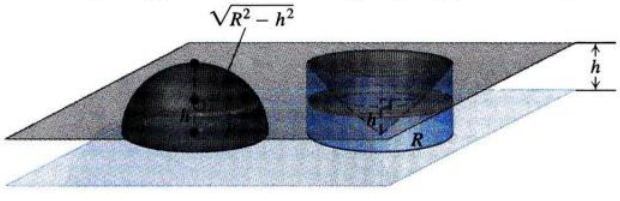
(b) Relatív sebesség. Ha a serlegbe 3 térfogategységnyi vizet töltünk másodpercenként, milyen gyorsan emelkedik a vízszint a serlegben akkor, amikor a víz már négy egység magasan áll a serlegben?

51. (a) Serleg térfogata. Egy a sugarú, félgömb alakú serleget h magasságig vízzel megtöltünk. Számítsuk ki, mennyi víz van a serlegben!

(b) Relatív sebesség. Másodpercenként 0,2 m^3 víz ömlik egy félgömb alakú, 5 m sugarú betonmedencébe. Milyen gyorsan emelkedik a vízszint, amikor a víz már négy méter mély?

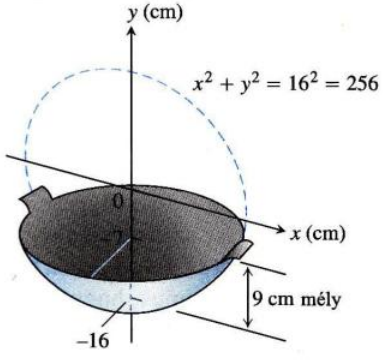
52. Hogyan becsülhetjük meg egy forgástest térfogatát a forgástengellyel párhuzamos síkra vetülő árnyékából, ha a fény a síkra merőleges irányból jön?

53. Félgömb térfogata: Vezessük le az R sugarú félgömb térfogatára érvényes $V = (2/3)\pi R^3$ összefüggést úgy, hogy síkmetszeteit összevetjük egy olyan R sugarú és R magasságú egyenes körhengernek a síkmetszetével, amelyből az ábrán látható módon kivágunk egy R sugarú és R magasságú egyenes körkúpot.

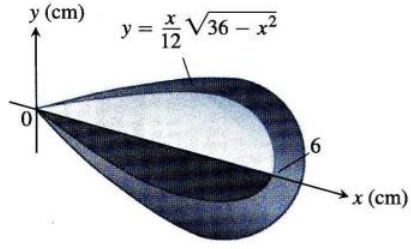


54. Kúp térfogata: A kalkulus eszközeivel határozzuk meg az r sugarú és h magasságú egyenes körkúp térfogatát!

55. Tervezzünk egy serleg alakú, fogantyúval ellátott sütőserpenyőt (wokot)! Egy kis kísérletezéssel meggyőződhetünk arról, hogy a 9 cm mély és 16 cm sugarú wok űrtartalma nagyjából 3 liter. Bizonyosságot úgy nyerhetünk, ha a wokot az alább látható módon forgástestnek fogjuk fel és térfogatát integrálással meghatározzuk. Köbcentiméterre kerekítve mekkora lesz valójában a wok térfogata? (1 l = 1000 cm^3)



56. Egy réz függőt kell készítenünk, kb.190 gramm tömegűt. Az ábrán látható forgástest alakot terveztük. Számítsuk ki, mekkora lesz a függő térfogata! Ha az ötvözet sűrűsége 8,5 g/cm^3, mekkora lesz a függő tömege (grammra kerekítve)?

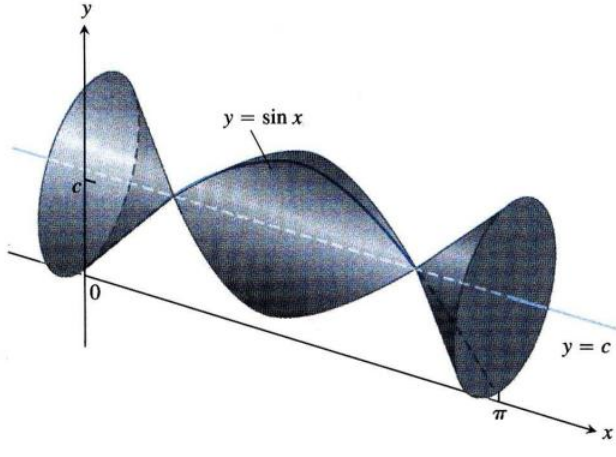


57. Maximum és minimum: Az $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$ ívet megforgatjuk az $y = c$, $0 \le c \le 1$ egyenes körül, s így a 6.16. ábrán látható testet kapjuk.

(a) Keressük meg azt a c értéket, amelyre a test térfogata minimális lesz! Mekkora a minimális térfogat értéke?

(b) c mely értékére lesz maximális a térfogat?

T (c) Ábrázoljuk a test térfogatát mint c függvényét először $0 \le c \le 1$-re, majd ennél tágabb intervallumban! Mi történik a térfogattal, miközben c távolodik a $[0, 1]$ intervallumtól? Van-e ennek valamiféle fizikai jelentése? Válaszunkat indokoljuk!



6.16. ÁBRA

58. Üzemanyag-póttartályt kell terveznünk egy helikopter törzse alá, hogy ezzel megnövelhessük a gép hatótávolságát. Miután néhány órát már eltöltöttünk a rajztábla mellett, úgy döntünk, hogy a tartály számára ideális alakot egy forgástestként írhatjuk fel. Az ideális tartály úgy áll elő, ha az $y = 0{,}3 - (x^2/4{,}88)$, $-1{,}2 \le x \le 1{,}2$ görbét az x-tengely körül megforgatjuk (a mértékegység a méter).

(a) Hány köblábnyi üzemanyag fér majd a tartályba (köblábra kerekítve)?

(b) Ha a helikopter 1 liter üzemanyaggal 0,9 km-t képes megtenni, akkor a póttartálynak köszönhetően hány további kilométert lesz képes megtenni a helikopter (km-re kerekítve)?

6.2. Térfogatszámítás hengerhéj-módszerrel

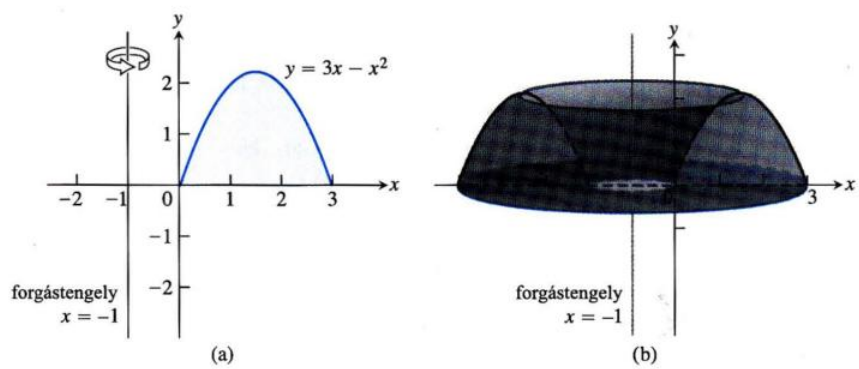
A 6.1. szakaszban az S test térfogatát a

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

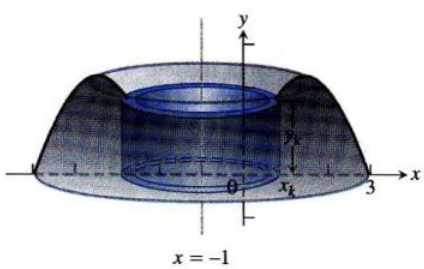
határozott integrállal definiáltuk, ahol $A(x)$ az S síkmetszetének integrálható területfüggvényét jelenti. Az $A(x)$ területhez úgy jutottunk, hogy a testet az x-tengelyre merőleges síkokkal felszeleteltük. Ebben a szakaszban ugyanezt a definíciót fogjuk alkalmazni a térfogatra, de a testet most másként szeleteljük fel. Most egyre növekvő sugarú körhengerekkel szabdaljuk fel a testet, olyanokkal, mint egy pogácsaszaggató készlet. Függőlegesen, az x-tengelyre merőlegesen vágjuk keresztül a testet, a henger tengelye párhuzamos lesz az y-tengellyel. Minden hengernek ugyanaz lesz a függőleges tengelye, de sugaruk minden egyes vágás alkalmával nő. Ily módon a testet azonos vastagságú hengerhéjakra osztjuk fel, amelyek a közös tengelytől úgy terjeszkednek kifelé, akárcsak a fák évgyűrűi. Ha egy hengerhéjat kiterítünk, azt látjuk, hogy a hengerhéj térfogata hozzávetőleg egy olyan téglatestnek a térfogatával egyenlő, amelynek alaplapja $A(x)$ területű, magassága pedig Δx. Emiatt a térfogatot ugyanolyan integrálként értelmezhetjük most is, mint korábban. Mielőtt még a módszert általánosan megfogalmaznánk, nézzünk egy példát!

1. PÉLDA: Térfogatszámítás hengerhéjakkal

Az x-tengely és az $y = f(x) = 3x - x^2$ parabola által határolt tartományt megforgatjuk az $x = -1$ függőleges egyenes körül. Így a 6.17. ábrán látható testet kapjuk. Számítsuk ki ennek a testnek a térfogatát!

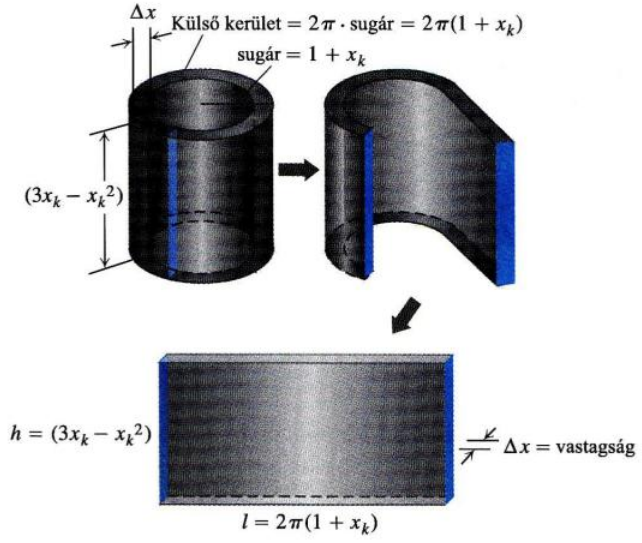


6.17. ÁBRA: (a) Az 1. példában szereplő tartomány grafikonja a forgatás előtt. (b) Az ábra (a) részén látható tartományból ez a forgástest áll elő, ha a tartományt az $x = -1$ egyenes körül megforgatjuk.



6.18. ÁBRA: Egy y_k magasságú hengerhéj, amelyet úgy kaptunk, hogy egy Δx szélességű sávot az $x = -1$ tengely körül megforgattunk. A henger külső sugara x_k, magassága $y_k = 3x_k - x_k^2$ (1. példa).

Megoldás: A 6.1. szakaszban megismert gyűrűmódszert itt nem lenne helyénvaló alkalmazni, akkor ugyanis a bal és jobb oldali parabolaághoz tartozó x-értékeket y függvényeként kellene kifejeznünk. (Ezek az x értékek adnák a gyűrű külső és belső sugarát, s meglehetősen bonyolult összefüggésre vezetnének.) Egy Δy szélességű szalag helyett inkább egy Δx szélességű függőleges szalagot forgatunk. Egy ilyen hengerhéjat mutat a 6.18. ábra. Ezzel a hengerhéjjal a testnek egy szeletét közelítjük. A szeleteket úgy kapjuk, hogy a testet a forgástengellyel párhuzamosan a belső lyuk közvetlen közelében bevágjuk. Azután az immár kissé nagyobb belső lyuk mentén egy újabb vágást ejtünk s így tovább, míg végül n hengert kapunk. A hengerek sugara fokozatosan nő, magasságuk pedig a parabola kontúrját követi: előbb nő, aztán újra csökken (6.17a ábra).



6.19. ÁBRA: Képzeljük el, hogy kivágunk és síkba kiterítünk egy hengerhéjat! Egy négyszögletes testet (közelítőleg téglatestet) kapunk (1. példa).

Minden szelet az x-tengely egy Δx hosszúságú részintervallumára támaszkodik. Sugara közelítőleg $(1+x_k)$, magassága hozzávetőleg $3x_k - x_k^2$. Ha az x_k értékhez tartozó hengert kiterítjük, egy Δx vastagságú, téglalap alakú táblát kapunk (6.19. ábra). A k-adik henger külső kerülete $2\pi \cdot$ sugár $= 2\pi(1+x_k)$, s ez egyben a síkba kiterített téglalap alakú tábla hossza is. Ennek térfogatát egy téglatest térfogatával közelítjük:

$$\begin{aligned}\Delta V_k &= \text{kerület} \times \text{magasság} \times \text{vastagság} = \\ &= 2\pi(1+x_k)\cdot(3x_k - x_k^2)\cdot\Delta x_k.\end{aligned}$$

Az egyes hengerhéjak ΔV_k térfogatát a $[0,3]$ intervallumra összegezve a

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi(1+x_k)(3x_k - x_k^2)\Delta x_k$$

Riemann-összeget kapjuk. Ha ennek a határértékét vesszük $\Delta x \to 0$ esetén, a térfogatot megadó integrálhoz jutunk:

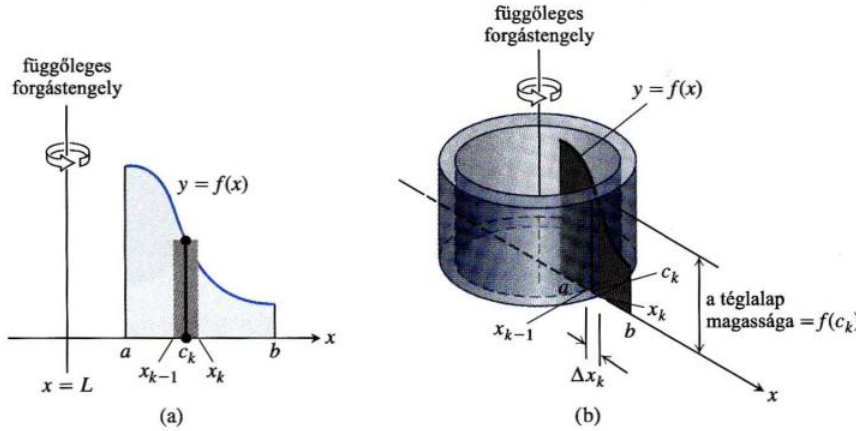
$$\begin{aligned}V &= \int_0^3 2\pi(x+1)(3x-x^2)\,dx = \\ &= \int_0^3 2\pi(3x^2+3x-x^3-x^2)\,dx = \\ &= 2\pi\int_0^3 (2x^2+3x-x^3)\,dx = \\ &= 2\pi\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^3 = \frac{45\pi}{2}.\end{aligned}$$

□

És most általánosítsuk az 1. példában alkalmazott eljárást!

A héjmódszer

Tegyük fel, hogy egy tartományt az $[a,b]$ zárt intervallumon az x-tengely és a nemnegatív folytonos $y = f(x)$ függvény grafikonja határol, s a tartomány az



6.20. ÁBRA: Ha az (a) ábrán látható tartományt megforgatjuk az $x = L$ egyenes körül, akkor egy olyan forgástestet kapunk, amelyet hengerhéjakra szeletelhetünk fel. A (b) ábra egy ilyen héját mutat.

$x = L$ egyenestől jobbra helyezkedik el (6.20a ábra). Legyen $a \geq L$, azaz a függőleges egyenes érintkezhet a tartománnyal, de nem metszheti azt. A tartomány L körüli forgatásával generáljunk egy forgástestet!

Legyen P az $[a,b]$ intervallum egy felosztása az $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ osztópontokkal, c_k pedig legyen a k-adik, $[x_{k-1},x_k]$ intervallum egy belső pontja. A 6.20a ábrán látható tartományt az $[a,b]$ intervallum e felosztására támaszkodó téglalapokkal közelítjük. A k-adik közelítő téglalap magassága $f(c_k)$ lesz, szélessége pedig $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Ha ezt a téglalapot megforgatjuk az $x = L$ egyenes körül, akkor az a 6.20b ábrán látható héjon söpör végig. A téglalap által végigsöpört térfogatot az elemi geometriából átvett képlettel számoljuk ki:

$$\Delta V_k = 2\pi \times \text{ a héj közepes sugara } \times \text{ a héj magassága } \times \text{ vastagsága} =$$
$$= 2\pi \cdot (c_k - L) \cdot f(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

S térfogatát a P felosztásra támaszkodó n téglalap által végigsöpört héjak térfogatának összegével közelítjük:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k.$$

e Riemann-összeg $\|P\| \to 0$ esetén vett határértéke adja meg határozott integrál alakjában a test térfogatát:

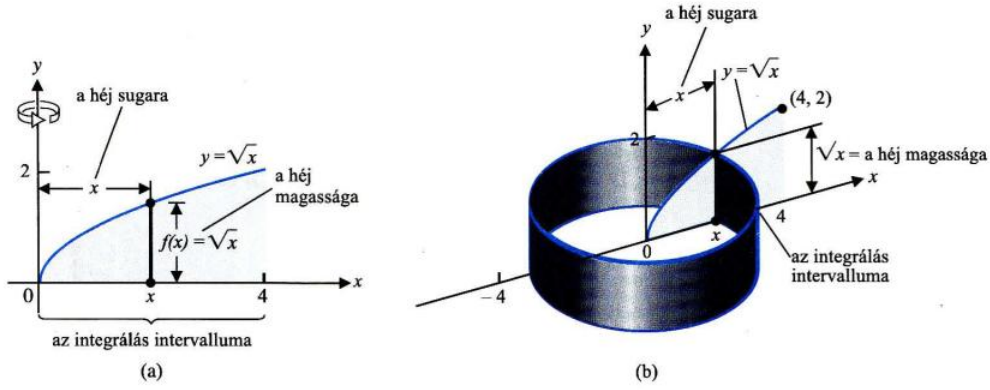
$$V = \int_a^b 2\pi(\text{a héj sugara})(\text{a héj magassága})\,dx = \int_a^b 2\pi(x-L)f(x)\,dx.$$

Az integrál változójára – ami itt x – mint **vastagsági változóra** hivatkozunk. Inkább az első képletet használjuk, mintsem az integrandusra konkrét képletet adó másodikat, mert az első kiemeli a héjmódszer lényegét. Vízszintes L egyenes körüli forgatásra is alkalmazható.

Függőleges tengely körüli forgatásra vonatkozó héjformula

Az x-tengely és a folytonos $y = f(x) \geq 0$, $L \leq a \leq x \leq b$ függvény grafikonja által határolt tartomány $x = L$ függőleges egyenes körüli forgatásával generált forgástest térfogata:

$$V = \int_a^b 2\pi\,(\text{a héj sugara})\,(\text{a héj magassága})\,dx.$$



6.21. ÁBRA: (a) A tartomány, a héj méretei és az integrálási határok (2. példa). (b) Az ábra (a) részében kijelölt Δx szélességű metszet egy hengerhéjat seper végig.

2. PÉLDA: **Hengerhéjak az y-tengely körüli forgatás esetén**

Az $y = \sqrt{x}$ görbe, az x-tengely és az $x = 4$ egyenes által határolt tartományt forgassuk meg az y-tengely körül. Számítsuk ki a forgástest térfogatát!

Megoldás: Rajzoljuk fel a tartományt és annak egy, a forgástengellyel *párhuzamos* szakaszát (6.21a ábra)! Jelöljük meg e szakasz magasságát (a héj magasságát) és az x-tengelytől való távolságát (a héj sugarát)! (A 6.21b ábrán mi megrajzoltuk a héjat is, ez azonban nem feltétlenül szükséges.)

A héj vastagsági változója x, így a héjformula integrációs határai $a = 0$ és $b = 4$ (6.20. ábra). Ekkor a térfogat:

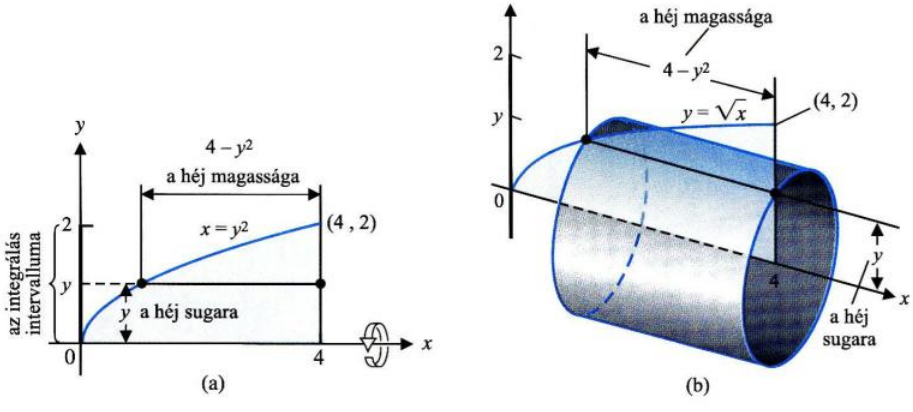
$$V = \int_a^b 2\pi\,(\text{a héj sugara})\,(\text{a héj magassága})\,dx =$$

$$= \int_0^4 2\pi(x)\left(\sqrt{x}\right)\,dx = 2\pi\int_0^4 x^{3/2}\,dx = 2\pi\left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^4 = \frac{128\pi}{5}. \qquad \square$$

Eddig függőleges forgástengellyel volt csak dolgunk. Vízszintes forgástengely esetén x-et y-nal kell helyettesítenünk.

3. PÉLDA: **Hengerhéjak az x-tengely körüli forgatás esetén**

Forgassuk meg az $y = \sqrt{x}$ görbe, az x-tengely és az $x = 4$ egyenes által határolt tartományt az x-tengely körül! Számítsuk ki a forgástest térfogatát!



6.22. ÁBRA: (a) A tartomány, a héj méretei és az integrálási határok (3. példa). (b) Az ábra (a) részében kijelölt Δy szélességű vízszintes metszet egy hengerhéjat söpör végig.

Megoldás: Rajzoljuk fel a tartományt és annak egy, a forgástengellyel *párhuzamos* szakaszát (6.22a ábra)! Jelöljük meg e szakasz hosszát (a héj magasságát) és a forgástengelytől való távolságát (a héj sugarát)! (A 6.22b ábrán mi megrajzoltuk a héjat is, ez azonban nem feltétlenül szükséges.)

Ebben az esetben y lesz a héj vastagsági változója, ezért a héjképletben az integrálási határok $a = 0$ és $b = 2$ (a 6.22. ábrán az y-tengely mentén). A test térfogata:

$$V = \int_a^b 2\pi\,(\text{a héj sugara})\,(\text{a héj magassága})\,dy =$$

$$= \int_0^2 2\pi(y)(4-y^2)\,dy =$$

$$= \int_0^2 2\pi(4y-y^3)\,dy =$$

$$= 2\pi\left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right] = 8\pi. \qquad \square$$

A héjmódszer összefoglalása

Tekintet nélkül a forgástengely helyzetére (az lehet akár vízszintes, akár függőleges) a héjmódszer lépései a következők

1. *Rajzoljuk fel a tartományt és vegyünk fel* egy, a tartomány határait összekötő és a forgástengellyel *párhuzamos egyenes szakaszt! Írjuk fel* e szakasznak a hosszát (a héj magasságát) és a forgástengelytől való távolságát (a héj sugarát)!
2. A vastagsági változóra nézve *állapítsuk meg* az integrálási határokat!
3. *Integráljuk* a 2π(héjsugár)(héjmagasság) szorzatot a vastagsági változóra (x vagy y) nézve, s ezzel megkapjuk a térfogatot!

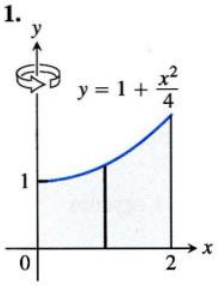
Ugyanarra a testre alkalmazva a héjmódszer és a gyűrűmódszer ugyanazt az eredményt adja. Ezt az állítást itt nem bizonyítjuk, de illusztrálni fogjuk a 33. és a 34. feladatban. Mindkét képlet speciális esete egy általánosabb összefüggésnek, amit a kettős és hármas integráloknál, a 15. fejezetben fogunk majd látni. Az ott kapott általános összefüggés nemcsak a forgástestek, hanem más testek térfogatának kiszámítására is alkalmas.

6.2. Feladatok

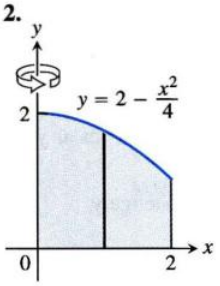
Síkmetszetek területe

Az 1–6. feladatokban héjmódszerrel határozzuk meg a satírozott tartomány megadott tengely körüli forgatásával generált forgástest térfogatát!

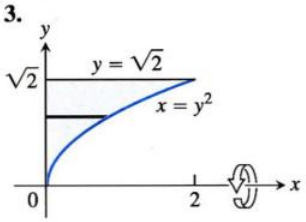
1.



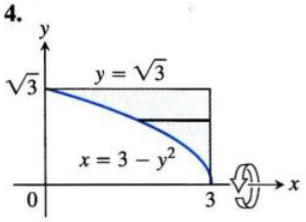
2.



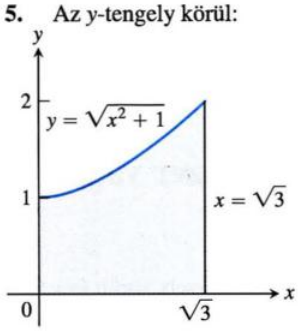
3.



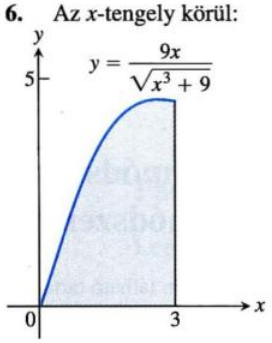
4.



5. Az y-tengely körül:



6. Az x-tengely körül:



y-tengely körüli forgatás

A 7–14. feladatokban héjmódszerrel határozzuk meg a satírozott tartomány y-tengely körüli forgatásával generált forgástest térfogatát!

7. $y = x, y = -x/2, x = 2$ **8.** $y = 2x, y = x/2, x = 1$

9. $y = x^2, y = 2 - x, x = 0\ x \geq 0$ esetén

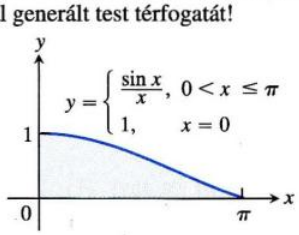
10. $y = 2 - x^2, y = x^2, x = 0$ **11.** $y = 2x - 1, y = \sqrt{x}, x = 0$

12. $y = 3/(2\sqrt{x}), y = 0, x = 1\ x = 4$

13. Legyen $f(x) = \begin{cases} (\sin x)/x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

(a) Mutassuk meg, hogy $xf(x) = \sin x$, $0 < x \leq \pi$!

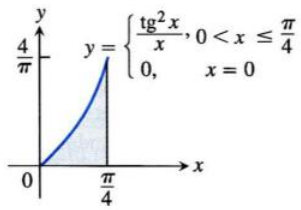
(b) Számítsuk ki a satírozott tartomány y-tengely körüli forgatásával generált test térfogatát!



14. Legyen $g(x) = \begin{cases} (\mathrm{tg}\, x)^2/x, & 0 < x \leq \pi \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(a) Mutassuk meg, hogy $xg(x) = (\mathrm{tg}\, x)^2$, $0 \leq x \leq \pi/4$!

(b) Számítsuk ki a satírozott tartomány y-tengely körüli forgatásával generált test térfogatát!



x-tengely körüli forgatás

A 15–22. feladatokban héjmódszerrel határozzuk meg a satírozott tartomány x-tengely körüli forgatásával generált forgástest térfogatát!

15. $x = \sqrt{y}, x = -y, y = 2$

16. $x = y^2, x = -y, y = 2, y \geq 0$

17. $x = 2y - y^2, x = 0$ **18.** $x = 2y - y^2, x = y$

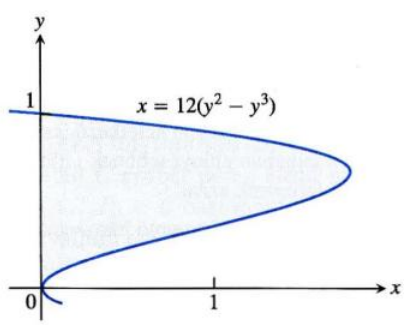
19. $y = |x|, y = 1$ **20.** $y = x, y = 2x, y = 2$

21. $y = \sqrt{x}, y = 0, y = x - 2$ **22.** $y = \sqrt{x}, y = 0, y = 2 - x$

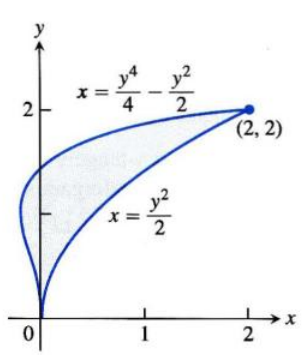
Vízszintes tengely körüli forgatás

A 23. és a 24. feladatban használjuk a héjmódszert azon test térfogatának kiszámítására, amely a satírozott tartomány megadott tengely körüli forgatásával áll elő!

23. **(a)** Az x-tengely, **(b)** Az $y = 1$ egyenes,
(c) Az $y = 8/5$ egyenes, **(d)** Az $y = -2/5$ egyenes.



24. **(a)** Az x-tengely, **(b)** Az $y = 2$ egyenes,
(c) Az $y = 5$ egyenes, **(d)** Az $y = -5/8$ egyenes.



A gyűrűmódszer és a héjmódszer összehasonlítása

Vannak olyan tartományok, amelyekből a koordinátatengely körüli forgatással generált test térfogatmeghatározására mind a gyűrűmódszer, mind a héjmódszer alkalmas. Ez azonban nem mindig van így. Ha a tartományt az y-tengely körül forgatjuk és a gyűrűmódszert használjuk, akkor y szerint kell integrálnunk. Ez nem mindig lehetséges, sőt néha még az is akadályba ütközik, hogy az integrandust y változójaként kifejezzük. Az ilyen esetekben a héjmódszer lehetővé teszi az x változó szerinti integrálást. A 25 és a 26. feladat ilyen jellegű problémákba nyújt betekintést.

25. Számítsuk ki az $y = x$ és $y = x^2$ által határolt tartomány mindkét koordinátatengely körüli megforgatásával előálló testek térfogatát

(a) a héjmódszer,

(b) a gyűrűmódszer

alkalmazásával!

26. Számítsuk ki a $2y = x + 4$, $y = x$ és $x = 0$ egyenesek által határolt háromszögtartomány megadott tengely körüli megforgatásával előálló test térfogatát!

(a) Az x-tengely körül forgatunk, és használjuk a gyűrűmódszert!

(b) Az y-tengely körül forgatunk, és használjuk a héjmódszert!

(c) Az $x = 4$ egyenes körül forgatunk, és használjuk a héjmódszert!

(d) Az $y = 8$ egyenes körül forgatunk, és használjuk a gyűrűmódszert!

Héjmódszer vagy gyűrűmódszer

A 27–32. feladatokban számítsuk ki a megadott tartomány megadott tengely körüli forgatása révén keletkező forgástest térfogatát! Ha egy adott feladatban előnyösebbnek látjuk a gyűrűmódszer használatát, dolgozzunk azzal!

27. Az $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$ csúcspontú háromszöget megforgatjuk

(a) az x-tengely, **(b)** az y-tengely,

(c) az $x = 10/3$ egyenes, **(d)** az $y = 1$ egyenes

körül.

28. Az $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$ által határolt tartományt megforgatjuk

(a) az x-tengely, **(b)** az y-tengely,

(c) az $x = 4$ egyenes, **(d)** az $y = 2$ egyenes

körül.

29. Az $x = y - y^3$ görbe és az y-tengely által határolt, az első síknegyedben fekvő tartományt megforgatjuk

(a) az x-tengely, **(b)** az $y = 1$ egyenes

körül.

30. Az $x = y - y^3$, $x = 1$ és $y = 1$ által határolt első síknegyedbeli tartományt megforgatjuk

(a) az x-tengely, **(b)** az y-tengely,

(c) az $x = 1$ egyenes, **(d)** az $y = 1$ egyenes

körül.

31. Az $y = \sqrt{x}$ és az $y = x^2/8$ által határolt tartományt megforgatjuk

(a) az x-tengely, **(b)** az y-tengely

körül.

32. Az $y = 2x - x^2$ és az $y = x$ által határolt tartományt megforgatjuk

(a) az x-tengely, **(b)** az $x = 1$ egyenes

körül.

33. Az első síknegyedben fekvő tartományt felülről az $y = 1/x^{1/4}$ görbe, balról az $x = 1/16$ egyenes, alulról pedig az $y = 1$ egyenes határolja. A tartományt megforgatjuk az x-tengely körül. Számítsuk ki a test térfogatát

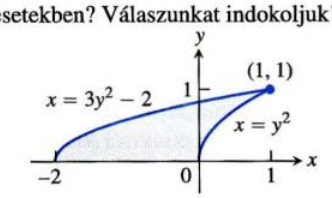
(a) gyűrűmódszerrel, **(b)** héjmódszerrel!

34. Az első síknegyedben fekvő tartományt felülről az $y = 1/\sqrt{x}$ görbe, balról az $x = 1/4$ egyenes, alulról pedig az $y = 1$ egyenes határolja. A tartományt megforgatjuk az y-tengely körül. Számítsuk ki a test térfogatát

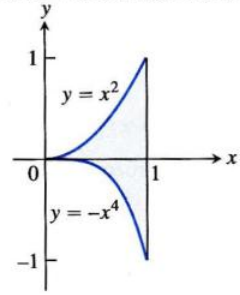
(a) gyűrűmódszerrel, **(b)** héjmódszerrel!

Korongmódszer, héjmódszer vagy gyűrűmódszer

35. Az ábrán látható tartományból az x-tengely körüli forgatással egy forgástestet hozunk létre. Melyik módszert használhatjuk a test térfogatának meghatározására? Hány integrálra van szükség az egyes esetekben? Válaszunkat indokoljuk!

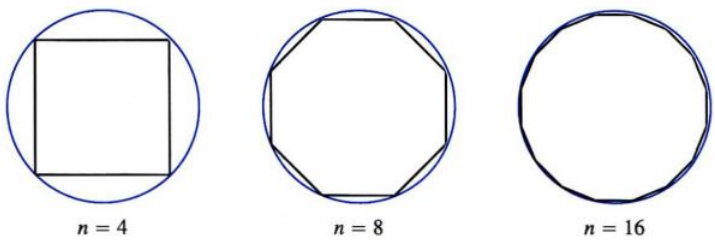


36. Az ábrán látható tartományból az y-tengely körüli forgatással egy forgástestet hozunk létre. Melyik módszert használhatjuk a test térfogatának meghatározására? Hány integrálra van szükség az egyes esetekben? Válaszunkat indokoljuk!

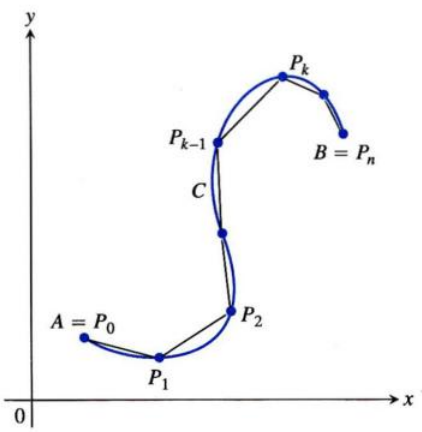


6.3. Síkgörbék hossza

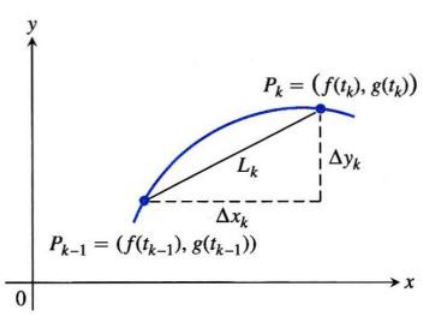
Tudjuk mit jelent egy egyenes szakasz hossza, de egy tetszőleges görbe hosszáról a kalkulus nélkül nem alkothatunk pontos fogalmat. Az ókori görög matematikusoktól származik az a gondolat, hogy az A ponttól a B pontig futó görbe hosszát úgy lehet közelíteni, hogy a görbét sok kis görbedarabra osztjuk fel, s az osztópontokat egyenes szakasszal összekötjük. Arkhimédész ezt a módszert alkalmazta akkor, amikor a kör kerületét a körbe írt n oldalú sokszögek kerületével közelítette (6.23. ábra). Ennek a gondolatnak a körnél általánosabb görbékre való kiterjesztését mutatja a 6.24. ábra, s a továbbiakban ezzel fogunk foglalkozni.



6.23. ÁBRA: Arkhimédész a kör kerületét a körbe írt sokszögek kerületével közelítette. $n = 96$ esetén a módszer π-re, mint az egységnyi átmérőjű kör kerületére a 3,14103 értéket adja.



6.24. ÁBRA: Az $x = f(t)$ és $y = g(t)$, $a \le t \le b$ egyenletekkel paraméteres alakban megadott C görbe. A görbe AB darabjának hosszát egy olyan töröttvonalnak a hosszával közelítjük, amelynek kezdőpontja az $A = P_0$ pont, végpontja pedig a $B = P_n$ pont.



6.25. ÁBRA: A $P_{k-1}P_k$ ívet az itt látható szakasszal közelítjük, amelynek hossza: $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k k)^2}$.

Paraméteres alakban definiált görbe hossza

Legyen C az

$$x = f(t) \text{ és } y = g(t), \quad a \le t \le b$$

egyenletekkel paraméteresen megadott görbe! Az ilyen görbét legegyszerűbben annak a részecskének a pályájaként képzelhetjük el, amely a $t = a$ időpontban az $A = (f(a), g(a))$ pontból elindul a $B = (f(b), g(b))$ pont felé (6.24. ábra). Feltesszük, hogy f és g deriváltja is folytonos az $[a,b]$ intervallumon és egyidejűleg nem nullák. Az ilyen függvényeket **folytonosan differenciálható** függvényeknek nevezzük, az általuk definiált C görbét pedig **sima** görbének. Az AB pályát (vagy ívet) az $A = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n = B$ osztópontokkal n darabra osztjuk fel. Ezek a pontok az $[a,b]$ intervallum egy felosztásának felelnek meg, ahol $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ és $P_k = (f(t_k), g(t_k))$. E felosztás szomszédos pontjait kössük össze egyenes szakaszokkal (6.24. ábra)! Egy ilyen egyenes szakasz hossza általános alakban

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \\ = \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2}$$

lesz (6.25. ábra). Ha Δt_k kicsi, akkor az L_k hosszúság közel azonos lesz a $P_{k-1}P_k$ ívdarabnak a hosszával. A középértéktétel szerint vannak olyan t_k^* és t_k^{**} értékek a $[t_{k-1}, t_k]$ intervallumban, amelyekre

$$\Delta x_k = f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(t_k^*)\Delta t_k,$$
$$\Delta y_k = g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(t_k^{**})\Delta t_k.$$

Ha feltételezzük, hogy miközben t felveszi a $t = a$ és $t = b$ közötti értékeket, a részecske az AB pályát pontosan egyszer járja be, azaz nem tér vissza és visszafele sem halad, úgy az AB görbe „hosszára" intuitív közelítést adhatunk az

L_k hosszúságok összegzése révén:

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(t_k^*)]^2 + [g'(t_k^{**})]^2}\Delta t_k.$$

Bár ez az összeg nem pontosan Riemann-összeg (mert f'-nek és g'-nek nem ugyanabban a pontban felvett értékei szerepelnek benne), a felsőbb analízis egy tétele biztosítja a határérték létezését, amint a felosztás normája nullához tart, s ez a határérték lesz az

$$\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

határozott integrál értéke.

DEFINÍCIÓ: Paraméteresen adott görbe ívhossza

Legyen C az $x = f(t)$ és $y = g(t)$, $a \le t \le b$ egyenletekkel paraméteres alakban megadott görbe, f' és g' folytonosak és egyidejűleg nem nullák az $[a,b]$ intervallumon, továbbá C az $[a,b]$ intervallumon önmagába vissza nem térő görbe. Akkor C **hossza** az

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

határozott integrál.

Egy sima C görbe nem fordulhat vissza hirtelen egy pontban, így a görbe által reprezentált mozgás iránya sem válthat ellentettjére egy pontban hirtelen az $[a,b]$ időintervallumban, mivel ott $(f')^2 + (g')^2 > 0$.

Ha $x = f(t)$ és $y = g(t)$, akkor a Leibniz-féle jelöléssel az ívhosszra a következő eredményt kapjuk:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{6.1}$$

Mit tegyünk, ha a C görbének, amelynek hosszát meg akarjuk határozni, kétféle paraméterezése is adott? Van-e jelentősége annak, hogy melyik paraméterezést használjuk? Erre a kérdésre a felsőbb analízis a nem választ adja, amennyiben a paraméterezés kielégíti az ívhossz definíciójában megadott feltételeket (lásd a 29. feladatot).

1. PÉLDA: **A kör kerülete**

Határozzuk meg az

$$x = r\cos t \quad y = r\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott r sugarú kör kerületét!

Megoldás: Amíg t 0 és 2π között változik, az x,y értékpárok egyszer futnak végig a köríven, így a kerület

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Esetünkben

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = r\cos t,$$

és így

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)=r^2,$$

azaz

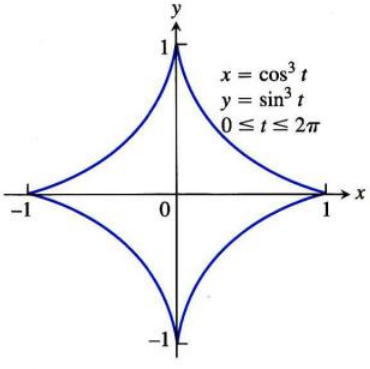
$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2}\,dt=r\big[t\big]_0^{2\pi}=2\pi r. \qquad \square$$

2. PÉLDA: **A paraméteres formula alkalmazása a görbe ívhosszának kiszámítására**

Határozzuk meg az

$$x=r\cos^3 t \quad y=r\sin^3 t, 0\le t\le 2\pi$$

csillaggörbe hosszát (6.26. ábra).



6.26. ÁBRA: A 3. példában szereplő csillaggörbe.

Megoldás: A görbe szimmetrikus a koordináta-tengelyekre, ezért hossza az első síknegyedbeli darabja hosszának a négyszerese. Az adódik, hogy

$$x=\cos^3 t, \quad y=\sin^3 t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=3[\cos^2 t(-\sin t)]^2=9\cos^4 t\sin^2 t.$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=3[\sin^2 t(\cos t)]^2=9\sin^4 t\cos^2 t.$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t\underbrace{(\cos^2 t+\sin^2 t)}_{1}}=$$

$$=\sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t}=$$

$$=3|\cos t\sin t|=$$

$$=3\cos t\sin t. \qquad \cos t\sin t\ge 0, \text{ ha } 0\le t\le \pi/2$$

Ezért

$$\text{Az első síknegyedbeli darab hossza} = \int_0^{\pi/2} 3\cos t\sin t\,dt$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt \qquad \cos t\sin t=\tfrac{1}{2}\sin 2t$$

$$=-\frac{3}{4}\Big[\cos 2t\Big]_0^{\pi/2}=\frac{3}{2}.$$

A csillagalakzat hossza ennek négyszerese: $4(3/2)=6$. $\square$

Az $y=f(x)$ görbe hossza

Ha adva van a differenciálható $y=f(x)$, $a\le x\le b$ függvény, akkor az x-et jelölhetjük ki paraméternek, azaz legyen $x=t$. Ekkor az f függvény grafikonja az

$$x=t, \quad y=f(t), \quad a\le t\le b$$

egyenletekkel paraméteresen definiált C görbe, azaz az előbbiek egy speciális esete. Ekkor

$$\frac{dx}{dt}=1 \quad \text{és} \quad \frac{dy}{dt}=f'(t).$$

A 3.5. szakaszbeli számításaink alapján így azt kapjuk, hogy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = f'(t),$$

ami azt adja, hogy

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1 + [f'(t)]^2 =$$
$$= 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 =$$
$$= 1 + [f'(x)]^2.$$

A (6.1)-be behelyettesítve megkapjuk az $y = f(x)$ görbe ívhosszát.

Az $y = f(x)$, $a \le x \le b$ görbe hossza

Ha f folytonos és differenciálható a zárt $[a,b]$ intervallumon, akkor az $y = f(x)$ görbe $x = a$ és $x = b$ közötti szakaszának hossza:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \qquad (6.2)$$

3. PÉLDA: **Az ívhosszképlet alkalmazása függvénygrafikonokra**

Számítsuk ki az

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1, \quad 0 \le x \le 1$$

görbe hosszát!

Megoldás: Alkalmazzuk a (6.2) egyenlőséget $a = 0$ és $b = 1$-re:

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{2}x^{1/2},$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}x^{1/2}\right)^2 = 8x.$$

A görbe $x = 0$ és $x = 1$ közé eső szakaszának a hossza:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 8x}\, dx =$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}\left[(1 + 8x)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{13}{6}.$$

A (6.2) egyenlőség $a = 0$ és $b = 1$ esetén. Legyen $u = 1 + 8x$, integrálunk, majd visszahelyettesítünk.

□

Hogyan bánjunk dy/dx szakadásaival?

Az olyan görbepontokban, ahol dy/dx nem létezik, dx/dy még létezhet, s ilyenkor a görbe hosszát úgy számíthatjuk ki, hogy x-et kifejezzük mint y függvényét, s a következő, a (6.2)-vel analóg képletet alkalmazzuk rá:

Az $x = g(y)$, $c \le x \le d$ görbe hossza

Ha g folytonos és differenciálható a zárt $[c,d]$ intervallumon, akkor az $x = g(y)$ görbe $y = c$ és $y = d$ közötti szakaszának hossza:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy. \tag{6.3}$$

4. PÉLDA: **Olyan gráf hossza, amelynek dy/dx-ben szakadása van**

Számítsuk ki az $y = (x/2)^{2/3}$ görbe $x = 0$ és $x = 2$ közé eső darabjának hosszát!

Megoldás: A

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$$

derivált nincsen értelmezve az $x = 0$ pontban, így a (6.2) képlet alapján nem számolhatjuk ki a görbe hosszát.

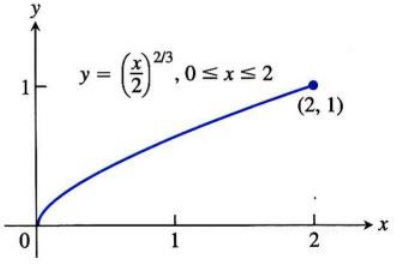
Ezért az egyenlőséget át kell írnunk, x-et kell kifejeznünk y függvényeként:

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3},$$

$$y^{3/2} = \frac{x}{2}, \qquad \text{Mindkét oldalt 3/2-ik hatványra emeljük.}$$

$$x = 2y^{3/2}. \qquad \text{Kifejezzük } x\text{-et.}$$

Ebből láthatjuk, hogy az általunk keresett görbe egyben az $x = 2y^{3/2}$ függvény grafikonjának $y = 0$ és $y = 1$ közötti darabja is (6.27. ábra).



6.27. ÁBRA: Az $y = (x/2)^{2/3}$ grafikonjának $x = 0$ és $x = 1$ közé eső darabja egyben az $x = 2y^{3/2}$ függvény grafikonja is az $y = 0$ és $y = 1$ közötti intervallumban (4. példa).

A

$$\frac{dx}{dy} = 2\left(\frac{2}{3}\right)y^{1/2} = 3y^{1/2}$$

derivált folytonos a $[0,1]$ intervallumon. Ezért a görbe hosszának meghatározására alkalmazhatjuk a (6.3) összefüggést:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 9y}\, dy = \qquad \text{A (6.3) egyenlőség } c = 0 \text{ és } d = 1 \text{ esetére.}$$

$$= \left[\frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3}(1 + 9y)^{3/2}\right]_0^1 = \qquad \text{Legyen } u = 1 + 9y,\ du/9 = dy, \text{ integrálunk és visszahelyettesítünk.}$$

$$= \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \approx 2{,}27. \qquad \square$$

A rövid, differenciális alak

A (6.1) egyenlőséget deriváltak helyett gyakran differenciálokkal írjuk fel. Ezt formálisan úgy tehetjük meg, hogy a gyökjelen kívül álló dt-t bevisszük a gyökjel alá és a következőket írjuk fel:

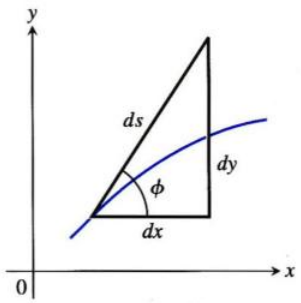
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (dt)^2 = \left(\frac{dx}{dt}dt\right)^2 = (dx)^2,$$

valamint

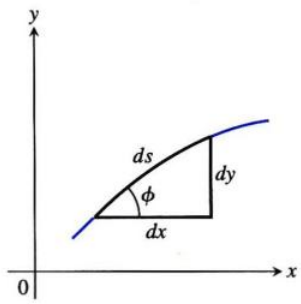
$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 (dt)^2 = \left(\frac{dy}{dt}dt\right)^2 = (dy)^2.$$

Szokás elhagyni a zárójeleket is, azaz $(dx)^2$-et dx^2 alakban, a (6.1) egyenlőséget pedig

$$L = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{6.4}$$



(a)



(b)

6.28. ÁBRA: A $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$ egyenlőség megjegyzésére szolgáló diagramok.

alakban írni fel. A differenciálokra tekintsünk úgy, mint az integrál tulajdonságait összefoglaló és egyszerűsítő mennyiségekre! A felsőbb analízis pontos definíciót ad a differenciál fogalmára.

Az integrálást a (6.4) képletben úgy végezhetjük el, hogy dx-et és dy-t kifejezzük egy és ugyanannak a változónak a függvényeként és alkalmas integrálási határokat választunk.

A (6.4) képletet könnyen megjegyezhetjük, ha

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} \tag{6.5}$$

alakban írjuk fel és ds-t az ívhossz differenciáljának fogjuk fel, amelyet alkalmasan választott határok között integrálnunk kell ahhoz, hogy a görbe teljes hosszúságát megkapjuk. ds korrekt interpretációját mutatja a 6.28a ábra. A 6.28b ábra nem pontos, az csupán a 6.28a leegyszerűsített közelítése.

Ha a (6.5) egyenlet már a fejünkben van, akkor az ívhosszra vonatkozó összefüggést úgy idézhetjük fel legkönnyebben, ha megjegyezzük azt, hogy

$$\text{az ívhossz} = \int ds.$$

Ha tudjuk, hogy $L = \int ds$ és adva van az $y = f(x)$ grafikonja, akkor (6.5)-öt át tudjuk írni:

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{dx^2+\frac{dy^2}{dx^2}dx^2} = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}dx = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx,$$

ami nem más, mint a (6.2) egyenlőség. Ha viszont $x = g(y)$ van megadva, (6.5)-öt átírva azt kapjuk, hogy

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{dz^2+\frac{dx^2}{dy^2}dy^2} = \sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}dy = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy,$$

ami nem más, mint a (6.3) egyenlőség.

6.3. Feladatok

Paraméteres görbék hossza

Az 1–6. feladatokban a görbék hosszát kell kiszámítani!

1. $x = 1-t, y = 2+3t, -2/3 \le t \le 1$

2. $x = \cos t, y = t+\sin t, 0 \le t \le \pi$

3. $x = t^3, y = 3t^2/2, 0 \le t \le \sqrt{3}$

4. $x = t^2/2, y = (2t+1)^{3/2}/3, 0 \le t \le 4$

5. $x = (2t+3)^{3/2}/3, y = t+t^2/2, 0 \le t \le 3$

6. $x = 8\cos t + 8t\sin t, y = 8\sin t - 8t\cos t, 0 \le t \le \pi/2$

Görbe hosszának kiszámítása

A 7–16. feladatokban határozzuk meg a görbék hosszát! Ha van valamilyen függvényrajzoló programunk, meg is rajzolhatjuk a görbéket, hogy lássuk milyen alakúak.

7. $y = (1/3)(x^2+2)^{3/2}$ az $x = 0$ és $x = 3$ között.

8. $y = x^{3/2}$ $x = 0$ és $x = 4$ között.

9. $x = (y^3/3)+1/(4y)$ $y = 1$ és $y = 3$ között. (*Útmutatás:* $1+(dx/dy)^2$ teljes négyzet.)

10. $x = (y^{3/2}/3)-y^{1/2}$ $y = 1$ és $y = 9$ között. (*Útmutatás:* $1+(dx/dy)^2$ teljes négyzet.)

11. $x = (y^4/4)+1/(8y^2)$ $y = 1$ és $y = 2$ között. (*Útmutatás:* $1+(dx/dy)^2$ teljes négyzet.)

12. $x = (y^3/6)+1/(2y)$ $y = 2$ és $y = 3$ között. (*Útmutatás:* $1+(dx/dy)^2$ teljes négyzet.)

13. $y = (3/4)x^{4/3}-(3/8)x^{2/3}+5, 1 \le x \le 8$

14. $y = (x^3/3)+x^2+x+1/(4x+4), 0 \le x \le 2$

15. $x = \int_0^y \sqrt{\sec^4 t - 1}\,dt, -\pi/4 \le y \le \pi/4$

16. $y = \int_{-2}^x \sqrt{3t^4-1}\,dt, -2 \le x \le -1$

T A görbe hosszát megadó integrál meghatározása

A 17–24. feladatokban tegyük a következőket:

(a) Határozzuk meg az ívhosszat megadó integrált!

(b) Ábrázoljuk a görbét!

(c) A megfelelő számítógépes programmal határozzuk meg az integrál értékét, s ezzel a görbe hosszát!

17. $y = x^2, -1 \le x \le 2$

18. $y = \operatorname{tg} x, -\pi/3 \le x \le 0$

19. $x = \sin y, 0 \le y \le \pi$

20. $x = \sqrt{1-y^2}, -1/2 \le y \le 1/2$

21. $y^2 + 2y = 2x + 1$ $(-1,1)$ és $(7,3)$ között.

22. $y = \sin x - x\cos x, 0 \le x \le \pi$

23. $y = \int_0^x \operatorname{tg} t\, dt, 0 \le x \le \pi/6$

24. $x = \int_0^y \sqrt{\sec^2 t - 1}\, dt, -\pi/3 \le y \le \pi/4$

Elmélet és alkalmazások

25. Van-e olyan sima (folytonosan differenciálható) $y = f(x)$ görbe, amelynek hossza a $0 \le x \le a$ intervallumon $\sqrt{2}a$ minden $a > 0$-ra? Válaszunkat indokoljuk!

26. Az ívhosszképlet levezetése érintőszakaszok segítségével: Tegyük fel, hogy f az $[a,b]$ intervallumon sima görbe és osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot a szokásos módon! Minden $[x_{k-1}, x_k]$ részintervallumhoz szerkesszünk érintőszakaszt az $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ pontban, ahogy az az ábrán látható!

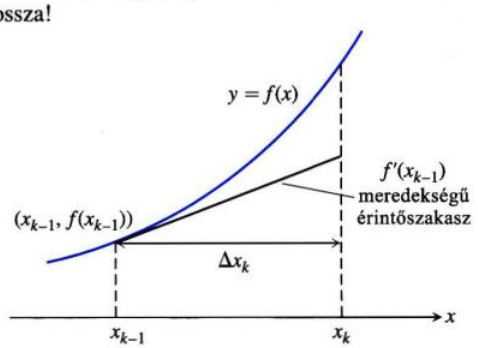
(a) Mutassuk meg, hogy az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumhoz rendelt k-adik érintőszakasz hossza

$$\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(x_{k-1})\Delta x_k)^2}!$$

(b) Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix}\text{a } k\text{-adik érintő-}\\ \text{szakasz hossza}\end{pmatrix} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

ahol L az $y = f(x)$ görbe a és b közé eső szakaszának a hossza!



27. **(a)** Adjunk meg egy olyan görbét, amely átmegy az $(1,1)$ ponton, hossza pedig az $[1,4]$ intervallum felett

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx!$$

(b) Hány ilyen görbe van? Válaszunkat indokoljuk!

28. **(a)** Adjunk meg egy olyan görbét, amely átmegy a $(0,1)$ ponton, hossza pedig az $[1,2]$ intervallum felett

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{y^4}}\, dy!$$

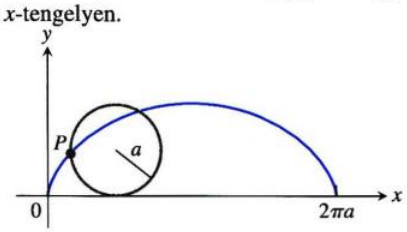
(b) Hány ilyen görbe van? Válaszunkat indokoljuk!

29. Az ívhossz független a paraméterezéstől: Annak illusztrálására, hogy a hosszúságra kapott számérték nem függ attól, hogy miként paraméterezzük a görbét (eltekintve attól a kis megszorítástól, hogy a görbe nem lehet önmagába visszatérő), számítsuk ki az $y = \sqrt{1-x^2}$ félkör ívhosszát a következő két paraméterezés mellett:

(a) $x = \cos 2t, y = \sin 2t, 0 \le t \le \pi/2,$

(b) $x = \sin \pi t, y = \cos \pi t, -1/2 \le t \le 1/2!$

30. Határozzuk meg az $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$ ciklois $0 \le \theta \le 2\pi$ közé eső ívdarabjának hosszát (lásd a mellékelt ábrát)! A **ciklois** olyan görbe, amelyet a kör kerületén lévő P pont rajzol ki akkor, amikor a kör végiggördül egy egyenesen, például az x-tengelyen.



Számítógépes vizsgálatok

A 31–36. feladatokban MAPLE vagy MATHEMATICA program segítségével az adott görbékkel hajtsuk végre a következő lépéseket:

(a) Rajzoltassuk ki egyidejűleg a görbét és annak töröttvonallal való közelítését az intervallum $n = 2, 4, 8$ részre való felosztásával!

(b) A töröttvonaldarabok hosszának összegzésével adjunk közelítést a görbe ívhosszára!

(c) Számítsuk ki az ívhosszat a megfelelő integrálból! Hasonlítsuk össze az integrálással kapott értéket az $n = 2, 4, 8$ felosztás mellett számolt közelítő értékkel! Hogyan viszonyul egymáshoz a tényleges és a közelítő érték, amint n értékét növeljük? Válaszunkat indokoljuk!

31. $f(x) = \sqrt{1-x^2}, -1 \le x \le 1$

32. $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}, 0 \le x \le 2$

33. $f(x) = \sin(\pi x^2), 0 \le x \le \sqrt{2}$

34. $f(x) = x^2 \cos x, 0 \le x \le \pi$

35. $f(x) = \frac{x-1}{4x^2+1}, -\frac{1}{2} \le x \le 1$

36. $f(x) = x^3 - x^2, -1 \le x \le 1$

37. $x = \frac{1}{3}t^3, y = \frac{1}{2}t^2, 0 \le t \le 1$

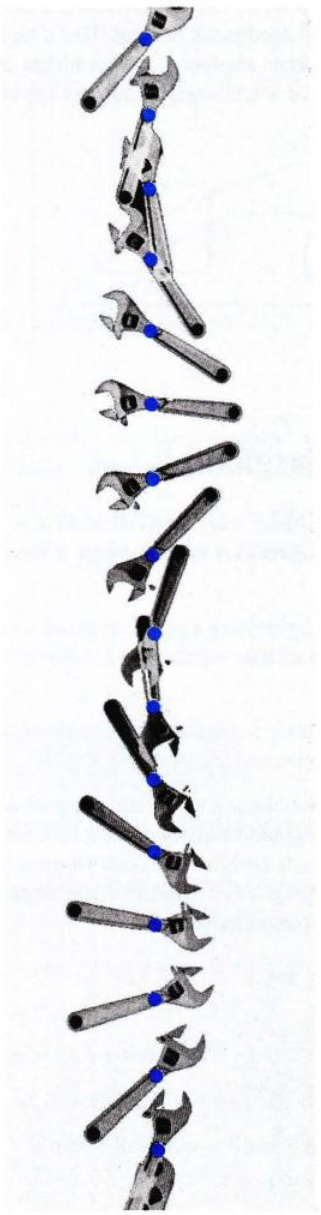
38. $x = 2t^3 - 16t^2 + 25t + 5, y = t^2 + t - 3, 0 \le t \le 6$

39. $x = t - \cos t, y = 1 + \sin t, -\pi \le t \le \pi$

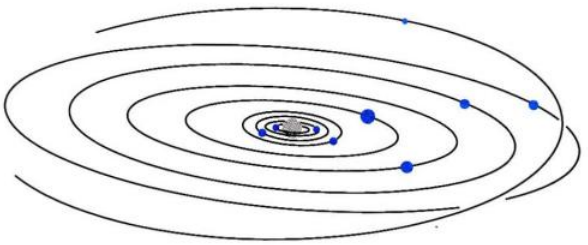
40. $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, 0 \le t \le \pi$

6.4. Tehetetlenségi nyomaték és tömegközéppont

Számos mechanikai rendszer úgy viselkedik, mintha tömege egy *tömegközéppontnak* nevezett pontba koncentrálódna (6.29. ábra). Fontos tudnunk, hogy hol van ez a pont, s a tömegközéppont helyének meghatározása alapvetően matematikai feladat. A tehetetlenségi nyomatékról szólva csak egy- és kétdimenziós objektumokkal foglalkozunk. Háromdimenziós objektumokra a problémát a 15. fejezetben tárgyalandó többes integrálokkal lehet megoldani.



(a)



(b)

6.29. ÁBRA: (a) A jégen csúszó csavarkulcs mozgását rendezetlennek látjuk addig, amíg észre nem vesszük, hogy egyszerűen csak forog a tömegközéppontja körül, a tömegközéppontja pedig egyenes vonalban csúszik a jégen. (b) Naprendszerünk bolygói, kisbolygói és üstökösei közös tömegközéppontjuk körül keringenek (a közös tömegközéppont a Nap belsejében van).

Egyenes vonal mentén elhelyezkedő tömegpontok

Matematikai modellünket több lépésben dolgozzuk ki. Az első lépésben az m_1, m_2 és m_3 tömegpontokat tekintjük, amelyek a merev, és az origóban feltámasztott x-tengely mentén helyezkednek el.



A rendszer vagy egyensúlyban van, vagy nincs egyensúlyban. Ez attól függ, hogy mekkorák a tömegek és hogyan vannak elrendezve.

Az m_k tömegpontok mindegyikére $m_k g$ nagyságú, lefelé mutató erő hat, mert a gravitációs erő a tömeg és a gravitációs gyorsulás szorzata. Ezek az erők, akár a gyerekek a libikókát, az origó körül forgásra késztetik a tengelyt. Ez a *forgatónyomatéknak* nevezett forgató hatás az $m_k g$ erő és a tömegpont origótól mért előjeles x_k távolságának a szorzata. Az origótól balra elhelyezkedő tömegpontok negatív (az óramutató járásával ellentétes) forgatónyomatékot fejtenek ki, a tőle jobbra lévő tömegpontok pedig pozitívat (az óramutató járásával megegyezőt).

A tömegpontokra ható forgatónyomatékok összege szabja meg a tengely körüli forgás irányát. Ezt az összeget a **rendszer forgatónyomatékának** nevezzük.

$$\text{a rendszer forgatónyomatéka} = m_1 x_1 g + m_2 x_2 g + m_3 x_3 g \qquad (6.6)$$

A rendszer akkor és csak akkor lesz egyensúlyban, ha forgatónyomatéka nulla.

Ha az egyenlőség jobb oldalán kiemeljük g-t, akkor a rendszer forgatónyomatékára a

$$\underbrace{g}_{\text{a környezet tulajdonsága}} \cdot \underbrace{(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)}_{\text{a rendszer tulajdonsága}}$$

összefüggést kapjuk. Tehát a forgatónyomaték a g gravitációs gyorsulásnak és az $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$ mennyiségnek a szorzata, amelyek közül az első a kör-

nyezet sajátossága, amiben a rendszer elhelyezkedik, a második pedig a rendszer sajátossága, egy állandó, ami független a rendszer környezetétől.

Az $(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$ mennyiséget **a rendszer origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékának** nevezzük. Ez az egyes tömegpontok nyomatékának az összege.

$$M_0 = \text{ a rendszer origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka } = \sum m_k x_k.$$

Gyakori probléma, hogy szeretnénk megtudni, hol kell alátámasztani a rendszert ahhoz, hogy egyensúlyban legyen. Másként fogalmazva, azt szeretnénk tudni, hogy melyik $\bar{x}$ pontra vonatkoztatva lesz nulla a rendszer forgatónyomatéka.



Erre a speciális alátámasztási pontra az egyes tömegpontok forgatónyomatéka:

$$m_k \text{ } \bar{x}\text{-re vonatkozó forgatónyomatéka } = \begin{pmatrix} m_k \text{ } \bar{x}\text{-től mért} \\ \text{előjeles távolsága} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{lefelé} \\ \text{mutató erő} \end{pmatrix} = \\ = (x_k - \bar{x})m_k g.$$

Az egyensúly feltétele az, hogy a forgatónyomatékok összege nulla legyen, s ez egy $\bar{x}$-re megoldható egyenletet ad:

$$\sum (x_k - \bar{x})m_k g = 0, \qquad \text{a forgatónyomatékok összege nulla}$$

$$g\sum (x_k - \bar{x})m_k = 0, \qquad \text{összeg konstanssal való szorzásának szabálya}$$

$$\sum (m_k x_k - \bar{x}m_k) = 0, \qquad g\text{-vel elosztjuk mindkét oldalt és beszorzunk } m_k\text{-val}$$

$$\sum m_k x_k - \sum \bar{x}m_k = 0,$$

$$\sum m_k x_k = \bar{x}\sum m_k, \qquad \text{átrendezzük az egyenletet és kiemeljük } \bar{x}\text{-et}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}. \qquad \text{kifejezzük } \bar{x}\text{-et}$$

Az utolsó egyenlőség szerint $\bar{x}$-et úgy számíthatjuk ki, hogy a rendszer origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát elosztjuk a rendszer össztömegével:

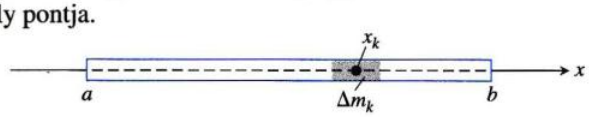
$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{\text{a rendszer origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka}}{\text{a rendszer tömege}}.$$

Az $\bar{x}$ pontot a rendszer **tömegközéppontjának** nevezzük.

Huzalok és vékony rudak

A gyakorlatban gyakran kell meghatározni egy fémhuzal vagy fémpálca tömegközéppontját. Az ehhez hasonló esetekben a tömegeloszlást egy folytonos függvénnyel írhatjuk le, s a tömegközéppontot meghatározó összegekből integrál lesz. Hogy hogyan, azt most fogjuk megtudni.

Képzeljünk el egy hosszú és vékony pálcát, amely az x-tengelyen fekszik, s az $x = a$-tól az $x = b$ pontig ér! Daraboljuk fel a pálcát Δm_k tömegű kis darabkákra az $[a, b]$ intervallum egy felosztásával! x_k legyen a felosztás k-adik intervallumának valamely pontja.



A k-adik darab Δx_k hosszúságú, és az origótól nagyjából x_k távolságra van. Most vegyünk észre három dolgot!

Sűrűség
A test sűrűsége az egy térfogategységre jutó tömeggel egyenlő. A gyakorlatban olyan mértékegységet rendelünk hozzá, amivel könnyű számolni. Huzalok, pálcák és keskeny szalagok esetén az egységnyi hosszra jutó tömeggel számolunk. Sík lapokra és lemezekre célszerű a területegységre jutó tömeggel számolni.

Először is, a pálca $\bar{x}$ tömegközéppontja majdnem ugyanaz, mint annak a diszkrét rendszernek a tömegközéppontja, amelyben a Δm_k tömeg az x_k pontban van:

$$\bar{x} \approx \frac{\text{a diszkrét rendszer tehetetlenségi nyomatéka}}{\text{a rendszer tömege}}.$$

Másodszor, a pálca minden darabkájának tehetetlenségi nyomatéka hozzávetőleg $x_k \Delta m_k$, így a rendszer tehetetlenségi nyomatéka ezek összege lesz:

$$\text{a rendszer tehetetlenségi nyomatéka} \approx \sum x_k \Delta m_k.$$

Harmadszor, ha az x_k darab $\delta(x_k)$ sűrűségét a hosszúságegységre eső tömegként fejezzük ki és δ folytonos függvény, akkor Δm_k közelítőleg egyenlő $\delta(x_k)\Delta x_k$-val (egységnyi hosszra jutó tömeg szorozva a hosszúsággal):

$$\Delta m_k \approx \delta(x_k)\Delta x_k.$$

E három észrevétel alapján az adódik, hogy

$$\bar{x} \approx \frac{\text{a rendszer tehetetlenségi nyomatéka}}{\text{a rendszer tömege}} \approx \frac{\sum x_k \Delta m_k}{\sum \Delta m_k} \approx \frac{\sum x_k \delta(x_k)\Delta x_k}{\sum \delta(x_k)\Delta x_k}. \quad (6.7)$$

Az utolsó tört számlálójában szereplő összeg az $x\delta(x)$ folytonos függvénynek az $[a,b]$ zárt intervallumra vonatkozó Riemann-összege. A nevezőben látható összeg pedig a $\delta(x)$ függvénynek ugyanerre az intervallumra vonatkozó Riemann-összege. Azt várjuk a (6.7) egyenlőségben szereplő közelítéstől, hogy a felosztás finomodásával javulni fog, s végül a

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\delta(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)\,dx}$$

összefüggéshez vezet. Ezzel az összefüggéssel fogjuk kiszámítani $\bar{x}$-et.

Az x-tengelyen fekvő, δx sűrűségű vékony huzal vagy pálca tehetetlenségi nyomatéka, tömege és tömegközéppontja

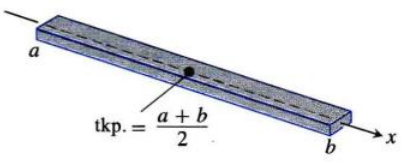
Az origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:
$$M_0 = \int_a^b x\delta(x)\,dx, \quad (6.8a)$$

a tömeg:
$$M = \int_a^b \delta(x)\,dx, \quad (6.8b)$$

a tömegközéppont:
$$\bar{x}. = \frac{M_0}{M} \quad (6.8c)$$

1. PÉLDA: Állandó sűrűségű rudak, pálcák

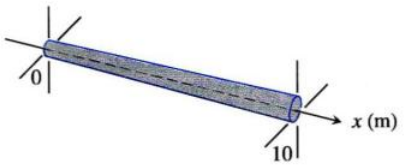
Mutassuk meg, hogy egy álladó sűrűségű vékony rúd tömegközéppontja a felezőpontjában van!



6.30. ÁBRA: Egyenes, vékony, állandó sűrűségű rúd tömegközéppontja a felezőpontjában van.

Megoldás: A rudat az x-tengely $x = a$ és $x = b$ közötti darabjával modellezzük (6.30. ábra). Célunk megmutatni, hogy $\bar{x} = (a+b)/2$, vagyis a tömegközéppont az ab szakasz felezőpontja.

A megoldásnak az adja a kulcsát, hogy a sűrűség értéke állandó. Emiatt vehetjük a (6.8a)–(6.8c) egyenlőségben szereplő integrálokban $\delta(x)$-et állandónak



6.31. ÁBRA: A változó vastagságú rudat változó sűrűségű rúdként is felfoghatjuk.

(és jelölhetjük δ-val). Eredményül azt kapjuk, hogy

$$M_0 = \int_a^b \delta x\,dx = \delta \int_a^b x dx = \delta \left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b = \frac{\delta}{2}(b^2-a^2),$$

$$M = \int_a^b \delta x\,dx = \delta \int_a^b dx = \delta[x]_a^b = \delta(b-a),$$

$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{\frac{\delta}{2}(b^2-a^2)}{\delta(b-a)} =$$

$$= \frac{a+b}{2}.$$

δ-val egyszerűsíthetünk.

□

2. PÉLDA: **Változó sűrűségű rúd**

A 6.31. ábrán látható 10 m hosszúságú rúd balról jobbra vastagszik, így sűrűsége nem lesz állandó, hanem $\delta(x) = 1 + (x/10)$ kg/m. Határozzuk meg a tömegközéppontját!

Megoldás: A rúd origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka (6.8a) szerint:

$$M_0 = \int_a^b x\delta(x)\,dx = \int_0^{10} x\left(x+\frac{x}{10}\right)\,dx = \int_0^{10}\left(x+\frac{x^2}{10}\right)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{30}\right]_0^{10} = 50+\frac{100}{3} = \frac{250}{3}\text{kg}\cdot\text{m}.$$

A tehetetlenségi nyomaték tömeg × hosszúság dimenziójú.

A rúd tömege (6.8b) szerint:

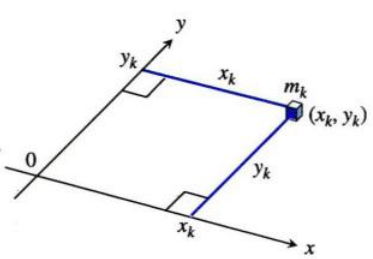
$$M = \int_0^{10} \delta(x)\,dx = \int_0^{10}\left(1+\frac{x}{10}\right)\,dx = \left[x+\frac{x^2}{20}\right]_0^{10} = 10+5 = 15\text{ kg}.$$

A rúd tömegközéppontja az

$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{250}{3}\cdot\frac{1}{15} = \frac{50}{9} \approx 5{,}56\text{ m}$$

pontban van. □

Síktartományban szétszórt tömegpontok



6.32. ÁBRA: Minden m_k tömegpont rendelkezik tehetetlenségi nyomatékkal mind a két tengelyre nézve.

Legyen adva véges számú, m_k tömegű tömegpont, amelyek a sík (x_k, y_k) pontjaiban helyezkednek el (lásd a 6.32. ábrát). A rendszer tömege:

$$M = \sum m_k.$$

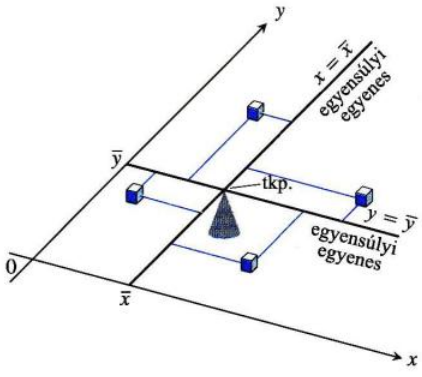
Mindegyik m_k tömegpontnak van tehetetlenségi nyomatéka, akármi is a forgástengely. Az x-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték $m_k y_k$, az y-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték $m_k x_k$ lesz. A rendszer egészének tehetetlenségi nyomatéka pedig:

az x-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték: $M_x = \sum m_k y_k$,

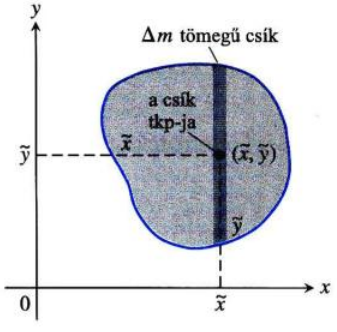
az y-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték: $M_y = \sum m_k x_k$.

A rendszer tömegközéppontjának x koordinátáját az

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \tag{6.9}$$



6.33. ÁBRA: Tömegpontok kétdimenziós elrendezése a tömegközéppontra nézve van egyensúlyban.



6.34. ÁBRA: Egy lemezt az y-tengellyel párhuzamos csíkokra szabdalunk fel. Egy ilyen csíknak az y-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát úgy számítjuk ki, mintha annak teljes tömege a $(\tilde{x}, \tilde{y})$ tömegközéppontjában koncentrálódna.

egyenlőség szabja meg. Az egydimenziós esethez hasonlóan a rendszer egyensúlyban van, ha az $x = \bar{x}$ egyenes mentén támasztjuk alá (6.33. ábra).

A rendszer tömegközéppontjának y koordinátáját pedig az

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} \tag{6.10}$$

egyenletből számíthatjuk ki. Ugyancsak egyensúlyban lesz a rendszer, ha az $y = \bar{y}$ egyenes mentén támasztjuk alá. A tömegpontok $y = \bar{y}$ egyenesre vonatkozó forgatónyomatékai kompenzálják egymást. Az egyensúly tekintetében a rendszer úgy viselkedik, mintha teljes tömege az $(\bar{x}, \bar{y})$ pontban koncentrálódna. Ezt a pontot a rendszer **tömegközéppont**jának nevezzük.

Vékony síklemezek

Az alkalmazások során gyakran kell meghatároznunk vékony síklemezek tömegközéppontját: például egy alumíniumkorongét vagy egy háromszög alakú acéllemezét. Ilyen esetekben a tömegeloszlást folytonosnak tekintjük, s az $\bar{x}$ és $\bar{y}$ kiszámításra szolgáló képletek véges összegek helyett integrálokat tartalmaznak. Ezeket az integrálokat az alábbi módon származtatjuk.

Helyezzük a lemezt az xy-síkba és és szeleteljük fel valamelyik koordinátatengellyel párhuzamos csíkokra (a 6.34. ábrán a csíkok az y-tengellyel párhuzamosak). Egy ilyen csík tömegközéppontja legyen a $(\tilde{x}, \tilde{y})$ pont. Vegyük úgy, mintha a csík Δm tömege a $(\tilde{x}, \tilde{y})$ pontban koncentrálódna. Ekkor a csík y-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $\tilde{x}\Delta m$ lesz. x-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka pedig $\tilde{y}\Delta m$. A (6.9) és (6.10) egyenlőségek ekkor azt adják, hogy

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum \tilde{x}\Delta m}{\sum \Delta m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum \tilde{y}\Delta m}{\sum \Delta m}.$$

Akárcsak az egydimenziós esetben, az összegek integrálra vezető Riemann-összegek, s az integrál értékéhez közelítenek, amennyiben a csíkok – amelyekre a lemezt feldaraboltuk – szélessége nullához tart. Ezeket az integrálokat szimbolikusan a

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dm}{\int dm} \quad \text{és} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dm}{\int dm}$$

alakban is felírhatjuk.

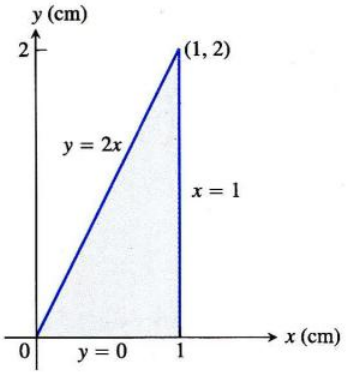
Az xy-sík valamely tartományát lefedő vékony lemez tehetetlenségi nyomatéka, tömege és tömegközéppontja

$$\begin{aligned}
&\text{az } x\text{-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:} && M_x = \int \tilde{y}\, dm, \\
&\text{az } y\text{-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:} && M_y = \int \tilde{x}\, dm, \\
&\text{a tömeg:} && M = \int dm, \\
&\text{a tömegközéppont:} && \bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

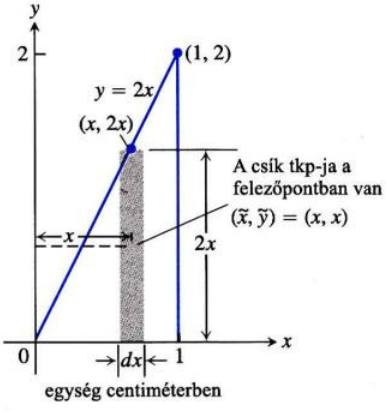
Ezeket az integrálokat úgy számítjuk ki, hogy a lemezt a koordinátasíkban ábrázoljuk és felrajzolunk egy olyan csíkot, amely valamelyik koordinátatengellyel párhuzamos. Azután kifejezzük a csík dm tömegét és tömegközéppontjának $\tilde{x}, \tilde{y}$ koordinátáit x vagy y függvényeként. Végül integráljuk $\tilde{y}dm$-et, $\tilde{x}dm$-et és dm-et a lemez koordinátasíkban elfoglalt helyzete által megszabott határok között.

3. PÉLDA: Állandó sűrűségű lemez

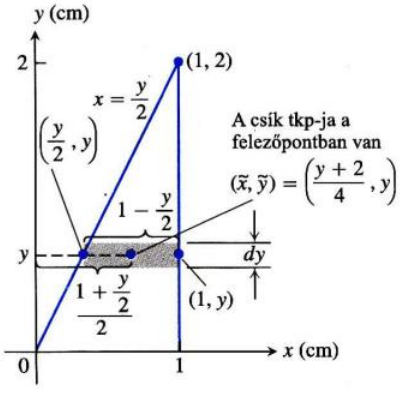
A 6.35. ábrán látható lemez sűrűsége legyen állandó, $\delta = 3$ g/cm^3. Számítsuk ki a lemez



6.35. ÁBRA: A 3. példában szereplő lemez.



6.36. ÁBRA: A 3. példában szereplő lemezt függőleges csíkokkal modellezzük.



6.37. ÁBRA: A 3. példában szereplő lemezt vízszintes csíkokkal modellezzük.

1. y-tengelyre vonatkozó M_y tehetetlenségi nyomatékát,
2. M tömegét,
3. tömegközéppontjának x koordinátáját!

Megoldás:

1. módszer: függőleges csíkok (6.36. ábra)

1. Az M_y tehetetlenségi nyomaték:

Egy csík

tömegközéppontja: $(\tilde{x},\tilde{y}) = (x,x)$,
hossza: $2x$,
szélessége: dx,
területe: $dA = 2x\,dx$,
tömege: $dm = \delta\,dA = 3\cdot 2x\,dx = 6x\,dx$,
tömegközéppontjának távolsága az y-tengelytől: $\tilde{x} = x$.

A csík y-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka

$$\tilde{x}\,dm = x\cdot 6x\,dx = 6x^2\,dx.$$

Ezért a lemez y-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka:

$$M_y = \int \tilde{x}\,dm = \int_0^1 6x^2\,dx = \left[2x^3\right]_0^1 = 2\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}.$$

2. A lemez tömege:

$$M = \int dm = \int_0^1 6x\,dx = \left[3x^2\right]_0^1 = 3\ \mathrm{g}.$$

3. A lemez tömegközéppontjának x koordinátája:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}}{3\ \mathrm{g}} = \frac{2}{3}\mathrm{cm}.$$

Hasonló számításokkal határozhatjuk meg M_x és $\bar{y} = M_x/M$ értékét.

2. módszer: vízszintes csíkok (6.37. ábra)

1. Az M_y tehetetlenségi nyomaték: egy vízszintes csík tömegközéppontjának y koordinátája is y (lásd az ábrát), így

$$\tilde{y} = y.$$

A tömegközéppont x koordinátája a vízszintes egyenesből a háromszög által kivágott szakasz felezőpontjának koordinátája. Ez pedig $y/2$ és 1 számtani közepe (ugyanis a csík bal oldali végéhez tartozó x érték $y/2$, a jobb oldali végéhez tartozó x érték pedig 1):

$$\tilde{x} = \frac{(y/2)+1}{2} = \frac{y}{4}+\frac{1}{2} = \frac{y+2}{4}.$$

Így azt kapjuk, hogy a

a hosszúság: $1-\frac{y}{2} = \frac{2-y}{2}$,

a szélesség: dy,

a terület: $dA = \frac{2-y}{2}dy$,

a tömeg: $dm = \delta\,dA = 3\cdot\frac{2-y}{2}dy$,

a tömegközéppont távolsága az y-tengelytől: $\tilde{x} = \frac{y+2}{4}$.

A csík y-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka

$$M_y = \int \tilde{x}\, dm = \int_0^2 \frac{3}{8}(4-y^2)\, dy = \frac{3}{8}\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{3}{8}\left(\frac{16}{3}\right) = 2\ \text{g}\cdot\text{cm}.$$

2. A lemez tömege:

$$M = \int dm = \int_0^2 \frac{3}{2}(2-y)\, dy = \frac{3}{2}\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{2}(4-2) = 3\ \text{g}.$$

3. A lemez tömegközéppontjának x koordinátája:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\ \text{g}\cdot\text{cm}}{3\ \text{g}} = \frac{2}{3}\ \text{cm}.$$

M_x-et és $\bar{y}$-t hasonló számításokkal határozhatjuk meg. □

Lemez tömegközéppontjának meghatározása

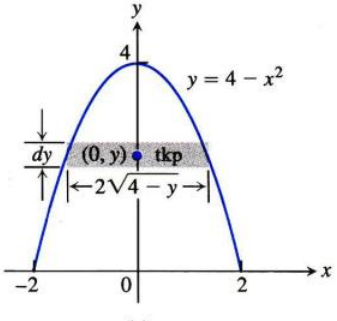
1. Ábrázoljuk a lemezt az xy-síkban!

2. Rajzoljunk meg egy keskeny, valamelyik koordinátatengellyel párhuzamos csíkot és határozzuk meg a méreteit!

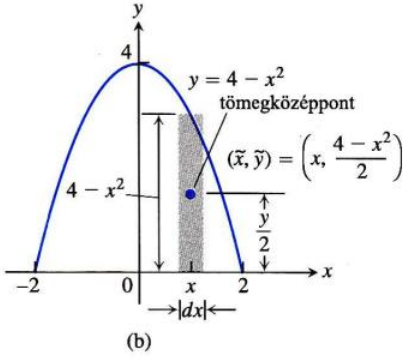
3. Határozzuk meg a csík dm tömegét és $(\tilde{x}, \tilde{y})$ tömegközéppontját!

4. $\tilde{y}dm$-et, $\tilde{x}dm$-et és dm-et integrálva meghatározzuk M_x-et, M_y-t és M-et.

5. A tehetetlenségi nyomatékokat a tömeggel elosztva megkapjuk $\bar{x}$-et és $\bar{y}$-t.



(a)



(b)

6.38. ÁBRA: A 4. példában szereplő lemezt (a) vízszintes csíkokkal modellezve kedvezőtlen alakú integrálhoz jutunk, ezért célszerűbb a függőleges csíkokkal való közelítés (b).

Ha egy vékony síklemez tömegeloszlása tengelyesen szimmetrikus, akkor tömegközéppontja ezen a tengelyen van rajta. Ha két szimmetriatengelye is van, akkor a tömegközéppont a két tengely metszéspontja lesz. Ezek a tények megkönnyítik a számításokat.

4. PÉLDA: **Állandó sűrűségű lemez**

Határozzuk meg annak a vékony lemeznek a tömegközéppontját, amelyet felülről az $y = 4 - x^2$ parabola, alulról pedig az x-tengely határol (6.38. ábra).

Megoldás: Mivel a lemez szimmetrikus az y-tengelyre nézve, sűrűsége pedig állandó, ezért a tömegeloszlás is az y-ra szimmetrikus és a lemez tömegközéppontja rajta lesz az y-tengelyen. Így $\bar{x} = 0$, s csupán $\bar{y} = M_x/M$-et kell meghatároznunk.

A vízszintes csíkokra való felosztás (6.38a ábra) a kellemetlen

$$M_x = \int_0^4 2\delta y\sqrt{4-y}\, dy$$

integrálhoz vezet. Ezért a tömegeloszlást ehelyett inkább függőleges csíkokkal modellezzük (6.38b ábra).

Egy ilyen függőleges csík

tömegközéppontja: $(\tilde{x},\tilde{y}) = \left(x, \frac{4-x^2}{2}\right)$,

hosszúsága: $4-x^2$,

szélessége: dx,

területe: $dA = (4-x^2)dx$,

tömege: $dm = \delta dA = \delta(4-x^2)dx$,

tömegközéppontjának távolsága az x-tengelytől: $\tilde{y} = \frac{4-x^2}{2}$.

A csík x-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka:

$$\tilde{y}dm = \frac{4-x^2}{2} \cdot \delta(4-x^2)dx = \frac{\delta}{2}(4-x^2)^2 dx.$$

A lemez x-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka:

$$M_x = \int \tilde{y}\, dm = \int_{-2}^{2} \frac{\delta}{2}(4-x^2)^2\, dx =$$

$$= \frac{\delta}{2}\int_{02}^{2}(16-8x^2+x^4)\, dx = \frac{256}{15}\delta. \tag{6.12}$$

A lemez tömege:

$$M = \int dm = \int_{-2}^{2} \delta(4-x^2)\, dx = \frac{32}{3}\delta. \tag{6.13}$$

Ezért

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{(256/15)\delta}{(32/3)\delta} = \frac{8}{5}.$$

A lemez tömegközéppontja az

$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(0, \frac{8}{5}\right)$$

pont. □

5. PÉLDA: **Változó sűrűségű lemez**

Keressük meg a 4. példában szereplő lemez tömegközéppontját abban az esetben, ha a lemez (x,y) pontjában a sűrűség $\delta = 2x^2$!

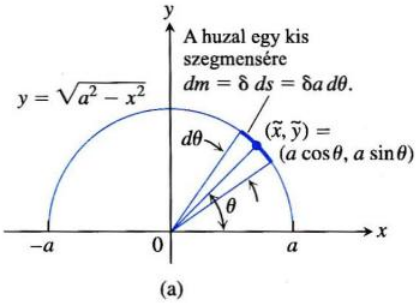
Megoldás: A tömegeloszlás szimmetrikus az y-tengelyre nézve, így $\bar{x} = 0$. $\delta = 2x^2$-tel a (6.12) és (6.13) egyenlőségek a következő alakot öltik:

$$M_x = \int \tilde{y}\, dm = \int_{-2}^{2} \frac{\delta}{2}(4-x^2)^2\, dx = \int_{-2}^{2} x^2(4-x^2)^2\, dx =$$

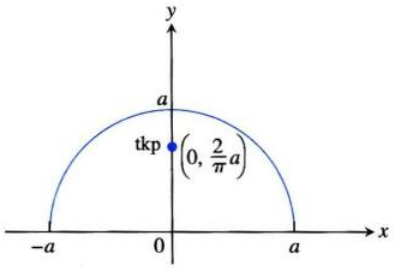
$$= \int_{-2}^{2}(16x^2-8x^4+x^6)\, dx = \frac{2048}{105}, \tag{6.12'}$$

$$M = \int dm = \int_{-2}^{2} \delta(4-x^2)\, dx = \int_{-2}^{2} 2x^2(4-x^2)\, dx =$$

$$= \int_{-2}^{2}(8x^2-2x^4)\, dx = \frac{256}{15}. \tag{6.13'}$$



(a)



(b)

6.39. ÁBRA: A 6. példában szereplő, félkörbe hajlított drót. (a) A tömegközéppont meghatározásához szükséges változók. (b) A tömegközéppont a dróton kívül helyezkedik el.

Ezért

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2048}{105} \cdot \frac{15}{256} = \frac{8}{7}.$$

A lemez tömegközéppontja most a

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{7}\right)$$

pont lesz. □

6. PÉLDA:

Határozzuk meg annak az egyenletes sűrűségű drótdarabnak a tömegközéppontját, amely egy a sugarú félkört alkot!

Megoldás: A huzalt az $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ félkörrel modellezzük (6.39. ábra). A tömegeloszlás az y-tengelyre szimmetrikus, így $\bar{x} = 0$. $\bar{y}$ kiszámításához képzeletben vágjuk fel a huzalt pici darabokra! Egy ilyen darabka (6.39a ábra)

hossza: $ds = a\,d\theta$,

tömege: $dm = \delta\, ds = \delta a\, d\theta$, egységnyi hossz tömege × hossz

tömegközéppontjának távolsága az x-tengelytől: $\tilde{y} = a\sin\theta$.

Innen

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dm}{\int dm} = \frac{\int_0^\pi a\sin\theta \cdot \delta a\, d\theta}{\int_0^\pi \delta a\, d\theta} = \frac{\delta a^2[-\cos\theta]_0^\pi}{\delta a\pi} = \frac{2}{\pi}a.$$

A tömegközéppont a szimmetriatengely $(0, 2a/\pi)$ pontjában fekszik, az origótól hozzávetőleg $(2/3)a$ távolságra (6.39b ábra). □

Súlypont

Ha a sűrűségfüggvény állandó, akkor az $\bar{x}$-t és $\bar{y}$-t megadó képletek számlálójából és nevezőjéből kiesik. E fejezet szinte minden példájában ez történt. Ami $\bar{x}$-t és $\bar{y}$-t illeti, ilyenkor δ-t 1-nek tekinthetjük. Azaz ha a sűrűség állandó, akkor a tömegközéppont helye geometriai tulajdonság, nem függ a tárgy anyagi minőségétől. Ilyen esetekben a mérnökök a tömegközéppontot az alakzat súlypontjának nevezik, s úgy fogalmaznak, hogy „számítsd ki a háromszög vagy a kúp súlypontját". Ilyenkor csupán annyit kell tennünk, hogy a sűrűséget 1-nek tekintjük, és máris alkalmazhatjuk a fenti képleteket $\bar{x}$ és $\bar{y}$ kiszámítására.

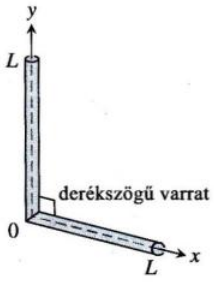
6.4. Feladatok

Vékony rudak

1. Egy 40 kg és egy 50 kg tömegű gyerek egyensúlyoz a libikókán. A 40 kg tömegű 1,5 méterre van a hinta forgáspontjától. Milyen messze van tőle az 50 kg tömegű gyerek?

2. Egy farönk két vége két mérlegre támaszkodik. Az egyik mérleg 100, a másik 200 kg-ot mutat. Hol van a rönk tömegközéppontja?

3. Két egyenlő hosszú vékony fémrúd egy-egy végét egymáshoz hegesztjük úgy, hogy derékszöget alkossanak. Határozzuk meg a derékszög tömegközéppontját! (*Útmutatás:* Hol van az egyes szárak tömegközéppontja?)



4. Két vékony fémrúd egy-egy végét derékszögben összehegesztjük. Az egyik szár kétszer olyan hosszú, mint a másik. Határozzuk meg a derékszög tömegközéppontját! (*Útmutatás:* Hol van az egyes szárak tömegközéppontja?)

Az 5–12. feladatokban megadjuk az x-tengely egy-egy intervallumát lefedő vékony rudak sűrűségfüggvényét. A (6.8a)–(6.8c) egyenlőségeket felhasználva határozzuk meg a rudak origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát, tömegét és tömegközéppontját!

5. $\delta(x) = 4, \quad 0 \le x \le 2$

6. $\delta(x) = 4, \quad 1 \le x \le 3$

7. $\delta(x) = 1 + (x/3), \quad 0 \le x \le 3$

8. $\delta(x) = 2 - (x/4), \quad 0 \le x \le 4$

9. $\delta(x) = 1 + (1/\sqrt{x}), \quad 1 \le x \le 4$

10. $\delta(x) = 3(x^{-3/2} + x^{-5/2}), \quad 0{,}25 \le x \le 1$

11. $\delta(x) = \begin{cases} 2-x, & 0 \le x \le 1 \\ x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

12. $\delta(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \le x < 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Állandó sűrűségű vékony lemezek

A 13–24. feladatokban meg kell határozni az adott tartományt lefedő, konstans δ sűrűségű vékony lemez tömegközéppontját.

13. A tartományt az $y = x^2$ parabola és az $y = 4$ egyenes határolja.

14. A tartományt az $y = 25 - x^2$ parabola és az x-tengely határolja.

15. A tartományt az $y = x - x^2$ parabola és az $y = -x$ egyenes határolja.

16. A tartományt az $y = x^2 - 3$ és $y = -2x^2$ parabolák határolják.

17. A tartományt az y-tengely és az $x = y - y^3$, $0 \le y \le 1$ görbe határolja.

18. A tartományt az $x^2 = y^2 - y$ parabola és az $y = x$ egyenes határolja.

19. A tartományt az x-tengely és az $y = \cos x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ görbe határolja.

20. A tartomány az x-tengely és az $y = \sec^2 x$, $-\pi/4 \le x \le \pi/4$ görbe között terül el.

21. A tartományt az $y = 2x^2 - 4x$ és az $y = 2x - x^2$ parabolák határolják.

22. **(a)** A tartományt az $x^2 + y^2 = 9$ kör metszi ki az első síknegyedből.

(b) A tartományt az x-tengely és az $y = \sqrt{9 - x^2}$ félkör határolja.

Hasonlítsuk össze a feladat a) illetve b) részére adott válaszunkat!

23. Az $x^2 + y^2 = 9$ kör, valamint az $x = 3$ és $y = 3$ egyenesek között húzódó első síknegyedbeli „háromszögtartomány". (*Útmutatás:* A területet geometriai módszerekkel határozzuk meg!)

24. A tartományt felülről az $y = 1/x^3$ görbe, alulról az $y = -1/x^2$ görbe, balról az $x = 1$, jobbról pedig az $x = a > 1$ egyenes határolja. Határozzuk meg $\lim_{a \to \infty} \bar{x}$-et is!

Változó sűrűségű vékony lemezek

25. Határozzuk meg az $y = 2/x^2$, $1 \le x \le 2$ görbe és az x-tengely közé eső tartományt lefedő vékony lemez tömegközéppontját, ha a lemez sűrűsége az (x,y) pontban $\delta(x) = x^2$!

26. Határozzuk meg az alulról az $y = x^2$ parabola, felülről pedig az $y = x$ egyenes által határolt tartomány lefedő vékony lemez tömegközéppontját, ha a lemez sűrűsége az (x,y) pontban $\delta(x) = 12x$!

27. Az $y = \pm 4/\sqrt{x}$ görbék, valamint az $x = 1$ és $x = 4$ egyenesek által határolt tartományt az y-tengely körül megforgatva egy forgástestet hozunk létre.

(a) Határozzuk meg a forgástest térfogatát!

(b) Határozzuk meg a tartományt lefedő vékony lemez tömegközéppontját, ha a lemez sűrűsége az (x,y) pontban $\delta(x) = 1/x$.

(c) Vázoljuk fel a lemezt, és mutassuk meg a rajzon, hol a tömegközéppont!

28. Az $y = 2/x$ görbe, valamint az x-tengely $x = 1$ és $x = 4$ pontja által közrefogott tartományt az x-tengely körül megforgatva egy forgástestet hozunk létre.

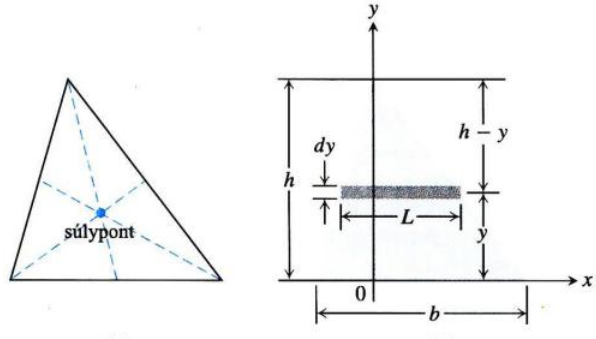
(a) Határozzuk meg a forgástest térfogatát!

(b) Határozzuk meg a tartományt lefedő vékony lemez tömegközéppontját, ha a lemez sűrűsége az (x,y) pontban $\delta(x) = \sqrt{x}$!

(c) Ábrázoljuk a tartományt és vegyük fel a rajzon a tömegközéppontot is!

Háromszögek súlypontja

29. A háromszög súlypontja a háromszög oldalfelező egyeneseinek metszéspontjában fekszik. (*6.40a ábra*) Idézzük emlékezetünkbe, hogy a háromszög oldalfelező pontjait a szemközti csúccsal összekötő szakaszok egy olyan pontban metszik egymást, amely 1:2 arányban osztja ezeket a szakaszokat és az oldalegyenesekhez van közelebb! Mutassuk meg, hogy a súlypont az oldalfelező egyenesek metszéspontjában helyezkedik el, mégpedig úgy, hogy belátjuk: az oldalfelező egyenesek metszéspontja és a súlypont az oldalfelező pont és a szemközti csúcs távolságának egyharmadánál fekszik! Ehhez végezzük el a következő lépéseket:



6.40. ÁBRA: A 29. feladatban szereplő háromszög. (a) A súlypont. (b) A tömegközéppont meghatározásához szükséges méretek és változók.

i. A háromszög egyik oldalát helyezzük az x-tengelyre, mint azt a 6.40b ábrán is tettük)! Fejezzük ki dm-et L-lel és dy-nal!

ii. Hasonló háromszögekkel mutassuk meg, hogy $L = (b/h)(h-y)$! L-nek ezt a kifejezését helyettesítsük be a dm-re kapott összefüggésbe!

iii. Mutassuk meg, hogy $\bar{y} = h/3$!

iv. Ezt a levezetést végezzük el a másik két oldalra is!

A 29. feladat eredményére támaszkodva határozzuk meg a 30–34. feladatokban csúcspontjaikkal megadott háromszögek tömegközéppontját!

30. $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,3)$

31. $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$

32. $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,a)$

33. $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$

34. $(0,0)$, $(a,0)$, $(a/2,b)$

Vékony huzalok

35. Konstans sűrűség: Határozzuk meg annak az álladó sűrűségű huzaldarabnak az x-tengelyre vonatkozó forgatónyomatékát, amely az $y = \sqrt{x}$ görbe $x = 0$ és $x = 2$ közötti szakaszát fedi le.

36. Konstans sűrűség: Határozzuk meg annak az álladó sűrűségű huzaldarabnak az x-tengelyre vonatkozó forgatónyomatékát, amely az $y = x^3$ görbe $x = 0$ és $x = 1$ közötti szakaszát fedi le.

37. Változó sűrűség: Legyen a 6. példában szereplő huzal sűrűsége $\delta = 1 + k\sin\theta$ (k állandó). Határozzuk meg a tömegközéppontot!

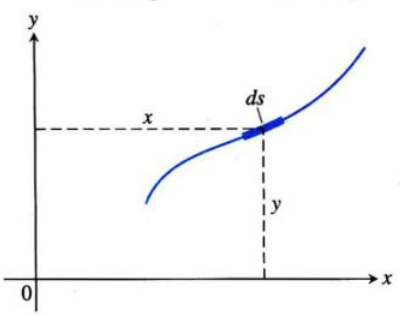
38. Változó sűrűség: Legyen a 6. példában szereplő huzal sűrűsége $\delta = 1 + k|\cos\theta|$ (k állandó). Határozzuk meg a tömegközéppontot!

Műszaki képletek

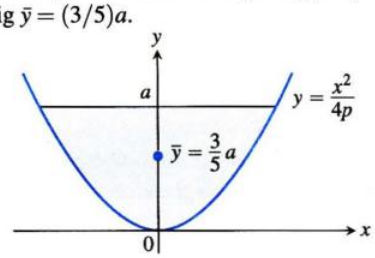
Bizonyítsuk be a 39–42. feladatok állításait és formuláit!

39. Egy differenciálható síkgörbe súlypontjának koordinátái

$$\bar{x} = \frac{\int x\,ds}{\text{hosszúság}}, \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,ds}{\text{hosszúság}}.$$

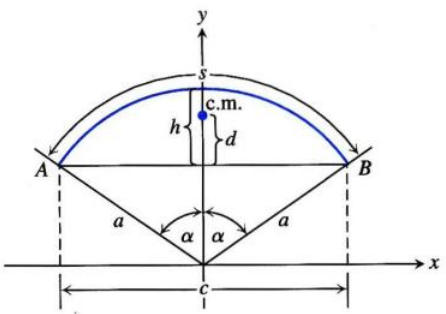


40. Bármilyen legyen is $p > 0$ értéke az $y = x^2/(4p)$ egyenletben, az itt látható parabolaszelet tömegközéppontjának y koordinátája mindig $\bar{y} = (3/5)a$.



41. Az olyan, körív alakú huzalok esetén, amelyeknek állandó a sűrűségük, és amelyek origóközéppontú kör alakjára vannak formálva, valamint az y-tengelyre nézve szimmetrikusan helyezkednek el, a tömegközéppont y-koordinátája:

$$\bar{y} = \frac{a\sin\alpha}{\alpha} = \frac{ac}{s}.$$



42. (*A 41. feladat folytatása.*)

(a) Az alábbi két lépésben mutassuk meg, hogy ha α kicsi, akkor a tömegközéppont és az AB ív d távolsága hozzávetőleg $2h/3$ lesz.

i. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{d}{h} = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \alpha\cos\alpha}. \tag{6.14}$$

T **ii.** Ábrázoljuk az

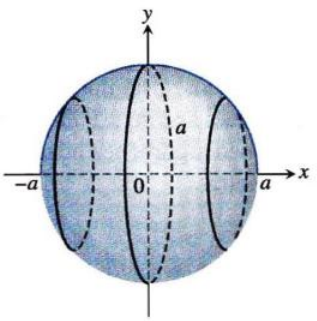
$$f(\alpha) = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \alpha\cos\alpha}$$

függvényt, s a rajz segítségével mutassuk meg, hogy $\lim_{\alpha\to 0^+} f(\alpha) \approx 2/3$!

(b) A hiba (d és $2h/3$ eltérése) még 45°-nál nagyobb szögek esetén is kicsi. Ezt az állítást ellenőrizzük úgy, hogy a (6.14) egyenlőségbe behelyettesítjük az $\alpha = 0{,}2$; 0,4; 0,6; 0,8 és 1,0 értékeket (a szöget itt radiánban mérjük)!

6.5. Forgásfelületek és Papposz tételei

Amikor ugrókötelezünk, az ugrókötél úgynevezett *forgásfelületet* ír le a térben. Ennek a forgásfelületnek a felszíne függ az ugrókötél hosszától és attól is, hogy egyes darabjai milyen messze vannak a forgástengelytől. Ebben a szakaszban forgásfelületek felszínét fogjuk értelmezni. Ennél bonyolultabb felületekről a 16. fejezetben lesz szó.



6.41. ÁBRA: Az a sugarú, origó középpontú $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ félkör forgatásával $4\pi a^2$ felszínű forgásfelületet kapunk.

A felszín definíciója

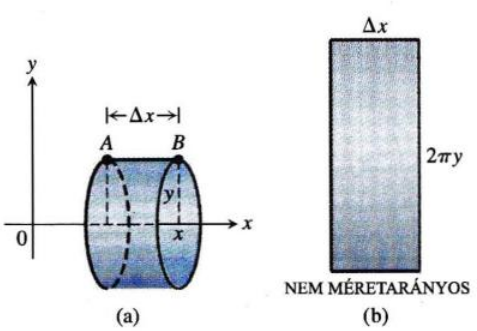
Azt szeretnénk, ha a forgástestek felszínére adott definíciónk konzisztens lenne az elemi geometria felszínszámítási eredményeivel, azaz a gömb, a körhenger és körkúp felszínére a már ismert értékeket adná. Vagyis ha a bevezetőben említett ugrókötél félkör alakú, sugara a és a forgástengely az x-tengely (6.41. ábra), akkor az ily módon generált gömb felszíne $4\pi a^2$ kell legyen.

Mielőtt rátérnénk az általános görbékre, előbb vízszintes és ferde szakaszok x-tengely körüli forgatásával foglalkozunk. Ha a Δx hosszúságú AB vízszintes szakaszt megforgatjuk az x-tengely körül (6.42a ábra), egy $2\pi y\Delta x$ felszínű hengerfelületet kapunk. Ez a felszín megegyezik egy Δx és $2\pi y$ oldalélű téglalap területével (6.42b ábra). $2\pi y$ annak az y sugarú körnek a kerülete, amely AB valamely (x, y) pontjának x-tengely körüli forgatásával áll elő.

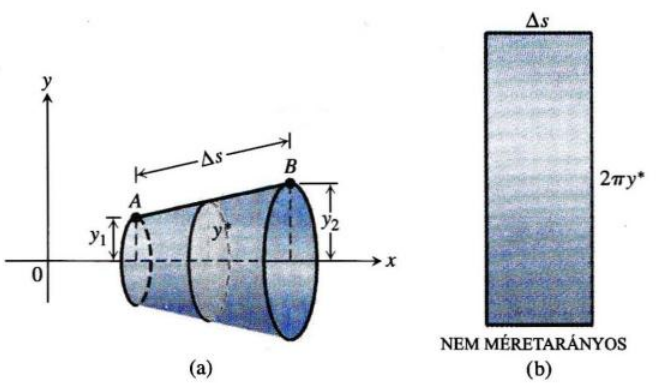
Az AB szakasz hossza legyen most Δs, és álljon ferdén, ne vízszintesen. Amikor ezt a szakaszt forgatjuk meg az x-tengely körül, egy csonkakúp jön létre (6.43a ábra). A klasszikus geometriából tudjuk, hogy ennek a csonkakúppalástnak a felszíne $2\pi y^*\Delta s$, ahol $y^* = (y_1 + y_2)/2$ az AB szakasz felezőpontjának x-tengelytől való távolsága. Ennek a csonkakúppalástnak a felszíne megegyezik a Δs és $2\pi y^*$ oldalélű téglalap területével (6.43b ábra).

Ezeknek a geometriai elveknek a szem előtt tartásával fogjuk értelmezni általánosabb görbék x-tengely körüli forgatásával előálló felületek felszínét is. Tegyük fel, hogy annak a felületnek a felszínét akarjuk meghatározni, amelyet az $y = f(x)$, $a \le x \le b$ nemnegatív és folytonos függvény grafikonja söpör végig, ha az x-tengely körül megforgatjuk. Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot a szokásos módon, és az osztópontokkal a grafikont is osszuk fel piciny ívdarabokra. A 6.44. ábra egy ilyen ívdarabot mutat és azt a sávot, amelyet mint f grafikonjának része a forgatás során végigsöpör.

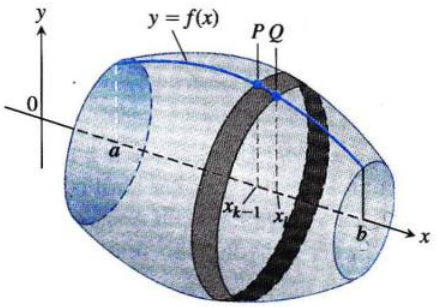
Amint a PQ ívet megforgatjuk az x-tengely körül, a P és Q pontokat összekötő egyenes szakasz egy olyan csonkakúpon sörpör végig, amelynek tengelye az x-tengely (6.45. ábra). E csonkakúppalást felszínével közelítjük a PQ ív által végigsöpört szalagnak a felszínét. A 6.45. ábrán látható csonkakúppalást felszíne $2\pi y^* L$, ahol y^* P illetve Q x-tengelytől való távolságának az átlaga, L pedig a



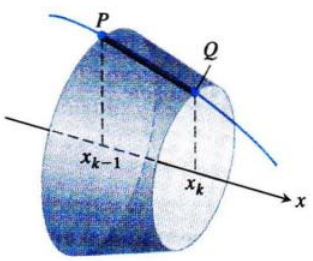
6.42. ÁBRA: (a) A Δx hosszúságú vízszintes AB szakasz x-tengely körüli forgatásával generált hengerfelület. (b) A hengerfelület szétvágásával és kiterítésével kapott téglalap.



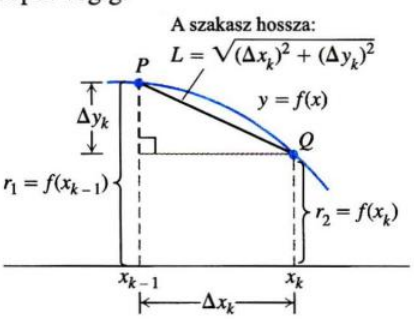
6.43. ÁBRA: (a) A Δs hosszúságú ferde AB szakasz x-tengely körüli forgatásával generált kúppalást felszíne $2\pi y^*\Delta s$. (b) A kúppalást felszínével azonos területű téglalap, ahol $y^* = (y_1 + y_2)/2$.



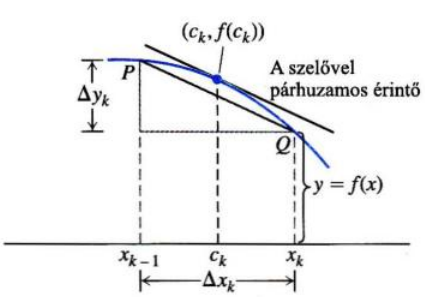
6.44. ÁBRA: Az $y = f(x)$, $a \le x \le b$ nemnegatív és folytonos függvény grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával képezett forgásfelület. A felszín olyan szalagok felszínének az egyesítésével jön létre, amilyenen a PQ ív végigsöpör.



6.45. ÁBRA: A P és a Q pontot összekötő egyenes szakasz egy kúppalástot söpör végig.



6.46. ÁBRA: A PQ szakaszhoz illetve ívhez tartozó méretek.



6.47. ÁBRA: Ha f sima, akkor a középértéktétel biztosítja egy olyan c_k pont létezését, amelyben a görbéhez vont érintő párhuzamos lesz a PQ szakasszal.

PQ szakasz hossza. Mivel $f \ge 0$, a 6.46. ábráról látható, hogy $y^* = (f(x_{k-1}) - f(x_k))/2$ és $L = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$. Ezért

$$\text{a kúppalást felszíne} = 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{2} \cdot \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \pi \cdot (f(x_{k-1}) - f(x_k)) \cdot \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}.$$

Mivel az eredeti forgásfelület felszíne a PQ-hoz hasonló ívek által végigsöpört szalagok felszínének az összege, s ezeket mind csonkakúppalásttal közelítjük, ezért a felszín:

$$\sum_{k=1}^{n} \pi \cdot (f(x_{k-1}) - f(x_k)) \cdot \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}. \tag{6.15}$$

Az várjuk, hogy a közelítés javulni fog, amint $[a,b]$ felosztását finomítjuk. Sőt, ha f differenciálható függvény, akkor a középértéktétel szerint a P és Q közötti görbedarabon létezik olyan $(c_k, f(c_k))$ pont, amelyben a görbéhez húzott érintő párhuzamos a PQ szakasszal (6.47. ábra). Erre a pontra

$$f'(c_k) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k},$$
$$\Delta y_k = f'(c_k)\Delta x_k.$$

A Δy_k-ra kapott kifejezést behelyettesítve a (6.15) egyenlőség a

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k)\Delta x_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\Delta x_k \tag{6.16}$$

alakot ölti. Ezek az összegek nem Riemann-összegek, mert x_{k-1}, x_k és c_k nem ugyanazok a pontok. A felsőbb analízis egy tétele mégis biztosítja, hogy amennyiben f' folytonos és $[a,b]$ felosztásának normája nullához tart, a (6.16) kifejezés az

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

integrálhoz konvergál. Ezért az f grafikonja a és b közötti szakasza által végigsöpört felület felszínét ezzel az integrállal definiáljuk.

DEFINÍCIÓ: **Az x-tengely körüli forgatással előálló forgásfelület felszíne**

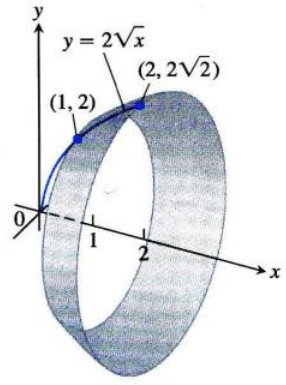
Ha az $f(x) \ge 0$ függvény folytonosan differenciálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor az $y = f(x)$ görbe x-tengely körüli forgatásával előálló felület **felszíne**:

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \tag{6.17}$$

A (6.17) képletben ugyanaz a négyzetgyökös kifejezés szerepel, mint a 6.3. szakasz (6.2) ívhosszképletében.

1. PÉLDA: **A felszínképlet alkalmazása**

Számítsuk ki az $y = 2\sqrt{x}$ görbe $1 \le x \le 2$ szakaszának x-tengely körüli megforgatásával generált felület felszínét (6.48. ábra).



6.48. ÁBRA: Az 1. példában ennek a felületnek a felszínét számítjuk ki.

Megoldás: Használjuk az

$$S=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

összefüggést az

$$a=1,\quad b=2,\quad y=2\sqrt{x},\quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

értékekkel!

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\sqrt{\frac{x+1}{x}}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}.$$

Ezekkel a helyettesítésekkel

$$S=\int_1^2 2\pi\cdot 2\sqrt{x}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,dx=4\pi\int_1^2\sqrt{x+1}\,dx=$$
$$=4\pi\cdot\frac{2}{3}\left[(x+1)^{3/2}\right]_1^2=\frac{8\pi}{3}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right).$$ □

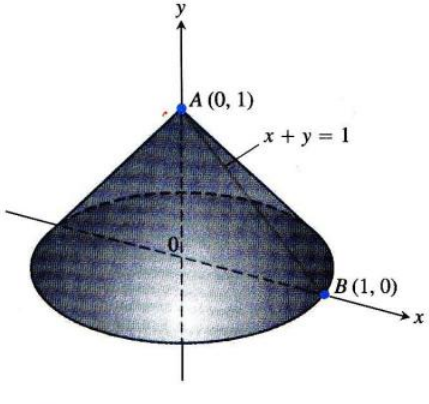
y-tengely körüli forgatás

Az y-tengely körüli forgatás esetén a (6.17) kifejezésben egyszerűen fel kell cserélnünk x-et és y-t.

DEFINÍCIÓ: **Az y-tengely körüli forgatással előálló forgásfelület felszíne**

Ha a $g(x)\geq 0$ függvény folytonosan differenciálható az $[c,d]$ intervallumon, akkor az $x=g(y)$ görbe y-tengely körüli forgatásával előálló felület felszíne:

$$S=\int_c^d 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy=\int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy. \qquad (6.18)$$



6.49. ÁBRA: Az AB szakasz y-tengely körüli forgatása egy kúpfelületet eredményez, amelynek felszínét két módon is kiszámoljuk (2. példa).

2. PÉLDA: **A felszín kiszámítása y-tengely körüli forgatás esetén**

Az $x=1-y$, $0\leq x\leq 1$ szakaszt forgassuk meg az y-tengely körül! Az eredmény a 6.49. ábrán látható kúpfelület. Számítsuk ki a felszínét (a felszínhez nem tartozik hozzá az alapkör területe)!

Megoldás: Itt most az elemi geometriából ismert kúpfelszín-képletet is alkalmazhatjuk:

$$\text{a kúppalást felszíne}=\frac{\text{az alapkör kerülete}}{2}\times\text{alkotó}=\pi\sqrt{2}.$$

Lássuk, hogy a (6.18) képlet ugyanezt az eredményt adja-e. Most

$$c=0,\quad d=1,\quad x=1-y,\quad \frac{dx}{dy}=-1,$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=\sqrt{1+(-1)^2}=\sqrt{2}.$$

Így

$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 2\pi(1-y)\sqrt{2}\, dy =$$
$$= 2\pi \left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \pi\sqrt{2}.$$

A két eredmény valóban megegyezik. □

Paraméteres görbék

Tekintet nélkül arra, hogy a forgástengely az x- vagy az y-tengely, a (6.17) és a (6.18) képletben szereplő gyökös kifejezés ugyanaz, mint amelyik a 6.3. szakaszban, az ívhossz kiszámításánál bukkant fel először. Ha a görbe az $x = f(t)$ és $y = g(t)$, $a \le t \le b$ paraméteres egyenletrendszerrel van megadva, ahol f és g az $[a,b]$ intervallumon folytonosan differenciálható függvények, akkor az ívhossz kiszámítására alkalmas megfelelő gyökös kifejezés

$$\sqrt{[f'(t)]^2 + g'(t)]^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

alakú. Ez a megfigyelés a paraméteres, sima görbék megforgatásával előálló forgásfelületek felszínére a következő összefüggésekhez vezet:

Felszínképlet paraméteres görbével képezett forgásfelületre

Ha $x = f(t)$ és $y = g(t)$, $a \le t \le b$ sima görbe, melyet pontosan egyszer járunk végig midőn t befutja az $[a,b]$ intervallumot, akkor e görbe valamelyik koordináta-tengely körüli megforgatásával generált felület felszíne a következő lesz.

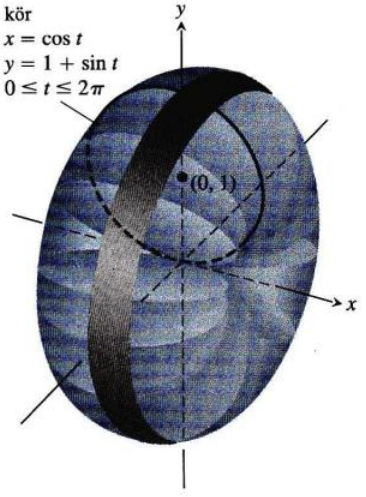
1. x-tengely körüli forgatás ($y \ge 0$):

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \qquad (6.19)$$

2. y-tengely körüli forgatás ($x \ge 0$):

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \qquad (6.20)$$

Akár az ívhossznál, a felszínszámításnál is tetszőleges olyan paraméterezés használható, amely eleget tesz a fenti feltételeknek.



6.50. ÁBRA: A 3. példában e görbe által végigsöpört forgásfelület felszínét számítjuk ki.

3. PÉLDA: A felszínképletek alkalmazása

Az xy-sík $(0,1)$ középpontú, 1 sugarú körének standard paraméterezése

$$x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

E paraméterezés alkalmazásával számítsuk ki annak a forgásfelületnek a felszínét, amely akkor áll elő, ha ezt a kört az x-tengely körül megforgatjuk (6.50. ábra).

Megoldás: Behelyettesítünk a felszínképletbe:

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\pi(1+\sin t) \underbrace{\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}}_{1}\, dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (1+\sin t)\, dt = 2\pi[t - \cos t]_0^{2\pi} = 4\pi^2. \qquad \square$$

A differenciális alak

Az

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \quad \text{és} \quad S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

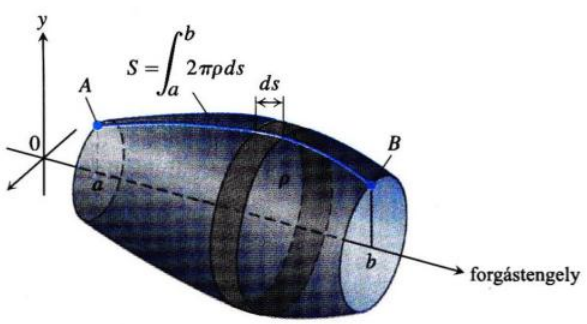
képleteket szokás a $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ívelem differenciáljaként is felírni:

$$S = \int_a^b 2\pi y\, ds \quad \text{és} \quad S = \int_c^d 2\pi x\, ds.$$

Az első képletben y a ds ívelem távolsága az x-tengelytől, a másodikban x a ds ívelem távolsága az y-tengelytől. Mindkét integrál azonos alakú:

$$S = \int 2\pi(\text{sugár})(\text{a csík szélessége}) = \int 2\pi\rho\, ds, \qquad (6.21)$$

ahol ρ a ds ívelemnek a forgástengelytől mért távolsága (6.51. ábra).

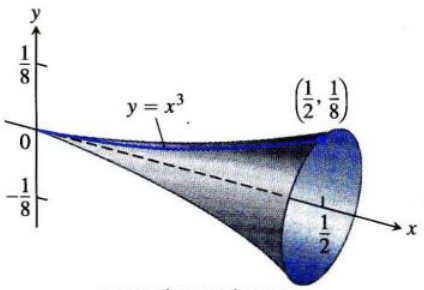


6.51. ÁBRA: Az AB ív tengely körüli forgatásával keletkező forgásfelület felszíne $\int_a^b 2\pi\rho\, ds$. Az egzakt kifejezés ρ-tól és ds-től függ.

Néhány speciális esetben a ρ függvényt és a ds differenciális ívhosszat kifejezhetjük egy közönséges változó függvényeként és az integrálási határokat megállapíthatjuk erre a változóra is.

4. PÉLDA: **A differenciális alak alkalmazása a felszín meghatározására**

Számítsuk ki az $y = x^3$, $0 \le x \le 1/2$ görbe x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület felszínét (6.52. ábra)!



NEM MÉRETARÁNYOS

6.52. ÁBRA: Az $y = x^3$, $0 \le x \le 1/2$ görbe x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület alakja egy pezsgőspoháréra hasonlít (4. példa).

Megoldás: Induljunk ki a rövid, differenciális alakból:

$$S = \int 2\pi\rho \, ds =$$

$$= \int 2\pi y \, ds =$$

Az x-tengely körüli forgatás esetén a sugárfüggvény a $0 \le x \le 1/2$ intervallumon $\rho = y > 0$.

$$= \int 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2}. \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Most el kell döntenünk, hogy dy-t fejezzük ki dx-szel vagy fordítva. A görbe eredetileg az $y = x^3$ alakban volt megadva, ezért egyszerűbb dy-t fejezni ki dx-szel. Számításainkat tehát így folytatjuk:

$$y = x^3, \quad dy = 3x^2 dx$$

és

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (3x^2 dx)^2} = \sqrt{1 + 9x^4}\, dx.$$

Ezekkel a helyettesítésekkel már x lesz az integrál változója és

$$S = \int_{x=0}^{x=1/2} 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} =$$

$$= \int_0^{1/2} 2\pi x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\, dx =$$

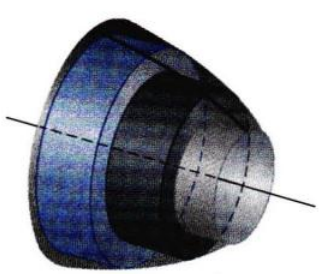
$$= 2\pi \left(\frac{1}{36}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left[(1 + 9x^4)^{3/2}\right]_0^{1/2} =$$

Végezzük el az $u = 1 + 9x^4$, $du/36 = x^3 dx$ helyettesítéseket, integráljunk, majd helyettesítsünk vissza!

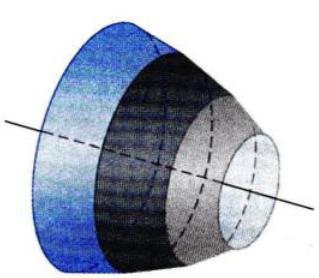
$$= \frac{\pi}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{16}\right)^{3/2} - 1\right] =$$

$$= \frac{\pi}{27}\left[\left(\frac{25}{16}\right)^{3/2} - 1\right] = \frac{\pi}{27}\left(\frac{125}{64} - 1\right) = \frac{61\pi}{1728}.$$

□



(a)



(b)

6.53. ÁBRA: Miért nem hengeres sávokat (a) használunk kúpos sávok (b) helyett a felszín közelítésére?

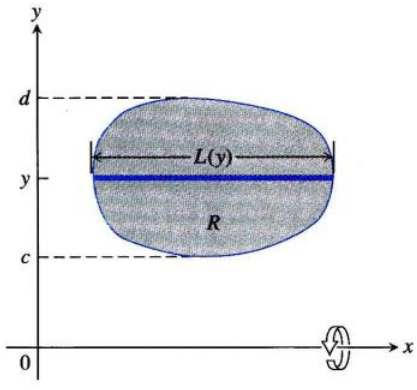
Hengeres kontra kúpos sávok

A kúpos sávok helyett miért nem hengeres sávokkal közelítjük a forgásfelületeket úgy, ahogy az a 6.53. ábrán látszik? A Riemann-összegek épp oly pontosan konvergálnak ilyenkor is, mint a kúpos sávok esetében, s az eredményül kapott integrál egyszerűbb lesz. Ebben az esetben az x-tengely körüli forgatásra a (6.21) képletben $\rho = y$, a sáv szélessége pedig $ds = dx$. Ez az

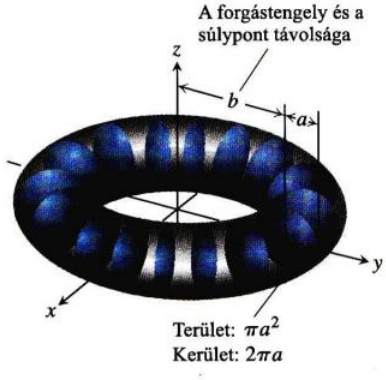
$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\, dx \tag{6.22}$$

integrálalakhoz vezet és nem a (6.17) alakhoz. A probléma a (6.22) a képlettel az, hogy nem adja vissza a klasszikus geometriából ismert eredményeket, pedig a konzisztenciát elsődleges célként jelöltük meg. Csak azért, mert a Riemann-összegekből egy tetszetős képletet vezetünk le, nem biztos, hogy azt kapjuk, amit szeretnénk.[5]

[5] Szerk. megj.: Sajnos, arra, hogy egy gondolatmenet miért hibás, nem magyarázat az, hogy más jön ki, mint eddig máskor. A probléma magyarázatának alapja ugyanaz, mint annak, hogy amíg az f függvény görbéje és az x tengely közötti területet a közelítő téglalapok területösszege egyre jobban közelíti, ha a felosztás normája 0-hoz tart, addig a téglalapok felső élei hosszának összege egyáltalán nem közelíti a függvénygörbe ívhosszát az $[a, b]$ intervallumon, hiszen az élhosszak összege mindig $b - a$ a függvénytől függetlenül. Ha viszont „trapézok" felső élhosszait adjuk össze, az már közelíteni fogja az ívhosszat.



6.54. ÁBRA: Az R tartomány x-tengely körüli (egyszeri) forgatása testet generál. Egy 1700 éves tétel kimondja, hogy a test térfogatát úgy számíthatjuk ki, hogy a tartomány területet megszorozzuk a tartomány súlypontja által bejárt úttal.



6.55. ÁBRA: Papposz első tétele alapján a tórusz térfogatát integrálás nélkül is kiszámíthatjuk (5. példa).

FIGYELMEZTETÉS: A (6.22) képletet ne használjuk felszínszámításra! Az nem ad helyes eredményt!

Papposz tételei

Egy alexandriai görög matematikus, nevezetesen Papposz a 3. században felfedezett két összefüggést a forgásfelületek és forgástestek súlypontjának kiszámítására. Ezek a képletek az egyébként hosszadalmas számítások helyett gyors számszerű eredményt adnak.

1. TÉTEL: **Papposz térfogattétele**

Ha egy síktartományt megforgatunk egy olyan síkbeli egyenes körül, amely nem metszi át a tartomány belsejét, akkor az így generált test térfogata a tartomány területének és annak a távolságnak a szorzata, amelyet a tartomány súlypontja tesz meg egyszeri körbefordulás alatt. Ha ρ a súlypont távolsága a forgástengelytől, akkor

$$V = 2\pi\rho A. \tag{6.23}$$

Bizonyítás: A forgástengely legyen az x-tengely, az R tartomány pedig helyezkedjen el az első síknegyedben (6.54. ábra). Jelöljük $L(y)$-nal a tartomány y-tengelyre merőleges szakaszainak hosszát! Feltesszük, hogy $L(y)$ folytonos.

A tartomány x-tengely körüli forgatásával generált test térfogata a hengerhéj-módszerrel:

$$V = \int_c^d 2\pi(\text{a héj sugara}) \times (\text{a héj magassága})\, dy = 2\pi \int_c^d yL(y)\, dy. \tag{6.24}$$

R súlypontjának x-koordinátája

$$\bar{y} = \frac{\int_c^d \tilde{y}\, dA}{A} = \frac{\int_c^d yL(y)\, dy}{A}, \qquad \tilde{y} = y,\ dA = L(y)dy$$

így

$$\int_c^d yL(y)\, dy = A\bar{y}. \qquad \square$$

5. PÉLDA: **A tórusz térfogata**

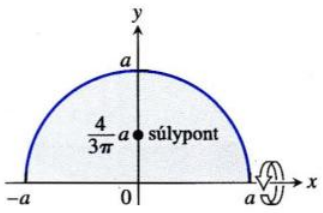
Ha egy a sugarú körlapot a középpontjától $b \geq a$ távolságra lévő tengely körül megforgatunk, tóruszt kapunk (6.55. ábra). E tórusz térfogata

$$V = 2\pi(b)(\pi a^2) = 2\pi^2 ba^2.$$

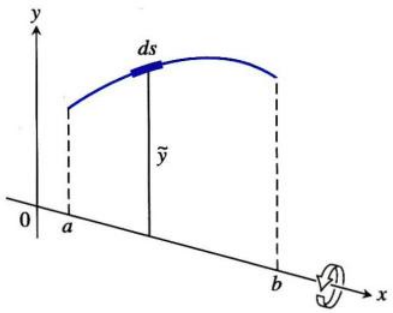
6. PÉLDA: **Félkörlap súlypontjának meghatározása**

Megoldás: A félkörlapot úgy vesszük fel, hogy az $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ félkörív és az x-tengely legyenek a határai (6.56. ábra) és képzeljük el, hogy ezt a félkörlapot az x-tengely körül megforgatva egy gömböt hozunk létre. Szimmetriaokokból a súlypont x-koordinátája $\bar{x} = 0$. A (6.23) képletből $\bar{y} = \rho$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\bar{y} = \frac{V}{2\pi A} = \frac{(4/3)\pi a^2}{2\pi(1/2)\pi a^2} = \frac{4}{3\pi}a. \qquad \square$$



6.56. ÁBRA: Papposz első tétele alapján a félkörlap súlypontját integrálás nélkül is meg tudjuk határozni (6. példa).



6.57. ÁBRA: Papposz területtételének bizonyítására szolgáló ábra.

2. TÉTEL: **Papposz tétele forgásfelületekre**

Ha egy sima síkgörbe egy ívdarabját egyszer körbeforgatjuk a sík egy olyan egyenese körül, amely nem metszi a görbe belsejét, akkor az így generált forgásfelület felszíne egyenlő a görbe hosszának és annak a távolságnak a szorzatával, amelyet a görbe súlypontja a körülforgás során megtesz. Ha ρ a súlypont távolsága a forgástengelytől, akkor

$$S = 2\pi\rho L. \tag{6.25}$$

A bizonyítás során feltesszük, hogy a forgástengely az x-tengely, a görbe pedig felírható x folytonosan differenciálható függvényeként.

Bizonyítás: A forgástengely legyen az x-tengely, a görbedarab két végpontja $x = a$ és $x = b$, és helyezkedjen el az első síknegyedben (6.57. ábra). A görbeív által generált forgásfelület felszíne

$$S = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi y\, ds = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} y\, ds. \tag{6.26}$$

A görbeív súlypontjának y-koordinátája

$$\bar{y} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} \tilde{y}\, ds}{\int_{x=a}^{x=b} ds} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} y\, ds}{L}. \qquad L = \int ds \text{ az ívhossz, } \tilde{y} = y.$$

Ezért

$$\int_{x=a}^{x=b} y\, ds = \bar{y}L.$$

Az utóbbi egyenlőségből $\bar{y}L$-et a (6.26)-be behelyettesítve adódik, hogy $S = 2\pi\bar{y}L$. ρ egyenlő $\bar{y}$-nal, ezért $S = 2\pi\rho L$. □

7. PÉLDA: **A tórusz felszíne**

Az 5. példában szereplő tórusz felszíne

$$S = 2\pi(b)(2\pi a) = 4\pi^2 ba.$$

6.5. Feladatok

Integrálképletek a felszín-meghatározáshoz

Az 1–8. feladatokban:

(a) Állítsunk fel integrálképletet a megadott görbe megadott tengely körüli forgatásával generált felület felszínére!

(b) Ábrázoljuk a görbét! Ha tudjuk, ábrázoljuk a felületet is!

(c) Számítógépünk integrálok kiszámítására alkalmas programjával határozzuk meg a felszín számszerű értékét!

1. $y = \operatorname{tg} x$, $0 \le x \le \pi/4$; x-tengely

2. $y = x^2$, $0 \le x \le 2$; x-tengely

3. $xy = 1$, $1 \le y \le 2$; y-tengely

4. $x = \sin y$, $0 \le y \le \pi$; y-tengely

5. $x^{1/2} + y^{1/2} = 3$ (4,1) és (1,4) közé eső szakasza; x-tengely

6. $y + 2\sqrt{y} = x$, $1 \le y \le 2$; y-tengely

7. $x = \int_0^y \operatorname{tg} t\, dt$, $0 \le y \le \pi/3$; y-tengely

8. $y = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1}\, dt$, $1 \le x \le \sqrt{5}$; x-tengely

Felszínszámítás

9. Számítsuk ki az $y = x/2$, $0 \le x \le 4$ egyenes szakasz x-tengely körüli forgatásával generált kúppalást felszínét! Megoldásunkat ellenőrizzük

$$\text{a kúppalást felszíne} = \frac{1}{2} \times \text{az alapkör kerülete} \times \text{alkotó}$$

geometriai összefüggéssel!

10. Számítsuk ki az $y = x/2$, $0 \le x \le 4$ egyenes szakasz y-tengely körüli forgatásával generált kúppalást felszínét! Megoldásunkat ellenőrizzük

$$\text{a kúppalást felszíne} = \frac{1}{2} \times \text{az alapkör kerülete} \times \text{alkotó}$$

geometriai összefüggéssel!

11. Számítsuk ki az $y = (x/2) + (1/2)$, $1 \le x \le 3$ egyenes szakasz x-tengely körüli forgatásával generált csonkakúppalást felszínét! Megoldásunkat ellenőrizzük

$$\text{a csonkakúppalást felszíne} = \pi(r_1 + r_2) \times \text{alkotó}$$

geometriai összefüggéssel!

12. Számítsuk ki az $y = (x/2) + (1/2)$, $1 \le x \le 3$ egyenes szakasz y-tengely körüli forgatásával generált csonkakúppalást felszínét! Megoldásunkat ellenőrizzük

$$\text{a csonkakúppalást felszíne} = \pi(r_1 + r_2) \times \text{alkotó}$$

geometriai összefüggéssel!

A 13–22. feladatokban számítsuk ki az adott görbe adott tengely körüli forgatásával előállított forgásfelület felszínét! Ha van rajzolóprogramunk, ábrázolhatjuk is ezeket a görbéket!

13. $y = x^3/9$, $0 \le x \le 2$; x-tengely

14. $y = \sqrt{x}$, $3/4 \le x \le 15/4$; x-tengely

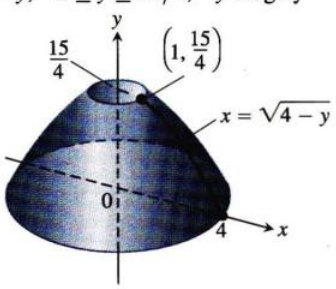
15. $y = \sqrt{2x - x^2}$, $0{,}5 \le x \le 1{,}5$; x-tengely

16. $y = \sqrt{x+1}$, $1 \le x \le 5$; x-tengely

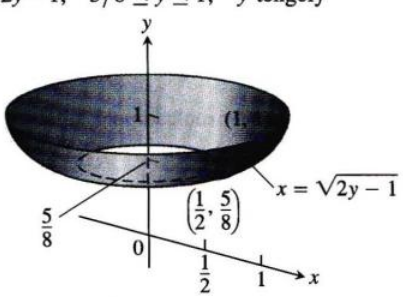
17. $x = y^3/3$, $0 \le y \le 1$; y-tengely

18. $x = (1/3)y^{3/2} - y^{1/2}$, $1 \le y \le 3$; y-tengely

19. $x = 2\sqrt{4 - y}$, $0 \le y \le 15/4$; y-tengely



20. $x = \sqrt{2y - 1}$, $5/8 \le y \le 1$; y-tengely



21. $x = (y^4/4) + 1/(8y^2)$, $1 \le y \le 2$; x-tengely (*Útmutatás:* fejezzük ki $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$-et dy-nal, és alkalmasan választott integrálási határokkal számítsuk ki az $S = \int 2\pi y\, ds$ integrál értékét!)

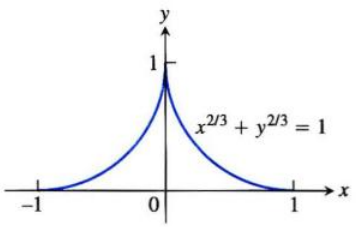
22. $y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}$, $0 \le x \le \sqrt{2}$; x-tengely (*Útmutatás:* fejezzük ki $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$-et dx-szel, és alkalmasan választott integrálási határokkal számítsuk ki az $S = \int 2\pi x\, ds$ integrál értékét!)

23. Az új definíció ellenőrzése: Mutassuk meg, hogy az a sugarú gömb felszíne $4\pi a^2$! A (6.17) képletet alkalmazzuk az $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \le x \le a$ görbe x-tengely körüli forgatásával előállított felület felszínének meghatározására!

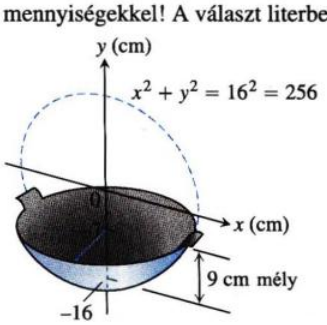
24. Az új definíció ellenőrzése: A h magasságú, r sugarú kúp palástjának felszíne $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$, azaz az alapkör kerületének fele szorozva az alkotóval. Bizonyítsuk be ezt az összefüggést úgy, hogy kiszámítjuk az $y = (r/h)x$, $0 \le x \le h$ szakasz x-tengely körüli forgatásával előállított felület felszínét!

25. Írjunk fel integrálképletet annak a felületnek a felszínére, amelyet úgy kapunk meg, hogy az x-tengely körül megforgatjuk az $y = \cos x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ görbét!

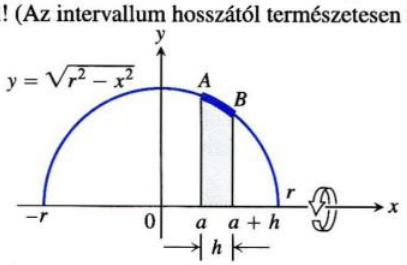
26. Csillagtest felszíne: Határozzuk meg annak a felületnek a felszínét, amely az $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ asztroid ábrán látható darabjának az x-tengely körüli forgatásával jön létre! (*Útmutatás:* forgassuk az első síknegyedbe eső $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$, $0 \le x \le 1$ görbedarabot az x-tengely körül, s az eredményt szorozzuk meg kettővel!)



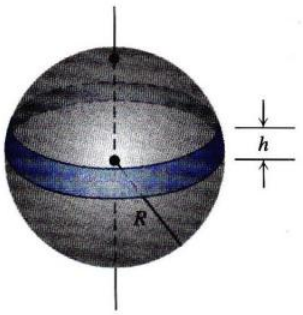
T **27. Wok zománcozása:** Cégünk úgy dönt, hogy a 6.1. szakasz 55. feladatában megtervezett és nagyon sikeres wokból piacra dob egy luxusszériát. A terv az, hogy az edényt belülről fehér, kívülről kék zománccal vonjuk be. A zománcot kiégetés előtt 0,5 mm vastag rétegben kell felvinni a felületre. (Lásd az alábbi diagramot!) A gyártáselőkészítő csoport tudni szeretné, hogy mennyi zománcra lesz szükség 5000 darabos mennyiség előállításához. Mit válaszoljunk? (Ne törődjünk a selejttel és a felhasználatlan mennyiségekkel! A választ literben adjuk meg!)



28. Kenyérszeletelés: Tudja-e, hogy amikor egy kerek cipót felszeletelünk, minden darab ugyanakkora héjat tartalmaz? Hogy miért? Forgassuk meg az itt látható $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ félkört az x-tengely körül! Így egy gömb jön létre. Legyen AB az x-tengely egy kis h intervallumához tartozó görbeív. Mutassuk meg, hogy az AB által végigsöpört felület felszíne nem függ az intervallum helyzetétől! (Az intervallum hosszától természetesen függ.)



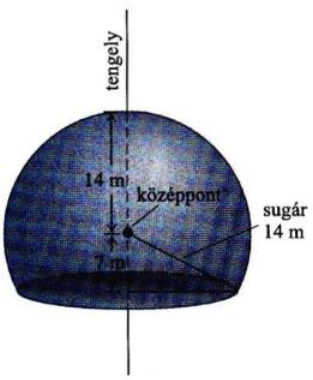
29. Az R sugarú gömbből a sötétebben satírozott sávot két egymással párhuzamos és egymástól h távolságra levő síkkal vágtuk ki. Mutassuk meg, hogy a sáv felszíne $2\pi Rh$!



30. Az ábra azt a kupolát mutatja, amely a montanai Bozemanban az Egyesült Államok Nemzeti Meteorológiai Szolgálata radarjának ad otthont.

(a) Mekkora felületet kellett kívülről lefesteni?

(b) Adjuk meg a számszerű eredményt négyzetméterre kerekítve!



31. A forgástengelyt átmetsző görbe által generált forgásfelület: A (6.17) képlethez úgy jutottunk, hogy feltételeztük: a felületet generáló f függvény nem negatív az $[a,b]$ intervallumon. A forgástengelyt átmetsző görbékre (6.17) úgy módosul, hogy $f(x)$ abszolút értékét kell vennünk:

$$S = \int 2\pi\rho \, ds = \int 2\pi|f(x)| \, ds. \qquad (6.27)$$

(6.27) alapján számítsuk ki annak a kettős kúpnak a felszínét, amely az $y = x$, $-1 \le x \le 2$ szakasz x-tengely körüli forgatásával jön létre!

32. (*A 31. feladat folytatása.*) Határozzuk meg az $y = x^3/9$, $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$ görbe x-tengely körüli forgatásával előállított felület felszínét! Vajon mi történik, ha a (6.27) képletből elhagyjuk az abszolút érték jelet és a felszínt az $S = \int 2\pi f(x) \, ds$ formulával kíséreljük meg kiszámítani? Próbáljuk ki!

Paraméterezés

Számítsuk ki a 33–35. feladatokban megadott görbék adott tengely körüli forgatásával generált felületek felszínét!

33. $x = \cos t$, $y = 2 + \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$, x-tengely

34. $x = (2/3)t^{3/2}$, $y = 2\sqrt{t}$, $0 \le t \le \sqrt{3}$, y-tengely

35. $x = t + \sqrt{2}$, $y = (t^2/2) + \sqrt{2}t$, $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$, t-tengely

36. Állítsunk fel integrálképletet az $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, görbe x-tengely körüli forgatásával generált felület felszínére, de az integrált ne számítsuk ki!

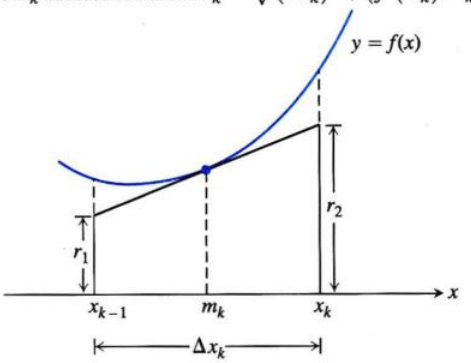
37. Csonkakúp: A $(0,1)$ és $(2,2)$ pontokat összekötő egyenes szakaszt megforgatjuk az x-tengely körül. Az így előállított forgásfelület egy csonkakúppalást. Határozzuk meg a csonkakúppalást felszínét az $x = 2t$, $y = t + 1$, $0 \le t \le 1$ paraméterezéssel! Eredményünket ellenőrizzük a felszín $= \pi(r_1 + r_2) \times$ $\times$ (alkotó) képlet segítségével!

38. Kúp: Az origót a (h,r) ponttal összekötő egyenes szakaszt forgassuk meg az x-tengely körül. Az előállt kúp magassága h, alapkörének sugara r lesz. Számítsuk ki a kúppalást felszínét az $x = ht$, $y = rt$, $0 \le t \le 1$ paraméteres egyenletrendszer segítségével! Eredményünket ellenőrizzük a felszín $=$ $= \pi r$(alkotó) geometriai összefüggés segítségével!

39. A felszínképlet másik levezetése: Tegyük fel, hogy f sima az $[a,b]$ intervallumon, és osszuk fel $[a,b]$-t a szokásos módon! A k-adik részintervallum, azaz az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallum $m_k = (x_{k-1} + x_k)/2$ felezőpontjában húzzunk érintőt a görbéhez, amint az az ábrán látható!

(a) Mutassuk meg, hogy $r_1 = f(m_k) - f'(m_k)\frac{\Delta x_k}{2}$ és $r_2 =$ $= f(m_k) + f'(m_k)\frac{\Delta x_k}{2}$!

(b) Mutassuk meg, hogy a k-adik részintervallumhoz tartozó L_k érintőszakaszra $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(m_k)\Delta x_k)^2}$!



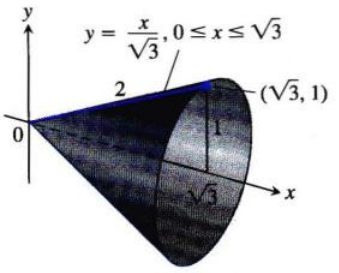
(c) Mutassuk meg, hogy az érintőszakaszt az x-tengely körül megforgatva olyan csonkakúppalástot kapunk, amelynek felszíne $2\pi f(m_k)\sqrt{1 + (f'(m_k))^2}\Delta x_k$!

(d) Mutassuk meg, hogy ha az $y = f(x)$ $[a,b]$ intervallumra eső szakaszát az x-tengely körül megforgatjuk, a létrejött felület felszínére:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\text{a } k\text{-adik csonkakúppalást felszíne}) =$$

$$= \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x))^2} \, dx.$$

40. A felszín modellezése: Az $y = x/\sqrt{3}$, $0 \le x \le \sqrt{3}$ egyenes szakasz x-tengely körüli forgatásával előállított kúp felszíne: $(1/2)$(az alapkör kerülete)(alkotó) $= (1/2)(2\pi)(2) = 2\pi$. Milyen eredményt kapunk a (6.22) formulából az $f(x) = x/\sqrt{3}$ helyettesítéssel?



Papposz tételei

41. A $(0,2)$, $(2,0)$, $(4,2)$ és $(2,4)$ pontokat összekötő négyzetet megforgatjuk az x-tengely körül. Határozzuk meg a keletkező forgástest felszínét és térfogatát!

42. Papposz tételének alkalmazásával határozzuk meg annak a forgástestnek a térfogatát, amely a koordináta-tengelyek és a $2x+y=6$ egyenes által közbezárt háromszögtartomány $x=5$ egyenes körüli megforgatásával áll elő! (A 6.1. szakasz 29. feladatában már láttuk, hogy a háromszög súlypontja a súlyvonalakat 1:2 arányban osztja és a csúcstól van távolabb.)

43. Számítsuk ki az $(x-2)^2+y^2=1$ kör y-tengely körüli forgatásával előállított tórusznak a térfogatát!

44. A Papposz-tétel alkalmazásával számítsuk ki az egyenes körkúp térfogatát és palástjának területét!

45. Papposz 2. tételét és azt az összefüggést kihasználva, hogy az a sugarú gömb felszíne $4\pi a^2$, határozzuk meg az $y=\sqrt{a^2-x^2}$ félkör súlypontját!

46. A 45. feladat szerint az $y=\sqrt{a^2-x^2}$ félkör súlypontja a $(0,2a/\pi)$ pontban van. Számítsuk ki annak a felületnek a felszínét, amelyet ez a félkör söpör végig, ha az $y=a$ egyenes körül megforgatjuk!

47. Az $y=(b/a)\sqrt{a^2-x^2}$ félellipszis valamint az x-tengely által határolt R tartomány területe $(1/2)\pi ab$. Az R y-tengely körüli forgatásával generált ellipszoid térfogata $(4/3)\pi ab^2$. Határozzuk meg R súlypontját! Megjegyezzük, hogy a súlypont helye a-tól független.

48. A 6. példában megállapítottuk, hogy az $y=\sqrt{a^2-x^2}$ félkör és az x-tengely által határolt tartomány súlypontja a $(0,4a/3\pi)$ pontban van. Határozzuk meg annak a testnek a térfogatát, amely a tartomány $y=-a$ egyenes körüli forgatása révén keletkezik!

49. A 48. feladatban megadott tartományt forgassuk meg az $y=x-a$ egyenes körül! Határozzuk meg a forgástest térfogatát!

50. Mint azt a 45. feladatban megállapítottuk, az $y=\sqrt{a^2-x^2}$ félkör súlypontja a $(0,2a/\pi)$ pontban van. Határozzuk meg annak a testnek a felszínét, amely a félkör $y=x-a$ egyenes körüli forgatásával keletkezik!

51. Határozzuk meg a 6. példában szereplő félkör alakú tartomány x-tengelyre vonatkozó nyomatékát! Ha felhasználunk már ismert eredményeket, nem kell integrálnunk!

6.6. Munka

A hétköznapi életben a munka olyan tevékenységet jelent, amely fizikai vagy szellemi erőfeszítést kíván. A mechanikában kifejezetten valamely testre ható erőre és a test erőhatást követő elmozdulására vonatkoztatják. Ebben a fejezetben a munka kiszámításáról lesz szó. Az alkalmazások a vasúti kocsik egymáshoz préselődésétől, a földalatti tartályok kiürítésén és az elektronok ütköztetésén keresztül a műholdak pályára állításáig terjednek.

Állandó erő munkája

Ha egy test d utat tesz meg valamely állandó nagyságú, s a mozgás irányában ható F erő hatására, akkor az erő által a testen végzett W munkát a

$$W=Fd \tag{6.28}$$

képlettel definiáljuk.

A (6.28) képletből látható, hogy a munka erő$\times$ hosszúság dimenziójú. Az erő SI egysége a newton, a hosszúságé a méter, így a munka SI egysége a newtonméter (Nm). Az erő oly gyakran használt fogalom, hogy a newtonméternek külön neve is van, a joule.

1. PÉLDA: **Autó felemelése**

Amikor kereket cserélünk és mintegy 30 cm-nyire felemeljük 1000 kg tömegű kocsink oldalát (5000 N állandó nagyságú erőt kell kifejtenünk), akkor $5000\times$ $\times 0{,}3=1500$ joule munkát végzünk.

Változó nagyságú erő által egy egyenes mentén végzett munka

Ha a testre ható erő változik, mint például egy rugó összenyomása során, akkor a $W=Fd$ képlet helyébe egy integrálformula lép, amely figyelembe veszi az erőhatás változását.

Tegyük fel, hogy a munkát végző erő egy egyenes mentén hat, ami legyen most az x-tengely, és nagysága a helyzet folytonos függvénye. Szeretnénk tudni,

mekkora munkát végez ez az erő az $[a,b]$ intervallumon. A szokásos módon elkészítjük az $[a,b]$ intervallum egy felosztását, és minden $[x_{k-1},x_k]$ részintervallumból kiválasztunk egy tetszőleges c_k pontot. Ha a részintervallum elég kicsi, F – lévén folytonos függvény – x_{k-1} és x_k között nem változik sokat. A részintervallumon végzett munkát $F(c_k)$ és Δx_k szorzatával közelíthetjük, azaz úgy tekintjük, mintha az erőhatás állandó nagyságú lenne. Az a és b között végzett teljes munka ekkor a

$$\text{munka} \approx \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\Delta x_k$$

Riemann-összeggel közelíthető. Azt várjuk, hogy a közelítés javulni fog, ha a felosztás normája nullához tart, tehát az a és b pontok között az erő által végzett munkát F a-tól b-ig vett integráljaként definiáljuk.

DEFINÍCIÓ: **Munka**

Az x irányú, változó nagyságú $F(x)$ erő által az $x=a$ és $x=b$ között végzett munka

$$W = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{6.29}$$

A munka egysége joule, amennyiben az erőt newtonban, a távolságot pedig méterben mérjük. Például, ha az $F(x)=1/x^2$ erő által az $x=1$ m és $x=10$ m koordinátájú pontok között végzett munkát számítjuk ki, akkor

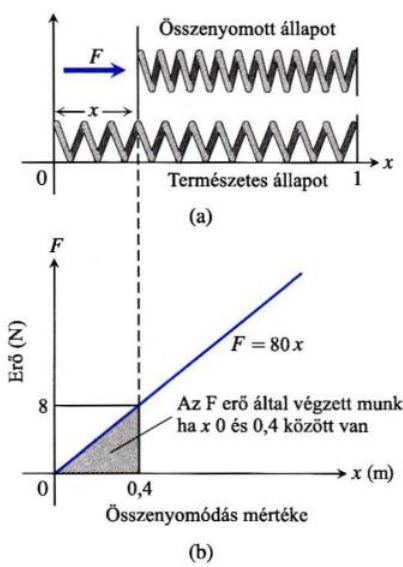
$$W = \int_1^{10} \frac{1}{x^2}\,dx = -\left[\frac{1}{x}\right]_1^{10} = -\frac{1}{10}+1 = 0{,}9\text{ J}.$$

Hooke-törvény

A **Hooke-törvény** azt állítja, hogy ha egy rugót természetes (összenyomásmentes) állapotához képest x hosszúsággal összenyomunk vagy megnyújtunk, akkor a rugóerő arányos lesz x-szel. Képletben:

$$F = kx. \tag{6.30}$$

Az erő/hosszúság dimenziójú k konstans a rugó jellemzője, és **rugóállandónak** nevezzük. A Hooke-törvény és a (6.30) egyenlet addig ad helyes eredményt, amíg az erő nem deformálja maradandó módon a rugót.



6.58. ÁBRA: A rugó összenyomásához szükséges erő az összenyomódás mértékével arányosan nő (2. példa).

2. PÉLDA: **Rugó összenyomása**

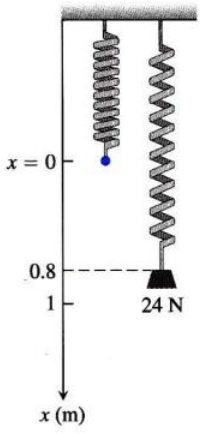
Mekkora munkát végzünk, ha egy 40 cm hosszú $k=80$ N/m rugóállandójú rugót 30 cm-esre nyomunk össze?

Megoldás: A rugót úgy ábrázoltuk, hogy essen egybe az x-tengellyel, nyugalmi állapotban a mozgatható vége legyen az origóban, rögzített vége pedig $x=0{,}4$ méternél (6.58. ábra). Ebben az esetben az erő által végzett munkát az $F=80x$ képlet alapján számíthatjuk ki. Ha a rugót az $x=0$ helyzetből indulva az $x=0{,}1$ m-ig összenyomjuk, az erőhatás a következőképpen alakul:

$$F(0) = 80\cdot 0 = 0\text{ N}, \qquad F(0{,}1) = 80\cdot 0{,}1 = 8\text{ N}.$$

Az F erő által ezen az intervallumon végzett munka:

$$W = \int_0^{0{,}1} 80x\,dx = \left[40x^2\right]_0^{0{,}1} = 0{,}4\text{J}. \qquad \text{(6.29) képlet} \qquad \square$$



6.59. ÁBRA: 24 N erő 0,8 m-nyit nyújtja meg ezt a rugót (3. példa).

3. PÉLDA: **Rugó nyújtása**

Egy rugó alapállapotban 1 m hosszú. 24 N erővel 1,8 m hosszúságúra nyújtjuk meg.

1. Határozzuk meg a rugóállandót!
2. Mekkora munkával lehet a rugót 3 m hosszúra nyújtani?
3. Mennyire nyúlik meg a rugó 45 N erő hatására?

Megoldás:

1. *A rugóállandó.* A rugóállandót a (6.30) egyenlőségből számítjuk ki. A 24 N erő 0,8 m-nyit nyújtja meg a rugót, így

$$24 = k \cdot 0{,}8, \qquad \text{(6.30) képlet}$$
$$k = 24/0{,}8 = 30 \text{ N/m}.$$

2. *A rugó két m-es megnyújtásához szükséges munka.* Legyen a rugó szabad vége nyújtatlan állapotban az $x = 0$ pontban (6.59. ábra). Így a rugó megnyúlása az x koordinátával azonosítható. A Hooke-törvény szerint tehát

$$F(x) = 30x.$$

Ez az F erő az $x = 0$ és $x = 2$ m közötti távolságon

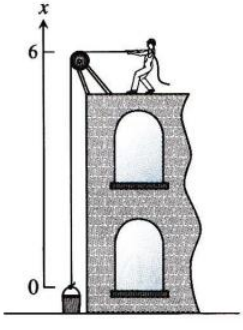
$$W = \int_0^2 30x\,dx = \left[15x^2\right]_0^2 = 60 \text{ J}$$

munkát végez.

3. *Mennyire nyúlik meg a rugó 45 N erő hatására.* Helyettesítsünk be $F = 45$-öt az $F = 30x$ egyenlőségbe. Így

$$45 = 30x, \quad \text{azaz} \quad x = 1{,}5 \text{ m}. \qquad \square$$

A munkaintegrál akkor is hasznos, amikor olyan tárgyak magasba emeléséhez szükséges munkát kell kiszámítanunk, amelyek súlya függ a magasságtól.



6.60. ÁBRA: Vödör felhúzása az épülő ház födémjére (4. példa).

4. PÉLDA: **Kötélre függesztett vödör felhúzása**

100 N súlyú vödröt kell fölhúznunk 6 m magasságba állandó sebességgel (6.60. ábra). A kötél 1 méteres darabja 1 N súlyú. Mekkora munkát kell végeznünk a vödör felhúzásához?

Megoldás: A vödör súlya állandó, így egyedül a vödör felemeléséhez 100 N $\times$ $\times$ 6 m = 600 J munkát kell végezni.

A kötél súlya függ a hosszától. Ha a kötél vége x méter távolságra van a talajtól, akkor a még felhúzandó kötélrész súlya $1 \cdot (6-x)$ N. Így a kötél felhúzásához szükséges munka:

$$\text{a kötélen végzett munka} = \int_0^6 1(6-x)\,dx = \int_0^6 (6-x)\,dx =$$
$$= \left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_0^6 = 36 - 18 = 18\text{J}.$$

A teljes munka a kötél felhúzásához végzett munka és a vödör felhúzásához végzett munka összege:

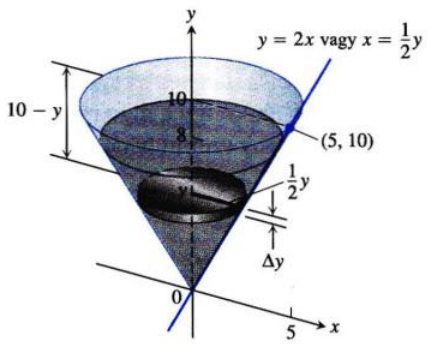
$$600 + 18 = 618 \text{ J}. \qquad \square$$

Folyadék kiszivattyúzása egy tartályból

Mennyi munkát kell végeznünk, ha egy tartályból részben vagy egészben ki akarjuk szivattyúzni a benne lévő folyadékot? Vegyük úgy, hogy egyszerre egy keskeny folyadékréteget szivattyúzunk ki, és minden egyes rétegre alkalmazzuk a $W = Fd$ összefüggést. Azután kiszámítjuk azt az integrált, ahova ez az összegzés vezet akkor, amikor a rétegek vastagságát egyre csökkentjük. Az integrál értéke függ a folyadék súlyától és a tartály méreteitől, de az integrál kiszámításának módja minden esetben ugyanaz. A következő példában ezt fogjuk bemutatni.

5. PÉLDA:

A 6.61. ábrán látható kúp alakú tartályban olivaolaj van. Az olaj szintje 1 m-re van a tartály peremétől. Az olivaolaj sűrűsége 900 kg/m^3. Mennyi munkát kell végeznünk, ha az olajat a tartály aljáig ki akarjuk szivattyúzni?



6.61. ÁBRA: Az 5. példában szereplő olivaolaj-tartály.

Megoldás: Az olajat az y-tengellyel párhuzamosan a $[0,3]$ intervallumban vékony rétegekre osztjuk. Az y és $y+\Delta y$ síkok közötti réteg térfogatára

$$\Delta V = \pi(\text{sugár})^2(\text{vastagság}) = \pi\left(\frac{1}{2}y\right)^2 \Delta y = \frac{\pi}{4}y^2\Delta y \text{ m}^3.$$

E réteg kiszivattyúzásához szükséges erő egyenlő a réteg súlyával:

$$F(y) = 900 \cdot 10 \cdot \Delta V = 9000\frac{\pi}{4}y^2\Delta y. \qquad \text{súly = sűrűség}\cdot g \times \text{térfogat}$$

Ezt a réteget $(4-y)$ m magasra kell emelni, hogy kijusson a tartályból, így a végzett munka

$$\Delta W = 9000\frac{\pi}{4}(4-y)y^2\Delta y \text{ J}.$$

Tekintettel arra, hogy a $[0,3]$ intervallum felosztásakor n ilyen réteget képeztünk, továbbá, hogy $y = y_k$ a k-adik, Δy_k vastagságú réteghez tartozó síkot jelöli, az összes réteg kiszivattyúzásához szükséges munkát a

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} 9000\frac{\pi}{4}(4-y)y^2\Delta y \text{ J}$$

Riemann-összeggel lehet közelíteni. A kiszivattyúzáskor végzendő munka ennek az összegnek a határértéke arra az esetre, amikor a felosztás normája nullához tart:

$$W = \int_0^3 9000\frac{\pi}{4}(4-y)y^2\,dy =$$

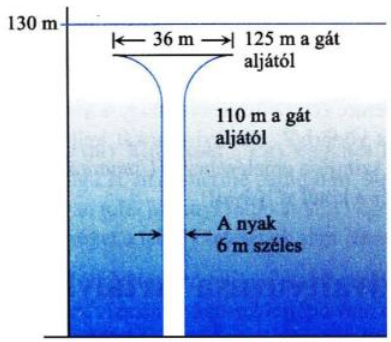
$$= 225\pi\int_0^3 (4y^2 - y^2)\,dy =$$

$$= 225\pi\left[\frac{4}{3}y^3 - \frac{y^4}{4}\right]_0^3 = 225\pi\left(36 + \frac{81}{4}\right) \approx$$

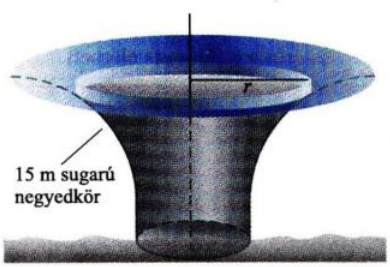
$$\approx 225\pi \cdot 16 = 11304\text{J}. \qquad \square$$

6. PÉLDA: **Víz kiszivattyúzása a vízaknából**

A vízakna egy óriási, függőleges, csőszerű lyuk, mely arra szolgál, hogy a víz magasságát a völgyzáró gát mögött a megengedett szint alatt tartsa. Az akna teteje 5 m-rel a gát szintje alatt van, maga a gát 130 m magas (6.62. ábra). Az aknából időről időre ki kell szivattyúzni a vizet, hogy megtisztítsák a felgyülemlő törmeléktől.



(a)



(b)

6.62. ÁBRA: (a) A völgyzárógát vízaknájának keresztmetszete, és (b) a vízakna felső része (6. példa).

Az akna metszetét az ábra a) része mutatja. Látjuk, hogy a vízaknának tölcsérszerű alakja van. Nyaki része 6 m átmérőjű, a tetején pedig 36 m széles. A tölcsér felső részének határvonala olyan negyedkör, amelynek sugara 15 m. Ezt az ábra b) részén láthatjuk. Az aknát úgy képezték ki, mintha síkmetszetét a szimmetriatengely körül megforgatták volna. Következésképp minden vízszintes síkmetszete kör. Számítsuk ki, mennyi munkát kell végezni, ha a vizet ki akarjuk szivattyúzni
(a) a nyakból,
(b) a tölcsérből!

Megoldás:

1. *Szivattyúzás a nyakból.* Az y és az $y+\Delta y$ síkok közötti réteg térfogata:

$$\Delta V = \pi(\text{sugár})^2(\text{a réteg vastagsága}) = \pi 3^2 \Delta y \text{ m}^3.$$

E réteg kiszivattyúzásához szükséges $F(y)$ erő egyenlő annak súlyával

$$F(y) = 10000\Delta V = 10000 \cdot 3^2 \pi \Delta y \text{ N}.$$

A víz sűrűsége 1000 kg/m^3, a nehézségi gyorsulás $g = 10$ m/s^2.

Az $F(y)$ erőnek $(125-y)$ m távolságon kell hatnia, hogy ez a réteg elérje az akna peremét, így e vízréteg kiemeléséhez szükséges munka

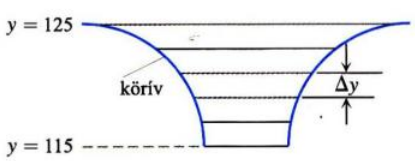
$$\Delta W = 90000\pi(125-y)\Delta y \text{ J}.$$

A nyakban tárolt teljes vízmennyiség kiszivattyúzásához szükséges munkát úgy közelíthetjük, hogy az egyes vízrétegek kiemeléséhez szükséges munkákat összeadjuk, s aztán vesszük ennek a Riemann-összegnek a határértékét, amidőn a felosztás normája tart nullához. Ez a következő integrálra vezet:

$$W = \int_0^{110} 90000\pi(125-y)\,dy =$$

$$= 90000\pi \left[125y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{110} \approx$$

$$\approx 1862650300 \text{ J}.$$



6.63. ÁBRA: A vízakna tölcsérszerű része.

2. *Szivattyúzás a tölcsérrészből.* A tölcsérrészben lévő vízmennyiség kiszivattyúzásához szükséges munkát úgy kell kiszámítanunk, hogy az $y = 110$ és $y = 125$ értékek között tekintjük a ΔV közelítő térfogatelemeket úgy, ahogy az a 6.63. ábrán látható. A réteg sugara az y magasság függvénye lesz.

A 33–34. feladatokban van kitűzve a feladat befejezése, ahol meg kell adnunk a vízakna teljes kiürítéséhez szükséges vízmennyiséget, és a teljes munkát is. □

6.6. Feladatok

Rugók

1. Rugóállandó: 1800 J munkát kell végeznünk ahhoz, hogy egy feszítetlen állapotában 2 m hosszú rugót 5 m-re nyújtsunk meg. Mekkora a rugóállandó?

2. Rugó nyújtása: Egy rugó feszítetlen állapotban 10 cm hosszú. 800 N erővel 14 cm-re nyúlik ki.

(a) Határozzuk meg a rugóállandót!

(b) Mennyi munkát kell végezni a rugó 12 cm-re nyújtásához?

(c) Mekkorára nyúlik meg a rugó, ha 1600 N erővel hatunk rá?

3. Gumiszalag nyújtása: 2 N nagyságú erő 2 cm-rel nyújt meg egy gumiszalagot. A Hooke-törvény alkalmazásával számítsuk ki, mennyit nyúlik a szalag 4 N erő hatására!

4. Rugó nyújtása: Ha 90 N nagyságú erő 1 m-rel nyújt meg egy rugót, mennyi munkát kell végeznünk a rugó 5 m-rel való megnyújtásához?

5. Metrókocsi rugója: A New Yorki Állami Metró kocsijainak ütközőrugóját 10 000 N nagyságú erő 6 cm-nyit nyomja össze (a rugók eredeti hossza 18 cm).

(a) Mekkora a rugóállandó?

(b) Mekkora a végzett munka az első centiméteren? A második centiméteren? Az eredményt kerekítve adjuk meg!

6. Fürdőszobamérleg: Egy fürdőszobamérleg rugója 1/8 cm-t nyomódik össze, amikor ráált egy 75 kg-os személy. Feltételezve, hogy a mérleg rugójára érvényes a Hooke-törvény, számítsuk ki, hogy mennyi lehet annak az embernek a tömege, aki alatt 1/4 cm-nyit nyomódik össze a rugó!

Változó erő munkája

7. Kötél felhúzása: A hegymászó felhúzza magához az 50 m hosszú mászókötelet. Mennyi munkát végez, ha a kötél egy méternyi darabjának a súlya 0,624 N.

8. Lyukas homokzsák: Egy eredetileg 70 kg-os homokzsákot állandó sebességgel húznak felfelé. Emelkedés közben a zsákból szintén állandó sebességgel csorog ki a homok. Miközben a zsák 6 m magasra jut, a homok fele elfolyik. Mekkora munkavégzés történt ez alatt az idő alatt? (Hanyagoljuk el a zsák és az emelőberendezés súlyát!)

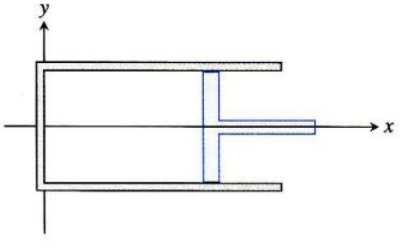
9. Sodronykötél felhúzása: Az elektromos liftet, amelynek motorja a legfelső szinten van, sodronykötél tartja. 1 méteres drótkötéldarab súlya 45 N. Amikor a kabin a földszinten tartózkodik, 60 m kábel lóg lefelé. Mire a lift a legfelső szintre ér, a kábel gyakorlatilag teljes egészében feltekeredik. Mennyi munka fordítódik csupán a kábel felhúzására?

10. Vonzóerő: Amikor az m tömegű részecske az $(x,0)$ pontban tartózkodik, k/x^2 nagyságú erő húzza vissza az origó felé. Számítsuk ki, mekkora munkavégzés történik, amíg a részecske az $x = b$ pontból eljut az $x = a$ pontba. A részecskére más erő nem hat, és $0 < a < b$!

11. Gáz összenyomása: Tegyük fel, hogy egy egyenes körhenger alakú tartályban lévő gázt dugattyúval összenyomunk. A henger alapkörének területe legyen A, a nyomás p, a térfogat V. Mutassuk meg, hogy miközben a gázt a dugattyú segítségével a (p_1, V_1) állapotból a (p_2, V_2) állapotba juttatjuk, a végzett munka

$$W = \int_{(p_1,V_1)}^{(p_2,V_2)} p\,dV$$

lesz! (*Útmutatás:* az ábrán látható koordinátarendszerben $dV = Adx$. A dugattyúra ható erő pA.)



12. (*A 11. feladat folytatása.*) A 11. feladatban szereplő integrál alkalmazásával határozzuk meg a gáz összenyomása során végzett munkát, ha $V_1 = 1$ dm^3, $V_2 = 0{,}2$ dm^3, p-re és V-re pedig $pV =$ állandó!

13. Lyukas vödör: Tegyük fel, hogy a 4. példában szereplő vödör lyukas. Tegyük fel továbbá, hogy a vödörben kezdetben 8 l víz van, s a csöpögés állandó sebességgel megy végbe. A vödör épp kiürül, mire a födém magasságába ér. Mennyi munka fordítódott csupán a víz felhúzására? (*Útmutatás:* ne törődjünk most a vödör és a kötél súlyával, és számítsuk ki, hogy a víz mekkora hányada lesz még a vödörben, amikor az x magasságban van!)

14. (*A 13. feladat folytatása.*) A 4. példában és a 13. feladatban szereplő vödröt a munkások nagyobbra cserélik, amelybe 20 l víz fér, de ugyanakkora lyuk van rajta, mint az előző vödrön, ami kiürült, mire a födémre ért. Feltételezve, hogy a víz állandó sebességgel folyik ki a vödörből, mennyi munkát kell végezni csak a víznek a födém szintjére emeléséhez? (*Útmutatás:* ne törődjünk most a vödör és a kötél súlyával!)

Folyadék kiszivattyúzása tartályból

A víz súlya

A víz (és általában a testek) súlya a Föld alakja és gravitációs terének egyenetlenségei miatt a Föld különböző pontjain eltérő lehet. Az eltérés a 0,5%-ot is elérheti.

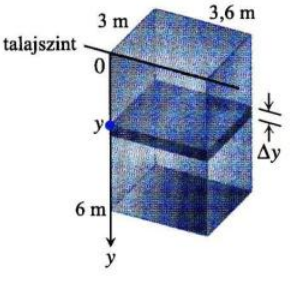
15. Víz kiszivattyúzása: Az ábrán látható, téglatest alakú tartály esővíztárolásra szolgál. 1 l víz súlyát vegyük 10 N-nak.

(a) Mennyi munkát kell végezni, ha a teli tartályból teljes egészében ki akarjuk szivattyúzni a vizet?

(b) Mennyi ideig fog tartani a teli tartály kiürítése egy 500 wattos motorral?

(c) Mutassuk meg, hogy a (b) részben említett motor 25 perc alatt több mint félig kiüríti a tartályt!

(d) A víz súlya. Mi a válasz a feladat (a) és (b) részére, ha 1 l víznek, 9,95 N, illetve 10,05 N a súlya?



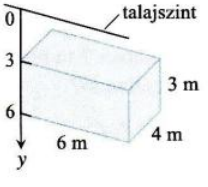
16. Ciszterna kiürítése: Az ábrán látható téglatest alakú ciszterna (esővíztároló) teteje 3 m-rel a talajszint alatt van. A vízzel teli ciszternából ellenőrzés végett szivattyúval ki akarják emelni a vizet.

(a) Mennyi munkát kell végezni a ciszterna kiürítéséhez?

(b) Mennyi ideig tart a ciszterna kiürítése egy 500 wattos szivattyúval?

(c) A (b) részben említett szivattyút mennyi ideig kell járatni, hogy a ciszterna félig kiürüljön?

(d) A víz súlya. Mi a válasz a feladat (a)–(c) kérdéseire, ha 1 l víznek, 9,95 N, illetve 10,05 N a súlya?

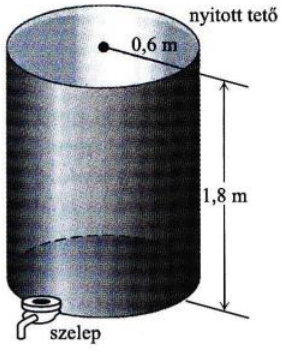


17. Olajszivattyúzás: Mennyi munkát kell végeznünk, ha az 5. példában szereplő tartályból a tartály fedőlapjának magasságáig akarjuk kiszivattyúzni az olajat és a tartály teljesen tele van?

18. Félig telt tartály kiürítése: Tegyük fel, hogy az 5. példában szereplő tartály csak félig van tele. Mennyi munkát kell végeznünk, ha a maradék olajat a tartály fölső szélétől számítva 1,2 m magasra akarjuk szivattyúzni?

19. Tartály kiürítése: Egy egyenes körhenger alakú tartály magassága 10 m, átmérője pedig 6 m. 900 kg/m^3 sűrűségű kerozinnal van tele. Mennyi munkát kell végezni, ha a teljes kerozinmennyiséget a tartály tetejének szintjére akarjuk szivattyúzni?

20. Az ábrán látható henger alakú tartályt egy tóból töltik meg, amelynek vízszintje 5 m-rel lejjebb van, mint a tartály alja. A feltöltést kétféleképpen végezhetik el. A tömlőt vagy a tartály alján lévő szelepre erősítik vagy a fölső peremére helyezik. Melyik a gyorsabb eljárás? Válaszunkat indokoljuk!

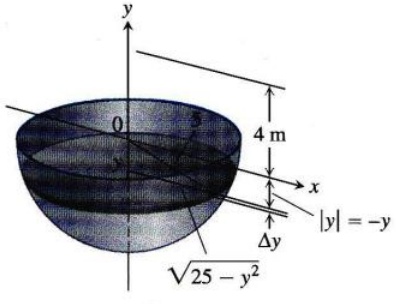


21. (a) Tejszivattyúzás. Tegyük fel, hogy az 5. példában szereplő kúpos tartály tejet tartalmaz olivaolaj helyett (a tej sűrűsége 1028 kg/m^3). Mennyi munkát kell végezni, ha a tartály tartalmát a tartály peremének magasságába szivattyúzzuk?

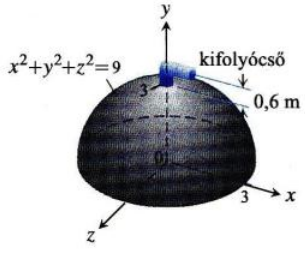
(b) Olajszivattyúzás. Mennyi munkát kell végezni akkor, ha az olajat 1 m-rel a tartály pereme fölé szivattyúzzuk?

22. Tengervíz szivattyúzása: Egy óriási acéltartály belső felületének megtervezéséhez az $y = x^2$, $0 \le x \le 4$ görbét megforgatjuk az y-tengely körül. Az elkészült tartályt, amelynek méreteit méterben adtuk meg, feltöltik tengervízzel. A tengervíz 1 m^3-ének súlya 10 000 N. Mennyi munkát kell végezni, ha a tartályban lévő vízmennyiséget a tartály felső peremének szintjére akarjuk emelni?

23. Víztároló kiürítése: Félgömb alakú tartályon mutatjuk be, hogyan kell kiszámítani a tartály kiürítéséhez szükséges munkát azokban az esetekben, amikor a tartály szélessége függőleges irányban változik, de szimmetrikus a függőleges tengelyre. Az ábra segítségével határozzuk meg, mennyi munkát kell végezni, ha az 5 m sugarú, félgömb alakú, teli tartályból a vizet a 4 m-rel a tartály pereme fölé kell szivattyúzni! 1 m^3 víz súlya 9800 N.



24. Meg kell bíznunk egy céget az itt látható tartály kiürítésével és megjavításával. A tartály félgömb alakú, sugara 3 m és 700 kg/m^3 sűrűségű benzinnel van tele. Az egyik vállalkozó azt mondja, hogy 1 J munkát fél centért végez el. Határozzuk meg, mennyi munkát kell végezni, ha a tartály kivezető csöve 60 cm-rel a tartály felső szintje felett van. Ha 5000 dollárunk van a munkára, szerződést köthetünk-e az említett vállalkozóval?



Munka és mozgási energia

25. Mozgási energia: Ha a változó nagyságú $F(x)$ erő az m tömegpontot az x-tengely x_1 pontjából annak x_2 pontjába mozgatja, akkor a test v sebességét dx/dt alakban írhatjuk fel (t az időt jelenti). Newton 2. törvényét ($F = m(dv/dt)$) és a

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

láncszabályt felhasználva mutassuk meg, hogy miközben a testet az x_1 pontból az x_2 pontba mozgatja, az erő

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

hasznos munkát végez, ahol v_1 és v_2 a test x_1, illetve x_2 pontbeli sebessége! A fizikában az $(1/2)mv^2$ kifejezést az m tömegű és v sebességű test *mozgási energiájának* nevezzük. Ebben az esetben *a végzett munka egyenlő a mozgási energia megváltozásával*, s ilyenkor a munkát kiszámolhatjuk a mozgási energia megváltozásából.

A 26–32. feladatokban alkalmazzuk a 25. feladat eredményét!

26. Tenisz: Egy 56,7 grammos teniszlabdával egy játékos 190 km/h sebességű szervát ad. Mekkora munkát végzett?

27. Baseball: Mekkora munkát végez a baseballjátékos, amikor az 142 grammos labdát 150 km/h sebességgel üti el?

28. Golf: A 45,4 grammos golflabdát a játékos 304 km/h sebességgel üti el. Mekkora munkát végez?

29. Tenisz: 1990-ben Pete Sampras a U.S. Open döntőjében ütött egy 210 km/h sebességű szervát. Mekkora munkát végzett Pete azzal, hogy a 56,7 grammos labdát ekkora sebességre gyorsította?

30. Amerikai futball: Egy hátvéd 97 km/h sebességgel hajítja el a 411 grammos labdát. Mekkora munkát végez?

31. Szoftball: Mekkora munkavégzés árán lehet a 184,3 grammos labdát 140 km/h sebességgel elhajítani?

32. Az adogatógépbe egy 56,7 grammos labdát helyezünk és nyílását függőlegesen felfelé irányítjuk. A gépet működtető rugó rugóállandója $k = 30$ N/m. A rugót 5 cm-nyit nyomja össze a szerkezet. Milyen magasra száll a labda?

33. A vízakna tölcséres részének kiszivattyúzása: (*A 6. példa folytatása.*)

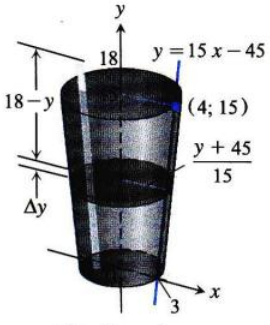
(a) Határozzuk meg a 6. példában szereplő vízakna (tölcséres részén) síkmetszetének átmérőjét mint a gát aljától mért magasság függvényét!

(b) Írjuk fel egy réteg ΔV térfogatát az akna tölcséres részére!

(c) Egy alkalmas integrálképletet felállítva számítsuk ki mennyi munkával lehet kiszivattyúzni a vizet az akna tölcséres részéből!

34. A vízakna tölcséres részének kiszivattyúzása: (*A 33. feladat folytatása.*) Állapítsuk meg, mennyi munkával lehet teljes egészében kiüríteni a vízaknát!

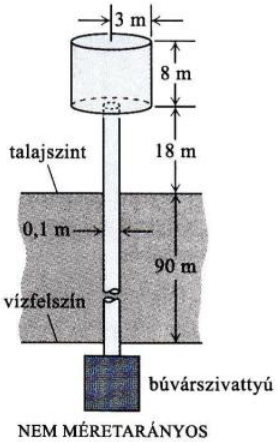
35. Turmix: Az itt látható csonkakúp alakú pohár eperturmixszal van tele. (1 dl turmix tömege kb. 120 g.) A pohár 15 cm magas, alul 6, felül 8 cm az átmérője, a szívószál 18 cm hosszú. Mennyi munkával lehet kiszívni a turmixot a pohárból a szívószálon keresztül?



Méretek cm-ben

36. Víztorony:

Egy város a vízellátás javítása érdekében új kutat akar furatni. A város mérnöke a megfelelő víznyomást egy víztorony révén szeretné biztosítani, s meg is tervezi az ábrán látható rendszert. A vizet 90 méteres mélységből, 10 cm átmérőjű csövön keresztül szivattyúzzák a 6 m átmérőjű és 8 m magas hengeres víztartályba. A tartály alja 18 m-rel van a talajszint felett. A szivattyúzást egy 2000 wattos szivattyúval végzik. Mennyi idő alatt telik meg a tartály? (A cső feltöltéséhez szükséges időt is vegyük figyelembe!)



NEM MÉRETARÁNYOS

37. Mesterséges hold pályára állítása: A Föld gravitációs vonzóereje függ a test Föld középpontjától mért r távolságától és a test m tömegétől:

$$F(r) = \frac{mMG}{r^2}.$$

Itt $M = 5{,}975 \times 10^{24}$ kg a Föld tömege, $G = 6{,}6720 \times 10^{-11}$ $\mathrm{N \cdot m^2 kg^{-2}}$ a gravitációs állandó, r-et pedig méterben mérjük. Ha egy 1000 kg tömegű mesterséges holdat a Föld középpontjától 35 780 km távolságra lévő pályára akarjuk állítani, akkor

$$W = \int_{6370000}^{35780000} \frac{1000MG}{r^2}\,dr \text{ joule}$$

munkát kell végeznünk. Számítsuk ki ennek az integrálnak az értékét! Az integrál alsó határa a Föld sugara a kilövés helyén. (Ez a számítás nem veszi figyelembe a hordozórakéta felemeléséhez szükséges munkát, sem a mesterséges hold pályamenti sebességének eléréséhez szükséges energiát.)

38. Elektronok együtt tartásához szükséges energia: Két egymástól r méter távolságra lévő elektron

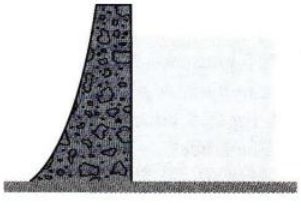
$$F = \frac{23 \times 10^{-29}}{r^2}\ \mathrm{N}$$

erővel taszítja egymást.

(a) Tegyük fel, hogy az elektronok egyike rögzítve van az x-tengely $(1,0)$ pontjában (a hosszúságegység a méter). Mennyi munkát kell végeznünk, ha a másik elektront $(-1,0)$ pontból az origóba akarjuk vinni?

(b) Tegyük fel, hogy az egyik elektron az x-tengely $(1,0)$ pontjában, a másik a $(-1,0)$ pontban van rögzítve. Mennyi munkát kell végeznünk, ha egy harmadik elektront az x-tengely mentén az $(5,0)$ pontból a $(3,0)$ pontba akarunk eljuttatni?

6.7. A folyadék nyomása és a folyadékra ható erők



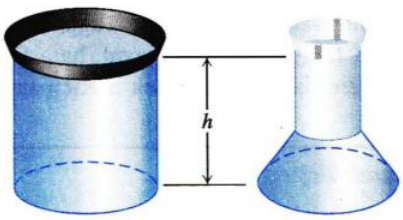
6.64. ÁBRA: A növekvő víznyomásnak a gát csak úgy képes ellenállni, ha lefelé egyre szélesebb.

A völgyzáró gátak alul szélesebbek mint felül (6.64. ábra), mivel a víz nyomása lefelé egyre növekszik. A gát valamely pontjára ható nyomás csupán a pont vízfelszíntől mért távolságától függ, és nem függ például attól, hogy a gát fala mennyire lejt az adott pontban. A felszín alatt h mélységben a nyomás mindig ρgh, ahol ρ a folyadék sűrűsége, g pedig a nehézségi gyorsulás. Ezt a nyomást a folyadék hidrosztatikai nyomásának nevezzük.

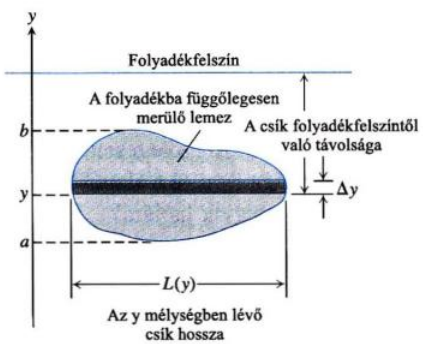
Hidrosztatikai nyomás

Ha a folyadék nyugalomban van, a h mélységben ható p nyomás értéke

$$p = \rho gh. \qquad (6.31)$$



6.65. ÁBRA: Ezekben a tartályokban ugyanolyan magasan áll a folyadék, s az alaplapjuk is ugyanolyan méretű. Ezért alaplapjukra ugyanakkora erővel hat a folyadék. Alakjuknak ebből a szempontból semmi jelentősége nincs.



6.66. ÁBRA: A folyadék a keskeny csíkra körülbelül
$\Delta F =$ nyomás $\times$ felület $=$
$= \rho g$(a csík szélessége) $\times L(y)\Delta y$
nagyságú erőhatást gyakorol.

Néhány anyag sűrűsége kg/m^3-ben

benzin	700
higany	13546
tej	1030
sűrű szirup	1400
étolaj	910
tengervíz	1025
víz	998

Ebben a szakaszban arra használjuk a $p = \rho gh$ összefüggést, hogy kiszámítsuk: mekkora erő hat egy tartály vízszintes vagy függőleges falának egészére vagy egy részére.

A folyadék által kifejtett erő állandó nyomás esetén

Egy folyadékot tartalmazó tartály vízszintes alaplapjára ható erőt úgy számítjuk ki, hogy a lap területét megszorozzuk a nyomás értékével (6.65. ábra). Ha F az erő, p a nyomás és A a terület, akkor

$$\begin{aligned} F &= \text{területegységre ható erő} \times \text{terület} = \\ &= \text{nyomás} \times \text{terület} = pA = \\ &= \rho ghA. \end{aligned}$$

Adott mélységben elhelyezett felületre a folyadék által gyakorolt erő

$$F = pA = \rho ghA. \qquad (6.32)$$

Például, ha a víz sűrűsége 1000 kg/m^3, akkor a 2 m mélységű 10 m $\times$ 25 m-es uszoda alját

$$F = \rho ghA = 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2\text{m} \cdot 250\text{m}^2 = 5000000\text{N} = 5000\text{kN}$$

erővel nyomja a benne lévő víz.

Ha egy sík lemez *vízszintesen* merül a folyadékba, akkor – az uszoda aljára ható erőhöz hasonlóan – annak felfelé néző felületére a folyadék nyomásának köszönhetően ható erőt a (6.32) összefüggés segítségével számoljuk ki. Ha a lemez *függőlegesen* merül a folyadékba, akkor a (6.32) összefüggés nem használható, mert a nyomás is és a folyadék magassága is változik. Ilyenkor a lemezt sok keskeny, vízszintes sávra vagy csíkra osztjuk, elkészítjük a megfelelő Riemann-összegeket, amelyek határértéke meg fogja adni a függőleges lemezre ható erőt. Íme az eljárás!

A folyadék által kifejtett erő változó nagyságú nyomás esetén

A ρ sűrűségű folyadékba merítsünk függőlegesen egy lemezt! Szeretnénk kiszámítani a lemez egyik oldalára ható erő nagyságát. Ábrázoljuk a lemezt az xy koordinátasíkban egy olyan tartományként, amely az $y = a$ és $y = b$ egyenesek között fekszik (6.66. ábra)! Készítsük el a szokásos módon az $[a,b]$ intervallum egy felosztását, s képzeletben vágjuk fel a lemezt vízszintes csíkokra az osztópontokon átmenő, s az y-tengelyre merőleges síkokkal! Az y és $y+\Delta y$ között húzódó, Δy szélességű csík hossza legyen $L(y)$! Tegyük fel, hogy $L(y)$ az y folytonos függvénye!

A csík aljától a tetejéig a nyomás változik. De ha a csík elég keskeny, akkor mindenütt közel esik a csík alján mért értékhez. Ezért a folyadék a csík egyik oldalára

$$\begin{aligned} \Delta F &= (\text{a csík alján mért nyomás}) \times (\text{terület}) = \\ &= \rho g(\text{a csík aljának távolsága a folyadékfelszíntől}) \cdot L(y)\Delta y \end{aligned}$$

nagyságú erőt fejt ki. Tegyük fel, hogy az $[a,b]$ intervallum felosztásához n számú csík tartozik, és y_k az $L(y_k)$ hosszúságú és Δy_k szélességű csík alsó éle. A lemez egészére ható erőt az egyes csíkokra ható erők összegzésével közelíthetjük. Így az

$$F \approx \sum_{k=1}^{n} (\rho g(\text{a csík aljának távolsága a folyadékfelszíntől})_k \cdot L(y_k))\Delta y_k \qquad (6.33)$$

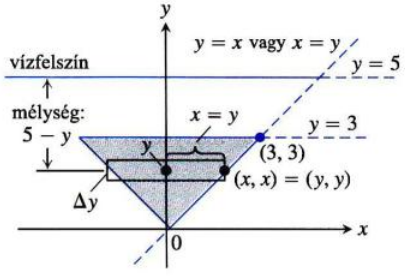
Riemann-összeget kapjuk. A (6.33) az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvényre vonatkozó Riemann-összeg, ezért azt várjuk, hogy a közelítés javul, ha a felosztás normájával nullához tartunk. A lemezre ható erő ezeknek a Riemann-összegeknek a határértéke.

A folyadék által egy függőleges lemezre kifejtett erő

Tegyük fel, hogy a ρ sűrűségű folyadékba függőlegesen merülő lemez az $y=a$ és $y=b$ egyenesek között fekszik! Legyen $L(y)$ a lemez y mélységben lévő csíkjának vízszintes hosszúsága! Ekkor a folyadék a lemez egyik oldalára

$$F=\int_a^b \rho g(\text{a csík aljának távolsága a folyadékfelszíntől})\cdot L(y)dy \quad (6.34)$$

nagyságú erőt fejt ki.



6.67. ÁBRA: Az 1. példában megadott, függőlegesen a folyadékba merített lemezre ható erő kiszámításához az ábrán láthatóhoz hasonló koordinátarendszert célszerű felvenni.

1. PÉLDA: A folyadékban ható erő kiszámítása

Egyenlő szárú, derékszögű háromszög alakú lemez merül függőlegesen, alapjával felfelé a vízbe. A háromszög alapja 6 m, magassága 3 m. Az alapél 2 m-re van a víz felszínétől. Mekkora erőt fejt ki a víz a lemez egyik lapjára?

Megoldás: A koordinátarendszert úgy vesszük fel, hogy origója essen egybe a háromszöglap alsó csúcspontjával, függőleges tengelye pedig a háromszöglap szimmetriatengelyével (6.67. ábra). Így a vízfelszín az $y=5$, a háromszög alapéle pedig az $y=3$ egyenlettel adható meg. A lemez jobb oldali csúcspontja az $y=x$ egyenesen fekszik, koordinátája a $(3,3)$ pont. Az y szinten fekvő keskeny sáv hossza:

$$L(y)=2x=2y.$$

Ez a sáv $(5-y)$ mélyen van a felszín alatt. Ezért a (6.34) képlettel a víz a lemez egyik oldalára

$$F=\int_a^b \rho g(\text{a sáv távolsága a vízfelszíntől})\cdot L(y)\,dy=$$

$$=\int_1^3 1000\cdot 10(5-y)2y\,dy=20000\int_0^3 (5y-y^2)\,dy=$$

$$=20000\left[\frac{5}{2}y^2-\frac{y^3}{3}\right]_0^3=270\text{ kN}$$

erővel hat. □

A folyadék által kifejtett erő és a súlypont

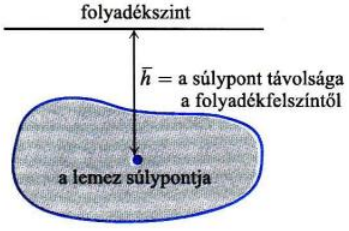
Ha ismerjük egy függőlegesen folyadékba merített lemez súlypontját (6.68. ábra), akkor egyszerűbben is meghatározhatjuk a lemez egyik oldalára ható erő nagyságát. A (6.34) képletből

$$F=\int_a^b \rho g(\text{a sáv távolsága a vízfelszíntől})\cdot L(y)\,dy=$$

$$=\rho g\int_a^b (\text{a sáv távolsága a vízfelszíntől})\cdot L(y)\,dy=$$

$$=(\rho g)\times\begin{pmatrix}\text{a lemeznek a vízfelszín egyenesére vonat-}\\ \text{koztatott tehetetlenségi nyomatéka}\end{pmatrix}=$$

$$=(\rho g)\times\begin{pmatrix}\text{a lemez súlypontjának}\\ \text{távolsága a vízfelszíntől}\end{pmatrix}\times(\text{a lemez területe}).$$



6.68. ÁBRA: A lemez egyik oldalára ható erő: $\rho\cdot g\cdot\bar{h}\cdot$ a lemez területe.

A folyadék által kifejtett erő és a súlypont

A ρ sűrűségű folyadékba merülő lemez egyik oldalára ható erő a sűrűségnek, a gravitációs gyorsulásnak, a lemez súlypontja folyadékfelszíntől való távolságának és a lemez területének a szorzata:

$$F = \rho g \bar{h} A. \tag{6.35}$$

2. PÉLDA: **A folyadék által kifejtett erő meghatározása a (6.35) képlet alapján**

A (6.35) képlet alapján határozzuk meg az 1. példában szereplő lemezre ható erőt!

Megoldás: A háromszög súlypontja (6.67. ábra) az y-tengelyen, az alap és a csúcs távolságának harmadánál van, azaz $\bar{h} = 3$. A háromszög területe

$$A = \frac{1}{2}(\text{alap})(\text{magasság}) = \frac{1}{2}6 \cdot 3 = 9.$$

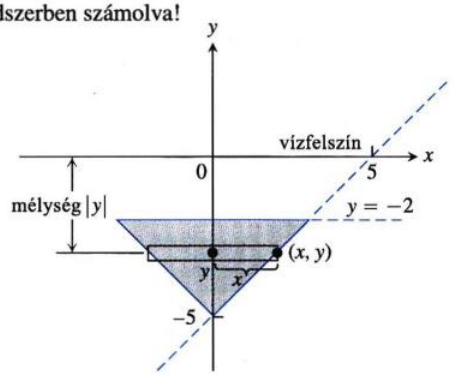
Ezért

$$F = \rho g \bar{h} A = (1000)(10)(3)(9) = 270\text{kN}. \qquad \square$$

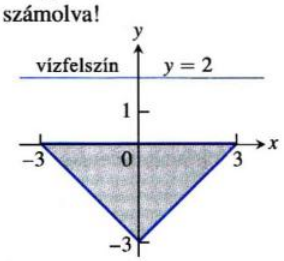
6.7. Feladatok

A következő feladatokban szereplő folyadékok sűrűségértékeit a 129. oldalon található táblázatban találjuk meg.

1. Háromszög alakú lemez: Határozzuk meg az 1. példában szereplő lemez egyik oldalára ható erőt az itt látható koordinátarendszerben számolva!



2. Háromszög alakú lemez: Határozzuk meg az 1. példában szereplő lemez egyik oldalára ható erőt az itt látható koordinátarendszerben számolva!



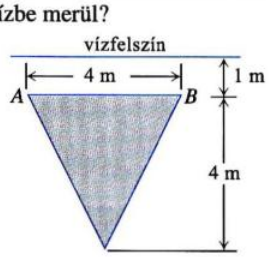
3. Háromszög alakú lemez: Az 1. példában szereplő lemezt még 2 m-rel lejjebb süllyesztjük. Mekkora lesz most a lemez egyik oldalára a folyadék által kifejtett erő?

4. Háromszög alakú lemez: Az 1. példában szereplő lemezt feljebb húzzuk úgy, hogy felső éle a vízfelszín magasságában legyen. Mekkora lesz most a lemez egyik oldalára a folyadék által kifejtett erő?

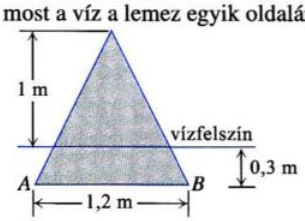
5. Háromszög alakú lemez: Az itt látható, háromszög alakú lemez függőlegesen 1 m mélyen merül egy tó vízszintje alá.

(a) Határozzuk meg a lemez egyik oldalára ható erőt!

(b) Mekkora lesz ez az erő, ha a lemez nem édesvízbe, hanem tengervízbe merül?



6. Elforgatott háromszöglemez: Az 5. feladatban szereplő lemezt 180°-kal elforgatjuk a AB egyenes körül. Így, amint ez az ábrán is látható, a lemez egy része kiáll a vízből. Mekkora erőhatást fejt ki most a víz a lemez egyik oldalára?



7. A New England akvárium: A bostoni New England akvárium tartályainak üvegablakai 158 cm szélesek, felső élük 1,2, alsó élük pedig 84 cm-re van a vízszinttől. Mekkora erőhatás éri az üvegfelületet? (Az üveg 1,9 cm vastag, az akvárium falai pedig 10 cm-nyit kilógnak a vízből, nehogy a halak kiugorjanak.)

8. Haltartály: 1 m magas, 1 m × 2 m alapterületű haltartályban 80 cm víz van.

(a) Határozzuk meg a tartály oldallapjaira és aljára ható erőt!

(b) Mekkora erő hat a tartály aljára akkor, ha a tartályt lefedjük és oldalára fordítjuk úgy, hogy valamelyik négyzet alakú lapja legyen alul? (A víz nem folyik ki.)

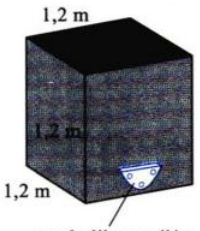
9. Félkör alakú lemez: 2 m átmérőjű félkör alakú lemezt merítünk függőlegesen a vízbe úgy, hogy az átmérője épp a vízfelszínen legyen. Számítsuk ki, mekkora erőt fejt ki a víz a lemez egyik oldalára!

10. A tejszállító teherautónak 2 m átmérőjű, egyenes körhenger alakú tartálya van (a henger természetesen el van fektetve). Mekkora erőt fejt ki a tej a tartály két végére akkor, ha a tartály félig van tejjel?

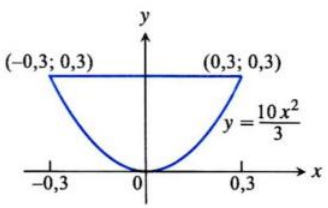
11. Az ábrán látható, kocka alakú fémtartály alján parabola alakú leeresztő nyílás van, amely 800 N erőhatásnak képes ellenállni. A tartályban 800 kg/m^3 sűrűségű folyadékot fognak tárolni.

(a) Mekkora erő hat a nyílásra, amikor a folyadékszint 0,6 m?

(b) Legfeljebb milyen magas lehet a tartályban a folyadékszint a retesz megrepedésének veszélye nélkül?



parabolikus nyílás

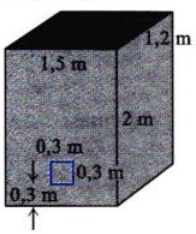


a nyílás kinagyítva

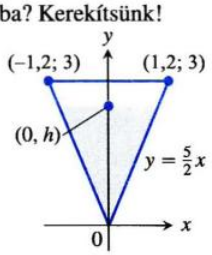
12. Az itt látható, téglatest alakú tartály alján 30 cm × 30 cm nagyságú ablak van 30 cm-re a tartály aljától. Az ablak 1560 N erőhatásra van méretezve.

(a) Mekkora erő hat az ablakra, amikor 0,9 m folyadék van a tartályban?

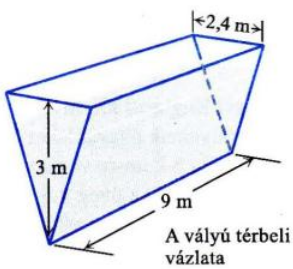
(b) Mennyire lehet feltölteni a tartályt, hogy ne lépjük túl az ablak teherbíróképességét?



13. Az itt látható vályú két vége 33333 N erőhatásnak képes ellenállni. Hány köbméter vizet tölthetünk biztonságosan a tartályba? Kerekítsünk!



A vályú véglapja



A vályú térbeli vázlata

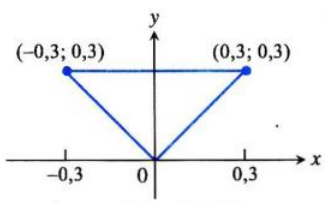
14. Az alább látható, téglatest alakú medencébe 27 m^3/óra sebességgel folyik be a víz.

(a) Számítsuk ki, mekkora erő hat a háromszög alakú vízzáró reteszre 9 órával a feltöltés megkezdése után!

(b) A retesz 2600 N erőhatásnak képes ellenállni. Mennyire lehet feltölteni a medencét a retesz beszakadásának veszélye nélkül?



Háromszög alakú retesz

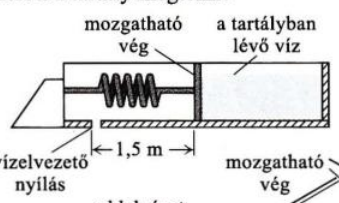


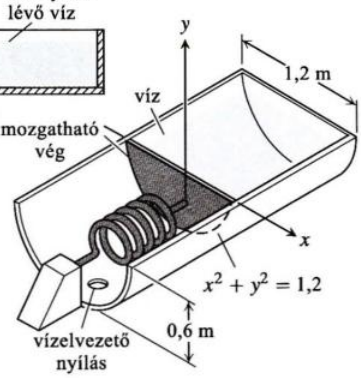
A retesz kinagyított képe

15. a hosszúságú és b szélességű, téglalap alakú lemez merül függőlegesen ρ sűrűségű vízbe úgy, hogy hosszabbik oldala párhuzamos a vízfelszínnel. Határozzuk meg a lemezre ható nyomás átlagértékét! Eredményünket értelmezzük!

16. (*A 15. feladat folytatása.*) Mutassuk meg, hogy a lemez egyik oldalára a folyadék által kifejtett erő egyenlő a nyomás átlagértékének és a lemez felszínének a szorzatával!

17. Az ábrán látható tartályba vizet engedünk. A tartály metszete egy 1,2 m átmérőjű félkör. A tartály egyik vége mozgatható, de a mozgó véghez kívülről egy rugó van rögzítve. A rugóállandó 1000 N/m. Eléri-e a mozgatható vég a nyílást, még mielőtt a tartály megtelik?





18. Itatóvályú: Egy itatóvályú véglapjai 0,9 m oldalhosszúságú négyzetek.

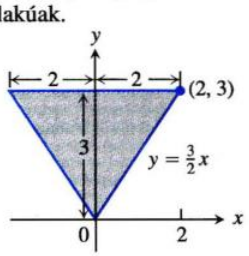
(a) Számítsuk ki, mekkora erő hat a véglapokra, amikor a vályú tele van vízzel!

(b) Mennyivel kell csökkenteni a vízszintet, ha a véglapokra ható erőt 25%-kal akarjuk csökkenteni?

19. Tejesdoboz: A téglatest alakú tejesdoboz alapja 5,5 cm × × 9 cm, és magassága 19,5 cm. Mekkora erő hat az egyes oldallapokra, amikor a doboz tele van?

20. Olajosdoboz: Az étolajosdoboz alapjának szabványos mérete 14,5 cm × 9 cm, magassága 25 cm. Mekkora erő hat az egyes lapokra, amikor a bödön tele van?

21. Tartály: Egy tartály véglapjai az ábrán látható, egyenlő szárú háromszög alakúak.

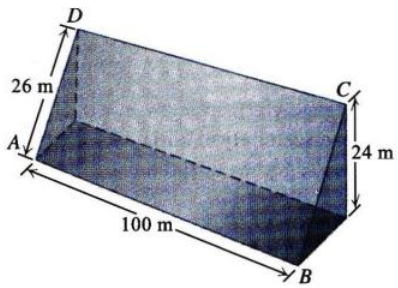


(a) Számítsuk ki, mekkora erő hat a véglapokra, amikor a tartály tele van vízzel!

(b) Mennyivel kell csökkenteni a vízszintet, ha a véglapokra ható erőt a felére akarjuk csökkenteni?

(c) Számít-e valamit, hogy milyen hosszú a tartály? Válaszunkat indokoljuk!

22. Egy gát víz felőli oldala téglalap alakú, melynek csúcsait jelöljük A-val, B-vel, C-vel és D-vel. $AB = CD = 100$ m, $AD = BC = 26$ m. A víz felőli oldal nem függőleges, hanem a mellékelt ábrán látható dőlése van, azaz a gát alul 24 m-rel szélesebb mint felül. Számítsuk ki, mekkora erőt fejt ki a víznyomás a gátra, ha a vízszint a gát tetejénél van!



6. fejezet Áttekintő kérdések

1. Hogyan értelmezzük és hogyan számítjuk ki egy test térfogatát a felszeletelős módszerrel? Mutassunk egy példát!

2. Hogyan származtathatjuk a térfogat kiszámítására alkalmazott korongmódszert és gyűrűmódszert a felszeletelős módszerből? Adjunk meg egy-egy példát mindhárom térfogatszámítási módszerre!

3. Írjuk le a hengerhéj-módszert! Adjunk rá példát!

4. Hogyan értelmezzük az $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$ paraméteres sima görbe ívhosszát? Mi köze a simaságnak az ívhosszhoz? Mi egyebet kell tudnunk a paraméteres görbéről ahhoz, hogy kiszámíthassuk az ívhosszát? Adjunk példát!

5. Hogyan számítjuk ki egy zárt intervallumon sima függvény grafikonjának hosszát? Mutassunk rá példát! Mit tudunk mondani az olyan függvényekről, amelyeknek első deriváltja nem folytonos?

6. Mi a súlypont?

7. Hogyan határozzuk meg egy vékony, egyenes pálca vagy szalag súlypontját? Mutassunk egy példát! Ha az anyag sűrűsége állandó, nyomban meg tudjuk mondani a súlypont helyét! Hol van?

8. Hogyan határozzuk meg egy vékony síklemez súlypontját? Mutassunk egy példát!

9. Hogyan értelmezzük és számítjuk ki az $y = f(x)$, $a \le x \le b$ sima függvény grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával előállított felület felszínét? S ha az y-tengely körül forgatunk? Mutassunk példákat!

10. Milyen feltételek mellett tudjuk meghatározni annak a forgásfelületnek a felszínét, amelyet az $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$ görbe x-tengely körüli forgatása generál? S ha az y-tengely a forgástengely? Adjunk meg példákat!

11. Mit mond ki Papposz két tétele? Mutassunk példát, hogyan lehet felhasználni ezeket a tételeket felszín- és térfogatszámításra illetve a súlypont meghatározására!

12. Hogyan értelmezzük és hogyan számítjuk ki az x-tengely egy szakaszán ható, x irányú, változó nagyságú erő által végzett munkát? Hogyan számítjuk ki egy folyadékkal teli tartály kiürítéséhez szükséges munkát? Adjunk meg példákat!

13. Hogyan számítjuk ki a folyadék által az edény oldalfalára gyakorolt erőt? Mutassunk rá egy példát!

6. fejezet Gyakorló feladatok

Térfogat

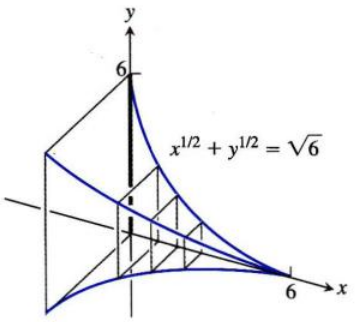
Az 1–16. feladatokban a testek térfogatát kell meghatározni.

1. A test az x-tengelyre merőleges $x = 0$ és $x = 1$ síkok között fekszik. E két sík közé eső, az x-tengelyre merőleges síkmetszetei olyan körlapok, amelyek átmérője az $y = x^2$ parabola és az $y = \sqrt{x}$ parabola között van.

2. A test alaplapja egy első síknegyedbeli tartomány, amelyet az $y = x$ egyenes és az $y = 2\sqrt{x}$ parabola határol. A test x-tengelyre merőleges síkmetszetei egyenlő oldalú háromszögek, amelyek egyik csúcsa az egyenesen, másik csúcsa pedig a görbén van.

3. A test az x-tengelyre merőleges $x = \pi/4$ és $x = 5\pi/4$ síkok között fekszik. Síkmetszetei olyan körlapok, amelyek átmérőjének végpontja az $y = 2\cos x$, illetve az $y = 2\sin x$ görbéken van rajta.

4. A test az x-tengelyre merőleges $x = 0$ és $x = 6$ síkok között fekszik. Síkmetszetei olyan négyzetek, amelyek egyik oldalélei az x-tengely és az $x^{1/2} + y^{1/2} = \sqrt{6}$ görbe között húzódnak.



5. A test az x-tengelyre merőleges $x = 0$ és $x = 4$ síkok között fekszik. Síkmetszetei olyan körlapok, amelyek átmérője az $x^2 = 4y$ és az $y^2 = 4x$ görbék között halad.

6. A test alaplapja az xy-síkon az $y^2 = 4x$ és az $x = 1$ egyenes által határolt tartomány. Az x-tengelyre merőleges valamennyi síkmetszete egyenlő oldalú háromszög, mely háromszögek egyik oldala az xy-síkban van. (A háromszögek az xy-síknak ugyanazon az oldalán fekszenek.)

7. Számítsuk ki annak a testnek a térfogatát, amely az x-tengely, az $y = 3x^4$ görbe, az $x = 1$ egyenes és az $x = -1$ egyenes által határolt tartomány (a) x-tengely, (b) y-tengely, (c) $x = 1$ egyenes, (d) $y = 3$ egyenes körüli forgatásával áll elő!

8. Számítsuk ki annak a testnek a térfogatát, amely az $y = 4/x^3$ görbe, az $x = 1$ egyenes és az $y = 1/2$ egyenes által határolt „háromszögtartomány" (a) x-tengely, (b) y-tengely, (c) $x = 2$ egyenes, (d) $y = 4$ egyenes körüli forgatásával áll elő!

9. Számítsuk ki annak a testnek a térfogatát, amely az $x = y^2 + 1$ parabola és az $x = 5$ egyenes által határolt tartomány (a) x-tengely, (b) y-tengely, (c) $x = 5$ egyenes körüli forgatásával áll elő!

10. Számítsuk ki annak a testnek a térfogatát, amely az $y^2 = 4x$ parabola és az $y = x$ egyenes által határolt tartomány (a) x-tengely, (b) y-tengely, (c) $x = 4$ egyenes, (d) $y = 4$ egyenes körüli forgatásával áll elő!

11. Határozzuk meg annak a testnek a térfogatát, amely úgy keletkezik, hogy az x-tengely, az $x = \pi/3$ egyenes és az $y = \operatorname{tg} x$ görbe által határolt, első síknegyedbeli „háromszögtartományt" megforgatjuk az x-tengely körül!

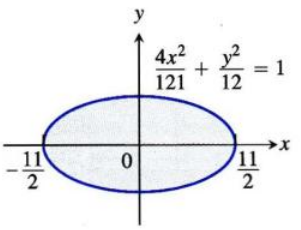
12. Számítsuk ki annak a testnek az térfogatát, amely az $y = \sin x$ görbe és az $x = 0$, $x = \pi$, $y = 2$ egyenesek $y = 2$ körüli megforgatásával állítható elő!

13. Számítsuk ki annak a testnek az térfogatát, amely az x-tengely és az $y = x^2 - 2x$ görbe (a) x-tengely, (b) $y = -1$ egyenes, (c) $x = 2$ egyenes, (d) $y = 2$ egyenes körüli megforgatásával állítható elő!

14. Számítsuk ki annak a testnek a térfogatát, amelyet az $y = 2\operatorname{tg} x$, $y = 0$, $x = -\pi/4$ és $x = \pi/4$ által határolt tartomány x-tengely körüli megforgatása generál! (A tartomány az első és a harmadik síknegyedben fekszik és csokornyakkendőre emlékeztet.)

15. Lyukas gömb térfogata: 2 m sugarú gömbbe annak középpontján keresztül $\sqrt{3}$ m sugarú kerek lyukat fúrunk. Számítsuk ki, hogy a fúrással mennyi anyagot távolítunk el a gömb belsejéből!

16. Rögbilabda térfogata: A rögbilabda keresztmetszete az ábrán látható ellipszis. Határozzuk meg a térfogatát! Kerekítsünk!



Görbe ívhossza

Határozzuk meg a görbék ívhosszát (17–23. feladat)!

17. $y = x^{1/2} - (1/3)x^{3/2}$, $1 \le x \le 4$

18. $x = y^{2/3}$, $1 \le y \le 8$

19. $y = (5/12)x^{6/5} - (5/8)x^{4/5}$, $1 \le x \le 32$

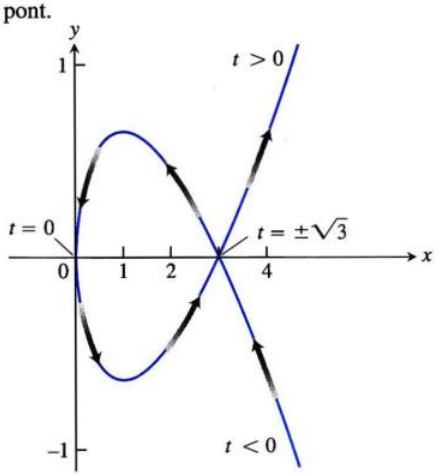
20. $x = (y^3/12) + (1/y)$, $1 \le y \le 2$

21. $x = 5\cos t - \cos 5t$, $y = 5\sin t - \sin 5t$, $0 \le t \le \pi/2$

22. $x = t^3 - 6t^2$, $y = t^3 + 6t^2$, $0 \le t \le 1$

23. $x = 3\cos\theta$, $y = 3\sin\theta$, $0 \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$

24. Számítsuk ki az ábrán látható $x = t^2$, $y = (t^3/3) - t$ hurok hosszát! A hurok kezdőpontja a $t = -\sqrt{3}$ pont, végpontja a $t = \sqrt{3}$ pont.



Súlypont és tömegközéppont

25. Határozzuk meg az $y = 2x^2$ és $y = 3 - x^2$ parabolák által határolt tartományt lefedő vékony síklemez súlypontját!

26. Határozzuk meg az x-tengely, az $x = 2$ és $x = -2$ egyenesek valamint az $y = x^2$ parabola által határolt tartományt lefedő vékony síklemez súlypontját!

27. Határozzuk meg az y-tengely, az $y = 4$ egyenes és az $y = x^2/4$ parabola által határolt első síknegyedbeli „háromszögtartományt" lefedő vékony síklemez súlypontját!

28. Határozzuk meg az $y^2 = x$ parabola és az $x = 2y$ egyenes által határolt tartományt lefedő vékony síklemez súlypontját!

29. Határozzuk meg az $y^2 = x$ parabola és az $x = 2y$ egyenes által határolt tartományt lefedő vékony síklemez tömegközéppontját, ha a sűrűségfüggvény $\delta(y) = 1 + y$. (Használjunk vízszintes sávokat!)

30. **(a)** Határozzuk meg az $y = 3/x^{3/2}$ görbe és az x-tengely $x = 1$ és $x = 9$ közé eső darabja által határolt tartományt lefedő, állandó sűrűségű vékony lemez tömegközéppontját!

(b) Határozzuk meg a lemez tömegközéppontját abban az esetben, ha a sűrűség nem állandó, hanem $\delta(x) = x$! (Használjunk függőleges sávokat!)

Forgásfelületek felszíne

Határozzuk meg a görbék adott tengely körüli megforgatásával előállított felületek felszínét (31–36. feladat)!

31. $y = \sqrt{2x+1}$, $0 \le x \le 3$, x-tengely

32. $y = x^3/3$, $0 \le x \le 1$; x-tengely

33. $x = \sqrt{4y - y^2}$, $1 \le y \le 2$; y-tengely

34. $x = \sqrt{y}$, $2 \le y \le 6$; y-tengely

35. $x = t^2/2, y = 2t$, $0 \le t \le \sqrt{5}$; x-tengely

36. $x = t^2 + 1/(2t), y = 4\sqrt{t}$, $1/\sqrt{2} \le t \le 1$; y-tengely

Munka

37. Egy hegymászó készül felhúzni magához 100 N súlyú felszerelését, amely 40 m-rel alatta egy kötélen csüng. A kötél 1 m-es darabja 0,8 N-t nyom. Mennyi munkát fog végezni? (*Útmutatás:* Számoljunk külön a felszereléssel és külön a kötéllel, aztán a két eredményt adjuk össze!)

38. Egy teherautósofőr a Mt. Washington lábától 3 m^3-es tartályban vizet szállít a hegy csúcsára. A csúcson veszi észre, hogy a tartály csak félig van. Teli tartállyal indult, egyenletesen haladt felfelé és 50 perc alatt tette meg az 1300 m-nyi szintkülönbséget. Mennyi munkát végzett a víz felszállításával, ha a tartályból egyenletes ütemben folyt ki a víz? Tekintsünk el attól, hogy a kamiont és saját magát is fel kellett szállítania a hegyre, most csak a vízzel törődjünk!

39. **Rugó megnyújtása:** Ha 100 N erő 0,3 méterrel nyújtja meg a rugót, mennyi munkát végez ez az erő? Mennyi munkát végez, ha kétszer ennyivel nyújtja meg?

40. **Garázsajtórugó:** A garázsajtó rugóját 200 N erő 0,8 méterrel nyújtja meg. Mennyire nyújtja meg 300 N nagyságú erő? Mennyi munkát végez ez az erő a nyugalmi állapottól eddig a hosszig?

41. **Víztartály kiszivattyúzása:** Csúcsával lefelé mutató egyenes körkúp alakú víztartály mélysége 6 m, alapkörének átmérője 2,4 m. A tartály vízzel van tele. Mennyi munkát kell végeznünk, ha a tartály teljes tartalmát 1,8 m-rel annak felső szintje fölé akarjuk szivattyúzni?

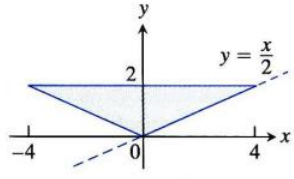
42. **Víztartály kiszivattyúzása:** (*A 41. feladat folytatása.*) A tartály 1,5 m magasságig van megtöltve, és ugyanolyan magasságra kell szivattyúzni a vizet, mint az előző feladatban. Mennyi munkát kell végezni?

43. **Kúp alakú tartály:** Csúcsával lefelé fordított egyenes körkúp alakú tartály peremének sugara 1,5 m, mélysége 3 m. A tartály 1010 kg/m^3 sűrűségű folyadékkal van megtöltve. Mennyi munkát kell végeznünk, ha a tartályban lévő folyadékot a tartály peremétől számítva 0,6 m magasságra akarjuk kiszivattyúzni? Mennyi ideig tart a tartály kiürítése, ha a szivattyút működtető motor teljesítménye 400 W?

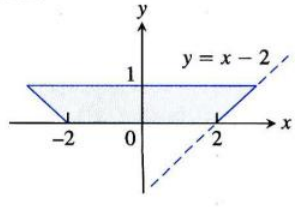
44. **Hengeres tartály kiszivattúzása:** Egy tárolótartály egyenes körhenger alakú, alkotója 6 m, átmérője 2,4 m. A henger el van fektetve, és félig van 913 kg/m^3 sűrűségű olivaolajjal. Határozzuk meg, mennyi munkát kell végezni a tartály kiürítéséhez egy olyan csövön keresztül, ami a tartály aljáról indul, és az olajat a tartály tetejétől számítva 1,8 m magasra kell szivattyúzni!

Folyadék által kifejtett erő

45. **Vizesvályú:** Az ábrán látható háromszöglemez egy vízzel teli vályú véglemeze. Mekkora erőhatást fejt ki a víz erre a lemezre?



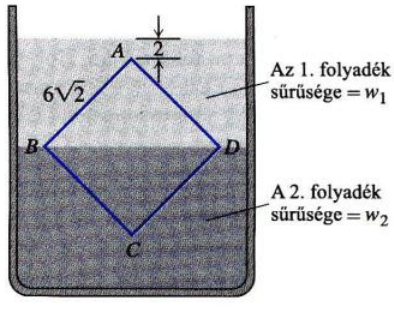
46. **Juharszirupvályú:** Az itt látható trapéz alakú lemez (adatok cm-ben) egy olyan vályúnak a véglapja, amely 1,2 gramm/cm^3 sűrűségű juharsziruppal van megtöltve. Mekkora erőt fejt ki a szirup erre a véglemezre, ha a szirup 0,8 cm magasan áll a vályúban?



47. **Parabola alakú nyílásra ható erő:** Egy gát oldalán olyan parabola alakú kémlelőnyílás van, melyet az $y = 7{,}5x^2$ görbe valamint az $y = 1{,}2$ egyenes határol. A nyílás teteje 1,5 m-rel van a vízszint alatt. Számítsuk ki, mekkora erővel nyomja a víz a kémlelőnyílást!

T **48.** Egy téglatest alakú tartályban higanyt (sűrűsége 13600 kg/m^3) szeretnénk tárolni. Az alaplap négyzet alakú, 0,09 m^2, és a teljes belső falfelület összesen 180 000 N erőhatásnak képes ellenállni. Kb. hány liter higanyt tárolhatunk egyszerre a tartályban?

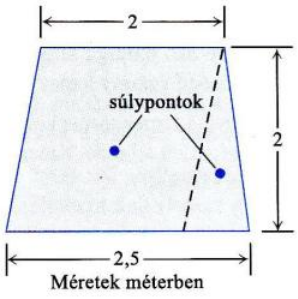
49. Az ábrán látható tartály kétféle, egymással nem keveredő, ρ_1, illetve ρ_2 sűrűségű folyadékkal van megtöltve. Határozzuk meg az $ABCD$ lemez egyik oldalára ható erő nagyságát! A B és a D pont a két folyadék határfelületén fekszik, a négyzet oldalhossza $6\sqrt{2}$ cm.



50. Az ábrán látható egyenlő szárú trapéz alakú lemezt függőlegesen vízbe merítjük úgy, hogy felső éle 1,2 m-rel legyen a vízfelszíntől. Határozzuk meg a lemez egyik oldalára ható erő nagyságát kétféle módon:

(a) egy alkalmasan megválasztott integrál kiszámításával,

(b) úgy, hogy a lemezt egy paralelogrammára és egy egyenlő oldalú háromszögre vágjuk, meghatározzuk azok súlypontját, majd alkalmazzuk az $F = \rho g \bar{h} A$ képletet.



6. fejezet Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

Térfogat és hosszúság

1. Úgy generálunk egy testet, hogy az x-tengely körül megforgatjuk az $y = f(x)$ folytonos és pozitív függvény grafikonja, az x-tengely, az $x = a$ rögzített egyenes és az $x = b \quad b > a$ változó egyenes által határolt tartományt. Ennek térfogata bármely b esetén $b^2 - ab$ lesz. Határozzuk meg $f(x)$-et!

2. Az x-tengely körül megforgatjuk az $y = f(x)$ folytonos és pozitív függvény grafikonja, az x-tengely, az $x = 0$ egyenes és az $x = a$ egyenes által határolt tartományt. Az így előállított test térfogata bármely $a > 0$ esetén $a^2 + a$ lesz. Határozzuk meg $f(x)$-et!

3. Tegyük fel, hogy a monoton növekvő $f(x)$ függvény $x \geq 0$ esetén sima, továbbá $f(0) = a$. Jelölje $s(x)$ az f függvény grafikonjának hosszát a $(0,a)$ és $(x, f(x)) \quad x > 0$ pontok között. Keressük $f(x)$-et, ha $s(x) = Cx$ valamilyen C állandóval! Milyen értékek engedhetők meg C számára?

4. **(a)** Mutassuk meg, hogy $0 < \alpha \leq \pi/2$ esetén

$$\int_0^b \sqrt{1+\cos^2\theta}\, d\theta > \sqrt{\alpha^2 + \sin^2\alpha}!$$

(b) Általánosítsuk a feladat (a) részének eredményét!

Tehetetlenségi nyomaték és tömegközéppont

5. Határozzuk meg a súlypontját annak a tartománynak, amelyet alulról az x-tengely, felülről pedig az $y = 1 - x^n$ görbe határol (n pozitív páros szám)! Mi lesz a súlypont határhelyzete, ha $n \to \infty$?

6. Nyerges vontatóval olyan 4 m-es farönköket szállítanak, amelyek kerülete alul 108 cm, felül 67 cm. Hol van a rönk tömegközéppontja? A rönköket akkor lehet biztonságosan rögzíteni, ha a tömegközéppontjuk a hátsó tengelytől legalább 1 m-re előre van.

7. Tegyük fel, hogy az A területű és δ sűrűségű vékony fémlemez lefedi az xy-sík egy R tartományát. A lemez y-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka legyen M_y. Mutassuk meg, hogy a lemez $x = b$ egyenesre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka

(a) $M_y - b\delta A$, ha a lemez az egyenestől jobbra helyezkedik el,

(b) $b\delta A - M_y$, ha a lemez az egyenestől balra helyezkedik el!

8. Határozzuk meg az $y^2 = 4ax$ görbe és az $x = a$ egyenes (a pozitív állandó) által határolt tartományt fedő vékony lemez tömegközéppontját, ha a lemez (x,y) pontbeli sűrűsége arányos (a) x-szel, (b) $|y|$-nal!

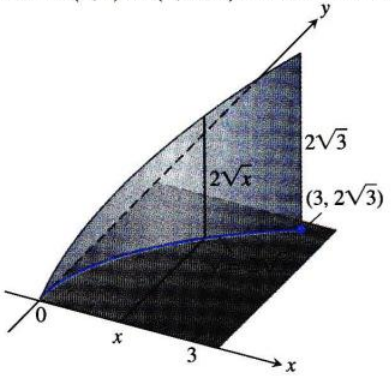
9. **(a)** Határozzuk meg annak az első síknegyedbeli tartománynak a súlypontját, amelyet két koncentrikus kör és a koordinátatengelyek határolnak, amennyiben a körök sugara a és b, $0 < a < b$, középpontjuk pedig az origóban van!

(b) Határozzuk meg a súlypont határhelyzetét abban az esetben, ha a b-hez tart, majd gondoljuk végig, mit jelent az eredmény!

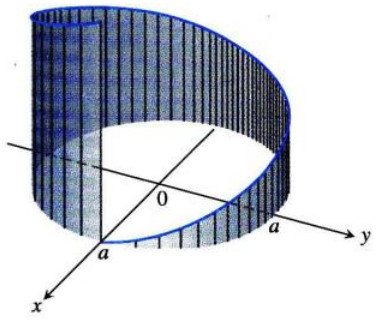
10. 30 cm élhosszúságú négyzet egyik sarkát levágjuk. A levágott háromszög területe 225 cm^2. A megmaradt rész súlypontja 17,5 cm-re van az eredeti négyzet egyik olyan oldalától, amiből levágtunk. Mekkorák az oldalakból levágott hosszak? Milyen távol lesz a súlypont a többi megmaradt éltől?

Felszín

11. Az $y = 2\sqrt{x}$ görbe pontjaiban az xy-síkra merőleges $y = h$ hosszúságú szakaszokat állítunk (lásd a mellékelt ábrát). Határozzuk meg annak a felületnek a felszínét, amelyet ezek a szakaszok rajzolnak ki a $(0,0)$ és $(3, 2\sqrt{3})$ közé eső tartományban!



12. Az a sugarú kör pontjaiban a kör síkjára merőlegesen k_s hosszúságú szakaszokat állítunk, ahol k_s a kör $(a,0)$ pontjától annak P pontjáig mért körív hossza az óramutató járásával ellentétes irányban mérve. Határozzuk annak a felületnek a felszínét, amelyet e merőleges szakaszok súrolnak, miközben az $(a,0)$ pontból indulva egyszer bejárjuk a körívet!



Munka

13. Az m tömegű test az x-tengely irányában a gyorsulással mozog a változó nagyságú $F(t) = t^2$ erő hatására, és az $x = 0$ pontból az $x = h$ pontba jut. Határozzuk meg a végzett munkát!

14. Munka és mozgási energia: Helyezzünk egy 45,5 grammos golflabdát függőleges helyzetű $k = 360$ N/m rugóállandójú rugóra. A rugót 15 cm-rel összenyomjuk, aztán elengedjük. Milyen magasra jut a golflabda?

Folyadék által kifejtett erő

15. Az ABC háromszöglapot függőlegesen vízbe merítjük. Az AB él 1,2 m hosszú és 1,8 m-rel van a vízfelszín alatt. A C 0,6 m-rel van a vízfelszín alatt. Számítsuk ki, mekkora erőt fejt ki a víz a lap egyik oldalára!

16. Négyszögletes lemezt függőlegesen folyadékba merítünk úgy, hogy felső éle párhuzamos legyen a vízfelszínnel. Mutassuk meg, hogy a lemez egyik oldalára ható erő egyenlő a lemez alsó és felső élénél ható nyomás átlagértékének és a lemez területének a szorzatával!

17. A folyadékba merülő síklap *nyomásközéppontja* az a pont, amely pontba a folyadék által a síklapra ható erőt összpontosítva annak tehetetlenségi nyomatéka egyetlen, a síkban fekvő tengelyre nézve sem változik meg. Határozzuk meg, milyen mélyen van a nyomásközéppontja (a) annak a h magasságú és b szélességű téglalapnak, amelynek felső éle a vízfelszínen van; (b) annak a h magasságú és b oldalhosszúságú háromszögnek, amelynek b-vel szemközti csúcsa a távolságra, b oldala pedig $(a+h)$ távolságra van a vízfelszíntől!

7. fejezet
Transzcendens függvények

ÁTTEKINTÉS: A függvényeket az 1.4. alfejezetben két nagy csoportba osztottuk: algebrainak neveztük a polinomfüggvényeket, valamint a polinomfüggvényekből összeadással, kivonással, szorzással, osztással, hatványozással vagy gyökvonással megkapható függvényeket. A nem algebrai függvényeket *transzcendens* függvényeknek neveztük. A trigonometrikus, az exponenciális, a logaritmus- és a hiperbolikus függvények – az inverzeikkel együtt – mind transzcendens függvények.

Transzcendens függvényekkel az analízisben lépten-nyomon találkozhatunk. Ilyen függvények írják le – többek között – a populációk növekedését, a rezgő- és a hullámmozgást, a számítógépes algoritmusok hatékonyságát és a különféle szerkezeti elemek stabilitását. Ebben a fejezetben fontos transzcendens függvényekkel ismerkedünk meg, vázoljuk a grafikonjukat, és meghatározzuk a legfontosabb jellemzőiket, továbbá a deriváltjukat és az integráljukat.

7.1. Inverz függvény deriváltja

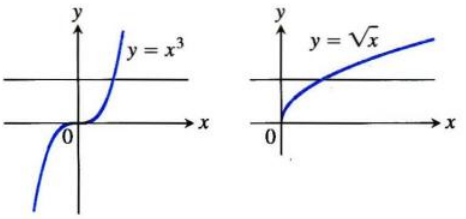
Azt a függvényt, amely egy adott f függvény hatását „semlegesíti", f inverzének nevezzük. Sok ismert függvény van – ha nem is mind ilyen –, amelynek létezik inverze. Az inverz függvények gyakran előkerülnek bizonyos határozatlan integrálok, illetve differenciálegyenletek megoldásának képletében. Az inverz függvény fogalma alapvető szerepet játszik a logaritmus- és az exponenciális függvények elméletében, amint azt a 7.3. alfejezetben hamarosan látni is fogjuk.

Injektív függvények

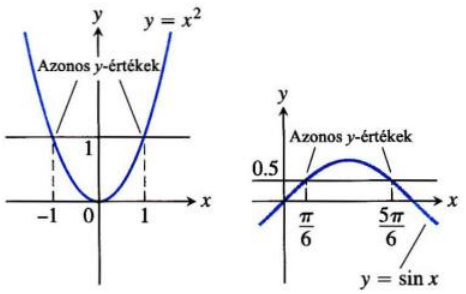
Egy függvény olyan szabály, amely az értelmezési tartomány minden eleméhez hozzárendeli az értékkészlet egy elemét. Vannak olyan függvények, amelyek ugyanazt az értéket az értelmezési tartomány több eleméhez is hozzárendelik. Az $f(x) = x^2$ függvény például az 1-hez és a -1-hez is az 1-et rendeli, $\pi/3$ és $2\pi/3$ szinusza pedig egyaránt $\sqrt{3}/2$. Olyan függvények is vannak, amelyek minden függvényértéket csupán egyszer vesznek fel. Különböző (nemnegatív) számok négyzetgyöke például mindig különböző. Azokat a függvényeket, amelyek az értelmezési tartományuk különböző elemeihez különböző értékeket rendelnek, *injektív* (alkalmanként „egy-egyértelmű") függvényeknek nevezzük. Az ilyen függvények minden függvényértéket pontosan egyszer vesznek fel.

DEFINÍCIÓ: **Injektív függvény**

A $f(x)$ függvényt a D halmazon **injektívnek** nevezzük, ha tetszőleges $x_1, x_2 \in D$ esetén abból, hogy $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$ következik.



Injektív függvények: a grafikon a vízszintes egyeneseket legfeljebb egy pontban metszi.



Nem injektív függvények: a grafikonok némelyik vízszintes egyenest több pontban metszik.

7.1. ÁBRA: Az $y = x^3$ és az $y = \sqrt{x}$ függvényekről a horizontális teszt alapján is láthatjuk, hogy teljes értelmezési tartományukon – a (∞, ∞), illetve a $[0, \infty)$ halmazon – injektívek. Az $y = x^2$ és az $y = \sin x$ függvény ezzel szemben – teljes, $(-\infty, \infty)$ értelmezési tartományán legalábbis – nem injektív.

1. PÉLDA: **Függvények „injektivitási tartománya"**

(a) Az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény injektív a nemnegatív valós számok halmazán, mivel különböző x_1 és x_2 nemnegatív számok esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(b) A $g(x) = \sin x$ a $[0, \pi]$ intervallumon nem injektív, hiszen (például) $\sin(\pi/6) = \sin(5\pi/6)$. A $g(x)$ függvény mindazonáltal injektív a $[0, \pi/2]$ intervallumon, mivel itt szigorúan növekvő.

Egy $y = f(x)$ injektív függvény grafikonjának bármely vízszintes egyenessel legfeljebb egy közös pontja lehet. Ha ugyanis van olyan vízszintes egyenes, amely f grafikonját több pontban metszi, akkor van olyan y-érték, amelyet f legalább két helyen felvesz (7.1. ábra).

Horizontális teszt

Egy $y = f(x)$ függvény pontosan akkor injektív, ha a függvény grafikonja egyetlen vízszintes egyenest sem metsz egynél több pontban.

Inverz függvény

Egy injektív függvény esetében minden kimenet pontosan egy bemenethez tartozik, így a függvény „hatása" megfordítható: minden kimenethez egyértelműen megadható a hozzá tartozó bemenet.

DEFINÍCIÓ: **Inverz függvény**

Legyen az f injektív függvény értelmezési tartománya a D, értékkészlete pedig az R halmaz. Az f függvény f^{-1} **inverzét** az

$$f^{-1}(a) = b \Leftrightarrow f(b) = a$$

összefüggéssel értelmezzük. Az f^{-1} függvény értelmezési tartománya az R, értékkészlete pedig a D halmaz.

Az f függvény értelmezési tartománya tehát az f^{-1} függvény értékkészlete, f értékkészlete pedig f^{-1} értelmezési tartománya. Figyeljünk arra, hogy a -1 *nem* kitevő: $f^{-1}(x)$ nem az $1/f(x)$ függvényt jelöli.

Ha az x értékre az f függvényt alkalmazzuk, majd $f(x)$-re az f^{-1} függvényt, akkor azt kapjuk, amiből kiindultunk: x-et. Hasonlóan, ha az f értékkészletének egy y elemére előbb f^{-1}-et, majd az így kapott $f^{-1}(y)$-ra f-et alkalmazzuk, akkor az y-t kapjuk vissza. Egy függvénynek az inverzével vett kompozíciója tehát mindent változatlanul hagy:

$(f^{-1} \circ f)(x) = x$, f értelmezési tartományának minden x elemére; és

$(f \circ f^{-1})(y) = y$, f^{-1} értelmezési tartományának (f értékkészletének) minden y elemére.

Csak injektív függvényeknek lehet inverzük. A magyarázat kézenfekvő: ha $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) = y$ és $f(x_2) = y$, akkor $f^{-1}(y)$ értékét nem lehet úgy meghatározni, hogy $f^{-1}(y) = x_1$ és $f^{-1}(y) = x_2$ egyaránt teljesüljön.

Ha az f függvény egy I intervallumon növekvő – azaz tetszőleges $x_1, x_2 \in I$ esetén $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ –, akkor f injektív az I intervallumon és így van inverze. Hasonlóan: a csökkenő függvényeknek is van inverzük (39. feladat). Ha egy függvény deriváltja mindenütt pozitív, akkor a Lagrange-féle középértéktétel (4.2. alfejezet) 3. Következménye (4.3. alfejezet) szerint a függvény növekvő, és így van inverze. Hasonlóan: ha egy függvény deriváltja mindenütt negatív, akkor a függvény csökkenő, és mint ilyen, szintén invertálható. Léteznek mindazonáltal olyan függvények is, amelyek nem növekvők és nem is csökkenők, mégis van inverzük: ilyen például az $\operatorname{arcsec} x$ függvény, amellyel a 7.7. alfejezetben ismerkedünk majd meg, vagy pl. az $1/x$ függvény.

Az inverz függvény meghatározása

Az f és az f^{-1} függvények grafikonja szoros kapcsolatban áll egymással. Ha egy függvényértéket a függvény grafikonja alapján akarunk meghatározni, akkor megkeressük az x-tengelyen a megfelelő x értéket, majd az x-tengelyt ebben a pontban metsző függőleges egyenesnek a grafikonnal való metszéspontját, ezután a metszésponton át vízszintes egyenest húzunk, amelynek az y-tengellyel vett metszete megadja a keresett függvényértéket. Az inverzfüggvény-értékek az eljárás megfordításával kaphatók meg: ezúttal az y-tengely megfelelő y pontjából indulunk ki, vízszintesen haladunk a grafikonig, majd függőlegesen az x-tengelyig, és így megkapjuk az $x = f^{-1}(y)$ függvényértéket (7.2. ábra).

Ha az f^{-1} függvény grafikonját a hagyományos módon akarjuk ábrázolni (amikor tehát az értelmezési tartomány elemei az x-tengely pontjai), akkor nincs más teendőnk, mint felcserélni az x- és az y-tengelyt, amit az x-tengellyel 45°-os szöget bezáró $x = y$ egyenletű egyenesre való tükrözéssel valósíthatunk meg. Az f függvény grafikonját erre az egyenesre tükrözve az f^{-1} függvény grafikonját kapjuk. Ekkor az $f^{-1}(x)$ függvényértékek a szokásos módon, az x-tengelyről indulva olvashatók le: először függőlegesen mozgunk a grafikonig, majd vízszintesen az y-tengelyig, ahol megkapjuk az $y = f^{-1}(x)$ függvényértéket. A 7.2. ábrán az f és az f^{-1} függvény grafikonjai közötti kapcsolatot tanulmányozhatjuk: ha az egyiket az $x = y$ egyenletű egyenesre tükrözzük, akkor a másikat kapjuk.

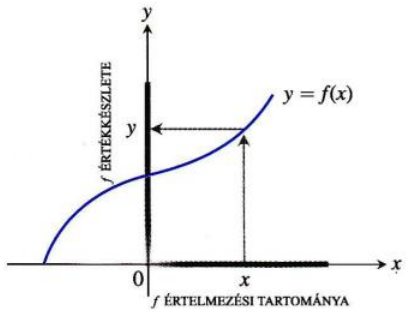
Az f függvény f^{-1} inverze tehát két lépésben kapható meg:

1. Megoldjuk az $y = f(x)$ egyenletet x-re. Így megkapjuk az $x = f^{-1}(y)$ képletet, amely x értékét y függvényeként adja meg.

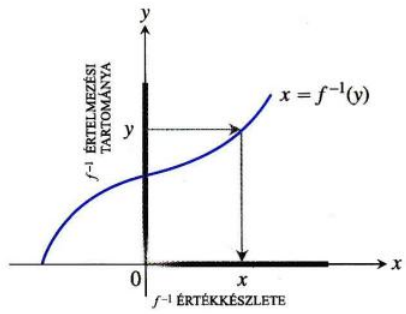
2. A képletben felcseréljük az x és y betűket, az így kapott $y = f^{-1}(x)$ képletben már – ahogy megszoktuk – x jelöli a független, y pedig a függő változót.

2. PÉLDA: **Függvény inverzének meghatározása**

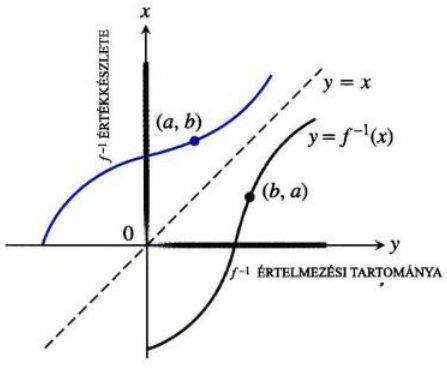
Adjuk meg $y = \frac{1}{2}x + 1$ inverzét mint az x változó függvényét.



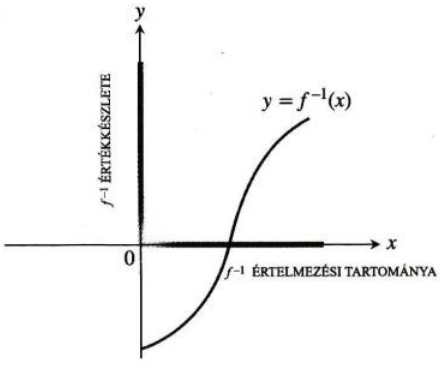
(a) Az f függvény x helyen felvett értékét megkapjuk, ha x-től függőlegesen f grafikonjáig haladunk, majd az y-tengely felé fordulunk.



(b) Az f^{-1} függvény grafikonja f grafikonja alapján az x-, illetve y-értékek felcserélésével kapható meg. Ha azt az x-et keressük, amely y-t adta, akkor az y-tengely y pontjából vízszintesen a grafikonig, onnan pedig függőlegesen az x-tengelyig haladunk. Az f függvény értelmezési tartománya az f^{-1} függvény értékkészlete, f értékkészlete pedig f^{-1} értelmezési tartománya.

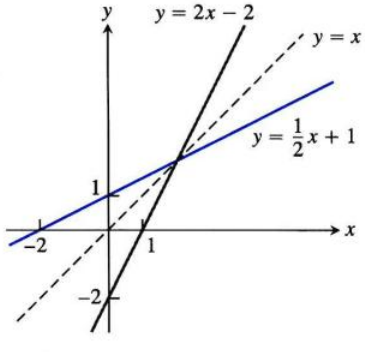


(c) Ha f^{-1} grafikonját a szokásos módon akarjuk ábrázolni, akkor előbb f grafikonját az $x = y$ egyenletű egyenesre tükrözzük,



(d) majd felcseréljük az x és y betűket. Így megkapjuk f^{-1} „normális" grafikonját, az f^{-1} függvény értékei ekkor már y-ok, nem pedig x-ek.

7.2. ÁBRA: Az $y = f^{-1}(x)$ grafikon meghatározása az $y = f(x)$ grafikon alapján.



7.3. ÁBRA: Az $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ és az $f^{-1}(x) = 2x - 2$ függvény grafikonjai egymásnak az $x = y$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképei. Az egyenesek meredekségei egymás inverzei (2. példa).

Megoldás:

1. Az $y = \frac{1}{2}x + 1$ egyenletből kifejezzük x-et:

$$2y = x + 2,$$
$$x = 2y - 2.$$

2. A kapott képletben felcseréljük x-et és y-t: $y = 2x - 2$.

Az $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ függvény inverze tehát az $f^{-1}(x) = 2x - 2$ függvény. A megoldást könnyen ellenőrizhetjük: a két függvény kompozíciója – mindkét lehetséges sorrendben – az identikus leképezés:

$$f^{-1}(f(x)) = 2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2 = x + 2 - 2 = x,$$
$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}(2x - 2) + 1 = x - 1 + 1 = x.$$

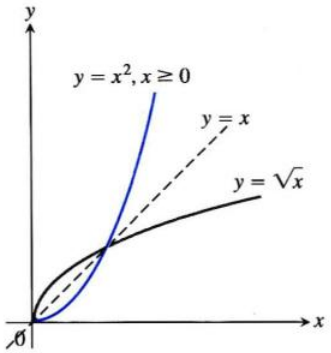
A két függvény grafikonját a 7.3. ábra mutatja. □

3. PÉLDA: **Függvény inverzének meghatározása**

Adjuk meg $y = x^2$, $x \geq 0$ inverzét mint az x változó függvényét.

Megoldás: Először kifejezzük x-et y segítségével:

$$y = x^2,$$
$$\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x, \qquad (x \geq 0 \text{ miatt } |x| = x).$$



7.4. ÁBRA: Az $y = \sqrt{x}$ és az $y = x^2, x \geq 0$ függvények egymás inverzei (3. példa).

A kapott képletben ezután x helyébe y-t írunk, y helyébe pedig x-et:

$$y = \sqrt{x}.$$

Az $y = x^2, x \geq 0$ függvény inverze tehát az $y = \sqrt{x}$ függvény (7.4. ábra).

Vegyük észre ugyanakkor, hogy az összes valós számon értelmezett $y = x^2$ függvény már nem injektív, minek következtében nem is invertálható. □

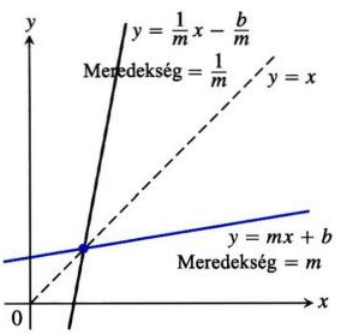
Differenciálható függvény inverzének deriváltja

Határozzuk meg a 2. példában szereplő $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ és az f függvény $f^{-1}(x) = 2x - 2$ inverzének deriváltját:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{2},$$
$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{d}{dx}(2x - 2) = 2.$$

A deriváltak egymás reciprokai. Az f függvény grafikonja az $y = \frac{1}{2}x + 1$ egyenletű egyenes, f^{-1} grafikonja pedig az $y = 2x - 2$ egyenletű egyenes (7.3. ábra). A két egyenes meredeksége egymás reciproka.

Ebben persze nincs semmi különleges. Egy általános helyzetű (nem függőleges és nem is vízszintes) egyenest az $x = y$ egyenletű egyenesre tükrözve a kapott és az eredeti egyenes meredekségei mindig egymás reciprokai. Ha az eredeti egyenes meredeksége $m \neq 0$ (7.5. ábra), akkor tükörképéé $1/m$ (36. feladat).

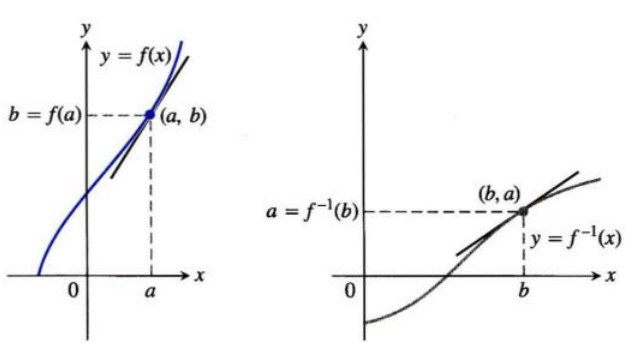


7.5. ÁBRA: Ha egy (nem függőleges) egyenest az $x = y$ egyenletű egyenesre tükrözünk, akkor a kapott, illetve az eredeti egyenes meredekségei egymás reciprokai.

Az f és f^{-1} függvények meredeksége közötti „reciprok viszony" általában is fennáll, a megfelelő pontok meghatározásakor azonban elkél némi óvatosság. Ha az $y = f(x)$ függvény meredeksége az $(a, f(a))$ pontban $f'(a)$ és $f'(a) \neq 0$, akkor az $y = f^{-1}(x)$ függvény meredeksége az $(f(a), a)$ pontban $1/f'(a)$ (7.6. ábra). A $b = f(a)$ helyettesítéssel ekkor a következőt kapjuk:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Ha azonban az $y = f(x)$ függvény grafikonjának az $(a, f(a))$ pontbeli érintője vízszintes, akkor az f^{-1} inverz függvény $(f(a), a)$ pontbeli érintője függőleges, ami azt jelenti, hogy f^{-1} az $f(a)$ helyen nem deriválható. Az 1. Tétel feltétele épp ezért olyan, hogy f^{-1} a teljes értelmezési tartományán (vagyis f értékkészletén) differenciálható legyen.



A meredekségek egymás reciprokai: $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ vagy $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

7.6. ÁBRA: Ha két függvény egymás inverze, akkor a megfelelő pontokban vett meredekségeik egymás reciprokai.

1. TÉTEL: **Inverz függvény deriváltja**

Legyen f az I intervallumon értelmezett injektív függvény. Ha f az I minden pontjában differenciálható és az $f'(x)$ derivált egyetlen pontban sem 0, akkor az f^{-1} inverz függvény az értelmezési tartománya minden pontjában differenciálható, az $(f^{-1})'$ deriváltfüggvény értéke pedig az f^{-1} függvény értelmezési tartományának egy b pontjában az f' deriváltfüggvény $a = f^{-1}(b)$ pontbeli értékének reciproka:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))},$$

vagy másképpen:

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=b} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(b)}}. \tag{7.1}$$

A tételt nem bizonyítjuk, helyette rámutatunk egy másik lehetséges értelmezésre. Ha az $y = f(x)$ függvény az a helyen differenciálható, akkor az x változó egy kicsiny dx változásának az y

$$dy = f'(a)dx$$

változása feleltethető meg. Eszerint tehát az $x = a$ helyen y értéke $f'(a)$-szor olyan gyorsan változik, mint x, x értékének változása pedig az $y = b$ helyen y változásának $1/f'(a)$-szorosa. Mindez, ha nem is bizonyítás, jó érv amellett, hogy f^{-1} deriváltja a b helyen éppen az f függvény a-beli deriváltjának reciproka.

4. PÉLDA: **Az 1. Tétel alkalmazása**

Az $y = x^2, x \geq 0$ függvénynek és $y = \sqrt{x}$ inverzének deriváltjai: $f'(x) = 2x$ és $(f^{-1})'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.

Az 1. Tétel szerint $f^{-1}(x)$ deriváltja:

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \\ &= \frac{1}{(2f^{-1}(x))} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

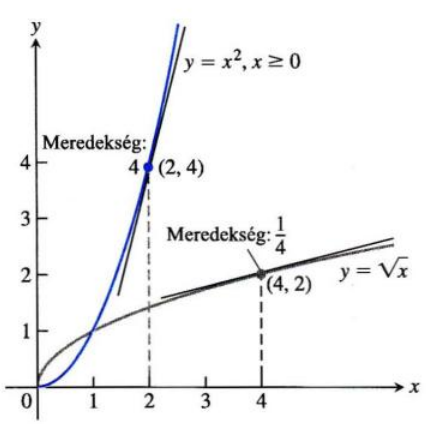
Ugyanezt kapjuk, ha f^{-1} deriváltját az általános hatványszabály alapján számítjuk ki.

Használjuk most az 1. Tételt a derivált egy adott pontbeli értékének kiszámítására; legyen mondjuk $a = 2$, ekkor $b = f(a) = f(2) = 4$! A tétel szerint az f' deriváltfüggvény 2 helyen vett értéke – azaz $f'(2) = 4$ –, valamint az $(f^{-1})'$ deriváltfüggvény $f(2)$ helyen vett $(f^{-1})'(4)$ értéke egymás reciprokai:

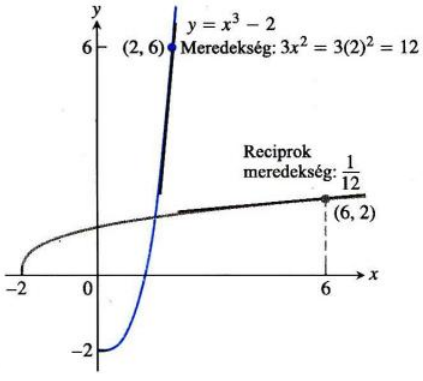
$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'((f^{-1})(4))} = \frac{1}{f'(2)} = \left.\frac{1}{2x}\right|_{x=2} = \frac{1}{4}$$

A számítás eredményét a 7.7. ábra mutatja.

A (7.1) képlet alapján alkalmanként akkor is meg tudjuk határozni a df^{-1}/dx valamely értékét, ha nem ismerjük az f^{-1} függvényt megadó képletet.



7.7. ÁBRA: Az $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ függvény $(4,2)$ pontbeli meredeksége az $f(x) = x^2$ függvény $(2,4)$ pontbeli meredekségének reciproka (4. példa).



7.8. ÁBRA: Az $f(x) = x^3 - 2$ függvény deriváltjának az $x = 2$ helyen felvett értéke alapján meghatározhatjuk az f^{-1} inverz függvény deriváltjának $x = 6$-beli értékét (5. példa).

5. PÉLDA: **Deriváltfüggvény adott pontbeli értékének meghatározása**

Legyen $f(x) = x^3 - 2$. Határozzuk meg az df^{-1}/dx deriváltfüggvénynek az $x = 6 = f(2)$ helyen felvett értékét anélkül, hogy felírnánk az f^{-1} függvény képletét.

Megoldás:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=2} = 3x^2|_{x=2} = 12,$$

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=f(2)} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=2}} = \frac{1}{12}, \qquad \text{(a (7.1) képlet szerint).}$$

A megfelelő meredekségeket a 7.8. ábra mutatja. □

Inverz függvény paraméterezése

Az $y = f(x)$ függvényt paraméteresen az

$$x = t \text{ és } y = f(t)$$

egyenletekkel is megadhatjuk; t és $f(t)$ felcserélésével pedig megkaphatjuk az f^{-1} inverz függvény

$$x = f(t) \text{ és } y = t$$

paraméterezését (3.5. alfejezet).

Ha például az $x \geq 0$ halmazon értelmezett $f(x) = x^2$ injektív függvényt az inverzével és az $x = y$ egyenletű egyenessel együtt akarjuk ábrázolni, akkor ezt a következő paraméterezésekkel tehetjük meg:

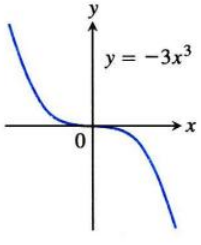
f grafikonja: $x_1 = t$, $y_1 = t^2$, $t \geq 0$,
f^{-1} grafikonja: $x_2 = t^2$, $y_2 = t$,
$y = x$ grafikonja: $x_3 = t$, $y_3 = t$.

7.1. Feladatok

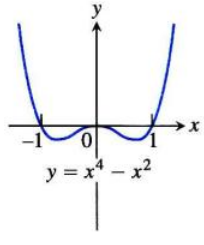
Függvény injektivitásának eldöntése a grafikon alapján

Mely függvények injektívek, és melyek nem azok? Döntsük el a grafikon alapján (1–6. feladatok).

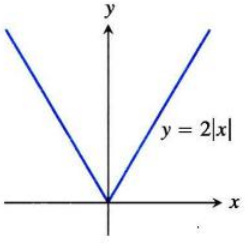
1.



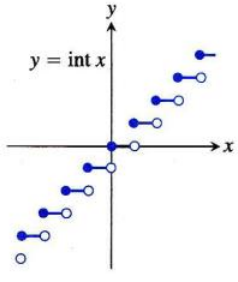
2.



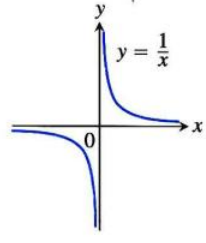
3.



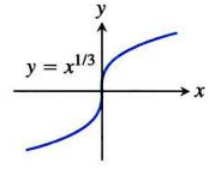
4.



5.



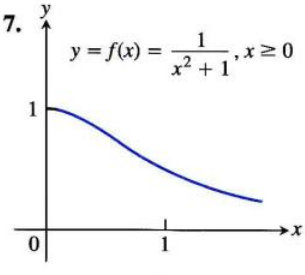
6.



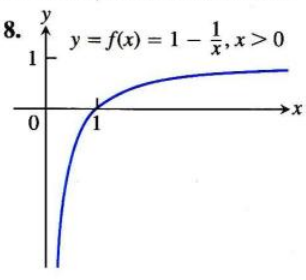
Inverz függvény grafikonjának ábrázolása

A 7–10. feladatokban egy-egy $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. Másoljuk le a grafikont, és tüntessük fel ábránkon az $x = y$ egyenletű egyenest! Az inverz függvény grafikonjának szimmetriatulajdonsága alapján vázoljuk az f^{-1} függvény grafikonját (ehhez nem kell feltétlenül felírnunk f^{-1} képletét). Határozzuk meg az f^{-1} függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

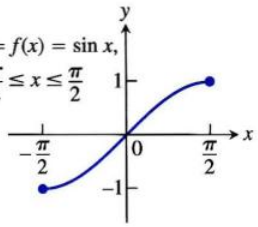
7.



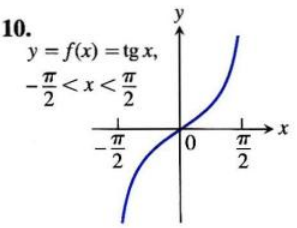
8.



9.



10.



11. **(a)** Vázoljuk az $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $0 \le x \le 1$ függvény grafikonját! Milyen szimmetriatulajdonsága van a grafikonnak?

(b) Igazoljuk, hogy f inverze maga az f függvény! (Emlékeztetünk arra, hogy $x \ge 0$ esetén $\sqrt{x^2} = x$.)

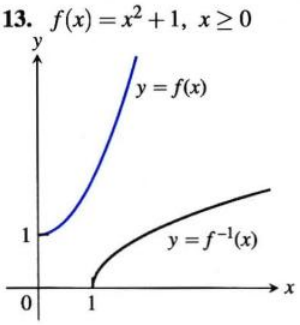
12. **(a)** Vázoljuk az $f(x) = 1/x$ függvény grafikonját. Milyen szimmetriatulajdonsága van a grafikonnak?

(b) Igazoljuk, hogy f inverze maga az f függvény!

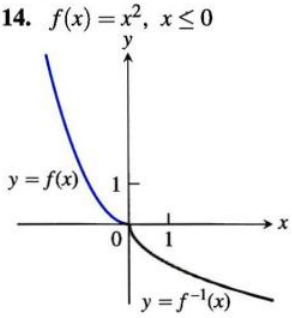
Inverz függvény képlete

A 13–18. feladatokban egy-egy $y = f(x)$ függvény képletét, valamint f és az f^{-1} inverz függvény grafikonját adtuk meg. Határozzuk meg minden esetben az f^{-1} függvény képletét.

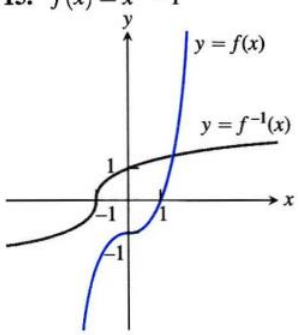
13. $f(x) = x^2 + 1$, $x \ge 0$



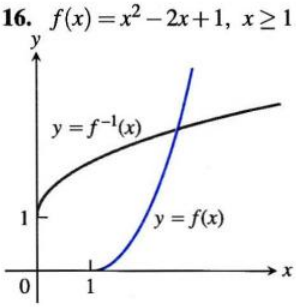
14. $f(x) = x^2$, $x \le 0$



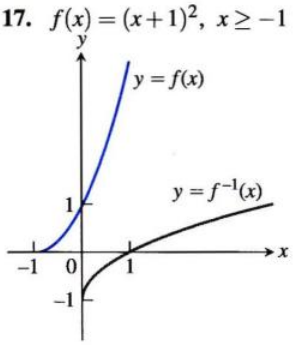
15. $f(x) = x^3 - 1$



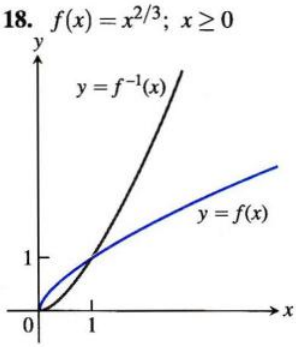
16. $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $x \ge 1$



17. $f(x) = (x+1)^2$, $x \ge -1$



18. $f(x) = x^{2/3}$; $x \ge 0$



A 19–24. feladatokban az $y = f(x)$ függvény képlete alapján határozzuk meg az f^{-1} inverz függvény képletét, és adjuk meg f^{-1} értelmezési tartományát és értékkészletét. Ellenőrzés gyanánt mindegyik feladatnál mutassuk meg, hogy $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$!

19. $f(x) = x^5$

20. $f(x) = x^4$, $x \ge 0$

21. $f(x) = x^3 + 1$

22. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

23. $f(x) = 1/x^2$, $x > 0$

24. $f(x) = 1/x^3$, $x \ne 0$

Inverz függvény deriváltja

A 25–28. feladatokban

(a) határozzuk meg f^{-1} képletét;

(b) ábrázoljuk közös koordinátarendszerben f és f^{-1} grafikonját;

(c) adjuk meg df/dx értékét az $x = a$, valamint df^{-1}/dx értékét az $x = f(a)$ helyen; igazoljuk, hogy $df^{-1}/dx = 1/(df/dx)$!

25. $f(x) = 2x + 3$, $a = -1$

26. $f(x) = \frac{1}{5}x + 7$, $a = -1$

27. $f(x) = 5 - 4x$, $a = 1/2$

28. $f(x) = 2x^2$, $x \ge 0$, $a = 5$

29. **(a)** Igazoljuk, hogy az $f(x) = x^3$ és a $g(x) = \sqrt[3]{x}$ függvények egymás inverzei!

(b) Ábrázoljuk f és g grafikonját egy akkora I intervallum felett, hogy látsszon: a grafikonok az $(1,1)$ és a $(-1,-1)$ pontokban metszik egymást! Ellenőrizzük, hogy a két grafikon szimmetrikus az $x = y$ egyenletű egyenesre!

(c) Határozzuk meg az f és a g grafikonját az $(1,1)$ és a $(-1,-1)$ pontokban érintő egyenesek meredekségét! (Összesen négy egyenes meredekségét kell meghatároznunk.)

30. **(a)** Igazoljuk, hogy a $h(x) = x^3/4$ és a $k(x) = (4x)^{1/3}$ függvények egymás inverzei!

(b) Ábrázoljuk h és k grafikonját egy akkora I intervallum felett, hogy látsszon: a grafikonok a $(2,2)$ és a $(-2,-2)$ pontokban metszik egymást! Ellenőrizzük, hogy a két grafikon szimmetrikus az $x = y$ egyenletű egyenesre!

(c) Határozzuk meg az f és a g grafikonját a $(2,2)$ és a $(-2,-2)$ pontokban érintő egyenesek meredekségét!

31. Legyen $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$, $x \ge 2$! Határozzuk meg df^{-1}/dx értékét az $x = -1 = f(3)$ helyen!

32. Legyen $f(x) = x^2 - 4x - 5$, $x > 2$! Határozzuk meg df^{-1}/dx értékét az $x = 0 = f(5)$ helyen!

33. Tegyük fel, hogy az $y = f(x)$ differenciálható függvénynek van inverze, továbbá, hogy f grafikonja átmegy a $(2,4)$ ponton, ahol meredeksége $1/3$! Határozzuk meg df^{-1}/dx értékét az $x = 4$ helyen!

34. Tegyük fel, hogy az $y = g(x)$ differenciálható függvénynek van inverze, és hogy g grafikonja átmegy az origón, ahol meredeksége $1/3$! Határozzuk meg g^{-1} origóbeli meredekségét!

Lineáris függvények inverze

35. **(a)** Határozzuk meg az $f(x) = mx$ függvény inverzét, ahol $m \ne 0$ állandó!

(b) Mit mondhatunk általában az olyan $y = f(x)$ függvény inverzéről, amelynek grafikonja origón átmenő, nemnulla meredekségű egyenes?

36. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = mx + b$ függvény (m és b állandók, $m \neq 0$) inverze olyan lineáris függvény, amelynek meredeksége $1/m$, és amelynek grafikonja az y-tengelyt a $-b/m$ pontban metszi!

37. **(a)** Határozzuk meg az $f(x) = x + 1$ függvény inverzét! Ábrázoljuk f és f^{-1} grafikonját, valamint – szaggatott vonallal – az $x = y$ egyenletű egyenest közös koordinátarendszerben!

(b) Határozzuk meg az $f(x) = x + b$ (b állandó) függvény inverzét! Milyen kapcsolat van f és f^{-1} grafikonja között?

(c) Mit mondhatunk általában az olyan lineáris függvények inverzéről, amelyeknek grafikonja párhuzamos az $x = y$ egyenessel?

38. **(a)** Határozzuk meg az $f(x) = -x + 1$ függvény inverzét! Ábrázoljuk f és f^{-1} grafikonját, valamint az $x = y$ egyenletű egyenest közös koordináta-rendszerben! Milyen szögben metszik egymást az egyenesek?

(b) Határozzuk meg az $f(x) = -x + b$ (b állandó) függvény inverzét! Mekkora szöget zárnak be az $y = -x + b$ és az $x = y$ egyenletű egyenesek?

(c) Mit mondhatunk általában az olyan lineáris függvények inverzéről, amelyeknek grafikonja merőleges az $x = y$ egyenesre?

Növekvő és csökkenő függvények

39. Idézzük fel a 4.3. alfejezetben megadott definíciókat! Az $f(x)$ függvény az I intervallumon növekszik, ha tetszőleges $x_1, x_2 \in I$ esetén

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Hasonlóan: $f(x)$ az I intervallumon csökken, ha tetszőleges $x_1, x_2 \in I$ esetén

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Igazoljuk, hogy minden növekvő és minden csökkenő függvény injektív, azaz tetszőleges $x_1, x_2 \in I$ esetén

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

A 39. feladat eredményét felhasználva igazoljuk, hogy a 40–44. feladatokban szereplő függvények mindegyike – teljes értelmezési tartományán – invertálható! Adjuk meg a df^{-1}/dx függvény képletét az 1. Tétel alapján!

40. $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}$ **41.** $f(x) = 27x^3$

42. $f(x) = 1 - 8x^3$ **43.** $f(x) = (1-x)^3$

44. $f(x) = x^{5/3}$

További példák és feladatok

45. Tegyük fel, hogy $f(x)$ injektív. Injektív-e ekkor a $g(x) = -f(x)$ függvény? Válaszunkat indokoljuk!

46. Következik-e abból, hogy az $f(x)$ függvény injektív és sehol sem nulla az, hogy a $g(x) = 1/f(x)$ függvény ugyancsak injektív? Indokoljuk válaszunkat!

47. Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezési tartománya tartalmazza a g függvény értékkészletét, az $f \circ g$ összetett függvény tehát mindenütt értelmezve van, ahol g. Ha f és g mindegyike injektív, mondhatunk-e valamit az $f \circ g$ függvényről? Indokoljuk válaszunkat!

48. Tegyük fel, hogy az $f \circ g$ összetett függvény injektív. Következik-e ebből, hogy g is az? Indokoljuk válaszunkat!

49. Tegyük fel, hogy az f függvény az $[a,b]$ intervallumon folytonos, növekvő, és csak pozitív értékeket vesz fel! A függvény grafikonja alapján igazoljuk, hogy

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy = bf(b) - af(a).$$

50. Milyen feltételeknek kell az a, b, c, d állandókra teljesülniük ahhoz, hogy az

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

racionális törtfüggvény invertálható legyen?

51. Ha $f^{-1}(x)$ helyébe $g(x)$-et írunk, akkor a (7.1) egyenlet a

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}, \text{ illetve } g'(f(a)) \cdot f'(a) = 1$$

alakot ölti. Az utóbbi egyenletben a helyébe x-et írva azt kapjuk, hogy

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1.$$

Az utolsó egyenlet a láncszabályra emlékeztet – nem véletlenül.

Tegyük fel ugyanis, hogy f és g differenciálható függvények egymás inverzei, azaz $(f \circ g)(x) = x$ minden x esetén! Deriváljuk az egyenlet mindkét oldalát (a bal oldalon alkalmazzuk a láncszabályt)! Mit kapunk? (Ez *nem* bizonyítása az 1. Tételnek, mivel a tétel állítását, miszerint a $g = f^{-1}$ inverz függvény differenciálható, eleve feltételeztük.)

52. **Térfogatszámítás:** Legyen $a > 0$; legyen továbbá f az $a \leq x \leq b$ intervallumon differenciálható, növekvő függvény; tegyük fel, hogy az f^{-1} inverz függvény is differenciálható! Forgassuk meg az y-tengely körül az f grafikonja, valamint az $x = a$ és az $y = f(b)$ egyenletű egyenesek által határolt tartományt! Az így keletkezett forgástest térfogatát kétféle módon is kiszámíthatjuk:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \pi((f^{-1}(y))^2 - a^2)dy = \int_a^b 2\pi x(f(b) - f(x))dx.$$

A két módszer egyenértékűségének bizonyításához legyen

$$W(t) = \int_{f(a)}^{f(t)} \pi((f^{-1}(y))^2 - a^2)dy \quad \text{és}$$

$$S(t) = \int_a^t 2\pi x(f(b) - f(x))dx.$$

Igazoljuk, hogy a W és S függvények megegyeznek az $[a,b]$ egy pontjában, valamint deriváltjuk az $[a,b]$ intervallum minden pontjában ugyanazt az értéket veszi fel! A 4.8. alfejezet 102. feladata szerint ez elég ahhoz, hogy minden $t \in [a,b]$ esetén fennálljon $W(t) \stackrel{t}{=} S(t)$, így teljesül $W(b) = S(b)$ is. [L. Walter Carlip: Disks and Shells Revisited. *Am. Math. Monthly* Vol. 98. No. 2. (1991), pp. 154–156.]

Számítógépes vizsgálatok

Az 53–60. feladatokban függvényeket, ezek inverzét, a deriváltjaikat, valamint adott pontbeli lineáris approximációkat vizsgálunk. Használjunk megfelelő grafikus programot, és kövessük az alábbi lépéseket!

(a) Ábrázoljuk az $y = f(x)$ függvényt, valamint az f' deriváltfüggvény grafikonját a megadott intervallum fölött! Magyarázzuk meg, honnan tudjuk, hogy f – a szóban forgó intervallumon – injektív!

(b) Oldjuk meg x-re az $y = f(x)$ egyenletet, és írjuk fel a $g = f^{-1}$ inverz függvény képletét!

(c) Írjuk fel az f grafikonját az $(x_0, f(x_0))$ pontban érintő egyenes egyenletét!

(d) Az inverz függvény grafikonjának szimmetriatulajdonsága alapján írjuk fel a g grafikonját az $(f(x_0), x_0)$ pontban érintő egyenes egyenletét! (Az egyenes meredekségének meghatározásához használjuk az 1. Tételt!)

(e) Rajzoltassuk fel az f és a g függvények grafikonját, az $x = y$ egyenletű egyenest, a két érintőt, valamint az $(x_0, f(x_0))$ és $(f(x_0), x_0)$ pontokat összekötő szakaszt! Milyen szimmetriaviszonyokat látunk a főátló mentén?

53. $y = \sqrt{3x-2}$, $\frac{2}{3} \le x \le 4$, $x_0 = 3$

54. $y = \dfrac{3x+2}{2x-11}$, $-2 \le x \le 2$, $x_0 = 1/2$

55. $y = \dfrac{4x}{x^2+1}$, $-1 \le x \le 1$, $x_0 = 1/2$

56. $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$, $-1 \le x \le 1$, $x_0 = 1/2$

57. $y = x^3 - 3x^2 - 1$, $2 \le x \le 5$, $x_0 = \frac{27}{10}$

58. $y = 2 - x - x^3$, $-2 \le x \le 2$, $x_0 = \frac{3}{2}$

59. $y = e^x$, $-3 \le x \le 5$, $x_0 = 1$

60. $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, $x_0 = 1$

A következő két feladatban ismételjük meg az iménti lépéseket az implicite megadott $y = f(x)$ és $x = f^{-1}(x)$ függvényekre!

61. $y^{1/3} - 1 = (x+2)^3$, $-5 \le x \le 5$, $x_0 = -3/2$

62. $\cos y = x^{1/5}$; $0 \le x \le 1$, $x_0 = 1/2$

7.2. A természetes logaritmusfüggvény

Az $f(x) = a^x$ exponenciális függvény tetszőleges pozitív a alap esetén könnyen definiálható – egész vagy racionális x-ek esetén. Ha x irracionális, akkor nem teljesen nyilvánvaló, hogy a^x mit jelent. Ugyanez mondható a $\log_a x$ logaritmusfüggvényről – az $f(x) = a^x$ exponenciális függvény inverzéről – is. Ebben az alfejezetben az integrálszámítás segítségével definiáljuk a *természetes logaritmusfüggvényt,* amelynek a alapja különlegesen fontos szám. Ennek a függvénynek a segítségével definiáljuk az $y = a^x$ exponenciális és $\log_a x$ logaritmusfüggvényeket.

A logaritmus valaha az aritmetikai számítások elvégzésében játszott fontos szerepet. A múltban nem kis fáradsággal öt, nyolc vagy még több tizedes pontosságú logaritmustáblázatokat állítottak össze. A számítógépek kora előtt egyetlen mérnök eszköztárából sem hiányozhatott a logarléc, amelynek beosztásai logaritmusos skála szerint követték egymást. A logaritmusokkal való számolás tette lehetővé a hajózás és a csillagászat 17. századi nagy eredményeit is. Napjainkban a számítógépek segítségével sokkal hatékonyabb a számolás, a logaritmusfüggvény jellemzőinek és alkalmazásainak ismerete azonban továbbra is nélkülözhetetlen.

A természetes logaritmusfüggvény definíciója

A logaritmus definíciójához és megértéséhez a természetes logaritmusfüggvény értelmezése jelent biztos alapot. A függvényt az integrálszámítás alaptételére hivatkozva egy határozott integrálként értelmezzük. Ez a megközelítés első pillantásra kevéssé közvetlennek tűnik, de segítségével könnyedén megkapjuk az exponenciális és logaritmusfüggvények jól ismert tulajdonságait. Ezidáig a függvényeket az analízis eszközeit felhasználva vizsgáltuk, most azonban – az „alapokhoz" közelebb kerülve – az analízis arzenálját mozgósítva definiáljuk az exponenciális és a logaritmusfüggvényeket.

Egy pozitív szám természetes logaritmusát – jelölése $\ln x$ – egy határozott integrál értékeként értelmezzük.

DEFINÍCIÓ: Természetes logaritmus

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0$$

Ha $x > 1$, akkor $\ln x$ az $y = 1/t$ függvény grafikonja alatti terület a $t = 1$ és a $t = x$ között (7.9. ábra). Ha $0 < x < 1$, akkor $\ln x$ a görbe alatti terület x és 1 közötti részének ellentettje. Az $x \leq 0$ számokra a függvényt nem értelmezzük. A nulla hosszúságú intervallumokra vonatkozó szabály alapján

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0.$$

Vegyük észre, hogy a 7.9. ábrában a grafikont $y = \frac{1}{x}$-ként címkéztük meg, az integrálban azonban $y = \frac{1}{t}$-t írtunk. Ha mindenütt x-et írunk, akkor az

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x}\,dx$$

kifejezést kaptuk volna, amelyben az x két különböző dolgot jelent egyszerre. Az integrálban szereplő változót emiatt cseréltük t-re.

Az $y = 1/t$ függvény grafikonja alatti területet téglalapokkal közelítve (az 5.1. alfejezetben bemutatott módszert követve) meghatározhatjuk az $\ln x$ függvény közelítő értékeit. A 7.1. táblázatban néhány így meghatározott közelítő értéket tüntettünk fel. A továbbiakban rendkívül fontos szerepet kap az a szám, amelynek logaritmusa 1.

x	ln x
0	nem értelmezett
0,05	−3,00
0,5	−0,69
1	0
2	0,69
3	1,10
4	1,39
10	2,30

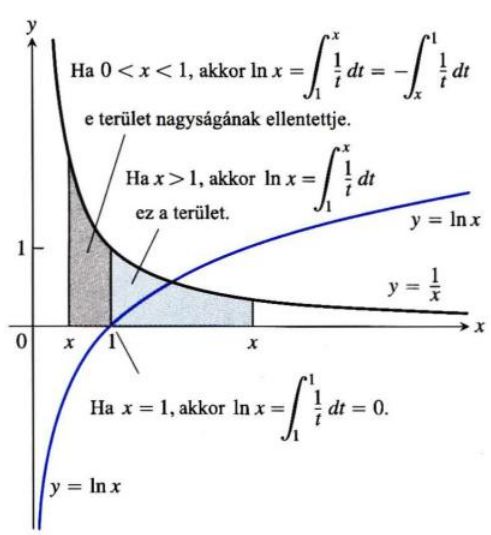
7.1. TÁBLÁZAT: Néhány gyakran előforduló $\ln x$ függvényérték 2 tizedesjegy pontossággal.

DEFINÍCIÓ: Az e szám

Az e szám a természetes logaritmusfüggvény értelmezési tartományának azon eleme, amelyre

$$\ln e = 1.$$

Geometriailag az e az x-tengely azon pontja, amelyre teljesül, hogy az $y = 1/t$ függvény grafikonja és az $[1, e]$ intervallum közötti terület éppen 1 egység. A 7.9. ábrán a kék színű terület pontosan akkor 1, amikor $x = e$.



7.9. ÁBRA: Az $y = \ln x$ és az $y = 1/x$ $(x > 0)$ függvény grafikonja. A logaritmusfüggvény 1-től jobbra haladva az x-tengely fölé emelkedik, 1-től balra haladva pedig az x-tengely alá bukik.

Az $y = \ln x$ függvény deriváltja

Az integrálszámítás alaptételének első része (5.4. alfejezet) szerint

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}dt = \frac{1}{x}.$$

Eszerint tehát tetszőleges pozitív x esetén:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}.$$

Az $y = \ln x$ függvény tehát annak a kezdetiérték-problémának a megoldása, amelyben $dy/dx = 1/x$, $x > 0$ és $y(1) = 0$. Vegyük észre, hogy a derivált mindig pozitív, a természetes logaritmusfüggvény tehát – teljes értelmezési tartományán – növekvő függvény, aminek következtében injektív, tehát invertálható. A természetes logaritmusfüggvény inverzével részletesen a 7.3. alfejezetben foglalkozunk.

Ha u olyan differenciálható függvény, amelynek minden értéke pozitív, akkor a mindenütt értelmezett $\ln u$ függvényre a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

láncszabályt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{d}{du}\ln u \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \quad u > 0. \tag{7.2}$$

1. PÉLDA: **Deriváltak természetes logaritmussal**

(a) $\dfrac{d}{dx}\ln 2x = \dfrac{1}{2x}\dfrac{d}{dx}(2x) = \dfrac{1}{2x}\cdot 2 = \dfrac{1}{x}.$

(b) A (7.2) egyenletből az $u = x^2 + 3$ függvényre azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dx}\ln(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\cdot\frac{d}{dx}(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+3}.$$

Az iménti példa (a) része szerint az $y = \ln 2x$ és az $y = \ln x$ függvény deriváltja megegyezik. Ez a figyelemreméltó összefüggés tetszőleges $y = \ln ax$ függvény esetén (ahol $a > 0$) igaz:

$$\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{ax}\frac{d}{dx}(ax) = \frac{1}{2x}\cdot a = \frac{1}{x}. \tag{7.3}$$

Mivel deriváltjaik egyenlők az $x > 0$ intervallumon, az $y = \ln x$ és az $y = \ln ax$ függvények legfeljebb egy konstansban különbözhetnek egymástól.

A logaritmusfüggvény tulajdonságai

A John Napier (1550–1617) által elsőként definiált logaritmusfüggvények a számítógépek megjelenése előtt az aritmetikai számítások szempontjából a legfontosabb előrelépésnek tekintendők. Alkalmazásuk szempontjából a legfontosabb tulajdonságuk, hogy pozitív számok szorzása a logaritmusok összeadására vezethető vissza, az osztás a logaritmusok kivonására, a hatványozás pedig a logaritmusnak a kitevővel való szorzására. Ezeket a tulajdonságokat foglalják össze

a 2. Tétel szabályai. (A 4. szabályt racionális kitevőkre mondjuk ki – a bizonyítás során nyilvánvalóvá válik, hogy miért.)

2. TÉTEL: **A logaritmus tulajdonságai**

Tetszőleges $a, x > 0$ számok esetén teljesülnek a következők:

1. *Szorzatszabály:* $\ln ax = \ln a + \ln x$
2. *Hányadosszabály:* $\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$
3. *Reciprokszabály:* $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ A 2. szabály az $a = 1$ esetben.
4. *Hatványszabály:* $\ln x^r = r \ln x$ r racionális.

Lássuk a szabályok néhány alkalmazását!

2. PÉLDA: **A logaritmusszabályok alkalmazása**

(a) $\ln 6 = \ln(2 \cdot 3) = \ln 2 + \ln 3$ szorzat

(b) $\ln 4 - \ln 5 = \ln \frac{4}{5} = \ln 0{,}8$ szorzat

(c) $\ln \frac{1}{8} = -\ln 8 = -\ln 2^3 = -3 \ln 2$ reciprok, hatvány

3. PÉLDA: **A logaritmusszabályok alkalmazása függvényekre**

(a) $\ln 4 + \ln \sin x = \ln(4 \sin x)$ szorzat

(b) $\ln \frac{x+1}{2x+3} = \ln(x+1) - \ln(2x-3)$ hányados

(c) $\ln \sec x = \ln \frac{1}{\cos x} = -\ln \cos x$ reciprok

(d) $\ln \sqrt[3]{x+1} = \ln(x+3)^{1/3} = \frac{1}{3} \ln(x+1)$ hatvány

Lássuk most a 2. Tétel bizonyítását! A bizonyítás lépései emlékeztetnek a logaritmusos feladatok megoldásának lépéseire.

Az $\ln ax = \ln a + \ln x$ szabály igazolása. A gondolatmenet szokatlan, de annál elegánsabb. Vegyük észre először is, hogy (a (7.3) egyenlőség szerint) $\ln ax$ és $\ln x$ deriváltja azonos. A középértéktétel 2. Következménye szerint a két függvény legföljebb egy konstansban térhet el, azaz

$$\ln ax = \ln x + C$$

valamely C állandóval.

Mivel ez az egyenlőség minden x-re igaz, $x = 1$-re is áll:

$$\begin{aligned} \ln(a \cdot 1) &= \ln 1 + C, \\ \ln a &= 0 + C, \qquad \ln 1 = 0 \\ C &= \ln a. \end{aligned}$$

Behelyettesítve:

$$\ln ax = \ln a + \ln x.$$

Az $\ln x^r = r \ln x$ $(r \in \mathbb{Q})$ szabály igazolása. A gondolatmenet lényegében ugyanaz. Minden pozitív x szám esetén

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln x^r &= \frac{1}{x^r} \frac{d}{dx}(x^r) = && \text{(7.2) az } u = x^r \text{ esetben.} \\ &= \frac{1}{x^r} r x^{r-1} = && \text{A hatványszabályt csak racionális } r\text{-ekre bizonyítottuk!} \\ &= r \cdot \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}(r \ln x). \end{aligned}$$

Az $\ln x^r$ és az $r\ln x$ függvény deriváltja megegyezik, így

$$\ln x^r = r\ln x + C$$

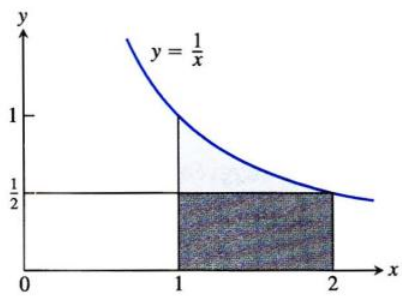
valamely C konstans esetén. Az x helyébe 1-et írva azt kapjuk, hogy $C = 0$, és ezzel meg is vagyunk.

A 2. szabály bizonyítását a 84. feladatban az Olvasóra bízzuk. A 3. szabály a 2. speciális esete: $a = 1$, és csak annyit kell észrevenni, hogy $\ln 1 = 0$. Ezzel a 2. Tétel bizonyítását befejeztük. □

Adósak maradtunk a 4. szabály bizonyításával arra az esetre, amikor r irracionális. A szabály irracionális r-ekre is érvényben marad, de ezt csak a 7.3. alfejezetben fogjuk bebizonyítani.

Az $\ln x$ függvény értékkészlete és grafikonja

Mivel a logaritmusfüggvény $d(\ln x)/dx = 1/x$ deriváltja minden $x > 0$ esetén pozitív, $\ln x$ növekvő függvény. A $-1/x^2$ második deriváltfüggvény mindenütt negatív, $\ln x$ tehát konkáv.



7.10. ÁBRA: Az $[1,2]$ intervallum fölötti, $\frac{1}{2}$ magasságú téglalap teljes egészében az $y = 1/x$ függvény grafikonja alá esik.

A felülről az $y = 1/x$ grafikonja, alulról az $[1,2]$ intervallum által határolt területet (7.10. ábra) vizsgálva megbecsülhetjük $\ln 2$ értékét. Az $[1,2]$ intervallum fölötti, $\frac{1}{2}$ magasságú téglalap teljes egészében a grafikon alatt van, a grafikon alatti terület tehát nagyobb, mint a téglalapé: $\ln 2 > \frac{1}{2}$. Ennek következtében teljesül

$$\ln 2^n = n\ln 2 > n\cdot\frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

és

$$\ln 2^{-n} = -n\ln 2 < -n\cdot\frac{1}{2} = -\frac{n}{2}.$$

Mindezek alapján

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Az $\ln x$ függvény értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza, értékkészlete pedig – a fenti összefüggések, valamint a középértéktétel alapján – az összes valós szám halmaza. A függvény grafikonját a 7.9. ábrán tanulmányozhatjuk.

Az $\int (1/u)du$ integrál

A (7.2) egyenlet szerint tetszőleges u pozitív, differenciálható függvény esetén

$$\int \frac{1}{u}du = \ln u + C, \tag{7.4}$$

de mi van akkor, ha u mindenütt negatív? Ha u negatív, akkor $-u$ pozitív, és

$$\int \frac{1}{u}du = \int \frac{1}{-u}d(-u) = \ln(-u) + C. \qquad \text{(7.4), } u \text{ helyében } -u\text{-val.} \tag{7.5}$$

A (7.4) és a (7.5) összefüggést egy képletbe is összefoglalhatjuk, ha észrevesszük, hogy a jobb oldalon mindkét esetben $\ln|u| + C$ áll. A (7.4) egyenletben $\ln u = \ln|u|$, mivel $u > 0$; a (7.5) egyenletben $\ln(-u) = \ln|u|$, mivel $u < 0$. Tehát u akár pozitív, akár negatív, $(1/u)du$ határozatlan integrálja egyaránt $\ln|u| + C$.

Ha u egy intervallumon differenciálható és sehol sem 0 függvény, akkor ezen az intervallumon

$$\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C. \tag{7.6}$$

A (7.6) egyenlet $1/u$ értelmezési tartományának minden pontjára – vagyis amelyekre $u \neq 0$ – érvényes.

Racionális, -1-től különböző n-ek esetén

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,$$

a (7.6) összefüggés pedig megmondja, mi a teendő, ha $n = -1$. (7.6) szerint bizonyos alakú függvények integrálásakor logaritmusos kifejezést kapunk. Ha $u = f(x)$, akkor $du = f'(x)dx$ és

$$\int \frac{1}{u} du = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx.$$

A (7.6) egyenlet alapján végül a következőt kapjuk:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C,$$

minden olyan $f(x)$ differenciálható függvény esetén, amely a vizsgált tartományon nem vált előjelet.

4. PÉLDA: **A (7.6) összefüggés alkalmazása**

(a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{x^2-5} dx = \int_{-5}^{-1} \frac{du}{u} = \Big[\ln|u|\Big]_{-5}^{-1} =$ $\quad u = x^2 - 5,\ du = 2x dx,\ u(0) = -5.,\ u(2) = -1$

$$= \ln|-1| - \ln|-5| = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5.$$

(b) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4\cos\theta}{3+2\sin\theta} d\theta = \int_1^5 \frac{2}{u} du =$ $\quad u = 3+2\sin\theta,\ du = 2\cos\theta d\theta,\ u(-\pi/2) = 1,\ u(\pi/2) = 5$

$$= \Big[2\ln u\Big]_1^5 = 2\ln|5| - 2\ln|1| = 2\ln 5$$

Mivel $3+2\sin\theta$ a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumon mindenütt pozitív, az (7.4) összefüggés valóban alkalmazható.

A tangens- és a kotangensfüggvény integrálja

A (7.6) összefüggés alapján a $\operatorname{tg} x$ és a $\operatorname{ctg} x$ függvény integrálját is meghatározhatjuk. Lássuk először a tangensfüggvényt:

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-du}{u} = \quad u = \cos x \neq 0, \text{ pl. ha } -\pi/2 < x < \pi/2,\ du = -\sin x\, dx$$

$$= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C =$$

$$= -\ln|\cos x| + C = \ln \frac{1}{|\cos x|} + C = \quad \text{reciprokszabály}$$

$$= \ln|\sec x| + C.$$

A kotangensfüggvény integráljának kiszámítása hasonlóan megy:

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \quad u = \sin x,\ du = \cos x\, dx$$

$$= \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C = -\ln|\csc x| + C.$$

$$\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C$$
$$\int \operatorname{ctg} u\,du = \ln|\sin u| + C = -\ln|\csc u| + C$$

5. PÉLDA:

Az $u = 2x$, $dx = du/2$ helyettesítéssel, figyelembe véve, hogy $u(0) = 0$ és $u(\pi/6) = \pi/3$:

$$\int_0^{\pi/6} \operatorname{tg} 2x\,dx = \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg} u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg} u\,du =$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\ln|\sec u|\Big]_0^{\pi/3} = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Logaritmusos deriválás

Ha egy mindenütt pozitív függvény képletében törtek, szorzatok és hatványok szerepelnek, akkor a függvény deriváltjának kiszámításához gyakran célszerű, ha a deriválás előtt mindkét oldal logaritmusát vesszük. A logaritmusszabályok alkalmazásával a függvény képlete egyszerűbbé válik. A **logaritmusos deriválásnak** nevezett módszert egy példán szemléltetjük.

6. PÉLDA:

Határozzuk meg a dy/dx deriváltat, ha

$$y = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}, \quad x > 1.$$

Megoldás: Mindkét oldal logaritmusát véve a függvény képlete egyszerűsödik:

$$\ln y = \ln\frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1} =$$
$$= \ln((x^2+1)(x+3)^{1/2}) - \ln(x-1) = \qquad \text{2. szabály}$$
$$= \ln(x^2+1) + \ln(x+3)^{1/2} - \ln(x-1) = \qquad \text{1. szabály}$$
$$= \ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x+3) - \ln(x-1). \qquad \text{3. szabály}$$

Mindkét oldalt x szerint deriválva a (7.2) összefüggés felhasználásával a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1}.$$

Az egyenletet dy/dx-re oldjuk meg:

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1}\right),$$

végül y képletét behelyettesítve:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1}\right).$$

A hányados- és a szorzatszabály alkalmazásával sokkal többet kellett volna számolnunk. □

7.2. Feladatok

A logaritmus tulajdonságai

1. Fejezzük ki a logaritmusokat $\ln 2$ és $\ln 3$ segítségével!

(a) $\ln 0{,}75$ **(b)** $\ln(4/9)$

(c) $\ln(1/2)$ **(d)** $\ln\sqrt[3]{9}$

(e) $\ln 3\sqrt{2}$ **(f)** $\ln\sqrt{13{,}5}$

2. Fejezzük ki logaritmusokat $\ln 5$ és $\ln 7$ segítségével!

(a) $\ln(1/125)$ **(b)** $\ln 9{,}8$

(c) $\ln 7\sqrt{7}$ **(d)** $\ln 1225$

(e) $\ln 0{,}056$ **(f)** $(\ln 35+\ln(1/7))/\ln 25$

A logaritmus tulajdonságait felhasználva egyszerűsítsük a 3–4. feladatokban szereplő kifejezéseket!

3. **(a)** $\ln\sin\theta-\ln\left(\dfrac{\sin\theta}{5}\right)$

(b) $\ln(3x^2-9x)+\ln\left(\dfrac{1}{3x}\right)$

(c) $\dfrac{1}{2}\ln(4t^4)-\ln 2$

4. **(a)** $\ln\sec\theta+\ln\cos\theta$

(b) $\ln(8x+4)-2\ln 2$

(c) $3\ln\sqrt[3]{t^2-1}-\ln(t+1)$

Logaritmusos függvények deriváltja

Az 5–36. feladatokban adjuk meg az y – megfelelő független változó szerinti – deriváltját!

5. $y=\ln 3x$ **6.** $y=\ln kx$, k állandó

7. $y=\ln(t^2)$ **8.** $y=\ln(t^{3/2})$

9. $y=\ln\dfrac{3}{x}$ **10.** $y=\ln\dfrac{10}{x}$

11. $y=\ln(\theta+1)$ **12.** $y=\ln(2\theta+2)$

13. $y=\ln x^3$ **14.** $y=(\ln x)^3$

15. $y=t(\ln t)^2$ **16.** $y=t\sqrt{\ln t}$

17. $y=\dfrac{x^4}{4}\ln x-\dfrac{x^4}{16}$ **18.** $y=\dfrac{x^3}{3}\ln x-\dfrac{x^3}{9}$

19. $y=\dfrac{\ln t}{t}$ **20.** $y=\dfrac{1+\ln t}{t}$

21. $y=\dfrac{\ln x}{1+\ln x}$ **22.** $y=\dfrac{x\ln x}{1+\ln x}$

23. $y=\ln(\ln x)$ **24.** $y=\ln(\ln(\ln x))$

25. $y=\theta(\sin(\ln\theta)+\cos(\ln\theta))$

26. $y=\ln(\sec\theta+\operatorname{tg}\theta)$

27. $y=\ln\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$ **28.** $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

29. $y=\dfrac{1+\ln t}{1-\ln t}$ **30.** $y=\sqrt{\ln\sqrt{t}}$

31. $y=\ln(\sec\ln\theta)$ **32.** $y=\ln\left(\dfrac{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}{1+2\ln\theta}\right)$

33. $y=\ln\left(\dfrac{(x^2+1)^5}{\sqrt{1-x}}\right)$ **34.** $y=\ln\sqrt{\dfrac{(x+1)^5}{(x+2)^{20}}}$

35. $y=\displaystyle\int_{x^2/2}^{x^2}\ln\sqrt{t}\,dt$ **36.** $y=\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}}\ln t\,dt$

Integrálás

Határozzuk meg az integrálokat (37–54. feladatok)!

37. $\displaystyle\int_{-3}^{-2}\frac{dx}{x}$ **38.** $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{3}{3x-2}dx$

39. $\displaystyle\int\frac{2y}{y^2-25}dy$ **40.** $\displaystyle\int\frac{8r}{4r^2-5}dr$

41. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{2-\cos t}dt$ **42.** $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\frac{4\sin\theta}{1-4\cos\theta}d\theta$

43. $\displaystyle\int_1^2\frac{2\ln x}{x}dx$ **44.** $\displaystyle\int_2^4\frac{dx}{x\ln x}$

45. $\displaystyle\int_2^4\frac{dx}{x(\ln x)^2}$ **46.** $\displaystyle\int_2^{16}\frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}}$

47. $\displaystyle\int\frac{3\sec^2 t}{6+3\operatorname{tg}t}dt$ **48.** $\displaystyle\int\frac{\sec y\operatorname{tg}y}{2+\sec y}dy$

49. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}dx$ **50.** $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\operatorname{ctg}t\,dt$

51. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}2\operatorname{ctg}\frac{\theta}{3}d\theta$ **52.** $\displaystyle\int_0^{\pi/12}6\operatorname{tg}3x\,dx$

53. $\displaystyle\int\frac{dx}{2\sqrt{x}+2x}$ **54.** $\displaystyle\int\frac{\sec x\,dx}{\sqrt{\ln(\sec x+\operatorname{tg}x)}}$

Logaritmusos differenciálás

A logaritmusos deriválás módszerével adjuk meg y (megfelelő független változó szerinti) deriváltját (55–68. feladatok)!

55. $y=\sqrt{x(x+1)}$ **56.** $y=\sqrt{(x^2+1)(x-1)^2}$

57. $y=\sqrt{\dfrac{t}{t+1}}$ **58.** $y=\sqrt{\dfrac{1}{t(t+1)}}$

59. $y=\sqrt{\theta+3}\sin\theta$ **60.** $y=(\operatorname{tg}\theta)\sqrt{2\theta+1}$

61. $y=t(t+1)(t+2)$ **62.** $y=\dfrac{1}{t(t+1)(t+2)}$

63. $y=\dfrac{\theta+5}{\theta\cos\theta}$ **64.** $y=\dfrac{\theta\sin\theta}{\sqrt{\sec\theta}}$

65. $y=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}}$ **66.** $y=\sqrt{\dfrac{(x+1)^{10}}{(2x+1)^5}}$

67. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x-2)}{x^2+1}}$ **68.** $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}}$

További példák és feladatok

69. Határozzuk meg a függvények abszolút szélsőértékét a megadott intervallumon!

(a) $\ln(\cos x)$, $[-\pi/4, \pi/3]$

(b) $\cos(\ln x)$, $[1/2, 2]$

70. **(a)** Igazoljuk, hogy $f(x) = x - \ln x$ növekvő, ha $x > 1$!

(b) A feladat (a) része alapján bizonyítsuk be, hogy $x > 1$ esetén $\ln x < x$!

71. Határozzuk meg az $y = \ln x$ és az $y = \ln 2x$ egyenletű görbék közötti területet $x = 1$ és $x = 5$ között!

72. Határozzuk meg az $y = \operatorname{tg} x$ és az x-tengely közötti területet $x = -\pi/4$ és $x = \pi/3$ között.

73. Az első síknegyedben a koordinátatengelyek, az $y = 3$ egyenletű egyenes, valamint az $x = 2/\sqrt{y+1}$ egyenletű görbe által határolt tartományt megforgatjuk az y-tengely körül. Mekkora az így keletkezett forgástest térfogata?

74. Az $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$, az x-tengely, valamint az $x = \pi/6$, és az $x = \pi/2$ egyenletű egyenesek által határolt tartományt megforgatjuk az x-tengely körül. Mekkora az így keletkezett forgástest térfogata?

75. Az $y = 1/x^2$ egyenletű görbe és az x-tengely közötti tartománynak az $x = 1/2$ és az $x = 2$ közötti részét megforgatjuk az y-tengely körül. Mekkora az így keletkezett forgástest térfogata?

76. Az $y = 9x/\sqrt{x^3+9}$ görbe és az x-tengely által határolt tartománynak az $x = 0$ és $x = 3$ közötti részét az y-tengely körül megforgatva egy 36π térfogatú forgástestet kapunk (6.2. alfejezet, 6. feladat). Mekkora térfogatú testet kapunk, ha a szóban forgó tartományt az x-tengely körül forgatjuk meg? (A grafikont lásd a 6.2. alfejezet 6. feladatánál.)

77. Határozzuk meg a görbék megadott szakaszának hosszát!

(a) $y = (x^2/8) - \ln x$, $4 \le x \le 8$

(b) $x = (y/4)^2 - 2\ln(y/4)$, $4 \le y \le 12$

78. Adjunk meg egy görbét, amely átmegy az $(1,0)$ ponton, amelynek az $x = 1$ és $x = 2$ közötti hossza

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx!$$

T **79.** **(a)** Határozzuk meg két tizedes pontossággal azon tartomány súlypontjának koordinátáit, amelyet az $y = 1/x$ egyenletű görbe, az x-tengely, valamint az $x = 1$ és az $x = 2$ egyenletű egyenes határol!

(b) Vázoljuk a tartományt, és tüntessük fel benne a súlypontot!

80. **(a)** Adjuk meg annak az állandó sűrűségű vékony lemeznek a tömegközéppontját, amelyet alulról az x-tengely 1 és 16 közé eső része, felülről pedig az $y = 1/\sqrt{x}$ görbe határol!

(b) Adjuk meg a tömegközéppontot, ha a lemez sűrűsége nem állandó, hanem a $\delta(x) = 4\sqrt{x}$ függvény szerint változik!

Oldjuk meg a kezdetiérték-problémákat (81–82. feladatok)!

81. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{1}{x}$, $y(1) = 3$

82. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

T **83.** **Az $\ln(1+x)$ függvény linearizációja az $x = 0$ helyen:** Ahelyett, hogy az $\ln x$ függvényt az $x = 1$ hely közelében approximálnánk, egyszerűbb képletet kapunk, ha $\ln(1+x)$-et $x = 0$ közelében approximáljuk.

(a) Vezessük le az $\ln(1+x) \approx x$ linearizációt az $x = 0$ helyen!

(b) Adjunk 5 tizedes pontosságú becslést arra, hogy mekkora a hiba, ha $\ln(1+x)$ helyett x-szel számolunk a $[0;0{,}01]$ intervallumon!

(c) Ábrázoljuk $\ln(1+x)$-et és x-et a $0 \le x \le 0{,}5$ intervallumon! Ha a program lehetőséget ad rá, használjunk különböző színeket. Hol a legpontosabb, illetve a legkevésbé pontos a közelítés? A koordináták leolvasásával adjunk a hibára olyan jó korlátot, amilyenre a program képes!

84. Bizonyítsuk be a logaritmusra vonatkozó 2. Tételbeli hányadosszabályt az 1. és 4. szabály alapján, vagy ezek igazolásának gondolatmenetét módosítva!

Számítógépes vizsgálatok

85. Ábrázoljuk együtt az $\ln x$, $\ln 2x$, $\ln 4x$, $\ln 8x$ és $\ln 16x$ függvények grafikonjait (amennyit ezek közül tudunk) a $0 < x \le 10$ intervallumon. Mit tapasztalunk? Magyarázzuk meg!

86. Ábrázoljuk az $y = \ln|\sin|$ függvényt a $[0,22] \times [-2,10]$ ablakban! Magyarázzuk meg, mit látunk! Hogyan kell megváltoztatni a képletet, hogy a grafikon szárai megforduljanak?

87. **(a)** Ábrázoljuk együtt az $y = \sin x$ és az $y = \ln(a + \sin x)$ függvények grafikonját az $a = 2, 4, 8, 20, 50$ paraméterekkel a $0 \le x \le 23$ intervallumon!

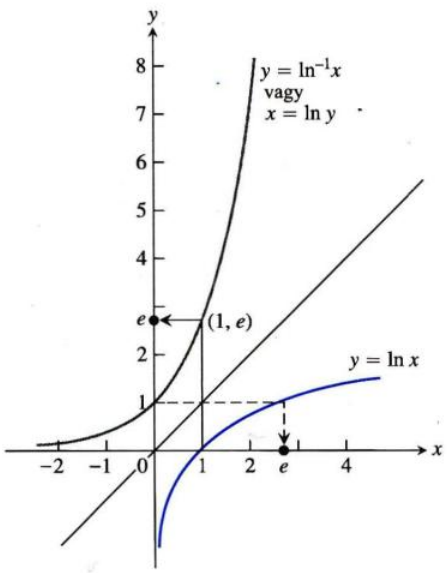
(b) Miért laposodnak a növekedtével a grafikonok? (*Útmutatás:* keressünk a-tól függő felső korlátot $|y'|$-re.)

88. Van-e inflexiós pontja az $y = \sqrt{x} - \ln x$, $x > 0$ függvény grafikonjának? Válaszoljunk **(a)** a függvénygrafikon ábrázolásával, **(b)** az analízis eszközeivel!

7.3. Az exponenciális függvény

Az $\ln x$ logaritmusfüggvény elmélete elegendő alapot biztosít arra, hogy az $\exp x = e^x$ exponenciális függvényt, a természetes logaritmus inverzeként értelmezzük. Sorra vesszük az e^x függvény tulajdonságait, és meghatározzuk a deriváltját és az integrálját is. Az exponenciális függvény deriváltjának ismeretében az x^n hatványfüggvény deriváltjára vonatkozó szabályt tetszőleges valós kitevőre kiterjesztjük.

Az $\ln x$ függvény inverze és az e szám



7.11. ÁBRA: Az $y = \ln x$ és az $y = \ln^{-1} x = \exp x = e^x$ függvény grafikonja; $e = \ln^{-1} 1 = \exp 1$.

A $(0,\infty)$ intervallumon értelmezett, $(-\infty,\infty)$ értékkészletű, növekvő (minek következtében injektív) $\ln x$ logaritmusfüggvény $\ln^{-1}$ inverzének értelmezési tartománya $(-\infty,\infty)$, értékkészlete pedig a $(0,\infty)$ intervallum. Az $\ln^{-1} x$ függvény grafikonja az $\ln x$ függvény grafikonjának az $x = y$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképe. Amint az a 7.11. ábra alapján nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \ln^{-1} x = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to-\infty} \ln^{-1} x = 0.$$

Az $\ln^{-1} x$ függvényt $\exp x$ jelöli.

A 7.2. alfejezetben az e számot az $\ln e = 1$ összefüggéssel definiáltuk, így tehát $e = \ln^{-1} 1 = \exp 1$. Az e szám irracionális; ebben az alfejezetben megmutatjuk, miként lehet határértékként értelmezni. A 11. fejezetben (11.9. alfejezet, 6. példa) az is kiderül, miként lehet e értékét tetszőleges pontossággal meghatározni; legyen ehelyütt elég e tizenöt tizedes pontosságú értéke:

$$e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045.$$

Az $y = e^x$ függvény

Az e szám racionális kitevőjű hatványait a szokásos módon értelmezzük:

$$e^2 = e \cdot e, \quad e^{-2} = \frac{1}{e^2}, \quad e^{1/2} = \sqrt{e},$$

és így tovább. Mivel e pozitív, tetszőleges r racionális szám esetén e^r is az. Így tehát e^r-nek értelmezhető a (természetes) logaritmusa. Az e^r szám logaritmusát véve

$$\ln e^r = r \ln e = r \cdot 1 = r.$$

Figyelembe véve, hogy $\ln x$ injektív, és hogy tetszőleges x esetén $\ln(\ln^{-1} r) = r$, azt kapjuk, hogy bármely racionális r szám esetén:

$$e^r = \ln^{-1} r = \exp r. \tag{7.7}$$

Igaz ugyan, hogy egyelőre nem adtuk meg e^x értelmezését irracionális x-ekre, az $\ln^{-1} x = \exp x$ függvény azonban minden x-re – racionálisokra éppúgy, mint irracionálisokra – értelmezve van. A (7.7) egyenlőség így az e^x definíciójának irracionális x-ekre való kiterjesztéseként is felfogható. Az $\ln^{-1} x$ függvény minden x valós számra értelmezve van tehát, így amikor az iménti (racionális kitevőkre vonatkozó) definíció nem alkalmazható, ennek alapján határozzuk meg e^x értékét.

Néhány e^x-érték

x	e^x kerekítve
−1	0,37
0	1
1	2,72
2	7,39
10	22026
100	$2{,}6881 \cdot 10^{43}$

DEFINÍCIÓ: A természetes alapú exponenciális függvény

Tetszőleges x valós szám esetén $e^x = \ln^{-1} x = \exp x$.

Most tehát – tanulmányaink során először – pontosan tudjuk, mi egy irracionális kitevőjű hatvány jelentése. Az e alapú exponenciális függvényt általában e^x jelöli, az $\exp x$ jelölést csak ritkán alkalmazzuk. Mivel $\ln x$ és e^x egymás inverzei,

Inverz azonosságok $\ln x$ és e^x között

$$e^{\ln x} = x, \qquad \text{ha } x > 0 \tag{7.8}$$

$$\ln(e^x) = x, \qquad \text{minden } x\text{-re.} \tag{7.9}$$

Mivel az $\ln x$ függvény értelmezési tartománya a $(0,\infty)$, értékkészlete pedig a $(-\infty,\infty)$ intervallum, azért e^x értelmezési tartománya $(-\infty,\infty)$, értékkészlete a $(0,\infty)$ intervallum.

1. PÉLDA: **Az inverz azonosságok alkalmazása**

(a) $\ln e^2 = 2$

(b) $\ln e^{-1} = -1$

(c) $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$

(d) $\ln e^{\sin x} = \sin x$

(e) $e^{\ln 2} = 2$

(f) $e^{\ln(x^2+1)} = x^2 + 1$

(g) $e^{3\ln 2} = e^{\ln 2^3} = e^{\ln 8} = 8$

(h) $e^{3\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^3 = 2^3 = 8$ (Az előző példa másképpen.)

2. PÉLDA: **A kitevő meghatározása**

Határozzuk meg k-t, ha tudjuk, hogy $e^{2k} = 10$.

Megoldás: Vegyük mindkét oldal természetes logaritmusát.

$$e^{2k} = 10,$$

$$\ln e^{2k} = \ln 10,$$

$$2k = \ln 10, \qquad \text{(7.9) alapján}$$

$$k = \frac{1}{2}\ln 10. \qquad \square$$

Az általános exponenciális függvények

Mivel tetszőleges pozitív a szám esetén $a = e^{\ln a}$, az a^x hatványt az $\left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x\ln a}$ kifejezésként értelmezhetjük. Értelmes tehát a következő:

DEFINÍCIÓ: **Általános exponenciális függvények**

Tetszőleges a pozitív szám esetén az a alapú exponenciális függvényt a következőképpen értelmezzük:

$$a^x = e^{x\ln a}$$

tetszőleges x esetén.

Ha $a = e$, akkor $a^x = e^{x\ln a} = e^{x\ln e} = e^{x\cdot 1} = e^x$.

3. PÉLDA: **Exponenciális függvény értékének meghatározása**

(a) $2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\ln 2} \approx e^{1,20} \approx 3,32$

(b) $2^{\pi} = e^{\pi\ln 2} \approx e^{2,18} \approx 8,8$

Az általános exponenciális függvényekkel és inverzeikkel részletesebben a következő alfejezetben foglalkozunk. Az e^x exponenciális függvényre vonatkozó alapvető összefüggések belátásához azonban csupán a definícióra van szükségünk.

Transzcendens számok, transzcendens függvények

A racionális együtthatójú polinomok gyökeként megadható számokat **algebrai számoknak** nevezzük: -2 például algebrai, mivel kielégíti az $x+2=0$ egyenletet, ahogy $\sqrt{3}$ is az, amely az $x^2-3=0$ egyenlet megoldása. A nem algebrai számokat **transzcendens** számoknak nevezik, ilyen többek között az e és a π is. Azt, hogy az iménti módon definiált e szám transzcendens, 1873-ban Charles Hermite bizonyította be; π-re vonatkozóan ugyanezt C. L. F. Lindemann 1882-ban mutatta meg.

Az $y = f(x)$ függvényt algebrainak mondjuk, ha kielégít egy

$$P_n y^n + \ldots + P_1 y + P_0 = 0$$

alakú egyenletet, ahol a P_i-k mindegyike racionális együtthatós polinom az x változóban. Az $y = 1/\sqrt{x+1}$ függvény például algebrai, mivel kielégíti az

$$(x+1)y^2 - 1 = 0$$

egyenletet; itt tehát $P_2 = x+1$, $P_1 = 0$ és $P_0 = -1$. A nem algebrai függvényeket nevezzük transzcendens függvénynek.

Kitevőszabályok

Bár az e^x függvényt látszólag kissé körülményesen – az $\ln x$ logaritmusfüggvény inverzeként – definiáltuk, a jól ismert algebrai szabályok az e alapú „hatványokra" is érvényben maradnak. A 3. Tétel bizonyításából kiderül, hogy ezek a tulajdonságok $\ln x$ és e^x definíciója, valamint a logaritmusra vonatkozó összefüggések egyszerű következményei.

3. TÉTEL: Az e alapú hatványkifejezések azonosságai

Tetszőleges x, x_1 és x_2 számok esetén teljesülnek a következők:

1. $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$,
2. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$,
3. $\dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$,
4. $(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1 \cdot x_2} = (e^{x_2})^{x_1}$.

Bizonyítás: Az 1. szabályt bizonyítjuk, legyen

$$y_1 = e^{x_1} \quad \text{és} \quad y_2 = e^{x_2}. \tag{7.10}$$

(7.10) mindkét oldalának logaritmusát véve:

$$\begin{aligned} x_1 &= \ln y_1 \quad \text{és} \quad x_2 = \ln y_2, \\ x_1 + x_2 &= \ln y_1 + \ln y_2 = \ln y_1 y_2, && \text{szorzatszabály logaritmusra} \\ e^{x_1+x_2} &= e^{\ln y_1 y_2} = && \text{mindkét oldal } e \text{ alapú hatványát véve} \\ &= y_1 y_2 = && e^{\ln u} = u \\ &= e^{x_1} e^{x_2}. \end{aligned}$$

A 4. szabály igazolása hasonlóan megy; a 2. és a 3. szabály az 1. szabály közvetlen következménye (78. feladat). □

4. PÉLDA: Az azonosságok alkalmazása

(a) $e^{x+\ln 2} = e^x \cdot e^{\ln 2} = 2e^x$ — 1. szabály

(b) $e^{-\ln x} = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$ — 2. szabály

(c) $\dfrac{e^{2x}}{e} = e^{2x-1}$ — 3. szabály

(d) $\left(e^3\right)^x = e^{3x} = (e^x)^3$ — 4. szabály

A 3. Tétel tetszőleges a alapú exponenciális függvény esetére is érvényben marad. Például

$$\begin{aligned} a^{x_1} \cdot a^{x_2} &= e^{x_1 \ln a} \cdot e^{x_2 \ln a} = && a^x \text{ definíciója} \\ &= e^{x_1 \ln a + x_2 \ln a} = && \text{1. szabály} \\ &= e^{(x_1+x_2)\ln a} = && a \text{ alapú hatványra emelve} \\ &= a^{x_1+x_2}. && a^x \text{ definíciója} \end{aligned}$$

Az e^x függvény deriváltja és integrálja

Az e^x exponenciális függvényt olyan differenciálható függvény inverzeként értelmeztük, amelynek deriváltja sehol sem 0, így az 1. Tétel szerint e^x is differenciálható. A deriváltat az 1. Tétel alapján határozzuk meg, felhasználva, hogy $\ln x$

deriváltját már ismerjük. Legyen tehát $f(x) = \ln x$ és $y = e^x = \ln^{-1} x = f^{-1}(x)$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{d}{dx}\ln^{-1} x = \\
&= \frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = && \text{1. Tétel} \\
&= \frac{1}{f'(e^x)} = && f^{-1}(x) = e^x \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{e^x}\right)} = && f'(z) = \tfrac{1}{z}, \text{ ahol } z = e^x \\
&= e^x.
\end{aligned}$$

Az e alapú exponenciális függvény deriváltja tehát önmaga. A 7.5. alfejezetben látni fogjuk, hogy ezzel a figyelemre méltó tulajdonsággal egyedül e^x konstansszorosai rendelkeznek. Jegyezzük meg tehát:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x. \tag{7.11}$$

5. PÉLDA: **Exponenciális függvény deriváltja**

$$\frac{d}{dx}(5e^x) = 5\frac{d}{dx}e^x = 5e^x.$$

A (7.11) összefüggés a láncszabály alapján általánosítható:

Ha u az x változó differenciálható függvénye, akkor

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}. \tag{7.12}$$

6. PÉLDA: **A láncszabály alkalmazása exponenciális függvényekre**

(a) $\dfrac{d}{dx}e^{-x} = e^{-x}\dfrac{d}{dx}(-x) = e^{-x}\cdot(-1) = -e^{-x}$ (7.12), $u = -x$

(b) $\dfrac{d}{dx}e^{\sin x} = e^{\sin x}\dfrac{d}{dx}(\sin x) = e^{\sin x}\cdot\cos x$ (7.12), $u = \sin x$

A (7.12) összefüggés integrálos alakja:

$$\int e^u du = e^u + C.$$

7. PÉLDA: **Exponenciális függvény integrálja**

(a) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{3x}dx = \int_0^{\ln 8} e^u\cdot\frac{1}{3}du =$ $\quad u = 3x,\ \tfrac{1}{3}du = dx,\ u(0) = 0$, $u(\ln 2) = 3\ln 2 = \ln 2^3 = \ln 8$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\ln 8} e^u du =$$

$$= \left[\frac{1}{3}e^u\right]_0^{\ln 8} =$$

$$= \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x\,dx = \left[e^{\sin x}\right]_0^{\pi/2} =$ lásd a 6. példát

$$= e^1 - e^0 = e - 1$$

8. PÉLDA: **Egy kezdetiérték-probléma**

Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát:

$$e^y\frac{dy}{dx} = 2x, \quad x > \sqrt{3}; \quad y(2) = 0.$$

Megoldás: A differenciálegyenlet mindkét oldalának x szerinti integrálját véve:

$$e^y = x^2 + C.$$

C értékét az $y(2) = 0$ feltétel alapján határozzuk meg:

$$C = e^0 - (2)^2 = 1 - 4 = -3.$$

Ezzel megkaptuk e^y képletét:

$$e^y = x^2 - 3.$$

Az y függvény meghatározásához vegyük mindkét oldal logaritmusát:

$$\ln e^y = \ln(x^2 - 3),$$
$$y = \ln(x^2 - 3).$$

A megoldás tetszőleges $x > \sqrt{3}$ esetén érvényes. Ellenőrzés:

$$e^y\frac{dy}{dx} = e^y\frac{d}{dx}\ln(x^2-3) =$$
$$= e^y\frac{2x}{x^2-3} = \quad \text{az } \ln(x^2-3) \text{ függvény deriváltja}$$
$$= e^{\ln(x^2-3)}\frac{2x}{x^2-3} = \quad y = \ln(x^2-3)$$
$$= (x^2-3)\frac{2x}{x^2-3} = \quad e^{\ln y} = y$$
$$= 2x.$$

Megoldásunk tehát helyes. □

Az e szám mint határérték

Az e számot az $\ln e = 1$ összefüggéssel (vagy az $\exp 1$ függvényértékként) definiáltuk. Az e szám az exponenciális és logaritmusfüggvények elméletének alapvető állandója, de egyelőre nem tudjuk, miként lehet a pontos értékét meghatározni. A következő tétel erre ad egy módszert.

4. TÉTEL: **Az e szám mint határérték**

Az e szám a következő határértékként is megadható:

$$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}.$$

Bizonyítás: Ha $f(x) = \ln x$, akkor $f'(x) = 1/x$, és így $f'(1) = 1$. A derivált definíciója szerint

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = && \ln 1 = 0 \\ &= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right]. && \ln x \text{ folytonos függvény} \end{aligned}$$

Mivel $f'(1) = 1$, azt kapjuk, hogy

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right] = 1.$$

Felhasználva, hogy $\ln e = 1$ és hogy ln injektív, ebből

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e,$$

amint azt bizonyítani kellett. □

Az $y = 1/x$ helyettesítéssel a tételbeli összefüggést így is felírhatjuk:

$$e = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}.$$

Mint az alfejezet elején már említettük, az e szám 15 tizedesjegy pontossággal: $e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045$.

Az általános hatványszabály

Az x^n hatványt tetszőleges $x > 0$ és n valós számok esetén így értelmezhetjük: $x^n = e^{n\ln x}$. Az $\ln x^n = n\ln x$ összefüggésben az n szám immár tetszőleges valós szám lehet (feltéve, hogy $x > 0$):

$$\ln x^n = \ln(e^{n\ln x}) = n\ln x,$$

itt felhasználtuk, hogy tetszőleges u esetén $\ln e^u = u$.

Az $a^x/a^y = a^{x-y}$ azonosság és az $x^n = e^{n\ln x}$ definíció alapján a hatványfüggvények deriváltjára vonatkozó szabályt a lehető legáltalánosabb formában is felírhatjuk. Deriváljuk tehát az x^n függvényt x szerint:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}e^{n\ln x} = && x^n \text{ definíciója; } x > 0 \\ = e^{n\ln x}\cdot\frac{d}{dx}(n\ln x) = && \text{láncszabály} \\ = x^n\cdot\frac{n}{x} = && \text{újra } x^n \text{ definíciója} \\ = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Ha tehát $x > 0$, akkor

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

A láncszabály alapján az összefüggés általánosítható:

Az általános hatványszabály

Ha u az x változó differenciálható pozitív függvénye és n tetszőleges valós szám, akkor u^n is differenciálható függvénye x-nek, és

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

9. PÉLDA: **A hatványszabály alkalmazása irracionális kitevőkkel**

(a) $\frac{d}{dx}x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}, \quad (x>0)$

(b) $\frac{d}{dx}(2+\sin 3x)^{\pi} = \pi(2+\sin 3x)^{\pi-1}(\cos 3x)\cdot 3 = 3\pi(2+\sin 3x)^{\pi-1}(\cos 3x)$

7.3. Feladatok

Algebrai számítások

Egyszerűsítsük a megadott kifejezéseket (1–4. feladat)!

1. **(a)** $e^{\ln 7,2}$ **(b)** $e^{-\ln x^2}$ **(c)** $e^{\ln x-\ln y}$

2. **(a)** $e^{\ln(x^2+y^2)}$ **(b)** $e^{-\ln 0,3}$ **(c)** $e^{\ln \pi x-\ln 2}$

3. **(a)** $2\ln\sqrt{e}$ **(b)** $\ln(\ln e^e)$ **(c)** $\ln(e^{-x^2-y^2})$

4. **(a)** $\ln\left(e^{\sec\theta}\right)$ **(b)** $\ln\left(e^{(e^x)}\right)$ **(c)** $\ln\left(e^{2\ln x}\right)$

Exponenciális és logaritmusos egyenletek

Fejezzük ki y-t x (illetve t) segítségével (5–10. feladatok)!

5. $\ln y = 2t+4$ **6.** $\ln y = -t+5$

7. $\ln(y-40) = 5t$ **8.** $\ln(1-2y) = t$

9. $\ln(y-1)-\ln 2 = x+\ln x$

10. $\ln(y^2-1)-\ln(y+1) = \ln(\sin x)$

Fejezzük ki k-t (11–12. feladatok)!

11. **(a)** $e^{2k} = 4$ **(b)** $100e^{10k} = 200$ **(c)** $e^{k/1000} = a$

12. **(a)** $e^{5k} = \frac{1}{4}$ **(b)** $80e^k = 1$ **(c)** $e^{(\ln 0,8)k} = 0,8$

Fejezzük ki t-t (13–16. feladatok)!

13. **(a)** $e^{-0,3t} = 27$ **(b)** $e^{kt} = \frac{1}{2}$ **(c)** $e^{(\ln 0,2)t} = 0,4$

14. **(a)** $e^{-0,01t} = 1000$ **(b)** $e^{kt} = \frac{1}{10}$ **(c)** $e^{(\ln 2)t} = \frac{1}{2}$

15. $e^{\sqrt{t}} = x^2$ **16.** $e^{(x^2)}e^{(2x+1)} = e^t$

Deriváltak

Határozzuk meg az y (megfelelő független változó szerinti) deriváltját (17–36. feladatok)!

17. $y = e^{-5x}$ **18.** $y = e^{2x/3}$

19. $y = e^{5-7x}$ **20.** $y = e^{4\sqrt{x}+x^2}$

21. $y = xe^x - e^x$ **22.** $y = (1+2x)e^{-2x}$

23. $y = (x^2-2x+2)e^x$ **24.** $y = (9x^2-6x+2)e^{3x}$

25. $y = e^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta)$ **26.** $y = \ln(3\theta e^{-\theta})$

27. $y = \cos\left(e^{-\theta^2}\right)$ **28.** $y = \theta^3 e^{-2\theta}\cos 5\theta$

29. $y = \ln(3te^{-t})$ **30.** $y = \ln\left(2e^{-t}\sin t\right)$

31. $y = \ln\left(\frac{e^{\theta}}{1+e^{\theta}}\right)$ **32.** $y = \ln\left(\frac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{\theta}}\right)$

33. $y = e^{\cos t+\ln t}$ **34.** $y = e^{\sin t}(\ln t^2+1)$

35. $y = \int_0^{\ln x} \sin e^t\,dt$ **36.** $y = \int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t\,dt$

Határozzuk meg a dy/dx deriváltat (37–40. feladatok)!

37. $\ln y = e^y \sin x$ **38.** $\ln xy = e^{x+y}$

39. $e^{2x} = \sin(x+3y)$ **40.** $\operatorname{tg} y = e^x + \ln x$

Integrálok

Határozzuk meg az integrálokat (41–62. feladatok)!

41. $\int (e^{3x}+5e^{-x})\,dx$ **42.** $\int (2e^x-3e^{-2x})\,dx$

43. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\,dx$ **44.** $\int_{-\ln 2}^{0} e^{-x}\,dx$

45. $\int 8e^{x+1}\,dx$ **46.** $\int 2e^{2x-1}\,dx$

47. $\int_{\ln 4}^{\ln 9} e^{x/2}\,dx$ **48.** $\int_{0}^{\ln 16} e^{x/4}\,dx$

49. $\int \frac{e^{\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\,dr$ **50.** $\int \frac{e^{-\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\,dr$

51. $\int 2te^{-t^2}\,dt$ **52.** $\int t^3 e^{t^4}\,dt$

53. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$ **54.** $\int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\,dx$

55. $\int_0^{\pi/4} \left(1+e^{\operatorname{tg}\theta}\right)\sec^2\theta\,d\theta$ **56.** $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(1+e^{\operatorname{ctg}\theta}\right)\csc^2\theta\,d\theta$

57. $\int e^{\sec \pi t} \sec \pi t \operatorname{tg} \pi t \, dt$

58. $\int e^{\csc(\pi+t)} \csc(\pi+t) \operatorname{ctg}(\pi+t) \, dt$

59. $\int_{\ln(\pi/6)}^{\ln(\pi/2)} 2e^v \cos e^v \, dv$

60. $\int_0^{\sqrt{\ln \pi}} 2xe^{x^2} \cos\left(e^{x^2}\right) dx$

61. $\int \frac{e^r}{1+e^r} dr$

62. $\int \frac{dx}{1+e^x}$

Kezdetiérték-problémák

Oldjuk meg a kezdetiérték-problémákat (63–66. feladatok)!

63. $\frac{dy}{dt} = e^t \sin(e^t - 2), \quad y(\ln 2) = 0$

64. $\frac{dy}{dt} = e^{-t} \sec^2(\pi e^{-t}), \quad y(\ln 4) = 2/\pi$

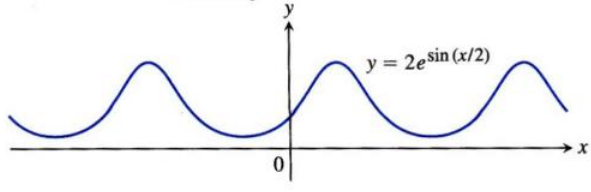
65. $\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^{-x}, \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$

66. $\frac{d^2y}{dt^2} = 1 - e^{2t}, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 0$

További példák és feladatok

67. Határozzuk meg az $f(x) = e^x - 2x$ függvény abszolút szélsőértékeit a $[0,1]$ intervallumon!

68. Adjuk meg az $f(x) = 2e^{\sin(x/2)}$ periodikus függvény szélsőértékeit és szélsőértékhelyeit!



69. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 \ln(1/x)$ függvény maximumát! Hol veszi fel a függvény a szóban forgó maximumot?

70. Ábrázoljuk az $f(x) = (x-3)^2 e^x$ függvényt és ennek $f'(x)$ deriváltját közös koordináta-rendszerben! Mondjunk valamit f viselkedéséről f' előjele és értékei alapján! Adjuk meg – esetleg számítással ellenőrizve – f grafikonjának jellemző pontjait!

71. Határozzuk meg annak az első síknegyedbeli tartománynak a területét, amelyet felülről az $y = e^{2x}$, alulról az $y = e^x$ egyenletű görbe, jobbról pedig az $x = \ln 3$ egyenletű egyenes határol!

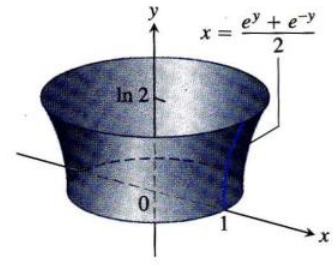
72. Határozzuk meg annak az első síknegyedbeli tartománynak a területét, amelyet felülről az $y = e^{x/2}$, alulról az $y = e^{-x/2}$ egyenletű görbe, jobbról pedig az $x = 2\ln 2$ egyenletű egyenes határol.

73. Adjunk meg egy olyan, origón átmenő görbét, amelynek hosszát $x = 0$-tól $x = 1$-ig az

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4} e^x} dx$$

integrál adja meg!

74. Határozzuk meg az $x = (e^y + e^{-y})/2$, $0 \le y \le \ln 2$ görbe y-tengely körüli forgatásával kapott test felszínét!



75. **(a)** Igazoljuk, hogy $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$!

(b) Határozzuk meg az $\ln x$ függvény átlagos értékét az $[1, e]$ intervallumon!

76. Határozzuk meg az $f(x) = 1/x$ függvény átlagos értékét az $[1,2]$ intervallumon!

77. **Az e^x függvény linearizációja az $x = 0$ helyen:**

(a) Igazoljuk, hogy $x = 0$ közelében $e^x \approx 1 + x$!

(b) Becsüljük meg 5 tizedesjegy pontossággal, hogy mekkora a hiba, ha az e^x függvényt a $[0;0,2]$ intervallumon az $1 + x$ kifejezéssel közelítjük!

(c) Ábrázoljuk az e^x és az $1 + x$ függvényt a $-2 \le x \le 2$ intervallumon! Az intervallum melyik részén közelítünk felülről, illetve alulról?

78. **A hatványszabályok:**

(a) Az alfejezetben bizonyított $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$ azonosság alapján lássuk be, hogy bármely x valós szám esetén $e^{-x} = 1/e^x$, ezután pedig azt, hogy tetszőleges x_1 és x_2 számokkal $e^{x_1}/e^{x_2} = e^{x_1 - x_2}$!

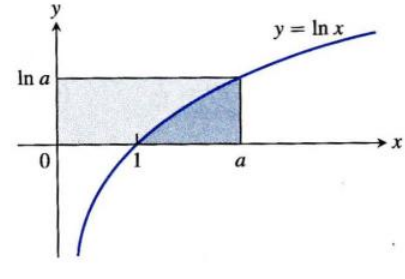
(b) Igazoljuk, hogy tetszőleges x_1 és x_2 számok esetén $(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1 x_2} = (e^{x_2})^{x_1}$!

79. **Az e szám közelítő értéke:** Számoló- vagy számítógépünk segítségével határozzuk meg e lehető legpontosabb értékét az $\ln x = 1$ egyenlet megoldásával!

80. **Az e^x és az $\ln x$ közötti inverz kapcsolat:** Az $e^{\ln x}$ és az $\ln e^x$ összetett függvények ábrázolásával állapítsuk meg, milyen pontos a számítógépünk!

81. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a > 1$ szám esetén (l. az ábrát)

$$\int_1^a \ln x \, dx + \int_0^{\ln a} e^y dy = a \ln a!$$



82. **A geometriai, a logaritmikus és a számtani közép:**

(a) Igazoljuk, hogy az e^x függvény teljes értelmezési tartományán konvex!

(b) Az ábrát is felhasználva mutassuk meg, hogy minden $0 < a < b$ esetén

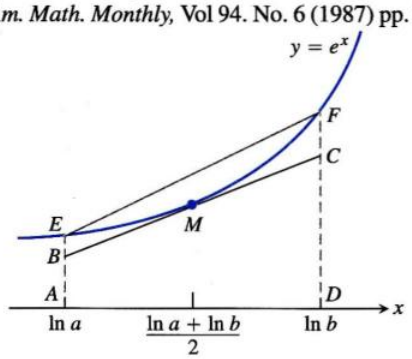
$$e^{(\ln a+\ln b)/2}\cdot(\ln b-\ln a) < \int_{\ln a}^{\ln b} e^x dx < \frac{e^{\ln a}+e^{\ln b}}{2}(\ln b-\ln a)!$$

(c) A feladat (b) része alapján igazoljuk, hogy tetszőleges $a \neq b$ pozitív számok esetén

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b-\ln a} < \frac{a+b}{2},$$

két különböző pozitív szám geometriai közepe kisebb, mint a logaritmikus közepük, amely utóbbi viszont kisebb, mint a két szám számtani közepe!

[Az érdeklődök figyelmébe Frank Burk cikkét ajánljuk: The Geometric, Logarithmic, and Arithmetic Mean Inequality, *Am. Math. Monthly,* Vol 94. No. 6 (1987) pp. 527–528.]



NEM MÉRETARÁNYOS

7.4. Az a^x és $\log_a x$ függvények

Már tudjuk, miként definiálható a 2^x, a 10^x vagy a π^x exponenciális függvény. Ebben az alfejezetben ezeknek a függvényeknek a deriváltját és integrálját is meghatározzuk, majd definiáljuk a $\log_2 x$, $\log_{10} x$ és $\log_\pi x$ logaritmusfüggvényeket, és az utóbbiak deriváltját és integrálját is kiszámítjuk.

Az a^u függvény deriváltja

Az a^x exponenciális függvényt így értelmezzük $a > 0$ esetén: $a^x = e^{x\ln a}$. A definíció alapján:

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x\ln a}\cdot\frac{d}{dx}(x\ln a). \qquad \tfrac{d}{dx}e^u = e^u\tfrac{du}{dx}$$

Ha $a > 0$, akkor

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x\ln a.$$

A láncszabály alapján a kapott összefüggés általánosítható:

> Ha $a > 0$, u pedig az x változó differenciálható függvénye, akkor a^u is differenciálható függvénye x-nek, és
>
> $$\frac{d}{dx}a^u = a^u\ln a\frac{du}{dx}. \tag{7.13}$$

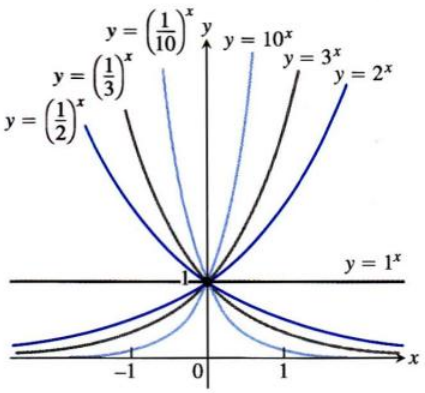
Az imént igazolt azonosságok mutatják, miben is áll az e^x exponenciális függvény jelentősége az analízisben. Amennyiben $a = e$, úgy $\ln a = 1$, az a^x exponenciális függvény deriváltja pedig a jól ismert formulára egyszerűsödik:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x\ln e = e^x.$$

1. PÉLDA: **Exponenciális függvények deriváltja**

(a) $\dfrac{d}{dx}3^x = 3^x\ln 3$

(b) $\dfrac{d}{dx}3^{-x} = 3^{-x}\cdot\ln 3\cdot\dfrac{d}{dx}(-x) = -3^{-x}\ln 3$



7.12. ÁBRA: Az a^x függvény növekvő, ha $a > 1$, és csökkenő, ha $0 < a < 1$. Ha $x \to \infty$, akkor $a^x \to 0$, ha $0 < a < 1$, és $a^x \to \infty$, ha $a > 1$. Az $x \to -\infty$ esetben pedig $a^x \to \infty$, ha $0 < a < 1$, és $a^x \to 0$, ha $a > 1$.

(c) $\dfrac{d}{dx}3^{\sin x} = 3^{\sin x} \cdot \ln 3 \cdot \dfrac{d}{dx}(\sin x) = 3^{\sin x} \cdot \ln 3 \cdot \cos x$

A (7.13) összefüggés szerint a^x deriváltja pozitív, ha $\ln a > 0$, azaz ha $a > 1$, illetve negatív, ha $\ln a < 0$, azaz ha $0 < a < 1$. Az a^x függvény tehát növekvő, amennyiben $a > 1$, és csökkenő, ha $0 < a < 1$; a függvény természetesen mindkét esetben injektív. A

$$\frac{d^2}{dx^2}a^x = \frac{d}{dx}(a^x \ln a) = (\ln a)^2 a^x$$

második derivált mindenütt pozitív, az a^x függvény tehát minden intervallumon konvex (7.12. ábra).

További általános hatványkifejezések

Immár tetszőleges pozitív alapú hatványokat értelmezni tudunk, így olyan függvényekkel is boldogulunk, mint x^x vagy $x^{\ln x}$ (ahol $x > 0$). A függvények deriváltját az exponenciális függvény segítségével adhatjuk meg.

2. PÉLDA: **Általános hatványkifejezések deriváltjai**

Határozzuk meg a dy/dx deriváltat, ha $y = x^x$, $x > 0$!

Megoldás: Írjuk fel az x^x kifejezést e hatványaként:

$$y = x^x = e^{x \ln x}.$$

A deriválás ezután már a megszokott módon megy:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}e^{x\ln x} = \\ &= e^{x\ln x}\frac{d}{dx}(x\ln x) = \\ &= x^x\left(x\frac{1}{x} + \ln x\right) = \\ &= x^x(1 + \ln x).\end{aligned}$$

□

Az a^u függvény integrálja

Ha $a \neq 1$, akkor $\ln a \neq 0$, ebben az esetben tehát a (7.13) egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk $\ln a$-val:

$$a^u \frac{du}{dx} = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(a^u).$$

Mindkét oldalt x szerint integrálva:

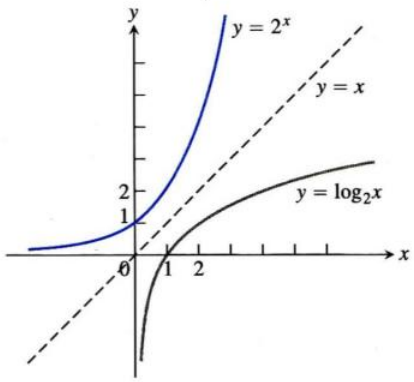
$$\int a^u \frac{du}{dx}dx = \int \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(a^u)dx = \frac{1}{\ln a}\int \frac{d}{dx}(a^u)dx = \frac{1}{\ln a}a^u + C.$$

Az első integrált differenciál-alakba írva:

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C. \qquad (7.14)$$

3. PÉLDA: **Exponenciális függvény integrálja**

(a) $\displaystyle\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ (7.14) egyenlet, $a = 2$, $u = x$



7.13. ÁBRA: A 2^x és a $\log_2 x$ függvény grafikonja; a két függvény egymás inverze.

(b) $2^{\sin x}\cos x dx =$

$$= \int 2^u du = \frac{2^u}{\ln 2} + C = \qquad u = \sin x,\ du = \cos x dx,\ (7.14)$$

$$= \frac{2^{\sin x}}{\ln 2} + C. \qquad u \text{ helyében } \sin x$$

Az a alapú logaritmusfüggvények

Már láttuk, hogy tetszőleges $a \neq 1$ pozitív szám esetén az a^x függvény injektív, mindenütt deriválható és deriváltja sehol sem nulla. Így tehát a függvény inverze is differenciálható; ez utóbbi függvényt nevezzük a **alapú logaritmusfüggvénynek**, jelölése $\log_a x$.

DEFINÍCIÓ: $\log_a x$

Tetszőleges pozitív, 1-től különböző a szám esetén

$\log_a x$ az a^x exponenciális függvény inverze.

Az $y = \log_a x$ függvény grafikonját megkapjuk, ha az $y = a^x$ függvény grafikonját tükrözzük az x-tengellyel 45°-os szöget bezáró, $x = y$ egyenletű egyenesre (7.13. ábra). Az $a = e$ esetben az $\ln x$, illetve az e^x függvényt kapjuk. Mivel $\log_a x$ és a^x egymás inverzei, kompozíciójuk – mindkét sorrendben – az identikus leképezést adja.

Inverz összefüggések a^x és $\log_a x$ között

$$a^{\log_a x} = x \qquad (\text{ha } x > 0) \qquad (7.15)$$

$$\log_a(a^x) = x \qquad (\text{minden } x\text{-re}) \qquad (7.16)$$

4. PÉLDA: **Az inverz összefüggések alkalmazása**

(a) $\log_2(2^5) = 5$ **(b)** $\log_{10}(10^{-7}) = -7$

(c) $2^{\log_2 3} = 3$ **(d)** $10^{\log_{10} 4} = 4$

A $\log_a x$ függvényértékek kiszámítása

Az a alapú logaritmusfüggvény értékeit könnyebben meghatározhatjuk, ha észrevesszük, hogy $\log_a x$ az $\ln x$ függvény konstansszorosa:

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x = \frac{\ln x}{\ln a}. \qquad (7.17)$$

A (7.17) azonosságot a (7.15) összefüggés alapján könnyen levezethetjük:

$$a^{\log_a x} = x \qquad (7.15)$$

$$\ln a^{\log_a x} = \ln x, \qquad \text{mindkét oldal logaritmusát véve}$$

$$\log_a x \cdot \ln x = \ln x, \qquad \text{2. Tétel, hatványszabály}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \qquad \ln a\text{-val osztva}$$

Tetszőleges $x > 0$ és $y > 0$ számok esetén teljesülnek az alábbiak:

1. *szorzatszabály:* $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;
2. *hányadosszabály:* $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
3. *reciprokszabály:* $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$;
4. *hatványszabály:* $\log_a x^y = y \log_a x$.

7.2. TÁBLÁZAT: A $\log_a x$ függvényre vonatkozó szabályok.

Lássunk egy példát:

$$\log_{10} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10} \approx \frac{0{,}69315}{2{,}30259} \approx 0{,}30103.$$

A $\log_a x$ függvényekre is igazolhatók az $\ln x$ függvényre a 2. Tételben kimondott szabályok (7.2. táblázat). A bizonyításhoz elegendő, ha a megfelelő egyenlőségeket rendre elosztjuk $\ln a$-val. Például:

$$\ln xy = \ln x + \ln y, \qquad \text{Az ln függvényre vonatkozó 1. szabályt}$$

$$\frac{\ln xy}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a}, \qquad \ldots \ln a\text{-val osztva} \ldots$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y. \qquad \text{a } \log_a x\text{-re vonatkozó 1. szabályt kapjuk.}$$

Deriváltak és integrálok, amelyekben $\log_a x$ szerepel

Ha olyan függvényt kell deriválnunk vagy integrálnunk, amelynek képletében a alapú logaritmusfüggvény szerepel, akkor először a logaritmusokat az $\ln x$ függvény segítségével fejezzük ki.

Ha u az x változó pozitív, differenciálható függvénye, akkor

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln u}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u}\frac{du}{dx},$$

jegyezzük meg tehát:

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

5. PÉLDA:

(a) $$\frac{d}{dx}\log_{10}(3x+1) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{3x+1}\frac{d}{dx}(3x+1) = \frac{3}{\ln 10(3x+1)}$$

(b) $$\int \frac{\log_2 x}{x}dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\ln x}{x} = \qquad \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\int u du = \qquad u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{\ln 2}\frac{(\ln x)^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2\ln 2} + C$$

10-es alapú logaritmus

A 10-es alapú logaritmus számos képletben megjelenik, szerepel például a földrengések erősségét megadó **Richter-skála** képletében is:

$$R = \log_{10}\left(\frac{a}{T}\right) + B,$$

ahol a az észlelőállomásnál érzékelt földmozgás amplitúdója mikronban, T a szeizmikus hullám periódusideje másodpercben, B pedig egy empirikus tényező, amely azt mutatja, hogy milyen ütemben csökken a szeizmikus lökéshullám ereje az epicentrumtól való távolság növekedtével.

6. PÉLDA: **Földrengés erőssége**

A földrengésjelző-állomástól 10 000 kilométerre $B = 6{,}8$. Ha az állomás $a = 10$ mikron nagyságú vertikális mozgást észlel, amelynek periódusa $T = 1$ másodperc, akkor a rengés

$$R = \log_{10}\left(\frac{10}{1}\right) + 6{,}8 = 1 + 6{,}8 = 7{,}8$$

A legtöbb étel savas kémhatású (pH< 7).

étel	pH-érték
banán	4,5–4,7
grapefruit	3,0–3,3
narancs	3,0–4,0
lime	1,8–2,0
tej	6,3–6,6
üdítőitalok	2,0–4,0
spenót	5,1–5,7

erősségű. Ilyen erősségű földrengés az epicentrum közelében igen nagy károkat képes okozni.

Az oldatok kémhatását megadó **pH-értékeket** szintén egy 10-es alapú logaritmussal fejezzük ki. Egy oldat pH-értéke az oldatbeli oxóniumion-koncentráció – jele $[H_3O^+]$ – reciprokának 10-es alapú logaritmusa:

$$\mathrm{pH} = \log_{10} \frac{1}{[H_3O^+]} = -\log_{10}[H_3O^+].$$

Az ecet pH-értéke 3, a desztillált vízé 7, a tengervízé 8,15, a háztartási ammóniáé 12. A skála egyik végén 0,1-es pH-értékkel a sósavat, a másikon, 14-es pH-értékkel a marónátront találjuk.

Ugyancsak 10-es alapú logaritmussal definiáljuk a **hangerő („decibel"-) skálát**. Ha I a hang intenzitása watt/m^2 egységben, akkor erőssége:

$$10\log_{10}(I \cdot 10^{12})\,\mathrm{dB}. \tag{7.18}$$

Nem kell tehát csodálkoznunk azon, ha egy erősítő „mindössze" néhány decibellel növeli a hang erősségét. A (7.18) összefüggés szerint – mint a következő példa mutatja – az I intenzitás megkétszerezése mindössze 3 dB-lel növeli a hangerőt.

Tipikus hangerősségek

hallásküszöb	0 dB
falevél zizegése	10 dB
suttogás	20 dB
csendes autómotor	50 dB
beszélgetés	65 dB
aszfaltfúró 3 méterről	90 dB
fájdalomküszöb	120 dB

7. PÉLDA: **Hangerő**

Ha az I intenzitás kétszeresére nő, a hangerő körülbelül 3 dB-lel növekszik. A 10-es alapú logaritmust most – ahogy általában szokás – lg jelöli (a számológépek általában a log szimbólumot használják):

$$\begin{aligned}\text{hangerő kétszeres } I\text{-vel} &= 10\lg(2I \cdot 10^{12}) = && \text{(7.18), } I \text{ helyében } 2I\text{-vel}\\ &= 10\lg 2 + 10\lg(I \cdot 10^{12}) = \\ &= \text{eredeti hangerő} + 10\lg 2 \approx \\ &\approx \text{eredeti hangerő} + 3. && \lg 2 \approx 0{,}3\end{aligned}$$

7.4. Feladatok

Algebrai számítások: a^x és $\log_a x$

Egyszerűsítsük a kifejezéseket (1–4. feladatok)!

1. (a) $5^{\log_5 7}$ (b) $8^{\log_8 \sqrt{2}}$ (c) $1{,}3^{\log_{1,3} 75}$

(d) $\log_4 16$ (e) $\log_3 \sqrt{3}$ (f) $\log_4 \frac{1}{4}$

2. (a) $2^{\log_2 3}$ (b) $10^{\log_{10}(1/2)}$ (c) $\pi^{\log_\pi 7}$

(d) $\log_{11} 121$ (e) $\log_{121} 11$ (f) $\log_3 \frac{1}{9}$

3. (a) $2^{\log_4 x}$ (b) $9^{\log_3 x}$ (c) $\log_2\left(e^{(\ln 2)(\sin x)}\right)$

4. (a) $25^{\log_5(3x^2)}$ (b) $\log_e(e^x)$ (c) $\log_4\left(2^{e^x \sin x}\right)$

Írjuk át a logaritmusokat természetes alapúra, és egyszerűsítsük a kifejezéseket (5–6. feladatok)!

5. (a) $\dfrac{\log_2 x}{\log_3 x}$ (b) $\dfrac{\log_2 x}{\log_8 x}$ (c) $\dfrac{\log_x a}{\log_{x^2} a}$

6. (a) $\dfrac{\log_9 x}{\log_3 x}$ (b) $\dfrac{\log_{\sqrt{10}} x}{\log_{\sqrt{2}} x}$ (c) $\dfrac{\log_a b}{\log_b a}$

Oldjuk meg az egyenleteket (4–10. feladatok)!

7. $3^{\log_3 7} + 2^{\log_2 5} = 5^{\log_5 x}$

8. $8^{\log_8 3} - e^{\ln 5} = x^2 - 7^{\log_7(3x)}$

9. $3^{\log_3(x^2)} = 5e^{\ln x} - 3 \cdot 10^{\log_{10} 2}$

10. $\ln e + 4^{-2\log_4 x} = \dfrac{1}{x}\log_{10} 100$

Deriváltak

Deriváljuk a függvényeket a megfelelő független változó szerint (11–38. feladatok)!

11. $y = 2^x$ **12.** $y = 3^{-x}$

13. $y = 5^{\sqrt{s}}$ **14.** $y = 2^{(s^2)}$

15. $y = x^\pi$ **16.** $y = t^{1-e}$

17. $y = (\cos\theta)^{\sqrt{2}}$ **18.** $y = (\ln\theta)^\pi$

19. $y = 7^{\sec\theta}\ln 7$ **20.** $y = 3^{\mathrm{tg}\,\theta}\ln 3$

21. $y = 2^{\sin 3t}$ **22.** $y = 5^{-\cos 2t}$

23. $y = \log_2 5\theta$ **24.** $y = \log_3(1 + \theta\ln 3)$

25. $y = \log_4 x + \log_4 x^2$ **26.** $y = \log_{25} e^x - \log_5\sqrt{x}$

27. $y = \log_2 r \cdot \log_4 r$ **28.** $y = \log_3 r \cdot \log_9 r$

29. $y = \log_3\left(\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\ln 3}\right)$ **30.** $y = \log_5\sqrt{\left(\dfrac{7x}{3x+2}\right)^{\ln 5}}$

31. $y = \theta\sin(\log_7\theta)$ **32.** $y = \log_7\left(\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{e^\theta 2^\theta}\right)$

33. $y = \log_5 e^x$ **34.** $y = \log_2\left(\dfrac{x^2e^2}{2\sqrt{x+1}}\right)$

35. $y = 3^{\log_2 t}$ **36.** $y = 3\log_8(\log_2 t)$

37. $y = \log_2\left(8t^{\ln 2}\right)$ **38.** $y = t\log_3\left(e^{(\sin t)(\ln 3)}\right)$

Logaritmusos deriválás

A logaritmusos deriválás módszerével határozzuk meg a megadott függvények – megfelelő független változó szerinti – deriváltját (39–46. feladatok)!

39. $y=(x+1)^x$ **40.** $y=x^{x+1}$

41. $y=(\sqrt{t})^t$ **42.** $y=t^{\sqrt{t}}$

43. $y=(\sin x)^x$ **44.** $y=x^{\sin x}$

45. $y=x^{\ln x}$ **46.** $y=(\ln x)^{\ln x}$

Integrálás

Határozzuk meg az integrálokat (47–56. feladatok)!

47. $\int 5^x dx$ **48.** $\int (1,3)^x dx$

49. $\int_0^1 2^{-\theta} d\theta$ **50.** $\int_{-2}^0 5^{-\theta} d\theta$

51. $\int_1^{\sqrt{2}} x2^{(x^2)} dx$ **52.** $\int_1^4 \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

53. $\int_0^{\pi/2} 7^{\cos t} \sin t dt$ **54.** $\int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{tg}\, t} \sec^2 t dt$

55. $\int_2^4 x^{2x}(1+\ln x) dx$ **56.** $\int_1^2 \frac{2^{\ln x}}{x} dx$

Határozzuk meg az integrálokat (57–60. feladatok)!

57. $\int 3x^{\sqrt{3}} dx$ **58.** $\int x^{\sqrt{2}-1} dx$

59. $\int_0^3 (\sqrt{2}+1)x^{\sqrt{2}} dx$ **60.** $\int_1^e x^{(\ln 2)-1} dx$

Határozzuk meg az integrálokat (61–70. feladatok)!

61. $\int \frac{\log_{10} x}{x} dx$ **62.** $\int_1^4 \frac{\log_2 x}{x} dx$

63. $\int_1^4 \frac{\ln 2 \log_2 x}{x} dx$ **64.** $\int_1^e \frac{2\ln 10 \log_{10} x}{x} dx$

65. $\int_0^2 \frac{\log_2(x+2)}{x+2} dx$ **66.** $\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(10x)}{x} dx$

67. $\int_0^9 \frac{2\log_{10}(x+1)}{x+1} dx$ **68.** $\int_2^3 \frac{2\log_2(x-1)}{x-1} dx$

69. $\int \frac{dx}{x\log_{10} x}$ **70.** $\int \frac{dx}{x(\log_8 x)^2}$

Határozzuk meg az integrálokat (71–74. feladatok)!

71. $\int_1^{\ln x} \frac{1}{t} dt, \quad x>1$ **72.** $\int_1^{e^x} \frac{1}{t} dt$

73. $\int_1^{1/x} \frac{1}{t} dt, \quad x>0$ **74.** $\frac{1}{\ln a}\int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x>0$

További példák és feladatok

75. Határozzuk meg az $y=2x/(1+x^2)$ egyenletű görbe és az x-tengely $-2 \le x \le 2$ intervalluma közötti tartomány területét!

76. Határozzuk meg az $y=2^{1-x}$ egyenletű görbe és az x-tengely $-1 \le x \le 1$ intervalluma közötti tartomány területét!

77. A vér pH-értéke: Az emberi vér pH-értéke normális esetben 7,37 és 7,44 közé esik. Adjuk meg $[H_3O^+]$ megfelelő határértékeit!

78. Agyfolyadék: Az agyfolyadékban $[H_3O^+] \approx 4{,}8 \cdot 10^{-8}$ mól/liter. Mennyi a folyadék pH-ja?

79. Erősítő: Hányszorosára kell növelnünk a hang intenzitását, ha a hangerősséget 10 decibellel akarjuk fokozni?

80. Erősítő: Hány decibellel növekszik a hangerő, ha az intenzitást 10-szeresére fokozzuk?

81. Az oxóniumionok és a hidroxidionok (OH^-) (mól/literben megadott) koncentrációjának szorzata minden oldatban körülbelül 10^{-14}.

(a) A $[H_3O^+]$ oxóniumion koncentráció mely értéke esetén lesz az $S=[H_3O^+]+[OH^-]$ összeg minimális? *Útmutatás:* változtassuk meg a jelölést; legyen $x=[H_3O^+]$!

(b) Mekkora annak az oldatnak a pH-értéke, amelyben S minimális?

(c) Milyen $[H_3O^+]/[OH^-]$ aránynál lesz S minimális?

82. Előfordulhat-e, hogy $\log_a b = 1/\log_b a$? Indokoljuk válaszunkat!

83. Az $x^2=2^x$ egyenletnek az $x=2$ és az $x=4$ mellett egy harmadik megoldása is van. Adjuk meg a harmadik megoldás lehető legpontosabb közelítő értékét!

84. Létezik-e olyan $x>0$ szám, amellyel $x^{\ln 2}=2^{\ln x}$? Ábrázoljuk az egyenlet mindkét oldalát, és magyarázzuk meg, amit látunk!

85. A 2^x függvény linearizációja:

(a) Adjuk meg az $f(x)=2^x$ függvény linearizációját az $x=0$ helyen! Kerekítsük a kifejezésben szereplő állandókat két tizedesre!

(b) Ábrázoljuk együtt f-et és az (a)-beli linearizációt a $-3 \le x \le 3$ és a $-1 \le x \le 1$ intervallumon!

86. A $\log_3 x$ függvény linearizációja:

(a) Adjuk meg az $f(x)=\log_3 x$ függvény linearizációját az $x=3$ helyen! Kerekítsük a kifejezésben szereplő állandókat két tizedesre!

(b) Ábrázoljuk f-et és az (a)-beli linearizációt a $0 \le x \le 8$, illetve a $2 \le x \le 4$ intervallumon.

Számolás különböző alapokkal

87. A legtöbb számológép az e és a 10-es alapú logaritmussal is számol. Más alapú logaritmusok értékének kiszámításához a (7.17) összefüggést használhatjuk fel, amely szerint $\log_a x = (\ln x)/(\ln a)$. Határozzuk meg öt tizedes pontossággal a következő logaritmusokat!

(a) $\log_3 8$ **(b)** $\log_7 0{,}5$

(c) $\log_{20} 17$ (d) $\log_{0,5} 7$

(e) $\ln x$, ha $\log_{10} x = 2{,}3$ (f) $\ln x$, ha $\log_2 x = 1{,}4$

(g) $\ln x$, ha $\log_2 x = -1{,}5$ (h) $\ln x$, ha $\log_{10} x = -0{,}7$

88. Áttérési tényezők:

(a) Igazoljuk, hogy a 10-es alapú logaritmusról a 2-es alapú logaritmusra való áttérés képlete:

$$\log_2 x = \frac{\ln 10}{\ln 2} \log_{10} x.$$

(b) Igazoljuk, hogy az a alapú logaritmusról a b alapú logaritmusra való áttérés képlete:

$$\log_b x = \frac{\ln a}{\ln b} \log_a x.$$

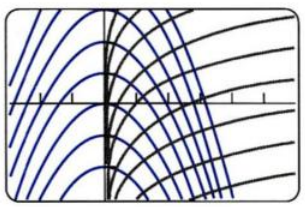
89. Ortogonális görbesereg: Igazoljuk, hogy az

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + k$$

egyenletű görbesereg (ahol k tetszőleges állandó) merőleges az

$$y = \ln x + C$$

görbeseregre (ahol C tetszőleges állandó), azaz a két család bármely tagjait véve, azok merőlegesen metszik egymást (l. az ábrát)!

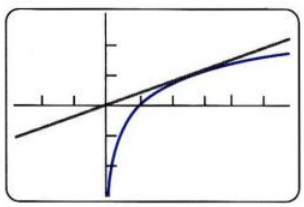


90. Inverz kapcsolat $\ln x$ és e^x között: Ellenőrizzük számológépünk pontosságát az $e^{\ln x}$ és az $\ln e^x$ kompozíciók pontos értékeinek kiszámításával!

91. Az e szám közelítő értéke: Adjuk meg e értékét a lehető legtöbb tizedes pontossággal az $\ln x = 1$ egyenlet megoldásával!

92. Melyik nagyobb: π^e vagy e^π?: A számológépek használata óta a probléma már nem olyan rejtélyes, mint egykor volt. (Azért próbáljuk ki: a számok megdöbbentően közel vannak egymáshoz!) A kérdésre mindazonáltal számológép nélkül is válaszolhatunk.

(a) Adjuk meg az $y = \ln x$ egyenletű görbe origón átmenő érintőjének egyenletét (l. az ábrát)!



[–3, 6] x [–3, 3]

(b) Az $y = \ln x$ egyenletű görbe és az érintő alapján magyarázzuk meg, miért teljesül $\ln x < x/e$ minden pozitív, e-től különböző x-re!

(c) Igazoljuk, hogy $\ln(x^e) < x$ minden pozitív $e \neq x$-re!

(d) Lássuk be ennek alapján, hogy $x^e < e^x$ minden pozitív $e \neq x$-re!

(e) Melyik tehát a nagyobb: π^e vagy e^π?

7.5. Exponenciális növekedés és csökkenés

Az exponenciális függvények rendkívül gyorsan növekednek vagy csökkennek. Ilyen függvények írnak le számos természeti és mérnöki folyamatot. Az exponenciális függvények jelentőségét mutatja az ilyen modellek változatossága is.

Az exponenciális változás törvénye

Számos olyan szituáció van, amelyben egy y mennyiség növekedése vagy csökkenése az illető mennyiség t időpontbeli mennyiségével arányos. A radioaktív bomlás, a befektetési alapok növekedése, a populációk nagysága vagy egy csésze kávé és a szoba hőmérséklete közötti különbség egyaránt ilyen módon változik. A példabeli mennyiségek exponenciálisan változnak, ebben az alfejezetben ennek a változásnak az alapképletét is levezetjük.

Ha a $t = 0$ pillanatban az y mennyiség értéke y_0, akkor a t függvényében változó y kielégíti a következő kezdetiérték-feltételt:

$$\text{differenciálegyenlet:} \quad \frac{dy}{dt} = ky, \tag{7.19}$$

$$\text{kezdeti feltétel:} \quad y = y_0, \text{ amikor } t = 0.$$

Ha y pozitív és növekvő, akkor k pozitív, (7.19) szerint ekkor a növekedés arányos az összegyűlt mennyiséggel. Ha y pozitív és csökkenő, akkor k negatív, ilyenkor a mennyiség fogyása egyenesen arányos azzal, amennyi az adott időpontban maradt belőle.

Azonnal látható, hogy az $y = 0$ konstans függvény megoldása (7.19)-nek ha $y_0 = 0$. Ahhoz, hogy megkapjuk a nemnulla megoldást, első lépésben a (7.19) egyenlet mindkét oldalát elosztjuk y-nal:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt} &= k, \\
\int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt} dt &= \int k dt, && t \text{ szerint integrálunk} \\
\ln|y| &= kt + C, && \int (1/u) du = \ln|u| + C \\
|y| &= e^{kt+C}, && \exp \text{ az ln inverze} \\
|y| &= e^C \cdot e^{kt}, && e^{ab} = e^a \cdot e^b \\
y &= \pm e^C \cdot e^{kt}, && \text{ha } |y| = r, \text{ akkor } y = \pm r \\
y &= Ae^{kt}. && A \text{ a } \pm e^C \text{ helyett}
\end{aligned}$$

Ha az A szorzókonstans a $\pm e^C$ értékek mellett a 0 értéket is felveheti, akkor az $y = 0$ konstans függvény is a megoldások között van.

Az A értékét a kezdetiérték-probléma alapján határozzuk meg ($t = 0$ esetén $y = y_0$):

$$y_0 = Ae^{k \cdot 0} = A.$$

A kezdetiérték-probléma megoldása tehát az $y = y_0 e^{kt}$ függvény.

Az így változó mennyiségről azt mondjuk, hogy exponenciálisan növekszik (amennyiben $k > 0$), illetve exponenciálisan csökken (ha $k < 0$).

Exponenciális változás

Az exponenciális változás képlete:

$$y = y_0 e^{kt}. \tag{7.20}$$

Ha $k > 0$, akkor y növekszik, ha $k < 0$, akkor csökken. A k állandó adja meg a növekedés ütemét.

A (7.20) egyenlet levezetése alapján nyilvánvaló, hogy csak az exponenciális függvény konstansszorosai olyan függvények, amelyek egyenlőek saját deriváltjukkal.

Korlátlan populációnövekedés

Egy (emberekből, növényekből, rókákból vagy baktériumokból álló) populáció létszáma szigorúan véve nem folytonos függvény, elvégre minden függvényérték egész szám. Ha azonban a populáció elég nagy, akkor a változás jó közelítéssel leírható egy folytonos függvénnyel. Az alkalmazások nagy részében célszerű, ha a közelítő függvényt differenciálhatónak tekintjük, így a populáció nagyságát az analízis eszköztárát mozgósítva előre jelezhetjük.

Ha feltesszük, hogy a reprodukcióra képes individuumok aránya és a termékenység is állandó, akkor a születési arány minden t pillanatban arányos a populáció t időpontbeli $y(t)$ létszámával. Tegyük fel továbbá, hogy a halálozási arány szintén $y(t)$-vel arányos és állandó! Ha végül figyelmen kívül hagyjuk a kívülről érkező, valamint a távozó egyedek számát, akkor dy/dt a születési arány és a halálozási arány, vagyis két, az y mennyiséggel arányos mennyiség különbsége. Másszóval: $dy/dt = kt$, így $y = y_0 e^{kt}$, ahol y_0 a populáció egyedeinek száma a $t = 0$ időpontban. Mint minden más mennyiség esetében, a külső környezet korlátozza a növekedést, ennek részleteivel azonban egyelőre nem foglalkozunk (a problémára a 9.5. alfejezetben térünk vissza).

A következő példában ezt a modellt alkalmazzuk annak vizsgálatára, hogy miként csökken egy adott betegségben szenvedők száma, ha a kezelés megfelelő.

1. PÉLDA: **Fertőző betegség felszámolása**

A megfelelően kezelt betegségek megszűnésének egyik modellje szerint a fertőzött egyedek számának dy/dt változása az y mennyiséggel arányos. Az ellátást megkapók száma arányos y-nal. Tegyük fel, hogy egy adott évben az előzőhöz képest 20 százalékkal csökken a betegek száma, valamint, hogy ekkor 10 000 beteg van. Hány év múlva csökken a betegek száma 1000-re?

Megoldás: Az $y = y_0 e^{kt}$ egyenletet használjuk. A feladat megoldása három lépésből áll: (a) az y_0, (b) a k állandó, valamint (c) azon t meghatározása, amelynél $y = 1000$.

(a) Az „időszámítás" kezdőpontjának nincs jelentősége, így feltehetjük, hogy az $y = 10000$ érték a $t = 0$ időponthoz tartozik. Eszerint tehát $y_0 = 10000$, egyenletünk pedig az

$$y = 10000e^{kt} \tag{7.21}$$

alakot ölti.

(b) Amikor $t = 1$ év, az esetek száma a $t = 0$ időpontbeli esetek számának 80%-a, azaz 8000. Ekkor tehát

$$\begin{aligned} 8000 &= 10000e^{k\cdot 1}, && \text{(7.21) egyenlet, } t = 1 \text{ és } y = 8000 \\ e^k &= 0{,}8, \\ \ln(e^k) &= \ln 0{,}8, \\ k &= \ln 0{,}8 < 0. \end{aligned}$$

Vagyis tetszőleges t időpontban

$$y = 10{,}000e^{\ln 0{,}8\cdot t}. \tag{7.22}$$

(c) A (7.22) egyenletből, y helyében 1000-rel meghatározhatjuk a keresett t-t.

$$\begin{aligned} 1000 &= 10000e^{\ln 0{,}8\cdot t} \\ e^{\ln 0{,}8\cdot t} &= 0{,}1 \\ \ln 0{,}8 \cdot t &= \ln 0{,}1 \\ t &= \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8} \approx 10{,}32 \text{ év}. \end{aligned}$$

Az esetek száma tehát valamivel több, mint tíz év alatt csökken 1000-re. □

Folytonosan jóváírt kamatok

Ha A_0 forintot r éves kamatra a bankba teszünk, a bank pedig évente k alkalommal írja jóvá a kamatokat, akkor t év múlva

$$A_t = A_0\left(1 + \frac{r}{A}\right)^{kt} \tag{7.23}$$

forintunk lesz. A kamatokat a bank havonta ($k = 12$), hetente ($k = 52$), naponta ($k = 365$), de akár ennél gyakrabban, akár minden percben, vagy minden másodpercben is jóváírhatja. Határértéket véve, ha az egy év alatti jóváírások száma tart a végtelenhez:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} A_t &= \lim_{k\to\infty} A_0\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} = \\ &= \lim_{k\to\infty} A_0\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{\frac{k}{r}rt} = \\ &= A_0\left[\lim_{k\to\infty} A_0\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{\frac{k}{r}}\right]^{rt} = && \text{amint } k \to \infty, \text{ úgy } \tfrac{r}{k} \to 0 \\ &= A_0\left[\lim_{x\to 0} A_0(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{rt} = && x = \tfrac{r}{k} \\ &= A_0 e^{rt}. && \text{4. Tétel} \end{aligned}$$

Tehát t idő elteltével

$$A(t) = A_0 e^{rt} \tag{7.24}$$

forint lesz a számlánkon.

Ha a bank így jár el, akkor **folytonos jóváírásról** beszélünk; r-et folytonos kamatlábnak nevezzük. Ekkor a pénzünk a (7.24) képlet szerint exponenciálisan nő.

2. PÉLDA: **Takarékszámla**

Tegyük fel, hogy 621 dollárt helyezünk el a bankban, amely 6%-os kamatot ír jóvá folytonosan. Mennyi pénz lesz a számlánkon 8 év múlva?

Megoldás: A (7.24) egyenletet használjuk; $A_0 = 621$, $r = 0{,}06$ és $t = 8$:

$$A(8) = 621e^{0{,}06 \cdot 8} = 621e^{0{,}48} = 1003{,}58$$

(a legközelebbi centre kerekítve).

Ha a bank negyedévente írná jóvá a kamatot, akkor a fenti összeg helyett 1000,01 dollárunk lenne. A bank tehát a „folytonos jóváírással" mindössze 3,57 dollárt veszít, cserébe viszont hirdetheti magát úgy, hogy „mi a kamatot éjjel-nappal, minden pillanatban jóváírjuk". □

Radioaktivitás

Számos olyan atom van, amely spontán módon részecskéket vagy sugárzást bocsát ki. A jelenséget **radioaktív bomlásnak**, az így viselkedő anyagokat pedig radioaktívnak nevezzük. Előfordul, hogy egy atom a folyamat során egy másik elem atomjává alakul: a 14-es szénizotóp ilyen módon nitrogénné, a rádium pedig – több lépésben – ólommá alakul.

A kísérletek tanúsága szerint a radioaktív elemek bomlásának üteme (az időegységenként megváltozó atomok száma) a mintában meglévő atomok számával arányos. A radioaktív bomlást tehát a $dy/dt = -ky$, $(k > 0)$ egyenlet írja le. (A k konstans negatív előjele azt hangsúlyozza, hogy y csökken, használhatnánk negatív k-t is, de nem ez az általános gyakorlat.) Ha a $t = 0$ időpontban a radioaktív atomok száma y_0, akkor t idő elteltével

$$y = y_0 e^{-kt}, \quad k > 0$$

radioaktív atom lesz a mintában.

3. PÉLDA: **Radioaktív izotóp felezési ideje**

A 222 tömegszámú radonizotóp esetében (ha t-t napokban mérjük) $k = 0{,}18$. A 226-os rádiumizotóp (amelyet néha nem eléggé elítélhető módon az ébresztőórák számlapján is alkalmaznak, hogy foszforeszkáljon a sötétben) $k = 4{,}3 \cdot 10^{-4}$, amennyiben t-t években mérjük.

Egy radioaktív izotóp **felezési ideje** az az időtartam, amely alatt egy mintában az adott izotóp atomjainak száma felére csökken. Figyelemre méltó, hogy a felezési idő konstans, amely a radioaktív atomok eredeti számától nem, csupán az adott elemtől függ.

Ennek belátásához legyen y_0 egy mintában jelen lévő radioaktív atomok száma; t idő elteltével ekkor $y = y_0 e^{-kt}$. Azt a t időt keressük, amely addig telik el, amíg a radioaktív atomok száma felére csökken:

$$\begin{aligned} y_0 e^{kt} &= \frac{1}{2} y_0, \\ e^{kt} &= \frac{1}{2}, \\ -kt &= \ln 12 = -\ln 2, \\ t &= \frac{\ln 2}{k}. \end{aligned}$$

A kapott t az adott elem felezési ideje, amely valóban csak k-tól függ, y_0-tól nem:

$$\text{felezési idő} = \frac{\ln 2}{k}. \tag{7.25}$$

4. PÉLDA: **A 210-es polóniumizotóp felezési ideje**

A 210-es tömegszámú polóniumizotóp igen rövid életű, így célszerű, ha az időt nem években, hanem napokban mérjük. Egy minta y elemszámát az

$$y = y_0 e^{-5\cdot 10^{-3}t}$$

képlet írja le. Adjuk meg a felezési időt!

Megoldás: Az iménti egyenlet szerint $k = 5 \cdot 10^{-3}$, így a (7.25) képlet szerint a felezési idő:

$$\frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{5 \cdot 10^{-3}} \approx 139 \text{ nap.}$$ □

5. PÉLDA: **A karbonmódszer**

A radioaktivitás segítségével a Föld régmúltja eseményeinek idejét is meghatározhatjuk. Az élő szervezetekben a 14-es tömegszámú radioaktív szénizotóp és a közönséges (12-es tömegszámú) szénizotóp aránya a szervezet életideje alatt közel állandó (és körülbelül megegyezik a környezet hasonló mutatójával), a szervezet elpusztulása után azonban a 14-es izotópok nem pótlódnak, arányuk ennek megfelelően folyamatosan csökken.

A 14-es karbonizotóp felezési ideje 5700 év. (A radioaktív kormeghatározásra a feladatokban még visszatérünk.) Milyen régi az a lelet, amelyben az eredeti szintnél 10%-kal kevesebb 14-es izotóp van?

Megoldás: Újra az $y = y_0 e^{-kt}$ egyenletet használjuk. Meg kell határoznunk k értékét, valamint azt a t-t, amelynél $y(t) = 0{,}9y_0$ (ha a szóban forgó atomok száma 10%-kal csökkent, akkor 90%-uk még jelen van). Azt a t-t keressük tehát, amelynél $y_0 e^{kt} = 0{,}9y_0$, azaz amelyre teljesül az $e^{-kt} = 0{,}9$ egyenlet.

A k állandó értékét (7.25) alapján határozzuk meg:

$$k = \frac{\ln 2}{\text{felezési idő}} = \frac{\ln 2}{5700} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-4}.$$

Az $e^{-kt} = 0{,}9$ egyenlet megoldása ezek után:

$$\begin{aligned} e^{-kt} &= 0{,}9, \\ e^{-(\ln 2/5700)\cdot t} &= 0{,}9, \\ -\frac{\ln 2}{5700}t &= \ln 0{,}9, \\ t &= -\frac{5700 \cdot \ln 0{,}9}{\ln 2} \approx 866. \end{aligned}$$

A minta körülbelül 866 éves. □

A Newton-féle hűlési törvény

Egy fémcsészében asztalon hagyott forró leves a szoba levegőjének hőmérsékletére hűl le. Egy nagy kád vízbe mártott forró ezüstöntvény addig hűl, amíg hőmérséklete egyenlő nem lesz a víz hőmérsékletével. Az ezekhez hasonló esetekben a vizsgált test hőmérséklet-változásának üteme jó közelítéssel egyenesen arányos a test és környezete hőmérsékletének különbségével. Ezt a tapasztalati tényt **Newton-féle hűlési törvénynek** nevezik, bár a felmelegedésre éppúgy alkalmazható, mint a lehűlésre.

A hűlési törvény képletének levezetéséhez jelölje H a test hőmérsékletét a t időpontban, H_S pedig a környezet (állandónak feltételezett) hőmérsékletét. A törvény szerinti differenciálegyenlet ekkor:

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_S). \tag{7.26}$$

Az $y = H - H_S$ helyettesítéssel:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}(H - H_S) = \frac{dH}{dt} - \frac{d}{dt}H_S = \\ &= \frac{dH}{dt} - 0 = \qquad \text{mivel } H_S \text{ állandó} \\ &= \frac{dH}{dt} = \\ &= -k(H - H_S) = \\ &= -ky.\end{aligned}$$

Már tudjuk, hogy a $dy/dt = -ky$ egyenlet megoldása $y = y_0 e^{-kt}$, ahol $y(0) = y_0$. Az y helyébe visszaírva $H - H_S$-t, a

$$H - H_S = (H_0 - H_S)e^{-kt} \tag{7.27}$$

egyenletet kapjuk, ahol H_0 a hőmérséklet a $t = 0$ időpontban. Ez tehát a lehűlés Newton-féle egyenlete.

6. PÉLDA: **Kemény tojás hűtése**

Egy 98°C-os kemény tojást egy nagy tál 18°C-os vízbe tesszük. Ha a tojás hőmérséklete 5 perc alatt 38°C-ra csökken, mennyi időt kell még várnunk, hogy a tojás 20°C-os legyen?

Megoldás: Meghatározzuk, mennyi idő alatt hűl le a tojás 98°C-ról 20°C-ra, és ebből levonunk 5 percet. A (7.27) egyenlet a $H_s = 18$ és $H_0 = 98$ esetben:

$$H = 18 + (98 - 18)e^{-kt}.$$

A k állandó meghatározásához azt használjuk fel, hogy $t = 5$ esetén $H = 38$:

$$\begin{aligned}38 &= 18 + 80e^{-5\cdot k}, \\ e^{-5\cdot k} &= \frac{1}{4}, \\ -5k &= \ln\frac{1}{4} = -\ln 4, \\ k &= \frac{1}{5}\ln 4 \approx 0{,}28.\end{aligned}$$

A tojás hőmérséklete a t időpontban $H = 18 + 80e^{-(0{,}2\cdot\ln 4)t}$. Most meghatározzuk, mely t esetén lesz $H = 20$:

$$\begin{aligned}20 &= 18 + 80e^{-(0{,}2\cdot\ln 4)t}, \\ 80e^{-(0{,}2\cdot\ln 4)t} &= 2, \\ e^{-(0{,}2\cdot\ln 4)t} &= \frac{1}{40}, \\ -(0{,}2\cdot\ln 4)t &= \ln\frac{1}{40} = -\ln 40, \\ t &= \frac{\ln 40}{0{,}2\cdot\ln 4} \approx 13\,\text{perc}.\end{aligned}$$

A tojás tehát 13 perc alatt hűl le 20°C-ra. Eszerint tehát körülbelül 8 percet kell várnunk, amíg hőmérséklete 38°C-ról 20°C-ra csökken. □

7.5. Feladatok

A feladatok többségének megoldása logaritmusos vagy exponenciális kifejezés, egy jó számológép tehát hasznunkra lehet.

1. Az emberi faj evolúciója nem állt meg: A Michigan University antropológiai múzeumában dolgozó C. Loring Brace és munkatársai által végzett kutatások szerint az emberi fogazat zsugorodása jelenleg is tart, nem áll tehát az a sok kutató által vallott feltevés, amely szerint az evolúciós folyamat mintegy 30 000 éve megállt. Az észak-európai népek fogazatának átlagos mérete jelenleg 1000 évente csökken 1%-kal.

(a) Jelölje t az időt (években), y pedig a fogazat méretét. Határozzuk meg az $y = y_0 e^{kt}$ egyenletben szereplő k állandó értékét annak alapján, hogy $t = 1000$ esetben $y = 0{,}99y_0$! Ezután könnyen válaszolhatunk a következő kérdésekre.

(b) Körülbelül hány év múlva lesz az emberi fogazat átlagos mérete a jelenlegi méret 90%-a?

(c) A mi fogazatunk méretének hány százaléka lesz a 20 000 évvel utánunk következő leszármazottaink fogmérete?

Forrás: *LSA Magazine,* Vol. 12 (1989), Vol. 12. (Ann Arbor, MI).

2. Légköri nyomás: A légköri nyomást gyakran olyan modellel írják le, amelynek alapfeltevése az, hogy a p nyomás a tengerszint feletti magasság függvényében való dp/dh változása p-vel arányos. Tegyük fel, hogy a tengerszinten a légköri nyomás 1013 millibar, 20 km magasságban pedig 90 millibar.

(a) Oldjuk meg a feladat szerinti kezdetiérték-problémát:

a differenciálegyenlet: $dp/dh = kp$, ahol k állandó,

a kezdeti feltétel: $p = p_0$, ha $h = 0$.

A p_0 és a k állandó meghatározásával így megkapjuk p-t h függvényében.

(b) Mekkora a légköri nyomás $h = 50$ km magasságban?

(c) Milyen magasságban lesz a nyomás 900 millibar?

3. Kémiai reakciók: Bizonyos kémiai reakciókban a résztvevő anyagok mennyiségének változása minden pillanatban az illető anyag mennyiségével arányos. A δ-glükonolakton glükonsavvá alakulását például a

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}6y$$

egyenlet írja le, ahol a t időt órákban mérjük. Ha a $t = 0$ pillanatban 100 gramm δ-glükonolakton van a mintában, mennyi lesz benne az első óra végén?

4. Cukorinverzió: A cukorgyártás egyik, inverziónak nevezett lépésében megváltozik a cukor molekuláris szerkezete. Amint a folyamat beindul, az átalakulás sebessége arányos a még át nem alakult cukor mennyiségével. Ha az első 10 órában a nyerscukor eredeti 1000 kg-os tömege 800 kg-ra csökken, mennyi nyerscukor marad további 14 óra elteltével?

5. Víz alatti munka: Az óceán felszíne alatt x méter mélységben az $L(x)$ fényerősség kielégíti a

$$\frac{dL}{dx} = -kL$$

differenciálegyenletet. Tapasztalt búvárként tudjuk, hogy a Karib-tengeren 5,5 m mélységben a fényerősség éppen feleakkora, mint a felszínen. Mesterséges világításra van szükségünk akkor, ha a fényerősség a felszíni érték egytizedére csökken. Milyen mélyre merülhetünk búvárlámpa nélkül?

6. Kisülő kondenzátor: Egy kisülő kondenzátor lapjai közötti feszültség változása egyenesen arányos a lapok közötti U feszültséggel; ha t-t másodpercben mérjük, akkor kondenzátorunk feszültségét a

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{40}U$$

differenciálegyenlet írja le. Oldjuk meg az egyenletet; jelölje a $t = 0$ időpontbeli feszültséget U_0! Mennyi idő alatt csökken a kondenzátor feszültsége az eredeti érték egytizedére?

7. Kolerabaktérium: Tegyük fel, hogy egy baktériumpopuláció akadályok nélkül, exponenciálisan növekszik! A tenyészet egyetlen baktériummal indul, létszáma félóránként megkétszereződik. Hány baktérium lesz 24 óra elteltével? (Kedvező laboratóriumi feltételek mellett a kolerabaktériumok száma 30 percenként megduplázódik. Ha valaki elkapja a betegséget, a szervezetében sok baktérium elpusztul – a példa mindazonáltal jól illusztrálja, miként lehetséges, hogy valaki, aki reggel még makkegészséges, estére már súlyos beteg.)

8. Baktériumpopuláció növekedése: Egy baktériumpopuláció ideális, laboratóriumi körülmények között exponenciálisan növekszik; 3 óra elteltével a populáció 10 000, az ötödik óra végén 40 000 baktériumból áll. Hány baktérium volt kezdetben?

9. Járvány megfékezése: *(Az 1. példa folytatása.)*Tegyük fel, hogy a fertőzéses esetek számát 20% helyett évente 25%-kal sikerül csökkenteni.

(a) Mennyi ideig tart, amíg az esetek száma 1000-re csökken?

(b) Mennyi időbe telik a járvány teljes felszámolása, azaz amíg az esetek száma 1 alá csökken?

10. Népességnövekedés az USA-ban: A bostoni Természettudományi Múzeumban egy kijelző mutatja az USA lakosainak számát. 1993. május 11-én a lakosság 14 másodpercenként 1 fővel nőtt. Ezen a napon délután 3.45-kor a kijelző 257 313 431-et mutatott.

(a) Állandó sebességű exponenciális népességnövekedést tételezve fel adjuk meg a növekedés ütemét fő/év (1 év = 365 nap) egységben!

(b) A növekedést állandónak tekintve, hány lakosa lesz az USA-nak 2008. május 11-én, bostoni idő szerint 3.45-kor?

11. Csökkenő olajkészlet: A whittieri (Kalifornia) olajkutak egyikéből kitermelt olaj mennyisége évente 10%-kal csökken. A változást folytonosnak tekintve mennyi idő alatt csökken a kitermelés a jelenlegi mennyiség ötödére?

12. Folytonos árcsökkentés: A 100 tételes rendeléseket népszerűsítendő a cégünk bejelenti: a kedvezmény a megrendelt x mennyiséggel folytonosan növekszik. A kedvezmény minden egyes megrendelt darab esetén az egységnyi termék $p(x)$ árát 0,01 dollárral csökkenti. Egy 100-as tétel esetén egy darab árucikk $p(100) = 20{,}09$ dollárba kerül.

(a) Adjuk meg a $p(x)$ függvényt az alábbi kezdetiérték-probléma megoldásával:

a differenciálegyenlet: $dp/dx = -\frac{1}{100}p$,

a kezdeti érték: $p(100) = 20{,}09$.

(b) Mennyi az egységár egy 10-es, illetve egy 90-es tétel rendelése esetén?

(c) A marketingosztály attól tart, hogy a cég $r(x) = x \cdot p(x)$ árbevétele egy 100-as rendelés esetén kisebb lesz, mint – mondjuk – egy 90 tételes megrendelés esetén. Nyugtassuk meg a kollégákat: bizonyítsuk be, hogy az r függvény 100-nál veszi fel a maximumát!

(d) Ábrázoljuk számítógép segítségével az $r(x) = xp(x)$ árbevételi függvényt a $0 \le x \le 200$ intervallumon!

13. Folytonos kamatjóváírás: Tegyük fel, hogy A_0 forintot kötünk le a bankban, amely 4%-os éves kamatot ad folytonos jóváírással!

(a) Mennyi pénz lesz a számlánkon 5 év múlva?

(b) Mennyi idő alatt nő a betétünk az eredeti kétszeresére, illetve háromszorosára?

14. John Napier kérdése: John Napier, a logaritmust bevezető skót földesúr adott választ elsőként a következő kérdésre: mi történik, ha befektetésünk 100%-kal kamatozik, a jóváírás pedig folytonos?

(a) Mi történik?

(b) Mennyi ideig tart, amíg befektetésünk nagysága háromszorosára növekszik?

(c) Mennyit kereshetünk egy év alatt?

Válaszainkat indokoljuk!

15. Benjamin Franklin végrendelete: A bostoni Franklin Technical Institute-ot Benjamin Franklin alapította, méghozzá végrendelétnek következő záradékával:

> Szeretném, ha halálom után is segíteni tudnám a bostoni és a philadelphiai fiatalembereket abban, hogy hazájuk hasznos polgáraivá váljanak. Ebből a célból kétezer font értékű alapot hozok létre, amelynek felét Boston, felét pedig Philadelphia lakosai használhatják fel, az alábbiak szerint.

Franklin azt tervezte, hogy a fiatal tanulóknak évi 5%-os kamatra nyújt kölcsönt, azzal a kikötéssel, hogy mindenkinek

> évente a kamatok mellett a felvett tőke egytizedét is vissza kell fizetniük, a visszafizetett összeget pedig további tanulók támogatására kell fordítani... Ha ezt a tervet a fentiek szerint, folyamatosan követik, akkor az alap 100 év alatt 131 ezer fontra nő, amelyből 100 ezer fontot Boston város lakóinak adományozok, hogy belátásuk szerint használják fel... A fennmaradó 31 ezer fontból további 100 éven át az imént leírtak szerint folytatni kell a fiatalok támogatását... A második százéves periódus végén – amennyiben semmiféle szerencsétlen esemény nem zavarja meg a munkát – az összeg négymillió-hatvanegyezer fontra nő.

Nem volt könnyű feladat annyi támogatandó fiatalt találni, amennyit Franklin tervezett, de az alap kezelői minden tőlük telhetőt elkövettek. Egy évszázaddal Franklin 1000 fontos adományának megérkezése után, 1894 januárjában 90 000 font fölött dönthettek a kurátorok; a mennyiség tehát nem 131-szeresére, „csupán" 90-szeresére nőtt.

Mekkora éves kamat mellett nőtt volna az eredeti összeg 100 év alatt a 90-szeresére, ha a kamatokat folytonosan írják jóvá?

16. *Az előző feladat folytatása.* Benjamin Franklin 5 százalékos kamattal, éves jóváírással számolva úgy adta meg becslését, amely szerint az 1000 font 100 év alatt 131-szeresére nő. Mekkora kamatlábbal érte volna el az alap ugyanezt a szintet 100 év alatt, ha a jóváírás folytonos?

17. Radon-222: A 222-es radonizotóp radioaktív bomlását az $y = y_0 e^{-0{,}18t}$ egyenlet írja le (t-t napokban mérve). Mennyi idő alatt csökken egy zárt térben jelen lévő radon mennyisége 10%-kal?

18. Polónium-210: A polónium felezési ideje 139 nap, a polóniumot alkalmazó berendezésünk azonban csak addig használható, amíg a benne lévő polóniummennyiség meghaladja az eredeti szint 5%-át. Körülbelül hány napig használhatjuk a berendezést?

19. Radioaktív izotóp felezési ideje: Az $y = y_0 e^{-kt}$ egyenletet használó fizikusok az $1/k$ számot a radioaktív izotóp *átlagos élettartamának* nevezik. A radon átlagos élettartama körülbelül $1/0{,}18 = 5{,}6$ nap; a 14-es szénizotópé több, mint 8000 év. Igazoljuk, hogy egy mintában jelen lévő radioaktív anyag mennyiségének 95%-a három átlagos élettartamnyi (azaz $t = 3/k$ hosszú) idő alatt felbomlik! Az átlagos élettartam alapján tehát jó becslést adhatunk arra, meddig radioaktív egy adott minta.

20. Kalifornium-252: Mi az, amiből egy gramm előállítása 27 millió dollárba kerül, alkalmas agydaganatok kezelésére, a szén kéntartalmának meghatározására és a csomagokba rejtett robbanóanyagok megtalálására? A válasz: a 252-es kaliforniumizotóp, amely olyan ritka, hogy mindössze 8 grammot állítottak elő a nyugati világban, amióta 1950-ben Glenn Seaborg felfedezte. Az izotóp felezési ideje 2645 év, ez elég hosszú ahhoz, hogy használható legyen, és elég rövid ahhoz, hogy a minták elegendően radioaktívak legyenek. Egy mikrogramm 252-es kaliforniumizotóp másodpercenként 170 millió neutront sugároz ki.

(a) Mekkora a k állandó ennél az izotópnál?

(b) Mekkora az izotóp átlagos élettartama (l. a 19. feladatot)?

(c) Mennyi idő alatt csökken egy mintában a 252-es kaliforniumizotóp mennyisége az eredeti szint 5%-ára?

21. Leves hűtése: Egy tányér leves a 20°C-os szobában 10 perc alatt hűl le 90°C-ról 60°C-ra. A Newton-féle hűlési törvény alapján válaszoljunk az alábbi kérdésekre!

(a) Mennyi időt kell még várnunk, ha 35°C-os levest szeretnénk kanalazni?

(b) A szoba helyett a tányért egy −15°C-os hűtőládába tesszük. Mennyi idő alatt csökken itt a hőmérséklete 90°C-ról 35°C-ra?

22. Ismeretlen hőmérsékletű rúd: Egy alumíniumrudat a hideg udvarról beviszünk a 18°C-os raktárba; 10 perc elteltével a rúd hőmérséklete 2°C-ra, további 10 perc múltán pedig 10°C-ra növekszik. Newton törvénye alapján becsüljük meg, hány fokos volt eredetileg a rúd?

23. Ismeretlen hőmérsékletű közeg: Egy 46°C-os vízzel teli edényt hűtőbe téve, 10 perc alatt a víz hőmérséklete 39°C-ra, további 10 perc elteltével pedig 33°C-ra csökken. A Newton-féle lehűlési törvény alapján becsüljük meg a hűtőgép belsejében lévő hőmérsékletet!

24. Levegőben hűlő ezüstöntvény: Egy ezüstöntvény hőmérséklete jelenleg 60°C-kal haladja meg a környezet hőmérsékletét. Húsz perccel ezelőtt a hőmérsékletkülönbség 70°C volt. Hány fokkal lesz melegebb az öntvény a környezetnél

(a) mostantól számított negyedóra, illetve

(b) két óra múlva?

(c) Hány óra múlva csökken a hőmérsékletkülönbség 10°C-ra?

25. A Crater-tó kora: Egy széndarabban, amely egy, az oregoni Crater-tavat létrehozó vulkánkitörés során elpusztult fából származik, a 14-es szénizotóp mennyisége az élő anyagban lévő mennyiség 44,5%-a. Mikor keletkezett a tó?

26. A radiokarbon-módszer pontossága: A következő elképzelt szituációban azt vizsgáljuk, milyen eltérést jelent a kormeghatározásban a minta 14-es szénizotóp-tartalma meghatározásának kicsiny relatív hibája.

(a) Egy 2000-ben talált csont C_{14}-tartalma az eredeti szint 17 százaléka. Becsüljük meg az állat elpusztulásának évét!

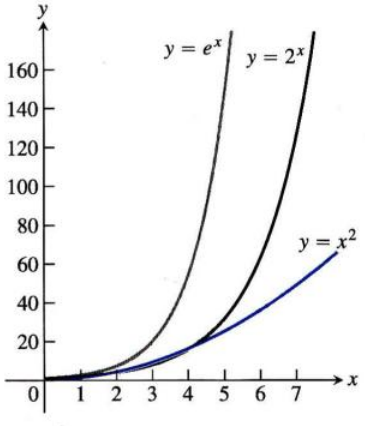
(b) Ugyanez, 17% helyett 18%-kal.

(c) Ugyanez, 17% helyett 16%-kal.

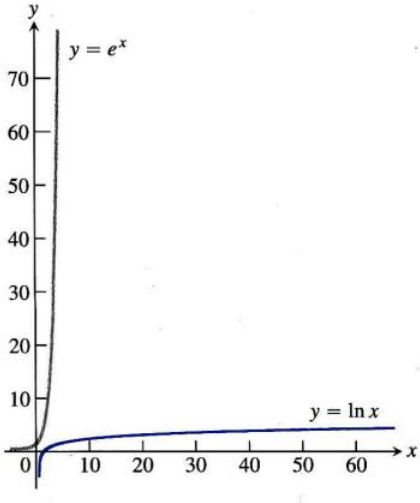
27. Hamis festmény: Egy Vermeernek (1632–1675) tulajdonított festményben az eredeti C_{14}-tartalomnak legfőljebb 96,2%-a lehet jelen, ehelyett azonban 99,5%-ot állapítunk meg. Hány éves lehet körülbelül a hamisítvány?

7.6. Relatív növekedési ütem

A matematikában, a számítógéptudományban és a mérnöki alkalmazásokban egyaránt fontos, hogy össze tudjuk hasonlítani különböző függvények növekedésének ütemét. Az exponenciális függvények ezekben az összehasonlításokban azért játszanak fontos szerepet, mert nagyon gyorsan, a logaritmusfüggvények pedig azért, mert nagyon lassan növekednek. Ebben az alfejezetben bevezetjük az o, illetve az O-jelölést az ilyen összehasonlítások leírására. Csak olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyek előbb-utóbb pozitív értéket vesznek fel, és a függvényértékek mindvégig pozitívak maradnak, amint $x \to \infty$.



7.14. ÁBRA: Az e^x, a 2^x és az x^2 függvény grafikonja.



7.15. ÁBRA: Az e^x és az $\ln x$ függvény grafikonja.

Függvény növekedésének üteme

Az Olvasó már nyilván észrevette, hogy az exponenciális függvények – például az e^x vagy a 2^x függvény – sokkal gyorsabban növekednek, mint a polinom- vagy a törtfüggvények. Az exponenciális függvények nyilván gyorsabban növekednek, mint az identikus leképezés. Azt, hogy miként hagyják el az x^2-et, a 7.14. ábrán tanulmányozhatjuk. Amint $x \to \infty$, a 2^x és az e^x függvény sokkal gyorsabban növekszik, mint x tetszőleges kitevőjű hatványfüggvénye, legyen szó akár $x^{1000000}$-ról (19. feladat).

A következő példa alapján képet kaphatunk arról, milyen gyorsan növekszik az $y = e^x$ függvény. Képzeljük el, hogy a függvény grafikonját egy táblára rajzoljuk fel, a koordinátarendszerünk tengelyein egy egység 1 cm hosszúságú. Az x-tengely első beosztásánál a megfelelő függvényérték $e^1 \approx 3$ cm-rel van a tengely fölött. Az $x = 6$ cm-nél a grafikon megfelelő pontja már $e^6 \approx 403$ cm ≈ 4 m magasan (a mennyezet magasságában, vagy már afölött) van. Amint elérjük az $x = 10$ cm-t, már $e^{10} \approx 220$ m magas táblára lenne szükségünk – ilyen magasságú épület is csak kevés van. Ha $x = 24$ cm, akkor a megfelelő y-érték félúton van a Holdig, $x = 43$ cm-nél pedig elérnénk a Naphoz legközelebbi csillagot, a Proxima Centaurit:

$$e^{43} \approx 4{,}73 \cdot 10^{18}\,\text{cm} \approx$$
$$\approx 4{,}73 \cdot 10^{13}\,\text{km} \approx$$
$$\approx 1{,}58 \cdot 10^{8}\ \text{fénymásodperc} \approx \quad \text{A fény légüres térben 1 s alatt 300 000 km-t tesz meg.}$$
$$\approx 5{,}0\ \text{fényév}.$$

A Proxima Centauri távolsága körülbelül 4,22 fényév. Ott azonban, ahol a függvényérték ekkora, az x-tengelyen még fél méterre sem vagyunk az origótól.

A logaritmusfüggvények – például a $\log_2 x$ vagy az $\ln x$ – ezzel szemben minden pozitív kitevőjű hatványfüggvénynél lassabban növekednek, amint $x \to \infty$ (21. feladat). Az előző példa alapján nyilvánvaló: ahhoz, hogy az $\ln x$ grafikonja $y = 43$ cm magasra emelkedjen, az x-tengely mentén csaknem 5 fényévnyi távolságot kell előrehaladnunk (7.15. ábra).

Ezeket az összehasonlításokat pontosítja a következő a definíció, amely megadja, mit értünk azon, hogy az $f(x)$ függvény a $g(x)$ függvénynél gyorsabban növekszik, amint $x \to \infty$.

DEFINÍCIÓ: **Függvény növekedési üteme, amint $x \to \infty$**

Tegyük fel, hogy elegendően nagy x-ek esetén az $f(x)$ és a $g(x)$ függvényértékek csak pozitívak!

1. Azt mondjuk, hogy f gyorsabban növekszik, mint g, amint $x \to \infty$, ha

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty,$$

vagy ami ezzel ekvivalens, ha

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0!$$

Ebben az esetben azt is mondhatjuk: g lassabban növekszik, mint f, amint $x \to \infty$.

2. Azt mondjuk, hogy f és g ugyanabban az ütemben növekszik, ha

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L,$$

valamely véges pozitív L számmal.

A definíció szerint $y = 2x$ nem növekszik gyorsabban, mint $y = x$, elvégre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = 2,$$

a határérték tehát véges és nem 0. Az tehát, hogy f gyorsabban növekszik, mint g, azt jelenti, hogy elég nagy x értékek esetén a $g(x)$ függvényérték elhanyagolható $f(x)$-hez képest.

1. PÉLDA: **Növekedési ütemek**

(a) Az e^x függvény gyorsabban növekszik, mint x^2, amint $x \to \infty$, mivel

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\infty/\infty} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x}}_{\infty/\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty,$$

itt kétszer is felhasználtuk a L'Hospital-féle szabályt.

(b) A 3^x függvény gyorsabban növekszik, mint 2^x, amint $x \to \infty$, hiszen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \infty.$$

(c) Az x^2 függvény gyorsabban növekszik, mint $\ln x$, amint $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x\to\infty} 2x^2 = \infty,$$

újra felhasználva a L'Hospital-szabályt.

(d) Ugyancsak a L'Hospital-szabály alapján látható be legkönnyebben, hogy $x \to \infty$ esetén $\ln x$ lassabban növekszik, mint x:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

2. PÉLDA: **Különböző alapú exponenciális és logaritmusfüggvények**

(a) Ahogy az 1. példa (b) része alapján várjuk, a különböző alapú exponenciális függvények mindig különböző ütemben változnak, amint $x \to \infty$. Ha $a > b > 0$, akkor a^x gyorsabban növekszik, ill. lassabban csökken, mint b^x: $a/b > 1$ miatt ugyanis

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \infty.$$

(b) A különböző alapú logaritmusfüggvények ezzel szemben ugyanolyan ütemben növekednek, amint $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{\log_b x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x/\ln a}{\ln x/\ln b} = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

A határérték mindig véges és sohasem 0.

Ha $x \to \infty$ esetén f ugyanolyan ütemben növekszik, mint g, g pedig ugyanolyan ütemben, mint h, akkor f és h növekedési üteme is megegyezik. Ha ugyanis

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = L_1 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{g}{h} = L_2,$$

akkor

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{h} = \lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{h} = L_1 \cdot L_2.$$

Ha L_1 és L_2 egyaránt véges, nemnulla valós számok, akkor $L_1 L_2$ is az.

3. PÉLDA: **Ugyanolyan ütemben növekvő függvények**

Igazoljuk, hogy $\sqrt{x^2+5}$ és $(2\sqrt{x}-1)^2$ ugyanolyan ütemben növekednek, amint $x \to \infty$!

Megoldás: Megmutatjuk, hogy mindkét függvény ugyanolyan ütemben növekszik, mint a $g(x) = x$ identikus leképezés:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{5}{x^2}} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim_{x\to\infty} \left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4. \qquad \square$$

„Ordó" jelölés

Most bevezetjük a „kis ordó" és „nagy ordó" jelölést, amelyet a matematikusok már egy évszázada – és újabban a számítógéptudomány szakemberei is – használnak.

DEFINÍCIÓ: **„Kis ordó"**

Az f függvény kisebb rendű, mint a g függvény, amint $x \to \infty$, ha

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

jelölés: $f = o(g)$ (kiolvasása: „f egyenlő kis ordó g").

Az tehát, hogy $f = o(g)$, amint $x \to \infty$, egyszerűen annyit mond, hogy f lassabban növekszik, mint g, amint $x \to \infty$.

4. PÉLDA: **A „kis ordó" jelölés használata**

(a) $\ln x = o(x)$, amint $x \to \infty$, mivel $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

(b) $x^2 = o(x^3+1)$, amint $x \to \infty$, mivel $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^3+1} = 0$.

DEFINÍCIÓ: **„Nagy ordó"**

Legyenek f és g olyan függvények, amelyek elegendően nagy x-ek esetén kizárólag pozitív értékeket vesznek fel. Azt mondjuk, hogy $x \to \infty$ esetén f legfeljebb olyan ütemben növekszik, mint g, ha van olyan pozitív M szám, amellyel elegendő nagy x-ek esetén

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq M.$$

Ezt így jelöljük: $f = O(g)$ (kiolvasása: „f egyenlő nagy ordó g").

5. PÉLDA: **A „nagy ordó" jelölés használata**

(a) $x + \sin x = O(x)$, amint $x \to \infty$, mivel elég nagy x-ek esetén

$$\frac{x+\sin x}{x} \leq 2.$$

(b) $e^x + x^2 = O(e^x)$, mivel $\dfrac{e^x+x}{e^x} \to 1$, amint $x \to \infty$.

(c) $x = O(e^x)$, mivel $\dfrac{x}{e^x} \to 0$, amint $x \to \infty$.

A definíciók alapján nyilvánvaló, hogy $f = o(g)$ esetén $f = O(g)$ is fennáll, amennyiben f és g olyan függvények, amelyek elegendően nagy x-ek esetén kizárólag pozitív értékeket vesznek fel. Hasonlóan (11. feladat): ha f és g ugyanolyan ütemben növekszik, akkor $f = O(g)$ és $g = O(f)$ egyaránt fennáll.

Szekvenciális és bináris keresés

A számítógéptudomány szakemberei egy algoritmus hatékonyságát gyakran azzal adják meg, hogy hány lépésbe telik az algoritmus végrehajtása. Két algoritmus hatékonysága akkor is jelentősen eltérhet, ha mindkettőt ugyanazon feladat megoldására tervezték. Lássunk egy példát.

A *Webster's Third New International Dictionary* körülbelül 26 000 A-val kezdődő szót tartalmaz. Ha meg akarjuk tudni, hogy egy adott, A betűs szó szerepele a szótárban, akkor a következőképpen is eljárhatunk: sorra vesszük a szavakat, és egy idő után látni fogjuk, hogy a keresett szó köztük van-e. Ez a – *szekvenciális keresésnek* nevezett – módszer nem használja ki, hogy a szavak ábécérendben állnak. Biztosan megkapjuk a választ, de meglehet, hogy csak 26 000 lépés árán.

Egy másik módszer a következő. Ugorjunk egyből a lista közepére (néhány szó eltérés nem számít)! Ha itt nem a keresett szó áll, akkor feledkezzünk meg a lista egyik feléről; mivel a szavak ábécérendben állnak, tudjuk, hogy a keresett szó melyik részben lehet. Ezzel körülbelül 13 ezer szót ki is zártunk a keresésből. Most tekintsük azt a részt, amely tartalmazhatja a keresett szót, és keressük meg ennek a listának a középső tagját. Folytassuk az eljárást addig, amíg meg nem találjuk a szót, vagy már nem tudjuk tovább osztani a listát! Hány lépést kell megtennünk? Legfeljebb 15-öt, elvégre

$$\frac{26000}{2^{15}} < 1.$$

Ez sokkal jobb, mint a szekvenciális keresés 26 ezres felső korlátja. (Természetesen kihasználtuk, hogy a szavak már rendezve vannak.)

Egy n hosszúságú lista esetében a szekvenciális keresés lépéseinek száma n-nel azonos rendű, a második – *bináris keresésnek* nevezett – algoritmus esetében ez a rend $\log_2 n$. A magyarázat a következő: ha $2^{m-1} < n \leq 2^m$, akkor $m-1 < \log_2 n \leq m$, a listát tehát legfeljebb $m = \lceil \log_2 n \rceil$-szer oszthatjuk ketté, ahol $\lceil k \rceil$ a k szám felső egészrészét jelöli.

A „nagy ordó" jelöléssel mindezt röviden is megfogalmazhatjuk. A szekvenciális keresés esetében a szükséges lépések száma $O(n)$, a bináris keresés esetében ugyanez a szám $O(\log_2 n)$. Példánkban elég nagy a különbség (26 000, illetve 15), és n növekedtével egyre nagyobb lesz, mivel $n \to \infty$ esetén n gyorsabban növekszik, mint $\log_2 n$ (1. példa (d) része).

7.6. Feladatok

Függvények összevetése az e^x exponenciális függvénnyel

1. A következő függvények közül melyik növekszik gyorsabb ütemben, mint e^x, amint $x \to \infty$? Melyik növekszik e^x-nél lassabb ütemben? Ugyanabban az ütemben?

(a) $x+3$ **(b)** $x^3+\sin^2 x$
(c) $\sqrt{x}$ **(d)** 4^x
(e) $(3/2)^x$ **(f)** $e^{x/2}$
(g) $e^x/2$ **(h)** $\log_{10} x$

2. A következő függvények közül melyik növekszik gyorsabb ütemben, mint e^x, amint $x \to \infty$? Melyik növekszik e^x-nél lassabb ütemben? Ugyanabban az ütemben?

(a) $10x^4+30x+1$ **(b)** $x\ln x - x$
(c) $\sqrt{1+x^4}$ **(d)** $(5/2)^x$
(e) e^{-x} **(f)** xe^x
(g) $e^{\cos x}$ **(h)** e^{x-1}

Függvények összevetése az x^2 hatványfüggvénnyel

3. A következő függvények közül melyik növekszik gyorsabb ütemben, mint x^2, amint $x \to \infty$? Melyik növekszik x^2-nél lassabb ütemben? Ugyanabban az ütemben?

(a) x^2+4x **(b)** x^5-x^2
(c) $\sqrt{x^4+x^3}$ **(d)** $(x+3)^2$
(e) $x\ln x$ **(f)** 2^x
(g) x^3e^{-x} **(h)** $8x^2$

4. A következő függvények közül melyik növekszik gyorsabb ütemben, mint x^2, amint $x \to \infty$? Melyik növekszik x^2-nél lassabb ütemben? Ugyanabban az ütemben?

(a) $x^2+\sqrt{x}$ **(b)** $10x^2$
(c) x^2e^{-x} **(d)** $\log_{10}(x^2)$
(e) x^3-x^2 **(f)** $(1/10)^x$
(g) $1{,}1^x$ **(h)** x^2+100x

Függvények összevetése az $\ln x$ logaritmusfüggvénnyel

5. A következő függvények közül melyik növekszik gyorsabb ütemben, mint $\ln x$, amint $x \to \infty$? Melyik növekszik $\ln x$-nél lassabb ütemben? Ugyanabban az ütemben?

(a) $\log_3 x$ **(b)** $\ln 2x$
(c) $\ln\sqrt{x}$ **(d)** $\sqrt{x}$
(e) x **(f)** $5\ln x$
(g) $1/x$ **(h)** e^x

6. A következő függvények közül melyik növekszik gyorsabb ütemben, mint $\ln x$, amint $x \to \infty$? Melyik növekszik $\ln x$-nél lassabb ütemben? Ugyanabban az ütemben?

(a) $\log_2(x^2)$ **(b)** $\log_{10} 10x$
(c) $1/\sqrt{x}$ **(d)** $1/x^2$
(e) $x-2\ln x$ **(f)** e^{-x}
(g) $\ln(\ln x)$ **(h)** $\ln(2x+5)$

Függvények rendezése növekedési ütemük szerint

7. Rendezzük sorba a függvényeket növekedési ütemük szerint (amint $x \to \infty$)! Kezdjük a leglassabban növekvővel!

(a) e^x **(b)** x^x
(c) $(\ln x)^x$ **(d)** $e^{x/2}$

8. Rendezzük sorba a függvényeket növekedési ütemük szerint (amint $x \to \infty$)! Kezdjük a leglassabban növekvővel!

(a) 2^x **(b)** x^2
(c) $(\ln 2)^x$ **(d)** e^x

„Kis ordó, nagy ordó"

9. Igaz, vagy hamis? Amint $x \to \infty$,

(a) $x = o(x)$, **(b)** $x = o(x+5)$,
(c) $x = O(x+5)$, **(d)** $x = O(2x)$,
(e) $e^x = o(e^{2x})$, **(f)** $x+\ln x = O(x)$,
(g) $\ln x = o(\ln 2x)$, **(h)** $\sqrt{x^2+5} = O(x)$?

10. Igaz, vagy hamis? Amint $x \to \infty$,

(a) $\dfrac{1}{x+3} = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$, **(b)** $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

(c) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, **(d)** $2 + \cos x = O(2)$,

(e) $e^x + x = O(e^x)$, **(f)** $x \ln x = o(x^2)$,

(g) $\ln(\ln x) = O(\ln x)$, **(h)** $\ln x = o(\ln(x^2+1))$?

11. Igazoljuk, hogy ha az $f(x)$ és $g(x)$ pozitív értékeket felvevő függvények ugyanabban az ütemben növekednek, amint $x \to \infty$, akkor $f = O(g)$ és $g = O(f)$!

12. Mikor lesz az $f(x)$ polinomfüggvény növekedésének üteme kisebb a $g(x)$ polinomfüggvényénél, amint $x \to \infty$? Válaszunkat indokoljuk!

13. Mikor lesz az $f(x)$ polinomfüggvény növekedésének üteme legfeljebb akkora, mint a $g(x)$ polinomfüggvényé, amint $x \to \infty$? Válaszunkat indokoljuk!

14. Milyen következtetést vonhatunk le a 2.4. alfejezetbeli, a törtfüggvények határértékére vonatkozó eredményeinkből a polinomfüggvények relatív növekedési ütemére vonatkozóan $x \to \infty$ esetén?

További összehasonlítások

15. Vizsgáljuk meg számítógép segítségével a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \quad \text{és a} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+99)}{\ln x}$$

határértéket! Ezután a L'Hospital-szabály alapján magyarázzuk meg, amit látunk!

16. Az előző feladat folytatása: Igazoljuk, hogy a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+a)}{\ln x}$$

határérték független az a állandó értékétől! Milyen következtetést vonhatunk le ebből az $f(x) = \ln(x+a)$ és a $g(x) = \ln x$ függvény relatív növekedési ütemére vonatkozóan?

17. Bizonyítsuk be, hogy az $\sqrt{10x+1}$ és az $\sqrt{x+1}$ függvények növekedési üteme megegyezik, amint $x \to \infty$! [*Útmutatás:* igazoljuk, hogy mindkét függvény növekedési üteme azonos $\sqrt{x}$-ével!]

18. Bizonyítsuk be, hogy a $\sqrt{x^4+x}$ és a $\sqrt{x^4-x^3}$ függvények növekedési üteme megegyezik, amint $x \to \infty$! [*Útmutatás:* igazoljuk, hogy mindkét függvény növekedési üteme azonos x^2-ével!]

19. Mutassuk meg, hogy bármilyen nagy egész szám is n, az e^x függvény gyorsabban növekszik, mint x^n, amint $x \to \infty$ (e^x tehát még az $x^{1000000}$ függvényt is „lehagyja"! [*Útmutatás:* mi az x^n függvény n-edik deriváltja?]

20. Az e^x függvény bármely polinomfüggvénynél gyorsabban növekszik: Mutassuk meg, hogy az e^x függvény gyorsabban növekszik, mint bármelyik

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0$$

polinomfüggvény!

21. **(a)** Mutassuk meg, hogy bármilyen nagy egész szám is n, az $\ln x$ függvény lassabban növekszik, mint $x^{1/n}$, amint $x \to \infty$ ($\ln x$ tehát még az $x^{1/1000000}$ függvény mögött is „lemarad")!

(b) Igaz ugyan, hogy az $x^{1/1000000}$ függvény egyszer megelőzi $\ln x$-et, azonban hosszú utat kell megtennünk az x-tengely mentén, amíg ez megtörténik. Adjuk meg azt az 1-nél nagyobb x-értéket, amelynél $x^{1/1000000} > \ln x$! [*Útmutatás:* az $\ln x = x^{1/1000000}$ egyenlet ekvivalens az $\ln(\ln x) = (\ln x)/1\,000\,000$ egyenlettel.]

(c) Az $\ln x$ függvény megelőzése az $x^{1/10}$ függvénynek sem megy gyorsan. Kísérletezzünk a számológépünkkel, és keressük meg azt az x-et, amelynél az $\ln x$ és az $x^{1/10}$ függvény grafikonja metszi egymást, vagyis amelynél $\ln x = 10\ln(\ln x)$! Előbb adjuk meg azt a két egymás utáni 10-hatványt, amelyek közé a metszéspont esik, majd pontosítsuk az eredményt felezésekkel!

(d) (*A feladat* (c) *részének folytatása.*) Előfordulhat, hogy az $\ln x = 10\ln(\ln x)$ egyenlet megoldása túlságosan nagy ahhoz, hogy grafikus úton ábrázolhassuk. Vizsgáljuk meg, mit tud a rendelkezésünkre álló program!

22. Az $\ln x$ függvény bármely polinomfüggvénynél lassabban növekszik: Igazoljuk, hogy $\ln x$ lassabban növekszik tetszőleges (nemkonstans) polinomnál!

Algoritmusok, keresés

23. **(a)** Tegyük fel, hogy egy adott feladat megoldására három algoritmus is rendelkezésünkre áll, amelyeknek hatékonyságát rendre az

$$n\log_2 n, \quad n^{3/2}, \quad n(\log_2 n)^2$$

függvények írják le. Hosszú távon melyik algoritmus a leghatékonyabb? Válaszát indokolja meg!

(b) Ábrázoljuk az (a)-beli függvényeket számítógép segítségével, hogy képünk legyen a növekedési ütemükről!

24. Ugyanaz, mint az előző feladat, az

$$n, \quad \sqrt{n}\log_2 n, \quad (\log_2 n)^2$$

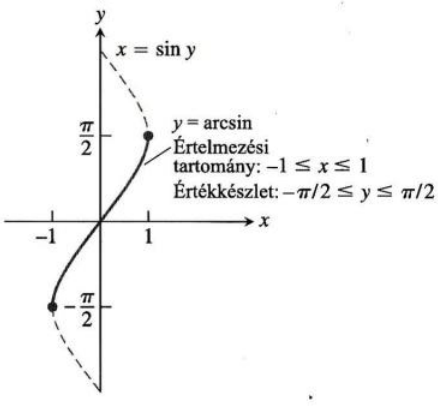
függvényekkel.

25. Tegyük fel, hogy egy egymilliós rendezett listában keresünk egy elemet. Legfeljebb hány lépésben találjuk meg, ha szekvenciális, illetve ha bináris keresést alkalmazunk?

26. Egy szót keresünk a *Webster's Third New International Dictionaryben*, ami 450 000 rendezett címszót tartalmaz. Hány lépésben találjuk meg, ha szekvenciális, illetve ha bináris keresést alkalmazunk?

7.7. Inverz trigonometrikus függvények

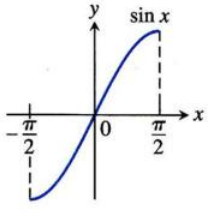
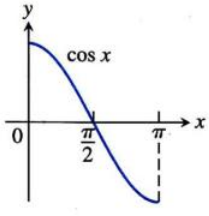
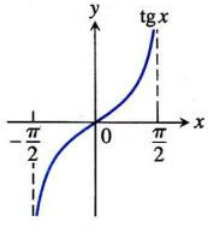
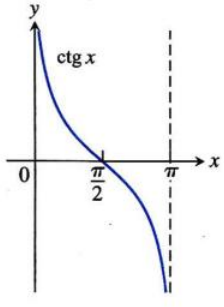
Az inverz trigonometrikus függvényeket használjuk pl. akkor, amikor egy derékszögű háromszög oldalainak aránya alapján a háromszög szögeit kell meghatároznunk. Ezek a függvények gyakran megjelennek, amikor függvények határozatlan integrálját keressük, így számos differenciálegyenlet megoldásában is előkerülnek. Ebben az alfejezetben ezeket a függvényeket definiáljuk, vázoljuk a grafikonjukat, meghatározzuk a deriváltjukat, és példákat mutatunk alkalmazásukra.



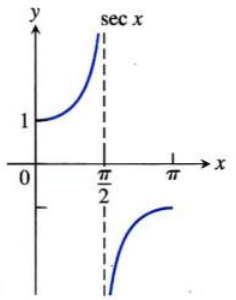
7.16. ÁBRA: Az $y = \arcsin x$ függvény grafikonja.

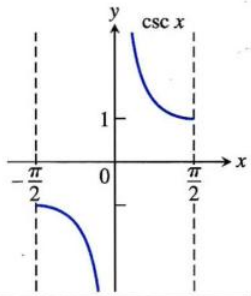
Az inverz trigonometrikus függvények definíciója

Bár a hat megismert trigonometrikus függvény közül egy sem injektív (elvégre egyetlen periodikus függvény sem lehet az), mindegyik esetében megadhatjuk az értelmezési tartományuk olyan részhalmazát, amelyre leszűkítve injektív függvényt kapunk. A szinuszfüggvény például az $x = -\pi/2$-től $x = \pi/2$-ig növekvő (-1-től 1-ig), a szinuszfüggvény $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumra való leszűkítése tehát injektív, létezik tehát a sin inverze (7.16. ábra). Értelmezési tartományuk leszűkítésével a többi trigonometrikus függvény is injektívvé válik:

Függvény	Értelmezési tartomány	Értékkészlet	Grafikon
$\sin x$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$[-1, 1]$	
$\cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	
$\operatorname{tg} x$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$(-\infty, \infty)$	
$\operatorname{ctg} x$	$[0, \pi]$	$(-\infty, \infty)$	

$\sec x$	$[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$	$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$
$\csc x$	$[-\pi/2,0)\cup(0,\pi/2]$	$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$





A függvények a megadott intervallumokra leszűkítve már injektívek, így van inverzük, amelyekre önálló jelölést is bevezetünk:

$$y=\sin^{-1}x \quad \text{vagy} \quad y=\arcsin x,$$
$$y=\cos^{-1}x \quad \text{vagy} \quad y=\arccos x,$$
$$y=\mathrm{tg}^{-1}x \quad \text{vagy} \quad y=\operatorname{arctg} x,$$
$$y=\mathrm{ctg}^{-1}x \quad \text{vagy} \quad y=\operatorname{arcctg} x,$$
$$y=\sec^{-1}x \quad \text{vagy} \quad y=\operatorname{arcsec} x,$$
$$y=\csc^{-1}x \quad \text{vagy} \quad y=\operatorname{arccsc} x.$$

Az egyenlőségek kiolvasása: „y egyenlő x arkuszszinuszával", vagy y egyenlő arkuszszinusz x stb. Az inverz trigonometrikus függvényeket „arkuszfüggvényeknek" is nevezzük.

FIGYELEM! A függvények jelölésében a kitevőben szereplő -1 az inverz függvény, és nem a reciprok jele. A $\sin x$ függvény reciproka a $(\sin x)^{-1}=1/\sin x=$ $=\csc x$ függvény. A következőkben mindkét jelölésmódot használjuk.

A trigonometrikus függvények inverzeinek grafikonját a 7.17. ábrán tanulmányozhatjuk. A grafikonokat a már ismert módon, a trigonometrikus függvények megfelelő intervallum feletti grafikonjának az $y=x$ egyenletű egyenesre való tükrözésével kaptuk meg. A következőkben alaposabban megvizsgáljuk a függvényeket és a deriváltjukat.

Az „arkusz" az arkuszszinusz és az arkuszkoszinusz nevében

Az ábra az $y=\arcsin x$ és az $y=\arccos x$ függvény geometriai jelentését szemlélteti; amennyiben x az első síknegyedbe eső, radiánban mért szög. Egységsugarú kör esetén az $s=r\theta$ egyenlet $s=\theta$ alakra egyszerűsödik, a központi szögek nagyságát és a hozzájuk tartozó ívek hosszát ilyenkor ugyanaz a szám adja meg. Ha $x=$ $=\sin y$, akkor y egyrészt az a szög, amelynek szinusza x, másrészt annak az ívnek (latinul *arcusnak*) a hossza, amely a szóban forgó szöget határolja.



Az arkuszszinusz és az arkuszkoszinusz függvény

Az x szám arkuszszinusza az a $[-\pi/2,\pi/2]$ intervallumbeli szög, amelynek szinusza x; x arkuszkoszinusza az a $[0,\pi]$ intervallumbeli szög, amelynek koszinusza x.

DEFINÍCIÓ: **Arkuszszinusz, arkuszkoszinusz**

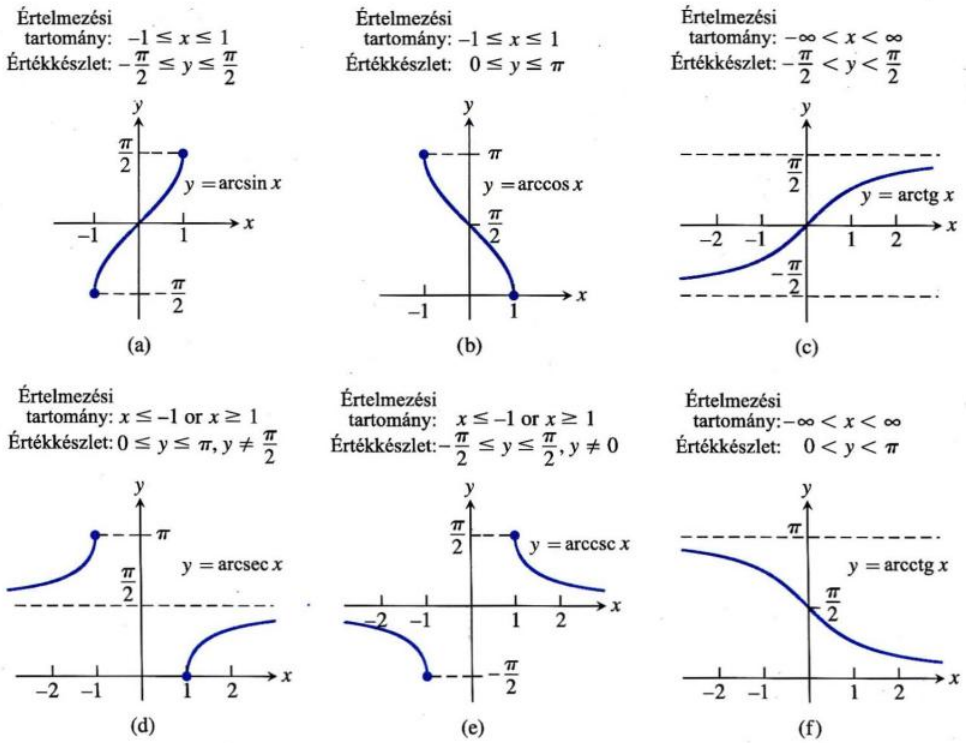
$y=\arcsin x$ a $[-\pi/2,\pi/2]$ intervallum azon y eleme, amellyel $\sin y=x$.

$y=\arccos x$ a $[0,\pi]$ intervallum azon y eleme, amellyel $\cos y=x$.

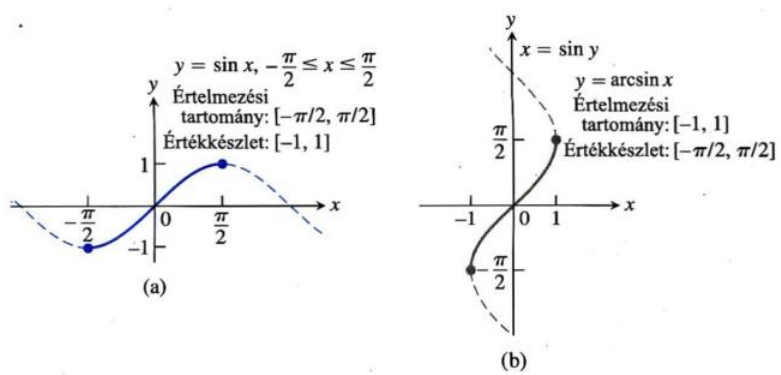
Az $y=\arcsin x$ függvény grafikonja (7.18. ábra) szimmetrikus az origóra (a grafikon az $x=\sin y$ egyenletű görbe egy szakasza). Az arkuszszinusz-függvény tehát páratlan:

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x. \tag{7.28}$$

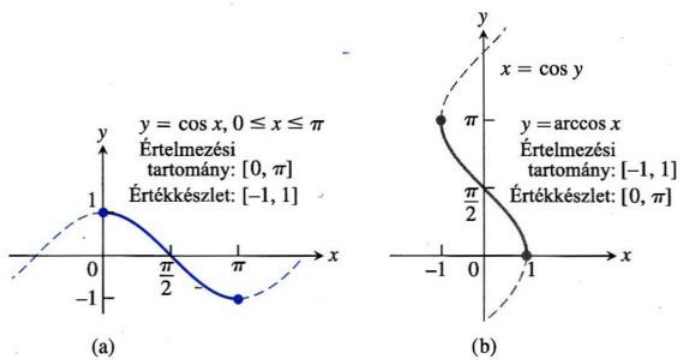
Az $y=\arccos x$ függvény grafikonjának (7.19. ábra) nincs ilyen szimmetriatulajdonsága.



7.17. ÁBRA: Az arkuszfüggvények grafikonja.



7.18. ÁBRA: (a) A $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumra leszűkített szinuszfüggvény és (b) az $y = \arcsin x$ inverz függvény grafikonja. Az $\arcsin x$ függvény grafikonját a $\sin x$ függvény grafikonja megfelelő szakaszának az $y = x$ egyenletű egyenesre való tükrözésével kaphatjuk meg; a grafikon az $x = \sin y$ egyenletű görbe egy szakasza.

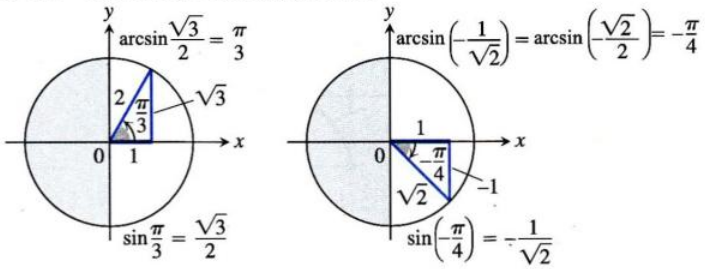


7.19. ÁBRA: (a) A $[0, \pi]$ intervallumra leszűkített koszinuszfüggvény és (b) az $y = \arccos x$ inverz függvény grafikonja. Az $\arccos x$ függvény grafikonja, amelyet a $\cos x$ függvény grafikonja megfelelő szakaszának az $y = x$ egyenletű egyenesre való tükrözésével kapunk meg, az $x = \cos y$ egyenletű görbe egy szakasza.

A $\sin x$ és a $\cos x$ ismert értékei alapján $\arcsin x$ és $\arccos x$ néhány jellemző értékét is megadhatjuk.

x	$\arcsin x$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$
$1/2$	$\pi/6$
$-1/2$	$-\pi/6$
$-\sqrt{2}/2$	$-\pi/4$
$\sqrt{3}/2$	$-\pi/3$

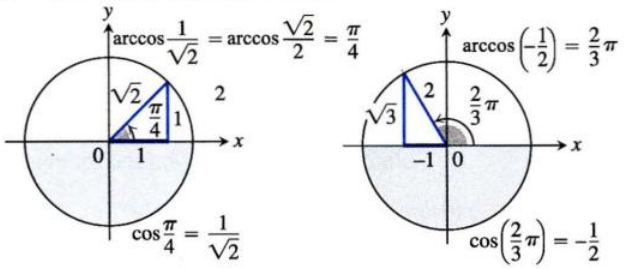
1. PÉLDA: **Nevezetes $\arcsin x$-értékek**



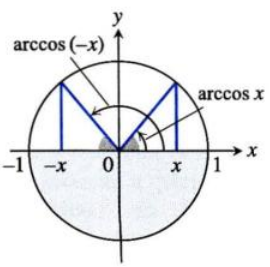
A szögek az első és a negyedik síknegyedből valók, elvégre az $\arcsin x$ értékkészlete a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallum.

x	$\arccos x$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/6$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$
$1/2$	$\pi/3$
$-1/2$	$2\pi/3$
$-\sqrt{2}/2$	$3\pi/4$
$\sqrt{3}/2$	$5\pi/6$

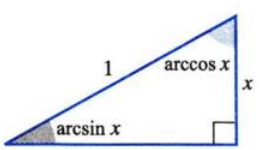
2. PÉLDA: **Nevezetes $\arccos x$-értékek**



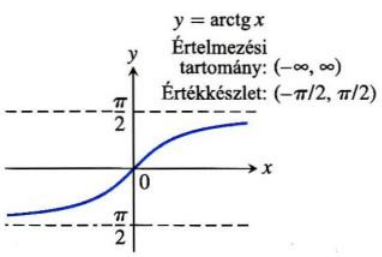
A szögek az első és a második síknegyedből valók, mivel az $\arccos x$ értékkészlete a $[0, \pi]$ intervallum.



7.20. ÁBRA: $\arccos x$ és $\arccos(-x)$ kiegészítő szögek (összegük π).



7.21. ÁBRA: $\arcsin x$ és $\arccos x$ pótszögek (összegük $\pi/2$).



7.22. ÁBRA: Az $y = \operatorname{arctg} x$ függvény grafikonja.

Azonosságok

A 7.20. ábra alapján nyilvánvaló, hogy

$$\arccos x + \arccos(-x) = \pi, \tag{7.29}$$

vagy másképpen:

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x). \tag{7.30}$$

A 7.21. ábra szerint $x > 0$ esetén

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2. \tag{7.31}$$

A (7.31) azonosság a $[-1, 1]$ bármely x elemére teljesül, de ezt az ábra alapján nem tudjuk belátni. Az azonosság a (7.28) és (7.30) összefüggések alapján igazolható (131. feladat).

A $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ és $\operatorname{csc} x$ függvények inverzei

Az x szám arkusztangense az a szög, amelynek tangense x; x arkuszkotangense az a szög, amelynek kotangense x.

DEFINÍCIÓ: **Arkusztangens, arkuszkotangens**

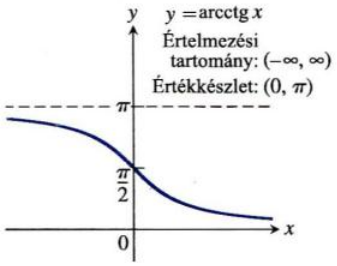
$y = \operatorname{arctg} x$ a $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallum azon y eleme, amellyel $\operatorname{tg} y = x$.

$y = \operatorname{arcctg} x$ a $(0, \pi)$ intervallum azon y eleme, amellyel $\operatorname{ctg} y = x$.

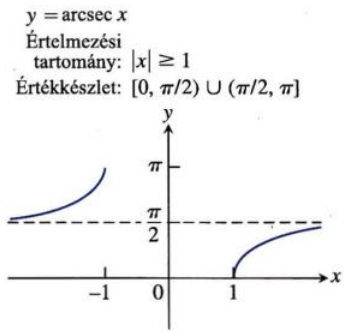
Nyílt intervallumokat használunk, így nem okoz problémát, ha a végpontokban a tangens- vagy a kotangensfüggvény nincs értelmezve.

Az $y = \operatorname{arctg} x$ függvény grafikonja szimmetrikus az origóra, mivel a grafikon az $x = \operatorname{tg} y$ egyenletű görbe egy szakasza, az utóbbi pedig nyilván szimmetrikus az origóra (7.22. ábra). Képletben kifejezve:

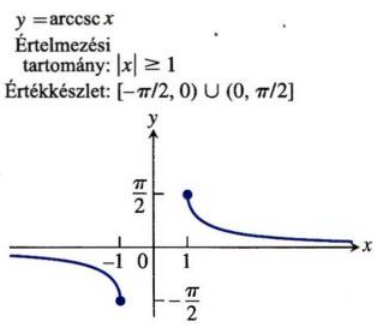
$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x,$$



7.23. ÁBRA: Az $y = \operatorname{arcctg} x$ függvény grafikonja.



7.24. ÁBRA: Az $y = \operatorname{arcsec} x$ függvény grafikonja.



7.25. ÁBRA: Az $y = \operatorname{arccsc} x$ függvény grafikonja.

x	$\operatorname{arctg} x$
$\sqrt{3}$	$\pi/3$
1	$\pi/4$
$\sqrt{3}/3$	$\pi/6$
$-\sqrt{3}/3$	$-\pi/6$
-1	$-\pi/4$
$-\sqrt{3}$	$-\pi/3$

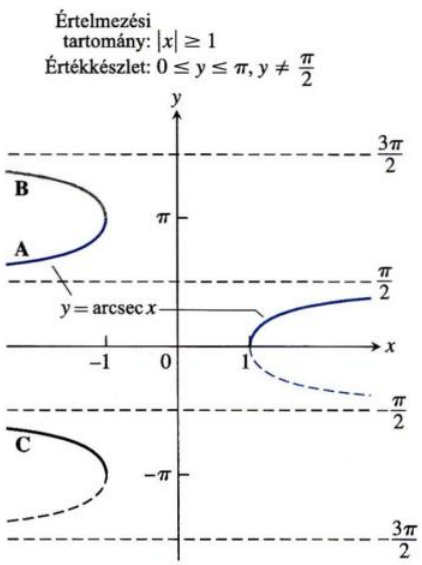
az arkusztangens-függvény tehát páratlan. Az $y = \operatorname{arcctg} x$ függvény grafikonja nem mutat ilyen szimmetriát (7.23. ábra).

A $\sec x$ és a $\cos x$ függvény (megfelelő leszűkítésének) inverzét a 7.24. és a 7.25. ábrán tanulmányozhatjuk.

FIGYELEM! Nincs közmegegyezés arra vonatkozóan, hogy miként definiáljuk az $\operatorname{arcsec} x$ függvényt negatív x-ekre. Mi a második síknegyedbeli – azaz $\pi/2$ és π közé eső – szögeket választottunk, ezzel $\operatorname{arcsec} x = \arccos(1/x)$, $\operatorname{arcsec} x$ pedig minden, az értelmezési tartományába eső intervallumon növekvő függvénnyé válik. Vannak azonban olyan táblázatok is, amelyek $x < 0$ esetén $\operatorname{arcsec} x$ értékeit a $[-\pi, -\pi/2]$ intervallumból veszik, de olyan is akad, amely a $[\pi, 3\pi/2]$ intervallumból választ (7.26. ábra). Az utóbbi választásokkal a függvény deriváltjának képlete egyszerűsödik (az általunk megadott képletben abszolútértéket kell használnunk), nem teljesül viszont a hasznos $\operatorname{arcsec} x = \arccos(1/x)$ összefüggés, amelyből a (7.31) összefüggés felhasználásával kapjuk a

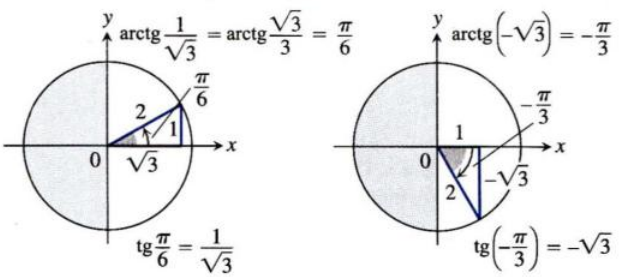
$$\operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \tag{7.32}$$

azonosságot.



7.26. ÁBRA: Az $y = \operatorname{arcsec} x$ függvény grafikonjának bal oldali ágát többféleképpen is kiválaszthatjuk. Az **A** választással teljesül a sok számológép által használt $\operatorname{arcsec} x = \arccos(1/x)$ összefüggés.

3. PÉLDA: **Nevezetes** $\operatorname{arctg} x$**-értékek**

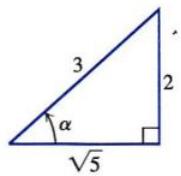


A szögek az első és a negyedik síknegyedből valók, mivel $\operatorname{arctg} x$ értékkészlete a $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallum.

4. PÉLDA:

Határozzuk meg $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\csc\alpha$ és $\operatorname{ctg}\alpha$ értékét, ha

$$\alpha = \arcsin\frac{2}{3}!$$



7.27. ÁBRA: Ha $\alpha = \arcsin\frac{2}{3}$, akkor az α szög szögfüggvényértékei a háromszög alapján mind leolvashatók (4. példa).

Megoldás: Az egyenlet szerint $\sin\alpha = 2/3$. A 7.27. ábrán α-t egy derékszögű háromszög egyik hegyesszögeként ábrázoljuk; a háromszög α-val szemközti befogója 2, átfogója pedig 3. A másik befogó hosszát Pitagorasz tétele alapján számoljuk ki:

$$\sqrt{3^2-2^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}.$$

Ezek után a keresett szögfüggvényértékek már meghatározhatók:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3},\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sec\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}},\quad \csc\alpha = \frac{3}{2},\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}. \qquad \square$$

5. PÉLDA:

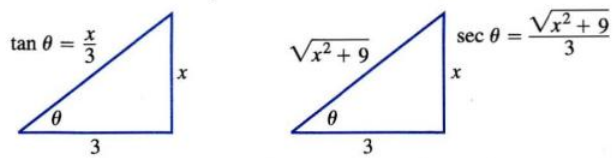
Határozzuk meg $\sec\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)$ értékét.

Megoldás: Legyen $\theta = \operatorname{arctg}(x/3)$, helyezzük el θ-t egy megfelelő derékszögű háromszögben, ahol

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{a } \theta\text{-val szemközti befogó}}{\text{a } \theta \text{ melletti befogó}} = \frac{x}{3}.$$

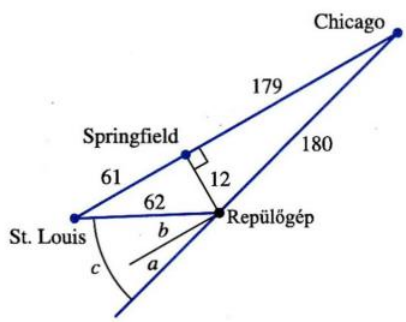
A háromszög átfogója:

$$\sqrt{x^2+3^2} = \sqrt{x^2+9}.$$



Mindezek alapján (figyelembe véve, hogy $\sec\theta$ az átfogó és a θ melletti befogó hányadosa):

$$\sec\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right) = \sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}. \qquad \square$$



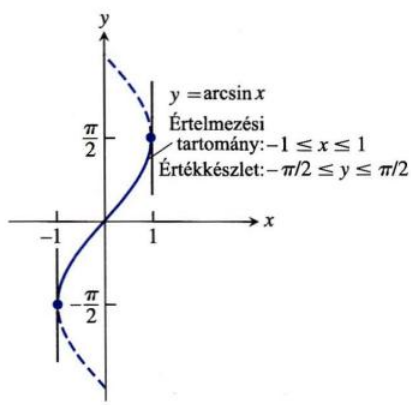
7.28. ÁBRA: A 6. példa (nem méretarányos) ábrája; a távolságokat mérföld pontossággal adjuk meg.

6. PÉLDA: **Repülőgép pályájának korrekciója**

A Chicagóból St. Louisba tartó repülőgép másodpilótája megállapította, hogy a gép 12 mérfölddel eltért az eredeti pályától (7.28. ábra). Határozzuk meg a jelenlegi pályának a helyes útiránnyal bezárt a szögét, az ábrán b-vel jelölt szöget, valamint a $c = a+b$ korrekciós szöget.

Megoldás:

$$a = \arcsin\frac{12}{180} \approx 0{,}067\,\text{rad} \approx 3{,}8^\circ,$$
$$a = \arcsin\frac{12}{62} \approx 0{,}195\,\text{rad} \approx 11{,}2^\circ,$$
$$c = a+b \approx 15^\circ. \qquad \square$$



7.29. ÁBRA: Az $y = \arcsin x$ függvény grafikonja.

Az $y = \arcsin x$ függvény deriváltja

Tudjuk, hogy az $x = \sin y$ függvény a $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ intervallumon differenciálható, és deriváltja – a koszinusz – az intervallum minden pontjában pozitív. A 7.1. alfejezetbeli 1. Tétel szerint ekkor az $y = \arcsin x$ függvény is differenciálható a $-1 < x < 1$ intervallumon. Az intervallum végpontjaiban nyilván nem lehet az, hiszen itt a grafikon érintője függőleges (7.29. ábra).

Az $y = \arcsin x$ függvény deriváltját először az 1. Tétel alapján határozzuk meg; esetünkben tehát $f(x) = \sin x$ és $f^{-1}x = \arcsin x$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \qquad \text{1. Tétel}$$

$$= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \qquad f'(u) = \cos x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \qquad \cos u = \sqrt{1-\sin^2 u}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad \sin(\arcsin x) = x$$

Az 1. Tétel közvetlen alkalmazása helyett $y = \arcsin x$ deriváltját az implicit deriválás módszerével is megkaphatjuk.

$$\sin y = x, \qquad y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin y) = 1, \qquad \text{mindkét oldalt deriváljuk } x \text{ szerint}$$

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1, \qquad \text{láncszabály}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \qquad \text{a } (-\pi/2, \pi/2) \text{ intervallumon pozitív } \cos y\text{-nal oszthatunk}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$$

Mindkét esetben ugyanarra a konklúzióra jutottunk:

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ha u az x változó olyan differenciálható függvénye, amelyre $|u| < 1$, akkor a láncszabály szerint:

$$\frac{d}{dx}(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, \quad |u| < 1.$$

7. PÉLDA: **A képlet alkalmazása**

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Az $y = \operatorname{arctg} x$ függvény deriváltja

Az $y = \operatorname{arctg} x$ függvény deriváltját először az 1. Tétel alapján határozzuk meg: $f(x) = \operatorname{tg} x$ és $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$. Az 1. Tétel alkalmazható, mivel $\operatorname{tg} x$ deriváltja a $-\pi/2 < x < \pi/2$ intervallum minden pontjában pozitív.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \qquad \text{1. Tétel}$$

$$= \frac{1}{\sec^2(\operatorname{arctg} x)} = \qquad f'(u) = \sec^2 x$$

$$= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \qquad \sec^2 u = 1 + \operatorname{tg}^2 u$$

$$= \frac{1}{1+x^2}. \qquad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$$

A deriváltfüggvény értelmezési tartománya az összes valós szám halmaza. Ha u differenciálható függvény, akkor a láncszabály alapján:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} u) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}.$$

8. PÉLDA: **Mozgó részecske**

Egy, az x-tengely pozitív részén mozgó részecske a $t \geq 0$ időpontban az $x(t) = \operatorname{arctg}\sqrt{t}$ pontban tartózkodik. Mekkora a részecske sebessége a $t = 16$ időpontban.

Megoldás:

$$v(t) = \frac{d}{dt}\operatorname{arctg}\sqrt{t} = \frac{1}{1+(\sqrt{t})^2}\cdot\frac{d}{dt}(\sqrt{t}) = \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

A $t = 16$ esetben

$$v(16) = \frac{1}{1+16}\cdot 12\sqrt{16} = \frac{1}{136}. \qquad \square$$

Az $y = \operatorname{arcsec} x$ függvény deriváltja

A $\sec x$ függvény deriváltja minden $0 < x < \pi/2$ és $\pi/2 < x < \pi$ esetén pozitív, az 1. Tétel szerint így az $y = \operatorname{arcsec} x$ inverz függvény is differenciálható. A deriváltat mindazonáltal nem az 1. Tétel alapján, hanem az implicit deriválás módszerével határozzuk meg. Ha $|x| > 1$, akkor:

$$\begin{aligned}
y &= \operatorname{arcsec} x, && \\
\sec y &= x, && y = \operatorname{arcsec} x \Leftrightarrow \sec y = x \\
\frac{d}{dx}(\sec y) &= \frac{d}{dx}x, && \text{mindkét oldalt deriváljuk } x \text{ szerint} \\
\sec y\,\operatorname{tg} y\frac{dy}{dx} &= 1, && \text{láncszabály} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec y\,\operatorname{tg} y} && \text{ha } |x| > 1, \text{ akkor } y \in (0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi) \text{ és } \sec y\,\operatorname{tg} y \neq 0
\end{aligned}$$

Az eredményt x-szel is kifejezhetjük, ha felhasználjuk a

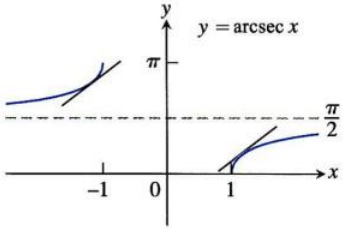
$$\sec y = x \quad \text{és a} \quad \operatorname{tg} y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2-1}$$

összefüggéseket. Így azt kapjuk, hogy

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}..$$

Hogyan határozhatjuk meg, hogy a $\pm$ előjelek közül melyiket kell figyelembe vennünk? Elegendő, ha egy pillantást vetünk a 7.30. ábrára, és azonnal láthatjuk: az $y = \operatorname{arcsec} x$ egyenletű görbe meredeksége mindenütt pozitív. Eszerint tehát

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \begin{cases} +\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & x > 1, \\ -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & x < -1. \end{cases}$$



7.30. ÁBRA: Az $y = \operatorname{arcsec} x$ egyenletű görbe meredeksége minden $x < -1$, illetve $x > 1$ esetén pozitív.

Az abszolútérték jelének alkalmazásával a képletet kompaktabb formában is felírhatjuk:

$$\frac{d}{dy}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

Végül ha u az x változó differenciálható függvénye és $|u| > 1$, akkor

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \quad |u| > 1.}$$

9. PÉLDA: **A képlet alkalmazása**

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec}(5x^4) = \frac{1}{|5x^4|\sqrt{(5x^4)^2-1}}\frac{d}{dx}(5x^4) =$$
$$= \frac{1}{5x^4\sqrt{(25x^8-1}}20x^3 = \qquad 5x^4 > 0$$
$$= \frac{4}{x\sqrt{25x^8-1}}.$$

A többi derivált

Az arkuszkoszinusz-, az arkuszkotangens- és az arkuszszekáns-függvény deriváltját a másik három inverz trigonometrikus függvény esetében követett úton is meghatározhatjuk, sokkal könnyebb a dolgunk azonban, ha a következő azonosságokra hivatkozunk.

Összefüggések az inverz trigonometrikus függvények között

$$\operatorname{arccos} x = \pi/2 - \arcsin x$$
$$\operatorname{arcctg} x = \pi/2 - \operatorname{arctg} x$$
$$\operatorname{arccsc} x = \pi/2 - \operatorname{arcsec} x$$

Az első azonossággal már találkoztunk a (7.31) egyenletben, a másik kettő hasonlóan igazolható. Az azonosságok alapján nyilvánvaló, hogy bármelyik „ko-függvény" inverzének deriváltja a „ko" nélküli függvény inverze deriváltjának ellentettje. Az $\arccos x$ függvény deriváltja például:

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \qquad \text{Azonosság!}$$
$$= -\frac{d}{dx}(\arcsin x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10. PÉLDA: **Az arkuszkotangens-függvény grafikonjának érintője**

Írjuk fel az $y = \operatorname{arcctg} x$ függvény grafikonját az $x = 1$-nél érintő egyenes egyenletét!

Megoldás: Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy

$$\operatorname{arcctg}(-1) = \pi/2 - \operatorname{arctg}(-1) = \pi/2 - (-\pi/4) = 3\pi/4.$$

A keresett érintő meredeksége:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = \left.-\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=-1} = -\frac{1}{1+(-1)^2} = -\frac{1}{2},$$

az érintő egyenlete ennélfogva: $y - 3\pi/4 = -\frac{1}{2}(x+1)$. □

Az inverz trigonometrikus függvények deriváltjait egy táblázatban foglaljuk össze (7.3. táblázat).

Integrálképletek

A 7.3. táblázat alapján kapjuk az alábbi integrálképleteket, amelyek a jobb oldalon álló függvény deriválásával könnyen ellenőrizhetők.

A 7.3. táblázatban $a = 1$, általában azonban $a \neq 1$, így a 7.4. táblázat képleteit gyakrabban alkalmazzuk.

1. $\dfrac{d(\arcsin u)}{dx} = \dfrac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1$
2. $\dfrac{d(\arccos u)}{dx} = -\dfrac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1$
3. $\dfrac{d(\operatorname{arctg} u)}{dx} = \dfrac{du/dx}{1+u^2}$
4. $\dfrac{d(\operatorname{arcctg} u)}{dx} = -\dfrac{du/dx}{1+u^2}$
5. $\dfrac{d(\operatorname{arcsec} u)}{dx} = \dfrac{du/dx}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1$
6. $\dfrac{d(\operatorname{arccsc} u)}{dx} = \dfrac{-du/dx}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1$

7.3. TÁBLÁZAT: A trigonometrikus függvények inverzeinek deriváltja.

Tetszőleges $a \neq 0$ esetén:

1. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C$, amennyiben $u^2 < a^2$
2. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C$, bármely u esetén
3. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left|\frac{u}{a}\right| + C$, feltéve, hogy $|u| > a > 0$

7.4. TÁBLÁZAT: Integrálképletek az inverz trigonometrikus függvényekkel.

11. PÉLDA: **Az integrálképletek alkalmazása**

(a) $$\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[\arcsin x\Big]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

(b) $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^1 = \operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

(c) $$\int_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \Big[\operatorname{arcsec} x\Big]_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

12. PÉLDA: **Helyettesítéses integrálás a 7.4. táblázat alapján**

(a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C$$ 1. képlet, $a = 3$, $u = x$

(b) $$\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} =$$ $a = \sqrt{3}$, $u = 2x$, $du/2 = dx$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C =$$ 1. képlet

$$= \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

13. PÉLDA: **Teljes négyzetté alakítás**

Határozzuk meg az

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$$

integrált!

Megoldás: A $\sqrt{4x-x^2}$ kifejezésre a 7.4. táblázat egyik képlete sem alkalmazható, ezért először átalakítjuk $4x-x^2$-et:

$$4x-x^2 = -(x^2-4x) = -(x^2-4x+4)+4 = 4-(x-2)^2.$$

Ezután az $a=2$, $u=x-2$, $du=dx$ helyettesítéssel:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = \\
&= \frac{dx}{\sqrt{a^2-u^2}} = && a=2,\ u=x-2,\ du=dx \\
&= \arcsin\left(\frac{u}{a}\right)+C = && \text{7.4. táblázat, 1. képlet} \\
&= \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)+C. && \square
\end{aligned}$$

14. PÉLDA: **Teljes négyzetté alakítás**

Határozzuk meg az

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+2}$$

integrált!

Megoldás: Először átalakítjuk a $4x^2+4x+2$ kifejezést:

$$\begin{aligned}
4^2+4x+2 = 4(x^2+x)+2 = 4\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+2-\frac{4}{4} = \\
= 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1 = (2x+1)^2+1.
\end{aligned}$$

Ezután:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{4x^2+4x+2} &= \int \frac{dx}{(2x+1)^2+1} = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+a^2} = && a=1,\ u=2x+1,\ du/2=dx \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)+C = && \text{7.4. táblázat, 2. képlet} \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x+1)+C. && \square
\end{aligned}$$

15. PÉLDA: **Még egy helyettesítés**

Határozzuk meg az

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-6}}$$

integrált!

Megoldás:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-6}} = \int \frac{du/u}{\sqrt{u^2-a^2}} = \qquad u=e^x,\ du=e^x dx,\ dx=du/e^x=du/u,\ a=\sqrt{6}$$

$$= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} =$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left|\frac{u}{a}\right| + C = \qquad \text{7.4. táblázat, 3. képlet}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arcsec}\left(\frac{e^x}{\sqrt{6}}\right) + C. \qquad \square$$

7.7. Feladatok

Nevezetes arkuszfüggvényértékek

Az 1–3. példák módszerét követve határozzuk meg a függvényértékeket (1–12. feladatok)!

1. **(a)** $\operatorname{arctg}(1)$ **(b)** $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$ **(c)** $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

2. **(a)** $\operatorname{arctg}(-1)$ **(b)** $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right)$ **(c)** $\operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

3. **(a)** $\arcsin\left(\frac{-1}{2}\right)$ **(b)** $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **(c)** $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

4. **(a)** $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ **(b)** $\arcsin\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ **(c)** $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5. **(a)** $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ **(b)** $\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ **(c)** $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

6. **(a)** $\arccos\left(\frac{-1}{2}\right)$ **(b)** $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **(c)** $\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

7. **(a)** $\operatorname{arcsec}\left(-\sqrt{2}\right)$ **(b)** $\operatorname{arcsec}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ **(c)** $\operatorname{arcsec}(-2)$

8. **(a)** $\operatorname{arcsec}(\sqrt{2})$ **(b)** $\operatorname{arcsec}\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$ **(c)** $\operatorname{arcsec}(2)$

9. **(a)** $\operatorname{arccsc}(\sqrt{2})$ **(b)** $\operatorname{arccsc}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ **(c)** $\operatorname{arccsc}(2)$

10. **(a)** $\operatorname{arccsc}(-\sqrt{2})$ **(b)** $\operatorname{arccsc}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ **(c)** $\operatorname{arccsc}(-2)$

11. **(a)** $\operatorname{arcctg}(-1)$ **(b)** $\operatorname{arcctg}(\sqrt{3})$ **(c)** $\operatorname{arcctg}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

12. **(a)** $\operatorname{arcctg}(1)$ **(b)** $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$ **(c)** $\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Trigonometrikus függvények értékének meghatározása

13. Határozzuk meg $\cos\alpha$, $\sec\alpha$, $\csc\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ és $\operatorname{ctg}\alpha$ értékét, ha tudjuk, hogy $\alpha = \arcsin(5/13)$!

14. Határozzuk meg $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\sec\alpha$, $\csc\alpha$ és $\operatorname{ctg}\alpha$ értékét, ha tudjuk, hogy $\alpha = \operatorname{arctg}(4/3)$!

15. Határozzuk meg $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\csc\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ és $\operatorname{ctg}\alpha$ értékét, ha tudjuk, hogy $\alpha = \operatorname{arcsec}(-\sqrt{5})$!

16. Határozzuk meg $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\csc\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ és $\operatorname{ctg}\alpha$ értékét, ha tudjuk, hogy $\alpha = \operatorname{arcsec}(-\sqrt{13}/2)$!

Trigonometrikus függvényértékek

Határozzuk meg a függvényértékeket (17–28. feladatok)!

17. $\sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ **18.** $\sec\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$

19. $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ **20.** $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

21. $\csc(\operatorname{arcsec}2) + \cos(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$

22. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsec}1) + \sin(\operatorname{arccsc}(-2))$

23. $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

24. $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arcsec}2\right)$

25. $\sec(\operatorname{arctg}1 + \operatorname{arccsc}1)$

26. $\sec(\operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \operatorname{arccsc}(-1))$

27. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ [A megoldás *nem* $-\pi/6$!]

28. $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ [A megoldás *nem* $-\pi/4$!]

Trigonometrikus kifejezések

Egyszerűsítsük a trigonometrikus kifejezéseket (29–40. feladatok)!

29. $\sec\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)$ **30.** $\sec(\operatorname{arctg}2x)$

31. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsec}3y)$ **32.** $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsec}\frac{y}{5}\right)$

33. $\cos(\arcsin x)$ **34.** $\operatorname{tg}(\arccos x)$

35. $\sin(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-2x}),\quad x \geq 2$

36. $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ **37.** $\cos\left(\arcsin\frac{2y}{3}\right)$

38. $\cos\left(\arcsin\frac{y}{5}\right)$ **39.** $\sin\left(\operatorname{arcsec}\frac{x}{4}\right)$

40. $\sin\operatorname{arcsec}\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\right)$

Határértékek

Határozzuk meg a határértékeket (41–48. feladatok)! [Ha kétségeink támadnak, vessünk egy pillantást a szóban forgó függvény grafikonjára.]

41. $\lim_{x\to 1^-} \arcsin x$ **42.** $\lim_{x\to -1^+} \arccos x$

43. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x$ **44.** $\lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x$

45. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arcsec} x$ **46.** $\lim_{x\to -\infty} \operatorname{arcsec} x$

47. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arccsc} x$ **48.** $\lim_{x\to -\infty} \operatorname{arccsc} x$

Deriválás

Határozzuk meg az y (megfelelő független változó szerinti) deriváltját (49–70. feladatok)!

49. $y=\arccos(x^2)$ **50.** $y=\arccos(1/x)$

51. $y=\arcsin\sqrt{2t}$ **52.** $y=\arcsin(1-t)$

53. $y=\operatorname{arcsec}(2s+1)$ **54.** $y=\operatorname{arcsec} 5s$

55. $y=\operatorname{arccsc}(x^2+1),\ x>0$ **56.** $y=\operatorname{arccsc}\dfrac{x}{2}$

57. $y=\operatorname{arcsec}\dfrac{1}{t},\ 0<t<1$ **58.** $y=\arcsin\dfrac{3}{t^2}$

59. $y=\operatorname{arcctg}\sqrt{t}$ **60.** $y=\operatorname{arcctg}\sqrt{t-1}$

61. $y=\ln(\operatorname{arctg} x)$ **62.** $y=\operatorname{arctg}(\ln x)$

63. $y=\operatorname{arccsc}(e^t)$ **64.** $y=\arccos(e^{-t})$

65. $y=s\sqrt{1-s^2}+\arccos s$ **66.** $y=\sqrt{s^2-1}-\operatorname{arcsec} s$

67. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}+\operatorname{arccsc} x,\ x>1$

68. $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}-\operatorname{arctg} x$ **69.** $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$

70. $y=\ln(x^2+4)-x\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Integrálás

Határozzuk meg az integrálokat (71–94. feladatok)!

71. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ **72.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

73. $\displaystyle\int \frac{dx}{17+x^2}$ **74.** $\displaystyle\int \frac{dx}{9+3x^2}$

75. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2-2}}$ **76.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-4}}$

77. $\displaystyle\int_0^1 \frac{4ds}{\sqrt{4-s^2}}$ **78.** $\displaystyle\int_0^{3\sqrt{2}/4} \frac{ds}{\sqrt{9-4s^2}}$

79. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dt}{8+2t^2}$ **80.** $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{dt}{4+3t^2}$

81. $\displaystyle\int_{-1}^{-\sqrt{2}/2} \frac{dy}{y\sqrt{9y^2-1}}$ **82.** $\displaystyle\int_{-2/3}^{-\sqrt{2}/3} \frac{dy}{y\sqrt{4y^2-1}}$

83. $\displaystyle\int \frac{3dr}{\sqrt{1-4(r-1)^2}}$ **84.** $\displaystyle\int \frac{6dr}{\sqrt{4-(r+1)^2}}$

85. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+(x-1)^2}$ **86.** $\displaystyle\int \frac{dx}{1+(3x+1)^2}$

87. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2-4}}$

88. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{(x+3)^2-25}}$

89. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\cos\theta\, d\theta}{1+\sin^2\theta}$ **90.** $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\csc^2 x\, dx}{1+\operatorname{ctg}^2 x}$

91. $\displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ **92.** $\displaystyle\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{4dt}{t(1+\ln^2 t)}$

93. $\displaystyle\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^4}}$ **94.** $\displaystyle\int \frac{\sec^2 y\, dy}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 y}}$

Határozzuk meg az integrálokat (95–104. feladatok)!

95. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$ **96.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

97. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{6dt}{\sqrt{3-2t-t^2}}$ **98.** $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{6dt}{\sqrt{3+4t-4t^2}}$

99. $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2-2y+5}$ **100.** $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2+6y+10}$

101. $\displaystyle\int_1^2 \frac{8dx}{x^2-2x+2}$ **102.** $\displaystyle\int_2^4 \frac{2dx}{x^2-6x+10}$

103. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$ **104.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

Határozzuk meg az integrálokat (105–112. feladatok)!

105. $\displaystyle\int \frac{e^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **106.** $\displaystyle\int \frac{e^{\arccos x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$

107. $\displaystyle\int \frac{(\arcsin x)^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **108.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}\,dx}{1+x^2}$

109. $\displaystyle\int \frac{dy}{\operatorname{arctg} y(1+y^2)}$ **110.** $\displaystyle\int \frac{dy}{\arcsin y\sqrt{1-y^2}}$

111. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sec^2(\operatorname{arcsec} x)dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ **112.** $\displaystyle\int_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{\cos(\operatorname{arcsec} x)dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

Határértékek

Határozzuk meg a határértékeket (117–120. feladatok)!

113. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 5x}{x}$ **114.** $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\operatorname{arcsec} x}$

115. $\lim_{x\to\infty} x\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x}$ **116.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{arctg} 3x^2}{7x^2}$

Integrálképletek

Ellenőrizzük a képletek helyességét (117–120. feladatok)!

117. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\operatorname{arctg} x}{x} + C$

118. $\displaystyle\int x^3 \arccos 5x\, dx = \frac{x^4}{4}\arccos 5x + \frac{5}{4}\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-25x^2}}$

119. $\displaystyle\int (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x + C$

120. $\displaystyle\int \ln(a^2+x^2)dx = x\ln(a^2+x^2) - 2x + 2a\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

Kezdetiérték-feladatok

Oldjuk meg a kezdetiérték-problémákat (121–124. feladatok)!

121. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y(0) = 0$

122. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2+1} - 1, \quad y(0) = 1$

123. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1, \quad y(2) = \pi$

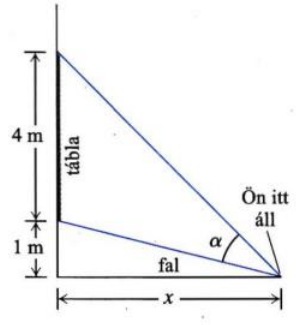
124. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y(0) = 2$

Alkalmazások és azonosságok

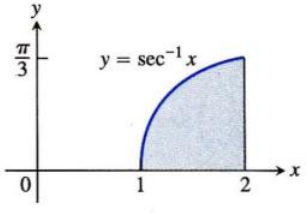
125. A tanteremben ülünk a táblával szemben. A tábla 4 méter széles, bal oldala a velünk közvetlenül szemben lévő ponttól 1 méterre jobbra van. Mutassuk meg, hogy ha a szemközti faltól x méter távolságra ülünk, akkor a táblát

$$\alpha = \operatorname{arcctg}\frac{x}{5} - \operatorname{arcctg} x$$

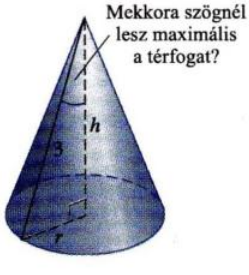
szög alatt látjuk!



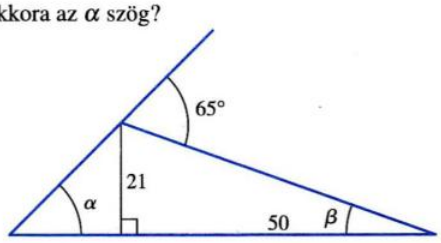
126. Forgassuk meg az x-tengely körül az $y = \operatorname{arcsec} x$ egyenletű görbe $x = 1$ és $x = 2$ közé eső szakaszát! Határozzuk meg az így keletkezett forgástest térfogatát!



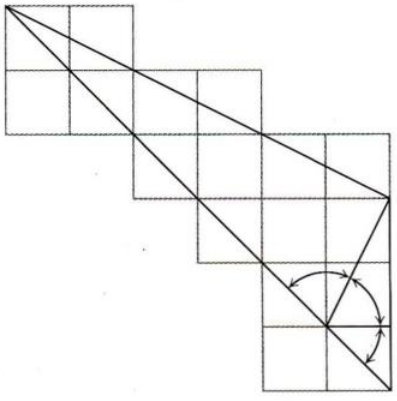
127. Az ábrán látható kúp alkotója 3 méter hosszú. A fél nyílásszög mely értéke mellett lesz a kúp térfogata maximális?



128. Mekkora az α szög?

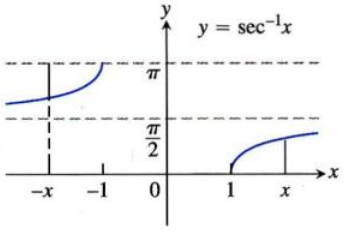


129. Az ábra képletek nélkül bizonyítja, hogy $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \pi$. Magyarázzuk meg, miért!



130. Az $\operatorname{arcsec}(-x) = \pi - \operatorname{arcsec} x$ **azonosság két bizonyítása:**

Geometriai bizonyítás. Az ábra az $\operatorname{arcsec}(-x) = \pi - \operatorname{arcsec} x$ azonosság képes bizonyítása. Magyarázzuk el!



Algebrai bizonyítás. Igazoljuk az azonosságot a (7.30) és a (7.32) összefüggései alapján:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \qquad \text{(7.30) azonosság,}$$
$$\operatorname{arcsec} x = \arccos(1/x). \qquad \text{(7.32) azonosság!}$$

131. Az $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ **azonosság:** A 7.21. ábra alapján az azonosság a $(0,1)$ intervallum elemeire teljesül. A $[-1,1]$ intervallum fennmaradó elemeire vonatkozóan járjunk el a következőképpen! Először igazoljuk az azonosságot az $x = 1$, 0 és -1 esetekre! A $(-1,0)$ intervallumbeli x-ek esetén legyen $x = -a$ (ahol $a > 0$), majd alkalmazzuk a (7.28) és (7.30) azonosságokat az $\arcsin(-a) + \arccos(-a)$ összegre!

132. Bizonyítsuk be, hogy az $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1/x)$ összeg állandó!

Melyik kifejezés értelmes az alábbiak közül (133–136. feladatok)? Válaszunkat indokoljuk!

133. (a) $\operatorname{arctg} 2$ **(b)** $\arccos 2$

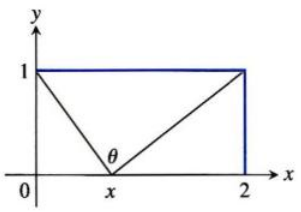
134. (a) $\operatorname{arccsc}(1/2)$ **(b)** $\operatorname{arccsc} 2$

135. (a) $\operatorname{arcsec} 0$ **(b)** $\arcsin\sqrt{2}$

136. (a) $\operatorname{arcctg}(-1/2)$ **(b)** $\arccos(-5)$

137. ***A 125. feladat folytatása.:*** Milyen messzire üljünk a szemközti faltól, hogy a táblát maximális szög alatt lássuk?

138. Mekkora x esetén lesz az ábrán látható θ szög maximális? [*Útmutatás:* először mutassuk meg, hogy $\theta = \pi - \operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg}(2-x)$!]



139. Lehet-e helyes mindkét integrálás? Indokoljuk válaszunkat!

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$

140. Lehet-e helyes mindkét integrálás? Indokoljuk válaszunkat!

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-du}{\sqrt{1-(-u)^2}} =$

$$= \int \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = \arccos u + C = \arccos(-x) + C,$$

itt az $x = -u$, $dx = -du$ helyettesítést alkalmaztuk.

141. Az $\operatorname{arccsc} u = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsec} u$ azonosság alapján (és az arcsec függvény deriváltjának ismeretében) vezessük le az arccsc függvény deriváltjára a 7.3. táblázatban megadott képletet!

142. Vezessük le az $y = \operatorname{arctg} x$ függvény deriváltját megadó

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

képletet a $\operatorname{tg} y = x$ egyenlőség mindkét oldalának deriválásával!

143. A 7.1. alfejezetbeli 1. Tétel alapján vezessük le, hogy $|x| > 1$ esetén

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}!$$

144. Az $\operatorname{arcctg} u = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} u$ azonosság alapján (és az arctg függvény deriváltjának ismeretében) vezessük le az arcctg függvény deriváltjára a 7.3. táblázatban megadott képletet!

145. Mi a különleges az

$$f(x) = \arcsin\frac{x-1}{x+1},\ x \geq 0 \quad \text{és} \quad g(x) = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$$

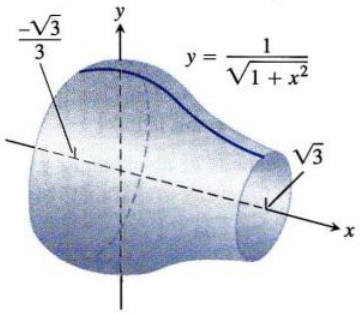
függvényekben? Magyarázzuk meg!

146. Mi a különleges az

$$f(x) = \arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{és} \quad g(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

függvényekben? Magyarázzuk meg!

147. Határozzuk meg az ábrán látható forgástest térfogatát!



148. Ívhossz: Határozzuk meg az $y = \sqrt{1-x^2}$ egyenletű görbe azon szakaszának hosszát, amely az $x = -1/2$ és az $x = 1/2$ abszcisszájú pontok közé esik!

Térfogatszámítás

Számítsuk ki a testek térfogatát (149–150. feladatok)!

149. A testet az x-tengelyre merőleges, azt az $x = -1$ és $x = 1$ pontokban metsző síkok határolják. Az x-tengelyre merőleges metszetek

(a) olyan körök, amelyeknek átmérői az $y = -1/\sqrt{1+x^2}$ egyenletű görbétől az $y = 1/\sqrt{1+x^2}$ egyenletű görbéig húzódnak; illetve

(b) olyan négyzetek, amelyeknek élei az $y = -1/\sqrt{1+x^2}$ egyenletű görbétől az $y = 1/\sqrt{1+x^2}$ egyenletű görbéig húzódnak.

150. A testet az x-tengelyre merőleges, azt az $x = -\sqrt{2}/2$ és $x = \sqrt{2}/2$ pontokban metsző síkok határolják. Az x-tengelyre merőleges metszetek

(a) olyan körök, amelyeknek átmérői az x-tengelytől az $y = 2/\sqrt[4]{1-x^2}$ egyenletű görbéig húzódnak; illetve

(b) olyan négyzetek, amelyeknek átlói az x-tengelytől az $y = 2/\sqrt[4]{1-x^2}$ egyenletű görbéig húzódnak.

Számítógépes vizsgálatok

151. Határozzuk meg a

(a) $\operatorname{arcsec} 1{,}5$, **(b)** $\operatorname{arccsc}(-1{,}5)$, **(c)** $\operatorname{arcctg} 2$

függvényértékeket!

152. Határozzuk meg a

(a) $\operatorname{arcsec}(-3)$, **(b)** $\operatorname{arccsc} 1{,}7$, **(c)** $\operatorname{arcctg}(-2)$

függvényértékeket!

A 153–155. feladatokban először állapítsuk meg a megadott összetett függvények értelmezési tartományát és értékkészletét, majd ábrázoljuk a függvények grafikonját külön ablakokban! Értelmes-e minden esetben a függvénykompozíció? Indokoljuk válaszunkat! Magyarázzuk meg, milyen különbségeket látunk!

153. (a) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ **(b)** $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$

154. (a) $y = \arcsin(\sin x)$ **(b)** $y = \sin(\arcsin x)$

155. (a) $y = \arccos(\cos x)$ **(b)** $y = \cos(\arccos x)$

156. Rajzoltassuk fel az $y = \sec(\operatorname{arcsec} x) = \sec(\arccos(1/x))$ függvény grafikonját! Magyarázzuk meg, mit látunk!

157. A Newton-féle kígyógörbe: Ábrázoljuk az

$$y = 4x/(x^2+1)$$

függvény grafikonját (Newton-féle kígyógörbe)! Ugyanebben az ablakban rajzoltassuk fel az $y = 2\sin(2\operatorname{arctg} x)$ függvény grafikonját is. Magyarázzuk meg, mit látunk!

158. Ábrázoljuk ugyanabban az ablakban az $y = (2-x^2)/x^2$ és az $y = \cos(2\operatorname{arcsec} x)$ függvény grafikonját! Magyarázzuk meg, mit látunk!

159. Ábrázoljuk az $f(x) = \arcsin x$ függvényt az első két deriváltjával együtt! Magyarázzuk el, milyen kapcsolat van f grafikonjának alakja, valamint az $f'(x)$ és $f''(x)$ függvények előjele és értéke között!

160. Ábrázoljuk az $f(x) = \operatorname{arctg} x$ függvényt az első két deriváltjával együtt! Magyarázzuk el, milyen kapcsolat van f grafikonjának alakja, valamint az $f'(x)$ és $f''(x)$ függvények előjele és értéke között!

7.8. Hiperbolikus függvények

A hiperbolikus függvényeket két exponenciális függvény, e^x és e^{-x} alapján definiáljuk. Ezeknek a függvényeknek a segítségével sok matematikai számítás egyszerűsíthető, és a gyakorlati alkalmazásokban is gyakran előkerülnek. Ilyen függvények írják le például a két végüknél felfüggesztett elektromos vezetékek alakját, és számos differenciálegyenlet megoldásában is szerepet kapnak. Ebben az alfejezetben rövid bevezetést adunk a hiperbolikus függvények elméletébe, bemutatjuk a függvények grafikonját, meghatározzuk a deriváltjukat, és az is kiderül, mi a jelentősége ezeknek a függvényeknek bizonyos integrálok kiszámításában.

Az exponenciális függvény páros és páratlan része

Az 1.4. alfejezet óta tudjuk, mikor nevezünk egy függvényt párosnak, illetve páratlannak: az f függvény páros, ha értelmezési tartománya bármely x elemére $f(x) = f(-x)$, és páratlan, ha $f(-x) = -f(x)$. Minden olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya szimmetrikus az origóra, egyértelműen felírható egy páros és egy páratlan függvény összegeként:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{páros rész}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{páratlan rész}}.$$

Ha az e^x függvényt így írjuk fel, akkor az

$$e^x = \underbrace{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}_{\text{páros rész}} + \underbrace{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}_{\text{páratlan rész}}$$

azonosságot kapjuk. Az e^x függvény páros, illetve páratlan részét *hiperbolikus koszinusz,* vagy *koszinusz hiperbolikusz,* illetve *hiperbolikus szinusz* vagy *szinusz hiperbolikusz* függvénynek nevezzük. Ilyen függvényekkel írjuk le a rugalmas közegekben terjedő hullámok mozgását; a St. Louistól nyugatra fekvő Gateway Arch íve egy súlyozott koszinusz hiperbolikuszfüggvény grafikonja.

Definíciók és alapvető azonosságok

A koszinusz hiperbolikusz és a szinusz hiperbolikusz függvény definícióját a 7.5. táblázat első két sora adja meg, utánuk a hiperbolikus tangens, kotangens, szekáns és koszekáns függvény meghatározása következik. Látni fogjuk, hogy a hiperbolikus függvények nem csak nevükben hasonlítanak a trigonometrikus függvényekre (lásd ehhez a 84. feladatot is).

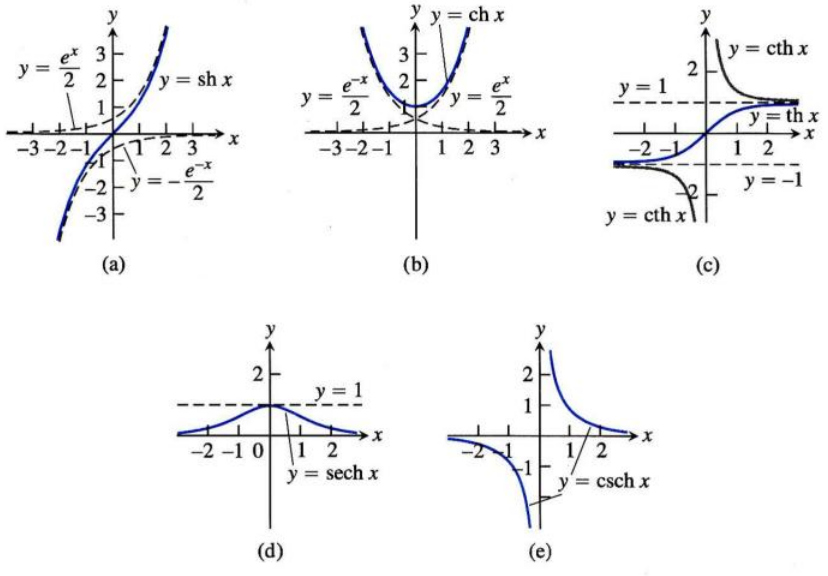
A hiperbolikus függvényekre teljesülnek a 7.6. táblázatban felsorolt azonosságok, amelyek – az előjelektől eltekintve – szintén emlékeztetnek a trigonometrikus függvényekre vonatkozó analóg összefüggésekre.

hiperbolikus szinusz	$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
hiperbolikus koszinusz	$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
hiperbolikus tangens	$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
hiperbolikus kotangens	$\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
hiperbolikus szekáns	$\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$
hiperbolikus koszekáns	$\operatorname{csch} = \dfrac{1}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

7.5. TÁBLÁZAT: A hat alapvető hiperbolikus függvény, lásd a 7.31. ábrát.

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$
$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$
$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x$$
$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$$
$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$$
$$\operatorname{th}^2 x = 1 - \operatorname{sech}^x$$
$$\operatorname{cth}^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$$

7.6. TÁBLÁZAT: Hiperbolikus függvényekre vonatkozó azonosságok.



7.31. ÁBRA: A hat alapvető hiperbolikus függvény grafikonja.

A második azonosság például így igazolható:

$$2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) =$$
$$= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x.$$

A többi azonosság hasonlóan bizonyítható, mindössze a megfelelő függvények definícióit és az exponenciális függvényekre vonatkozó algebrai azonosságokat kell használnunk. Számológép segítségével – több más alapvető függvényhez hasonlóan – a hiperbolikus függvények értékeit is könnyen megadhatjuk.

Deriváltak és integrálok

Mind a hat hiperbolikus függvény az e^x és az e^{-x} differenciálható függvények racionális kombinációja, így értelmezési tartományuk minden pontjában differenciálhatók (7.7. táblázat). A deriváltképletek emlékeztetnek a trigonometrikus függvényekre vonatkozó megfelelő képletekre. A 7.7. táblázat képleteiből a 7.8. táblázat integrálformuláit kapjuk.

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sh} u) = \operatorname{ch} u \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{ch} u) = \operatorname{sh} u \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{th} u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cth} u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \operatorname{th} \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \operatorname{cth} \frac{du}{dx}$$

7.7. TÁBLÁZAT: A hiperbolikus függvények deriváltjai.

$$\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C$$
$$\int \operatorname{ch} du = \operatorname{sh} u + C$$
$$\int \operatorname{sech}^2 u du = \operatorname{th} u + C$$
$$\int \operatorname{csch}^2 u du = -\operatorname{cth} u + C$$
$$\int \operatorname{sech} u \operatorname{th} u du = -\operatorname{sech} u + C$$
$$\int \operatorname{csch} u \operatorname{cth} u du = -\operatorname{csch} u + C$$

7.8. TÁBLÁZAT: A hiperbolikus függvények integrálja.

A deriváltakra vonatkozó képletek az e^u függvény deriváltjának ismeretében igazolhatók; az első például így:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sh} u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right) = \qquad \operatorname{sh} u \text{ definíciója}$$
$$= \frac{e^u du/dx + e^{-u} du/dx}{2} = \qquad e^u \text{ deriváltja}$$
$$= \operatorname{ch} u \frac{du}{dx}. \qquad \operatorname{ch} u \text{ definíciója}$$

Az utolsó bizonyítása pedig:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} u}\right) = \qquad \operatorname{csch} u \text{ definíciója}$$
$$= -\frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh}^2 u} \frac{du}{dx} = \qquad \text{hányadosszabály}$$
$$= -\frac{1}{\operatorname{sh} u} \frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u} \frac{du}{dx} = \qquad \text{tényezők átrendezésével}$$
$$= -\operatorname{csch} u \operatorname{cth} u \frac{du}{dx}. \qquad \operatorname{csch} u \text{ és } \operatorname{cth} u \text{ definíciója}$$

Hasonlóan bizonyítható a többi képlet is.

1. PÉLDA: **Hiperbolikus függvényeket tartalmazó deriváltak és integrálok meghatározása**

(a) $$\frac{d}{dt}\left(\operatorname{th}\sqrt{1+t^2}\right) = \operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2} \cdot \frac{d}{dt}\left(\sqrt{1+t^2}\right) =$$
$$= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}$$

(b) $$\int \operatorname{cth} 5x \, dx = \int \frac{\operatorname{ch} 5x}{\operatorname{sh} 5x} dx = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u} = \qquad \begin{matrix} u = \operatorname{sh} 5x, \\ du = 5 \operatorname{ch} 5x \, dx \end{matrix}$$
$$= \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|\operatorname{sh} 5x| + C$$

(c) $$\int_0^1 \operatorname{sh}^2 x \, dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2} dx = \qquad \text{7.6. táblázat}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (\operatorname{ch} 2x - 1) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sh} 2x - 1}{2} - x\right]_0^1 =$$
$$= \frac{\operatorname{sh} 2}{4} - \frac{1}{2} \approx 0{,}40672$$

(d) $$\int_0^{\ln 2} 4e^x \operatorname{sh} x \, dx = \int_0^{\ln 2} 4e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} x \, dx = \int_0^{\ln 2} (2e^{2x} - 2) dx =$$
$$= \left[e^{2x} - 2x\right]_0^{\ln 2} = \left(e^{2\ln 2} - 2\ln 2\right) - (1 - 0) =$$
$$= 4 - 2\ln 2 - 1 \approx 1{,}6137$$

Inverz hiperbolikus függvények

A hat alapvető hiperbolikus függvény inverzei nagyon hasznosak bizonyos integrálok meghatározásakor. Mivel minden x esetén $d(\mathrm{sh}x)/dx = \mathrm{ch}x > 0$, a $\mathrm{sh}x$ függvény növekvő, így értelmezhető az

$$y = \mathrm{sh}^{-1}x = \mathrm{arsh}x$$

area szinusz hiperbolikusz inverz függvény. Tetszőleges $-\infty < x < \infty$ esetén $\mathrm{arsh}x$ az a valós szám, amelynek szinusz hiperbolikusza x. Az $y = \mathrm{sh}x$ és az $y = \mathrm{arsh}x$ függvény grafikonját a 7.32. ábra (a) részén tanulmányozhatjuk.

Az $y = \mathrm{ch}x$ függvény nem injektív (7.31. ábra (b) része), de a nemnegatív számokra való leszűkítése már az. Az $x \geq 0$ számokra ennélfogva értelmezhető az

$$y = \mathrm{ch}^{-1}x = \mathrm{arch}x$$

area koszinusz hiperbolikusz inverz függvény. Tetszőleges $x \geq 1$ esetén tehát $\mathrm{arch}x$ az a $0 \leq y < \infty$ szám, amelynek koszinusz hiperbolikusza x. Az $y = \mathrm{ch}x$ és az $y = \mathrm{arch}x$ függvény grafikonját a 7.32. ábra (b) része mutatja.

Az $y = \mathrm{sech}x = 1/\mathrm{ch}x$ függvény sem injektív, de a nemnegatív számokra való leszűkítése már az, a leszűkített függvénynek tehát létezik az

$$y = \mathrm{sech}^{-1}x = \mathrm{arsech}x$$

inverze. Tetszőleges $x \in (0,1]$ esetén $\mathrm{arsech}x$ az a $0 \leq y < \infty$ szám, amelynek szekáns hiperbolikusza x. Az $y = \mathrm{sech}x$ és az $y = \mathrm{arsech}x$ függvény grafikonját a 7.32. ábra (c) részén láthatjuk.

A hiperbolikus tangens, kotangens és koszekáns teljes értelmezési tartományukon injektív függvények,

$$y = \mathrm{th}^{-1}x = \mathrm{arth}x, \quad y = \mathrm{cth}^{-1}x = \mathrm{arcth}x, \quad y = \mathrm{csch}^{-1}x = \mathrm{arcsch}x$$

inverzüket a 7.33. ábrán tanulmányozhatjuk.

$$\mathrm{arsech}x = \mathrm{arch}\frac{1}{x}$$

$$\mathrm{arcsch}x = \mathrm{arsh}\frac{1}{x}$$

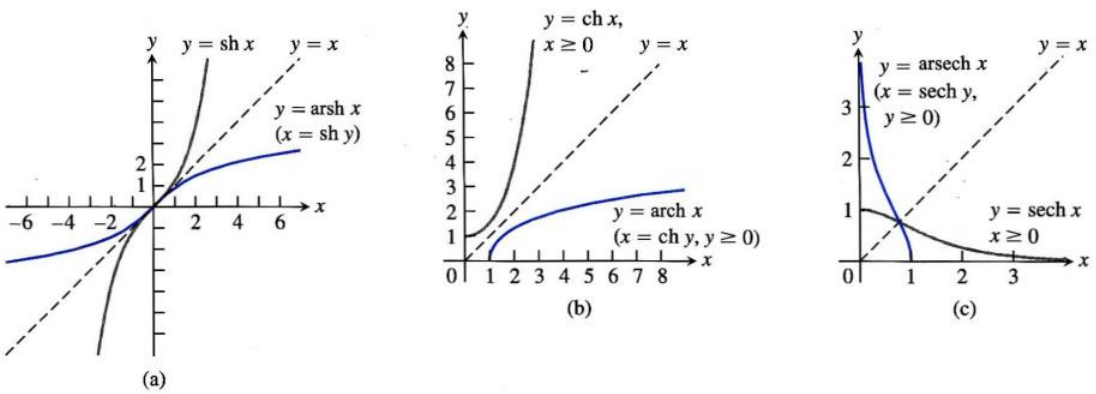
$$\mathrm{arcth}x = \mathrm{arth}\frac{1}{x}$$

7.9. TÁBLÁZAT: A hiperbolikus függvények inverzei közötti azonosságok.

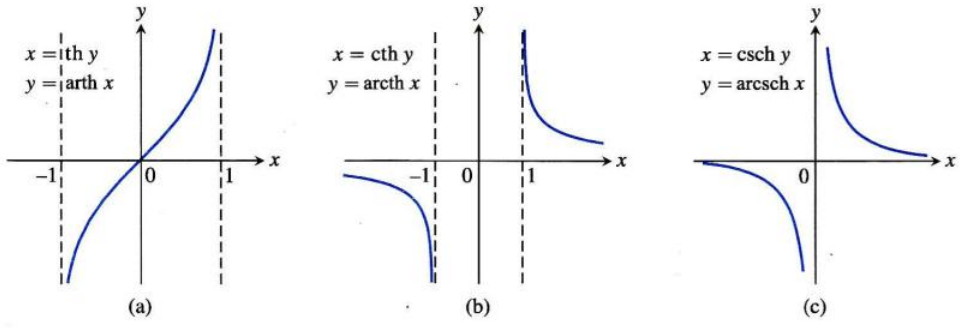
Hasznos azonosságok

A 7.9. táblázat összefüggéseit felhasználva akkor is megadhatjuk az $\mathrm{arsech}x$, $\mathrm{arcsch}x$, $\mathrm{arcth}x$ függvényértékeket, ha számológépünk csupán az $\mathrm{arch}x$, $\mathrm{arsh}x$, $\mathrm{arth}x$ függvényeket ismeri. Az azonosságok a definíciók egyszerű következményei; például ha $0 < x \leq 1$, akkor

$$\mathrm{sech}\left(\mathrm{arch}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{\mathrm{ch}\left(\mathrm{arch}\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x,$$



7.32. ÁBRA: A hiperbolikus szinusz, koszinusz és szekáns, valamint inverzeik grafikonja. Figyeljünk fel az $y = x$ egyenesre való szimmetriára!



7.33. ÁBRA: A hiperbolikus tangens, kotangens és koszekáns inverzeinek grafikonja.

$$\frac{d(\operatorname{arsh} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\operatorname{arch} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \qquad u > 1$$

$$\frac{d(\operatorname{arth} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$$

$$\frac{d(\operatorname{arcth} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| > 1$$

$$\frac{d(\operatorname{arsech} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{u\sqrt{1-u^2}}, \qquad 0 < u < 1$$

$$\frac{d(\operatorname{arcsch} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{|u|\sqrt{1+u^2}}, \qquad u \neq 0$$

7.10. TÁBLÁZAT: Az inverz hiperbolikus függvények deriváltja.

azaz valóban:

$$\operatorname{arch}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arsech} x,$$

mivel a szekáns hiperbolikusz injektív a $(0,1]$ intervallumon.

Deriváltak és integrálok

A hiperbolikus függvények inverzeit a 7.10. táblázat képleteiből nyert integrálformulákban használjuk a leggyakrabban.

Az $|u| < 1$, illetve az $|u| > 1$ kikötés az $\operatorname{arth} u$ és az $\operatorname{arcth} u$ képletében a megfelelő függvények értékkészletéből eredő természetes megszorítások (7.33. ábra (a) és (b) része). Az $|u| < 1$ és az $|u| > 1$ eset különbsége akkor válik jelentőssé, amikor a táblázat képleteit integrálformulákká alakítjuk át. Az $1/(1-u^2)$ integrálja az $|u| < 1$ esetben $\operatorname{arth} u + C$, az $|u| > 1$ esetben viszont $\operatorname{arcth} u + C$.

A következő példában levezetjük az $\operatorname{arch} u$ deriváltjára vonatkozó képletet, hasonlóan megy a többi inverz hiperbolikus függvény deriváltjának kiszámítása.

2. PÉLDA: **Az area koszinusz hiperbolikusz deriváltja**

Igazoljuk, hogy ha u olyan differenciálható függvény, amelynek minden értéke 1-nél nagyobb, akkor

$$\frac{d(\operatorname{arch} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}!$$

Megoldás: Először meghatározzuk az $y = 7\operatorname{arch} x$, $x > 1$ deriváltját az 1. Tétel alapján; esetünkben tehát $f(x) = \operatorname{ch} x$ és $f^{-1}(x) = \operatorname{arch} x$. Az 1. Tétel alkalmazható, mivel $\operatorname{ch} x$ deriváltja minden $x > 0$ esetén pozitív.

$$
\begin{aligned}
(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = & \qquad \text{1. Tétel} \\
= \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{arch} x)} = & \qquad f'(u) = \operatorname{sh} u \\
= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{arch} x) - 1}} = & \qquad \operatorname{sh} u = \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1} \\
= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.
\end{aligned}
$$

Röviden:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arch} x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

A láncszabály alapján így azt kapjuk, hogy:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arch} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}. \qquad \square$$

Az 1. Tétel alkalmazása helyett az $y = \operatorname{arch} x$, $x > 0$ függvény deriváltját az implicit deriválás módszerével is meghatározhatjuk:

$$
\begin{aligned}
y &= \operatorname{arch} x \\
x &= \operatorname{ch} y && \text{ekvivalens egyenlet} \\
1 &= \operatorname{sh} y \frac{dy}{dx} && \text{implicit deriválás } x \text{ szerint} \\
\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{sh} y} &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}} = && x > 1 \text{ miatt } y > 0 \text{ és } \operatorname{sh} y > 0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}. && \operatorname{ch} y = x
\end{aligned}
$$

Megfelelő helyettesítésekkel a 7.10. táblázat képletei alapján a 7.11. táblázatban szereplő integrálformulákat kapjuk. Az utóbbiakat a jobb oldal deriválásával láthatjuk be.

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \operatorname{arsh}\left(\frac{u}{a}\right) + C && a > 0 \\
&\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \operatorname{arch}\left(\frac{u}{a}\right) + C && u > a > 0 \\
&\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arth}\left(\frac{u}{a}\right) + C, & u^2 < a^2 \\ \frac{1}{a} \operatorname{arcth}\left(\frac{u}{a}\right) + C, & u^2 > a^2 \end{cases} \\
&\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{arsech}\left(\frac{u}{a}\right) + C && 0 < u < a \\
&\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{arcsch}\left|\frac{u}{a}\right| + C && u \neq 0 \text{ és } a > 0
\end{aligned}
$$

7.11. TÁBLÁZAT: Integrálképletek inverz hiperbolikus függvényekkel.

3. PÉLDA: **A 7.11. táblázat alkalmazása**

Határozzuk meg a

$$\int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{3+4x^2}}$$

integrált!

Megoldás: Először a határozatlan integrált számítjuk ki:

$$\int \frac{2dx}{\sqrt{3+4x^2}} = \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \qquad u=2x \;\; du=2dx \;\; a=\sqrt{3}$$
$$= \operatorname{arsh}\left(\frac{u}{a}\right)+C =$$
$$= \operatorname{arsh}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

amiből:

$$\int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{3+4x^2}} = \left[\operatorname{arsh}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \operatorname{arsh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{arsh}0 =$$
$$= \operatorname{arsh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - 0 \approx 0{,}98665. \qquad \square$$

7.8. Feladatok

Hiperbolikus függvények értékeinek kiszámítása. Azonosságok

Az 1–4. feladatokban $\operatorname{sh}x$ vagy $\operatorname{ch}x$ értékét adjuk meg. A definíciók és a $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$ azonosság alapján határozzuk meg a másik öt hiperbolikus függvény értékét!

1. $\operatorname{sh}x=-\frac{3}{4}$ **2.** $\operatorname{sh}x=\frac{4}{3}$

3. $\operatorname{ch}x=\frac{17}{15}$, $x>0$ **4.** $\operatorname{ch}x=\frac{13}{5}$, $x>0$

Egyszerűsítsük a kifejezéseket (5–10. feladatok)! Első lépésben írjuk fel a hiperbolikus függvényeket exponenciálisok segítségével!

5. $2\operatorname{ch}(\ln x)$ **6.** $\operatorname{sh}(2\ln x)$

7. $\operatorname{ch}5x+\operatorname{sh}5x$ **8.** $\operatorname{ch}3x-\operatorname{sh}3x$

9. $(\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x)^4$

10. $\ln(\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x)+\ln(\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x)$

11. A
$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$$
$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$$

azonosságok alapján bizonyítsuk be, hogy

(a) $\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$,

(b) $\operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x$

12. A $\operatorname{ch}x$ és a $\operatorname{sh}x$ függvény definíciója alapján igazoljuk, hogy minden x-re

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1.$$

Deriváltak

Deriváljuk a függvényeket a megfelelő független változó szerint (13–24. feladatok)!

13. $y=6\operatorname{sh}\frac{x}{3}$ **14.** $y=\frac{1}{2}\operatorname{sh}(2x+1)$

15. $y=2\sqrt{t}\operatorname{th}\sqrt{t}$ **16.** $y=t^2\operatorname{th}\frac{1}{t}$

17. $y=\ln(\operatorname{sh}z)$ **18.** $y=\ln(\operatorname{ch}z)$

19. $y=\operatorname{sech}\theta(1-\ln\operatorname{sech}\theta)$ **20.** $y=\operatorname{csch}\theta(1-\ln\operatorname{csch}\theta)$

21. $y=\ln\operatorname{ch}v-\frac{1}{2}\operatorname{th}^2v$ **22.** $y=\ln\operatorname{sh}v-\frac{1}{2}\operatorname{cth}^2v$

23. $y=(x^2+1)\operatorname{sech}(\ln x)$ [*Útmutatás:* a deriválás előtt egyszerűsítsük a függvény képletét!]

24. $y=(4x^2-1)\operatorname{csch}(\ln 2x)$

Deriváljuk a függvényeket a megfelelő független változó szerint (25–36. feladatok)!

25. $y=\operatorname{arsh}\sqrt{x}$ **26.** $y=\operatorname{arch}2\sqrt{x+1}$

27. $y=(1-\theta)\operatorname{arth}\theta$

28. $y=(\theta^2+2\theta)\operatorname{arth}(\theta+1)$

29. $y=(1-t)\operatorname{arcth}\sqrt{t}$ **30.** $y=(1-t^2)\operatorname{arcth}t$

31. $y=\arccos x-x\operatorname{arsech}x$

32. $y=\ln x+\sqrt{1-x^2}\operatorname{arsech}x$

33. $y=\operatorname{arcsch}\left(\frac{1}{2}\right)^\theta$ **34.** $y=\operatorname{arcsch}2^\theta$

35. $y=\operatorname{arsh}(\operatorname{tg}x)$

36. $y=\operatorname{arch}(\sec x)$, $0<x<\pi/2$

Integrálazonosságok

Igazoljuk a képletek helyességét (37–40. feladatok)!

37. **(a)** $\int \operatorname{sech} x\,dx = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + C$

(b) $\int \operatorname{sech} x\,dx = \arcsin(\operatorname{th} x) + C$

38. $\int x \operatorname{arsech} x\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arsech} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C$

39. $\int x \operatorname{arcth} x\,dx = \frac{x^2-1}{2}\operatorname{arcth} x + \frac{x}{2} + C$

40. $\int \operatorname{arth} x\,dx = x\operatorname{arth} x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$

Határozatlan integrálok

Határozzuk meg az integrálokat (41–50. feladatok)!

41. $\int \operatorname{sh} 2x\,dx$

42. $\int \operatorname{sh}\frac{x}{5}\,dx$

43. $\int 6\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2} - \ln 3\right)dx$

44. $\int 4\operatorname{ch}(3x - \ln 2)\,dx$

45. $\int \operatorname{th}\frac{x}{7}\,dx$

46. $\int \operatorname{cth}\frac{\theta}{\sqrt{3}}\,d\theta$

47. $\int \operatorname{sech}^2\left(x - \frac{1}{2}\right)dx$

48. $\int \operatorname{csch}^2(5-x)\,dx$

49. $\int \frac{\operatorname{sech}\sqrt{t}\operatorname{th}\sqrt{t}\,dt}{\sqrt{t}}$

50. $\int \frac{\operatorname{csch}(\ln t)\operatorname{cth}(\ln t)dt}{t}$

Határozott integrálok

Határozzuk meg az integrálokat (51–60. feladatok)!

51. $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \operatorname{cth} x\,dx$

52. $\int_{0}^{\ln 2} \operatorname{th} x\,dx$

53. $\int_{-\ln 4}^{-\ln 2} 2e^{\theta}\operatorname{ch}\theta\,d\theta$

54. $\int_{0}^{\ln 2} 4e^{-\theta}\operatorname{sh}\theta\,d\theta$

55. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{ch}(\operatorname{tg}\theta)\sec^2\theta\,d\theta$

56. $\int_{0}^{\pi/2} 2\operatorname{sh}(\sin\theta)\cos\theta\,d\theta$

57. $\int_{1}^{2} \frac{\operatorname{ch}(\ln t)}{t}\,dt$

58. $\int_{1}^{4} \frac{8\operatorname{ch}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

59. $\int_{-\ln 2}^{0} \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$

60. $\int_{0}^{\ln 10} 4\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$

Inverz hiperbolikus függvények

Az inverz hiperbolikus függvények értékeit akkor is meghatározhatjuk, ha számológépünk még a hiperbolikus függvényeket sem ismeri. Csupán a természetes alapú logaritmusra van szükségünk:

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \qquad x \geq 1$$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, |x| < 1, \qquad |x| < 1$$

$$\operatorname{arsech} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \qquad 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{arcsch} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right), \qquad x \neq 0$$

$$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, \qquad |x| > 1$$

Az iménti képleteket felhasználva írjuk fel a kifejezéseket természetes alapú logaritmus segítségével (61–66. feladatok)!

61. $\operatorname{arsh}(-5/12)$

62. $\operatorname{arch}(5/3)$

63. $\operatorname{arth}(-1/2)$

64. $\operatorname{arcth}(5/4)$

65. $\operatorname{arsech}(3/5)$

66. $\operatorname{arcsch}(-1/\sqrt{3})$

Számítsuk ki az integrálokat

(a) az inverz hiperbolikus függvények,

(b) a természetes logaritmus

segítségével (67–74. feladatok)!

67. $\int_{0}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

68. $\int_{0}^{1/3} \frac{6dx}{\sqrt{1+9x^2}}$

69. $\int_{5/4}^{2} \frac{dx}{1-x^2}$

70. $\int_{0}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$

71. $\int_{1/5}^{3/13} \frac{dx}{x\sqrt{1-16x^2}}$

72. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$

73. $\int_{0}^{\pi} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

74. $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$

További példák és feladatok

75. **(a)** Igazoljuk, hogy ha az f függvény értelmezési tartománya egy origóra szimmetrikus intervallum (azaz $f(-x)$ minden olyan x esetén értelmezve van, amelynél $f(x)$ is), akkor

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}! \qquad (7.33)$$

Ezután igazoljuk, hogy az $(f(x)+f(-x))/2$ függvény páros, $(f(x)-f(-x))/2$ pedig páratlan!

(b) A (7.33) egyenlőség jelentősen leegyszerűsödik, ha f páros, vagy páratlan függvény. Hogyan és miért?

76. Vezessük le az $\operatorname{arsh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $-\infty < x < \infty$ azonosságot! Magyarázzuk meg, hogy a gyökjel előtt miért + áll!

77. Szabadesés: Ha egy szabadon eső, m tömegű testre ható légellenállás egyenesen arányos a test sebességének négyzetével, akkor a (nyugalomból induló) test sebességét megadó $v(t)$ függvény kielégíti az

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

differenciálegyenletet, ahol a k konstans értéke a test aerodinamikai tulajdonságaitól és a levegő sűrűségétől függ. (Feltesszük, hogy a zuhanás ideje elég rövid, így a levegő sűrűségének változásától eltekinthetünk.)

(a) Igazoljuk, hogy a

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\,\text{th}\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t\right)$$

függvény kielégíti a differenciálegyenletet és a $v(0) = 0$ kezdeti feltételt!

(b) Adjuk meg a sebesség $\lim_{t\to\infty} v(t)$ határértékét!

(c) Egy 80 kg tömegű ejtőernyős esetében k tipikus értéke 0,269. Mekkora sebességre gyorsul ugrás közben?

78. Elmozdulással arányos gyorsulás: Tegyük fel, hogy egy egyenes mentén mozgó test helyzetét a t időpontban az

(a) $s = a\cos kt + b\sin kt$, illetve a

(b) $s = a\,\text{ch}\,kt + b\,\text{sh}\,kt$

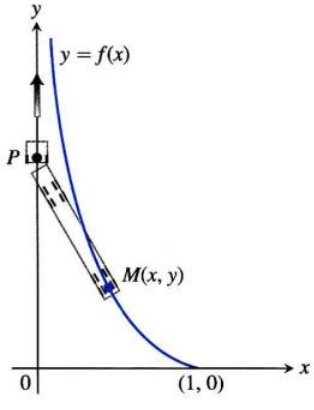
függvény írja le! Bizonyítsuk be, hogy a d^2s/dt^2 gyorsulás mindkét esetben arányos s-sel, de míg az első esetben azzal ellentétes, a másodikban azzal egyező irányú!

79. A traktor és a traktrix: Amikor egy pótkocsit húzó traktor derékszögben kanyarodik, a pótkocsi kerekei az ábrán látható görbe mentén mozognak. (Az ábra azt is megmagyarázza, hogy a hátsó kerék miért hagyja el alkalmanként az utat.) A görbe egyenletét meghatározhatjuk, ha a hátsó kereket olyan M pontnak tekintjük, amely az $(1,0)$ pontból indul, és a vezető fülkéhez egységnyi hosszúságú rúddal van kapcsolva. Miközben a szakasz másik, az ábrán P-vel jelölt végpontja az y-tengely mentén mozog, „maga után húzza" M-t. Az M által leírt görbét **traktrixnak** (vagy húzógörbének) nevezzük. A görbét megadó $y = f(x)$ egyenlet kielégíti az alábbi kezdetiérték-problémát:

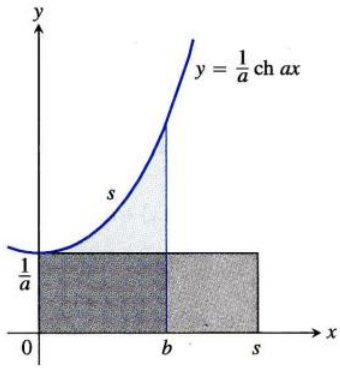
differenciálegyenlet: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

kezdeti feltétel: ha $x = 1$, akkor $y = 0$.

Oldjuk meg a kezdetiérték-problémát, és írjuk fel a görbe egyenletét (egy inverz hiperbolikus függvényre lesz szükségünk)!



80. Terület: Igazoljuk, hogy az $y = (1/a)\,\text{ch}\,ax$, a koordinátatengelyek és az $x = b$ egyenes által határolt terület megegyezik annak a téglalapnak a területével, amelynek egyik oldala $1/a$, a másik pedig s, ahol s a görbe $x = 0$ és $x = b$ közötti szakaszának hossza! (Lásd az ábrát!)

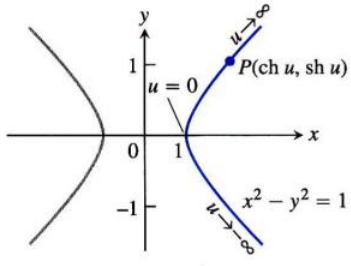


81. Térfogat: Tekintsük azt az első síknegyedbeli tartományt, amelyet felülről az $y = \text{ch}\,x$, alulról az $y = \text{sh}\,x$ egyenletű görbék, balról az y-tengely, jobbról pedig az $x = 2$ egyenletű egyenes határol! Mekkora térfogatú forgástestet kapunk, ha ezt a tartományt megforgatjuk az x-tengely körül?

82. Térfogat: Forgassuk meg az x-tengely körül az $y = \text{sech}\,x$ egyenletű görbe, az x-tengely, valamint az $y = \pm\ln\sqrt{3}$ egyenletű egyenesek által határolt tartományt! Mekkora az így keletkező forgástest térfogata?

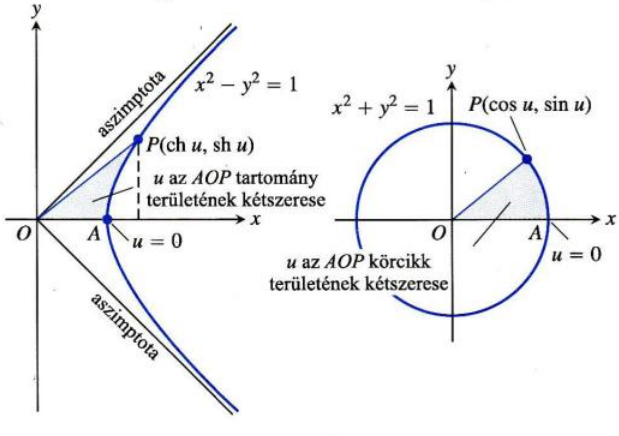
83. Ívhossz: Határozzuk meg az $y = (1/2)\,\text{ch}\,2x$ egyenletű görbének az $x = 0$ és $x = \ln\sqrt{5}$ közötti hosszát!

84. A „hiperbolikus" jelző magyarázata: Ha valakiben felmerült, miért nevezzük a hiperbolikus függvényeket „hiperbolikusnak", íme a magyarázat. Ahogy az $x = \cos u$, $y = \sin u$ paraméterezés az egységsugarú kör pontjait, az $x = \text{ch}\,u$, $y = \text{sh}\,u$ pontok az $x^2 - y^2 = 1$ egyenletű hiperbola jobb oldali ágát adják meg.



Mivel minden u esetén $\text{ch}^2 u - \text{sh}^2 u = 1$, a $(\text{ch}\,u, \text{sh}\,u)$ pontok mindegyike az $x^2 - y^2 = 1$ egyenletű hiperbola jobb oldali ágára illeszkedik.

A trigonometrikus függvényekkel való analógia tovább mélyíthető. Az $x^2 - y^2 = 1$ egyenletű hiperbola jobb oldali ágának $(\text{ch}\,u, \text{sh}\,u)$ pontjaiban u értéke az ábrán látható AOP terület kétszerese. Ennek igazolásához kövessük az alábbi lépéseket:



(a) Igazoljuk, hogy az AOP szektor $A(u)$ területe

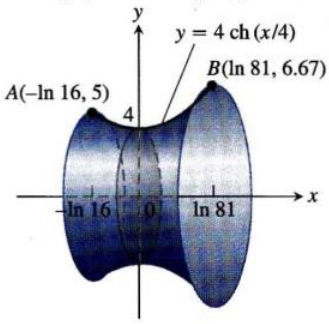
$$A(u) = \frac{1}{2}\operatorname{ch} u \operatorname{sh} u - \int_1^{\operatorname{ch} u} \sqrt{x^2 - 1}\, dx!$$

(b) Deriváljuk az (a)-beli egyenlet mindkét oldalát u szerint, és mutassuk meg, hogy

$$A'(u) = \frac{1}{2}!$$

(c) Oldjuk meg az utóbbi egyenletet $A(u)$-ra! Mennyi $A(0)$? Mennyi az integrálban szereplő C konstans értéke a megoldásunkban? Az így megadott C-vel milyen összefüggést kapunk u és $A(u)$ között?

85. Minimális felszín: Mekkora annak a forgástestnek a palástja, amelyet az $y = 4\operatorname{ch}(x/4)$ görbe $-\ln 16 \le x \le \ln 81$ közötti szakaszának az x-tengely körüli megforgatásával kapunk?



Belátható, hogy az ábrán jelölt A és B pontokra illeszkedő folytonosan differenciálható görbék közül $y = 4\operatorname{ch}(x/4)$ esetén kapjuk a legkisebb palástfelszínt. Ha drótból elkészítjük a két szélső, az A illetve B ponton átmenő kört és ezeket az ábra szerinti helyzetben szappanos vízbe mártjuk, a körök közötti felület meg fog egyezni a görbe megforgatásakor keletkezővel.

T **86.** **(a)** Keressük meg az $y = \operatorname{ch} x$ egyenletű görbe $-\ln 2 \le x \le \ln 2$ közötti szakaszának súlypontját!

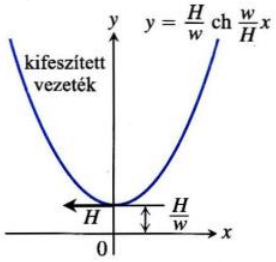
(b) Határozzuk meg a súlypont koordinátáit két tizedes pontossággal! Ábrázoljuk a görbét, és jelöljük be rajta a középpontot!

Kifeszített vezetékek

87. Képzeljünk el egy két tartóoszlop között szabadon lógó kábelt! A vezeték egységnyi hosszának tömege w, a legalacsonyabb ponton a horizontális feszültséget magadó vektor hossza H. Tekintsük azt a vezeték síkjába eső koordinátarendszert, amelyben az x-tengely vízszintes irányú, a gravitáció pedig lefelé hat! Ha a vezeték legalacsonyabb pontja az y-tengely H/w pontja (lásd az ábrát), akkor a görbe egyenlete

$$y = \frac{H}{w}\operatorname{ch}\frac{w}{H}x.$$

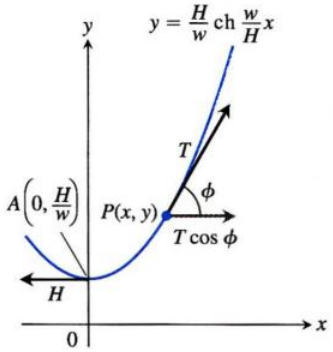
Az ilyen görbét **láncgörbének** nevezzük.



(a) Legyen $P(x,y)$ a láncgörbe egy tetszőleges pontja! Az ábrán a feszültséget a P pontban a T hosszúságú vektor, a legalacsonyabb pontban pedig a H hosszúságú vektor adja meg. Igazoljuk, hogy a görbe meredeksége a P pontban

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{dy}{dx} = \sin\frac{w}{H}x!$$

(b) A feladat (a) része és annak alapján, hogy a P pontbeli vízszintes feszültségnek egyenlőnek kell lennie H-val (a vezeték nem mozog), mutassuk meg, hogy $T = wy$! A $P(x,y)$ pontbeli feszültség nagysága tehát megegyezik az y hosszúságú vezetékszakasz súlyával.



88. ***Az előző feladat folytatása:*** A láncgörbe AP ívének (87. feladat második ábrája) hossza $s = (1/a)\operatorname{sh} ax$, ahol $a = w/H$. Mutassuk meg, hogy a P pont koordinátái kifejezhetők s-sel:

$$x = \frac{1}{a}\operatorname{arsh} as, \quad y = \sqrt{s^2 + \frac{1}{a^2}}!$$

89. Feszültség és belógás: Egy 10,5 méteres, méterenként 3 kg tömegű vezetéket egymástól 10 méterre álló oszlopokon rögzítünk.

(a) Modellezzük a vezetéket az

$$y = \frac{1}{a}\operatorname{ch} ax, \quad -5 \le x \le 5$$

egyenletű görbével! Az előző feladat alapján igazoljuk, hogy az a állandó kielégíti a

$$5{,}25a = \operatorname{sh} 5a \qquad (7.34)$$

egyenletet.

T **(b)** Oldjuk meg grafikusan a (7.34) egyenletet azon pontok koordinátáinak leolvasásával, amelyekben az $y = 5{,}25a$ és $y = \operatorname{sh} 5a$ egyenletű görbék az ay-síkban metszik egymást!

T **(c)** Oldjuk meg numerikusan a (7.34) egyenletet! Vessük össze a megoldást a (b)-beli közelítéssel!

(d) Becsüljük meg a horizontális feszültséget a vezeték legalacsonyabb pontjában!

T **(e)** A feladat (c) részében az a állandóra kapott érték alapján ábrázoljuk az

$$y = \frac{1}{a}\operatorname{ch} ax$$

láncgörbét a $-5 \le x \le 5$ intervallum felett! Becsüljük meg a vezeték belógásának nagyságát!

7. fejezet Áttekintő kérdések

1. Milyen függvényeknek van inverzük? Miből állapíthatjuk meg, hogy az f és a g függvény egymás inverzei? Adjunk példákat olyan függvényekre, amelyek egymásnak (nem) inverzei!

2. Milyen összefüggés van egy függvény, valamint a függvény inverzének értelmezési tartománya, értékkészlete és grafikonja között? Adjunk meg egy példát is!

3. Hogyan fejezhető ki az x változó egy f függvényének inverze az x változó függvényeként?

4. Milyen feltételek biztosíthatják azt, hogy egy f függvény inverze differenciálható legyen? Milyen kapcsolat áll fenn ekkor f és f^{-1} deriváltja között?

5. Mit nevezünk természetes alapú logaritmusfüggvénynek? Mi a függvény értelmezési tartománya, értékkészlete és deriváltja? Milyen aritmetikai tulajdonságai vannak a függvénynek? Vázoljuk és értelmezzük a függvény grafikonját!

6. Mit nevezünk logaritmusos deriválásnak? Adjunk példát a módszer alkalmazására!

7. Milyen integrálok vezetnek logaritmusfüggvényhez? Adjunk példákat! Mi a tg és a ctg integrálja?

8. Hogyan értelmezzük az e^x exponenciális függvényt? Mi a függvény értelmezési tartománya, értékkészlete és deriváltja? Milyen szabályok érvényesek a kitevőkre? Vázoljuk és értelmezzük a függvény grafikonját!

9. Hogyan értelmezzük az a^x és a $\log_a x$ függvényeket? Milyen kikötésnek kell teljesülnie a-ra vonatkozóan? Milyen kapcsolat van a^x és $\log_a x$ grafikonja között? Mi az igazság abban az állításban, amely szerint „valójában" egyetlen exponenciális, illetve logaritmusfüggvény létezik?

10. Adjunk példákat a 10-es alapú logaritmusfüggvény alkalmazására!

11. Mit nevezünk exponenciális változásnak? Hogyan vezethető le az exponenciális változás törvénye egy kezdetiérték-probléma megoldásaként? Adjunk példákat!

12. Hogyan hasonlítható össze a pozitív értékeket felvevő függvények növekedési üteme, amint $x \to \infty$?

13. Mi a jelentősége az e^x és a $\log x$ függvénynek a növekedési ütemek összehasonlításában?

14. Hogyan használjuk a „kis ordó" és a „nagy ordó" jelölést? Adjunk példákat!

15. A szekvenciális vagy a bináris keresés hatékonyabb? Magyarázzuk meg válaszunkat!

16. Hogyan definiáljuk a trigonometrikus függvények inverzeit? Hogyan adhatjuk meg ezeknek a függvényeknek az értékeit – bizonyos esetekben – derékszögű háromszögek alapján?

17. Mely függvények a trigonometrikus függvények inverzeinek deriváltjai? Milyen kapcsolat van az eredeti, illetve a deriváltfüggvények értelmezési tartománya között?

18. Milyen integrálok kiszámításakor jelennek meg természetes módon a trigonometrikus függvények inverzei? Hogyan alkalmazható ezekben az esetekben a helyettesítés és a teljes négyzetté alakítás módszere?

19. Soroljuk fel a hat alapvető hiperbolikus függvényt, adjuk meg értelmezési tartományukat, értékkészletüket, és vázoljuk a grafikonjukat! Milyen azonosságok állnak fenn a függvények között?

20. Adjuk meg a hat alapvető hiperbolikus függvény deriváltját! Soroljuk fel a megfelelő integrálképleteket! Milyen hasonlóságok mutatkoznak a trigonometrikus függvényekkel?

21. Hogyan definiáljuk a hiperbolikus függvények inverzeit? Adjuk meg a függvények értelmezési tartományát, értékkészletét és grafikonját! Hogyan számíthatjuk ki az $\operatorname{arsech} x$, $\operatorname{arcsch} x$ és $\operatorname{arcth} x$ értékeket, ha számológépünk csak $\operatorname{arch} x$, $\operatorname{arsh} x$ és $\operatorname{arth} x$ értékét tudja megadni?

22. Milyen integrálok kiszámításakor jelennek meg természetes módon a hiperbolikus függvények inverzei?

7. fejezet Gyakorló feladatok

Deriváltak

Adjuk meg az y megfelelő változó szerinti deriváltját (1–24. feladatok)!

1. $y = 10e^{-x/5}$

2. $y = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}x}$

3. $y = \frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x}$

4. $y = x^2e^{-2/x}$

5. $y = \ln(\sin^2\theta)$

6. $y = \ln(\sec^2\theta)$

7. $y = \log_2(x^2/2)$

8. $y = \log_5(3x-7)$

9. $y = 8^{-t}$

10. $y = 9^{2t}$

11. $y = 5x^{3,6}$

12. $y = \sqrt{2}x^{-\sqrt{2}}$

13. $y = (x+2)^{x+2}$

14. $y = 2(\ln x)^{x/2}$

15. $y = \arcsin\sqrt{1-u^2}, \quad 0 < u < 1$

16. $y = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right), \quad v > 1$

17. $y = \ln\arccos x$

18. $y = z\arccos z - \sqrt{1-z^2}$

19. $y = t\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln t$

20. $y = (1+t^2)\operatorname{arcctg} 32t$

21. $y = z\operatorname{arcsec} z - \sqrt{z^2-1}, \quad z > 1$

22. $y = 2\sqrt{x-1}\operatorname{arcsec}\sqrt{x}$

23. $y = \operatorname{arccsc}(\sec\theta), \quad 0 < \theta < \pi/2$

24. $y = (1+x^2)e^{\operatorname{arctg} x}$

Logaritmusos deriválás

A logaritmusos deriválás módszerét alkalmazva adjuk meg y (megfelelő változó szerinti) deriváltját (25–30. feladatok)!

25. $y = \frac{2(x^2+1)}{\sqrt{\cos 2x}}$

26. $y = \sqrt[10]{\frac{3x+4}{2x-4}}$

27. $y = \left(\dfrac{(t+1)(t-1)}{(t-2)(t+3)}\right)^5, \quad t > 2$

28. $y = \dfrac{2u2^u}{\sqrt{u^2+1}}$ **29.** $y = (\sin\theta)^{\sqrt{\theta}}$

30. $y = (\ln x)^{1/(\ln x)}$

Integrálok

Határozzuk meg az integrálokat (31–78. feladatok)!

31. $\int e^x \sin(e^x)dx$ **32.** $\int e^t \cos(3e^t - 2)dt$

33. $\int e^x \sec^2(e^x - 7)dx$

34. $\int e^y \csc(e^y+1)\operatorname{ctg}(e^y+1)dy$

35. $\int \sec^2(x)e^{\operatorname{tg}x}dx$ **36.** $\int \csc^2(x)e^{\operatorname{ctg}x}dx$

37. $\int_{-1}^{1} \dfrac{dx}{3x-4}$ **38.** $\int_{1}^{e} \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$

39. $\int_{0}^{\pi} \operatorname{tg}\dfrac{x}{3}dx$ **40.** $\int_{1/6}^{1/4} 2\operatorname{ctg}(\pi x)dx$

41. $\int_{0}^{4} \dfrac{2t}{t^2-25}dt$ **42.** $\int_{-\pi/2}^{\pi/6} \dfrac{\cos t}{1-\sin t}dt$

43. $\int \dfrac{\operatorname{tg}(\ln v)}{v}dv$ **44.** $\int \dfrac{dv}{v\ln v}$

45. $\int \dfrac{(\ln x)^{-3}}{x}dx$ **46.** $\int \dfrac{\ln(x-5)}{x-5}dx$

47. $\int \dfrac{1}{r}\csc^2(1+\ln r)dr$ **48.** $\int \dfrac{\cos(1-\ln v)}{v}dv$

49. $\int x3^{x^2}dx$ **50.** $\int 2^{\operatorname{tg}x}\sec^2 x dx$

51. $\int_{1}^{7} \dfrac{3}{x}dx$ **52.** $\int_{1}^{32} \dfrac{1}{5x}dx$

53. $\int_{1}^{4} \left(\dfrac{x}{8} + \dfrac{1}{2x}\right)dx$ **54.** $\int_{1}^{8} \left(\dfrac{2}{3x} - \dfrac{8}{x^2}\right)dx$

55. $\int_{-2}^{-1} e^{-(x+1)}dx$ **56.** $\int_{-\ln 2}^{0} e^{2w}dw$

57. $\int e^r(3e^r+1)^{-3/2}dr$ **58.** $\int_{0}^{\ln 9} e^\theta(e^\theta-1)^{1/2}d\theta$

59. $\int_{1}^{e} \dfrac{1}{x}(1+7\ln x)^{-1/3}dx$ **60.** $\int_{e}^{e^2} \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$

61. $\int_{1}^{3} \dfrac{(\ln(v+1))^2}{v+1}dv$ **62.** $\int_{2}^{4} (1+\ln t)t\ln t\,dt$

63. $\int_{1}^{8} \dfrac{\log_4\theta}{\theta}d\theta$ **64.** $\int_{1}^{e} \dfrac{8\ln 3\log_3\theta}{\theta}d\theta$

65. $\int_{-3/4}^{3/4} \dfrac{6dx}{\sqrt{9-4x^2}}$ **66.** $\int_{-1/5}^{1/5} \dfrac{6dx}{\sqrt{4-25x^2}}$

67. $\int_{-2}^{2} \dfrac{3dt}{4+3t^2}$ **68.** $\int_{\sqrt{3}}^{3} \dfrac{dt}{3+t^2}$

69. $\int \dfrac{dy}{y\sqrt{4y^2-1}}$ **70.** $\int \dfrac{24dy}{y\sqrt{y^2-16}}$

71. $\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \dfrac{dy}{|y|\sqrt{9y^2-1}}$ **72.** $\int_{-2/\sqrt{5}}^{-\sqrt{6}/\sqrt{5}} \dfrac{dy}{|y|\sqrt{5y^2-3}}$

73. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{-2x-x^2}}$ **74.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-1}}$

75. $\int_{-2}^{-1} \dfrac{2dv}{v^2+4v+5}$ **76.** $\int_{-1}^{1} \dfrac{3dv}{4v^2+4v+4}$

77. $\int \dfrac{dt}{(t+1)\sqrt{t^2+2t-8}}$ **78.** $\int \dfrac{dt}{(3t+1)\sqrt{9t^2+6t}}$

Exponenciális és logaritmusos egyenletek

Oldjuk meg az egyenleteket y-ra (79–84. feladatok)!

79. $3^y = 2^{y+1}$ **80.** $4^{-y} = 3^{y+2}$

81. $9e^{2y} = x^2$ **82.** $3^y = 3\ln x$

83. $\ln(y-1) = x + \ln y$ **84.** $\ln(10\ln y) = \ln 5x$

Határértékek

Határozzuk meg a határértékeket (85–96. feladatok)!

85. $\lim_{x\to 0} \dfrac{10^x - 1}{x}$ **86.** $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{3\theta - 1}{\theta}$

87. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^{\sin x} - 1}{e^x - 1}$ **88.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^{-\sin x} - 1}{e^x - 1}$

89. $\lim_{x\to 0} \dfrac{5 - 5\cos x}{e^x - x - 1}$ **90.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{4 - 4e^x}{xe^x}$

91. $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{t - \ln(1+2t)}{t^2}$ **92.** $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sin^2(\pi x)}{e^{x-4} + 3 - x}$

93. $\lim_{t\to 0^+} \left(\dfrac{e^t}{t} - \dfrac{1}{t}\right)$ **94.** $\lim_{y\to 0^+} e^{-1/y}\ln y$

95. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^x$ **96.** $\lim_{x\to 0^+} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^x$

Függvények növekedési ütemének összehasonlítása

97. Gyorsabban, lassabban, vagy ugyanabban az ütemben növekszik f, mint g, amint $x \to \infty$?

(a) $f(x) = \log_2 x; \quad g(x) = \log_3 x$

(b) $f(x) = x; \quad g(x) = x + \dfrac{1}{x}$

(c) $f(x) = x/100; \quad g(x) = xe^{-x}$

(d) $f(x) = x; \quad g(x) = \operatorname{arctg} x$

(e) $f(x) = \operatorname{arccsc} x; \quad g(x) = 1/x$

(f) $f(x) = \operatorname{sh} x; \quad g(x) = e^x$

98. Gyorsabban, lassabban, vagy ugyanabban az ütemben növekszik f, mint g, amint $x \to \infty$?

(a) $f(x) = 3^{-x}$; $g(x) = 2^{-x}$

(b) $f(x) = \ln 2x$; $g(x) = \ln x^2$

(c) $f(x) = 10x^3 + 2x^2$; $g(x) = e^x$

(d) $f(x) = \operatorname{arctg}(1/x)$; $g(x) = 1/x$

(e) $f(x) = \arcsin(1/x)$; $g(x) = 1/x^2$

(f) $f(x) = \operatorname{sech} x$; $g(x) = e^{-x}$

99. Igaz, vagy hamis? Válaszunkat indokoljuk!

(a) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^4} = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ **(b)** $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^4} = O\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$

(c) $x = o(x + \ln x)$ **(d)** $\ln(\ln x) = o(\ln x)$

(e) $\operatorname{arctg} x = O(1)$ **(f)** $\operatorname{ch} x = O(e^x)$

100. Igaz, vagy hamis? Válaszunkat indokoljuk!

(a) $\dfrac{1}{x^4} = O\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}\right)$ **(b)** $\dfrac{1}{x^4} = o\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}\right)$

(c) $\ln x = o(x + 1)$ **(d)** $\ln 2x = O(\ln x)$

(e) $\operatorname{arcsec} x = O(1)$ **(f)** $\operatorname{sh} x = O(e^x)$

További példák és feladatok

101. Az $f(x) = e^x + x$ függvény differenciálható és injektív, így $f^{-1}(x)$ inverze is differenciálható. Adjuk meg a df^{-1}/dx derivált értékét az $f(\ln 2)$ pontban!

102. Határozzuk meg az $f(x) = 1 + (1/x)$ $(x \neq 0)$ függvény inverzét! Ezután igazoljuk, hogy $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$, és hogy

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{f(x)} = \frac{1}{f'(x)}!$$

Határozzuk meg a függvények maximumát, illetve minimumát a megadott intervallumon (103. és 104. feladat)!

103. $y = x\ln 2x - x$, $\left[\dfrac{1}{2e}, \dfrac{e}{2}\right]$

104. $y = 10x(2 - \ln x)$, $(0, e^2)$

105. Területszámítás: Számítsuk ki az $y = 2(\ln x)/x$ egyenletű görbe és az x-tengely között az $x = 1$-től az $x = e$-ig közbezárt terület nagyságát!

106. Területszámítás:

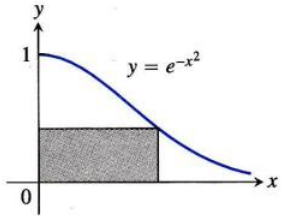
(a) Igazoljuk, hogy az $y = 1/x$ egyenletű görbe alatti terület $x = 10$ és $x = 20$ közötti része megegyezik az $x = 1$ és $x = 2$ közötti területtel!

(b) Igazoljuk, hogy az $y = 1/x$ egyenletű görbe alatti terület $x = ka$ és $x = kb$ közötti része megegyezik az $x = a$ és $x = b$ közötti területtel (ahol $0 < a < b$ és $k > 0$)!

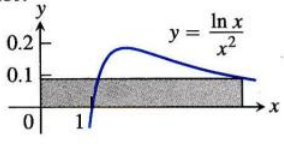
107. Egy részecske az $y = \ln x$ egyenletű görbe mentén mozog jobbra felfelé. A részecske x-koordinátája $dx/dt = \sqrt{x}$ m/s sebességgel változik. Mekkora az y-koordináta változási sebessége az (e^2, e) pontban?

108. Egy csúszdán, amelynek ívét az $y = 9e^{-x/3}$ egyenletű görbe írja le, egy kislány csúszik lefelé. A gyerek y-koordinátájának változási sebessége $dy/dt = (-1/4)\sqrt{9 - y}$ km/h. Mekkora az x-koordináta változási sebessége a csúszda végén, az $x = 3$ m pontban?

109. Az ábrán látható téglalap egyik oldala az x-, a másik az y-tengelyre, a téglalap origóval szemközti csúcsa pedig az $y = e^{-x^2}$ egyenletű görbére illeszkedik. Milyen oldalhosszúságok mellett lesz a téglalap területe a legnagyobb? Mekkora ez a maximális terület?



110. Az ábrán látható téglalap egyik oldala az x-, a másik az y-tengelyre, a téglalap origóval szemközti csúcsa pedig az $y = (\ln x)/x^2$ egyenletű görbére illeszkedik. Milyen oldalhosszúságok mellett lesz a téglalap területe a legnagyobb? Mekkora ez a maximális terület?



111. Az $f(x) = \ln 5x$ és a $g(x) = \ln 3x$ függvény csupán egy konstansban különböznek egymástól. Adjuk meg a konstans értékét! Indokoljuk válaszunkat!

112. **(a)** Következik-e abból, hogy $(\ln x)/x = (\ln 2)/2$ az, hogy $x = 2$?

(b) Következik-e abból, hogy $(\ln x)/x = -2\ln 2$ az, hogy $x = 1/2$?

Válaszunkat indokoljuk!

113. A $(\log_4 x)/(\log_2 x)$ hányados értéke állandó. Adjuk meg az állandó értékét! Válaszunkat indokoljuk!

T **114.** $\log_x(2)$ **vs.** $\log_2(x)$**:** Hogyan viszonyul egymáshoz az $f(x) = \log_x(2)$ és a $g(x) = \log_2 x$ függvény? A következő két kérdésre adott válasz alapján kiderül.

(a) A $\log_a b = (\ln b)/(\ln a)$ összefüggés alapján fejezzük ki $f(x)$-t és $g(x)$-et is a természetes alapú logaritmus segítségével!

(b) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben f és g grafikonját! Állapítsuk meg, van-e összefüggés f grafikonjának alakja, valamint g előjele és értékei között!

T **115.** Ábrázoljuk a megadott függvényeket, becsüljük meg a szélsőértékeket, az inflexiós pontok koordinátáit, és azokat az intervallumokat, amelyeken a szóban forgó függvény konvex, illetve konkáv. Becslésünket ellenőrizzük a deriváltak kiszámításával!

(a) $y = (\ln x)/\sqrt{x}$

(b) $y = e^{-x^2}$

(c) $y = (1 + x)e^{-x}$

T **116.** Ábrázoljuk az $f(x) = x\ln x$ függvény grafikonját! Van a függvénynek abszolút minimuma? Válaszunkat indokoljuk!

117. Milyen régi az a szénminta, amelyből az eredeti C_{14}-tartalomnak már 90%-a elbomlott?

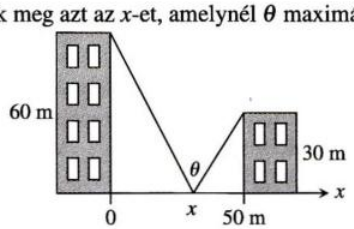
118. Kihűlő sütemény: Egy tepsi almáslepény hőmérséklete 105 C° volt, amikor a sütőből kivettük. A tepsit egy 4,5 C° hőmérsékletű hűtőszekrénybe tettük, ahol negyedóra elteltével a sütemény hőmérséklete 82 C°-ra csökkent. Mennyi idő alatt hűl le a sütemény 21 C°-ra?

119. Napelem: Napelemet kell elhelyeznünk az ábrán látható két épületet összekötő kelet-nyugati irányú szakasz mentén. Milyen messzire legyen a napelem a magasabb épülettől, hogy a lehető leghosszabb ideig süssön rá a nap azokon a napokon, amikor pontosan a két épület fölött halad?

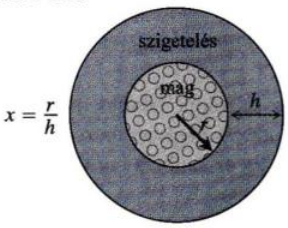
Induljunk ki abból, hogy

$$\theta = \pi - \operatorname{arcctg}\frac{x}{60} - \operatorname{arcctg}\frac{50-x}{30},$$

majd keressük meg azt az x-et, amelynél θ maximális!



120. Egy kör keresztmetszetű víz alatti kábelben a rézvezetéket szigetelő réteg veszi körül. Az átvitt jel sebességét a $v = x^2 \ln(1/x)$ képlet adja meg, amelyben x a rézvezeték sugarának és a szigetelő réteg vastagságának hányadosa. A szigetelés milyen h vastagsága mellett lesz maximális az átviteli sebesség, ha a vezeték sugara 1 cm?



7. fejezet Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

Határértékek

Határozzuk meg a határértékeket (1–6. feladatok)!

1. $\lim\limits_{b\to 1^-} \int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x \operatorname{arctg} t\,dt$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos\sqrt{x})^{1/x}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} (x+e^x)^{2/x}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(e^{1/n} + e^{2/n} + \ldots + e^{(n-1)/n} + e^{n/n}\right)$

7. Legyen $A(t)$ az első síknegyed azon tartományának területe, amelyet az $y = e^{-x}$ egyenletű görbe, a koordinátatengelyek, valamint az $x = t$ egyenletű függőleges egyenes határol ($t > 0$)! Legyen $V(t)$ annak a forgástestnek a térfogata, amelyet a tartomány x-tengely körüli megforgatásával kaptunk! Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

(a) $\lim\limits_{t\to\infty} A(t)$ **(b)** $\lim\limits_{t\to\infty} V(t)/A(t)$

(c) $\lim\limits_{t\to 0^+} V(t)/A(t)$

8. A logaritmus alapjának megváltozása:

(a) Határozzuk meg $\log_a 2$ határértékét, amint $a \to 0^+$, 1^-, 1^+, ∞!

T (b) Ábrázoljuk az $y = \log_a 2$ függvényt a $0 < a \le 4$ intervallumon!

További példák és feladatok

9. Határozzuk meg az $y = 2(\log_2 x)/x$, illetve az $y = 2(\log_4 x)/x$, egyenletű görbe és az x-tengely közötti terület nagyságát az $x = 1$ és $x = e$ között! Hogyan aránylik a nagyobbik terület a kisebbikhez?

T 10. Ábrázoljuk az $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1/x)$ függvény grafikonját a $-5 \le x \le 5$ intervallumon! Az analízis eszköztárát mozgósítva támasszuk alá az ábra helyességét! Hogyan viselkedhet a függvény a $[-5,5]$ intervallumon kívül? Indokoljuk válaszunkat!

T 11. Milyen $x > 0$ esetén lesz $x^{(x^x)} = (x^x)^x$? Indokoljuk meg válaszunkat!

T 12. Ábrázoljuk az $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$ függvény grafikonját a $[0, 3\pi]$ intervallumon! Lehetséges ez? Magyarázzuk meg, mit látunk!

13. Adjuk meg $f'(2)$ értékét, ha $f(x) = e^{g(x)}$ és $g(x) = \int\limits_2^x \frac{t}{1+t^4}dt$!

14. (a) Határozzuk meg a df/dx deriváltat, ha

$$f(x) = \int_1^{e^x} \frac{2\ln t}{t}dt!$$

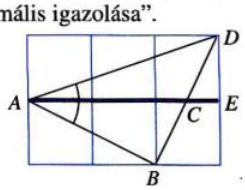
(b) Adjuk meg $f(0)$ értékét!

(c) Mire következtethetünk ebből az f függvény grafikonjára vonatkozóan? Válaszunkat indokoljuk!

15. Az ábra az

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

összefüggés „informális igazolása”.

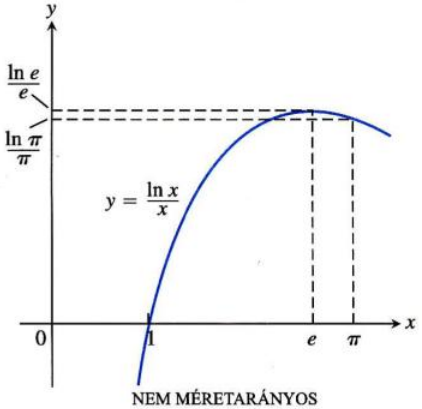


Rekonstruáljuk az érvelést! [Edward M. Harris: Behold! Sums of Arctan. *College Mathematics Journal,* Vol. 18, No. 2 (1987. március), p. 141.]

16. $\pi^e < e^\pi$**:**

(a) Miért állíthatjuk, hogy az alábbi ábra a $\pi^e < e^\pi$ egyenlőtlenség bizonyítása? [Fouad Nakhil: Proof Without Words, *Mathematics Magazine,* Vol 60, No. 3 (1987. június), p. 165.]

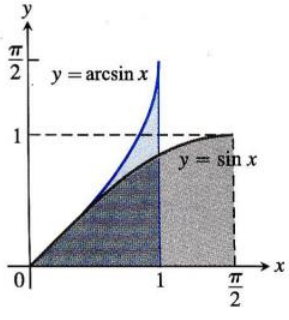
(b) Az ábra rajzolója feltette, hogy az $f(x) = (\ln x)/x$ függvénynek az $x = e$ helyen abszolút maximuma van. Honnan tudjuk, hogy ez valóban így van?



NEM MÉRETARÁNYOS

17. Az ábra segítségével mutassuk meg, hogy

$$\int_0^{\pi/2} \sin dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \arcsin x dx!$$

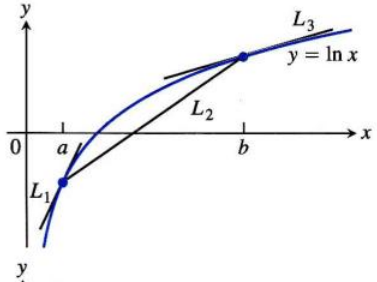


18. A Napier-féle egyenlőtlenség: Alább a

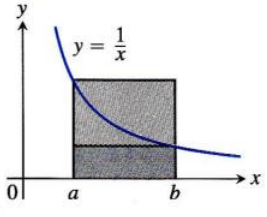
$$b > a > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a}$$

egyenlőtlenség két „képes" bizonyítása látható.

(a)



(b)



[Roger B. Nelson: *College Mathematics Journal,* Vol. 24, No. 2 (1993. március), p. 165.]

19. Páros-páratlan felbontás:

(a) Tegyük fel, hogy g páros, h pedig páratlan függvény. Igazoljuk, hogy ha minden x esetén $g(x)+h(x) = 0$, akkor g és h egyaránt az azonosan nulla függvény!

(b) A feladat (a) része alapján igazoljuk, hogy ha egy f_E páros és f_O páratlan függvénnyel $f(x) = f_E(x) + f_O(x)$ (minden x-re), akkor

$$f_E(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{és} \quad f_O(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}!$$

(c) Mi a jelentősége a feladat (b) részében kapott eredménynek?

20. Legyen g olyan függvény, amely egy, az origót tartalmazó nyílt intervallumon folytonosan differenciálható! Tegyük fel, hogy g-re teljesülnek az alábbiak:

(i) $g(x+y) = \dfrac{g(x)+g(y)}{1-g(x)g(y)}$ minden olyan x, y valós szám esetén, amelyekkel $x+y$ is eleme g értelmezési tartományának;

(ii) $\lim\limits_{h\to 0} g(h) = 0$; és

(iii) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(h)}{h} = 1.$

(a) Igazoljuk, hogy $g(0) = 0$!

(b) Igazoljuk, hogy $g'(x) = 1 + [g(x)]^2$!

(c) Határozzuk meg a $g(x)$ függvényt a (b)-beli differenciálegyenlet megoldásával!

Alkalmazások

21. Tömegközéppont: Határozzuk meg annak az első és negyedik síknegyedbe eső vékony, állandó tömegsűrűségű lemeznek a tömegközéppontját, amelyet az $y = 1/(1+x^2)$ és $y = -1/(1+x^2)$ egyenletű görbék, valamint az $x = 0$ és $x = 1$ egyenletű egyenesek határolnak!

22. Forgástest: Forgassuk meg az x-tengely körül az $y = 1/(2\sqrt{x})$ egyenletű görbének az $x = 1/4$ és $x = 4$ közötti szakaszát!

(a) Határozzuk meg az így keletkező forgástest térfogatát!

(b) Határozzuk meg a test tömegközéppontját!

23. A „70-es szabály": Az $\ln 2 \approx 0{,}7$ közelítés alapján (0,69314... helyett) kapjuk a következő ökölszabályt: „Ha azt akarjuk megbecsülni, mennyi idő alatt kétszereződik meg az r százalékos folytonos jóváírású kamattal lekötött pénzünk, elegendő, ha elosztjuk 70-et r-rel." Az 5%-os kamattal lekötött pénzünk például $70/5 = 14$ év alatt nő duplájára. Ha 10 év alatt akarjuk megkétszerezni a pénzünket, ahhoz $70/10 = 7$%-os kamat szükséges. Vezessük le a „70-es szabályt"! (A „72-es szabály" 70 helyett a több egész osztót tartalmazó 72-t használja.)

24. Szabadesés a 14. században: A tizennegyedik század közepén Szászországi Albert (1316–1390) kidolgozta a szabadesés egy modelljét. Eszerint a zuhanó test sebessége arányos a már megtett út hosszával. Ésszerűnek tűnt a feltevés, miszerint 6 méteres zuhanás után egy test sebessége kétszer akkora, mint

3 méter zuhanás után. A korban rendelkezésre álló műszerek segítségével nem lehetett megcáfolni a modellt, ma viszont már megállapíthatjuk, mekkorát tévedett Albert, ha megoldjuk a modellben implicite adott kezdetiérték-problémát. Vessük össze a megoldást rajzon az $s = 4{,}9t^2$ egyenlettel! Az Albert modellje szerinti mozgás a valóságosnál lassabban indul, később viszont sokkal gyorsabbá válik.

25. Az elágazó vezetékek és erek által bezárt legjobb szög: Amikor egy kisebb vezeték leágazik egy nagyobbról, az elágazás szögének meghatározásakor gyakran bizonyos energiatakarékossági megfontolásokat is figyelembe kell vennünk. Érvényesíthetjük például azt a szempontot, hogy az ábra AOB szakaszán a lehető legkisebb legyen a súrlódás miatt fellépő veszteség. Az ábrán B-vel jelölt pont a kisebb, A a nagyobb keresztmetszetű vezeték egy-egy pontja, a két vezeték pedig az O pontban ágazik el egymástól. Poiseuille törvénye szerint a turbulencia nélküli áramlások esetében a súrlódás miatti energiaveszteség egyenesen arányos a vezetékszakasz hosszával és fordítottan arányos a vezeték keresztmetszete sugarának negyedik hatványával. Az AO szakaszon a veszteség ezek szerint $(kd_1)/R^4$, az OB szakaszon pedig kd_2/r^4, ahol k állandó, d_1 az AO, d_2 az OB szakasz hossza; R a vastagabb, r pedig a vékonyabb vezeték sugara. A θ szöget úgy választjuk meg, hogy a két veszteség

$$L = k\frac{d_1}{R^4} + k\frac{d_2}{r^4}$$

összege minimális legyen. Modellünkben feltesszük, hogy $AC = a$ és $BC = b$ állandó. Eszerint tehát

$$d_1 + d_2\cos\theta = a \quad \text{és} \quad d_2\sin\theta = b,$$

amiből

$$d_2 = b\csc\theta \quad \text{és} \quad d_1 = a - d_2\cos\theta = a - b\operatorname{ctg}\theta.$$

Ezzel az L veszteséget θ függvényében is felírhatjuk:

$$L = k\left(\frac{a - b\operatorname{ctg}\theta}{R^4} + \frac{b\csc\theta}{r^4}\right).$$

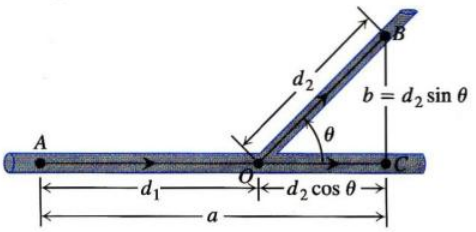
(a) Igazoljuk, hogy $dL/d\theta$ derivált értéke

$$\theta_c = \arccos\frac{r^4}{R^4}$$

esetén 0!

(b) Becsüljük meg (fok pontossággal), mekkora az optimális szög, ha a megfelelő sugarak aránya $r/R = 5/6$!

Az iménti modell az állatok artériái által bezárt szögek nagyságára is magyarázatot ad. [E. Batschelet: *Introduction to Mathematics for Life Scientists,* Second Edition, New York, Springer-Verlag, 1976.]



T 26. Csoportos vérvizsgálat: A második világháború idején nagy számú frissen besorozott ifjú katona vérét kellett megvizsgálni. Ha N ember esetében kell elvégezni a vizsgálatot, két módszert alkalmazhatunk: (1) Vizsgáljuk meg külön-külön valamennyi mintát! (2) Vegyünk mintát x embertől, ebből készítsünk egyetlen nagy mintát, és azt vizsgáljuk meg! Ha a teszt negatív, akkor az x minta mindegyike az. Ha a teszt pozitív, akkor végezzük el az x vizsgálatot egyenként is. Az utóbbi esetben a (2) módszer $x + 1$ vizsgálatot jelent. A valószínűségszámítás eszköztárát is mozgósítva megállapítható, hogy (2) módszer alkalmazásával átlagosan

$$y = N\left(1 - q^x + \frac{1}{x}\right)$$

vizsgálatot kell elvégezni. Határozzuk meg, hogy $q = 0{,}99$ és $N = 1000$ esetén x milyen egész értéke mellett lesz y értéke minimális. Keressük meg az y-t maximáló x-et is (az utóbbi értéknek nincs különösebb gyakorlati jelentősége)! A második világháborúban követett csoportos vizsgálati módszerrel az (1) módszerhez képest 80%-os megtakarítást értek el (igaz, hogy nem a fenti q-val).

8. fejezet Integrálási technikák

ÁTTEKINTÉS: A Newton–Leibniz-tétel megmutatja az összefüggést egy függvény határozott integrálja és primitív függvénye között. Az

$$\int f(x)\,dx$$

határozatlan integrál kiszámolásakor olyan F függvényt keresünk, amelyre $F'(x) = f(x)$. Ekkor tetszőleges C konstanssal is igaz, hogy

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

A 8. fejezetben olyan módszereket ismertetünk, amelyekkel bonyolultabb függvények primitív függvényeit is meghatározhatjuk. Megmutatjuk, hogy hogyan lehet a bonyolultabb integrálokat már ismert integrálokká alakítani, visszavezetni olyan integrálokká, amelyek egy integráltáblázatban szerepelnek, illetve megnézzük, hogy hogyan használható integrálásra a számítógép. Végül a határozott integrál fogalmát kiterjesztjük olyan integrálokra is, ahol az integrandus nem korlátos, vagy maga az alapintervallum végtelen kiterjedésű. Az ilyen határozott integráloknak a neve *improprius integrál*.

8.1. Egyszerű integrációs formulák

Sokat segít a primitív függvény keresésben, ha készítünk egy integráltáblázatot a deriválási ismereteinkből kiindulva. Ha kapunk egy integrálási feladatot, megnézzük, hogy megoldható-e a táblázat valamelyik képlete segítségével. Mielőtt az egyik képlettel célhoz érnénk, gyakran algebrai átalakításokat vagy helyettesítéseket kell végeznünk.

Emlékeztetőül a helyettesítési szabály az 5. fejezetből:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du,$$

ahol $u = g(x)$ olyan differenciálható függvény, amelynek értékkészlete az I intervallum, és ezen az intervallumon f folytonos. A helyettesítéses integrálás eredményessége általában azon múlik, hogy rájövünk-e, hogy az integrálandó függvény mely részét érdemes u-nak választani ahhoz, hogy a jobb oldalon kapott új integrál könnyen meghatározható legyen. Ahhoz, hogy sikeresen integrálhassunk, jól kell ismernünk a deriválási képleteket.

A 8.1. táblázat összefoglalja az előzőekben megismert alapintegrálokat. A fejezet során megnézzük, hogy milyen algebrai átalakításokkal és helyettesítésekkel vezethetünk vissza bonyolultabb integrálokat a táblázatban szereplő integrálokra. A kötet végén közlünk egy részletesebb integráltáblázatot is, amelynek a használatáról a 8.6. szakaszban lesz szó.

1. $\int dx = x + C$	**12.** $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C = \ln\lvert\sec x\rvert + C$
2. $\int k\,dx = kx + C$ (k tetszőleges valós szám)	**13.** $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C = -\ln\lvert\csc x\rvert + C$
3. $\int (dx + dy) = \int dx + \int dy$	**14.** $\int e^x\,dx = e^x + C$
4. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$	**15.** $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$
5. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	**16.** $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	**17.** $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$	**18.** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$	**19.** $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$	**20.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left\lvert\frac{x}{a}\right\rvert + C$
10. $\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C$	**21.** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{arsh}\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$
11. $\int \csc x \operatorname{ctg} x\,dx = -\csc x + C$	**22.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{arch}\frac{x}{a} + C \quad (x > a > 0)$

8.1. TÁBLÁZAT: Az alapintegrálok.

1. PÉLDA: **Egyszerűsítés helyettesítéssel**

Számítsuk ki az

$$\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

$$\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \qquad u = x^2 - 9x + 1,\ du = (2x-9)\,dx$$

$$= \int u^{-1/2}\,du =$$

$$= \frac{u^{(-1/2)+1}}{(-1/2)+1} + C = \qquad \text{a 8.1. táblázat 4. képlete szerint, } n = -1/2 \text{ mellett}$$

$$= 2u^{1/2} + C =$$

$$= 2\sqrt{x^2 - 9x + 1} + C. \qquad \square$$

2. PÉLDA: **Kiegészítés teljes négyzetté**

Számítsuk ki az

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8x - x^2}}$$

határozatlan integrált!

Megoldás: A gyökjel alatti kifejezést kiegészítjük teljes négyzetté:

$$8x - x^2 = -(x^2 - 8x) = -(x^2 - 8x + 16 - 16) =$$

$$= -(x^2 - 8x + 16) + 16 = 16 - (x-4)^2.$$

Ezt felhasználva:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16-(x-4)^2}} =$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \qquad a=4,\ u=(x-4),\ du=dx$$

$$= \arcsin\frac{u}{a} + C = \qquad \text{8.1. táblázat, 18. képlet}$$

$$= \arcsin\frac{x-4}{4} + C. \qquad \square$$

3. PÉLDA: **A trigonometrikus azonosságok használata**

Számítsuk ki az

$$\int (\sec x + \operatorname{tg} x)^2\, dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás: Végezzük el a négyzetre emelést!

$$(\sec x + \operatorname{tg} x)^2 = \sec^2 x + 2\sec x \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x.$$

Az első két tag a jobboldalon ismerős, ezek primitív függvényét azonnal meg tudjuk mondani. Mit kezdhetünk $\operatorname{tg}^2 x$-szel? Használjuk a $\operatorname{tg}^2 x$ és a $\sec^2 x$ közötti összefüggést:

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x, \quad \text{azaz} \quad \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1.$$

Kicserélve $\operatorname{tg}^2 x$-et $(\sec^2 x - 1)$-re:

$$\int (\sec x + \operatorname{tg} x)^2\, dx = \int (\sec^2 x + 2\sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x - 1)\, dx =$$

$$= 2\int \sec^2 x\, dx + 2\int \sec x \operatorname{tg} x\, dx - \int 1\, dx =$$

$$= 2\operatorname{tg} x + 2\sec x - x + C. \qquad \square$$

4. PÉLDA: **A gyökjel eltüntetése**

Számoljuk ki $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 4x}\, dx$ értékét!

Megoldás: Felhasználjuk, hogy

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}, \qquad \text{vagy másképp} \qquad 1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta.$$

A $\theta = 2x$ helyettesítéssel az utóbbiból

$$1+\cos 4x = 2\cos^2 2x$$

adódik. Az eredeti integrálba ezt visszaírva:

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 4x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sqrt{\cos^2 2x}\, dx =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} |\cos 2x|\, dx = \qquad \sqrt{u^2} = |u|$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\, dx = \qquad \text{mivel a } [0,\pi/4] \text{ intervallumon } \cos 2x \geq 0$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/4} = \qquad \text{8.1. táblázat, 7. képlet, } u=2x \text{ és } du=2\,dx \text{ helyettesítéssel}$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad \square$$

5. PÉLDA: **Maradékos polinomosztás**

Számítsuk ki az

$$\int \frac{3x^2-7x}{3x+2}\,dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás: Az integrandus két polinom hányadosa, és a számláló nagyobb vagy egyenlő fokú, mint a nevező. Ilyen esetben hajtsuk végre a maradékos osztást:

$$\begin{array}{r} 3x^2-7x \;:\; 3x+2 = x-3 \\ \underline{-\,(3x^2+2x)} \\ -9x \\ \underline{-\,(-9x-6)} \\ 6 \end{array}$$

$$\frac{3x^2-7x}{3x+2} = x-3+\frac{6}{3x+2}!$$

A keresett határozatlan integrál:

$$\int \frac{3x^2-7x}{3x+2}\,dx = \int \left(x-3+\frac{6}{3x+2}\right)dx = \frac{x^2}{2}-3x+2\ln|3x+2|+C. \qquad \square$$

A maradékos osztás elvégzése az ehhez hasonló esetekben nem mindig vezet azonnal könnyen integrálható függvényekhez. Hogy ilyen esetekben mit lehet tenni, azt a 8.5. részben fogjuk látni.

6. PÉLDA: **Tört szétbontása**

Számítsuk ki az

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás: Először szedjük szét az integrált két integrál összegére!

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 3\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Az első primitív függvény meghatározásánál a következő helyettesítést alkalmazhatjuk:

$$u = 1-x^2, \qquad du = -2x\,dx \qquad \text{és} \qquad x\,dx = -\frac{1}{2}\,du.$$

$$3\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 3\int \frac{(-1/2)\,du}{\sqrt{u}} = -\frac{3}{2}\int u^{-1/2}\,du =$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2} + C_1 = -3\sqrt{1-x^2} + C_1.$$

A második integrál ismert:

$$2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\arcsin x + C_2.$$

A két eredményt összeadva és bevezetve a $C = C_1 + C_2$ jelölést, megkapjuk a megoldást:

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -3\sqrt{1-x^2} + 2\arcsin x + C. \qquad \square$$

Az utolsó példában egy fontos primitív függvényt határozunk meg. Az integrandus átalakításánál egy 1 értékű kifejezéssel fogunk szorozni, és így könnyebben számolható integrálhoz jutunk.

7. PÉLDA: **Az $f(x) = \sec x$ primitív függvénye – szorzás 1-gyel**

Számítsuk ki az

$$\int \sec x \, dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

$$\int \sec x \, dx = \int (\sec x)(1) \, dx = \int \sec \cdot \frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} \, dx =$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} \, dx =$$

$$= \int \frac{du}{u} = \qquad u = \operatorname{tg} x + \sec x, \quad du = (\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x)\, dx$$

$$= \ln|u| + C = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C. \qquad \square$$

Ha koszekánst és kotangenst írunk a 7. példában szereplő szekáns és tangens függvények helyébe, megkapjuk a koszekáns függvény primitív függvényét. (Lásd a 95. feladatot!)

1. $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$

2. $\int \csc x \, dx = -\ln|\csc x + \operatorname{ctg} x| + C$

8.2. TÁBLÁZAT: A szekáns és koszekáns függvények primitív függvényei.

Integrálok egyszerűbb alakra hozása

Művelet	**Példa**
Helyettesítés	$\dfrac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx = \dfrac{du}{\sqrt{u}}$
Teljes négyzetté alakítás	$\sqrt{8x-x^2} = \sqrt{16-(x-4)^2}$
Trigonometrikus azonosságok használata	$(\sec x + \operatorname{tg} x)^2 = \sec^2 x + 2\sec x \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x =$ $= \sec^2 x + 2\sec x \operatorname{tg} x + (\sec^2 x - 1) =$ $= 2\sec^2 x + 2\sec x \operatorname{tg} x - 1$
Gyökjel eltüntetése	$\sqrt{1+\cos 4x} = \sqrt{2\cos^2 2x} = \sqrt{2}\lvert\cos 2x\rvert$
Maradékos polinomosztás	$\dfrac{3x^2-7x}{3x+2} = x - 3 + \dfrac{6}{3x+2}$
Tört szétbontása	$\dfrac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$
Szorzás 1-gyel	$\sec x = \sec \cdot \dfrac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} = \dfrac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}$

8.1. Feladatok

Helyettesítéses integrál

Megfelelő helyettesítés segítségével végezzük el az integrálást (1–36. feladatok)!

1. $\int \frac{16x\,dx}{\sqrt{8x^2+1}}$
2. $\int \frac{3\cos x\,dx}{\sqrt{1+3\sin x}}$
3. $\int 3\sqrt{\sin v}\cos v\,dv$
4. $\int \operatorname{ctg}^3 y \csc^2 y\,dy$
5. $\int_0^1 \frac{16x\,dx}{8x^2+2}$
6. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec^2 z}{\operatorname{tg} z}\,dz$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$
8. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$
9. $\int \operatorname{ctg}(3-7x)\,dx$
10. $\int \csc(\pi x-1)\,dx$
11. $\int e^{\theta}\csc(e^{\theta}+1)\,d\theta$
12. $\int \frac{\operatorname{ctg}(3+\ln x)}{x}\,dx$
13. $\int \sec\frac{t}{3}\,dt$
14. $\int x\sec(x^2-5)\,dx$
15. $\int \csc(s-\pi)\,ds$
16. $\int \frac{1}{\theta^2}\csc\frac{1}{\theta}\,d\theta$
17. $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} 2xe^{x^2}\,dx$
18. $\int_{\pi/2}^{\pi} (\sin y)e^{\cos y}\,dy$
19. $\int e^{\operatorname{tg} v}\sec^2 v\,dv$
20. $\int \frac{e^{\sqrt{t}}\,dt}{\sqrt{t}}$
21. $\int 3^{x+1}\,dx$
22. $\int \frac{2^{\ln x}}{x}\,dx$
23. $\int \frac{2^{\sqrt{w}}\,dw}{2\sqrt{w}}$
24. $\int 10^{2\theta}\,d\theta$
25. $\int \frac{9\,du}{1+9u^2}$
26. $\int \frac{4\,dx}{1+(2x+1)^2}$
27. $\int_0^{1/6} \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$
28. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$
29. $\int \frac{2s\,ds}{\sqrt{1-s^4}}$
30. $\int \frac{2\,dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$
31. $\int \frac{6\,dx}{x\sqrt{25x^2-1}}$
32. $\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2-9}}$
33. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$
34. $\int \frac{dy}{\sqrt{e^{2y}-1}}$
35. $\int_1^{e^{\pi/3}} \frac{dx}{x\cos(\ln x)}$
36. $\int \frac{\ln x\,dx}{x+4x\ln^2 x}$

Kiegészítés teljes négyzetté

A másodfokú részt egészítsük ki teljes négyzetté, majd ahol szükséges, helyettesítéssel számoljuk ki az integrálokat (37–42. feladatok)!

37. $\int_1^2 \frac{8\,dx}{x^2-2x+2}$
38. $\int_2^4 \frac{2\,dx}{x^2-6x+10}$
39. $\int \frac{dt}{\sqrt{-t^2+4t-3}}$
40. $\int \frac{d\theta}{\sqrt{2\theta-\theta^2}}$
41. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$
42. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

Trigonometrikus azonosságok

Trigonometrikus azonosságok, majd a megfelelő helyettesítés használatával számítsuk ki a határozatlan integrálokat (43–46. feladatok)!

43. $\int (\sec x+\operatorname{ctg} x)^2\,dx$
44. $\int (\csc x-\operatorname{tg} x)^2\,dx$
45. $\int \csc x\sin 3x\,dx$
46. $\int (\sin 3x\cos 2x-\cos 3x\sin 2x)\,dx$

Maradékos polinomosztás

Maradékos polinomosztással egyszerűsítsük az integrálokat, majd ahol szükséges, helyettesítéssel számoljuk ki a 47–52. feladatokban szereplő integrálokat!

47. $\int \frac{x}{x+1}\,dx$
48. $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$
49. $\int_{\sqrt{2}}^3 \frac{2x^3}{x^2-1}\,dx$
50. $\int_{-1}^3 \frac{4x^2-7}{2x+3}\,dx$
51. $\int \frac{4t^3-t^2+16t}{t^2+4}\,dt$
52. $\int \frac{2\theta^3-7\theta^2+7\theta}{2\theta-5}\,d\theta$

Törtek szétválasztása

A törtek szétválasztásával, majd ahol szükséges, helyettesítéssel számoljuk ki az integrálokat (53–56. feladatok)!

53. $\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
54. $\int \frac{x+2\sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x-1}}\,dx$
55. $\int_0^{\pi/4} \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,dx$
56. $\int_0^{1/2} \frac{2-8x}{1+4x^2}\,dx$

1-gyel való szorzás

Alkalmas 1 értékű kifejezéssel szorozzuk be az integrandust, és ha szükséges, helyettesítést alkalmazva számítsuk ki a határozatlan integrálokat (57–62. feladatok)!

57. $\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$
58. $\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$
59. $\int \frac{1}{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}\,d\theta$
60. $\int \frac{1}{\csc\theta+\operatorname{ctg}\theta}\,d\theta$
61. $\int \frac{1}{1-\sec x}\,dx$
62. $\int \frac{1}{1-\csc x}\,dx$

Gyökjel eltüntetése

A 63–70. feladatokban tüntessük el a gyökjelet, és számoljuk ki a határozott integrálok értékét!

63. $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\,dx$
64. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$
65. $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1+\cos 2t}\,dt$
66. $\int_{-\pi}^{0} \sqrt{1+\cos t}\,dt$

67. $\int_{-\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2\theta}\, d\theta$ **68.** $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1-\sin^2\theta}\, d\theta$

69. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y}\, dy$ **70.** $\int_{-\pi/4}^{0} \sqrt{\sec^2 y - 1}\, dy$

További integrációs feladatok

Különböző átalakítások használatával számoljuk ki a 71–82. feladatokban szereplő integrálokat!

71. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} (\csc x - \operatorname{ctg} x)^2\, dx$ **72.** $\int_{0}^{\pi/4} (\sec x + 4\cos x)^2\, dx$

73. $\int \cos\theta \csc(\sin\theta)\, d\theta$

74. $\int \left(1+\frac{1}{x}\right) \operatorname{ctg}(x+\ln x)\, dx$

75. $\int (\csc x - \sec x)(\sin x + \cos x)\, dx$

76. $\int 3\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}+\ln 5\right) dx$

77. $\int \frac{6\, dy}{\sqrt{y}(1+y)}$ **78.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$

79. $\int \frac{7\, dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x-48}}$ **80.** $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x^2+4x}}$

81. $\int \sec^2 t \operatorname{tg}(\operatorname{tg} t)\, dt$ **82.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{3+x^2}}$

Trigonometrikus hatványok

83. **(a)** $\int \cos^3\theta\, d\theta = ?$ (*Útmutatás:* $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$.)

(b) $\int \cos^5\theta\, d\theta = ?$

(c) Anélkül, hogy kiszámolnánk, adjunk módszert $\int \cos^9\theta\, d\theta$ meghatározására!

84. **(a)** $\int \sin^3\theta\, d\theta = ?$ (*Útmutatás:* $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$.)

(b) $\int \sin^5\theta\, d\theta = ?$

(c) $\int \sin^7\theta\, d\theta = ?$

(d) Anélkül, hogy kiszámolnánk, adjunk módszert $\int \sin^{13}\theta\, d\theta$ meghatározására!

85. **(a)** Vezessük vissza $\int \operatorname{tg}^3\theta\, d\theta$ kiszámolását $\int \operatorname{tg}\theta\, d\theta$ kiszámolására! Utána számoljuk ki $\int \operatorname{tg}^3\theta\, d\theta$ -t! (*Útmutatás:* $\operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta - 1$.)

(b) Vezessük vissza $\int \operatorname{tg}^5\theta\, d\theta$ kiszámolását $\int \operatorname{tg}^3\theta\, d\theta$ kiszámolására!

(c) Vezessük vissza $\int \operatorname{tg}^7\theta\, d\theta$ kiszámolását $\int \operatorname{tg}^5\theta\, d\theta$ kiszámolására!

(d) Vezessük vissza $\int \operatorname{tg}^{2k+1}\theta\, d\theta$ kiszámolását $\int \operatorname{tg}^{2k-1}\theta\, d\theta$ kiszámolására, ahol k egy tetszőleges pozitív egész szám!

86. **(a)** Vezessük vissza $\int \operatorname{ctg}^3\theta\, d\theta$ kiszámolását $\int \operatorname{ctg}\theta\, d\theta$ kiszámolására! Utána számoljuk ki $\int \operatorname{ctg}^3\theta\, d\theta$ -t. (*Útmutatás:* $\operatorname{ctg}^2\theta = \csc^2\theta - 1$.)

(b) Vezessük vissza $\int \operatorname{ctg}^5\theta\, d\theta$ kiszámolását $\int \operatorname{ctg}^3\theta\, d\theta$ kiszámolására!

(c) Vezessük vissza $\int \operatorname{ctg}^7\theta\, d\theta$ kiszámolását $\int \operatorname{ctg}^5\theta\, d\theta$ kiszámolására!

(d) Vezessük vissza $\int \operatorname{ctg}^{2k+1}\theta\, d\theta$ kiszámolását $\int \operatorname{ctg}^{2k-1}\theta\, d\theta$ kiszámolására, ahol k egy tetszőleges pozitív egész szám!

További példák és feladatok

87. Területszámítás: Keressük meg az $y = 2\cos x$ és az $y = \sec x$ görbék $x \in [-\pi/4,\ \pi/4]$ intervallumba eső részei által határolt síkidom területét!

88. Területszámítás: Keressük meg annak a „háromszög" alakú síkidomnak a területét, amelyet felülről és alulról az $y = \csc x$ és a $y = \sin x$ görbék $\pi/6 \le x \le \pi/2$ része, balról pedig az $x = \pi/6$ egyenes határol!

89. Térfogatszámítás: Keressük meg annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet a 87. feladatban szereplő síkidomnak az x-tengely körüli megforgatásával kapunk!

90. Térfogatszámítás: Keressük meg annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet a 88. feladatban szereplő síkidomnak az x-tengely körüli megforgatásával kapunk!

91. Ívhossz: Határozzuk meg az $y = \ln(\cos x)$, $0 \le x \le \pi/3$ görbe ívhosszát!

92. Ívhossz: Határozzuk meg az $y = \ln(\sec x)$, $0 \le x \le \pi/4$ görbe ívhosszát!

93. Súlypont: Hol van a súlypontja annak a síkidomnak, amelyet az x-tengely, az $y = \sec x$ görbe és az $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$ egyenesek határolnak?

94. Súlypont: Hol van a súlypontja annak a síkidomnak, amelyet az x-tengely, az $y = \csc x$ görbe és az $x = \pi/6$, $x = 5\pi/6$ egyenesek határolnak?

95. A $\csc x$ függvény primitív függvénye: A 7. példa mintájára, koszekáns és kotangens függvények használatával mutassuk meg, hogy

$$\int \csc x\, dx = -\ln|\csc x + \operatorname{ctg} x| + C!$$

96. Különböző helyettesítések használata: Általában egy primitív függvény több, különböző helyettesítéssel is meghatározható. Számoljuk ki az

$$\int ((x^2-1)(x+1))^{-2/3}\, dx$$

határozatlan integrált a következő helyettesítésekkel:

(a) $u = 1/(x+1)$,

(b) $u = ((x-1)/(x+1))^k$, ahol $k = 1,\ 1/2,\ 1/3,\ -1/3,\ -2/3$ és -1,

(c) $u = \operatorname{arctg} x$,

(d) $u = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$,

(e) $u = \arccos x$,

(f) $u = \operatorname{arctg}((x-1)/2)$,

(g) $u = \operatorname{arch} x$.

(*Forrás:* „Problems and Solutions," *College Mathematics Journal*, Vol. 21, No. 5 (1990. november), 425–426. oldal)

8.2. Parciális integrálás

Mivel

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

és

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C,$$

világos, hogy

$$\int x \cdot x\,dx \neq \int x\,dx \cdot \int x\,dx.$$

Mivel szorzat deriváltja nem a deriváltak szorzata, szorzat primitív függvénye általában *nem* egyenlő a primitív függvények szorzatával:

$$\int f(x)g(x)\,dx \quad \neq \quad \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx.$$

A parciális integrálás szabálya a segítségünkre lesz egyes

$$\int f(x)g(x)\,dx$$

típusú integrálok egyszerűsítésében. A szabály akkor lesz jól alkalmazható, ha f-et könnyen tudjuk sokszor deriválni, g-t pedig sokszor integrálni. Például

$$\int xe^x\,dx$$

esetén működni fog a módszer, hiszen az $f(x) = x$ függvénynek már a második deriváltja 0, míg a $g(x) = e^x$ akárhányadik integrálját meg tudjuk mondani. Szintén használható a parciális integrálás olyan integrálok kiszámolására, mint például

$$\int e^x \sin x\,dx,$$

ahol a szorzat tényezőinek ismételt integrálása vagy deriválása után visszakapjuk a kiindulási függvényeket.

Most bebizonyítjuk a parciális integrálás szabályát, majd megnézzük, hogy hogyan alkalmazható primitív függvények meghatározására.

Integrálás a szorzatfüggvény deriválási szabálya alapján

Ha f és g deriválható függvények, akkor a szorzatfüggvény deriválási szabálya szerint

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Vegyük mindkét oldal primitív függvényét:

$$\int (f(x)g(x))'\,dx = \int \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right)\,dx,$$

vagy

$$\int (f(x)g(x))'\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Felhasználva, hogy egy tetszőleges függvény deriváltjának a primitív függvénye önmaga (egy $+C$ konstanstól eltekintve), azt kapjuk, hogy

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Az egyenlőséget átrendezve kapjuk a **parciális integrálás szabályát**:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx. \tag{8.1}$$

Talán könnyebb megjegyezni a formulát, ha differenciálok segítségével írjuk fel. Legyen $u = f(x)$ és $v = g(x)$. Ekkor $du = f'(x)\,dx$ és $dv = g'(x)\,dx$. A helyettesítést alkalmazva ezt kapjuk:

A parciális integrálás szabálya

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{8.2}$$

A parciális integrálás segítségével $\int u\,dv$ meghatározását visszavezethetjük egy másik határozatlan integrál, $\int v\,du$ meghatározására. Ha ügyesen választjuk az u és v függvényeket, a második integrál kiszámolása lényegesen egyszerűbb lesz, mint az elsőé volt. Mint a következő példában látni fogjuk, általában sok lehetőségünk van u és dv megválasztására, ám ezek közül csak néhány vezet sikerre.

1. PÉLDA: **A parciális integrálás használata**

Számoljuk ki az

$$\int x\cos x\,dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás: A parciális integrálás $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ szabályát fogjuk alkalmazni,

$$\begin{aligned} u &= x, & dv &= \cos x\,dx, \\ du &= dx, & v &= \sin x \end{aligned} \qquad \text{a } \cos x \text{ primitív függvénye}$$

szereposztással. Ezzel

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C. \qquad \square$$

Vizsgáljuk meg, mi történt volna, ha máshogy osztjuk ki u és dv szerepét!

2. PÉLDA: **Az 1. példa alaposabb vizsgálata**

A parciális integrálás első lépése során, amikor felírjuk, hogy

$$\int x\cos x\,dx = \int u\,dv,$$

négy lehetőségünk van:

1. legyen $u = 1$ és $dv = x\cos x\,dx$;

2. legyen $u = x$ és $dv = \cos x\,dx$;

3. legyen $u = x\cos x$ és $dv = dx$;

4. legyen $u = \cos x$ és $dv = x\,dx$.

Vizsgáljuk meg mindegyiket!

Az első választás nem vezet sehova, hiszen v kiszámolásához $\int x\cos x\,dx$ meghatározására lenne szükségünk, és ez maga a megoldandó feladat volt.

A második választás működik, mint ahogy az 1. példában láttuk.

A harmadik választással

$$\begin{aligned} u &= x\cos x, & dv &= dx, \\ du &= (\cos x - x\sin x)\,dx, & v &= x \end{aligned}$$

adódik, amely az

$$\int v\,du = \int (x\cos x - x^2\sin x)\,dx$$

integrálhoz vezet, ám ez bonyolultabb, mint a kiinduló feladat volt.

A negyedik választással

$$u = \cos x, \qquad dv = x\,dx,$$
$$du = -\sin x\,dx, \qquad v = x^2/2,$$

amellyel

$$\int v\,du = -\int \frac{x^2}{2}\sin x\,dx,$$

és ez szintén nehezebb, mint amiből kiindultunk.

Tehát a parciális integrálás célja az, hogy a bonyolultnak tűnő $\int u\,dv$ határozatlan integrált olyan $\int v\,du$ integrállá alakítsuk, amelyet könnyebben ki tudunk számolni. Általában dv-t választjuk ki először úgy, hogy mindenképp belekerüljön dx, és a függvényből minél több, amelynek még tudjuk a primitív függvényét. A megmaradó részt választjuk u-nak. Ne felejtsük azonban, hogy – ellentétben a szorzatfüggvény deriválásával – parciálisan nem lehet minden szorzatfüggvényt integrálni.

3. PÉLDA: A logaritmus függvény határozatlan integrálja

Számítsuk ki az

$$\int \ln x\,dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás: Írjuk fel $\int \ln x\,dx$-et $\int \ln x \cdot 1\,dx$ alakban, és integráljunk parciálisan az $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ képlet használatával.

$u = \ln x$	egyszerű lesz a deriváltja	$1\,dv = dx$	könnyű integrálni
$du = \frac{1}{x}\,dx,$		$v = x.$	az 1 primitív függvénye

Azt kapjuk, hogy

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C. \qquad \square$$

Néha egymás után többször kell parciálisan integrálnunk.

4. PÉLDA: Ismételt parciális integrálás

Számítsuk ki az

$$\int x^2 e^x\,dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás: Integráljunk parciálisan az $u = x^2$, $dv = e^x\,dx$, $du = 2x\,dx$, $v = e^x$ szereposztással:

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx!$$

Az új integrál egyszerűbb, mint a kiindulási volt, ugyanis az x kitevője eggyel csökkent. $\int x e^x\,dx$ meghatározásához ismét parciálisan integrálunk, most $u = x$, $dv = e^x\,dx$, $du = dx$, $v = e^x$ választással.

$$\int x e^x\,dx = x e^x - \int e^x\,dx = x e^x - e^x + C.$$

Ezzel pedig már készen vagyunk:

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C. \qquad \square$$

A 4. példában bemutatott ismételt parciális integrálás segítségével tetszőleges n pozitív egész esetén kiszámolhatjuk $\int x^n e^x\,dx$ értékét, ugyanis x^n-nek az $n+1$-edik deriváltja 0, és e^x akárhányadik határozatlan integrálja e^x. Az ehhez hasonló

függvények integrálásához még visszatérünk a fejezetben, *táblázatos integrálás* néven.

A következő példához hasonló határozatlan integrálok az elektrotechnikában is előfordulnak. A kiszámolásuk során kétszer fogunk parciálisan integrálni, majd megoldunk egy egyenletet, amelyben az ismeretlen a keresett határozatlan integrál lesz.

5. PÉLDA: **A keresett integrálra vonatkozó egyenlet**

Számítsuk ki az

$$\int e^x \cos x \, dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás: Legyen $u = e^x$ és $dv = \cos x \, dx$. Ekkor $du = e^x \, dx$, $v = \sin x$, és

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx.$$

Az integrál amelyet kaptunk, olyan mint a kezdeti, csak $\cos x$ helyett $\sin x$ szerepel benne. Integráljunk még egyszer parciálisan az

$$u = e^x, \qquad dv = \sin x \, dx, \qquad du = e^x \, dx, \qquad v = -\cos x$$

választással!

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x - \int (-\cos x)(e^x dx) \right) =$$
$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx.$$

A keresett határozatlan integrál az egyenlőség mindkét oldalán szerepel. Mindkét oldalhoz $\int e^x \cos x \, dx$ -et hozzáadva azt kapjuk, hogy

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x + C_1.$$

Elosztva mindkét oldalt 2-vel, és átnevezve a $C_1/2$ konstanst C-re megkapjuk az eredményt:

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C. \qquad \square$$

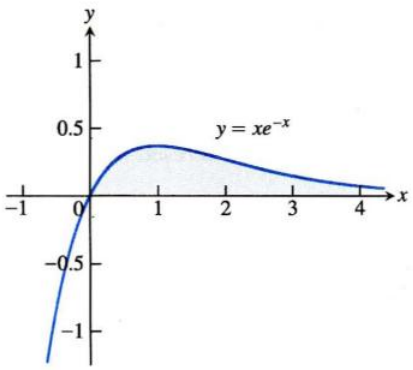
Határozott integrálok kiszámolása parciális integrálással

Az (8.1) képletben látott parciális integrálás szabályát a Newton–Leibniz-formulával kombinálva megkapjuk, hogy hogyan lehet határozott integrálokat kiszámolni parciális integrálás segítségével. Tegyük fel, hogy f' és g' is folytonos az $[a,b]$ intervallumon. A Newton–Leibniz-szabály szerint:

Parciális integrálás határozott integrálokra

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = \Big[f(x)g(x) \Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx \qquad (8.3)$$

Általában a (8.3) képlet használata során is a (8.2)-es képletből megszokott u és v jelölést használjuk, mert azt könnyebb fejben tartani. Rögtön mutatunk is egy példát rá.



8.1. ÁBRA: A 6. példában keresett terület.

6. PÉLDA: **Területszámolás**

Mekkora területet fog közre az $y = xe^{-x}$ görbe és az x-tengely az $x = 0$ és $x = 4$ pontok között?

Megoldás: A szóban forgó síkidomot a 8.1. ábrán láthatjuk. A területe

$$\int_0^4 xe^{-x}\,dx.$$

Legyen $u = x$, $dv = e^{-x}\,dx$, $v = -e^{-x}$, és $du = dx$. Ekkor

$$\int_0^4 xe^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^4 - \int_0^4 (-e^{-x})\,dx =$$

$$= \left(-4e^{-4} - (0)\right) + \int_0^4 e^{-x}\,dx =$$

$$= -4e^{-4} - \left[e^{-x}\right]_0^4 =$$

$$= -4e^{-4} - e^{-4} - (-e^0) = 1 - 5e^{-4} \approx 0{,}91. \qquad \square$$

Táblázatos integrálás

Láttuk, hogy az olyan $\int f(x)g(x)\,dx$ alakú integrálok, amelyekben f-et néhányszor deriválva 0-t kapunk, és g-t többször is tudjuk gond nélkül integrálni, kiválóan alkalmasak parciális integrálásra. Ám, ha többször kell parciálisan integrálnunk ahhoz, hogy célhoz érjünk, a számolás leírása hosszadalmas lehet. Az ilyen esetekre mutatunk egy eszközt, amelynek használatával az integrálás áttekinthetőbb lesz. A módszer neve **táblázatos integrálás**. Lássuk a használatát néhány példa segítségével!

7. PÉLDA: **Táblázatos integrálás**

Számítsuk ki az

$$\int x^2 e^x\,dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás: Legyen $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$, és készítsük el a következő táblázatot:

$f(x)$ és a deriváltjai		$g(x)$ és a primitív függvényei
x^2	(+) ↘	e^x
$2x$	(−) ↘	e^x
2	(+) ↘	e^x
0		e^x

Szorozzuk össze a nyilakkal összekötött tényezőket, majd a nyilak fölötti előjellel ellátva adjuk őket össze. Megkapjuk a keresett határozatlan integrált:

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Vessük össze az eredményt a 4. példában látottakkal! $\square$

8. PÉLDA: **Táblázatos integrálás**

Számítsuk ki az

$$\int x^3 \sin x \, dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás: Legyen $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$! A táblázatunk:

$f(x)$ **és a deriváltjai**		$g(x)$ **és a primitív függvényei**
x^3	$(+)$	$\sin x$
$3x^2$	$(-)$	$-\cos x$
$6x$	$(+)$	$-\sin x$
6	$(-)$	$\cos x$
0		$\sin x$

A nyilakkal összekötött tényezők összeszorzása, majd a nyilak fölötti előjellel való összegzése azt adja, hogy

$$\int x^3 \sin x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C. \qquad \square$$

A fejezet végén arra is mutatunk példát, hogy hogyan lehet a táblázatos integrálás technikáját akkor alkalmazni, amikor sem f, sem g ismételt deriválásával nem kapunk nullát.

Összegzés

Ha egy integrált helyettesítéssel nem tudunk megoldani, próbálkozzunk parciális integrálással! Kezdetnek tekintsünk úgy az integrálandó függvényre, mint két függvény szorzatára:

$$\int f(x)g(x) \, dx!$$

(Ne feledjük, előfordulhat, hogy g-nek a konstans 1 függvényt kell tekintenünk, mint a 3. példában!) Osszuk ki dv szerepét úgy, hogy tartalmazza dx-et, és vagy $f(x)$-et vagy $g(x)$-et! Így az integrál

$$\int u \, dv$$

alakú lesz. A választott dv-nek meg kell keresnünk a primitív függvényét ahhoz, hogy megkapjuk v-t, és fel tudjuk írni az

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

képlet jobb oldalát. Ha a jobb oldalon szereplő $\int v \, du$ bonyolultabb, mint a kiindulási feladat volt, akkor rosszul választottuk u-t és dv-t. Ilyen esetben próbálkozzunk más választással!

9. PÉLDA: **Hatványredukciós formula**

Keressünk egy „redukciós formulát”

$$\int \cos^n x \, dx$$

meghatározásához, azaz fejezzük ki a fenti határozatlan integrált $\cos x$ alacsonyabb hatványainak az integráljai segítségével!

Megoldás: Tekintsük $\cos^n x$-et $\cos^{n-1} x \cdot \cos x$ formában. Legyen

$$u = \cos^{n-1} x \qquad \text{és} \qquad dv = \cos x\, dx,$$

így

$$du = (n-1)\cos^{n-2} x(-\sin x\, dx) \qquad \text{és} \qquad v = \sin x.$$

A parciális integrálást végrehajtva

$$\begin{aligned}\int \cos^n x\, dx &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int sin^2 x \cos^{n-2} x\, dx = \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\, dx = \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \cos^n x\, dx.\end{aligned}$$

A kapott egyenlet mindkét oldalához adjuk hozzá a

$$(n-1)\int \cos^n x\, dx$$

kifejezést. Azt kapjuk, hogy

$$n\int \cos^n x\, dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\, dx.$$

Ha elosztjuk az egyenletet n-nel, megkapjuk a keresett redukciós formulát:

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx.$$

Láthatjuk, hogy a redukciós formula segítségével 2-vel csökkenthetjük az integrálandó $\cos x$ hatvány hatványkitevőjét. Ha n pozitív egész, akkor a formula ismételt alkalmazásával lecsökkenthetjük a kitevőt 1-re vagy 0-ra, így a megmaradó integrál

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C \qquad \text{vagy} \qquad \int \cos^0 x\, dx = \int dx = x + C. \qquad \square$$

10. PÉLDA: **A hatványredukciós formula használata**

Számítsuk ki az

$$\int \cos^3 x\, dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás: A 9. példa eredményét használva

$$\int \cos^3 x\, dx = \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x\, dx = \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x + C. \qquad \square$$

8.2. Feladatok

Parciális integrálás

Számítsuk ki az integrálokat (1–24. feladatok)!

1. $\int x \sin \frac{x}{2}\, dx$
2. $\int \theta \cos \pi\theta\, d\theta$
3. $\int t^2 \cos t\, dt$
4. $\int x^2 \sin x\, dx$
5. $\int_1^2 x \ln x\, dx$
6. $\int_1^e x^3 \ln x\, dx$
7. $\int \operatorname{arctg} y\, dy$
8. $\int \arcsin y\, dy$
9. $\int x \sec^2 x\, dx$
10. $\int 4x \sec^2 2x\, dx$
11. $\int x^3 e^x\, dx$
12. $\int p^4 e^{-p}\, dp$
13. $\int (x^2 - 5x)e^x\, dx$
14. $\int (r^2 + r + 1)e^r\, dr$
15. $\int x^5 e^x\, dx$
16. $\int t^2 e^{4t}\, dt$

17. $\int_0^{\pi/2} \theta^2 \sin 2\theta \, d\theta$

18. $\int_0^{\pi/2} x^3 \cos 2x \, dx$

19. $\int_{2\sqrt{3}}^{2} t \operatorname{arcsec} t \, dt$

20. $\int_0^{1\sqrt{2}} 2x \arcsin x^2 \, dx$

21. $\int e^{\theta} \sin\theta \, d\theta$

22. $\int e^{-y} \cos y \, dy$

23. $\int e^{2x} \cos 3x \, dx$

24. $\int e^{-2x} \sin 2x \, dx$

Helyettesítés, majd parciális integrálás

Számítsuk ki a 25–30. feladatokban szereplő integrálokat! Először alkalmazzunk helyettesítést, majd integráljunk parciálisan!

25. $\int e^{\sqrt{3s+9}} \, ds$

26. $\int_0^1 x\sqrt{1-x} \, dx$

27. $\int_0^{\pi/3} x \operatorname{tg}^2 x \, dx$

28. $\int \ln(x+x^2) \, dx$

29. $\int \sin(\ln x) \, dx$

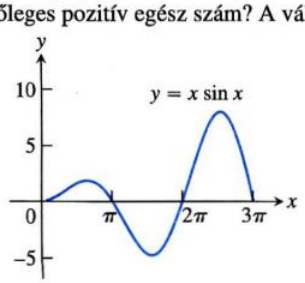
30. $\int z(\ln z)^2 \, dz$

További példák és feladatok

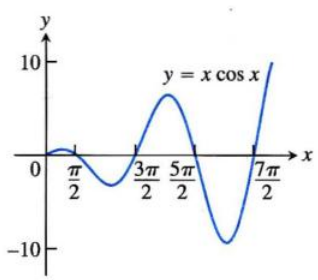
31. Területszámítás: Keressük meg az $f(x) = x\sin x$ függvény grafikonja és az x-tengely által közbezárt területet (lásd az ábrát), ha

(a) $0 \le x \le \pi$, **(b)** $\pi \le x \le 2\pi$, **(c)** $2\pi \le x \le 3\pi$!

(d) Milyen szabályszerűséget láthatunk? Mekkora a függvény grafikonja és az x-tengely közötti terület, ha $n\pi \le x \le (n+1)\pi$, ahol n egy tetszőleges pozitív egész szám? A választ indokolja!



32. Területszámítás: Keressük meg az $f(x) = x\cos x$ függvény grafikonja és az x-tengely által közbezárt területet (lásd az ábrát), ha



(a) $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$, **(b)** $3\pi/2 \le x \le 5\pi/2$,

(c) $5\pi/2 \le x \le 7\pi/2$!

(d) Milyen szabályszerűséget láthatunk? Mekkora a függvény grafikonja és az x-tengely közötti terület, ha

$$\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi \le x \le \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi,$$

ahol n egy tetszőleges pozitív egész szám? A választ indokolja!

33. Térfogatszámítás: Forgassuk meg az $x = \ln 2$ egyenes körül a pozitív síknegyednek a koordinátatengelyek, az $y = e^x$ görbe és az $x = \ln 2$ egyenes által határolt részét! Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

34. Térfogatszámítás: Tekintsük a pozitív síknegyednek a koordinátatengelyek, az $y = e^{-x}$ görbe és az $x = 1$ egyenes által határolt részét! Mekkora a keletkező forgástest térfogata, ha a síkidomot megforgatjuk az

(a) y-tengely körül? **(b)** az $x = 1$ egyenes körül?

35. Térfogatszámítás: Tekintsük a pozitív síknegyednek a koordinátatengelyek és az $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi/2$ görbe által határolt részét! Mekkora a keletkező forgástest térfogata, ha a síkidomot megforgatjuk az

(a) y-tengely körül, **(b)** az $x = \pi/2$ egyenes körül?

36. Térfogatszámítás: Mekkora a keletkező forgástest térfogata, ha az x-tengely és az $y = x\sin x$, $0 \le x \le \pi$ görbe által határolt síkidomot megforgatjuk az

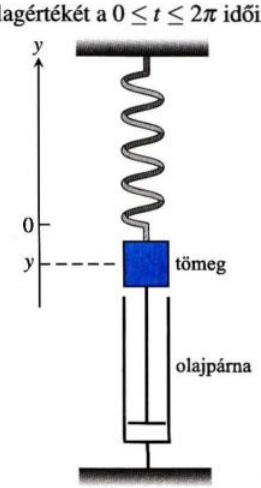
(a) y-tengely körül, **(b)** az $x = \pi$ egyenes körül?

(Lásd a 31. feladat ábráját!)

37. Átlagérték: Egy dugattyú lassítja a rugón függő test mozgását (lásd az ábrát), így a test y koordinátája az idő függvényében így alakul:

$$y = 2e^{-t}\cos t, \qquad t \ge 0.$$

Számoljuk ki y átlagértékét a $0 \le t \le 2\pi$ időintervallumon!



38. Átlagérték: A 37. feladathoz hasonló tömeg–rugó–dugattyú rendszerben a tömeg y koordinátája az idő függvényében

$$y = 4e^{-t}(\sin t - \cos t), \qquad t \ge 0.$$

Számoljuk ki y átlagértékét a $0 \le t \le 2\pi$ időintervallumon!

Redukciós képletek

Parciális integrálással bizonyítsuk be a 39–42. feladatokban megadott redukciós képleteket!

39. $\int x^n \cos x \, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx$

40. $\int x^n \sin x \, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx$

41. $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx, \qquad a \neq 0$

42. $\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$

Inverz függvény primitív függvénye

Parciális integrálás segítségével jól használható formulát kaphatunk egy $f(x)$ függvény inverzének primitív függvényére:

$$\int f^{-1}(x)\,dx = \int yf'(y)\,dy = \qquad \begin{matrix} y = f^{-1}(x), \quad x = f(y) \\ dx = f'(y)\,dy \end{matrix}$$

$$= yf(y) - \int f(y)\,dy = \qquad \begin{matrix} \text{parciális integrálás} \\ u = y,\ dv = f'(y)\,dy\text{-nal} \end{matrix}$$

$$= xf^{-1}(x) - \int f(y)\,dy.$$

Az elv az, hogy vegyük a legbonyolultabb részét az integrálnak, amely a mi esetünkben $f^{-1}(x)$, és helyettesítsük y-nal, hogy egyszerűsödjön! A keletkező szorzatot integráljuk parciálisan! Például $\int \ln x\,dx$ esetén ezt kapjuk:

$$\int \ln x\,dx = \int ye^y\,dy = \qquad \begin{matrix} y = \ln x, \quad x = e^y \\ dx = e^y\,dy \end{matrix}$$

$$= ye^y - e^y + C =$$

$$= x\ln x - x + C.$$

Az $\arccos x$ függvény integrálása így történik:

$$\int \arccos x\,dx = x\arccos x - \int \cos y\,dy = \qquad y = \arccos x$$

$$= x\arccos x - \sin y + C =$$

$$= x\arccos x - \sin(\arccos x) + C.$$

Az $\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)\,dy \qquad y = f^{-1}(x)$ (8.4)

képlet használatával számítsuk ki a 43–46. feladatokban szereplő határozatlan integrálokat! Az eredményeket x függvényeként adjuk meg!

43. $\int \arcsin x\,dx$ **44.** $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

45. $\int \operatorname{arcsec} x\,dx$ **46.** $\int \log_2 x\,dx$

Egy másik lehetőség $f^{-1}(x)$ integrálására (persze csak ha f^{-1} integrálható), hogy $u = f^{-1}(x)$, $dv = dx$ választással integrálunk parciálisan:

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int x\left(\frac{d}{dx}f^{-1}(x)\right)dx. \qquad (8.5)$$

A 47–48. feladatokban összehasonlítjuk a (8.4) és (8.5) formulák által szolgáltatott eredményeket.

47. A (8.4) és (8.5) képletek az $\arccos x$ függvény határozatlan integrálját különböző formában adják meg.

$\int \arccos x\,dx = x\arccos x - \sin(\arccos x) + C$ (8.4) alapján

$\int \arccos x\,dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$ (8.5) alapján

Miért helyes mindkét eredmény?

48. A (8.4) és (8.5) formulák más eredményt adnak az $\operatorname{arctg} x$ függvény határozatlan integráljára.

$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \ln\sec(\operatorname{arctg} x) + C$ (8.4) alapján

$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1-x^2} + C$ (8.5) alapján

Lehet mindkét eredmény helyes? Válaszát indokolja!

Számítsuk ki a 49–50. feladatokban szereplő határozatlan integrálokat a (8.4) és a (8.5) képlet használatával is! Eredményeinket ellenőrizzük a kapott primitív függvény differenciálásával!

49. $\int \operatorname{arsh} x\,dx$ **50.** $\int \operatorname{arth} x\,dx$

8.3. Racionális törtfüggvények integrálása parciális törtekre bontással

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy hogyan lehet racionális törtfüggvényeket (azaz polinomok hányadosát) egyszerűbb, *parciális törteknek* nevezett függvények összegére bontani, amelyek könnyebben integrálhatóak. Például az $(5x - -3)/(x^2 - 2x - 3)$ törtfüggvény

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}$$

formába írható, és ennek az egyenlőségnek a helyességét a jobb oldalon szereplő két tag közös nevezőre hozásával könnyen ellenőrizni tudjuk. De hogyan bonthatunk fel egy törtfüggvényt ilyen törtek összegére? Ennek az eljárásnak az ismerete máskor is hasznos lehet (például egyes differenciálegyenletek megoldásakor), és a racionális törtfüggvények integrálását is megkönnyíti. Az előző példánál maradva:

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx = \int \frac{2}{x+1}\,dx + \int \frac{3}{x-3}\,dx =$$

$$= 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C.$$

Az eljárást, amellyel racionális törtfüggvényeket egyszerűbb törtfüggvények összegére bontunk, **parciális törtekre bontásnak** nevezik. A példánkban az $(5x-3)/(x^2-2x-3)$ törtfüggvény esetében olyan A és B konstansokat keresünk, amelyekre

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}. \tag{8.6}$$

(Tegyünk úgy, mintha nem tudnánk, hogy $A = 2$ és $B = 3$ megfelelő választás lenne.) Az

$$\frac{A}{x+1} \qquad \text{és} \qquad \frac{B}{x-3}$$

törteket **parciális törteknek** vagy magyarul **résztörteknek** nevezik, mert nevezőik az eredeti nevezőnek, x^2-2x-3-nak az osztói, azaz „részei". A számlálókban szereplő A és B az egyelőre még **ismeretlen együtthatók**.

A és B megtalálásához szorozzuk meg az (8.6) egyenlőséget a közös nevezővel, $(x+1)(x-3)$-mal:

$$5x-3 = A(x-3)+B(x+1) = (A+B)x-3A+B.$$

Az egyenlőség két oldalán álló polinom akkor és csak akkor egyenlő, ha az azonos x hatványhoz tartozó együtthatóik egyenlőek, azaz ha

$$A+B=5 \qquad \text{és} \qquad -3A+B=-3.$$

Az így kapott egyenletrendszert megoldva $A = 2$ és $B = 3$ adódik.

Az eljárás általános leírása

Ahhoz, hogy az $f(x)/g(x)$ racionális törtfüggvényt parciális törtekre tudjuk bontani, két dolognak kell teljesülnie:

- *$f(x)$ fokszámának alacsonyabbnak kell lennie $g(x)$ fokszámánál.* Ha ez nem teljesül, osszuk el maradékosan $f(x)$-et $g(x)$-szel, és folytassuk a parciális törtekre bontást a maradékkal. A 3. példában látunk majd ilyen esetet is.
- *Fel kell tudnunk írni $g(x)$-et tovább nem bontható tényezők szorzataként.* Elméletileg egy tetszőleges valós együtthatós polinom felbontható első és másodfokú, tovább nem bontható valós együtthatós polinomok szorzatára. Gyakorlatban egy ilyen felbontás megtalálása elég nehéz lehet.

Ha ez a két feltétel teljesül, így találhatjuk meg $f(x)/g(x)$ parciális törtekre való felbontását:

$f(x)/g(x)$ parciális törtekre bontásának algoritmusa

1. Legyen $x-r$ a nevezőben szereplő $g(x)$ egy osztója. Tegyük fel, hogy $(x-r)^m$ a legmagasabb fokú hatványa $x-r$-nek, amellyel $g(x)$ osztható. Ekkor, ehhez a tényezőhöz a következő parciális törtek összegét rendeljük:

$$\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-r)^m}.$$

Csináljuk ezt meg $g(x)$ összes különböző elsőfokú osztójával!

2. Legyen x^2+px+q egy másodfokú osztója $g(x)$-nek. Tegyük fel, hogy $(x^2+px+q)^n$ a legmagasabb fokú hatványa x^2+px+q-nek, amellyel $g(x)$ osztható. Ehhez a tényezőhöz a következő parciális törtek összegét rendeljük:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}$$

Csináljuk ezt meg $g(x)$ összes olyan különböző másodfokú osztójával, amely nem bontható tovább két elsőfokú polinom szorzatára!

3. Írjuk fel azt az egyenletet, hogy $f(x)/g(x)$ egyenlő az összes felírt parciális tört összegével! Szorozzuk meg mindkét oldalt a közös nevezővel, azaz $g(x)$-szel!

4. Írjuk fel azt a lineáris egyenletrendszert, amely az x azonos fokú hatványai együtthatóinak egyenlőségéből adódik! Az egyenletrendszer megoldása megadja az ismeretlen együtthatók értékét.

1. PÉLDA: **Különböző lineáris szorzótényezők**

Számoljuk ki az

$$\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}\,dx$$

határozatlan integrált a racionális törtfüggvény parciális törtekre bontásával!

Megoldás: A parciális törtekre bontás

$$\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+3}$$

formában történik. A, B és C meghatározásához beszorzunk a nevezővel, és azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x^2+4x+1 &= A(x+1)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+1) = \\ &= (A+B+C)x^2+(4A+2B)x+(3A-3B-C). \end{aligned}$$

Az egyenlőség két oldalán szereplő polinomok egyenlőek, tehát az azonos hatványhoz tartozó együtthatóik is azok:

$$\begin{aligned} x^2 \text{ együtthatói:} \quad & A+B+C = 1, \\ x^1 \text{ együtthatói:} \quad & 4A+2B = 4, \\ x^0 \text{ együtthatói:} \quad & 3A-3B-C = 1. \end{aligned}$$

A, B és C ismeretlenekre három ismeretlenes egyenletrendszert kaptunk, amelyet megoldhatunk az ismeretlenek kiküszöbölésével, Gauss-eliminációval vagy számítógéppel. Akármit is használunk, $A=3/4$, $B=1/2$, $C=-1/4$ adódik. Ezzel

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}\,dx &= \int \left(\frac{3}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}\frac{1}{x+3}\right)dx = \\ &= \frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln|x+3|+K, \end{aligned}$$

ahol K-t írtunk a határozatlan integrál konstansaként (elkerülendő a C együtthatóval való összekeverést). □

2. PÉLDA: **Egyetlen lineáris tényező négyzete**

Számítsuk ki az

$$\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás: Kezdetnek írjuk fel az integrálandó racionális törtfüggvényt ismeretlen együtthatókkal vett parciális törtek összegeként!

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $(x+2)^2$-tel:

$$6x+7 = A(x+2)+B = Ax+(2A+B)!$$

Az azonos fokszámú x hatványok együtthatóinak egyenlőségéből

$$A=6 \quad \text{és} \quad 2A+B=12+B=7, \quad \text{azaz} \quad A=6,\ B=-5$$

adódik. Ezzel

$$\begin{aligned} \int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx &= \int \left(\frac{6}{x+2}-\frac{5}{(x+2)^2}\right)dx = \\ &= 6\int \frac{dx}{x+2}-5\int (x+2)^{-2}\,dx = \\ &= 6\ln|x+2|+5(x+2)^{-1}+C. \end{aligned}$$

□

3. PÉLDA: **A számláló fokszáma nagyobb vagy egyenlő, mint a nevezőé**

Számítsuk ki az

$$\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}\,dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás: Osszuk el maradékosan a számlálót a nevezővel, hogy szétválasszuk az egész és a valódi tört részt:

$$\begin{array}{l} (2x^3-4x^2-x-3) \;:\; (x^2-2x-3) \;=\; 2x \\ \underline{-\;(2x^3-4x^2-6x)} \\ \qquad\qquad 5x-3 \end{array}$$

Azaz az osztás eredménye $2x$, a maradék $5x-3$. Így

$$\frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3} = 2x + \frac{5x-3}{x^2-2x-3}.$$

Felhasználva, hogy a megmaradó racionális törtfüggvény éppen az, amelyet a fejezet elején már parciális törtekre bontottunk,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}\,dx &= \int 2x\,dx + \int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx = \\ &= \int 2x\,dx + \int \frac{2}{x+1}\,dx + \int \frac{3}{x-3}\,dx = \\ &= x^2 + 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C. \end{aligned}$$ □

Egy valós együtthatós másodfokú polinom **irreducibilis**, ha nem bontható két elsőfokú valós együtthatós polinom szorzatára.

4. PÉLDA: **Irreducibilis másodfokú tényező a nevezőben**

Határozzuk meg az

$$\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás: A nevező egy irreducibilis másodfokú és egy négyzetes lineáris tényező szorzata, így a parciális törtekre bontást

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} \tag{8.7}$$

alakban keressük. A nevezővel beszorozva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -2x+4 &= (Ax+B)(x-1)^2 + C(x-1)(x^2+1) + D(x^2+1) = \\ &= (A+C)x^3 + (-2A+B-C+D)x^2 + (A-2B+C)x + (B-C+D). \end{aligned}$$

Az azonos fokú x hatványok együtthatóinak egyenlőségét felírva:

$$\begin{aligned} x^3 \text{ együtthatói:} &\quad 0 = A+C, \\ x^2 \text{ együtthatói:} &\quad 0 = -2A+B-C+D, \\ x^1 \text{ együtthatói:} &\quad -2 = A-2B+C, \\ x^0 \text{ együtthatói:} &\quad 4 = B-C+D. \end{aligned}$$

Határozzuk meg az egyenletrendszerből A, B, C és D értékét!

$$\begin{array}{lll} -4 = -2A \;\Rightarrow\; A = 2, & & \text{kivonva a negyedik egyenletet a másodikból} \\ C = -A = -2, & & \text{az első egyenletből} \\ B = 1, & & A = 2 \text{ és } C = -2 \text{ a harmadik egyenletben} \\ D = 4 - B + C = 1. & & \text{a negyedik egyenletből} \end{array}$$

A, B, C és D értékét a (8.7) egyenletbe helyettesítve, megkapjuk a keresett parciális törteket:

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Végül ilyen formában már elvégezhető a határozatlan integrálás is:

$$\begin{aligned}\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx = \\ &= \int \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx = \\ &= \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x - 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C. \qquad \square\end{aligned}$$

5. PÉLDA: **Irreducibilis másodfokú tényező négyzete a nevezőben**

Határozzuk meg az

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$$

határozatlan integrált!

Megoldás: A parciális törtekre bontást

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

alakban kell keresnünk. Beszorozva $x(x^2+1)^2$-tel azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}1 &= A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x = \\ &= A(x^4+2x^2+1) + B(x^4+x^2) + C(x^3+x) + Dx^2 + Ex = \\ &= (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A.\end{aligned}$$

A megfelelő együtthatók egyenlőségéből az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$A+B=0, \qquad C=0, \qquad 2A+B+D=0, \qquad C+E=0, \qquad A=1.$$

Megoldva az egyenletrendszert $A=1$, $B=-1$, $C=0$, $D=-1$ és $E=0$ adódik, tehát

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}\right) dx = \\ &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{x^2+1} - \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \\ &= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = \qquad \begin{matrix}u=x^2+1,\\ du=2x\,dx\end{matrix} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{2u} + K = \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + K = \\ &= \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2(x^2+1)} + K. \qquad \square\end{aligned}$$

A Heaviside-féle „letakarásos módszer"

Ha $f(x)$ alacsonyabb fokú mint $g(x)$, és

$$g(x) = (x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)$$

csupa különböző elsőfokú tényező szorzata, akkor ezzel a módszerrel gyorsan meghatározható $f(x)/g(x)$ parciális tört alakja.

6. PÉLDA: A letakarásos módszer használata

Keressük meg A, B és C értékét az

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \tag{8.8}$$

parciális tört felbontásban!

Megoldás: A (8.8) egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg $(x-1)$-gyel:

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x-3)} = A + \frac{B(x-1)}{x-2} + \frac{C(x-1)}{x-3}.$$

Ha behelyettesítünk $x = 1$-et, akkor az eredményül kapott egyenlőség megadja A értékét:

$$\frac{(1)^2+1}{(1-2)(1-3)} = A+0+0,$$
$$A = 1.$$

Ezt az A értékét úgy is megkaphatjuk, hogy az eredeti

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \tag{8.9}$$

kifejezésben letakarjuk az $(x-1)$ tényezőt a nevezőben, és a megmaradó képletbe $x = 1$-et helyettesítünk:

$$A = \frac{1^2+1}{\boxed{(x-1)}(1-2)(1-3)} = \frac{2}{(-1)(-2)} = 1.$$
$$\uparrow$$
letakarjuk

Hasonlóan számíthatjuk ki B-t úgy, hogy (8.9) nevezőjében az $(x-2)$ tényezőt takarjuk le, és a maradékba $x = 2$-t helyettesítünk:

$$B = \frac{2^2+1}{(2-1)\boxed{(x-2)}(2-3)} = \frac{5}{(1)(-1)} = -5.$$
$$\uparrow$$
letakarjuk

Végül megkeressük C-t is, az $(x-3)$-at takarva le (8.9) nevezőjében, és $x = 3$-mat helyettesítve a maradékba:

$$C = \frac{3^2+1}{(3-1)(3-2)\boxed{(x-3)}} = \frac{10}{(2)(1)} = 5.$$
$$\uparrow$$
letakarjuk

□

A Heaviside-féle letakarásos módszer

1. *A nevezőben levő $g(x)$-et szorzat alakba írjuk:*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)}.$$

2. *A nevezőben letakarjuk az $(x-r_i)$ tényezőt, és az összes többi x helyébe $x = r_i$-t helyettesítünk.* Így megkapjuk az A_i számot. Ezt megcsináljuk minden $i = 1, 2, \ldots n$-re:

$$A_1 = \frac{f(r_1)}{(r_1-r_2)\cdots(r_1-r_n)},$$
$$A_2 = \frac{f(r_2)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)\cdots(r_2-r_n)},$$
$$\vdots$$
$$A_n = \frac{f(r_n)}{(r_n-r_1)(r_n-r_2)\cdots(r_n-r_{n-1})}.$$

3. *Felírjuk a parciális törtekre bontást az A_i együtthatókkal:*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-r_1)} + \frac{A_2}{(x-r_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-r_n)}.$$

7. PÉLDA: **Integrál számolása letakarásos módszerrel**

Számoljuk ki az

$$\int \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}\,dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás: A számláló alacsonyabb fokú, mint a nevező, és a nevező három különböző elsőfokú polinom szorzatára bomlik:

$$\frac{x+4}{x^3+3x^2-10x} = \frac{x+4}{x(x-2)(x+5)}.$$

A nevező gyökei $r_1 = 0$, $r_2 = 2$ és $r_3 = -5$. Megkeressük a parciális tört felbontás együtthatóit:

$$A_1 = \frac{0+4}{\boxed{x}(0-2)(0+5)} = \frac{4}{(-2)(5)} = -\frac{2}{5},$$
(↑ letakarjuk)

$$A_2 = \frac{2+4}{2\boxed{(x-2)}(2+5)} = \frac{6}{(2)(7)} = \frac{3}{7},$$
(↑ letakarjuk)

$$A_3 = \frac{-5+4}{(-5)(-5-2)\boxed{(x+5)}} = \frac{-1}{(-5)(-7)} = -\frac{1}{35}.$$
(↑ letakarjuk)

Ezzel

$$\frac{x+4}{x^3+3x^2-10x} = -\frac{2}{5x} + \frac{3}{7(x-2)} - \frac{1}{35(x+5)}, \qquad \text{és}$$

$$\int \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}\,dx = -\frac{2}{5}\ln|x| + \frac{3}{7}\ln|x-2| - \frac{1}{35}\ln|x+5| + C. \qquad \square$$

További módszerek az együtthatók meghatározására

Egy további lehetőség a parciális törtekre való felbontás együtthatóinak megkeresésére a megfelelő egyenlet differenciálása, ahogy a következő példánál látni is fogjuk. Végül megnézzük, hogy x helyébe célszerűen választott számokat helyettesítve hogyan kaphatjuk meg az együtthatókat.

8. PÉLDA: **Az együtthatók meghatározása differenciálással**

Keressük meg az A, B és C együtthatókat, melyekkel

$$\frac{x-1}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}!$$

Megoldás: Először beszorzunk az $(x+1)^3$ közös nevezővel:

$$x-1 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C.$$

Az $x=-1$ helyettesítésből megkapjuk, hogy $C=-2$. Mindkét oldalt x szerint deriválva a következő egyenletet kapjuk:

$$1 = 2A(x+1) + B.$$

Most az $x=-1$ helyettesítés azt adja, hogy $B=1$. Egy újabb differenciálás után a $0=2A$ egyenletet kapjuk, azaz

$$\frac{x-1}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3}.$$ □

Egyes esetekben x helyébe kis számokat írva, például $x=0,\pm1,\pm2$-t, A-ra, B-re és C-re gyorsan jól kezelhető egyenleteket kapunk.

9. PÉLDA: **Az együtthatók meghatározása behelyettesítéssel**

Keressünk A-t, B-t és C-t, amelyekre

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}!$$

Megoldás: Beszorozva a közös nevezővel, azt kapjuk, hogy

$$x^2+1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

Helyettesítsünk x helyébe rendre $x=1,2,3$-at:

$$\begin{aligned}
x=1: \quad & (1)^2+1 = A(-1)(-2) + B(0) + C(0) \\
& 2 = 2A \\
& A = 1 \\
x=2: \quad & (2)^2+1 = A(0) + B(1)(-1) + C(0) \\
& 5 = -B \\
& B = -5 \\
x=3: \quad & (3)^2+1 = A(0) + B(0) + C(2)(1) \\
& 10 = 2C \\
& C = 5.
\end{aligned}$$

Így a megoldás:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}.$$ □

8.3. Feladatok

Parciális törtekre bontás

Bontsuk parciális törtekre a racionális törtfüggvényeket (1–8. feladatok)!

1. $\dfrac{5x-13}{(x-3)(x-2)}$
2. $\dfrac{5x-7}{x^2-3x+2}$
3. $\dfrac{x+4}{(x+1)^2}$
4. $\dfrac{2x+2}{x^2-2x+1}$
5. $\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$
6. $\dfrac{z}{z^3-z^2-6z}$
7. $\dfrac{t^2+8}{t^2-5t+6}$
8. $\dfrac{t^4+9}{t^4+9t^2}$

Egyszeres elsőfokú tényezők

Parciális törtekre bontással végezzük el az integrálást (9–16. feladatok)!

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x}$
11. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+5x-6}\,dx$
12. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-7x+12}\,dx$
13. $\displaystyle\int_4^8 \frac{y\,dy}{y^2-2y-3}$
14. $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{y+4}{y^2+y}\,dy$
15. $\displaystyle\int \frac{dt}{t^3+t^2-2t}$
16. $\displaystyle\int \frac{x+3}{2x^3-8x}\,dx$

Többszörös elsőfokú tényezők

Parciális törtekre bontással végezzük el az integrálást (17–20. feladatok)!

17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^2+2x+1}$
18. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^3\,dx}{x^2-2x+1}$
19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$
20. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)(x^2+2x+1)}$

Irreducibilis másodfokú tényezők

Parciális törtekre bontással végezzük el az integrálást (21–28. feladatok)!

21. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$
22. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2+t+4}{t^3+t}\,dt$
23. $\displaystyle\int \frac{y^2+2y+1}{(y^2+1)^2}\,dy$
24. $\displaystyle\int \frac{8x^2+8x+2}{(4x^2+1)^2}\,dx$
25. $\displaystyle\int \frac{2s+2}{(s^2+1)(s-1)^3}\,ds$
26. $\displaystyle\int \frac{s^4+81}{s(s^2+9)^2}\,ds$
27. $\displaystyle\int \frac{2\theta^3+5\theta^2+8\theta+4}{(\theta^2+2\theta+2)^2}\,d\theta$
28. $\displaystyle\int \frac{\theta^4-4\theta^3+2\theta^2-3\theta+1}{(\theta^2+1)^3}\,d\theta$

Maradékos polinomosztás

A 29–34. feladatokban az integrálandó racionális törtfüggvény számlálójának a fokszáma nagyobb vagy egyenlő mint a nevezőé. Végezzük el először a maradékos polinomosztást, bontsuk parciális törtekre a maradékot, és határozzuk meg az integrálokat!

29. $\displaystyle\int \frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}\,dx$
30. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2-1}\,dx$
31. $\displaystyle\int \frac{9x^3-3x+1}{x^3-x^2}\,dx$
32. $\displaystyle\int \frac{16x^3}{4x^2-4x+1}\,dx$
33. $\displaystyle\int \frac{y^4+y^2-1}{y^3+y}\,dy$
34. $\displaystyle\int \frac{2y^4}{y^3-y^2+y-1}\,dy$

Racionális törtfüggvényre vezető integrálok

Számítsuk ki a határozatlan integrálokat (35–40. feladatok)!

35. $\displaystyle\int \frac{e^t\,dt}{e^{2t}+3e^t+2}$
36. $\displaystyle\int \frac{e^{4t}+e^{2t}-e^t}{e^{2t}+1}\,dt$
37. $\displaystyle\int \frac{\cos y\,dy}{\sin^2 y+\sin y-6}$
38. $\displaystyle\int \frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta-2}$
39. $\displaystyle\int \frac{(x-2)^2\operatorname{arctg}2x-12x^3-3x}{(4x^2+1)(x-2)^2}\,dx$
40. $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2\operatorname{arctg}3x+9x^3+x}{(9x^2+1)(x+1)^2}\,dx$

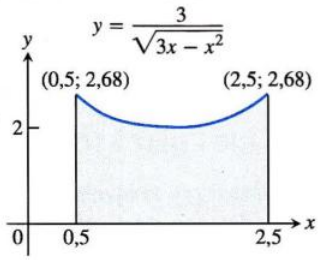
Kezdetiérték-feladatok

A 41–44. feladatokban keressük meg a megadott kezdetiérték-feladatot kielégítő $x(t)$ függvényt!

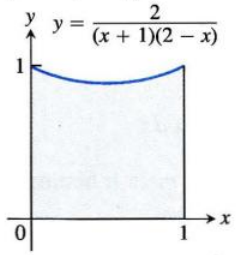
41. $(t^2-3t+2)\dfrac{dx}{dt}=1 \qquad (t>2), \qquad x(3)=0$
42. $(3t^4+4t^2+1)\dfrac{dx}{dt}=2\sqrt{3}, \qquad x(1)=-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{4}$
43. $(t^2+2t)\dfrac{dx}{dt}=2x+2 \qquad (t,x>0), \qquad x(1)=1$
44. $(t+1)\dfrac{dx}{dt}=x^2+1 \qquad (t>-1), \qquad x(0)=\dfrac{\pi}{4}$

További példák, alkalmazások

45. Térfogatszámítás: Tekintsük az $x=1/2$ és $x=5/2$ egyenesek, az x-tengely és az $y=3/\sqrt{3x-x^2}$ görbe által határolt síkidomot! Mekkora lesz a keletkező forgástest térfogata, ha a síkidomot megforgatjuk az x-tengely körül?



46. Térfogatszámítás: Tekintsük az $x = 0$ és $x = 1$ egyenesek, az x-tengely és az $y = 2/(x+1)(2-x)$ görbe által határolt síkidomot! Mekkora lesz a keletkező forgástest térfogata, ha a síkidomot megforgatjuk az y-tengely körül?

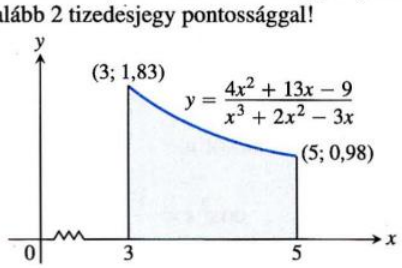


T 47. Súlypont: Tekintsük azt a síkidomot, amelyet az $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ és $y = 0$ egyenesek, illetve az $y = \operatorname{arctg} x$ görbe határol! Számoljuk ki a síkidom súlypontjának x koordinátáját legalább 2 tizedesjegy pontossággal!

T 48. Súlypont: Tekintsük azt a síkidomot, amelyet az $x = 3$, $x = 5$ és $y = 0$ egyenesek, illetve az

$$y = \frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x}$$

görbe határol! Számoljuk ki a síkidom súlypontjának x koordinátáját legalább 2 tizedesjegy pontossággal!



T 49. Pletyka terjedése: Megvizsgáljuk, hogy egy pletyka mekkora sebességgel terjed el egy adott populáción belül. Jelöljük $x(t)$-vel azon emberek számát, akiket a t időpillanatban már elért a pletyka! Ha a populáció elég nagy, akkor tekinthetjük $x(t)$-t az idő differenciálható függvényének. A tapasztalat azt mutatja, hogy a pletyka terjedési sebessége – azaz dx/dt – arányos a pletykát ismerő emberek és a pletykát még nem ismerő emberek számának szorzatával. Ez a következő differenciálegyenlethez vezet:

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x),$$

ahol N a populáció elemszáma, k pedig egy arányossági tényező. Tegyük fel, hogy t a napokban számolt időt méri, $k = 1/250$, $N = 1000$, és a pletykát 2 ember indítja el a $t = 0$-dik napon!

(a) Adjuk meg x-et t függvényeként!

(b) Mikor fog a populáció feléhez eljutni a pletyka? (Ez az a pillanat, amikor a pletyka terjedési sebessége a legnagyobb.)

T 50. Másodrendű kémiai reakció: Másodrendű reakciónak azt nevezzük, amikor két különböző molekula a reakció során átalakul egy harmadikká, amelyet terméknek nevezünk. A reakció sebessége általában a két kiindulási anyag koncentrációjától függ. Jelöljük a-val az A, b-vel a B anyag mennyiségét a $t = 0$ időpontban, és legyen $x(t)$ a termék anyag mennyisége a t időpillanatban. Ekkor $x(t)$ megváltozását a következő differenciálegyenlet írja le:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x),$$

vagy átrendezve

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}\frac{dx}{dt} = k,$$

ahol k a reakciótól függő konstans. Mindkét oldal integrálásával határozzuk meg az összefüggést x és t között, ha

(a) $a = b$,

(b) $a \neq b$!

Mindkét esetben feltehetjük, hogy $x(0) = 0$.

51. A $\pi \approx 22/7$ becslés pontossága:

(a) Számoljuk ki $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(x-1)^4}{x^2+1}\,dx$ értékét!

(b) Mennyire jó a $\pi \approx 22/7$ becslés? Hogy ezt megválaszolhassuk, számoljuk ki, hogy $\left(\frac{22}{7} - \pi\right)$ hány százaléka π-nek!

(c) Ábrázoljuk számítógéppel az $y = \dfrac{x^4(x-1)^4}{x^2+1}$ függvényt! Próbáljunk először 0 és 1 közé eső y értékeket kirajzoltatni, aztán 0 és 0,5 közöttit, illetve csökkentsük az ábrázolt részt akkorára, hogy már lássuk a függvény grafikonját! Mekkora lehet a függvény alatti terület?

52. Keressük meg azt a másodfokú $p(x)$ polinomot, amelyre $p(0) = 1$, $p'(0) = 0$, és az

$$\int \frac{p(x)}{x^3(x-1)^2}\,dx$$

primitív függvény racionális törtfüggvény lesz!

8.4. Trigonometrikus integrálok

Trigonometrikus függvényeken a hat trigonometrikus alapfüggvény (sin, cos, tg, ctg, sec, csc) algebrai kombinációival felírható függvényeket értjük. Minden ilyen függvény felírható csak szinuszok és koszinuszok használatával is, de gyakran gyorsabb és egyszerűbb a többi függvény használata. Például az

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$$

összefüggést

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{\sin x}{\cos x} + C$$

formában is írhatnánk, de az első forma egyszerűbb. Trigonometrikus integrálok kiszámításánál algebrai és trigonometrikus azonosságok használatával fogjuk az integrálandó függvényt jobban kezelhető alakra hozni.

Szinusz- és koszinuszhatványok szorzata

Tegyük fel, hogy

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

típusú integrálok kiszámítása a célunk, ahol m és n nemnegatív egész számok! Három esetet különböztetünk meg.

1. eset Ha $m = 2k+1$ páratlan szám, akkor a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ azonosságot alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\sin^m x = \sin^{2k+1} x = (\sin^2)^k \sin x = (1 - \cos^2 x)^k \sin x. \tag{8.10}$$

Kihasználva, hogy $\sin x$ éppen a $-\cos x$ függvény deriváltja, $\sin x \, dx$-et $-d(\cos x)$-szel egyenlővé téve elvégezhetjük az integrálást.

2. eset Ha m páros, de n páratlan, akkor hasonlóan járhatunk el: $n = 2k+1$ jelöléssel, a $\cos^2 x = 1 - \sin^2$ azonosságot alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\cos^n x = \cos^{2k+1} x = (\cos^2)^k \cos x = (1 - \sin^2 x)^k \cos x.$$

Kihasználva, hogy $\cos x$ éppen a $\sin x$ függvény deriváltja, $\cos x \, dx$-et $d(\sin x)$-szel egyenlővé téve integrálunk.

3. eset Ha m és n mindegyike páros, akkor a

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \tag{8.11}$$

azonosságok használatával az integrált $\cos 2x$ hatványainak integráljává alakítjuk.

1. PÉLDA: m páratlan

Számítsuk ki az

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x \, dx = \\
&= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x (-d(\cos x)) = && \sin x = -\frac{d\cos x}{dx} \\
&= \int (1 - u^2)(u^2)(-du) = && u = \cos x \\
&= \int (u^4 - u^2) du = \\
&= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \\
&= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.
\end{aligned}$$

□

2. PÉLDA: m páros, n páratlan

Számítsuk ki az $\int \cos^5 x \, dx$ határozatlan integrált!

Megoldás:

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) = \qquad \cos x = \frac{d\sin x}{dx}$$
$$= \int (1-u^2)^2 du = \qquad u = \sin x$$
$$= \int (1-2u^2+u^4) du =$$
$$= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C =$$
$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C. \qquad \square$$

3. PÉLDA: *m* **és** *n* **is páros**

Számítsuk ki az

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x - \int (\cos^2 2x+\cos^3 2x)\,dx\right).$$

A $\cos^2 2x$ integrálját így számoljuk tovább:

$$\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right). \qquad \text{a } +C \text{ konstanst elhagyhatjuk az utolsó lépésig}$$

A $\cos^3 2x$ függvény integrálját pedig így:

$$\int \cos^3 2x\,dx = \int (1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx = \qquad u = \sin 2x,\ du = 2\cos 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int (1-u^2)\,du =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\sin^3 2x\right). \qquad +C\text{-t ismét elhagyva}$$

Összegezve az előzőket és elvégezve az egyszerűsítéseket megkapjuk, hogy

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{3}\sin^3 2x\right) + C. \qquad \square$$

Négyzetgyökös kifejezés integrálása

A következő példában a $\cos^2\theta = (1+\cos 2\theta)/2$ azonosság használatával fogjuk eltüntetni a gyökjelet.

4. PÉLDA:

Számoljuk ki az

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 4x}\, dx$$

határozott integrált.

Megoldás: A négyzetgyököt akkor tudjuk eltüntetni, ha a gyök alatti kifejezést sikerül valaminek a négyzetévé alakítani. Ehhez a

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}, \qquad \text{vagy másképp} \qquad 1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$$

azonosságot fogjuk használni. A $\theta = 2x$ megfeleltetéssel az utóbbi

$$1+\cos 4x = 2\cos^2 2x$$

alakú lesz. Így

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 4x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2\cos^2 2x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sqrt{\cos^2 2x}\, dx =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} |\cos 2x|\, dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\, dx = \quad \begin{matrix}\cos 2x \geq 0, \text{ ha} \\ x \in [0, \pi/4]\end{matrix}$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-0) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad \square$$

$\mathrm{tg}\,x$ és $\sec x$ hatványainak integrálása

Azt már tudjuk, hogy hogyan integráljuk a tangens és szekáns függvényeket, és ezek négyzetét. Magasabb hatványaikat a $\mathrm{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ és $\sec^2 x = \mathrm{tg}^2 x + 1$ azonosságok használatával, és ahol szükség van a hatványkitevő csökkentésére, parciálisan fogjuk integrálni.

5. PÉLDA:

Számítsuk ki az

$$\int \mathrm{tg}^4 x\, dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

$$\int \mathrm{tg}^4 x\, dx = \int \mathrm{tg}^2 x \cdot \mathrm{tg}^2 x\, dx = \int \mathrm{tg}^2 x \cdot (\sec^2 x - 1)\, dx =$$

$$= \int \mathrm{tg}^2 x \sec^2 x\, dx - \int \mathrm{tg}^2 x\, dx =$$

$$= \int \mathrm{tg}^2 x \sec^2 x\, dx - \int (\sec^2 x - 1)\, dx =$$

$$= \int \mathrm{tg}^2 x \sec^2 x\, dx - \int \sec^2 x\, dx + \int dx.$$

Az első integrálnál alkalmazzuk az

$$u = \mathrm{tg}\,x, \qquad du = \sec^2 x\, dx$$

helyettesítést, amely után

$$\int u^2\, du = \frac{1}{3}u^3 + C_1.$$

A további primitív függvényeket azonnal meg tudjuk határozni, így

$$\int \mathrm{tg}^4 x\,dx = \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}\,x + x + C. \qquad \square$$

6. PÉLDA:

Számítsuk ki az

$$\int \sec^3 x\,dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás: Parciálisan integrálunk, az

$$u = \sec x, \qquad dv = \sec^2 x\,dx, \qquad v = \mathrm{tg}\,x, \qquad du = \sec x \mathrm{tg}\,x\,dx$$

szereposztással. Így

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\,dx &= \sec x \mathrm{tg}\,x - \int (\mathrm{tg}\,x)(\sec x \mathrm{tg}\,x\,dx) = \\ &= \sec x \mathrm{tg}\,x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\,dx = \qquad \mathrm{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 \\ &= \sec x \mathrm{tg}\,x + \int \sec x\,dx - \int \sec^3 x\,dx.\end{aligned}$$

Az egyenlőség két végét egyenletként felfogva, ha mindkét oldalhoz $\int \sec^3 x\,dx$-et adunk, azt kapjuk, hogy

$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \mathrm{tg}\,x + \int \sec x\,dx.$$

Innen

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \mathrm{tg}\,x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \mathrm{tg}\,x| + C. \qquad \square$$

Szinuszok és koszinuszok szorzata

Az

$$\int \sin(mx)\sin(nx)\,dx, \qquad \int \sin(mx)\cos(nx)\,dx, \qquad \int \cos(mx)\cos(nx)\,dx$$

típusú integrálok gyakran felmerülnek a matematikában és a természettudományok más területein is. Az egyik lehetőség, hogy többszöri parciális integrálással határozzuk meg a primitív függvényeiket. Egyszerűbb azonban a

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\Big(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\Big), \tag{8.12}$$

$$\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\Big(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\Big), \tag{8.13}$$

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\Big(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\Big) \tag{8.14}$$

azonosságok használata, amelyek az 1.6. részben tárgyalt összegzési képletekből következnek. Ezek használatával a fenti integrálok könnyebben integrálható formába alakulnak.

7. PÉLDA:

Számítsuk ki az

$$\int \sin 3x \cos 5x\,dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás: A (8.13) képletet $m = 3$ és $n = 5$ mellett alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \sin 3x \cos 5x\, dx &= \frac{1}{2}\int (\sin(-2x) + \sin 8x)\, dx = \\ &= \frac{1}{2}\int (\sin 8x - \sin 2x)\, dx = \\ &= -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C.\end{aligned}$$

□

8.4. Feladatok

Szinuszok és koszinuszok hatványai

Számoljuk ki a határozott integrálokat (1–14. feladatok)!

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\, dx$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^5 \frac{x}{2}\, dx$

3. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x\, dx$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} 3\cos^5 3x\, dx$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^7 y\, dy$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 7\cos^7 t\, dt$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi} 8\sin^4 x\, dx$

8. $\displaystyle\int_0^{1} 8\cos^4 2\pi x\, dx$

9. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 16\sin^2 x\cos^2 x\, dx$

10. $\displaystyle\int_0^{\pi} 8\sin^4 y\cos^2 y\, dy$

11. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 35\sin^4 x\cos^3 x\, dx$

12. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 2x\cos^2 2x\, dx$

13. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} 8\cos^3 2\theta \sin 2\theta\, d\theta$

14. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \cos^3 2\theta\, d\theta$

Négyzetgyökös kifejezések integrálása

Számoljuk ki a határozott integrálokat (15–22. feladatok)!

15. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\, dx$

16. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$

17. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 t}\, dt$

18. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos^2\theta}\, d\theta$

19. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}\, dx$

20. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x - 1}\, dx$

21. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \theta\sqrt{1-\cos 2\theta}\, d\theta$

22. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos^2 t)^{3/2}\, dt$

$\mathrm{tg}\, x$ és $\sec x$ hatványai

Számoljuk ki a határozott integrálokat (23–32. feladatok)!

23. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{0} 2\sec^3 x\, dx$

24. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^x \sec^3 e^x\, dx$

25. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^4\theta\, d\theta$

26. $\displaystyle\int_0^{\pi/12} 3\sec^4 3x\, dx$

27. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^4\theta\, d\theta$

28. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} 3\csc^4 \frac{\theta}{2}\, d\theta$

29. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} 4\,\mathrm{tg}^3 x\, dx$

30. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 6\,\mathrm{tg}^4 x\, dx$

31. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \mathrm{ctg}^3 x\, dx$

32. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} 8\,\mathrm{ctg}^4 t\, dt$

Szinuszok és koszinuszok szorzata

Számoljuk ki a határozott integrálokat (33–38. feladatok)!

33. $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \sin 3x\cos 2x\, dx$

34. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin 2x\cos 3x\, dx$

35. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x\sin 3x\, dx$

36. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\cos x\, dx$

37. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos 3x\cos 4x\, dx$

38. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\cos 7x\, dx$

További példák és feladatok

39. Felszínszámítás: Megforgatjuk az

$$x = t^{2/3}, \qquad y = t^2/2, \qquad 0 \le t \le 2$$

egyenletű ívet az x-tengely körül. Mekkora az ív által súrolt palást felszíne?

40. Ívhossz: Mennyi az $y = \ln(\cos x)$, $0 \le x \le \pi/3$ görbe ívhossza?

41. Ívhossz: Mennyi az $y = \ln(\sec x)$, $0 \le x \le \pi/4$ görbe ívhossza?

42. Súlypont: Határozzuk meg az x-tengely, az $y = \sec x$ görbe és az $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$ egyenesek által közrefogott síkidom súlypontját!

43. Térfogatszámítás: Mekkora a térfogata annak a testnek, melyet a $\sin x$ függvény két szomszédos nullhelye közé eső részének x-tengely körüli megforgatásával kapunk?

44. Területszámítás: Mekkora területet fog közre az x-tengely és az $y = \sqrt{1+\cos 4x}$, $0 \le x \le \pi$ görbe?

45. Ortogonális függvények: Azt mondjuk, hogy az f és g függvények **ortogonálisak** az $[a,b]$ intervallumon, ha $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$.

(a) Bizonyítsuk be, hogy ha $m^2 \neq n^2$, akkor a $\sin mx$ és $\sin nx$ ortogonálisak a $[0, 2\pi]$ intervallumon!

(b) Lássuk be, hogy ugyanez igaz a $\cos mx$ és $\cos nx$ függvényekre is!

(c) Lássuk be, hogy ugyanez igaz a $\sin mx$ és $\cos nx$ függvényekre, még akkor is, ha $m = n$!

46. Fourier–sorok: Az

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin nx$$
$$= a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_N \sin Nx$$

képlettel definiált függvényt véges Fourier–sornak nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy az a_n együtthatóra érvényes az

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\,dx$$

egyenlőség!

8.5. Trigonometrikus helyettesítések

Ha a $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ vagy $\sqrt{x^2-a^2}$ függvény integrálját szeretnénk kiszámolni, akkor x helyébe valamelyik trigonometrikus függvény helyettesítésével juthatunk eredményre.

Három gyakori trigonometrikus helyettesítés

A három leggyakrabban használt helyettesítés az $x = a\operatorname{tg}\theta$, $x = a\sin\theta$ és az $x = a\sec\theta$. Ezeket a 8.2. ábrán szemléltetjük.
Az $x = a\operatorname{tg}\theta$ helyettesítéssel

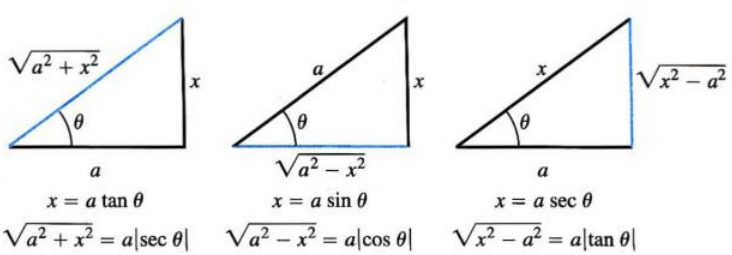
$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2\operatorname{tg}^2\theta = a^2(1+\operatorname{tg}^2\theta) = a^2\sec^2\theta,$$

az $x = a\sin\theta$ helyettesítéssel

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2\sin^2\theta = a^2(1-\sin^2\theta) = a^2\cos^2\theta,$$

az $x = a\sec\theta$ helyettesítéssel pedig

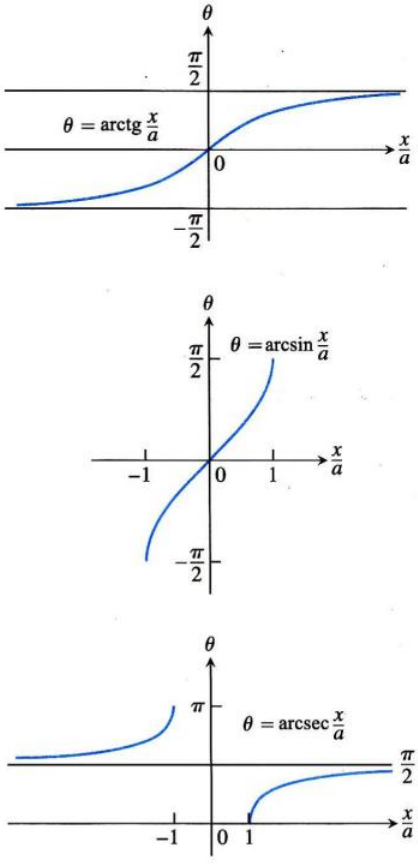
$$x^2 - a^2 = a^2\sec^2\theta - a^2 = a^2(\sec^2\theta - 1) = a^2\operatorname{tg}^2\theta.$$



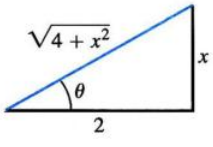
8.2. ÁBRA: Az x és a oldalhosszúságú segédháromszögekről leolvashatjuk, hogy melyik mennyiség mivé alakul a helyettesítés során.

Általában a helyettesítésektől megköveteljük, hogy visszafordíthatóak legyenek, hogy az integrál kiszámolása során vissza tudjunk térni az eredeti változóra. Például, ha az $x = a\operatorname{tg}\theta$ helyettesítéssel dolgozunk, vissza szeretnénk írni θ helyére a $\theta = \operatorname{arctg}(x/a)$ függvényt az integrálás elvégzése után. Ha $x = a\sin\theta$ volt a helyettesítés, akkor $\theta = \arcsin(x/a)$-ra lesz szükségünk, és hasonlót követelünk meg az $x = a\sec\theta$ helyettesítés esetén is.

Ahogy a 7.7. részből tudjuk, ezeknek a függvényeknek nem létezik egyértelmű inverze, csak akkor, ha θ értékét valamely intervallumra korlátozzuk.



8.3. ÁBRA: Az $\operatorname{arctg}(x/a)$, $\arcsin(x/a)$ és $\operatorname{arcsec}(x/a)$ függvények.



8.4. ÁBRA: Az $x = 2\operatorname{tg}\theta$ helyettesítéshez tartozó segédháromszög. Az ábráról leolvasható, hogy

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{2} \quad \text{és} \quad \sec\theta = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}.$$

(Lásd a 8.3. ábrát!) Ezért, miután kiválasztjuk a megfelelő helyettesítést, leszűkítjük θ értékét a következő intervallumokra:

$$x = a\operatorname{tg}\theta \quad \text{esetén} \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}, \quad \text{és legyen} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$x = a\sin\theta \quad \text{esetén} \quad \theta = \arcsin\frac{x}{a}, \quad \text{és legyen} \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},$$

$$x = a\sec\theta \quad \text{esetén} \quad \theta = \operatorname{arcsec}\frac{x}{a}, \quad \text{és legyen} \quad \begin{cases} 0 \le \theta < \frac{\pi}{2} \text{ ha } \frac{x}{a} \ge 1, \\ \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi \text{ ha } \frac{x}{a} \le -1. \end{cases}$$

Azért, hogy az $x = a\sec\theta$ helyettesítés esetén egyszerűbb dolgunk legyen, csak olyankor fogjuk ezt használni, amikor $x/a \ge 1$. Ez esetben θ értékét $\theta \in [0, \pi/2]$-re korlátozzuk, és így $\operatorname{tg}\theta \ge 0$ lesz. Ekkor $\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\theta} = |a\operatorname{tg}\theta| = a\operatorname{tg}\theta$, a legutóbbi egyenlőségnél feltéve, hogy $a > 0$.

1. PÉLDA: Az $x = a\operatorname{tg}\theta$ helyettesítés

Számítsuk ki az

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$$

határozatlan integrált!

Megoldás: Legyen

$$x = 2\operatorname{tg}\theta, \qquad dx = 2\sec^2\theta\, d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}!$$

A gyökjel alatti kifejezés a nevezőben így alakul:

$$4 + x^2 = 4 + 4\operatorname{tg}^2\theta = 4(1 + \operatorname{tg}^2\theta) = 4\sec^2\theta.$$

A helyettesítést végrehajtva megkapjuk, hogy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{|\sec\theta|} = \qquad \sqrt{\sec^2\theta} = |\sec\theta|$$

$$= \int \sec\theta\, d\theta = \qquad \sec\theta > 0, \text{ ha } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$= \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C = \qquad \text{a 8.4. ábrából}$$

$$= \ln|\sqrt{4+x^2} + x| + C'. \qquad \text{ahol } C' = C - \ln 2$$

Figyeljük meg, hogy hogyan írtuk vissza a $\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|$ primitív függvényt x függvényévé! Felrajzoltuk az $x = 2\operatorname{tg}\theta$ helyettesítéshez tartozó segédháromszöget (8.4. ábra), és onnan leolvastuk a megfelelő szögfüggvények x-szel kifejezett értékét. □

2. PÉLDA: Az $x = a\sin\theta$ helyettesítés

Számítsuk ki az

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

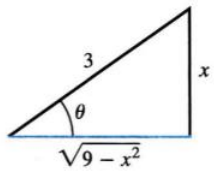
határozatlan integrált!

Megoldás: Legyen

$$x = 3\sin\theta, \qquad dx = 3\cos\theta\, d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

ekkor

$$9 - x^2 = 9 - 9\sin^2\theta = 9(1 - \sin^2\theta) = 9\cos^2\theta.$$



8.5. ÁBRA: Az $x = 3\sin\theta$ helyettesítéshez tartozó segédháromszög. Az ábráról leolvasható, hogy

$$\sin\theta = \frac{x}{3} \quad \text{és} \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}.$$

A helyettesítést végrehajtva:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{9\sin^2\theta \cdot 3\cos\theta\,d\theta}{|3\cos\theta|} =$$

$$= 9\int \sin^2\theta\,d\theta = \qquad \cos\theta > 0, \text{ ha } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$= 9\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta =$$

$$= \frac{9}{2}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{9}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta) + C = \qquad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{9}{2}\left(\arcsin\frac{x}{3} - \frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right) + C = \qquad \text{lásd a 8.5. ábrát}$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{x}{3}\sqrt{9-x^2} + C. \qquad \square$$

3. PÉLDA: Az $x = a\sec\theta$ helyettesítés

Számítsuk ki az

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}}, \qquad x > \frac{2}{5}$$

határozatlan integrált!

Megoldás: Emeljük ki a nevezőből az x^2 együtthatóját, hogy $x^2 - a^2$ típusú kifejezést kapjunk a gyökjel alatt:

$$\sqrt{25x^2-4} = \sqrt{25\left(x^2 - \frac{4}{25}\right)} = 5\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2}.$$

Alkalmazzuk az

$$x = \frac{2}{5}\sec\theta, \qquad dx = \frac{2}{5}\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

helyettesítést! Ekkor

$$x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}\sec^2\theta - \frac{4}{25} =$$

$$= \frac{4}{25}(\sec^2\theta - 1) = \frac{4}{25}\,\mathrm{tg}^2\,\theta,$$

azaz

$$\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}|\mathrm{tg}\,\theta| = \frac{2}{5}\,\mathrm{tg}\,\theta. \qquad \mathrm{tg}\,\theta > 0, \text{ ha } 0 < \theta < \pi/2$$

Végrehajtva a helyettesítést, az előzőek alapján azt kapjuk, hogy

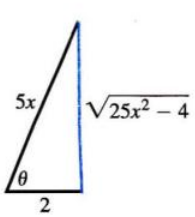
$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}} = \int \frac{dx}{5\sqrt{x^2-(4/25)}} =$$

$$= \int \frac{(2/5)\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta}{5\cdot(2/5)\,\mathrm{tg}\,\theta} =$$

$$= \frac{1}{5}\int \sec\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{5}\ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta| + C =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{25x^2-4}}{2}\right| + C. \qquad \text{lásd a 8.6. ábrát} \qquad \square$$



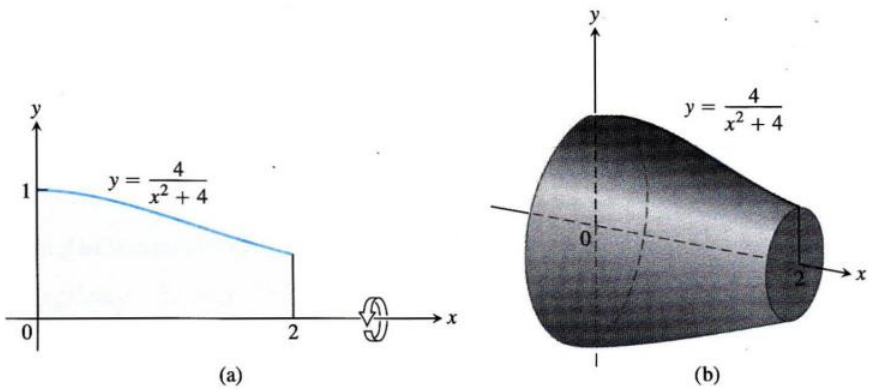
8.6. ÁBRA: Az $x = (2/5)\sec\theta, 0 < \theta < \pi/2$ helyettesítéshez tartozó segédháromszög. $\theta = \mathrm{arcsec}(5x/2)$, és az ábráról leolvasható $\sec\theta$ és $\mathrm{tg}\,\theta$ értéke is.

Ha az integrálandó kifejezésben x^2+a egész kitevős hatványa szerepel, akkor sokszor segíthet egy jól megválasztott trigonometrikus helyettesítés, mint ahogy a következő példánál látni is fogjuk.

4. PÉLDA: **Megforgatott síkidom által meghatározott térfogat**

Forgassuk meg az $y = 4/(x^2+4)$ görbe, az x-tengely és az $x=0$, $x=2$ egyenesek által határolt síkidomot az x-tengely körül! Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

Megoldás: Felvázoltuk a síkidomot és a forgástestet a 8.7. ábrán. A térfogat



8.7. ÁBRA: A 4. példában szereplő síkidom (a) és a keletkező forgástest (b).

kiszámításának a képlete

$$V = \int_0^2 \pi (R(x))^2\,dx = 16\pi \int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^2}. \qquad R(x) = \frac{4}{x^2+4}$$

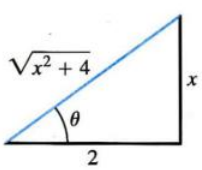
Az integrált az

$$x = 2\operatorname{tg}\theta, \qquad dx = 2\sec^2\theta\,d\theta, \qquad \theta = \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$$

helyettesítéssel fogjuk kiszámolni. Ekkor a nevezőben

$$x^2+4 = 4\operatorname{tg}^2\theta + 4 = 4(\operatorname{tg}^2\theta + 1) = 4\sec^2\theta$$

lesz. A helyettesítéshez tartozó segédháromszög a 8.8. ábrán látható. A térfogat kiszámítása:



8.8. ÁBRA: Az $x = 2\operatorname{tg}\theta$ helyettesítéshez tartozó segédháromszög.

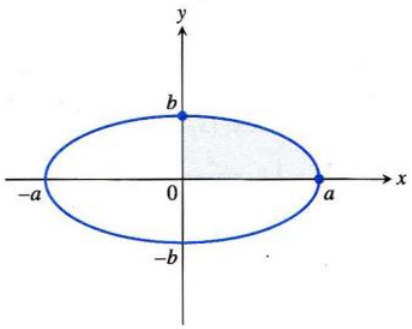
$$V = 16\pi \int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^2} =$$

$$= 16\pi \int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{(4\sec^2\theta)^2} = \qquad \theta = 0, \text{ amikor } x = 0;\ \theta = \pi/4, \text{ amikor } x = 2$$

$$= 16\pi \int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{16\sec^4\theta} = \pi \int_0^{\pi/4} 2\cos^2\theta\,d\theta =$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} (1+\cos 2\theta)\,d\theta = \pi \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} = \qquad 2\cos^2\theta = 1+\cos 2\theta$$

$$= \pi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) \approx 4{,}04. \qquad \square$$



8.9. ÁBRA: Az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ egyenletű ellipszis az 5. példából.

5. PÉLDA: **Ellipszis területe**

Mennyi az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

egyenletű ellipszis területe?

Megoldás: Mivel az ellipszis szimmetrikus a két koordinátatengelyre, a területe (A) négyszerese a pozitív síknegyedbe eső része területének. Fejezzük ki y-t $y \geq 0$ mellett az ellipszis egyenletéből!

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2},$$

vagyis

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \qquad 0 \leq x \leq a.$$

Az ellipszis területe:

$$A=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$$

$$=4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a\cos\theta \cdot a\cos\theta\,d\theta= \qquad \begin{array}{l} x=a\sin\theta, \\ dx=a\cos\theta\,d\theta \\ \theta=0, \text{ amikor } x=0; \\ \theta=\pi/2, \text{ amikor } x=a \end{array}$$

$$=4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta=$$

$$=4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta=$$

$$=2ab\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}=$$

$$=2ab\left(\frac{\pi}{2}+0-0\right)=\pi ab.$$

Megjegyezzük, hogy $a=b=r$ esetén kijön a jól ismert képlet: az r sugarú kör területe $r^2\pi$. □

8.5. Feladatok

Trigonometrikus helyettesítések

Számítsuk ki az integrálokat (1–28. feladatok)!

1. $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{9+y^2}}$

2. $\displaystyle\int \frac{3\,dy}{\sqrt{1+9y^2}}$

3. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$

4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{8+2x^2}$

5. $\displaystyle\int_0^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

6. $\displaystyle\int_0^{1/2\sqrt{2}} \frac{2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

7. $\displaystyle\int \sqrt{25-t^2}\,dt$

8. $\displaystyle\int \sqrt{1-9t^2}\,dt$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-49}}, \quad x>\frac{7}{2}$

10. $\displaystyle\int \frac{5\,dx}{\sqrt{25x^2-9}}, \quad x>\frac{3}{5}$

11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{y^2-49}}{y}\,dy, \quad y>7$

12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{y^2-25}}{y^3}\,dy, \quad y>5$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}, \quad x>1$

14. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}, \quad x>1$

15. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

17. $\displaystyle\int \frac{8\,dw}{w^2\sqrt{4-w^2}}$

18. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-w^2}}{w^2}\,dw$

19. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2\,dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

20. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}}$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}, \quad x>1$

22. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-1)^{5/2}}, \quad x>1$

23. $\displaystyle\int \frac{(1-x^2)^{3/2}}{x^6}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{(1-x^2)^{1/2}}{x^4}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{8\,dx}{(4x^2+1)^2}$

26. $\displaystyle\int \frac{6\,dt}{(9t^2+1)^2}$

27. $\displaystyle\int \frac{v^2\,dv}{(1-v^2)^{5/2}}$

28. $\displaystyle\int \frac{(1-r^2)^{5/2}}{r^8}\,dr$

A 29–36. feladatokban az integrálokat előbb egy egyszerűsítő, majd egy trigonometrikus helyettesítést alkalmazva számítsuk ki!

29. $\int_0^{\ln 4} \frac{e^t\,dt}{\sqrt{e^{2t}+9}}$ **30.** $\int_{\ln(3/4)}^{\ln(4/3)} \frac{e^t\,dt}{(1+e^{2t})^{3/2}}$

31. $\int_{1/12}^{1/4} \frac{2\,dt}{\sqrt{t}+4t\sqrt{t}}$ **32.** $\int_1^e \frac{dy}{y\sqrt{1+(\ln y)^2}}$

33. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ **34.** $\int \frac{dx}{1+x^2}$

35. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$ **36.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Kezdetiérték-feladatok

A 37–40. feladatokban keressük meg a megadott kezdetiérték-feladatot kielégítő $y(x)$ függvényt!

37. $x\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2-4}, \quad x \geq 2, \quad y(2) = 0$

38. $\sqrt{x^2-9}\frac{dy}{dx} = 1, \quad x > 3, \quad y(5) = \ln 3$

39. $(x^2+4)\frac{dy}{dx} = 3, \quad y(2) = 0$

40. $(x^2+1)^2\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2+1}, \quad y(0) = 1$

Alkalmazások

41. Területszámítás: Számítsuk ki, hogy az $y = (1/3)\sqrt{9-x^2}$ görbe és a koordinátatengelyek mekkora területet határolnak a pozitív síknegyedben!

42. Térfogatszámítás: Tekintsük a pozitív síknegyedben a koordinátatengelyek, az $y = 2/(1+x^2)$ görbe és az $x = 1$ egyenes által határolt síkidomot! Mekkora lesz a keletkező forgástest térfogata, ha a síkidomot megforgatjuk az x-tengely körül?

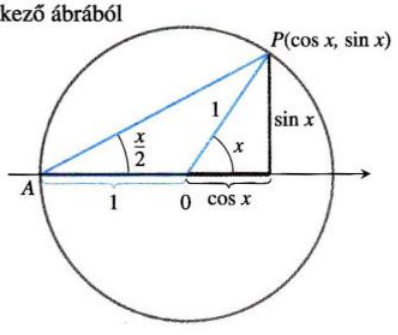
A $\operatorname{tg}(x/2) = z$ helyettesítés

A

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z \tag{8.15}$$

helyettesítés segítségével a $\sin x$-eket és $\cos x$-eket tartalmazó integrálok z racionális törtfüggvényének az integráljává alakíthatóak, amelyet parciális törtekké bontással tudunk kiszámolni.

A következő ábrából



leolvasható a

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

összefüggés. Azért, hogy lássuk hogyan viselkedik a helyettesítés, elvégezzük a következő számolásokat:

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{\sec^2(x/2)} - 1 =$$

$$= \frac{2}{2+\operatorname{tg}^2(x/2)} - 1 = \frac{2}{1+z^2} - 1,$$

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \tag{8.16}$$

illetve

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sec^2(x/2)} = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)},$$

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}. \tag{8.17}$$

Végül $x = 2\operatorname{arctg} z$, ahonnan

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}. \tag{8.18}$$

Példák a $\operatorname{tg}(x/2) = z$ helyettesítésre

(a)
$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{1+z^2}{2}\,\frac{2\,dz}{1+z^2} =$$
$$= \int dz = z + C = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

(b)
$$\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx = \int \frac{1+z^2}{2+2z+2z^2}\,\frac{2\,dz}{1+z^2} =$$
$$= \int \frac{dz}{z^2+z+1} =$$
$$= \int \frac{dz}{(z+(1/2))^2+3/4} =$$
$$= \int \frac{du}{u^2+a^2} =$$
$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}} + C =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}} + C.$$

A (8.15)–(8.18) egyenlőségeket használva számoljuk ki a 43–50. feladatokban szereplő integrálokat! (Ilyen integrálok lépnek fel, amikor egy kardáncsuklónál a hajtott tengely átlagos szögsebességét szeretnénk kiszámolni, feltéve, hogy a hajtó és hajtott tengelyek nem párhuzamosak.)

43. $\int \frac{dx}{1-\sin x}$ **44.** $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

45. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$ **46.** $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos x}$

47. $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ **48.** $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin\theta\cos\theta+\sin\theta}$

49. $\int \frac{dt}{\sin t-\cos t}$ **50.** $\int \frac{\cos t\,dt}{1-\cos t}$

Határozzuk meg az 51–52. feladatokban szereplő határozatlan integrálokat a $\operatorname{tg}(\theta/2) = z$ helyettesítés segítségével!

51. $\int \sec\theta\,d\theta$ **52.** $\int \csc\theta\,d\theta$

8.6. Integráltáblázatok és matematikai programcsomagok

Az eddigiek során arra törekedtünk, hogy helyettesítéssel és parciális integrálással az integrált „egyszerűbb" alakra hozzuk. Olyan alakra, amelynek fejből tudjuk az integrálját, vagy esetleg olyanra, amelynek az integrálját kikereshetjük egy integráltáblázatból. Ilyen integráltáblázatot úgy készíthetünk, hogy a gyakran felmerülő integrálokat helyettesítéssel és parciális integrálással kiszámoljuk, illetve az alkalmazásokban fontos függvényeket deriváljuk, és a kapott eredményeket a 8.1. táblázathoz hasonló módon összegyűjtjük. Ezek után, ha ki szeretnénk számolni egy integrált, akkor először megnézzük, hogy szerepel-e a táblázatban. Ha nem, akkor megpróbáljuk helyettesítéssel, algebrai átalakításokkal, trigonometriai összefüggések használatával visszavezetni a táblázatban szereplő egyik integrálra.

Ha az integrált így sem sikerül saját erőnkből kiszámolni, megpróbálhatjuk valamelyik matematikai program segítségével is. Figyeljünk azonban arra, hogy vannak viszonylag egyszerű függvények, mint például a $\sin(x^2)$ vagy az $1/\ln x$ függvény, amelyek primitív függvényét számítógéppel sem tudjuk meghatározni! Ennek az az oka, hogy ezen függvényeknek a primitív függvénye bár létezik, képlettel nem írható le.

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy hogyan használhatóak primitív függvény meghatározására az integráltáblázatok és számítógépes programok.

Integráltáblázatok

A kötet végén, a névmutató után közlünk egy rövid integráltáblázatot. (Részletesebb táblázatot, amely akár több ezer primitív függvényt is tartalmaz, erről szóló speciális könyvekben találhatunk.) A képletekben, hogy a lehető legáltalánosabbak legyenek, a,b,c,m,n-nel jelölt paraméterek szerepelnek. Ezek értéke tetszőleges szám lehet, nem szükséges, hogy egészek vagy pozitívak legyenek. Ha mégis szükség van valamilyen megkötésre, ezt a képlet mellett feltüntettük. Például az 5. képletben $n \neq -1$, a 11.-ben $n \neq 2$ a feltétel.

A képletekben előírjuk azt is, hogy a konstansok olyanok legyenek, hogy ne kelljen 0-val osztani, vagy negatív számnak páros gyökét venni. Például a 8. képletben $a \neq 0$ a feltétel, a 13(a) és 13(b) formulákat csak pozitív b esetén lehet használni.

Az 1–5. példákban szereplő feladatok megoldhatóak algebrai átalakítások, helyettesítések és parciális integrálás használatával is. Itt most megmutatjuk, hogy hogyan lehet megoldani őket a kötet végén található integráltáblázat segítségével.

1. PÉLDA:

Számoljuk ki az

$$\int x(2x+5)^{-1}\,dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás: Használjuk az integráltáblázat 8. képletét (ne a 7.-et, ahhoz ugyanis $n \neq -1$ kellene), amely szerint:

$$\int x(ax+b)^{-1}\,dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C.$$

Ha $a = 2$ és $b = 5$, akkor

$$\int x(2x+5)^{-1}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{5}{4}\ln|2x+5| + C. \qquad \square$$

2. PÉLDA:

Számoljuk ki az

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+4}}$$

határozatlan integrált!

Megoldás: A 13(b) képlet szerint

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}} \right| + C, \quad \text{ha } b > 0.$$

Az $a = 2$ és $b = 4$ konstansokat behelyettesítve

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+4}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \ln \left| \frac{\sqrt{2x+4}-\sqrt{4}}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{4}} \right| + C =$$
$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2x+4}-2}{\sqrt{2x+4}+2} \right| + C. \qquad \square$$

A 13(a) képletet, amely $b < 0$ esetén működik, nem használhattuk a 2. példa megoldásához. A következő feladatban viszont épp erre lesz szükségünk.

3. PÉLDA:

Számoljuk ki az

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}}$$

határozatlan integrált!

Megoldás: A 13(a) képlet így szól:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax-b}} = \frac{2}{\sqrt{b}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ax-b}{b}} + C \quad \text{ha } b > 0.$$

Az $a = 2$ és $b = 4$ helyettesítéssel

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}} = \frac{2}{\sqrt{4}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2x-4}{4}} + C = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C. \qquad \square$$

4. PÉLDA:

Számoljuk ki az

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}}$$

határozatlan integrált!

Megoldás: A 15. képletet fogjuk használni:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C.$$

Ha $a = 2$ és $b = -4$, akkor

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = -\frac{\sqrt{2x-4}}{-4x} + \frac{2}{2 \cdot 4} \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}} + C.$$

A bal oldali integrált a 3. példához hasonlóan a 13(a) képlettel számoljuk ki. Így

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = \frac{\sqrt{2x-4}}{4x} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C. \qquad \square$$

5. PÉLDA:

Számoljuk ki az

$$\int x\arcsin x\,dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás: A 99. képlet szerint:

$$\int x^n \arcsin ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\arcsin ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1-a^2x^2}}, \qquad n \neq -1.$$

Ha $n = 1$ és $a = 1$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\int x\arcsin x\,dx = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

A jobb oldali integrált a 33. képletben találhatjuk meg:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Az $a = 1$ helyettesítéssel

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

Összerakva az eredményeinket:

$$\int x\arcsin x\,dx = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C\right) =$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C'. \qquad \square$$

Redukciós formulák

A többszöri parciális integrálás helyett gyorsabban célhoz érhetünk a következő redukciós formulák használatával:

$$\int \mathrm{tg}^n\,dx = \frac{1}{n-1}\mathrm{tg}^{n-1}x - \int \mathrm{tg}^{n-2}x\,dx, \tag{8.19}$$

$$\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx, \tag{8.20}$$

$$\int \sin^n x\cos^m x\,dx =$$
$$= -\frac{\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2}x\cos^m x\,dx \quad (n \neq -m). \tag{8.21}$$

Az ilyen képleteket azért nevezik **redukciós formuláknak**, mert olyan integrált, amelyben egy függvény hatványa szerepel, egy ugyanolyan szerkezetű, de a függvény alacsonyabb hatványát tartalmazó integrálra vezet vissza. Egy ilyen képlet többszöri használatával a kérdéses hatványt olyan alacsonyra csökkenthetjük, hogy az integrál már közvetlenül meghatározható lesz.

6. PÉLDA: **Egy redukciós formula használata**

Számítsuk ki az

$$\int \mathrm{tg}^5 x\,dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás: A (8.19) redukciós formulát $n = 5$ mellett felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int \mathrm{tg}^5 x\,dx = \frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x - \int \mathrm{tg}^3 x\,dx.$$

A megmaradó integrál kiszámolásához újra a (8.19) képletet használjuk, $n = 3$ mellett:

$$\int \mathrm{tg}^3 x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x - \int \mathrm{tg}\, x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

Ezek alapján

$$\int \mathrm{tg}^5 x\,dx = \frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x - \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C'. \qquad \square$$

Ahogy a szerkezetük alapján sejthetjük, a redukciós formulák általában parciális integrálással keletkeznek.

7. PÉLDA: **Egy redukciós formula levezetése**

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n pozitív egész szám esetén

$$\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx!$$

Megoldás: Parciálisan integrálunk az

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

képlet alapján, amelyben

$$u = (\ln x)^n, \qquad du = n(\ln x)^{n-1}\frac{dx}{x}, \qquad dv = dx, \qquad v = x.$$

Ezzel megkapjuk a keresett

$$\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$$

összefüggést. $\square$

Néha két redukciós formulát kell használnunk egymás után.

8. PÉLDA:

Számítsuk ki az

$$\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$$

határozatlan integrált!

Megoldás: A (8.21) képletet használjuk, $n = 2$ és $m = 3$ mellett. Ezzel

$$\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx = -\frac{\sin x\cos^4 x}{2+3} + \frac{1}{2+3}\int \sin^0 x\cos^3 x\,dx =$$
$$= -\frac{\sin x\cos^4 x}{5} + \frac{1}{5}\int \cos^3 x\,dx.$$

A jobb oldalon maradó integrált az integráltáblázat 61. képletével (amely szintén egy redukciós formula) számoljuk tovább. A 61. képlet szerint:

$$\int \cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1} ax\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\,dx.$$

Erre $n = 3$ és $a = 1$ mellett van szükségünk:

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{\cos^2 x\sin x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x\,dx =$$
$$= \frac{\cos^2 x\sin x}{3} + \frac{2}{3}\sin x + C.$$

Ezek alapján

$$\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx = -\frac{\sin x\cos^4 x}{5} + \frac{1}{5}\left(\frac{\cos^2 x\sin x}{3} + \frac{2}{3}\sin x + C\right) =$$
$$= -\frac{\sin x\cos^4 x}{5} + \frac{\cos^2 x\sin x}{15} + \frac{2}{15}\sin x + C'.$$

Második megoldás. Az integráltáblázat egy másik képletét is alkalmazhatjuk, a 69.-et. Az $a = 1$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\int \sin^n x\cos^m x\,dx = \frac{\sin^{n+1} x\cos^{m-1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^n x\cos^{m-2} x\,dx.$$

A mi esetünkben $n = 2$ és $m = 3$, amellyel

$$\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx = \frac{\sin^3 x\cos^2 x}{5} + \frac{2}{5}\int \sin^2 x\cos x\,dx =$$
$$= \frac{\sin^3 x\cos^2 x}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{\sin^3 x}{3}\right) + C =$$
$$= \frac{\sin^3 x\cos^2 x}{5} + \frac{2}{15}\sin^3 x + C.$$

Láthattuk, hogy a 96. képlet alkalmazásával hamarabb kaptuk meg az eredményt. Sajnos általában nem tudjuk előre megmondani, hogy melyik módszer milyen gyorsan vezet a megoldáshoz, így nem célszerű túl sok időt tölteni azzal, hogy a „legjobb" formulát megkeressük. Válasszunk ki egy módszert, amely valószínűleg működni fog, és vágjunk bele!

Figyeljük meg, hogy a két megoldás máshogy kinéző primitív függvényeket adott eredményül. Ez gyakran előfordul trigonometrikus függvényeket tartalmazó integrálok esetén. A két függvény valójában azonos, és azt használhatjuk, amelyik jobban megfelel a további céljainknak. □

Nem elemi integrálok

Amikor megjelentek azok a számítógépes programok, amelyek szimbolikus műveletekkel képesek meghatározni egy függvény primitív függvényét, gyakorlati jelentősége lett annak a kérdésnek, hogy melyek azok a függvények, amelyek primitív függvényét fel lehet írni elemi függvények (azon függvények, amelyekkel itt foglalkozunk) segítségével, és melyek azok, amelyekét nem. Azokat az integrálokat, amelyeknél az integrandusnak nincs elemi primitív függvénye, **nem elemi integráloknak** nevezzük. Az ilyen függvények integrálását végtelen sorokkal vagy numerikus módszerekkel próbálhatjuk meg. Például ilyen nem elemi integrál szerepel a Gauss–féle hibafüggvényben:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt,$$

vagy a gépészetben és fizikában fontos

$$\int \sin x^2\,dx \qquad \text{és} \qquad \int \sqrt{1+x^4}\,dx$$

integrálokban. Ezek, és még jó néhány más, nem elemi integrál, mint például az

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx, \qquad \int e^{(e^x)}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx, \qquad \int \ln(\ln x)\,dx, \qquad \int \frac{\sin x}{x}\,dx,$$
$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx \quad 0 < k < 1$$

integrálok annyira ártatlanul néznek ki, hogy gyanakvás nélkül nekiállnánk kiszámolni a primitív függvényüket. Azonban bebizonyították, hogy ezen függvények primitív függvénye nem írható le elemi függvények véges kombinációi segítségével. Ez persze igaz minden olyan integrálra is, amely helyettesítéssel ezek egyikévé alakítható. Tehát ezek az integrálok nem elemiek, pedig – mivel az integrandusok az értelmezési tartományukon folytonosak – az integrálszámítás alaptétele szerint a határozatlan integráljuk létezik.

Ez a fejezet egyetlen olyan integrálszámítási feladatot sem tartalmaz, amelyben nem elemi integrált kéne kiszámolni, de a munkánk során találkozhatunk ilyenekkel is.

Integrálás számítógéppel

A matematikai programcsomagok általában képesek szimbolikusan integrálni, azaz meghatározni egy függvény határozatlan integrálját. Az, hogy szintaktikailag hogyan kell beírni a függvényt, illetve hogy mi az integrált kiszámító parancs, az programfüggő (például **int** a Maple-ben, **Integrate** a Mathematicaban). Mi a példáink során a Maple 5.1 használatát mutatjuk be, majd a fejezet végén közöljük a Mathematica megfelelő parancsait is.

9. PÉLDA: **Egy f függvény megadása, majd integrálása a Maple-lel**

A következő függvény határozatlan integrálját szeretnénk kiszámolni:

$$f(x) = x^2\sqrt{a^2+x^2}.$$

Először definiáljuk az f függvényt a Maple számára:

```
> f:=x^2*sqrt(a^2+x^2);
```

Most kiadjuk az integráló parancsot az f függvényre kijelölve az integrációs változót is:

```
> int(f,x);
```

A Maple azt válaszolja, hogy

$$\frac{1}{4}x(a^2+x^2)^{3/2} - \frac{1}{8}a^2x\sqrt{a^2+x^2} - \frac{1}{8}a^4\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right).$$

Érdemes megnézni, hogy a választ lehet-e tovább egyszerűsíteni. Írjuk be, hogy

```
> simplify(%);
```

A Maple válasza:

$$\frac{1}{8}a^2x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{1}{4}x^3\sqrt{a^2+x^2} - \frac{1}{8}a^4\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right).$$

Ha a függvény $[0,\ \pi/2]$ intervallumon vett határozott integrálját szeretnénk kiszámolni, írjuk be az

```
> int(f, x=0..Pi/2);
```

parancsot. A Maple megadja a választ:

$$\frac{1}{64}\pi(4a^2+\pi^2)^{(3/2)} - \frac{1}{32}a^2\pi\sqrt{4a^2+\pi^2} + \frac{1}{8}a^4\ln(2) -$$
$$-\frac{1}{8}a^4\ln\left(\pi+\sqrt{4a^2+\pi^2}\right) + \frac{1}{16}a^4\ln(a^2).$$

Ha az a paraméter egy konkrét értéke mellett vagyunk kíváncsiak a $[0,1]$ intervallumon vett határozott integrál értékére, akkor ezt kell beírnunk:

```
> a:=1;
> int(f, x=0..1);
```

A válasz:

$$\frac{3}{8}\sqrt{2}+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{2}-1\right).$$

10. PÉLDA: **Integrálás a függvény elnevezése nélkül**

Keressük meg az

$$\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$$

primitív függvényét a Maple használatával!

Megoldás: Írjuk be a Maple-be a következő sort:

```
> int((sin^2)(x)*(cos^3)(x), x);
```

amelyre a válasz

$$-\frac{1}{5}\sin(x)\cos(x)^4+\frac{1}{15}\cos(x)^2\sin(x)+\frac{2}{15}\sin(x). \qquad \square$$

11. PÉLDA: **A Maple nem tud választ adni**

Keressük meg az

$$\int (\arccos ax)^2\,dx$$

primitív függvényét a Maple használatával!

Megoldás: Írjuk be a Maple-be az

```
> int((arccos(a*x))^2, x);
```

parancsot! A válasz az lesz, hogy

$$\int \arccos(ax)^2\,dx,$$

amely azt mutatja, hogy a Maple nem tud zárt formában választ adni. A 11. fejezetben majd megnézzük, hogy hogyan lehet hatványsorok segítségével meghatározni ezt az integrált is. □

Persze a különböző programoknak különböző módokon kell beírni a parancsokat, és ezek más és más formában fognak válaszolni nekünk. Most megnézzük, hogy hogyan oldhatjuk meg a 9–11. példákban szereplő feladatokat a Mathematica 4 segítségével.

1. A 9. példa feladatának a megoldásához ezt kell beírnunk:

```
In[1]:= Integrate[x^2*Sqrt[a^2+x^2], x]
```

A Mathematica eredménye

$$\text{Out[1]} = \sqrt{a^2+x^2}\left(\frac{a^2x}{8}+\frac{x^3}{4}\right)-\frac{1}{8}a^4\text{Log}\left[x+\sqrt{a^2+x^2}\right],$$

és nem is kell további egyszerűsítésére kérnünk. A kiadott válasz hasonlít az integráltáblázat 22. képletére.

2. A Mathematica az

```
In[2]:= Integrate[Sin[x]^2*Cos[x]^3, x]
```

parancsra megadja a 10. példa megoldását:

$$\text{Out[2]} = \frac{\text{Sin}[x]}{8}-\frac{1}{48}\text{Sin}[3x]-\frac{1}{80}\text{Sin}[5x],$$

de ez különbözik a Maple válaszától, és a 8. példa megoldása során kiszámolt eredménytől is.

3. Ha a 11. példabeli integrált kérdezzük meg a Mathematicától:

```
In[3]:= Integrate[ArcCos[a*x]^2, x]
```

a Mathematica 4 a Maple 5.1-gyel ellentétben válaszol:

$$\text{Out}[3] = -2x - \frac{2\sqrt{1-a^2x^2}\,\text{ArcCos}[a\,x]}{a} + x\,\text{ArcCos}[a\,x]^2,$$

feltéve, hogy $a \neq 0$.

Bár a különböző programok nagyon sok mindent ki tudnak számolni, és sokszor segítenek nehéz feladatok megoldásában, egyikük sem csodaszer. Előfordul, hogy egy program használata csak még nehezebbé teszi a feladatot, abban az értelemben, hogy a válasz amelyet ad, értelmezhetetlenül bonyolult. Figyeljünk arra is, hogy sem a Maple, sem a Mathematica nem írta ki a primitív függvények után a $+C$ konstanst! Tehát a számítógépek nem gondolkodnak helyettünk, a használatukhoz, és a kapott eredmény értelmezéséhez szükséges a saját matematikai gondolkodásunk is. Erre láthatunk példát a 111. feladatban.

8.6. Feladatok

Az integráltáblázat használata

A kötet végén levő integráltáblázat használatával számítsuk ki a határozatlan integrálokat (1–38. feladatok)!

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-3}}$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$

3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-2}}$

4. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(2x+3)^{3/2}}$

5. $\displaystyle\int x\sqrt{2x-3}\,dx$

6. $\displaystyle\int x(7x+5)^{3/2}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-4x}}{x^2}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x-9}}$

9. $\displaystyle\int x\sqrt{4x-x^2}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{7+x^2}}$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{7-x^2}}$

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$

15. $\displaystyle\int \sqrt{25-p^2}\,dp$

16. $\displaystyle\int q^2\sqrt{25-q^2}\,dq$

17. $\displaystyle\int \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}}\,dr$

18. $\displaystyle\int \frac{ds}{\sqrt{s^2-2}}\,ds$

19. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{5+4\sin 2\theta}$

20. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{4+5\sin 2\theta}$

21. $\displaystyle\int e^{2t}\cos 3t\,dt$

22. $\displaystyle\int e^{-3t}\sin 4t\,dt$

23. $\displaystyle\int x\arccos x\,dx$

24. $\displaystyle\int x\,\text{arctg}\,x\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{ds}{(9-s^2)^2}$

26. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{(2-\theta^2)^2}$

27. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4x+9}}{x^2}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9x-4}}{x^2}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3t-4}}{t}\,dt$

30. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3t+9}}{t}\,dt$

31. $\displaystyle\int x^2\,\text{arctg}\,x\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{\text{arctg}\,x}{x^2}\,dx$

33. $\displaystyle\int \sin 3x\cos 2x\,dx$

34. $\displaystyle\int \sin 2x\cos 3x\,dx$

35. $\displaystyle\int 8\sin 4t\sin\frac{t}{2}\,dt$

36. $\displaystyle\int \sin\frac{t}{3}\sin\frac{t}{6}\,dt$

37. $\displaystyle\int \cos\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{4}\,d\theta$

38. $\displaystyle\int \cos\frac{\theta}{2}\cos 7\theta\,d\theta$

Helyettesítés és integráltáblázat

Helyettesítéssel hozzuk az integrálokat az integráltáblázatban szereplő alakra, majd adjuk meg ki a határozatlan integrálokat (39–52. feladatok)!

39. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{x^2+6x}{(x^2+3)^2}\,dx$

41. $\displaystyle\int \arcsin\sqrt{x}\,dx$

42. $\displaystyle\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$

44. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

45. $\displaystyle\int (\text{ctg}\,t)\sqrt{1-\sin^2 t}\,dt, \quad 0<t<\pi/2$

46. $\displaystyle\int \frac{dt}{(\text{tg}\,t)\sqrt{4-\sin^2 t}}$

47. $\displaystyle\int \frac{dy}{y\sqrt{3+(\ln y)^2}}$

48. $\displaystyle\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{5+\sin^2\theta}}$

49. $\displaystyle\int \frac{3\,dr}{\sqrt{9r^2-1}}$

50. $\displaystyle\int \frac{3\,dy}{\sqrt{1+9y^2}}$

51. $\displaystyle\int \arccos\sqrt{x}\,dx$

52. $\displaystyle\int \text{arctg}\,\sqrt{y}\,dy$

Redukciós formulák

Az 53–72. feladatokban szereplő határozatlan integrálokat redukciós formulák segítségével számítsuk ki!

53. $\displaystyle\int \sin^5 2x\,dx$

54. $\displaystyle\int \sin^5\frac{\theta}{2}\,d\theta$

55. $\displaystyle\int 8\cos^4 2\pi t\,dt$

56. $\displaystyle\int 3\cos^5 3y\,dy$

57. $\displaystyle\int \sin^2 2\theta\cos^3 2\theta\,d\theta$

58. $\displaystyle\int 9\sin^3\theta\cos^{3/2}\theta\,d\theta$

59. $\displaystyle\int 2\sin^2 t\sec^4 t\,dt$

60. $\displaystyle\int \csc^2 y\cos^5 y\,dy$

61. $\displaystyle\int 4\,\text{tg}^3 2x\,dx$

62. $\displaystyle\int \text{tg}^4\frac{x}{2}\,dx$

63. $\int 8\operatorname{ctg}^4 t\,dt$ **64.** $\int 4\operatorname{ctg}^3 2t\,dt$

65. $\int 2\sec^3 \pi x\,dx$ **66.** $\int \frac{1}{2}\csc^3 \frac{x}{2}\,dx$

67. $\int 3\sec^4 3x\,dx$ **68.** $\int \csc^4 \frac{\theta}{3}\,d\theta$

69. $\int \csc^5 x\,dx$ **70.** $\int \sec^5 x\,dx$

71. $\int 16x^3(\ln x)^2\,dx$ **72.** $\int (\ln x)^3\,dx$

$x^n e^x$ típusú integrálok

A 73–80. feladatokban szereplő integrálokat az integráltáblázat 103–106. képleteivel számoljuk ki! (A feladatok megoldhatóak a 8.2. részben tárgyalt táblázatos integrálás segítségével is.)

73. $\int xe^{3x}\,dx$ **74.** $\int xe^{-2x}\,dx$

75. $\int x^3 e^{x/2}\,dx$ **76.** $\int x^2 e^{\pi x}\,dx$

77. $\int x^2 2^x\,dx$ **78.** $\int x^2 2^{-x}\,dx$

79. $\int x\pi^x\,dx$ **80.** $\int x2^{\sqrt{2x}}\,dx$

Helyettesítés és redukciós formulák

Számoljuk ki a 81–86. feladatokban szereplő integrálokat! Alkalmazzunk egy (lehetőség szerint trigonometrikus) helyettesítést, hogy olyan formát kapjunk, amelyet redukciós formulákkal egyszerűsíthetünk!

81. $\int e^t \sec^3(e^t-1)\,dt$ **82.** $\int \frac{\csc^3\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}}\,d\theta$

83. $\int_0^1 2\sqrt{x^2+1}\,dx$ **84.** $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dy}{(1-y^2)^{5/2}}$

85. $\int_1^2 \frac{(r^2-1)^{3/2}}{r}\,dr$ **86.** $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dt}{(t^2+1)^{7/2}}$

Hiperbolikus függvények

Az integráltáblázat használatával számítsuk ki az szereplő integrálokat (87–92. feladatok)!

87. $\int \frac{1}{8}\operatorname{sh}^5 3x\,dx$ **88.** $\int \frac{\operatorname{ch}^4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

89. $\int x^2 \operatorname{ch} 3x\,dx$ **90.** $\int x \operatorname{sh} 5x\,dx$

91. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^7 x}\operatorname{th} x\,dx$ **92.** $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^3 2x}\operatorname{cth} 2x\,dx$

További példák és feladatok

A 93–100. feladatokban a kötet végén levő integráltáblázat egy-egy képletének a levezetése a feladat.

93. Az $u = ax+b$ helyettesítés használatával számítsuk ki az

$$\int \frac{x}{(ax+b)^2}\,dx$$

integrált! (Az integráltáblázat 9. képlete.)

94. Alkalmas trigonometrikus helyettesítés használatával számítsuk ki az

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$$

integrált! (Az integráltáblázat 17. képlete.)

95. Alkalmas trigonometrikus helyettesítés használatával számítsuk ki az

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

integrált! (Az integráltáblázat 29. képlete.)

96. Alkalmas trigonometrikus helyettesítés használatával számítsuk ki az

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$$

integrált! (Az integráltáblázat 46. képlete.)

97. Parciálisan integrálva számítsuk ki az

$$\int x^n \sin ax\,dx$$

integrált! (Az integráltáblázat 80. képlete.)

98. Parciálisan integrálva számítsuk ki az

$$\int x^n (\ln ax)^m\,dx$$

integrált! (Az integráltáblázat 110. képlete.)

99. Parciálisan integrálva számítsuk ki az

$$\int x^n \arcsin ax\,dx$$

integrált! (Az integráltáblázat 99. képlete.)

100. Parciálisan integrálva számítsuk ki az

$$\int x^n \operatorname{arctg} ax\,dx$$

integrált! (Az integráltáblázat 101. képlete.)

101. Térfogat: Mekkora a térfogata annak a testnek, amelyet az $y = \sqrt{x^2+2}$, $0 \le x \le \sqrt{2}$ görbe x-tengely körüli megforgatásával kapunk?

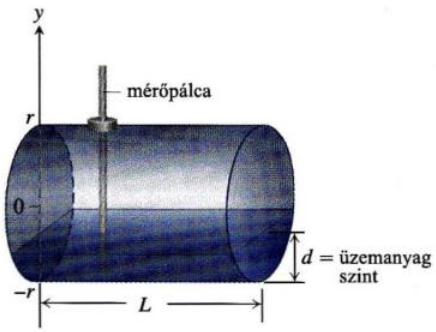
102. Ívhossz: Mennyi az $y = x^2$, $0 \le x \le \sqrt{3}/2$ görbe ívhossza?

103. Súlypont: Hol van a súlypontja annak a síkidomnak, amelyet az $y = 1/\sqrt{x+1}$ görbe és az $x = 3$ egyenes vág ki a pozitív síknegyedből?

104. Tehetetlenségi nyomaték: Egy vékony, $\delta = 1$ konstans sűrűségű lemezt vág ki a pozitív síknegyedből az $y = 36/(2x+3)$ görbe és az $x = 3$ egyenes. Számoljuk ki a lemez y-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

105. Felszínszámítás: Az $y = x^2$, $-1 \le x \le 1$ görbét megforgatjuk az x-tengely körül. Az integráltáblázat és számológép segítségével számoljuk ki a görbe által súrolt palást felszínét legalább 2 tizedesjegy pontossággal!

106. Térfogatszámítás: A vállalat vezetése azzal bízott meg minket, hogy keressünk számítógépre vihető módszert az év végén a vállalat gázolajtartályaiban maradó gázolajmennyiség pontos meghatározására. A tartályok oldalra fektetett henger alakúak, amelyek alapkörének sugara r, magassága L. A tartályban lévő gázolaj mérésére egy centiméter beosztású pálcát használnak, melyet a tartály tetejére vágott nyíláson át merítenek a gázolajba. (Lásd az ábrát!)



(a) Mutassuk meg, hogy ha a tartályban lévő gázolaj magassága d, akkor a térfogata

$$V = 2L \int_{-r}^{-r+d} \sqrt{r^2 - y^2}\, dy!$$

(b) Számoljuk ki az integrált!

107. Mennyi az

$$\int_a^b \sqrt{x - x^2}\, dx$$

integrál a-tól és b-től függő lehető legnagyobb értéke? Válaszát indokolja!

108. Mennyi az

$$\int_a^b x\sqrt{2x - x^2}\, dx$$

integrál a-tól és b-től függő lehető legnagyobb értéke? Válaszát indokolja!

Integrálok vizsgálata számítógéppel

109. Számítsuk ki számítógéppel az

(a) $\int x \ln x\, dx$, **(b)** $\int x^2 \ln x\, dx$, **(c)** $\int x^3 \ln x\, dx$

integrálokat!

(d) Milyen szabályszerűséget látunk? Mit sejtünk ez alapján

$$\int x^4 \ln x\, dx$$

értékéről? Ellenőrizzük a sejtést a számítógéppel!

(e) Adjunk képletet az

$$\int x^n \ln x\, dx \qquad n \geq 1$$

integrál értékére! Válaszunkat ellenőrizzük számítógéppel!

110. Számítsuk ki számítógéppel az

(a) $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$, **(b)** $\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$, **(c)** $\int \frac{\ln x}{x^4}\, dx$

integrálokat!

(d) Milyen szabályszerűséget látunk? Mit sejtünk ez alapján a

$$\int \frac{\ln x}{x^5}\, dx$$

határozatlan integrál értékére? Ellenőrizzük a sejtést a számítógéppel!

(e) Adjunk képletet az

$$\int \frac{\ln x}{x^n}\, dx \qquad n \geq 2$$

integrál értékére! Ellenőrizzük a választ számítógéppel!

111. (a) Keressük meg számítógéppel az

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\, dx$$

határozott integrál értékét! Sikerült?

(b) Ha igen, számoljuk ki az integrált $n = 1, 2, 3, 5, 7$ esetén! Mit mondhatunk az eredmény bonyolultságáról?

(c) Most hajtsuk végre az $x = (\pi/2) - u$ helyettesítést, majd adjuk össze a régi és az új integrált! Ennek segítségével határozzuk meg

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\, dx$$

értékét!

Ez a példa jól mutatja, hogy egy kis matematikai jártassággal hogyan kezelhetünk olyan problémákat is, amelyeket a számítógép közvetlenül nem tud megoldani helyettünk.

8.7. Numerikus integrálás

Ahogy láttuk, $\int_a^b f(x)\, dx$ kiszámolásának a legegyszerűbb módja megkeresni $f(x)$ egy $F(x)$ primitív függvényét, majd kiszámolni $F(b) - F(a)$ értékét. Azonban néhány függvénynek nagyon nehéz, sok munkával járó feladat megtalálni a primitív függvényét, illetve némely függvénynek, mint például a $\sin x^2$, $1/\ln x$ és $\sqrt{1 + x^4}$ függvények, egyáltalán nincs elemi primitív függvénye.

Más esetekben az integrálandó függvény képletét nem is ismerjük, csak néhány helyen vett helyettesítési értékét, amelyekre valamilyen mérés során tettünk szert.

Bármi is az ok, ha nem tudunk egy határozott integrált primitív függvény kereséssel megoldani, alkalmazhatunk numerikus közelítő megoldásokat, mint például a fejezet során ismertetésre kerülő *trapézformula*, vagy a *Simpson-formula*. Ennek a két módszernek az alkalmazása során általában jóval kevesebb részre kell felosztanunk az alapintervallumot egy adott pontosság eléréséhez, mint az

5.1. és az 5.2. fejezetekben tárgyalt „téglalapformulák" bármelyikében. A fejezetben a módszerek alkalmazása során fellépő hibákra is becslést fogunk adni.

Közelítés trapézokkal

Ha nem tudjuk megtalálni az integrálandó függvény primitív függvényét, osszuk fel az integrálási intervallumot részintervallumokra, és egy–egy ilyen részintervallumon közelítsük a függvényt egy rá jól illeszkedő polinommal! Számoljuk ki a polinomok integrálját, majd a részintervallumokra kapott értékeket adjuk össze! Azt reméljük, hogy az így kapott szám jól közelíti f integrálját. Mi a továbbiakban az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy f pozitív, de valójában csak arra lenne szükségünk, hogy f folytonos az $[a,b]$ intervallumon, amelyen integrálni szeretnénk.

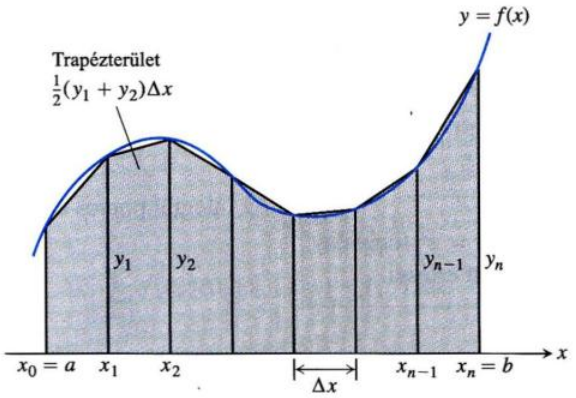
A trapézformula alkalmazása esetén ezek a közelítő polinomok elsőfokúak lesznek. Így a függvény alatti területet téglalapok helyett trapézokkal közelítjük, ahogy az a 8.10. ábrán is látható. Nem feltétlenül szükséges, hogy az x_0, x_1 …, x_n osztópontok által meghatározott részintervallumok ugyanolyan hosszúak legyenek, de az eredményül kapott képlet egyszerűbb, ha azok. Tegyük tehát fel, hogy minden egyes részintervallum hossza

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Ezt a Δx értéket nevezzük a felosztás **lépésközének**. Az i-edik részintervallum feletti trapéz területe

$$\Delta x\left(\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\right) = \frac{\Delta x}{2}(y_{i-1}+y_i),$$

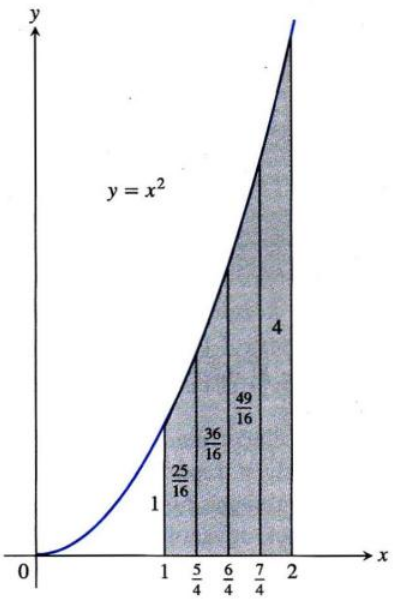
ahol $y_{i-1} = f(x_{i-1})$ és $y_i = f(x_i)$.



8.10. ÁBRA: A trapézformula alkalmazásakor a függvény görbéjét egyenes szakaszokkal közelítjük, a függvény $[a,b]$ intervallumon vett integrálját pedig az így keletkező trapézok területösszegével.

Ezt a területet úgy számítjuk ki, hogy a trapéz vízszintes irányban mért Δx „magasságát" megszorozzuk a két függőleges „alapjának" az átlagával. (Lásd a 8.10. ábrát!) A függvény grafikonja és az x-tengely közötti területet, azaz $\int_a^b f(x)\,dx$ -et a trapézok területösszegével közelítjük:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(y_0+y_1)\Delta x + \frac{1}{2}(y_1+y_2)\Delta x + \cdots + \\ &\quad + \frac{1}{2}(y_{n-2}+y_{n-1})\Delta x + \frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)\Delta x = \\ &= \Delta x\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) = \\ &= \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n), \end{aligned}$$



8.11. ÁBRA: Mivel a függvény konvex, a trapézformula egy picit fölülbecsli az x^2 függvény $[1,2]$ intervallumon vett integrálját.

x	$y = x^2$
1	1
5/4	25/16
6/4	36/16
7/4	49/16
2	4

8.3. TÁBLÁZAT: Az $y = x^2$ függvény osztópontokban felvett értékei.

ahol

$$y_0 = f(a), \qquad y_1 = f(x_1), \qquad \ldots, \qquad y_{n-1} = f(x_{n-1}), \qquad y_n = f(b).$$

A trapézformula

$\int_a^b f(x)\,dx$ közelítő értéke a trapézformulával:

$$T = \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right).$$

A képletben szereplő y_i számok f értékei az

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, \quad x_n = b$$

pontokban, ahol $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

1. PÉLDA: A trapézformula használata

Használjuk a trapézformulát $n = 4$ mellett az $\int_1^2 x^2\,dx$ integrál közelítésére! Hasonlítsuk össze az eredményt az integrál valódi értékével!

Megoldás: Osszuk fel az $[1,2]$ intervallumot négy egyenlő részre (8.11. ábra), majd értékeljük ki az $y = x^2$ függvényt az osztópontokban (8.3. táblázat)!

Alkalmazzuk a trapézformulát az így kiszámolt y_i értékekkel $n = 4$, illetve $\Delta x = (2-1)/4 = 1/4$ mellett:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\right) = \\ &= \frac{1}{8}\left(1 + 2\left(\frac{25}{16}\right) + 2\left(\frac{36}{16}\right) + 2\left(\frac{49}{16}\right) + 4\right) = \\ &= \frac{75}{32} = 2{,}34375. \end{aligned}$$

Az integrál pontos értéke

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

A becslés hibája az integrál százalékában kifejezve

$$\left(2{,}34375 - \frac{7}{3}\right) / \left(\frac{7}{3}\right) \approx 0{,}00446, \quad \text{vagyis} \quad 0{,}446\%.$$

A trapézformula mintegy fél százalékkal felülbecsülte az integrál valódi értékét. □

Azt, hogy a trapézformula az integrál valódi értékénél nagyobb közelítő értéket ad, a számolás elvégzése nélkül is láthattuk volna. Mivel az x^2 parabola *konvex függvény*, a közelítő egyenes szakaszok a függvény grafikonja *fölött* helyezkednek el, így minden egyes trapéz területe egy picit nagyobb lesz, mint a függvény görbéje alatti terület. A 8.10. ábrán láthatjuk, hogy ha egy intervallumon a függvény *konkáv*, akkor azon az intervallumon a trapézformula *alulbecsli* az integrál valódi értékét.

2. PÉLDA: Átlaghőmérséklet

Egy őszi napon minden egész órában megmértük a külső hőmérsékletet dél és éjfél között. A mérések eredményét a következő táblázat tartalmazza:

Idő	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
°C	17	19	20	21	21	20	20	20	19	18	16	15	13

Mekkora volt az átlaghőmérséklet ezalatt a 12 óra alatt?

Megoldás: Egy folytonos függvény, a hőmérsékletfüggvény átlagát keressük, de csak néhány helyen ismerjük a függvény értékét.

$$\text{átlag}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

értékét kellene kiszámolnunk, de nem ismerjük $f(x)$-et. Közelítsük a trapézformula alkalmazásával f integrálját, az egész órákat használva osztópontokként. Így $\Delta x = 1$ lesz.

$$\begin{aligned} T &= \frac{\Delta x}{2}\Big(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{11} + y_{12}\Big) = \\ &= \frac{1}{2}\Big(17 + 2\cdot 19 + 2\cdot 20 + \cdots + 2\cdot 15 + 13\Big) = \\ &= 224. \end{aligned}$$

T-vel becsülve $\int_a^b f(x)\,dx$ értékét azt kapjuk, hogy

$$\text{átlag}(f) \approx \frac{1}{b-a}\cdot T = \frac{1}{12}\cdot 224 \approx 18{,}6667$$

Azaz az átlaghőmérséklet körülbelül 18,7 °C volt. □

A trapézformula hibabecslése

Ahogy n növekszik, és a Δx lépésköz tart 0-hoz, T az $\int_a^b f(x)\,dx$ pontos értékéhez konvergál. Ennek a bizonyításához írjuk fel n részintervallum esetén a trapézformulát:

$$\begin{aligned} T_n &= \Delta x\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) = \\ &= (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)\Delta x + \frac{1}{2}(y_0 - y_n)\Delta x = \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x + \frac{1}{2}(f(a) - f(b))\Delta x. \end{aligned}$$

Ahogy $n \to \infty$ és $\Delta x \to 0$, definíció szerint

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \to \int_a^b f(x)\,dx, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{1}{2}\big(f(a) - f(b)\big)\Delta x \to 0.$$

Így viszont

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \int_a^b f(x)\,dx + 0 = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Mindez azt jelenti, hogy elméletileg akármilyen kicsire csökkenthetjük T és az integrál különbségét, ha n-t kellően nagynak vesszük. A gyakorlatban viszont inkább az érdekel minket, hogy milyen nagyra kell n-t választanunk, hogy T és az integrál eltérése egy adott hibaküszöb alá csökkenjen.

Erre egy olyan tétel válaszol, amelyet itt nem bizonyítunk. E szerint, ha f'' folytonos $[a,b]$-n, akkor alkalmas $c \in [a,b]$ konstanssal

$$\int_a^b f(x)\,dx = T - \frac{b-a}{12}\cdot f''(c)(\Delta x)^2.$$

Így, ahogy Δx nullához tart, T és az integrál eltérése, azaz az

$$E_T = -\frac{b-a}{12} \cdot f''(c)(\Delta x)^2$$

képlettel definiált hiba Δx *négyzetével* arányosan tart nullához.

Az

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|(\Delta x)^2$$

egyenlőtlenség felső becslést ad a Δx lépésközhöz tartozó hiba nagyságára. Általában sajnos nem tudjuk meghatározni $\max|f''(x)|$ pontos értékét, így ezt is felülről kell becsülnünk. Ha M egy felső korlát $|f''(x)|$-re, azaz $|f''(x)| \le M$ ha $x \in [a,b]$, akkor

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12} M(\Delta x)^2.$$

Ha kicseréljük Δx-et $(b-a)/n$-re, azt kapjuk, hogy

$$|E_T| \le \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

Ez az az egyenlőtlenség, amelyet általában az $|E_T|$ hiba becslésére használunk. Megkeressük a lehető legjobb M-et $|f''(x)|$ felső becslésére, és az egyenlőséggel megbecsüljük $|E_T|$-t. Első pillantásra túl „nagyvonalúnak" tűnik a hiba ilyen mértékben való felülbecslése, de működik. Ha $|E_T|$-t le szeretnénk szorítani valamely előre választott érték alá, n-et kell kellőképpen nagyra választanunk.

A trapézformula hibabecslése

Tegyük fel, hogy f'' folytonos, és M felső korlát $|f''|$ $[a,b]$-n felvett értékére. Ekkor $\int_a^b f(x)\,dx$ és az n részintervallumra felírt trapézformula által adott T integrálközelítés E_T eltérésére igaz a következő becslés:

$$|E_T| \le \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

3. PÉLDA: **A trapézformula hibájának felső becslése**

Adjunk felső becslést a közelítés hibájára, ha az

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx$$

integrált az $n = 10$ lépéses trapézformulával becsüljük! (Lásd a 8.12. ábrát!)

Megoldás: A mi esetünkben $a = 0$, $b = \pi$ és $n = 10$. A hibára adott felső becslés szerint

$$|E_T| \le \frac{M(b-a)^3}{12n^2} = \frac{\pi^3}{1200} M.$$

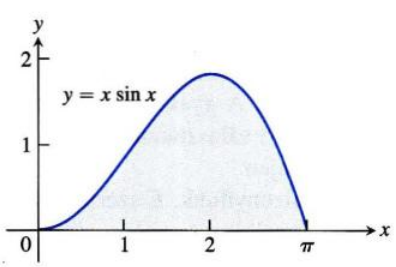
A képletben szereplő M tetszőleges olyan szám lehet, amelyre teljesül, hogy

$$M \ge |f''(x)| \qquad \text{minden olyan } x\text{-re, amelyre } 0 \le x \le \pi.$$

Mivel $f''(x) = 2\cos x - x\sin x$, ezért

$$\begin{aligned} |f''(x)| &= |2\cos x - x\sin x| \le \\ &\le 2|\cos x| + |x| \cdot |\sin x| \le \\ &\le 2 \cdot 1 + \pi \cdot 1 = 2 + \pi. \end{aligned}$$

$|\cos x|$ és $|\sin x|$ mindig 1 alatt van, és $0 \le x \le \pi$



8.12. ÁBRA: A 3. példában szereplő függvény grafikonja.

Tehát $M = 2+\pi$ megfelelő választás. Ezzel

$$|E_T| \le \frac{\pi^3}{1200} M = \frac{\pi^3(2+\pi)}{1200} < 0{,}133, \qquad \text{felfelé kerekítve}$$

azaz a hiba kisebb, mint 0,133.

Ha ennél nagyobb pontosságra lenne szükségünk, akkor sem M-et próbálnánk pontosabban meghatározni, hanem a felosztás részintervallumainak számát növelnénk meg. Például $n = 100$ részintervallummal azt kapnánk, hogy

$$|E_T| \le \frac{(2+\pi)\pi^3}{120000} < 0{,}00133. \qquad \square$$

4. PÉLDA: Osztásszám meghatározása adott pontosság eléréséhez

Hány részintervallumra kell osztanunk az alapintervallumot, ha

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$

értékét 10^{-4}-nél kisebb hibával szeretnénk a trapézformula alkalmazásával megbecsülni?

Megoldás: Most $a = 1$ és $b = 2$, így a hibára vonatkozó becslésünk

$$|E_T| \le \frac{M(2-1)^3}{12n^2} = \frac{M}{12n^2}.$$

Ez most azon ritka esetek egyike, amikor pontosan ki tudjuk számolni $\max|f''|$ értékét ahelyett, hogy felső becslést keresnénk rá. Az $f(x) = 1/x$ függvény második deriváltja:

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(x^{-1}) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}.$$

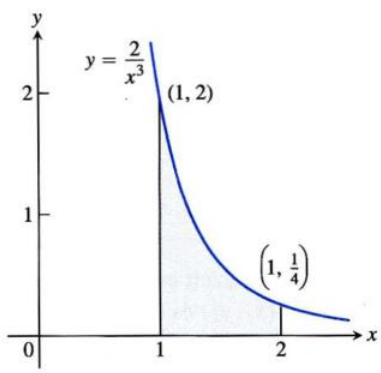
Az $y = 2/x^3$ függvény monoton csökken az $[1,2]$ intervallumon, tehát a maximuma $y = 2$, a minimuma pedig $y = 1/4$. (Lásd a 8.13. ábrát!) Így $M = 2$, és

$$|E_T| \le \frac{2}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}.$$

A hiba akkor lesz kisebb, mint 10^{-4}, ha

$$\frac{1}{6n^2} < 10^{-4}, \qquad \frac{10^4}{6} < n^2, \qquad \frac{100}{\sqrt{6}} < n, \qquad \text{vagy} \qquad 40{,}83 < n.$$

A kapott 40,83-nál az első nagyobb egész szám 41. Ha tehát $n = 41$ részintervallummal dolgozunk, akkor a trapézformula legfeljebb 10^{-4} eltéréssel fogja közelíteni $\ln 2$ értékét. Persze minden 41-nél nagyobb n is megfelelő lenne. $\square$

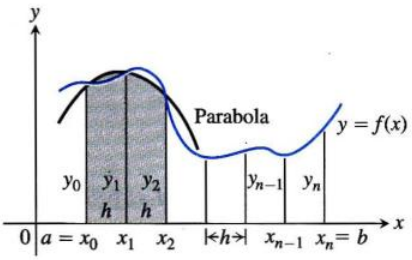


8.13. ÁBRA: Az $y = 2/x^3$ függvény az $[1,2]$ intervallumon $x = 1$-ben veszi fel a maximumát.

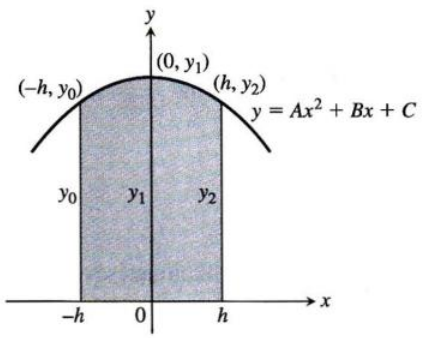
A Simpson-formula: becslés parabolákkal

A Riemann-összegek és a trapézformula elég jó közelítést adnak egy folytonos függvény zárt intervallumon vett integráljának értékére. A trapézformula hatékonyabb, azaz kis n-ekre pontosabb eredményt ad, így gyorsabban konvergáló algoritmust készíthetünk belőle.

Még hatékonyabb módszert kapunk, ha az integrál becslésekor egyenesek helyett parabolákkal közelítjük a függvény grafikonját minden egyes részintervallum felett. Az eljárást ugyanúgy kezdjük, mint az előzőeket: felosztjuk az $[a,b]$ intervallumot n egyenlő részre, így minden részintervallum hossza $h = \Delta x = (b-a)/n$ lesz. Most azonban még azt is megköveteljük, hogy n *páros* szám legyen. Két egymás melletti részintervallumon az $y = f(x) \ge 0$ görbét egy közös



8.14. ÁBRA: A Simpson-formula a függvény görbéjét a részintervallumokon parabolákkal közelíti.



8.15. ÁBRA: Ha $-h$-tól h-ig integrálunk, azt kapjuk, hogy a besatírozott rész területe

$$\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2).$$

parabolával közelítjük, ahogy ez a 8.14. ábrán látható. A parabolát úgy készítjük el, hogy illeszkedjen az (x_{i-1},y_{i-1}), (x_i,y_i) és (x_{i+1},y_{i+1}) pontokra.

Vegyünk egy ilyen parabolát, és számoljuk ki az ábrán satírozással jelölt parabola alatti területet! Hogy egyszerűbb legyen a számolás, tegyük fel, hogy $x_0=-h$, $x_1=0$ és $x_2=h$ (lásd a 8.15. ábrát), ahol $h=\Delta x=(b-a)/n$. Ezt az általánosság megszorítása nélkül tényleg feltehetjük, hiszen a parabola alatti terület nem változik meg, ha az y-tengelyt máshol vesszük fel.

A parabola általános egyenlete

$$y=Ax^2+Bx+C,$$

így az alatta levő terület az $x\in[-h,h]$ intervallumon

$$\begin{aligned}A_p&=\int_{-h}^{h}(Ax^2+Bx+C)\,dx=\\&=\left[\frac{Ax^3}{3}+\frac{Bx^2}{2}+Cx\right]_{-h}^{h}=\\&=\frac{2Ah^3}{3}+2Ch=\frac{h}{3}(2Ah^2+6C).\end{aligned}$$

Most használjuk fel, hogy a kérdéses parabola átmegy a $(-h,y_0)$, $(0,y_1)$ és (h,y_2) pontokon, azaz

$$y_0=Ah^2-Bh+C,\qquad y_1=C,\qquad y_2=Ah^2+Bh+C.$$

Innen

$$\begin{aligned}C&=y_1,\\Ah^2-Bh&=y_0-y_1,\\Ah^2+Bh&=y_2-y_1,\\2Ah^2&=y_0+y_2-2y_1.\end{aligned}$$

Ezzel kifejezhetjük az A_p területet y_0, y_1 és y_2 segítségével:

$$A_p=\frac{h}{3}(2Ah^2+6C)=\frac{h}{3}((y_0+y_2-2y_1)+6y_1)=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2).$$

Ha vízszintesen elmozgatjuk a parabolát a 8.14. ábrán jelzett eredeti helyére, az nem változtat az alatta levő területen. Így az (x_0,y_0), (x_1,y_1) és (x_2,y_2) pontokon átmenő parabola alatti terület továbbra is

$$\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2).$$

Hasonlóan, az (x_2,y_2), (x_3,y_3) és (x_4,y_4) pontokra illeszkedő parabola alatti terület

$$\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4).$$

Az összes parabolának kiszámolva a területét, és a területeket összeadva a következő integrálközelítést kapjuk:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx\approx{}&\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)+\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)+\cdots+\\&+\frac{h}{3}(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)=\\=\frac{h}{3}&(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\cdots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n).\end{aligned}$$

Ennek a képletnek Simpson-formula a neve, és minden folytonos $f(x)$ függvényre érvényes. (Lásd a 38. feladatot!) A függvény pozitivitása sem szükséges, ezt csak a gondolatmenetünk egyszerűsítése miatt tettük fel. A felosztáshoz használt részintervallumok n számának párosnak kell lennie, hiszen minden parabolához két intervallumot használunk fel.

A Simpson-formula

$\int_a^b f(x)\,dx$ közelítő kiszámolása a Simpson-formulával:

$$S=\frac{\Delta x}{3}\left(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n\right).$$

A képletben szereplő y_i-k f értékei az

$$x_0=a,\quad x_1=a+\Delta x,\quad x_2=a+2\Delta x,\quad \ldots,\quad x_{n-1}=a+(n-1)\Delta x,\quad x_n=b$$

pontokban, ahol n páros, és $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$.

Figyeljük meg az együtthatók sorrendjét: $1,4,2,4,2,4,2,\ldots,2,4,1$!
A formula megalkotója Thomas Simpson (1710–1761) angol matematikus.

5. PÉLDA: **A Simpson-formula használata**

Használjuk a Simpson-formulát $n=4$-gyel az $\int_0^2 5x^4\,dx$ közelítő kiszámolására!

x	$y=5x^4$
0	0
1/2	5/16
1	5
3/2	405/16
2	80

8.4. TÁBLÁZAT: Az $y=5x^4$ függvény osztópontokban felvett értékei.

Megoldás: Osszuk fel a $[0,2]$ intervallumout 4 egyenlő részre, és számoljuk ki $y=5x^4$ értékét az osztópontokban (8.4. táblázat)! Alkalmazzuk a Simpson-formulát $n=4$ és $\Delta x=1/2$ mellett:

$$\begin{aligned}S&=\frac{\Delta x}{3}\left(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4\right)=\\&=\frac{1}{6}\left(0+4\cdot\frac{5}{16}+2\cdot 5+4\cdot\frac{405}{16}+80\right)=\\&=32+\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

A kapott eredmény különbözik az integrál pontos értékétől (32), de csak 1/12 az eltérés, az eredménynek kevesebb, mint 0,3%-a. A közelítő eredmény igen pontos, pedig csak 4 részintervallumot használtunk. □

A Simpson-formula hibabecslése

A Simpson-formula hibabecsléséhez is szükségünk lesz egy olyan tételre, amelyet nem bizonyítunk. A tétel szerint, ha f negyedik deriváltja folytonos, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx=S-\frac{b-a}{180}\cdot f^{(4)}(c)(\Delta x)^4$$

valamely $c\in[a,b]$-re. Így ha Δx nullához tart, akkor a Simpson-formula

$$E_S=-\frac{b-a}{180}\cdot f^{(4)}(c)(\Delta x)^4$$

hibája Δx *negyedik hatványának* a sebességével tart 0-hoz. (Ez megmagyarázza, hogy a Simpson-formula miért ad általában pontosabb eredmény a trapézformulánál.)

Az

$$|E_S|\le\frac{b-a}{180}\max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|(\Delta x)^4$$

egyenlőtlenség felső becslést ad a hiba abszolútértékére. A trapézformula hibabecslésében szereplő $\max|f''|$-hoz hasonlóan általában itt sem tudjuk $\max|f^{(4)}|$ értékét pontosan meghatározni, hanem felső becslést kell adnunk rá. Legyen M egy ilyen becslés, azaz $|f^{(4)}(x)| \le M$, ha $x \in [a,b]$. Ekkor

$$|E_S| \le \frac{b-a}{180} M(\Delta x)^4.$$

A $\Delta x = (b-a)/n$ egyenlőség felhasználásával ezt

$$|E_S| \le \frac{M(b-a)^5}{180n^4}$$

formába is írhatjuk. Ez az a képlet, amelyet általában a Simpson-formula hibabecslésére használunk. Ha találunk egy megfelelő M felső korlátot $|f^{(4)}|$ értékére, a képlet megadja a közelítés hibájának a felső becslését.

A Simpson-formula hibabecslése

Tegyük fel, hogy $f^{(4)}$ folytonos, és M felső korlát $|f^{(4)}|$ $[a,b]$-n felvett értékére. Ekkor $\int_a^b f(x)\,dx$ és az n részintervallumra felírt Simpson-formula által adott S integrálközelítés E_S eltérésére igaz a következő becslés:

$$|E_S| \le \frac{M(b-a)^5}{180n^4}.$$

A trapézformulához hasonlóan legtöbbször itt sem sikerül a lehető legjobb M megkeresése, ám ez nem is szükséges. Megkeressük azt a legkisebb M-et, amely még nagyobb erőfeszítés nélkül sikerül, és azt használjuk a hiba becsléséhez.

6. PÉLDA: **A Simpson-formula hibájának felső becslése**

Adjunk felső becslést a közelítés hibájára, ha az

$$\int_0^2 5x^4\,dx$$

integrált az $n = 4$ lépéses Simpson-formulával közelítjük! (Mint ahogyan az 5. példában tettük.)

Megoldás: Először keressünk egy M felső korlátot az $f(x) = 5x^4$ függvény negyedik deriváltjának abszolútértékére. Mivel $f^{(4)}(x) = 120$, az $M = 120$ jó lesz. Azt is tudjuk, hogy $b-a = 2$ és $n = 4$. Így a hibabecslés:

$$|E_S| \le \frac{M(b-a)^5}{180n^4} = \frac{120(2)^5}{180 \cdot 4^4} = \frac{1}{12}. \qquad \square$$

7. PÉLDA: **A trapéz- és a Simpson-formula összehasonlítása**

Ahogy a 4. példában láttuk, $\ln 2$ értéke közelíthető a

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

integrál közelítő kiszámolásával. A 8.5. táblázatban megmutatjuk a trapézformula által adott T, és a Simpson-formula által adott S közelítéseket különböző n-ek esetén.

Figyeljük meg, hogy a Simpson-formula mennyivel pontosabb, mint a trapézformula! Azt vehetjük észre, hogy ahogy n értékét megduplázzuk (így Δx-et megfelezzük), a trapézformula hibája $1/2^2$-edére csökken, míg a Simpson-formuláé $1/2^4$-edére. Például $n = 50$ esetén a Simpson-formula 7 tizedesjegy pontosságú eredményt ad, $n = 100$ esetén a pontosság már 9 tizedesjegy.

n	T_n	T_n **hibája**	S_n	S_n **hibája**
10	0,6937714032	0,0006242227	0,6931502307	0,0000030502
20	0,6933033818	0,0001562013	0,6931473747	0,0000001942
30	0,6932166154	0,0000694349	0,6931472190	0,0000000385
40	0,6931862400	0,0000390595	0,6931471927	0,0000000122
50	0,6931721793	0,0000249988	0,6931471856	0,0000000050
100	0,6931534305	0,0000062500	0,6931471809	0,0000000004

8.5. TÁBLÁZAT: A trapézformula (T_n) és a Simpson-formula (S_n) hibája a $\ln 2 = \int_1^2 (1/x)\,dx$ értékének közelítő kiszámolásakor.

Ha $f(x)$ egy 4-nél kisebb fokszámú polinom, akkor a negyedik deriváltja 0, és

$$E_S = -\frac{b-a}{180} f^{(4)}(c)(\Delta x)^4 = -\frac{b-a}{180} \cdot 0 \cdot (\Delta x)^4 = 0.$$

Tehát ha f konstans, lineáris, másod- vagy harmadfokú polinom, akkor a Simpson formula hibája 0, azaz pontosan megadja az integrál értékét függetlenül n választásától. Hasonlóan, ha f konstans vagy lineáris, akkor a második deriváltja 0, így

$$E_T = -\frac{b-a}{12} f''(c)(\Delta x)^2 = -\frac{b-a}{12} \cdot 0 \cdot (\Delta x)^2 = 0,$$

azaz a trapézformula pontos értéket ad f integráljára. Ez nem is meglepő, hiszen konstans vagy lineáris függvények esetén a közelítő trapéz egybeesik a függvény grafikonjával.

Láttuk, hogy ahogyan a Δx lépésközt csökkentjük, elméletileg a trapéz- és a Simpson-formula hibája is csökken. Gyakorlati alkalmazásokban azonban más a helyzet. Ahogy Δx-et csökkentjük, előbb-utóbb összemérhetővé válik a számítógép számolások során alkalmazott kerekítési hibáival. (Ez a jelenség körülbelül $\Delta x = 10^{-5}$-nél fog bekövetkezni.) Ekkor az S és T hibájára vonatkozó becsléssel már nem tudjuk tovább követni, hogy mi történik. Ahogy Δx-et tovább csökkentjük, előfordulhat, hogy egyre pontatlanabb lesz az integrál közelítése. A számítógép kerekítési hibáival itt nem foglalkozunk részletesebben, de a numerikus analízis könyvek részletesen tárgyalják a kerekítésből adódó problémákat is.

8. PÉLDA:

Becsüljük meg

$$\int_0^2 x^3\,dx$$

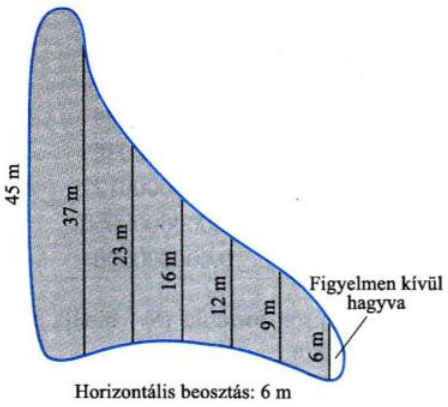
értékét a Simpson-formulával!

Megoldás: Az $f(x) = x^3$ függvény negyedik deriváltja 0, így a Simpson-formula az integrál pontos értékét fogja visszaadni bármely (páros) n esetén. Legyen tehát $n = 2$, és így $\Delta x = (2-0)/2 = 1$.

$$S = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(0^3 + 4 \cdot 1^3 + 2^3\right) = \frac{12}{3} = 4.$$

Persze kiszámolhatjuk az integrált pontosan is:

$$\int_0^2 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{16}{4} - 0 = 4. \qquad \square$$



8.16. ÁBRA: A 9. példában szereplő mocsár méretei.

9. PÉLDA:

Egy város le szeretne csapolni, majd földdel feltölteni egy kicsi szennyezett mocsarat. A mocsár átlagos mélysége 2 méter, alakját a 8.16. ábra mutatja. Hány köbméter földre lesz szükség a lecsapolt mocsár feltöltéséhez?

Megoldás: A mocsár térfogatának kiszámolásához kiszámoljuk közelítőleg a mocsár felszínét, majd a kapott számot megszorozzuk az átlagos mélységgel. A felszínt a Simpson-formulával becsüljük meg $\Delta x = 6$ méter választással, az y-oknak pedig a 8.16. ábráról leolvasott szélesség adatokat használjuk.

$$S = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6) =$$
$$= \frac{6}{3}(45 + 148 + 46 + 64 + 24 + 36 + 6) = 738.$$

Így a mocsár térfogata körülbelül $738 \cdot 2 = 1476\ \text{m}^3$. □

8.7. Feladatok

Integrálok becslése

Becsüljük meg az 1–10. feladatokban szereplő integrálokat a trapéz- és Simpson-formulával is!

I. A trapézformulát használva:

(a) becsüljük meg az integrált $n = 4$ részintervallum használatával, és adjunk felső korlátot $|E_T|$-re,

(b) számoljuk ki az integrál pontos értékét, utána $|E_T|$ pontos értékét,

(c) az $(|E_T|/(\text{pontos integrál})) \cdot 100$ képlettel határozzuk meg, hogy a hiba hány százaléka az integrálnak!

II. A Simpson-formulát használva:

(a) becsüljük meg az integrált $n = 4$ részintervallum használatával, és adjunk felső korlátot $|E_S|$-re,

(b) számoljuk ki az integrál pontos értékét, utána $|E_S|$ pontos értékét,

(c) az $(|E_S|/(\text{pontos integrál})) \cdot 100$ képlettel határozzuk meg, hogy a hiba hány százaléka az integrálnak.

1. $\int_1^2 x\,dx$

2. $\int_1^3 (2x-1)\,dx$

3. $\int_{-1}^1 (x^2+1)\,dx$

4. $\int_{-2}^0 (x^2-1)\,dx$

5. $\int_0^2 (t^3+t)\,dt$

6. $\int_{-1}^1 (t^3+1)\,dt$

7. $\int_1^2 \frac{1}{s^2}\,ds$

8. $\int_2^4 \frac{1}{(s-1)^2}\,ds$

9. $\int_0^\pi \sin t\,dt$

10. $\int_0^1 \sin \pi t\,dt$

A 11–14. feladatokban 8 egyenlő részre osztottuk az alapintervallumot, és megadtuk a függvény értékeit az osztópontokban. Becsüljük meg az integrál értékét $n = 8$ mellett **(a)** a trapézformulával, **(b)** a Simpson-formulával, majd **(c)** számoljuk ki az integrál pontos értékét, illetve az E_T és E_S hibákat!

11. $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

x	$x\sqrt{1-x^2}$
0	0
0,125	0,12402
0,25	0,24206
0,375	0,34763
0,5	0,43301
0,625	0,48789
0,75	0,49608
0,875	0,42361
1	0

12. $\int_0^3 \frac{\theta}{\sqrt{16+\theta^2}}\,d\theta$

θ	$\frac{\theta}{\sqrt{16+\theta^2}}$
0	0
0,375	0,09334
0,75	0,18429
1,125	0,27075
1,5	0,35112
1,875	0,42443
2,25	0,49026
2,625	0,58466
3	0,6

13. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3\cos t}{(2+\sin t)^2}\,dt$

t	$\frac{3\cos t}{(2+\sin t)^2}$
−1,5708	0
−1,1781	0,99138
−0,7854	1,26906
−0,3927	1,05961
0	0,75
0,3927	0,48821
0,7854	0,28946
1,1781	0,13429
1,5708	0

14. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\csc^2 y)\sqrt{\text{ctg}\, y}\,dy$

y	$(\csc^2 y)\sqrt{\text{ctg}\, y}$
0,78540	2
0,88357	1,51606
0,98175	1,18237
1,07992	0,93998
1,17810	0,75402
1,27627	0,60145
1,37445	0,46364
1,47262	031688
1,57080	0

Minimálisan szükséges részintervallumszám

Minimálisan hány részintervallumra kell osztanunk az alapintervallumot, hogy **(a)** a trapézformula, **(b)** a Simpson-formula hibája 10^{-4} alá csökkenjen a 15–26. feladatokban szereplő integrálok közelítő kiszámolásánál? (A 15–22. integrálok megegyeznek az 1–8. integrálokkal.)

15. $\int_1^2 x\,dx$ **16.** $\int_1^3 (2x-1)\,dx$ **17.** $\int_{-1}^1 (x^2+1)\,dx$

18. $\int_{-2}^0 (x^2-1)\,dx$ **19.** $\int_0^2 (t^3+t)\,dt$ **20.** $\int_{-1}^1 (t^3+1)\,dt$

21. $\int_1^2 \frac{1}{s^2}\,ds$ **22.** $\int_2^4 \frac{1}{(s-1)^2}\,ds$

23. $\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx$ **24.** $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

25. $\int_0^2 \sin(x+1)\,dx$ **26.** $\int_{-1}^1 \cos(x+\pi)\,dx$

Alkalmazások

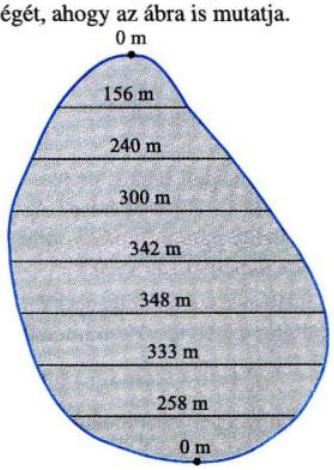
27. Medence térfogata: Egy téglalap alakú úszómedence szélessége 30, hosszúsága 50 méter. A $h(x)$-szel jelölt mélységét hosszanti irányban 5 méterenként mérve a táblázat mutatja. Becsüljük meg a medence térfogatát, azaz $n = 10$ mellett alkalmazzuk a trapézformulát

$$V = \int_0^{50} 30 \cdot h(x)\,dx$$

kiszámolására.

pozíció x m	mélység $h(x)$ m	pozíció x m	mélység $h(x)$ m
0	1,2	30	2,9
5	1,2	35	3,3
10	1,3	40	3,4
15	1,7	45	3,4
20	2,1	50	3,4
25	2,5		

28. Halastó betelepítése: Mint városi halőrnek, nekünk kell betelepíteni a horgásztavat a horgászszezon kezdete előtt. A tó átlagos mélysége 6 méter. Egy térképen 60 méterenként lemértük a tó szélességét, ahogy az ábra is mutatja.



Vertikális beosztás: 60 m

(a) Becsüljük meg a tó térfogatát a trapézformula használatával!

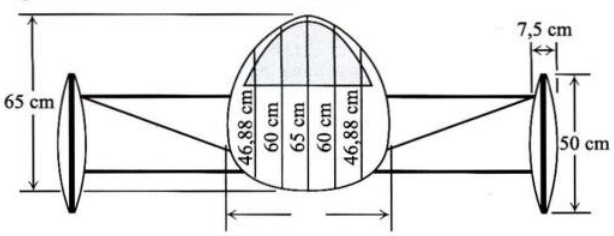
(b) A szezon kezdetekor átlagosan 30 köbméterenként lesz 1 hal a vízben. Azt szeretnénk, hogy a szezon végeztével megmaradjon a halaknak legalább a 25%-a. Maximum hány horgászengedélyt adhatunk ki, ha egy horgász átlagosan 50 halat fog ki a szezon alatt?

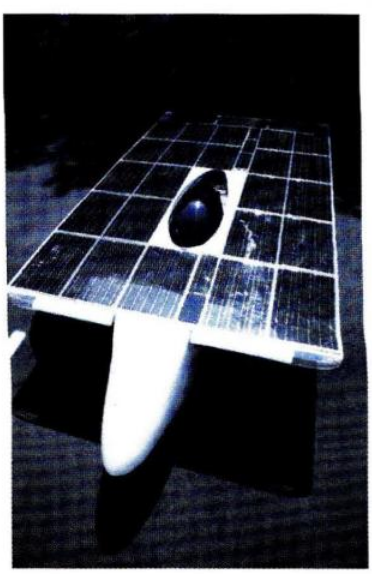
29. A Ford Mustang Cobra gyorsulása: A táblázat az 1994-es Ford Mustang Cobra gyorsulási adatait tartalmazza, pontosabban, hogy mennyi idő alatt gyorsult fel az autó 0-ról x mph sebességre. Mekkora utat tett meg az autó, mialatt 130 mph-ra gyorsult? (Használjunk trapézokat a sebességfüggvény alatti terület becslésére, de vigyázzunk, az időintervallumok hossza nem azonos!)

sebességváltozás	idő (s)
0–30 mph	2,2
0–40 mph	3,2
0–50 mph	4,5
0–60 mph	5,9
0–70 mph	7,8
0–80 mph	10,2
0–90 mph	12,7
0–100 mph	16,0
0–110 mph	20,6
0–120 mph	26,2
0–130 mph	37,1

Forrás: Car and Driver, 1994. április.

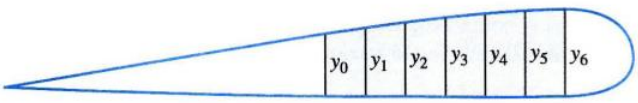
30. Légellenállás: Egy jármű légellenállása részben a keresztmetszete nagyságától függ, ezért a járműtervezők igyekeznek minél kisebb keresztmetszetű autókat tervezni. Számoljuk ki közelítőleg a Simpson-formulával a James Worden által tervezett napelemes Solectria keresztmetszetét!





31. Repülőgépszárny: Milyen hosszú legyen a repülőgép szárnyába tervezett állandó keresztmetszetű kerozintartály, ha a tartálynak 3000 kg kerozint kell befogadnia? A kerozin sűrűsége

860 kg/m^3, a repülő szárnyába épített tartály keresztmetszetét az ábra mutatja.



$y_0 = 45$ cm, $y_1 = 49$ cm, $y_2 = 55$ cm, $y_3 = 58$ cm,
$y_4 = 61$ cm, $y_5 = y_6 = 64$ cm, a vízszintes térköz 30 cm

32. Benzinfogyasztás: Egy aggregátor folyamatosan működik egyre több benzint fogyasztva, amíg ki nem cserélik a benzinszűrőket. A trapézformula használatával becsüljük meg, hogy mennyi benzint fogyasztott a héten.

nap	olajfogyasztás (liter/óra)
hétfő	0,019
kedd	0,020
szerda	0,021
csütörtök	0,023
péntek	0,025
szombat	0,028
vasárnap	0,031
hétfő	0,035

További példák és feladatok

33. A szinusz-integrál függvény értékei: A szinusz-integrál függvény, azaz

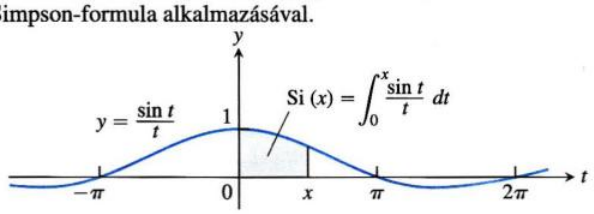
$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt,$$

azon fizikában fontos függvények egyike, melyet nem lehet a megadott alakjánál egyszerűbben felírni. A $(\sin t)/t$ függvénynek nincs elemi primitív függvénye, de $\mathrm{Si}(x)$ értékeit meg tudjuk becsülni a fenti integrál közelítő kiszámolásával.

Bár a jelölésből nem derült ki, valójában az

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{ha } t \neq 0, \\ 1 & \text{ha } t = 0 \end{cases}$$

függvényt szeretnénk integrálni. Ez az $f(t)$ a $(\sin t)/t$ folytonos kiterjesztése a teljes számegyenesre, és végtelen sokszor deriválható minden pontban, így jó eredményre számíthatunk a Simpson-formula alkalmazásával.



(a) Tudjuk, hogy a $[0, \pi/2]$ intervallumon $|f^{(4)}(x)| \leq 1$. Ezt felhasználva adjunk felső becslést a felmerülő hibára, ha

$$\mathrm{Si}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

értékét az $n = 4$ részintervallumra felírt Simpson-formulával becsüljük!

(b) Számoljuk ki közelítőleg $\mathrm{Si}(\pi/2)$-t az $n = 4$ részintervallumra felírt Simpson-formulával!

(c) Az (a) feladatban kiszámolt maximális hiba hány százaléka a (b) feladatban kiszámolt integrálközelítés értékének?

34. Gauss-féle hibafüggvény: A valószínűségszámításban, hőterjedésben és információelméletben fontos

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Gauss-féle hibafüggvényt is csak numerikus integrálással tudjuk kiszámolni, ugyanis az e^{-t^2} függvénynek sincs elemi primitív függvénye.

(a) A Simpson-formula $n = 10$ melletti alkalmazásával számoljuk ki közelítően $\mathrm{erf}(1)$ értékét!

(b) Tudjuk, hogy a $[0, 1]$ intervallumon

$$\left|\frac{d^4}{dt^4}\left(e^{-t^2}\right)\right| \leq 12.$$

Ennek felhasználásával adjunk felső becslést az (a) részben elkövetett hibára!

35. (*A 3. példa folytatása.*) Az E_T-re illetve E_S-re kiszámolt hibabecslések általában „a lehető legrosszabb esetben" jellegű becslések, és a trapéz- és Simpson-formulák sokkal pontosabbak, mint amit ezek a hibabecslések sugallnak. A 3. példában az

$$\int_0^{\pi} s\sin x\,dx$$

integrál trapézformulával való közelítésének a hibabecslésével is ez a helyzet.

(a) Becsüljük meg az integrál értékét a trapézformulával $n = 10$ mellett! A mellékelt táblázatból kiolvashatóak a szükséges függvényértékek.

x	$x\sin x$
0	0
$0{,}1 \cdot \pi$	0,09708
$0{,}2 \cdot \pi$	0,36932
$0{,}3 \cdot \pi$	0,76248
$0{,}4 \cdot \pi$	1,19513
$0{,}5 \cdot \pi$	1,57080
$0{,}6 \cdot \pi$	1,79270
$0{,}7 \cdot \pi$	1,77912
$0{,}8 \cdot \pi$	1,47727
$0{,}9 \cdot \pi$	0,87372
π	0

(b) Mekkora az integrál pontos értéke (azaz π) és az (a) részben kiszámolt közelítés eltérése? Azt vehetjük észre, hogy sokkal kisebb, mint a 3. példa során kiszámolt felső becslés a hibára (amely 0,133 volt).

(c) A 3. példában kiszámolt hibabecslést javíthatjuk, ha a $[0, \pi]$ intervallumon jobb felső korlátot találunk

$$|f''(x)| = |2\cos x - x\sin x|$$

értékére. Számítógéppel rajzoltassuk ki f'' grafikonját a $[0, \pi]$ intervallumon, és keressünk az előzőleg megtalált $(2+\pi)$-nél kisebb felső korlátot!

Ezt a pontosabb korlátot M-ként használva adjunk jobb felső becslést $|E_T|$-re! Vegyük észre, hogy még ez is sokkal nagyobb, mint a trapézformulával elkövetett tényleges hibánk volt!

T 36. *(A 35. feladat folytatása.)*

(a) Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x\sin x$ függvény negyedik deriváltja

$$f^{(4)}(x) = -4\cos x + x\sin x!$$

Számítógéppel rajzoltassuk ki $f^{(4)}$ grafikonját, és keressünk egy M felső korlátot $|f^{(4)}(x)|$-re az $x \in [0,\pi]$ feltétel mellett!

(b) Az (a) feladatban kiszámolt M-et felhasználva adjunk felső becslést az elkövetett hibára, ha az

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx$$

integrált az $n = 10$ mellett alkalmazott Simpson-formulával becsüljük!

(c) A 35. feladatban megadott táblázat értékeivel becsüljük meg az $\int_0^\pi x\sin x\,dx$ integrált az $n = 10$ részintervallumos Simpson-formulával!

(d) Számoljuk ki a (c) részben kiszámolt érték, és az integrál valódi értékének (π) az eltérését legalább 6 tizedesjegy pontossággal! Azt vesszük észre, hogy a (b) részben adott hibabecslés igen jó volt.

37. Bizonyítsuk be, hogy ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor a trapézformula által az $\int_a^b f(x)\,dx$ kiszámolására adott T összeg egy Riemann-összeg.
(Útmutatás: a középértéktétel használatával lássuk be, hogy létezik $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, amelyre $f(c_k) = (f(x_{k-1}) + f(x_k))/2$.)

38. Bizonyítsuk be, hogy ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor a Simpson-formula által az $\int_a^b f(x)\,dx$ kiszámolására adott S összeg egy Riemann-összeg!

Numerikus integrálás számítógéppel

Ahogy már említettük, néhány folytonos függvény határozott integrálja nem számolható ki a Newton–Leibniz-szabály alkalmazásával, mivel ezen függvények primitív függvénye nem elemi függvény. Numerikusan közelítve mégis meg tudjuk becsülni ezen nem elemi integrálok értékét. Ha a számológépe vagy a számítógépe képes numerikusan integrálni, próbálja meg kiszámíttatni vele a 39–42. feladatokban szereplő integrálokat!

39. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$ — Ezzel a nem elemi integrállal Newton is foglalkozott.

40. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$ — A 33. feladat integrálja. Azért, hogy elkerüljük a 0-val osztást, valamely pici pozitív számtól (például 10^{-6}-tól) integráljunk 0 helyett.

41. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x^2)\,dx$ — A fény diffrakciójánál fellépő integrál.

42. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 40\sqrt{1-0{,}64\cos^t t}\,dt$ — Az $(x^2/25) + (y^2/9) = 1$ képletű ellipszis kerülete.

T 43. Tekintsük az $\int_0^\pi \sin x\,dx$ integrált!

(a) Becsüljük meg az értékét a trapézformulával $n = 10$, 100, 1000 mellett!

(b) Írjuk fel a közelítés hibáját a lehető legnagyobb pontossággal!

(c) Milyen szabályszerűséget látunk?

(d) Hogyan függ ez össze az E_T-re adható hibabecsléssel?

T 44. *(A 43. feladat folytatása.)* Ismételjük meg a 43. számításait a Simpson-formulával, illetve E_S-sel!

45. Tekintsük az $\int_{-1}^1 \sin(x^2)\,dx$ integrált!

(a) Mi az $f(x) = \sin(x^2)$ függvény második deriváltja?

(b) Számítógéppel rajzoltassuk ki f'' grafikonját! (A program a képernyőn a $[-1,1] \times [-3,3]$ téglalapot mutassa!)

(c) Miért tűnik jónak az $|f''(x)| \le 3$, $x \in [-1,1]$ felső korlát a (b)-beli grafikon alapján?

(d) Lássuk be a (c)-beli becslés használatával, hogy

$$|E_T| \le \frac{(\Delta x)^2}{2}!$$

(e) Mutassuk meg, hogy a trapézformula hibája kevesebb lesz mint 0,01, ha $\Delta x \le 0{,}1$!

(f) Mekkorának kell n-et választanunk, hogy $\Delta x \le 0{,}1$ legyen?

46. Tekintsük az $\int_{-1}^1 \sin(x^2)\,dx$ integrált!

(a) Mi az $f(x) = \sin(x^2)$ függvény negyedik deriváltja?

(b) Számítógéppel rajzoltassuk ki f'' grafikonját! (A program a képernyőn a $[-1,1] \times [-30,10]$ téglalapot mutassa!)

(c) Miért tűnik jónak az $|f''(x)| \le 30$, $x \in [-1,1]$ felső korlát a (b)-beli grafikon alapján?

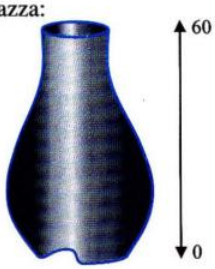
(d) Lássuk be a (c)-beli becslés használatával, hogy

$$|E_S| \le \frac{(\Delta x)^4}{3}!$$

(e) Mutassuk meg, hogy a Simpson-formula hibája kevesebb lesz mint 0,01, ha $\Delta x \le 0{,}4$!

(f) Mekkorának kell n-et választanunk, hogy $\Delta x \le 0{,}4$ legyen?

T 47. Váza térfogata: Egy díszváza térfogatát szeretnénk megbecsülni egy számológép, vonalzó és madzag használatával. A váza magasságát 60 cm-nek mérjük. A madzag és a vonalzó segítségével megmérjük a váza kerületét egymástól 5 cm távolságra, felülről lefelé haladva. Az adatokat az alábbi táblázat tartalmazza:



Kerület (cm)	
54	108
45	116
44	116
51	108
63	90
78	63
94	

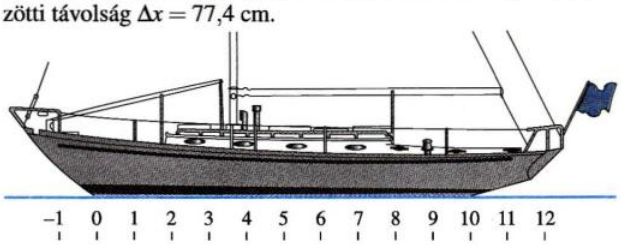
(a) Számoljuk ki az adott kerületekhez tartozó keresztmetszetek területét!

(b) Írjuk fel a térfogatot a $[0,60]$ intervallumon vett integrálként!

(c) Becsüljük meg az integrál értékét a trapézformula $n = 12$ melletti alkalmazásával!

(d) Becsüljük meg az integrál értékét a Simpson-formula $n = 12$ melletti alkalmazásával is! Melyik eredményt tartjuk pontosabbnak, és miért?

48. Hajó vízkiszorítása: Egy hajó vízkiszorítását általában úgy mérik, hogy a vízvonalnál 10 egyenlő hosszúságú részre osztják a hajótestet, megmérik a víz alatti rész $A(x)$ keresztmetszetét minden egyes osztópontnál, majd a Simpson-formula segítségével közelítőleg kiszámolják $A(x)$ integrálját. A táblázat a *Pipedream* naszád víz alatti keresztmetszeteit mutatja „állomásonként", ahogy az osztópontokat nevezik. Az osztópontok közötti távolság $\Delta x = 77{,}4$ cm.



állomás	víz alatti terület (cm^2)
0	0
1	994
2	3567
3	7265
4	11334
5	14102
6	14994
7	13006
8	8556
9	3010
10	0

(a) Becsüljük meg a hajó vízkiszorítását!

(b) A táblázat adatai tengervízre vonatkoznak, amelynek a sűrűsége 1030 kg/m^3. Hány kg tömegű vizet szorít ki a *Pipedream*?

(c) Hasábos teltség: Egy hajótest hasábos teltségét úgy kapjuk, hogy a hajótest vízvonal alatti részének a térfogatát elosztjuk a köré rajzolható legszűkebb hasáb térfogatával. A hasáb alapterülete a legnagyobb víz alatti metszet területe (amely a mi esetünkben 14994 cm^2), a magassága pedig megegyezik a vízvonalhosszal (amely a *Pipedream* esetén 774 cm). A legjobb vitorlásoknál a hasábos teltség 0,51 és 0,54 között van. Mekkora a *Pipedream* hasábos teltsége?

49. Elliptikus integrál: Az

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

képlettel megadott ellipszis kerülete

$$4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\, dt,$$

ahol e az ellipszis excentricitása. Ez az integrál, amelyet *elliptikus integrálnak* nevezünk, nem elemi, kivéve az $e = 0$, illetve $e = 1$ esetet.

(a) Legyen $a = 1$ és $e = 1/2$! Becsüljük meg az ellipszis kerületét a trapézformula $n = 10$ melletti alkalmazásával!

(b) . Tudjuk, hogy az $f(t) = \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}$ második deriváltjának az abszolút értéke kisebb, mint 1. Ezt felhasználva adjunk felső korlátot az (a) rész becslése során elkövetett hibára!

T 50. Az $y = \sin x$ görbe egy ívének a hossza

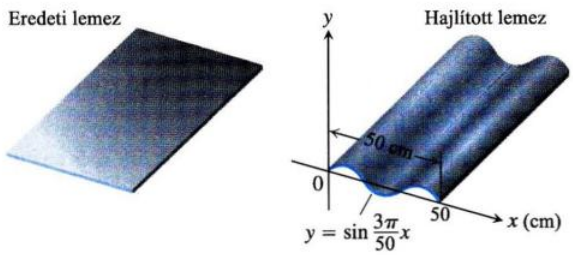
$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

Becsüljük meg L értékét az $n = 8$-al alkalmazott Simpson-formulával!

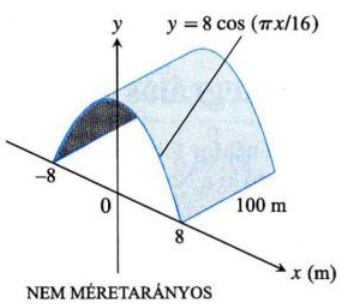
T 51. A vasgyárunk a képen látható hullámlemez tetőfedő elemek gyártására szerződik. A vas hullámlemezek keresztmetszetét az

$$y = \sin\frac{3\pi}{50}x, \qquad 0 \le x \le 50 \text{ cm}$$

függvény írja le. Az elemek sík vaslemezekből készülnek hajlítással, az eredeti lemez megnyújtása vagy összenyomása nélkül. Milyen széles lemezekből kell a tetőfedő elemeket gyártani? (*Útmutatás:* numerikus integrálással számítsuk ki a szinuszfüggvény grafikonjának az ívhosszát!)



T 52. Az építőcégünk egy alagút megépítésére szerződik. Az alagút az alapjánál 16 méter széles, és 100 méter hosszú lesz. A keresztmetszetét az $y = 8\cos(\pi x/16)$ függvény írja le. Az építés végén az alagút belső felületét (az útpályát nem) olyan vízzáró anyaggal kell szigetelnünk, melynek ára 20$ négyzetméterenként. Mennyibe fog kerülni a szigetelés? (*Útmutatás:* numerikus integrálással becsüljük meg a koszinuszfüggvény grafikonjának ívhosszát!)



NEM MÉRETARÁNYOS

Felszínszámolás

Az 53–56. feladatokban megadott görbéket megforgatjuk az x-tengely körül. Számoljuk ki két tizedesjegy pontossággal a súrolt palást felszínét!

53. $y = \sin x, \qquad 0 \le x \le \pi$

54. $y = x^2/4, \qquad 0 \le x \le 2$

55. $y = x + \sin 2x, \qquad -2\pi/3 \le x \le 2\pi/3$

56. $y = \frac{x}{12}\sqrt{36 - x^2}, \qquad 0 \le x \le 6$

Függvényérték közelítő számítása

57. Numerikus integrálással becsüljük meg

$$\arcsin 0{,}6 = \int_0^{0{,}6} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

értékét! (Ellenőrzésképp: $\arcsin 0{,}6 \approx 0{,}64350$.)

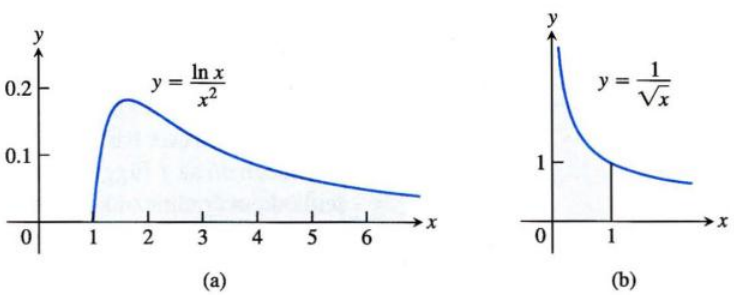
58. Az integrál közelítő kiszámolásával becsüljük meg

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

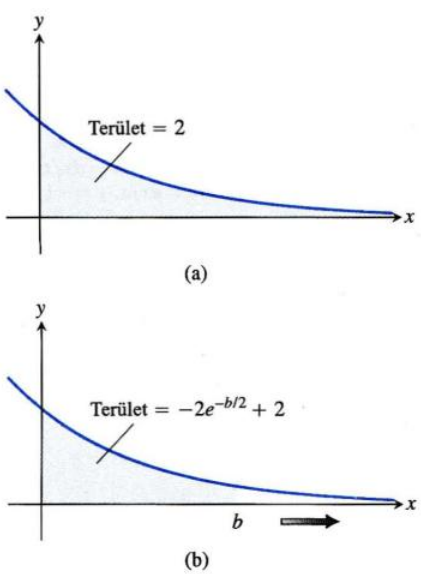
értékét!

8.8. Improprius integrálok

Egészen mostanáig a határozott integráloktól megköveteltünk két tulajdonságot. Az egyik az integrációs tartomány korlátossága, a másik az integrálandó függvény korlátossága volt. Az alkalmazások során sok olyan probléma merül fel, amelyekben a két feltétel egyike, vagy akár egyik sem teljesül. Az $y = (\ln x)/x^2$ görbe alatti terület $x = 1$ és $x = \infty$ között ilyen példa az integrálási tartomány végtelenségére (8.17a ábra), illetve az $y = 1/\sqrt{x}$ görbe alatti terület $x = 0$ és $x = 1$ között pedig példa az integrandus végtelenségére (8.17b ábra). Mindkét esetben az integrált *improprius integrálnak* mondjuk, és határértékként definiáljuk. A 11. fejezetben látni fogjuk, hogy az improprius integrálok fontos szerepet játszanak sorok konvergenciájának a vizsgálatakor is.



8.17. ÁBRA: A végtelenbe nyúló görbék alatti terület véges vagy végtelen?



8.18. ÁBRA: **(a)** Az $y = e^{-x/2}$ függvény alatti végtelen terület **(b)** kiszámolása I. típusú improprius integrálként.

Integrálás végtelen intervallumon

Nézzük az első síknegyedben a pozitív $y = e^{-x/2}$ függvény alatti végtelen kiterjedésű síkidomot. Úgy tűnhet, hogy ennek a végtelen síkidomnak a területe is végtelen, de mindjárt látni fogjuk, hogy az a szám, amelyet természetes intuícióval a területének nevezhetünk, véges. Lássuk, hogyan definiáljuk a kérdéses síkidom területét!

Először számoljuk ki a síkidom $x = 0$ és $x = b$ közé eső, $A(b)$-vel jelölt területét tetszőleges $b \geq 0$ számra: (Lásd a 8.18. ábrát!)

$$A(b) = \int_0^b e^{-x/2}\,dx = \Big[-2e^{-x/2}\Big]_0^b = -2e^{-b/2} + 2.$$

Most nézzük $A(b)$ határértékét $b \to \infty$ mellett:

$$\lim_{b\to\infty} A(b) = \lim_{b\to\infty} (-2e^{-b/2} + 2) = 2.$$

Így értelmezzük a függvény 0-tól ∞-ig vett integrálját:

$$\int_0^\infty e^{-x/2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x/2}\,dx = 2.$$

DEFINÍCIÓ: I. típusú improprius integrál

Azokat az integrálokat, amelyekben az integrációs tartomány végtelen, **I. típusú improprius integrálnak** nevezzük.

1. Ha $f(x)$ folytonos az $[a,\infty)$ intervallumon, akkor

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Ha $f(x)$ folytonos a $(-\infty,b]$ intervallumon, akkor

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

3. Ha $f(x)$ folytonos a $(-\infty,\infty)$ intervallumon, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx,$$

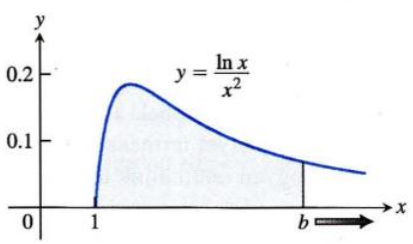
ahol c tetszőleges valós szám. Bármelyik esetben, ha a határérték létezik és véges, azt mondjuk, hogy az improprius integrál **konvergens**, és a határérték az integrál **értéke**. Ellenkező esetben az integrál **divergens**.

Könnyen belátható, hogy a harmadik esetben c értékének választása nem befolyásol semmit sem. Tetszőleges c választásával eldönthetjük, hogy divergens- vagy konvergens-e az $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ integrál, illetve hogy mennyi az értéke.

Ha $f \geq 0$, akkor bármelyik, az előző definícióban szereplő improprius integrál értelmezhető az f függvény alatti területként is. Például a 8.18. ábrán is végtelen területként értelmeztük az integrált, melynek értékéről láttuk, hogy 2. Ha $f \geq 0$, és az integrál divergens, akkor azt mondjuk, hogy a függvény grafikonja alatti terület **végtelen**.

1. PÉLDA: Improprius integrál az $[1,\infty)$ intervallumon

Az $y = (\ln x)/x^2$ görbe alatti terület $x = 1$ és $x = \infty$ között végtelen vagy véges? Ha véges, mekkora ez a terület?



8.19. ÁBRA: A görbe alatti terület egy improprius integrál értékével egyenlő (1. példa).

Megoldás: Megkeressük a görbe alatti területet $x = 1$ és $x = b$ között, majd megvizsgáljuk, hogy ez hova tart $b \to \infty$ esetén. Ha a határérték véges, akkor ez lesz a görbe alatti terület. (Lásd a 8.19. ábrát!) Az 1 és b közötti terület:

$$\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[(\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^b - \int_1^b \left(-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx = \qquad \begin{array}{l}\text{parciális integrálás}\\ u=\ln x,\ dv=dx/x^2,\\ du=dx/x,\ v=-1/x\end{array}$$

$$= -\frac{\ln b}{b} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1.$$

A terület határértéke $b \to \infty$ mellett

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1\right) =$$

$$= -\left(\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b}\right) - 0 + 1 =$$

$$= -\left(\lim_{b\to\infty}\frac{1/b}{1}\right) + 1 = 0 + 1 = 1. \qquad \text{a l'Hospital szabály szerint}$$

Ezzel beláttuk, hogy az improprius integrál konvergens, ennek megfelelően a görbe alatti terület véges, értéke 1. □

2. PÉLDA: **Improprius integrál a $(-\infty,\infty)$ intervallumon**

Számítsuk ki az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

integrál értékét!

Megoldás: A definíció 3. pontja szerint

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Számoljuk ki a jobb oldalon szereplő integrálokat külön-külön:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_a^0 =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

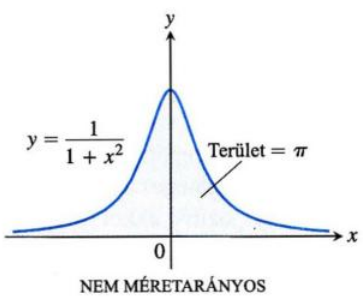
$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Így

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$



8.20. ÁBRA: A 2. példában megtudtuk, hogy a görbe alatti terület véges.

Mivel $1/(1+x^2) > 0$, az improprius integrált értelmezhetjük úgy is, mint az $y = 1/(1+x^2)$ görbe és az x-tengely által közbezárt terület értéke. (Lásd a 8.20. ábrát!) □

Az $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ improprius integrál

Az $y = 1/x$ választja el a konvergens és a divergens eseteket az $y = 1/x^p$ típusú függvények 1 és ∞ közötti improprius integráljai körében. Ahogy a következő példában látni fogjuk, $p > 1$ esetén az improprius integrál konvergens, $p \le 1$ esetben pedig divergens.

3. PÉLDA: **A konvergencia vizsgálata**

p mely értékei mellett lesz az

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

integrál konvergens? Ha konvergens, mennyi az értéke?

Megoldás: Ha $p \neq 1$, akkor

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b = \frac{1}{1-p}(b^{-p+1}-1) = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right).$$

Így

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^p} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right)\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{ha } p>1, \\ \infty & \text{ha } p<1, \end{cases}$$

ugyanis

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{p-1}} = \begin{cases} 0 & \text{ha } p>1, \\ \infty & \text{ha } p<1. \end{cases}$$

Azt kaptuk, hogy az integrál konvergens, és értéke $1/(p-1)$, ha $p>1$, és divergens $p<1$ esetén.
Ha $p=1$, az integrál akkor is divergens:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty. \qquad \square$$

Függőleges aszimptotájú függvény integrálása

Az improprius integrálok másik alapesete a függőleges aszimptotájú függvények integrálása. Az ilyen függvények az intervallum egyik végpontjában vagy az egyik közbülső pontban nem folytonosak, hanem egy függőleges aszimptotához „simul" a grafikonjuk. Ha az integrálandó f függvény pozitív, akkor az integrál ebben az esetben is értelmezhető az f függvény grafikonja és az x-tengely által közbezárt területként is.

Nézzük például az $y = 1/\sqrt{x}$ görbe alatti területét az $x=0$ és $x=1$ pontok között. (Lásd a 8.17b ábrát!) Válasszunk egy $a \in (0,1]$ számot, és számoljuk ki a görbe alatti területet $x=a$ és $x=1$ között (8.21. ábra).

$$\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = 2-2\sqrt{a}.$$

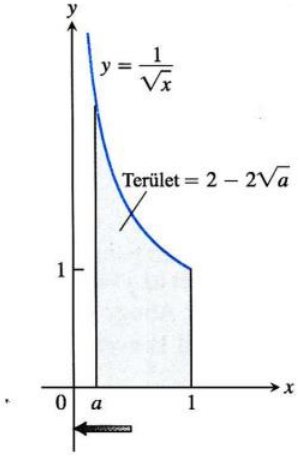
Ennek a területnek a határértéke $a \to 0^+$ mellett:

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+}\left(2-2\sqrt{a}\right) = 2.$$

Tehát a görbe 0 és 1 közötti része alatti terület véges, és értéke

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

Megjegyezzük, hogy az általános definícióhoz nem kell megkövetelni az aszimptota létezését.



8.21. ÁBRA: A görbe alatti területet egy második típusú integrál adja meg:

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = 2.$$

DEFINÍCIÓ: **II. típusú improprius integrál**

Azokat az integrálokat, amelyekben az integrandus az integrációs tartomány egyik pontja körül nem korlátos, **II. típusú improprius integrálnak** nevezzük.

1. Ha $f(x)$ folytonos $(a,b]$-n, de $x \to a^+$ esetén nem korlátos akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

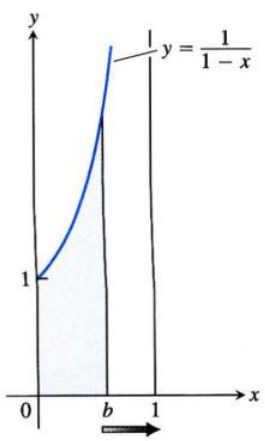
2. Ha $f(x)$ folytonos $[a,b)$-n, de $x \to b^-$ esetén nem korlátos, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

3. Ha $f(x)$ folytonos $[a,c) \cup (c,b]$-ben, de $x \to c$ esetén nem korlátos, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Bármelyik esetben, ha a határérték létezik és véges, azt mondjuk, hogy az improprius integrál **konvergens**, és a határérték az integrál **értéke**. Ellenkező esetben az integrál **divergens**.



8.22. ÁBRA: Az improprius integrál értéke

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{b \to 1^-} \int_0^b \frac{1}{1-x}\,dx = \infty,$$

azaz a $[0,1)$ intervallum fölött a függvény alatti terület minden valós számnál nagyobb (4. példa).

A harmadik esetben a bal oldali integrál akkor konvergens, ha az egyenlőség jobb oldalán szereplő *mindkét* integrál konvergens.

4. PÉLDA: **Egy divergens improprius integrál**

Vizsgáljuk meg

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$$

konvergenciáját!

Megoldás: Az $f(x) = 1/(1-x)$ integrandus folytonos $[0,1)$-en, de ha $x \to 1^-$, akkor $f(x)$ végtelenhez tart, vagyis nem folytonos az $x = 1$ pontban (8.22. ábra). Ennek megfelelően az integrált így számolhatjuk ki:

$$\lim_{b \to 1^-} \int_0^b \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{b \to 1^-} \Big[-\ln|1-x| \Big]_0^b =$$

$$= \lim_{b \to 1^-} \big(-\ln(1-b) + 0 \big) = \infty.$$

A határérték végtelen, tehát az integrál divergens. □

5. PÉLDA: **Függőleges aszimptota az intervallum belső pontjánál**

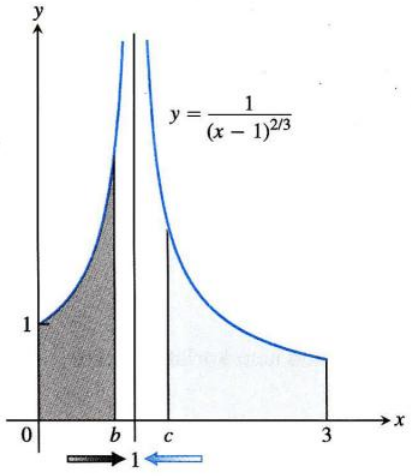
Számoljuk ki az

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

integrált!

Megoldás: Az integrandusnak az $x = 1$ helyen ∞ a határértéke, de folytonos a $[0,1)$ és $(1,3]$ intervallumokon. Így a definíció 3. pontja szerint

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}.$$



8.23. ÁBRA: Az 5. példában megmutattuk, hogy

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3+3\sqrt[3]{2},$$

azaz a függvény alatti terület véges.

Számoljuk ki a jobb oldalon szereplő integrálokat külön-külön:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} =$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \left[3(x-1)^{1/3}\right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \left(3(b-1)^{1/3}+3\right) = 3,$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c\to 1^+} \int_c^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} =$$

$$= \lim_{c\to 1^+} \left[3(x-1)^{1/3}\right]_c^3 =$$

$$= \lim_{c\to 1^+} \left(3(3-1)^{1/3}+3(c-1)^{1/3}\right) = 3\sqrt[3]{2}.$$

A két eredményt összeadva

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3+3\sqrt[3]{2}.$$ □

6. PÉLDA: **Egy konvergens improprius integrál**

Számoljuk ki az

$$\int_2^\infty \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$$

integrált!

Megoldás:

$$\int_2^\infty \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_2^b \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+1}\right) dx = \quad \text{parciális törtek}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[2\ln(x-1) - \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x\right]_2^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x\right]_2^b = \quad \text{összevonjuk a logaritmusokat}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\ln\frac{(b-1)^2}{b^2+1} - \operatorname{arctg} b\right) - \ln\frac{1}{5} + \operatorname{arctg} 2 =$$

$$= 0 - \frac{\pi}{2} + \ln 5 + \operatorname{arctg} 2 \approx 1{,}1458.$$

Fontos, hogy a logaritmusokat *azelőtt* vontuk össze, hogy kiszámoltuk a $b\to\infty$ melletti határértéket. Ha fordítva tennénk, az alábbi meghatározatlan összeget kapnánk:

$$\lim_{b\to\infty} \left(2\ln(b-1) - \ln(b^2+1)\right) = \infty - \infty.$$

A helyes út ennek a „meghatározatlan" összegnek a kiszámolására – amelyet követtünk is – hogy előbb összevonjuk a logaritmusokat, és utána állapítjuk meg a határértéket. □

Sok konvergens improprius integrált a matematikai programok is ki tudnak számolni. A 6. példában szereplő integrál kiszámolását a Maple-lel a függvény megadásával kezdjük:

```
> f:=(x+3)/((x-1)*(x^2+1));
```

majd kiadjuk az integráló parancsot:

```
> int(f, x=2..infinity);
```

A Maple kiírja a választ:

$$-\frac{1}{2}\pi + \ln(5) + \operatorname{arctg}(2).$$

Ha numerikus eredményt szeretnénk kapni, használjuk az **evalf** parancsot, és adjuk meg a kiírandó tizedesjegyek számát:

```
> evalf(%,6);
```

A parancs argumentumában a `%` azt jelenti, hogy a képernyőre utoljára kiírt kifejezésen szeretnénk az eljárást végrehajtani. A program válasza 1,14579.

A Mathematica használata esetén az

```
In[1]:=Integrate[(x+3)/((x-1)(x^2+1)),{x,2,Infinity}]
```

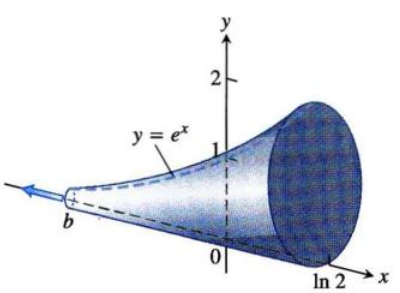
parancs kiadására kapott válasz:

$$\text{Out[1]} = \frac{-\text{Pi}}{2} + \text{ArcTan[2]} + \text{Log[5]}.$$

Ha 6 tizedesjegy pontosságú numerikus eredményt szeretnénk kapni, az `N[%, 6]` parancs szintén 1,14579-et ad válaszként.

7. PÉLDA: **Végtelen test térfogata**

A 8.24. ábrán látható végtelen kürt x-tengelyre merőleges, $x \in (-\infty, \ln 2]$ pontokban vett metszetei olyan körök, melyek átmérője az x-tengely és az $y = e^x$ görbe közötti távolsággal egyenlő. Mekkora a kürt térfogata?



8.24. ÁBRA: A 7. példa eredménye szerint ennek a végtelen kürtnek a térfogata véges.

Megoldás: Az x pont feletti metszet területe

$$A(x) = \pi(\text{sugár})^2 = \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{e^x}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}e^{2x}.$$

A kürt térfogatát úgy tudjuk kiszámolni, hogy az $A(x)$ függvényt integráljuk b és $\ln 2$ között, majd $b \to -\infty$ mellett vesszük a kapott eredmény határértékét. A b és $\ln 2$ közötti rész térfogata

$$V = \int_b^{\ln 2} A(x)\,dx = \int_b^{\ln 2} \frac{\pi}{4}e^{2x}\,dx = \left[\frac{\pi}{8}e^{2x}\right]_b^{\ln 2} =$$
$$= \frac{\pi}{8}\left(e^{\ln 4} - e^{2b}\right) = \frac{\pi}{8}\left(4 - e^{2b}\right).$$

Ha $b \to -\infty$, akkor $e^{2b} \to 0$, és így $V \to (\pi/8)(4-0) = \pi/2$. Azaz a végtelen kürt térfogata $\pi/2$. □

8. PÉLDA: **Egy helytelen megközelítés**

Számoljuk ki az

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$$

határozott integrált!

Megoldás: Csináljuk úgy, mintha nem vennénk észre, hogy a Newton–Leibniz-tétel feltétele nem teljesül, azaz az integrandus nem folytonos az $x = 1$ pontban. Ha az integrált egy folytonos függvény integráljaként próbálnánk kiszámolni, akkor azt kapnánk, hogy

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \Big[\ln|x-1|\Big]_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Az eredmény természetesen *rossz*, hiszen az integrál valójában egy improprius integrál. A helyes megközelítés ez:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}.$$

A jobb oldalon szereplő első integrál

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x-1} &= \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{x-1} = \\ &= \lim_{b\to 1^-} \Big[\ln|x-1|\Big]_0^b = \\ &= \lim_{b\to 1^-} (\ln|b-1| - \ln|-1|) = \\ &= \lim_{b\to 1^-} \ln(1-b) = -\infty. \qquad b\to 1^- \text{ mellett } 1-b\to 0^+\end{aligned}$$

Mivel $\int_0^1 dx/(x-1)$ divergens, a kiindulási $\int_0^3 dx/(x-1)$ is divergens kell hogy legyen. □

A 8. példa megmutatta, hogy teljesen tévútra vezetheti a számolást, ha nem ellenőrizzük a Newton–Leibniz-formula alkalmazhatóságának feltételeit, és egy improprius integrált „közönséges" integrálként kezelünk. Így, amikor találkozunk egy $\int_a^b f(x)\,dx$ integrállal, meg kell vizsgálnunk az f függvényt az $[a,b]$ intervallumon, és eldönteni, hogy az integrál improprius-e. Amennyiben f folytonos az $[a,b]$-n, akkor az integrál közönséges határozott integrál.

Konvergencia kritériumok

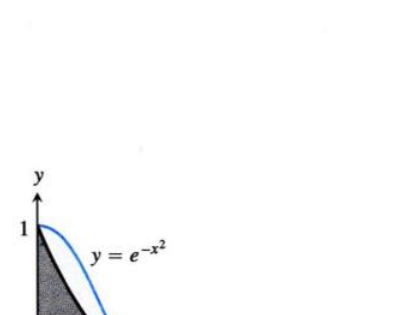
Ha nem tudjuk kiszámolni egy improprius integrál értékét, próbáljuk meg eldönteni, hogy divergens vagy konvergens-e. Ha az integrál divergens, akkor vége is a történetnek. Ha konvergens, akkor numerikus módszerekkel közelítően meghatározhatjuk az értékét. A két legegyszerűbb konvergenciateszt az összehasonlító kritérium, illetve a hányadosteszt.

9. PÉLDA: **Konvergencia-vizsgálat**

Döntsük el, hogy az $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ integrál konvergens vagy divergens?

Megoldás: A definíció szerint

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-x^2}\,dx.$$



8.25. ÁBRA: A 9. példában szereplő e^{-x^2} függvény grafikonja az e^{-x} grafikonja alatt van, ha $x > 1$.

A jobb oldalon szereplő integrált nem tudjuk közvetlenül kiszámolni, hiszen ez nem elemi integrál. Az viszont *be tudjuk bizonyítani*, hogy a jobb oldali határérték véges. Tudjuk, hogy $\int_1^b e^{-x^2}\,dx$ monoton növekvő függvénye b-nek, így a határérték $b\to\infty$ mellett vagy egy véges szám, vagy végtelen. De végtelen nem lehet, hiszen minden egyes $x \geq 1$-re $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, ahogy azt a 8.25. ábra is mutatja, és így nyílván

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^\infty e^{-x}\,dx = -e^{-b} + e^{-1} < e^{-1} \approx 0{,}36788.$$

Így az

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-x^2}\,dx$$

integrál konvergens, az értéke egy véges valós szám. Nem tudjuk, hogy mi ez a szám, csak annyit, hogy pozitív, és kisebb mint 0,37. (Itt valójában kihasználtuk a valós számok teljességét, amelyről az első kötetben, az F.3. függelékben olvashatunk.) □

Az e^{-x^2} és e^{-x} függvények összehasonlítása a 9. példában a következő konvergenciakritérium speciális esete volt.

1. TÉTEL: **Összehasonlító kritérium**

Legyenek f és g az $[a,\infty)$ intervallumon folytonos függvények, melyekre minden $x \geq a$ mellett $0 \leq f(x) \leq g(x)$ teljesül. Ekkor

1. Ha $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergens, akkor $\int_a^\infty f(x)\,dx$ is konvergens,
2. Ha $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergens, akkor $\int_a^\infty g(x)\,dx$ is divergens.

Az 1. tétel bizonyítása hasonló a 9. példában követett gondolatmenethez. Ha minden $x \geq a$-ra $0 \leq f(x) \leq g(x)$, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx, \qquad \text{ha } b > a.$$

Innen a 9. példához hasonlóan megállapíthatjuk, hogy

$$\text{ha } \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ konvergens, akkor } \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ is konvergens,}$$

illetve a másik következtetés

$$\text{ha } \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ divergens, akkor } \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ is divergens.}$$

10. PÉLDA: **Az összehasonlító kritérium használata**

1. $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ konvergens, mert

$$0 \leq \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}, \quad \text{ha} \quad x \in [1,\infty], \quad \text{és} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{konvergens.}$$

2. $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2-0{,}1}}\,dx$ divergens, mert

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-0{,}1}} \geq \frac{1}{x} \geq 0, \quad \text{ha} \quad x \in [1,\infty], \quad \text{és} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \quad \text{divergens.}$$

(Az $\int_1^\infty dx/x^2$ konvergenciáját és az $\int_1^\infty dx/x$ divergenciáját a 3. példa eredménye alapján állapíthatjuk meg.) □

2. TÉTEL: Hányadosteszt

Ha az f és g pozitív függvények folytonosak az $[a,\infty)$ intervallumon, és

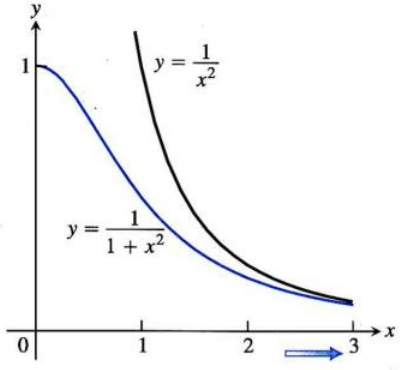
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L, \qquad \text{ahol} \qquad 0<L<\infty,$$

akkor az

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \qquad \text{és az} \qquad \int_0^\infty g(x)\,dx$$

integrálok vagy mindketten konvergensek, vagy mindketten divergensek.

A 2. tételt itt nem bizonyítjuk. Bár a tétel szerint a két improprius integrál ugyanakkor konvergens, a következő példában látni fogjuk, hogy nem szükséges, hogy az integrálok értéke meg is egyezzen.



8.26. ÁBRA: A 11. példában szereplő két függvény.

11. PÉLDA: A hányadosteszt használata

Az $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$-szel való összehasonlítással mutassuk meg, hogy az

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

integrál konvergens. Számoljuk ki mindkét integrál értékét!

Megoldás: Az $f(x)=1/x^2$ és a $g(x)=1/(1+x^2)$ függvények pozitívak és folytonosak az $[1,\infty)$ intervallumon (8.26. ábra). Emellett

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x^2}{1/(1+x^2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x^2}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)=0+1=1,$$

azaz hányadosuk határértéke pozitív és véges. Így $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ konvergens, mert $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ is az.

Viszont a két integrál értéke különböző, hiszen

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}=\frac{1}{2-1}=1, \qquad \text{a 3. példa alapján}$$

és

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{1+x^2}=$$
$$=\lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg} b-\operatorname{arctg} 1)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}. \qquad \square$$

12. PÉLDA: A hányadosteszt használata

Mutassuk meg, hogy az

$$\int_1^\infty \frac{3}{e^x+5}\,dx$$

improprius integrál konvergens!

Megoldás: A 9. példában láttuk, hogy $\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \int_1^\infty (1/e^x)\,dx$ konvergens. Emellett

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1/e^x}{3/(e^x+5)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+5}{3e^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3e^x}\right) = \frac{1}{3},$$

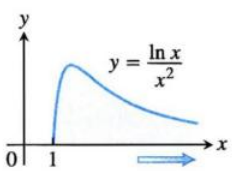
azaz a hányados határértéke pozitív és véges. Így a konvergencia szempontjából a $3/(e^x+5)$ és az $1/e^x$ improprius integrálja ugyanúgy viselkedik. □

A fejezetben tárgyalt improprius integrálok fajtái

I. TÍPUS: VÉGTELEN INTERVALLUM

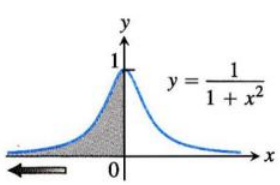
1. Felülről nem korlátos intervallum:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$



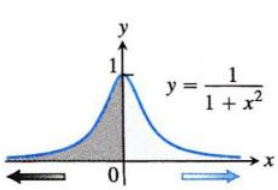
2. Alulról nem korlátos intervallum:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2}$$



3. Se alulról, se felülről nem korlátos intervallum:

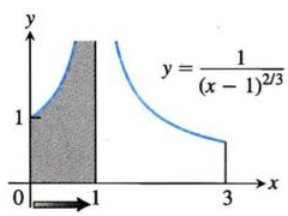
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to-\infty} \int_b^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{c\to\infty} \int_0^c \frac{dx}{1+x^2}$$



II. TÍPUS: NEM KORLÁTOS INTEGRANDUS

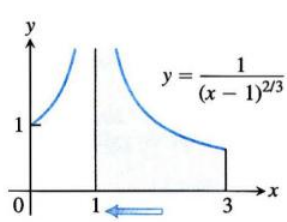
4. A felső végpontnál nem korlátos:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



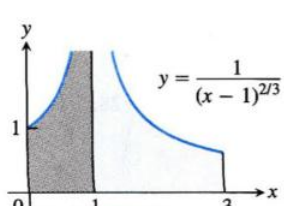
5. Az alsó végpontnál nem korlátos:

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{d\to1^+} \int_d^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



6. Egy közbülső pontnál nem korlátos:

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



8.8. Feladatok

Improprius integrálok kiszámolása

Számoljuk ki az improprius integrálokat (1–34. feladatok)! Ne használjunk integráltáblázatot a megoldás során!

1. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$

2. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1,001}}$

3. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

4. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

5. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$

6. $\int_{-8}^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$

7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

8. $\int_0^1 \frac{dr}{r^{0,999}}$

9. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{2\,dx}{x^2-1}$

10. $\int_{-\infty}^{2} \frac{2\,dx}{x^2+4}$

11. $\int_2^\infty \frac{2}{v^2-v}\,dv$

12. $\int_2^\infty \frac{2\,dt}{t^2-1}$

13. $\int_{-\infty}^\infty \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}$

14. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{(x^2+4)^{3/2}}$

15. $\int_0^1 \frac{\theta+1}{\sqrt{\theta^2+2\theta}}\,d\theta$

16. $\int_0^2 \frac{s+1}{\sqrt{4-s^2}}\,ds$

17. $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

18. $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

19. $\int_0^\infty \frac{dv}{(1+v^2)(1+\operatorname{arctg} v)}$

20. $\int_0^\infty \frac{16\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$

21. $\int_{-\infty}^0 \theta e^\theta\,d\theta$

22. $\int_0^\infty 2e^{-\theta}\sin\theta\,d\theta$

23. $\int_{-\infty}^0 e^{-|x|}dx$

24. $\int_{-\infty}^\infty 2xe^{-x^2}dx$

25. $\int_0^1 x\ln x\,dx$

26. $\int_0^1 (-\ln x)\,dx$

27. $\int_0^2 \frac{ds}{\sqrt{4-s^2}}$

28. $\int_0^1 \frac{4r\,dr}{\sqrt{1-r^4}}$

29. $\int_1^2 \frac{ds}{s\sqrt{s^2-1}}$

30. $\int_2^4 \frac{dt}{t\sqrt{t^2-4}}$

31. $\int_{-1}^4 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$

32. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$

33. $\int_{-1}^\infty \frac{d\theta}{\theta^2+5\theta+6}$

34. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

Konvergencia eldöntése

Vizsgáljuk meg, hogy a 35–64. feladatokban a megadott improprius integrálok konvergensek-e! Használjuk a definíciót, az összehasonlító kritériumokat vagy a hányadosteszt! Ha egy feladat többféleképp is megoldható, tetszőleges módszerrel dolgozhatunk.

35. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}\theta\,d\theta$

36. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg}\theta\,d\theta$

37. $\int_0^\pi \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{\pi-\theta}}$

38. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta\,d\theta}{(\pi-2\theta)^{1/3}}$

39. $\int_0^{\ln 2} x^{-2}e^{-1/x}\,dx$

40. $\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

41. $\int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{t}+\sin t}$

42. $\int_0^1 \frac{dt}{t-\sin t}$ (*Útmutatás:* $t \geq \sin t$, ha $t \geq 0$.)

43. $\int_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$

44. $\int_0^2 \frac{dx}{1-x}$

45. $\int_{-1}^1 \ln|x|\,dx$

46. $\int_{-1}^1 -x\ln|x|\,dx$

47. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3+1}$

48. $\int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

49. $\int_2^\infty \frac{dv}{\sqrt{v-1}}$

50. $\int_0^\infty \frac{d\theta}{1+e^\theta}$

51. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$

52. $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

53. $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}$

54. $\int_2^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$

55. $\int_\pi^\infty \frac{2+\cos x}{x}\,dx$

56. $\int_\pi^\infty \frac{1+\sin x}{x^2}\,dx$

57. $\int_4^\infty \frac{2\,dt}{t^{3/2}-1}$

58. $\int_2^\infty \frac{1}{\ln x}\,dx$

59. $\int_1^\infty \frac{e^x}{x}\,dx$

60. $\int_{e^e}^\infty \ln(\ln x)\,dx$

61. $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x-x}}\,dx$

62. $\int_1^\infty \frac{1}{e^x-2^x}\,dx$

63. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$

64. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

További példák és feladatok

65. Mely p értékekre lesz az integrál konvergens?

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ **(b)** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p}$

66. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ **nem feltétlenül egyenlő** $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,dx$ **-szel:** Mutassuk meg, hogy

$$\int_0^\infty \frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

divergens, így az

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

integrál is divergens! Lássuk be, hogy ezzel szemben

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} \frac{2x\,dx}{x^2+1} = 0!$$

A 67–70. feladatok az x-tengely és az $y = e^{-x}$ görbe által határolt síkidom első síknegyedbe eső részéről szólnak.

67. Számoljuk ki a síkidom területét!

68. Keressük meg a síkidom súlypontját!

69. Forgassuk meg a síkidomot az y-tengely körül! Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

70. Forgassuk meg a síkidomot az x-tengely körül! Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

71. Mekkora területet zár közre az $y = \sec x$ és az $y = \operatorname{tg} x$ görbe $x = 0$ és $x = \pi/2$ között?

72. Forgassuk meg a 71. feladatban megadott síkidomot az x-tengely körül!

(a) Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

(b) Mutassuk meg, hogy a forgástest felszíne véges!

73. Konvergens improprius integrál értékének becslése:

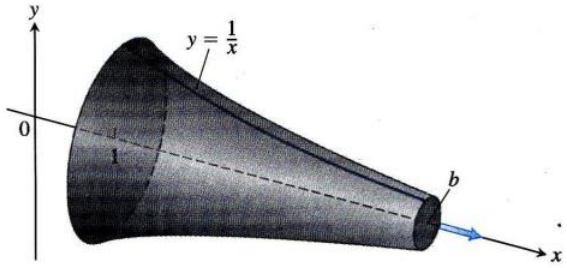
(a) Mutassuk meg, hogy

$$\int_3^\infty e^{-3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{-9} < 0{,}000042.$$

Indokoljuk meg, hogy emiatt miért lehet az $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ integrált $\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$ -szel közelíteni úgy, hogy a hiba 0,000042 alatt maradjon!

(b) Becsüljük meg numerikusan $\displaystyle\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$ értékét!

74. Végtelen festékesbödön: Vegyük azt a forgástestet, amely az $y = 1/x$, $1 \le x$ görbe x-tengely körüli megforgatásával keletkezik.



A forgástest *felszínét* az

$$\int_1^\infty 2\pi\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx$$

integrállal számolhatjuk ki. A 3. példában láttuk, hogy az $\int_1^\infty (dx/x)$ divergens. Így tetszőleges $b > 0$-ra

$$\int_1^b 2\pi\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx > 2\pi\int_1^b \frac{1}{x}\,dx,$$

amiből az következik, hogy a forgástest felszínét leíró integrál divergens. Viszont a test *térfogatát* leíró

$$\int_1^\infty \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

integrál konvergens.

(a) Számoljuk ki az utóbbi integrál értékét!

(b) Ezt a forgástestet sokszor úgy emlegetik, mint egy olyan festékesbödönt, amelybe nem fér bele annyi festék, amennyivel be lehetne festeni a belsejét. Töprengjünk el ezen! Az biztos, hogy véges mennyiségű festékkel nem tudjuk befesteni a végtelen területű felszínt. De ha csurig töltjük a bödönt – amihez véges mennyiségű festék is elég – a festék megfesti a felszínt belülről! Oldjuk fel ezt az ellentmondást!

75. A szinusz-integrál függvény: Tekintsük az optikában fontos,

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

képlettel definiált *szinusz-integrál függvényt!*

(a) Ábrázoljuk a $(\sin t)/t$ függvényt a $t > 0$ félegyenesen! A Si függvény monoton növekvő? Csökkenő? Esetleg egyik sem? Ellenőrizzük a válaszunkat úgy, hogy a $\operatorname{Si}(x)$ függvényt számítógéppel ábrázoljuk az $x \in [0,25]$ intervallumon!

(b) Vizsgáljuk meg

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$$

konvergenciáját! Ha konvergens, kb. mennyi az értéke?

76. A Gauss-féle hibafüggvény: Tekintsük a valószínűségszámításban és statisztikában fontos

$$\operatorname{erf}(x) = \int_0^x \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,dt$$

hibafüggvényt!

(a) Ábrázoljuk a függvényt számítógéppel az $x \in [0,25]$ intervallumon!

(b) Vizsgáljuk meg az

$$\int_0^\infty \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,dt$$

konvergenciáját! Ha konvergens, kb. mennyi az értéke?

77. A normális eloszlás sűrűségfüggvénye: A valószínűségszámításban fontos szerepet játszó σ szórású és μ várható értékű *normális eloszlás sűrűségfüggvénye*

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Itt μ jelenti az eloszlás középpontját, a σ pedig azt méri, hogy az események mennyire „szóródnak" a középpont körül. Valószínűségszámításból tudhatjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1.$$

A továbbiakban legyen $\mu=0$ és $\sigma=1$.

(a) Rajzoltassuk ki a függvény grafikonját! Keressük meg, hogy a függvény mely intervallumon monoton nő, melyen csökken, és hol vannak lokális szélsőértékei!

(b) Számítsuk ki

$$\int_{-n}^{n} f(x)\,dx$$

értékét $n=1,2,3$-ra!

(c) Adjunk meggyőző érvet arra, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1!$$

(*Útmutatás*: mutassuk meg, hogy $x>1$-re $0<f(x)<e^{-x/2}$, és $b>1$ esetén

$$\int_b^\infty e^{-x/2}\,dx\to 0,\qquad \text{ha } b\to\infty!)$$

78. Adunk egy (hamis) „bizonyítást" arra, hogy $\ln 3=\infty-\infty$! Hol a hiba a gondolatmenetben?

$$\begin{aligned}
\ln 3&=\ln 1+\ln 3=\ln 1-\ln\frac{1}{3}=\\
&=\lim_{b\to\infty}\ln\left(\frac{b-2}{b}\right)-\ln\frac{1}{3}=\\
&=\lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{x-2}{x}\right]_3^b=\\
&=\lim_{b\to\infty}\Big[\ln(x-2)-\ln x\Big]_3^b=\\
&=\lim_{b\to\infty}\int_3^b\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)dx=\\
&=\int_3^\infty\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)dx=\\
&=\int_3^\infty\frac{1}{x-2}\,dx-\int_3^\infty\frac{1}{x}\,dx=\\
&=\lim_{b\to\infty}\Big[\ln(x-2)\Big]_3^b-\lim_{b\to\infty}\Big[\ln x\Big]_3^b=\\
&=\infty-\infty.
\end{aligned}$$

79. Tegyük fel, hogy f minden véges intervallumon integrálható, és legyenek $a<b$ valós számok! Lássuk be, hogy

(a) $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ és $\int_a^\infty f(x)\,dx$ akkor és csak akkor konvergensek, ha $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ és $\int_b^\infty f(x)\,dx$ konvergensek,

(b) $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx+\int_a^\infty f(x)\,dx=\int_{-\infty}^b f(x)\,dx+\int_b^\infty f(x)\,dx$, amennyiben a szereplő integrálok konvergensek!

80. Lássuk be, hogy

(a) ha f páros függvény, és az integrálok léteznek, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=2\int_0^\infty f(x)\,dx,$$

(b) ha f páratlan függvény, és létezik az integrál, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=0!$$

Vizsgáljuk meg, hogy a 81–88. feladatokban megadott improprius integrálok konvergensek-e! Használjuk a definíciót, az összehasonlító kritériumokat, a hányadostesztet, vagy a 80. feladat eredményét!

81. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ **82.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$

83. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ **84.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x}\,dx}{x^2+1}$

85. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}\,dx$ **86.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^2}$

87. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\sin x|+|\cos x|}{|x|+1}\,dx$

(*Útmutatás:* $|\sin\theta|+|\cos\theta|\geq\sin^2\theta+\cos^2\theta$.)

88. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$

$\int x^p\ln x$ számítógépes vizsgálata

Vizsgáljuk meg számítógéppel a 89–92. feladatokban szereplő integrálok konvergenciáját p különböző (nem feltétlenül egész) értékei mellett! p mely értékeire lesz az integrál konvergens? Mi az integrál értéke ezekben az esetekben? Rajzoltassuk ki az integrandust p különböző értékeire!

89. $\displaystyle\int_0^e x^p\ln x\,dx$ **90.** $\displaystyle\int_e^\infty x^p\ln x\,dx$

91. $\displaystyle\int_0^\infty x^p\ln x\,dx$ **92.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^p\ln|x|\,dx$

8. fejezet Áttekintő kérdések

1. Milyen alapintegrálokat ismerünk?

2. Milyen módszereket ismerünk integrálok alapképletekre való visszavezetésére?

3. Mi a parciális integrálás képlete? Honnan származik? Milyen esetekben használjuk?

4. Amikor parciális integrálás mellett döntünk, mi alapján választjuk meg u-t és dv-t? Hogyan lehet egy $\int f(x)\,dx$ formában megadott integrált parciálisan integrálni?

5. Mi a táblázatos integrálás? Adjunk példát rá!

6. Mi a parciális törtekre bontás célja?

7. Tegyük fel, hogy az $f(x)$ polinom foka alacsonyabb a $g(x)$ polinom fokánál! Hogyan bontjuk $f(x)/g(x)$-et parciális törtek összegére, ha

(a) $g(x)$ különböző elsőfokú polinomok szorzata,

(b) $g(x)$ egy lineáris tényező hatványa,

(c) $g(x)$ tartalmaz egy irreducibilis másodfokú tényezőt?

Mit teszünk, ha f foka nem alacsonyabb g fokánál?

8. Legyenek m,n nemnegatív egészek! Hogyan számoljuk ki az $\int \sin^n x\cos^m x\,dx$ integrált? Adjunk példát a különböző esetekre!

9. Milyen helyettesítésekkel tudnánk kiszámolni a

$$\sin mx\sin nx,\ \sin mx\cos nx,\ \text{illetve a}\ \cos mx\cos nx$$

alakú függvények integrálját? Adjunk példát mindegyik esetre!

10. Milyen helyettesítésekkel tudjuk egyszerűbb alakra hozni azokat az integrálokat, amelyekben $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, illetve $\sqrt{x^2-a^2}$ szerepel? Adjunk példát mindegyik esetre!

11. Milyen megszorításokat teszünk a három leggyakoribb trigonometrikus helyettesítés változóira, hogy a helyettesítések visszafordíthatóak legyenek (azaz legyen inverzük)?

12. Mire és hogyan használhatóak az integráltáblázatok? Mit teszünk, ha a kiszámolandó integrál nem szerepel a táblázatban?

13. Mit nevezünk redukciós formulának? Általában honnan származnak? Mire használjuk őket? Adjunk példát egy redukciós formula használatára!

14. Egy rövid „Hogyan integráljunk numerikusan" ismertetőt írunk, és épp a trapézformulánál tartunk.

(a) Mit írnánk magáról a formuláról és a használatáról? Mit javasolnánk a pontosság növelésére?

(b) Mit írnánk ugyanezekről a Simpson-formula esetében?

15. Hasonlítsuk össze a trapéz- és Simpson-formulát! Melyiknek mi az előnye és a hátránya?

16. Melyek az I. típusú, illetve II. típusú improprius integrálok? Definiáljuk a különböző fajta improprius integrálok értékét! Adjunk példát mindegyikre!

17. Milyen módszerrel tudjuk eldönteni egy olyan improprius integrál konvergenciáját, amelynek értékét nem lehet pontosan kiszámolni? Adjunk példát a konvergenciakritériumok használatára!

8. fejezet Gyakorló feladatok

Integrálás helyettesítéssel

Számítsuk ki az 1–82. feladatokban szereplő integrálokat! Az integrálok egyszerűbb alakra hozásához szükség szerint használjunk helyettesítést, teljes négyzetté kiegészítést, törtek szétbontását, maradékos osztást!

1. $\int x\sqrt{4x^2-9}\,dx$

2. $\int 6x\sqrt{3x^2+5}\,dx$

3. $\int x(2x+1)^{1/2}\,dx$

4. $\int x(1-x)^{-1/2}\,dx$

5. $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{8x^2+1}}$

6. $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

7. $\int \dfrac{y\,dy}{25+y^2}$

8. $\int \dfrac{y^3\,dy}{4+y^4}$

9. $\int \dfrac{t^3\,dt}{\sqrt{9-4t^2}}$

10. $\int \dfrac{2t\,dt}{t^4+1}$

11. $\int z^{2/3}(z^{5/3}+1)^{2/3}\,dz$

12. $\int z^{-1/5}(1+z^{4/5})^{-1/2}\,dz$

13. $\int \dfrac{\sin 2\theta\,d\theta}{(1-\cos 2\theta)^2}$

14. $\int \dfrac{\cos\theta\,d\theta}{(1+\sin\theta)^{1/2}}$

15. $\int \dfrac{\sin t}{3+4\cos t}\,dt$

16. $\int \dfrac{\cos 2t}{1+\sin 2t}\,dt$

17. $\int (\sin 2x)e^{\cos 2x}\,dx$

18. $\int (\sec x)(\operatorname{tg} x)e^{\sec x}\,dx$

19. $\int e^{\theta}\sin(e^{\theta})\cos^2(e^{\theta})\,d\theta$

20. $\int e^{\theta}\sec^2(e^{\theta})\,d\theta$

21. $\int 2^{x-1}\,dx$

22. $\int 5^{x\sqrt{2}}\,dx$

23. $\int \dfrac{dv}{v\ln v}$

24. $\int \dfrac{dv}{v(2+\ln v)}$

25. $\int \dfrac{dx}{(x^2+1)(2+\operatorname{arctg} x)}$

26. $\int \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

27. $\int \dfrac{2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

28. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{49-x^2}}$

29. $\int \dfrac{dt}{\sqrt{16-9t^2}}$

30. $\int \dfrac{dt}{\sqrt{9-4t^2}}$

31. $\int \dfrac{dt}{9+t^2}$

32. $\int \dfrac{dt}{1+25t^2}$

33. $\int \dfrac{4\,dx}{5x\sqrt{25x^2-16}}$

34. $\int \dfrac{6\,dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$

35. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

36. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$

37. $\int \dfrac{dy}{y^2-4y+8}$

38. $\int \dfrac{dt}{t^2+4t+5}$

39. $\int \dfrac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$

40. $\int \dfrac{dv}{(v+1)\sqrt{v^2+2v}}$

41. $\int \sin^2 x\,dx$

42. $\int \cos^2 3x\,dx$

43. $\int \sin^3 \frac{\theta}{2}\, d\theta$

44. $\int \sin^3\theta \cos^2\theta\, d\theta$

45. $\int \mathrm{tg}^3 2t\, dt$

46. $\int 6\sec^4 t\, dt$

47. $\int \frac{dx}{2\sin x \cos x}$

48. $\int \frac{2\,dx}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

49. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{\csc^2 y - 1}\, dy$

50. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\mathrm{ctg}^2 t + 1}\, dt$

51. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos^2 2x}\, dx$

52. $\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\sin^2 \frac{x}{2}}\, dx$

53. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\cos 2t}\, dt$

54. $\int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1+\cos 2t}\, dt$

55. $\int \frac{x^2}{x^2+4}\, dx$

56. $\int \frac{x^3}{9+x^2}\, dx$

57. $\int \frac{4x^2+3}{2x-1}\, dx$

58. $\int \frac{2x}{x-4}\, dx$

59. $\int \frac{2y-1}{y^2+4}\, dy$

60. $\int \frac{y+4}{y^2+1}\, dy$

61. $\int \frac{t+2}{\sqrt{4-t^2}}\, dt$

62. $\int \frac{2t^2+\sqrt{1-t^2}}{t\sqrt{1-t^2}}\, dt$

63. $\int \frac{\mathrm{tg}\, x\, dx}{\mathrm{tg}\, x + \sec x}$

64. $\int \frac{\mathrm{ctg}\, x}{\mathrm{ctg}\, x + \csc x}\, dx$

65. $\int \sec(5-3x)\, dx$

66. $\int x\csc(x^2+3)\, dx$

67. $\int \mathrm{ctg}\, \frac{x}{4}\, dx$

68. $\int \mathrm{tg}(2x-7)\, dx$

69. $\int x\sqrt{1-x}\, dx$

70. $\int 3x\sqrt{2x+1}\, dx$

71. $\int \sqrt{z^2+1}\, dz$

72. $\int (16+z^2)^{-3/2}\, dz$

73. $\int \frac{dy}{\sqrt{25+y^2}}$

74. $\int \frac{dy}{\sqrt{25+9y^2}}$

75. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

76. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$

77. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$

78. $\int \sqrt{4-x^2}\, dx$

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$

80. $\int \frac{12\, dx}{(x^2-1)^{3/2}}$

81. $\int \frac{\sqrt{w^2-1}}{w}\, dw$

82. $\int \frac{\sqrt{z^2-16}}{z}\, dz$

Parciális integrálás

Parciálisan integrálva számítsuk ki a határozatlan integrálokat (83–90. feladatok)!

83. $\int \ln(x+1)\, dx$

84. $\int x^2 \ln x\, dx$

85. $\int \mathrm{arctg}\, 3x\, dx$

86. $\int \arccos \frac{x}{2}\, dx$

87. $\int (x+1)^2 e^x\, dx$

88. $\int x^2 \sin(1-x)\, dx$

89. $\int e^x \cos 2x\, dx$

90. $\int e^{-2x} \sin 3x\, dx$

Parciális törtekre bontás

Számítsuk ki az integrálokat (91–110. feladatok)! A parciális törtekre bontás előtt szükség lehet helyettesítésre is.

91. $\int \frac{x\, dx}{x^2-3x+2}$

92. $\int \frac{x\, dx}{x^2+4x+3}$

93. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

94. $\int \frac{x+1}{x^2(x-1)}\, dx$

95. $\int \frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos^2\theta + \cos\theta - 2}$

96. $\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin^2\theta + \sin\theta - 6}$

97. $\int \frac{3x^2+4x+4}{x^3+x}\, dx$

98. $\int \frac{4x\, dx}{x^3+4x}$

99. $\int \frac{v+3}{2v^3-8v}\, dv$

100. $\int \frac{(3v-7)\, dv}{(v-1)(v-2)(v-3)}$

101. $\int \frac{dt}{t^4+4t^2+3}$

102. $\int \frac{t\, dt}{t^4-t^2-2}$

103. $\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}\, dx$

104. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x}\, dx$

105. $\int \frac{x^3+4x^2}{x^2+4x+3}\, dx$

106. $\int \frac{2x^3+x^2-21x+24}{x^2+2x-8}\, dx$

107. $\int \frac{dx}{x\left(3\sqrt{x+1}\right)}$

108. $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})}$

109. $\int \frac{ds}{e^s-1}$

110. $\int \frac{ds}{\sqrt{e^s+1}}$

Trigonometrikus helyettesítések

Számítsuk ki a 111–114 feladatokban szereplő integrálokat **(a)** trigonometrikus helyettesítés nélkül, illetve **(b)** trigonometrikus helyettesítés használatával!

111. $\int \frac{y\, dy}{\sqrt{16-y^2}}$

112. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{4+x^2}}$

113. $\int \frac{x\, dx}{4-x^2}$

114. $\int \frac{t\, dt}{\sqrt{4t^2-1}}$

Másodfokú kifejezések

Számítsuk ki a 115–118 feladatokban szereplő integrálokat!

115. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{9-x^2}}$

116. $\int \frac{dx}{x(9-x^2)}$

117. $\int \frac{dx}{9-x^2}$

118. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Trigonometrikus integrálok

Számítsuk ki a 119–126. feladatokban szereplő integrálokat!

119. $\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx$

120. $\int \cos^5 x \sin^5 x\, dx$

121. $\int \mathrm{tg}^4 x \sec^2 x\, dx$

122. $\int \mathrm{tg}^3 x \sec^3 x\, dx$

123. $\int \sin 5\theta \cos 6\theta\, d\theta$

124. $\int \cos 3\theta \cos 3\theta\, d\theta$

125. $\int \sqrt{1+\cos(t/2)}\, dt$

126. $\int e^t \sqrt{\mathrm{tg}^2 e^t + 1}\, dt$

Numerikus integrálás

127. Hány részintervallumra kell felosztanunk az alapintervallumot, hogy a Simpson-formulát alkalmazva

$$\ln 3 = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$$

közelítő kiszámolására a hiba kevesebb legyen, mint 10^{-4}? (Ne feledjük, a Simpson-formulát csak páros számú részintervallumra tudjuk alkalmazni!)

128. Az előzetes számításaink szerint az $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ függvény második deriváltja 0 és 8 között van, ha $0 \le x \le 1$. Hány részre kell ez alapján felosztanunk a $[0,1]$ intervallumot, hogy a trapézformulával f integrálját 10^{-3}-nál kisebb hibával becsülhessük meg?

129. Ismert, hogy

$$\int_0^{\pi} 2\sin^2 x\,dx = \pi.$$

Milyen pontosan közelíti ezt az integrált az $n = 6$ mellett alkalmazott trapéz-, illetve Simpson-formula? A formulák használatával állapítsuk meg a hiba pontos értékét!

130. A Simpson-formula alkalmazásával szeretnénk kiszámolni az

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

integrált. Már megállapítottuk, hogy az integrációs tartományon $|f^{(4)}(x)| \le 3$. Hány részintervallumra kell felírnunk a Simpson-formulát, hogy a hiba 10^{-5}-nél kisebb legyen? (Ne feledjük, a Simpson-formulát csak páros számú részintervallumra tudjuk alkalmazni!)

131. Éves középhőmérséklet: Az

$$f(x) = 20{,}6 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365}(x-101)\right) - 3{,}9$$

függvény az Alaszkában található Fairbanks napi középhőmérsékletét adja meg °C-ban. ($x = 0, 1, 2, \ldots 365$.) Számoljuk ki az éves középhőmérsékletet! (Az Amerikai Meterológiai Szolgálat hivatalos átlaghőmérsékleti adata −3,5°C, ami egy picit magasabb, mint $f(x)$ átlaga.)

132. Hőkapacitás: A C_v-vel jelölt hőkapacitás azt a hőmennyiséget jelöli, amennyi az adott anyag hőmérsékletének 1°C-szal való emeléséhez szükséges. Mértékegysége cal/C·mol (kalória/Celsius·mol). Az oxigén hőkapacitása a T hőmérsékletének a függvénye:

$$C_v(T) = 8{,}27 + 10^{-5}(26T - 1{,}87T^2).$$

Számoljuk ki $C_v(T)$ átlagát a $20°C \le T \le 675°C$ intervallumon, majd határozzuk meg, hogy hány fokon egyezik meg az oxigén hőkapacitása ezzel az átlaggal!

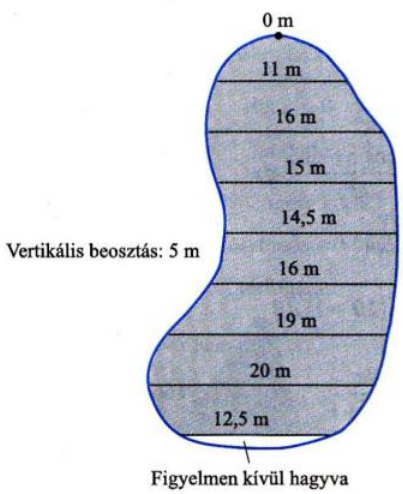
133. Benzinfogyasztás: Egy autó fedélzeti számítógépe liter/órában mutatja a pillanatnyi benzinfogyasztást. Az egyik utas egy órán át 5 percenként felírta az éppen kijelzett fogyasztási értéket:

idő	l/h	idő	l/h
0	9,5	35	9,6
5	9,2	40	9,0
10	8,6	45	8,8
15	9,1	50	9,3
20	8,9	55	9,2
25	9,4	60	8,7
30	8,7		

(a) Becsüljük meg az 1 óra alatt elfogyasztott benzin mennyiségét a trapézformula használatával!

(b) Az autó 92 kilométert tett meg a kérdéses 1 óra alatt. Mennyi a 100 km-re számolt benzinfogyasztása?

134. Parkolóépítés: A város megvette az ábrán látható telket azzal a céllal, hogy parkolót építsen rá. A telek vízszintesre egyengetésének a költsége 1, a betonozás költsége 20 euró négyzetméterenként. Döntsük el a Simpson-formula használatával, hogy megépíthető-e a parkoló a rendelkezésre álló 11 000 euróból!



Improprius integrálok

Számoljuk ki az improprius integrálokat (135–144. feladatok)!

135. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

136. $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$

137. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dy}{y^{2/3}}$

138. $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{d\theta}{(\theta+1)^{3/5}}$

139. $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{2\,du}{u^2-2u}$

140. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{3v-1}{4v^3-v^2}\,dv$

141. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx$

142. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{3x}\,dx$

143. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4x^2+9}$

144. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\,dx}{x^2+16}$

Konvergencia eldöntése

Melyek konvergensek, melyek divergensek a 145–150. feladatokban szereplő integrálok közül?

145. $\displaystyle\int_6^\infty \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2+1}}$

146. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-u}\cos u\,du$

147. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln z}{z}\,dz$

148. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$

149. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{2\,dx}{e^x+e^{-x}}$

150. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$

Vegyes integrálok

Számítsuk ki a 151–218. feladatokban szereplő integrálokat! A feladatok sorrendje véletlenszerű!

151. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$

152. $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{4-x^2}\,dx$

153. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$

154. $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

155. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-2x-x^2}}$

156. $\displaystyle\int \frac{(t-1)\,dt}{\sqrt{t^2-2t}}$

157. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$

158. $\displaystyle\int e^t\cos e^t\,dt$

159. $\displaystyle\int \frac{2-\cos x+\sin x}{\sin^2 x}\,dx$

160. $\displaystyle\int \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$

161. $\displaystyle\int \frac{9\,dv}{81-v^4}$

162. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$

163. $\displaystyle\int \theta\cos(2\theta+1)\,d\theta$

164. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{(x-1)^2}$

165. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{x^2-2x+1}$

166. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sqrt{1+\sqrt{\theta}}}$

167. $\displaystyle\int \frac{2\sin\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}\sec\sqrt{x}}$

168. $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{x^4-16}$

169. $\displaystyle\int \frac{dy}{\sin y\cos y}$

170. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\theta^2-2\theta+4}$

171. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$

172. $\displaystyle\int \frac{dr}{(r+1)\sqrt{r^2+2r}}$

173. $\displaystyle\int \frac{(r+2)\,dr}{\sqrt{-r^2-4r}}$

174. $\displaystyle\int \frac{y\,dy}{4+y^4}$

175. $\displaystyle\int \frac{\sin 2\theta\,d\theta}{(1+\cos 2\theta)^2}$

176. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

177. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos 4x}\,dx$

178. $\displaystyle\int 15^{2x+1}\,dx$

179. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2-x}}$

180. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-v^2}}{v^2}\,dv$

181. $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2-2y+2}$

182. $\displaystyle\int \ln\sqrt{x-1}\,dx$

183. $\displaystyle\int \theta^2\operatorname{tg}(\theta^3)\,d\theta$

184. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8-2x^2-x^4}}$

185. $\displaystyle\int \frac{z+1}{z^2(z^2+4)}\,dz$

186. $\displaystyle\int x^3 e^{(x^2)}\,dx$

187. $\displaystyle\int \frac{t\,dt}{\sqrt{9-4t^2}}$

188. $\displaystyle\int_0^{\pi/10} \sqrt{1+\cos 5\theta}\,d\theta$

189. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ctg}\theta\,d\theta}{1+\sin^2\theta}$

190. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$

191. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}\,dy$

192. $\displaystyle\int \frac{e^t\,dt}{e^{2t}+3e^t+2}$

193. $\displaystyle\int \frac{\theta^2\,d\theta}{4-\theta^2}$

194. $\displaystyle\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\,dx$

195. $\displaystyle\int \frac{\cos(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

196. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x-\sin x}$

197. $\displaystyle\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$

198. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+2}{(x^2+2)^2}\,dx$

199. $\displaystyle\int \frac{e^t\,dt}{1+e^t}$

200. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 t\,dt$

201. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln y}{y^3}\,dy$

202. $\displaystyle\int \frac{3+\sec^2 x+\sin x}{\operatorname{tg} x}\,dx$

203. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ctg} v\,dv}{\ln\sin v}$

204. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2-x}}$

205. $\displaystyle\int e^{\ln\sqrt{x}}\,dx$

206. $\displaystyle\int e^\theta\sqrt{3+4e^\theta}\,d\theta$

207. $\displaystyle\int \frac{\sin 5t\,dt}{1+(\cos 5t)^2}$

208. $\displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{e^{2v}-1}}$

209. $\displaystyle\int 27^{3\theta+1}\,d\theta$

210. $\displaystyle\int x^5\sin x\,dx$

211. $\displaystyle\int \frac{dr}{1+\sqrt{r}}$

212. $\displaystyle\int \frac{4x^3-20x}{x^4-10x^2+9}\,dx$

213. $\displaystyle\int \frac{8\,dy}{y^3(y+2)}$

214. $\displaystyle\int \frac{(t+1)\,dt}{(t^2+2t)^{2/3}}$

215. $\displaystyle\int \frac{8\,dm}{m\sqrt{49m^2-4}}$

216. $\displaystyle\int \frac{dt}{t(1+\ln t)\sqrt{(\ln t)(2+\ln t)}}$

217. $\displaystyle\int_0^1 3(x-1)^2\left(\int_0^x \sqrt{1+(t-1)^4}\,dt\right)dx$

218. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{4v^3+v-1}{v^2(v-1)(v^2+1)}\,dv$

219. Valamely f függvényről tudjuk, hogy

$$f'(x)=\frac{\cos x}{x},\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\qquad\text{és}\qquad f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=b.$$

Parciálisan integrálva számítsuk ki a $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\,dx$ integrált!

220. Keressük meg azt a pozitív a-t, amelyre

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x^2}=\int_a^\infty \frac{dx}{1+x^2}\,!$$

8. fejezet Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

Nehezebb integrálok

Számítsuk ki a határozatlan integrálokat (1–10. feladatok)!

1. $\int (\arcsin x)^2\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}$

3. $\int x\arcsin x\,dx$

4. $\int \arcsin\sqrt{y}\,dy$

5. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}$

6. $\int \ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{dt}{t-\sqrt{1-t^2}}$

8. $\displaystyle\int \frac{(2e^{2x}-e^x)\,dx}{\sqrt{3e^{2x}-6e^x-1}}$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+4}$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6-1}$

Határértékszámolás

Keressük meg a határértékeket (11–12. feladatok)!

11. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_{-x}^{x} \sin t\,dt$

12. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\int_{x}^{1} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$

A 13–14. feladatokban megadott határértékek egy-egy határozott integrál definíciói. Azonosítsuk a határozott integrálokat, és azok kiszámolásával keressük meg a határértékeket!

13. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \ln\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}$

14. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$

További példák és feladatok

15. Ívhossz: Számoljuk ki a következő görbe ívhosszát:

$$y=\int_0^x \sqrt{\cos 2t}\,dt, \qquad 0\le x\le \frac{\pi}{4}!$$

16. Ívhossz: Számoljuk ki a következő görbe ívhosszát:

$$y=\ln(1-x^2), \qquad 0\le x\le \frac{1}{2}!$$

17. Térfogatszámítás: Forgassuk meg az első síknegyedben fekvő, az x-tengely és az $y=3x\sqrt{1-x}$ görbe által meghatározott síkidomot az x-tengely körül! Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

18. Térfogatszámítás: Forgassuk meg az első síknegyedben fekvő, az x-tengely, az $y=5/\left(x\sqrt{5-x}\right)$ görbe, illetve az $x=1$ és $x=4$ egyenesek által határolt síkidomot az x-tengely körül! Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

19. Térfogatszámítás: Forgassuk meg az első síknegyedben fekvő, a koordinátatengelyek, az $y=e^x$ görbe és az $x=1$ egyenes által határolt síkidomot az y-tengely körül! Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

20. Térfogatszámítás: Forgassuk meg az első síknegyedben fekvő, felülről az $y=e^x-1$, alulról az x-tengely, jobbról az $x=\ln 2$ egyenes által határolt síkidomot az $x=\ln 2$ egyenes körül! Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

21. Térfogatszámítás: Jelöljük R-rel azt a „háromszög" alakú síkidomot, amelyet felülről az $y=1$ egyenes, alulról az $y=\ln x$ görbe, balról az $x=1$ egyenes határol! Mekkora a keletkező forgástest térfogata, ha R-t
(a) az x-tengely, **(b)** az $y=1$ egyenes
körül forgatjuk meg?

22. Térfogatszámítás: *(A 21. feladat folytatása.)* Mekkora a keletkező forgástest térfogata, ha a 21. feladatban szereplő R-t
(a) az y-tengely, **(b)** az $x=1$ egyenes
körül forgatjuk meg?

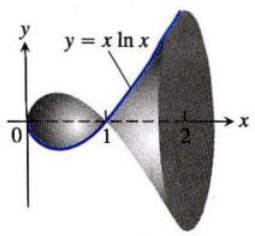
23. Térfogatszámítás: Megforgatjuk az x-tengely és az

$$y=f(x)=\begin{cases} 0 & \text{ha } x=0 \\ x\ln x & \text{ha } 0<x\le 2 \end{cases}$$

görbe által közrezárt síkidomot az x-tengely körül.

(a) Bizonyítsuk be, hogy f folytonos a 0-ban!

(b) Számoljuk ki a forgástest térfogatát!



24. Térfogatszámítás: Forgassuk meg az első síknegyedben fekvő, a koordinátatengelyek és az $y=-\ln x$ görbe által határolt végtelen síkidomot az x-tengely körül! Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

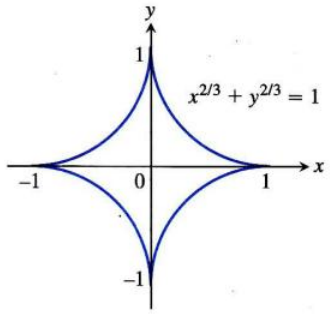
25. Síkidom súlypontja: Keressük meg annak az első síknegyedben fekvő síkidomnak a súlypontját, melyet alulról az x-tengely, felülről az $y=\ln x$ görbe, jobbról az $x=e$ egyenes határol!

26. Síkidom súlypontja: Keressük meg az $y=\pm(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ görbék és az $x=0$, $x=1$ egyenesek által határolt síkidom súlypontját!

27. Ívhossz: Számoljuk ki az $y=\ln x$ görbe $x=1$ és $x=e$ pontok közötti részének a hosszát!

28. Felszín: A 27. feladatban definiált ívdarabot megforgatjuk az y-tengely körül. Mekkora a súrolt palást felszíne?

29. Az asztroid ívhossza: Az $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ egyenletű görbe az *asztroidoknak* nevezett görbék családjába tartozik. Az asztroid (nem aszteroida) elnevezés a görbe csillagszerű kinézetére utal (lásd az ábrát). Mekkora ennek az asztroidnak az ívhossza?



30. Asztroidból keletkező forgástest felszíne: Megforgatjuk a 29. feladatban definiált asztroidot az x-tengely körül. Mekkora a keletkező forgástest felszíne?

31. Adjunk meg egy olyan origóból induló görbét, amelynek az ívhossza a $[0,4]$ intervallumon

$$\int_0^4 \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx!$$

32. Az integrálok kiszámolása nélkül lássuk be, hogy

$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}!$$

T 33. Legyen $f(x)=e^{(x-e^x)}$!

(a) Rajzoltassuk ki az f függvény grafikonját az $x\in[-5,3]$ intervallumon!

(b) Lássuk be, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ konvergens, és keressük meg az értékét!

34. Számoljuk ki a $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{ny^{n-1}}{1+y}\,dy$ határértéket!

35. Bizonyítsuk be, hogy ha $n\neq 2$, akkor

$$\int x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n dx=\frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n+2}}{n+2}+C!$$

36. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{\pi}{6}<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}<\frac{\pi\sqrt{2}}{8}!$$

(*Útmutatás:* vegyük észre, hogy $0<x<1$ esetén $4-x^2>4-x^2-x^3>4-2x^2$, és ez utóbbi egyenlőtlenség bal oldala $x=0$-ra, jobb oldala $x=1$-re egyenlőséggé válik!)

37. Határozzuk meg, hogy a mely értékeire lesz az

$$\int_1^{\infty}\left(\frac{ax}{x^2+1}-\frac{1}{2x}\right)dx$$

improprius integrál konvergens! Ha konvergens, mennyi az értéke?

38. Legyen $G(x)=\int_0^{\infty} e^{-xt}\,dt$, ha $x>0$. Mutassuk meg, hogy minden $x>0$-ra $xG(x)=1$!

39. Végtelen terület – véges térfogat: Tekintsük az $y=x^{-p}$, $1\le x<\infty$ görbét! Mely p értékek esetén lesz a görbe és az x-tengely közötti terület végtelen, de a görbe x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogata véges?

40. Végtelen terület – véges térfogat: Tekintsük az $y=x^{-p}$ görbe, az y-tengely, az $x=1$ egyenes és az x-tengelyen fekvő $[0,1]$ intervallum által határolt síkidomot! Mely p értékek esetén lesz a síkidom területe végtelen, de a síkidom valamely koordinátatengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogata véges?

Táblázatos integrálás

A táblázatos integrálást néha olyankor is lehet $\int f(x)g(x)\,dx$ kiszámolására használni, amikor egyik függvénynek sem lesz valahányadik deriváltja 0. Például próbáljuk meg kiszámolni az

$$\int e^{2x}\cos x\,dx$$

integrált! Úgy kezdjük, ahogy eddig is, azaz készítünk egy táblázatot e^{2x} deriváltjaiból és $\cos x$ integráljaiból:

e^{2x} és a deriváltjai		$\cos x$ és az integráljai
e^{2x}	(+) →	$\cos x$
$2e^{2x}$	(−) →	$\sin x$
$4e^{2x}$	(+) →	$-\cos x$

Vegyük észre, hogy eltekintve egy 4-es szorzótól és az előjeltől, a 3. sorban ugyanaz szerepel, mint az elsőben. Amint egy olyan sorhoz jutunk, amely egy konstans szorzótényezőtől eltekintve már szerepelt, álljunk meg, és értelmezzük a táblát ilyen formán:

$$\int e^{2x}\cos x\,dx=+\left(e^{2x}\sin x\right)-\left(2e^{2x}(-\cos x)\right)+$$
$$+\int(4e^{2x})(-\cos x)\,dx.$$

Azaz összeadtuk a ferde nyilakkal összekötött elemek szorzatát a nyilak feletti előjellel ellátva, és hozzáadtuk még az utolsó, vízszintes nyíllal összekötött elemek szorzatának az integrálját, szintén a nyíl feletti előjellel ellátva. Ha az egyenlőség két végén szereplő integrálos tagokat összevonjuk, azt kapjuk, hogy

$$5\int e^{2x}\cos x\,dx=e^{2x}\sin x+2e^{2x}\cos x,$$

ahonnan 5-tel osztva megkapjuk az eredményt:

$$\int e^{2x}\cos x\,dx=\frac{e^{2x}\sin x+2e^{2x}\cos x}{5}+C.$$

A 41–48. feladatokban szereplő integrálokat táblázatos integrálással számítsuk ki!

41. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ **42.** $\int e^{3x}\sin 4x\,dx$

43. $\int \sin 3x\sin x\,dx$ **44.** $\int \cos 5x\sin 4x\,dx$

45. $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ **46.** $\int e^{ax}\cos bx\,dx$

47. $\int \ln(ax)\,dx$ **48.** $\int x^2\ln(ax)\,dx$

A Stirling formula és a gamma-függvény

Az Euler-féle $\Gamma(x)$ gamma-függvény kiterjeszti a faktoriális függvényt a nemnegatív egész számokról a valós számok egy halmazára. A definíciója a következő:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt, \qquad x>0.$$

Azaz pozitív x-ekre $\Gamma(x)$ értéke a $t^{x-1}e^{-t}$ függvény t szerinti, 0-tól végtelenig vett integrálja.

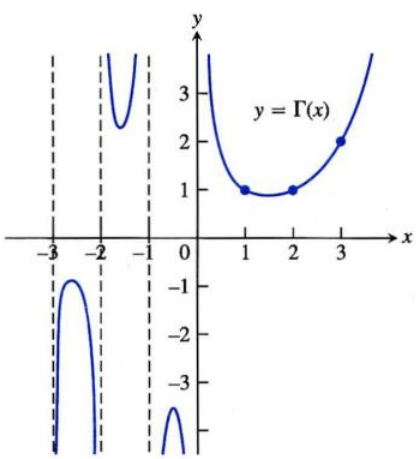
49. Ha n nemnegatív egész, akkor $\Gamma(n+1) = n!$.:

(a) Mutassuk meg, hogy $\Gamma(1) = 1!$

(b) Parciálisan integrálva $\Gamma(x+1)$-et, bizonyítsuk be, hogy $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$! Innen következik, hogy

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1,\\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2,\\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 6,\\ &\vdots\\ \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n!\,.\end{aligned} \tag{8.22}$$

(c) Bizonyítsuk be (8.22)-et indukcióval minden nemnegatív egész n-re!



8.27. ÁBRA: Az Euler-féle gamma-függvény folytonos, és ha n egész szám, akkor $\Gamma(n+1) = n!$. A $\Gamma(x)$-et definiáló integrált csak $x>0$-ra értelmezzük, de $\Gamma(x)$ értékét nem egész negatív számokra is kiterjeszthetjük a 49. példában vizsgált $\Gamma(x) = (\Gamma(x+1))/x$ képlettel.

50. Stirling-formula: James Stirling (1692–1770) skót matematikus bebizonyította, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e}{x}\right)^x\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\Gamma(x) = 1,$$

azaz

$$\Gamma(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\Big(1+\varepsilon(x)\Big), \quad \text{és } \varepsilon(x)\to 0, \text{ ha } x\to\infty. \tag{8.23}$$

Ha $\varepsilon(x)$-et elhagyjuk:

$$\Gamma(x) \approx \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}} \qquad \textbf{(Stirling formula)}. \tag{8.24}$$

(a) Stirling-féle becslés $n!$-ra Az $n! = n\Gamma(n)$ képlet és a (8.24) egyenlet segítségével lássuk be, hogy

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}, \quad n\to\infty! \tag{8.25}$$

Ezt a becslést szintén Stirling-formulának szokás nevezni. Ahogy a 11.1. rész 64. feladatában látni fogjuk, (8.25)-ből következik, hogy

$$\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e}. \tag{8.26}$$

(b) Hasonlítsuk össze számológéppel $n!$ értékét a Stirling-formulából származó becsléssel $n = 10, 20, 30, \ldots$ esetén! (Amíg csak a számológép bírja.)

(c) A (8.23) egyenlet egy finomítása szerint

$$\Gamma(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}e^{1/(12x)}(1+\varepsilon(x)),$$

vagy máshogy fogalmazva

$$\Gamma(x) \approx \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}e^{1/(12x)},$$

ahonnan az

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}e^{1/(12n)} \tag{8.27}$$

becslés adódik. Hasonlítsuk össze számológép segítségével 10!-t a (8.25) és a (8.27) által szolgáltatott közelítő értékkel!

9. fejezet
Az integrálás további alkalmazásai

ÁTTEKINTÉS: A 4.8. alfejezetben bevezettük a $dy/dx = f(x)$ alakú differenciálegyenleteket, amiben az ismeretlen y függvény deriváltja szerepelt. Folytonos f esetén az általános megoldást az $y(x) = \int f(x)dx$ integrállal kaptuk. (Emlékeztetünk arra, hogy a határozatlan integrál f minden primitív függvényét jelenti, így tartalmazza a tetszőleges additív konstanst, +C-t, amit ki kell írni, ha a primitív függvényt már megtaláltuk.) Az elméleti és mérnöki tudományokban, a közgazdaságtanban is gyakran fordulnak elő olyan modellek, amelyek sokkal bonyolultabb differenciálegyenleteket tartalmaznak. A 7.5. alfejezetben láttuk, hogy az exponenciális növekedés ill. csökkenés a $dy/dx = ky$ $k \neq 0$ differenciálegyenlettel modellezhető. Eddig még nem vizsgáltunk olyan alakú differenciálegyenleteket mint pl. $dy/dx = y - x$, jóllehet, ilyenek gyakran adódnak az alkalmazások során. Ebben a fejezetben számos $dy/dx = f(x,y)$ alakú differenciálegyenlettel fogunk foglalkozni, ahol f a független és függő változónak is függvénye. Ezen differencálegyenletek megoldásához a határozatlan integrál elméletét fogjuk használni, és vizsgálunk analitikus, grafikus és numerikus megoldási módszereket is.

9.1. Iránymező és szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Amikor implicit deriválást alkalmaztunk (3.6. alfejezet), a dy/dx differenciálhányadosra kapott kifejezés gyakran tartalmazta x-et és y-t is. Ezt az alfejezetet az általános $dy/dx = f(x,y)$ alakú egyenlet vizsgálatával kezdjük és megnézzük, mit értünk megoldáson. Azután azt a speciális esetet nézzük, amikor f felírható egy csak x-től és egy csak y-tól függő függvény szorzataként.

Általános elsőrendű differenciálegyenletek és megoldásaik

Egy **elsőrendű differenciálegyenlet** egy olyan

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{9.1}$$

alakú egyenlet, ahol $f(x,y)$ az xy-sík egy tartományán definiált kétváltozós függvény. Az egyenlet azért *elsőrendű*, mert csak a dy/dx első deriváltat tartalmazza (és nem magasabbrendű deriváltakat). Az

$$y' = f(x,y) \quad \text{és} \quad \frac{d}{dx}y = f(x,y)$$

írásmódok ekvivalensek a (9.1) egyenlettel, és mindhárom alakot váltogatva használjuk a szövegben.

A (9.1) egyenlet **megoldása** egy olyan $y = y(x)$ differenciálható függvény, amely az x értékek egy I (esetleg végtelen) intervallumán van értelmezve, és ott

$$\frac{d}{dx}y(x) = f(x, y(x)).$$

Azaz, ha az $y(x)$ függvényt és $y'(x)$ deriváltját a (9.1) egyenletbe helyettesítjük, az I intervallumon azonosságot kapunk. Egy elsőrendű differenciálegyenlet **általános megoldása** egy olyan megoldás, ami az összes megoldást tartalmazza. Az általános megoldás mindig tartalmaz egy tetszőleges konstanst, de az, hogy egy megoldás tartalmaz egy tetszőleges konstanst, még nem jelenti, hogy általános megoldás. Annak kimutatása, hogy egy megoldás valóban általános megoldás, mélyebb ismereteket igényel a differenciálegyenletek elméletéből, és felsőbb kurzusokra hagyjuk.

1. PÉLDA: **Megoldás ellenőrzése**

Mutassuk meg, hogy minden

$$y = \frac{C}{x} + 2$$

alakú függvény megoldása a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(2 - y)$$

differencálegyenletnek a $(0, \infty)$ intervallumon, bármely C konstans esetén!

Megoldás: Az $y = C/x + 2$ függvény deriváltja

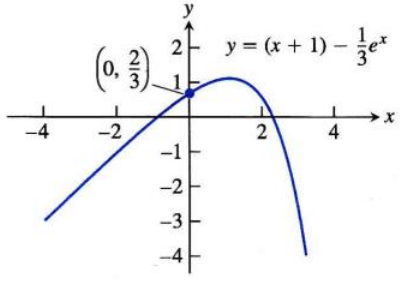
$$\frac{dy}{dx} = C\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) + 0 = -\frac{C}{x^2}.$$

Így csak azt kell megmutatnunk, hogy minden $x \in (0, \infty)$ esetén

$$-\frac{C}{x^2} = \frac{1}{x}\left[2 - \left(\frac{C}{x} + 2\right)\right],$$

ami a jobboldalon kijelölt műveletek elvégzése után nyilvánvaló. Azaz, az $y = = C/x + 2$ függvény C minden értékére megoldása a differenciálegyenletnek.

Ahogy az a primitív függvények estében is előfordult, gyakran nem az általános megoldásra van szükségünk, hanem egy *partikuláris* megoldásra. Az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt kielégítő **partikuláris megoldás** az az $y = y(x)$ megoldás, amelynek értéke az x_0 pontban y_0. A partikuláris megoldás grafikonja az xy-síkon átmegy az (x_0, y_0) ponton. Egy **elsőrendű kezdetiérték-probléma** egy $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlet együtt egy $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltétellel. A kezdetiérték-probléma megoldása egy olyan $y(x)$ függvény, ami megoldása a differenciálegyenletnek, és kielégíti az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt.



9.1. ÁBRA: A $dy/dx = y - x$ differenciálegyenlet $y = (x + 1) - \frac{1}{3}e^x$ megoldásának grafikonja az $y(0) = \frac{2}{3}$ kezdeti feltétel mellett (2. példa).

2. PÉLDA: **Partikuláris megoldás ellenőrzése**

Mutassuk meg, hogy az

$$y = (x + 1) - \frac{1}{3}e^x$$

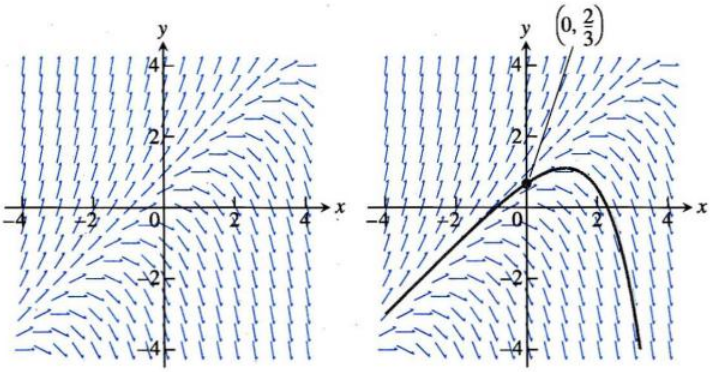
függvény megoldása a

$$\frac{dy}{dx} = y - x, \qquad y(0) = \frac{2}{3}$$

kezdetiérték-problémának!

Megoldás: A

$$\frac{dy}{dx} = y - x$$



9.2. ÁBRA: (a) A $\frac{dy}{dx} = y - x$ egyenlet iránymezője. (b) A $(0, \frac{2}{3})$ ponton átmenő partikuláris megoldás görbéje (2. példa).

egyenlet egy elsőrendű differenciálegyenlet az $f(x,y) = y - x$ függvénnyel a jobb oldalon.

A bal oldal:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x + 1 - \frac{1}{3}e^x\right) = 1 - \frac{1}{3}e^x.$$

A jobb oldal:

$$y - x = (x+1) - \frac{1}{3}e^x - x = 1 - \frac{1}{3}e^x.$$

A függvény kielégíti a kezdeti feltételeket is, hiszen

$$y(0) = \left[(x+1) - \frac{1}{3}e^x\right]_{x=0} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

A függvény grafikonja a 9.1. ábrán látható.

Iránymező, megoldásfüggvény szemléltetése

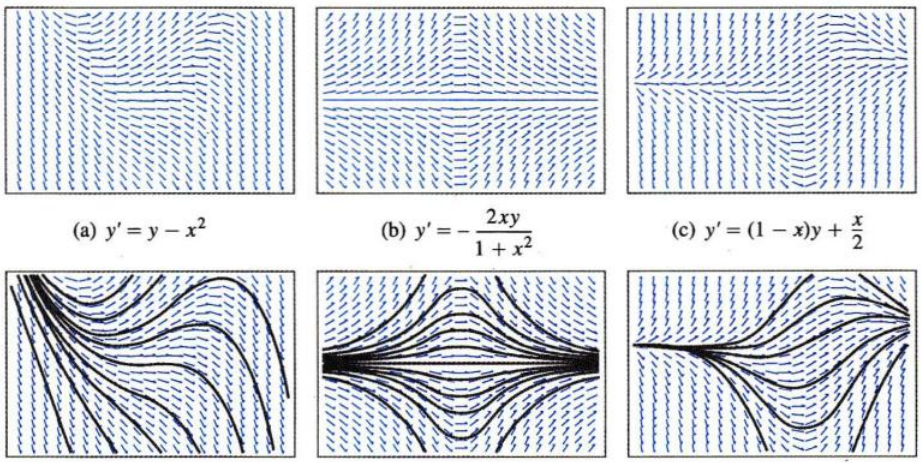
Amikor megadjuk egy $y' = f(x,y)$ differenciálegyenlethez az $y(x_0) = y_0$ kezdeti értéket, a **megoldásgörbe** (a megoldás grafikonja) áthalad az (x_0, y_0) ponton, és itt a meredeksége $f(x_0, y_0)$. Úgy szemléltethetjük ezeket az irányokat, hogy rövid kis szakaszokat rajzolunk $f(x,y)$ meredekséggel a választott (x,y) pontokon keresztül az xy-sík f értelmezési tartományába eső részén. Minden kis szakasznak az a meredeksége, ami az adott ponton áthaladó megoldás érintőjének lenne a meredeksége ebben a pontban. Az így kapott ábrát **iránymezőnek** hívjuk, és ez egy szemléletes képet ad a megoldásgörbék általános alakjáról. A 9.2a ábra egy iránymezőt mutat, a 9.2b ábrába már egy partikuláris megoldás görbéjét is berajzoltuk. Jól látható, ahogy a kis szakaszok mutatják a megoldásgörbe irányát azokban a pontokban, amelyeken átmegy.

A 9.3. ábra három iránymezőt mutat, alatta pedig láthatjuk, hogy a megoldásgörbék hogyan haladnak ezekben a mezőkben követvén az érintődarabkákat.

Egy ilyen iránymező elkészítése ceruzával és papírral nagyon hosszadalmas, ezeket az ábrákat számítógép készítette. Differenciálegyenletek megoldása általában igen nehéz, de a gyakorlati életben sok olyan fontos eset fordul elő, amelyik speciális alakú differenciálegyenletre vezet. Ezeknek speciális megoldási módszerei vannak. Egy ilyen típus a szétválasztható változójú (szeparábilis) differenciálegyenlet.

Szétválasztható változójú (szeparábilis) differenciálegyenletek

Az $y' = f(x,y)$ egyenlet **szétválasztható változójú**, vagy más néven **szeparábilis**, ha f felírható egy csak x-től és egy csak y-tól függő függvény szorzataként.



(a) $y' = y - x^2$ (b) $y' = -\dfrac{2xy}{1+x^2}$ (c) $y' = (1-x)y + \dfrac{x}{2}$

9.3. ÁBRA: Iránymezők (felső sor), és néhány kiválasztott megoldásgörbe (alsó sor). A számítógép reprezentációjában a kis vonaldarabok nyíl formájúak, de ez ne tévesszen meg minket: a meredekségnek nincs iránya!

Ekkor a differenciálegyenlet

$$\frac{dy}{dx} = g(x)H(y)$$

alakú. Ha $H(y) \neq 0$, akkor átírhatjuk

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \qquad H(y) = \frac{1}{h(y)}$$

alakúra. Ez a differenciál alak megengedi nekünk, hogy az y-t tartalmazó tényezőt dy mellé, az x-et tartalmazó tényezőt dx mellé vigyük:

$$h(y)dy = g(x)dx.$$

Ezután integráljuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx. \tag{9.2}$$

Az integrálások elvégzése után az y megoldást mint az x független változó implicit függvényét kapjuk. Azt, hogy a (9.2) egyenlet mindkét oldalát külön integrálhatjuk, a helyettesítési szabállyal (5.5. alfejezet) igazolhatjuk:

$$\begin{aligned} \int h(y)dy &= \int h(y(x))\frac{dy}{dx}dx = \\ &= \int h(y(x))\frac{g(x)}{h(y(x))}dx = \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ &= \int g(x)dx. \end{aligned}$$

3. PÉLDA: **Szeparábilis differenciálegyenlet megoldása**

Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{dy}{dx} = (1+y^2)e^x!$$

Megoldás: Mivel $1+y^2$ soha nem 0, a változók szétválasztásával

$$dy = (1+y^2)e^x dx, \qquad \text{A } dy/dx \text{ hányadost differenciálok hányadosaként kezelve szorzunk } dx\text{-szel.}$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = e^x dx,$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int e^x dx, \qquad \text{Mindkét oldalt integráljuk.}$$

$$\operatorname{arctg} y = e^x + C. \qquad C \text{ a két oldal összevont konstansa.}$$

Az $\operatorname{arctg} y = e^x + C$ egyenlet az y-t mint x implicit függvényét adja meg. Ha $-\pi/2 < e^x + C < \pi/2$, akkor kifejezhetjük y-t mindkét oldal tangensét véve:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = \operatorname{tg}(e^x + C),$$
$$y = \operatorname{tg}(e^x + C). \qquad \square$$

4. PÉLDA: **Egyenlet megoldása**

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = x(y^2+1).$$

Megoldás: Differenciál alakra hozzuk, majd szétválasztjuk a változókat és integrálunk.

$$\frac{dy}{y^2+1} = \frac{x\,dx}{x+1}, \qquad x \neq -1$$
$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx,$$
$$\operatorname{arctg} y = x - \ln|x+1| + C.$$

$\square$

A

$$\frac{dy}{dt} = ky, \qquad y(0) = y_0$$

kezdetiérték-problémában egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet van, és az $y = y_0 e^{kt}$ adja az exponenciális megoldásfüggvényt (7.5. alfejezet). Ez a kezdetiérték-probléma a modellje pl. a populáció növekedésnek, a radioaktív bomlásnak, hővezetésnek. Most egy újabb alkalmazást mutatunk be.

Torricelli törvénye

Torricelli törvénye azt mondja ki, hogy amikor egy tartályból a vizet a 9.4. ábrán látható módon leengedjük, akkor a pillanatnyi kifolyó vízmennyiség (a leengedés gyorsasága) arányos az x vízmagasság négyzetgyökével. A konstans szorzó a leengedő nyílás méretétől függ, az 5. példában feltesszük, hogy ez a konstans 1/10.

5. PÉLDA: **Tartály kiürítése**

Egy egyenes körhenger alakú tartály sugara 1,5 m és magassága 4 m. A leengedés kezdetekor tele van vízzel, és a leengedés gyorsasága $0{,}1\sqrt{x}$ m^3/perc. Határozzuk meg, hogy a vízmagasság a tartályban hogyan függ az időtől, és azt is, hogy mennyi idő alatt ürül ki a tartály!

Megoldás: Egy r sugarú és h magasságú egyenes körhenger térfogata $V = \pi r^2 h$, így a tartályban levő víz térfogata

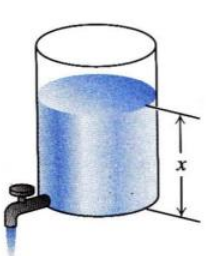
$$V = \pi r^2 h = \pi(1{,}5)^2 x = 2{,}25\pi x.$$

Deriválással

$$\frac{dV}{dt} = 2{,}25\pi \frac{dx}{dt} \qquad \text{Negatív, mert } V \text{ csökken, és } dx/dt < 0$$
$$-0{,}1\sqrt{x} = 2{,}25\pi \frac{dx}{dt}. \qquad \text{Toricelli törvénye.}$$

Így a következő kezdetiérték-problémát kaptuk:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{x}}{22{,}5\pi},$$
$$x(0) = 4. \qquad \text{A víz 4 m mély, amikor } t = 0.$$



9.4. ÁBRA: A leengedés gyorsasága $k\sqrt{x}$, ahol k pozitív állandó. Az 5. példában $k = 0,1$ és x méterben van mérve.

A változók szétválasztásával megoldjuk a differenciálegyenletet.

$$x^{-1/2}dx = -\frac{1}{22{,}5\pi}dt,$$

$$\int x^{-1/2}dx = -\int \frac{1}{22{,}5\pi}dt,$$

$$2x^{1/2} = -\frac{1}{22{,}5\pi}t + C. \qquad \text{a konstansokat összevontuk}$$

Az $x(0) = 4$ kezdeti feltétel meghatározza C értékét.
$2(4)^{1/2} = -\frac{1}{22{,}5\pi}(0) + C$, azaz $C = 4$. Ha $C = 4$, akkor

$$2x^{1/2} = -\frac{1}{22{,}5\pi}t + 4 \quad \text{vagy} \quad x^{1/2} = 2 - \frac{t}{45\pi}.$$

Az összefüggés, amit kerestünk, tehát

$$x = \left(2 - \frac{t}{45\pi}\right)^2 \quad \text{és így} \quad V = 2{,}25\pi\left(2 - \frac{t}{45\pi}\right)^2.$$

Bármely t időpillanatban a tartályban a víz mélysége $(2 - t/(45\pi))^2$m és a víz mennyisége pedig $2{,}25\pi(2 - t/(45\pi))^2\text{m}^3$. A $t = 0$ időpontban $x = 4$ és $V = 10\pi\text{m}^3$, ami a kezdeti feltétel volt, és a tartály $t = 90\pi$ perc múlva fog kiürülni ($V = 0$), ez kb. 4,75 óra. □

9.1. Feladatok

Megoldások ellenőrzése

Az 1. és 2. feladatban mutassuk meg, hogy mindegyik megadott $y = f(x)$ függvény megoldása az adott differenciálegyenletnek!

1. $2y' + 3y = e^{-x}$

(a) $y = e^{-x}$

(b) $y = e^{-x} + e^{-(3/2)x}$

(c) $y = e^{-x} + Ce^{-(3/2)x}$

2. $y' = y^2$

(a) $y = -\frac{1}{x}$

(b) $y = -\frac{1}{x+3}$

(c) $y = -\frac{1}{x+C}$

A 3. és 4. feladatban mutassuk meg, hogy a megadott $y = f(x)$ függvény megoldása az adott differenciálegyenletnek!

3. $y = \frac{1}{x}\int_1^x \frac{e^t}{t}dt, \quad x^2y' + xy = e^x$

4. $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\int_1^x \sqrt{1+t^4}dt, \quad y' + \frac{2x^3}{1+x^4}y = 1$

Az 5–8. feladatokban mutassuk meg, hogy az adott y függvények megoldásai az adott kezdetiérték-problémának!

	Differenciálegyenlet	Kezdeti feltétel	Feltételezett megoldás
5.	$y' + y = \frac{2}{1+4e^{2x}}$	$y(-\ln 2) = \frac{\pi}{2}$	$y = e^{-x}\operatorname{arctg}(2e^x)$
6.	$y' = e^{-x^2} - 2xy$	$y(2) = 0$	$y = (x-2)e^{-x^2}$
7.	$xy' + y = -\sin x$, $x > 0$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	$y = \frac{\cos x}{x}$
8.	$x^2y' = xy - y^2$, $x > 1$	$y(e) = e$	$y = \frac{x}{\ln x}$

Szeparábilis egyenletek

Oldjuk meg a 9–18. feladatokat!

9. $2\sqrt{xy}\frac{dy}{dx} = 1, x, y > 0$

10. $\frac{dy}{dx} = x^2\sqrt{y}, y > 0$

11. $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$

12. $\frac{dy}{dx} = 3x^2e^{-y}$

13. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}\cos^2\sqrt{y}$

14. $\sqrt{2xy}\frac{dy}{dx} = 1$

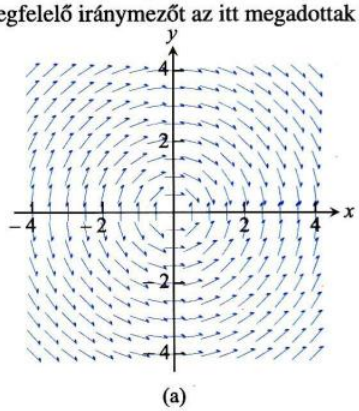
15. $\sqrt{x}\frac{dy}{dx} = e^{y+\sqrt{x}}, x > 0$

16. $(\sec x)\frac{dy}{dx} = e^{y+\sin x}$

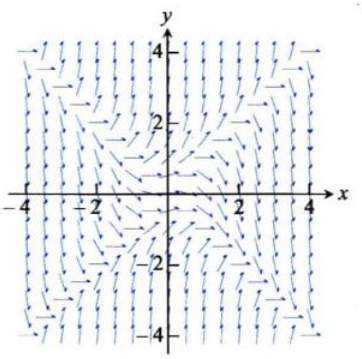
17. $\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{1-y^2}, -1 < y < 1$

18. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x-y}}{e^{x+y}}$

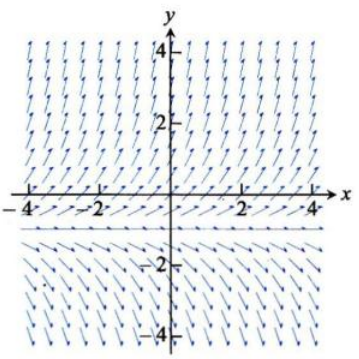
A 19–22. feladatokban szereplő differenciálegyenletekhez keressük meg a megfelelő iránymezőt az itt megadottak közül!



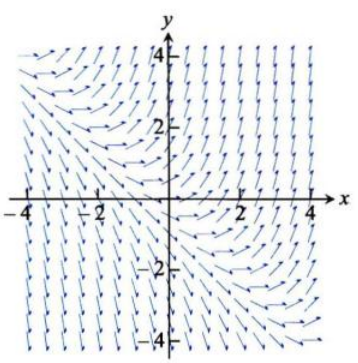
(a)



(b)



(c)



(d)

19. $y' = x + y$

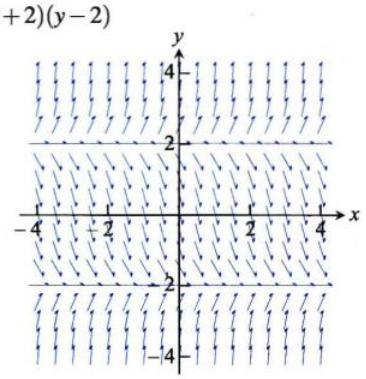
20. $y' = y + 1$

21. $y' = -\frac{x}{y}$

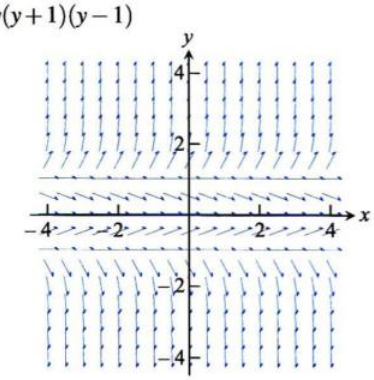
22. $y' = y^2 - x^2$

A 23. és 24. feladatokban másoljuk le az iránymezőt, és rajzoljunk be néhány megoldásgörbét!

23. $y' = (y+2)(y-2)$



24. $y' = y(y+1)(y-1)$



SZÁMÍTÓGÉPES VIZSGÁLATOK

Iránymezők és megoldásgörbék

A 25–30. feladatokban rajzoljuk meg az iránymező egy részletét, és húzzuk bele a megoldásgörbét, amelyik átmegy a megadott ponton!

25. $y' = y$

(a) $(0,1)$ **(b)** $(0,2)$ **(c)** $(0,-1)$

26. $y' = 2(y-4)$

(a) $(0,1)$ **(b)** $(0,4)$ **(c)** $(0,5)$

27. $y' = y(x+y)$

(a) $(0,1)$ **(b)** $(0,-2)$ **(c)** $(0,1/4)$

(d) $(-1,-1)$

28. $y' = y^2$

(a) $(0,1)$ **(b)** $(0,2)$ **(c)** $(0,-1)$

(d) $(0,0)$

29. $y' = (y-1)(x+2)$

(a) $(0,-1)$ **(b)** $(0,1)$ **(c)** $(0,3)$

(d) $(1,-1)$

30. $y' = \frac{xy}{x^2+4}$

(a) $(0,2)$ **(b)** $(0,-6)$ **(c)** $(-2\sqrt{3},-4)$

A 31. és 32. feladatban készítsünk egy iránymezőt, és rajzoljuk a partikuláris megoldást a megadott intervallumon!

31. Logisztikus egyenlet: $y' = y(2-y)$, $y(0) = 1/2$, $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 3$.

32. $y' = (\sin x)(\sin y)$, $-6 \le x \le 6$, $-6 \le y \le 6$.

A 33. és 34. feladatnak nincs elemi függvényekkel kifejezhető megoldása. Használjunk számítógépes programot, hogy megmutassa a grafikus megoldást! Becsüljük meg y értékét a megadott helyen!

33. $y' = \cos(2x-y)$, $y(0) = 2$, $0 \le x \le 5$, $0 \le y \le 5$, $y(2)$.

34. Gompertz egyenlet: $y' = y(1/2 - \ln y)$, $y(0) = 1/3$, $0 \le \le x \le 4$, $0 \le y \le 3$, $y(3)$.

35. Használjunk számítógépes programot az $y' + y = f(x)$ egyenlet megoldására $y(0) = 0$ kezdeti feltétellel, ha $f(x)$ egyenlő

(a) $2x$, **(b)** $\sin 2x$,

(c) $3e^{x/2}$, **(d)** $2e^{-x/2}\cos 2x$!

36. **(a)** Használjunk grafikus programot, hogy kirajzoljon egy iránymezőt a megadott differenciálegyenlethez a $-3 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 3$ tartományon:

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}!$$

(b) Adjuk meg ennek a szeparábilis egyenletnek a megoldását implicit formában!

(c) Használjuk egy grafikus program implicit függvény rajzolóját, hogy megrajzolja a megoldást azokban az esetekben, amikor a szabadon választható konstans értéke $C = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$!

(d) Határozzuk meg és rajzoltassuk ki azt a megoldást, amelyik kielégíti az $y(0) = -1$ kezdeti feltételt!

9.2. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Az exponenciális növekedés/csökkenés $dy/dy = ky$ egyenlete (7.5. alfejezet) egy szeparábilis differenciálegyenlet. De ez egy másik speciális eset is, hiszen lineáris. Lineáris differenciálegyenlettel számos valós jelenség modellezhető, mint pl. áramkörök vagy kémiai keverék-problémák.

Egy **elsőrendű lineáris** differenciálegyenlet a következő alakra hozható:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \tag{9.3}$$

ahol P és Q a gyakorlatban legtöbbször folytonos függvényei x-nek valamilyen intervallumon. A (9.3) egyenlet a lineáris differenciálegyenlet standard alakja. Mivel az exponenciális növekedés/csökkenés egyenlete is a

$$\frac{dy}{dx} - ky = 0$$

standard alakra hozható, ez egy lineáris egyenlet, ahol $P(x) = -k$ és $Q(x) = 0$. A (9.3) egyenlet lineáris az ismeretlen függvényre vonatkozó kifejezésekben, y-ban és dy/dx-ben, mert mindkettő első hatványon van, és nem fordulnak elő más függvény argumentumában (pl. $\sin y$, e^y stb.)

1. PÉLDA: **Standard alakra hozás**

Hozzuk standard alakra a következő differenciálegyenletet:

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \qquad x > 0!$$

Megoldás:

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{3}{x}y, \qquad x\text{-szel osztva}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x. \qquad \text{Standard alak } P(x) = -3y/x \text{ és } Q(x) = x \qquad \square$$

Lineáris differenciálegyenletek megoldása

Oldjuk meg a

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{9.4}$$

egyenletet! Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát egy pozitív $v(x)$ függvénnyel úgy, hogy a beszorzás után kapott bal oldal a $v(x) \cdot y$ szorzat deriváltjával legyen egyenlő! Később meg fogjuk mutatni, hogyan lehet ilyen v függvényt találni, most csak azzal foglalkozunk, hogy ha már találtunk ilyet, akkor azzal fel

tudjuk írni a megoldást.

$$v(x)\frac{dy}{dx}+P(x)v(x)y=v(x)Q(x), \qquad \text{mindkét oldalt } v(x)\text{-szel szorozva}$$

$$\frac{d}{dx}(v(x)\cdot y)=v(x)Q(x), \qquad v\tfrac{dy}{dx}+Pvy=\tfrac{d}{dx}(v\cdot y)$$

$$v(x)y=\int v(x)Q(x)dx \qquad \text{integrálva } x \text{ szerint}$$

$$y=\frac{1}{v(x)}\int v(x)Q(x)dx. \tag{9.5}$$

A (9.5) egyenlet a (9.4) egyenlet megoldását adja $v(x)$ és $Q(x)$ függvényében. A $v(x)$-et **integráló tényezőnek** hívjuk, mert ennek segítségével válik a (9.4) egyenlet integrálhatóvá.

Úgy tűnik, a végső formula nem függ a $P(x)$ függvénytől. Valójában függ tőle, mert $P(x)$ határozza meg, milyen integráló tényezőt kell választanunk.

$$\frac{d}{dx}(vy)=v\frac{dy}{dx}+Pvy, \qquad \text{követelmény } v\text{-re}$$

$$v\frac{dy}{dx}+y\frac{dv}{dx}=v\frac{dy}{dx}+Pvy, \qquad \text{szorzat deriválási szabálya}$$

$$y\frac{dv}{dx}=Pvy. \qquad v\tfrac{dy}{dx} \text{ kiesik}$$

Az utolsó egyenlőség akkor áll fenn, ha $dv/dx=Pv$, ami egy szeparábilis differenciálegyenlet a v függvényre, azaz

$$\frac{dv}{v}=Pdx, \qquad \text{változók szétválasztása}$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int Pdx,$$

$$\ln v=\int Pdx, \qquad \text{Mivel } v>0, \text{ nem kell abszolút érték az ln mögött.}$$

$$v=e^{\int Pdx}. \tag{9.6}$$

Tehát a (9.5) egyenlet a (9.3) egyenlet általános megoldását adja, ahol $v(x)$-t a (9.6) egyenletből kapjuk meg. Javasoljuk, hogy a képletek memorizálása helyett azt jegyezzük meg, hogyan kapjuk meg az integráló tényezőt!

> Az $y'+P(x)y=Q(x)$ lineáris differenciálegyenlet megoldását úgy állítjuk elő, hogy mindkét oldalt beszorozzuk a $v(x)=e^{\int P(x)dx}$ integráló tényezővel, és mindkét oldalt integráljuk.

Amikor a bal oldalt integráljuk, mindig az integráló tényező és a megoldás vy szorzatát kapjuk, mert v éppen úgy lett definiálva.

2. PÉLDA: **Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása**

Oldjuk meg az

$$x\frac{dy}{dx}=x^2+3y, \qquad x>0$$

differenciálegyenletet!

Megoldás: Először standard alakra hozzuk

$$\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x}y=x,$$

azaz $P(x)=-3/x$. Az integráló tényező

$$v(x)=e^{\int P(x)dx}=e^{\int(-3/x)dx}=$$

$$=e^{-3\ln x}= \qquad \text{Az integrálási konstans nulla, hogy a legegyszerűbb legyen.}$$

$$=e^{-3\ln x}=\frac{1}{x^3}. \qquad x>0$$

Ezután a standard alak mindkét oldalát beszorozzuk $v(x)$-szel és integrálunk:

$$\frac{1}{x^3}\left(\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x}y\right)=\frac{1}{x^3}\cdot x,$$

$$\frac{1}{x^3}\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x^4}y=\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}y\right)=\frac{1}{x^2},$$ A bal oldal szorzat deriváltja.

$$\frac{1}{x^3}y=\int\frac{1}{x^2}dx,$$

$$\frac{1}{x^3}y=-\frac{1}{x}+C.$$

Ha y-t kifejezzük, megkapjuk az általános megoldást:

$$y=x^3\left(-\frac{1}{x}+C\right)=-x^2+Cx^3, \qquad x>0.$$ □

3. PÉLDA: **Elsőrendű lineáris kezdetiérték-probléma megoldása**

Oldjuk meg az

$$xy'=x^2+3y, \qquad x>0,$$

egyenletet az $y(1)=2$ kezdeti értékkel!

Megoldás: Először megoldjuk a differenciálegyenletet (2. Példa):

$$y=-x^2+Cx^3, \qquad x>0.$$

Azután behelyettesítjük a kezdeti értékeket, hogy megkapjuk C-t:

$$2=-(1)^2+C(1)^3,$$ $y=2$, ha $x=1$

$$C=2+(1)^2=3.$$

A kezdetiérték-probléma megoldása tehát: $y=-x^2+3x^3$. □

4. PÉLDA:

Adjuk meg a

$$3xy'-y=\ln x+1, \qquad x>0,$$

differenciálegyenlet $y(1)=-2$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldását!

Megoldás: Standard alakra hozzuk ($x>0$):

$$y'-\frac{1}{3x}y=\frac{\ln x+1}{3x}.$$

Az integráló tényező

$$v=e^{\int -1/(3x)dx}=e^{(-1/3)\ln x}=x^{-1/3}. \quad x>0$$

Így

$$x^{-1/3}y=\frac{1}{3}\int(\ln x+1)x^{-4/3}dx.$$

A jobb oldalt parciálisan integráljuk:

$$x^{-1/3}y=-x^{-1/3}(\ln x+1)+\int x^{-4/3}dx,$$

azaz

$$x^{-1/3}y=-x^{-1/3}(\ln x+1)-3x^{-1/3}+C,$$

vagy y-t kifejezve:

$$y = -(\ln x + 4) + Cx^{1/3}.$$

Ha $x = 1$ és $y = -2$, akkor $-2 = -(0+4) + C$, azaz $C = 2$. Ezt beírva az általános megoldásba kapjuk a partikuláris megoldást:

$$y = 2x^{1/3} - \ln x - 4. \qquad \square$$

A 2. példában mindkét oldalt integráltuk, miután mindkét oldalt megszoroztuk az integráló tényezővel. A 4. példában a bal oldal integrálását már nem részleteztük, hiszen tudjuk, hogy mindig vy lesz. A (9.5) egyenletből tudjuk, hogy

$$v(x)y = \int v(x)Q(x)dx.$$

Csak a (9.3) egyenlet jobb oldalán álló $Q(x)$ és az integráló tényező $v(x)$ szorzatát kell integrálnunk. Mindazonáltal, ha hangsúlyozni akarjuk v szerepét, akkor a teljes megoldás menetét leírjuk, ahogy a 2. példában tettük. Ha a (9.3) egyenlet jobb oldalán álló Q függvény azonosan 0, akkor az egyenlet szétválasztható változójú:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0, \qquad Q(x) = 0$$

$$\frac{1}{y}dy = -P(x)dx. \qquad \text{szétválasztva a változókat}$$

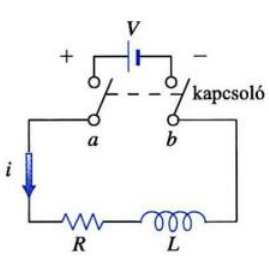
Tekintsünk most két olyan alkalmazást, amikor lineáris elsőrendű differenciálegyenlettel modellezünk.

RL-kör

A 9.5. ábrán egy áramkör látható, amelynek teljes ellenállása R Ω (ohm) és önindukciója L H (henry) állandók. Egy kapcsolóval az a és b pontokon a rendszert egy állandó V V (volt) feszültségű áramforráshoz kapcsolhatjuk. Az i áramerősségre ekkor az

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V \tag{9.7}$$

összefüggés érvényes, ahol t másodpercekben van mérve. Az egyenlet megoldásával meg tudjuk határozni az áramerősséget a kapcsoló bezárása után.



9.5. ÁBRA: Az *RL*-kör az 5. példában.

5. PÉLDA: Áramerősség meghatározása

A 9.5. ábrán látható kapcsolót a $t = 0$ időpillanatban zártuk. Milyen lesz az áramerősség az idő függvényében?

Megoldás: A (9.7) egyenlet egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet az i áramerősségre a t függvényében. A standard alak:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}, \tag{9.8}$$

aminek megoldása az $i = 0$, $t = 0$ kezdeti feltétellel

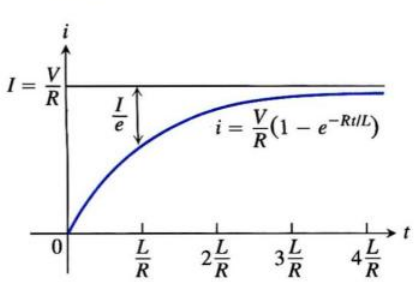
$$i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-(R/L)t} \tag{9.9}$$

(lásd a 32. feladatot). Mivel R és L pozitívak, $-(R/L)$ negatív, így $e^{-(R/L)t} \to 0$, ha $t \to +\infty$. Azaz

$$\lim_{t\to\infty} i = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-(R/L)t}\right) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}\cdot 0 = \frac{V}{R}.$$

Az áramerősség elméletileg minden pillanatban kisebb, mint V/R, de ahogy az idő múlik, egyre jobban megközelíti a V/R **állandósult állapot** vagy **egyensúlyi állapot** értéket. Az

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V$$



9.6. ÁBRA: Az áramerősség növekedése az *RL*-körben az 5. példában. I az áramerősség egyensúlyi értéke. A $t = \frac{L}{R}$ érték az áramkör időállandója. Az áramerősségnek az állandósult (vagy egyensúlyi) értéktől való eltérése 3 időállandó múlva kevesebb, mint annak 5%-a (31. feladat).

egyenletnek megfelelően $I = V/R$, ha $L = 0$ (nincs induktivitás) vagy ha $\frac{di}{dt} = 0$ (állandó áramerősség). Lásd a 9.6. ábrát.

A (9.9) egyenlőség a (9.8) egyenlet megoldását két tag összegeként adja meg, az **állandósult állapot megoldás** V/R és a $t \to \infty$ esetén nullához tartó **tranziens megoldás** $-(V/R)e^{-(R/L)t}$ összegeként. □

Keverék probléma

Egy vegyület oldata ömlik bele egy tartályba, ami az oldószert tartalmazza a vegyületnek már oldott bizonyos mennyiségével együtt. (A feladat alakja gáz-keverék esetére is ugyanilyen.) Az oldatot a tartályban állandó keverés teszi egyenletessé, és közben ismert sebességgel állandóan folyik kifelé a tartályból. Ilyen esetben általában fontos, hogy ismerjük a keverék koncentrációját minden pillanatban. A folyamatot leíró differenciálegyenlet a következő összefüggésen alapul:

$$\begin{pmatrix} \text{a tartályban levő} \\ \text{anyag mennyiségének} \\ \text{változási sebessége} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{érkező anyag} \\ \text{sebessége} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{távozó anyag} \\ \text{sebessége} \end{pmatrix} \tag{9.10}$$

(A sebesség itt most pl. g/s, kg/perc, $m^3/perc$ stb.) Ha a t időpontban a tartályban levő vegyület mennyisége $y(t)$, és $V(t)$ a tartályban levő összes anyag térfogata, akkor a vegyület távozási sebessége a (t) időpontban:

$$\begin{pmatrix} \text{vegyület távo-} \\ \text{zási sebessége} \end{pmatrix} = \frac{y(t)}{V(t)} \cdot \begin{pmatrix} \text{kifolyási} \\ \text{sebesség} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \text{tartálybeli anyag töménysége a } t \text{ időpontban} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{kifolyási} \\ \text{sebesség} \end{pmatrix} \tag{9.11}$$

A (9.10) egyenlet tehát a

$$\frac{dy}{dt} = (\text{vegyület érkezési sebessége}) - \frac{y(t)}{V(t)} \cdot (\text{kifolyási sebesség}) \tag{9.12}$$

alakot ölti. Ha pl. y grammban van mérve, t percben és V pedig literben, akkor a (9.12) egyenlet egységei:

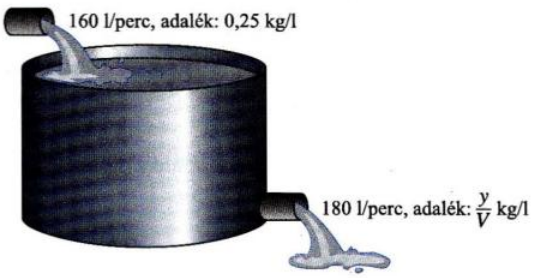
$$\frac{\text{gramm}}{\text{perc}} = \frac{\text{gramm}}{\text{perc}} - \frac{\text{gramm}}{\text{liter}} \cdot \frac{\text{liter}}{\text{perc}}.$$

6. PÉLDA: **Olajfinomító tároló tartály**

Egy olajfinomítóban, egy tárolótartályban 8000 liter benzin van, ami eredetileg 50 kilogramm adalékot tartalmaz oldott állapotban. A téli időjárásra való előkészület miatt percenként 160 liter olyan benzint pumpálnak a tartályba, amelyik 0,25 kilogramm adalékot tartalmaz literenként. A jól kevert folyadékot percenként 180 liter sebességgel engedik ki a tartályból. Mennyi adalékanyag lesz a tartályban 20 perccel az eljárás megkezdése után? (9.7. ábra)

Megoldás: Legyen $y(t)$ az adalék mennyisége a tartályban a t időpontban, kilogrammban mérve. Tudjuk, $y(0) = 50$. A tartályban levő benzin mennyisége a t időpontban

$$V(t) = 8000 \text{ liter} + \left(160\frac{\text{liter}}{\text{perc}} - 180\frac{\text{liter}}{\text{perc}}\right) \cdot (t \text{ perc}) = \\ = (8000 - 20t) \text{ liter}.$$



9.7. ÁBRA: A 6. példában a tárolótartályba befolyó folyadék keveréke a tartályban levővel adja a kifolyó folyadékot.

Így

$$\text{(adalék sebessége ki)} = \frac{y(t)}{V(t)} \cdot \text{(kifolyási sebesség)} = \quad \text{(9.11) egyenlet}$$

$$= \left(\frac{y}{8000-20t}\right) 180 = \quad \text{kifolyási sebesség 180 liter/perc}$$

$$= \frac{9y}{400-t}.$$

Hasonlóképpen

$$\text{adalék sebessége be} = \left(0{,}25\frac{\text{kg}}{\text{liter}}\right)\left(160\frac{\text{liter}}{\text{perc}}\right) = 40\frac{\text{kg}}{\text{perc}}. \quad \text{(9.12) egyenlet}$$

A differenciálegyenlet, ami a keverési eljárást modellezi:

$$\frac{dy}{dt} = 40 - \frac{9y}{400-t}.$$

A megoldáshoz standard alakra hozzuk:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{9}{400-t}y = 40.$$

Itt $P(t) = 9/(400-t)$ és $Q(t) = 40$. Az integráló tényező

$$v(t) = e^{\int P dt} = e^{\int \frac{9}{400-t} dt} = e^{-9\ln(400-t)} = (400-t)^{-9}.$$

A logaritmusnál figyelembe vettük, hogy $400-t > 0$. A standard egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk az integráló tényezővel, és integrálunk:

$$(400-t)^{-9}\frac{dy}{dt} + 9(400-t)^{-10}y = 40(400-t)^{-9},$$

$$\frac{d}{dt}[(400-t)^{-9}y] = 40(400-t)^{-9},$$

$$(400-t)-9y = \int 40(400-t)^{-9}dt,$$

$$(400-t)^{-9}y = 5(400-t)^{-8} + C.$$

Az általános megoldás tehát:

$$y = 5(400-t) + C(400-t)^9.$$

Mivel $t = 0$ esetén $y = 50$, meghatározhatjuk C-t.

$$50 = 5(400-0) + C(400-0)^9,$$

$$C = -\frac{1950}{400^9}.$$

Így a partikuláris megoldás:

$$y = 5(400-t) - \frac{1950}{400^9}(400-t)^9.$$

Az adalék mennyisége 20 perccel a pumpálás megkezdése után:

$$y(20) = 5(400-20) - \frac{1950}{400^9}(400-20)^9 \approx 671 \text{ kilogramm.} \qquad \square$$

9.2. Feladatok

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket (1–14. feladatok)!

1. $x\frac{dy}{dx} + y = e^x, x > 0$ **2.** $e^x\frac{dy}{dx} + 2e^x y = 1$

3. $xy' + 3y = \frac{\sin x}{x^2}, x > 0$

4. $y' + (\operatorname{tg} x)y = \cos^2 x, -\pi/2 < x < \pi/2$

5. $x\frac{dy}{dx} + 2y = 1 - \frac{1}{x}, x > 0$

6. $(1+x)y' + y = \sqrt{x}$ **7.** $2y' = e^{x/2} + y$

8. $e^{2x}y' + 2e^{2x}y = 2x$ **9.** $xy' - y = 2x\ln x$

10. $x\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{x} - 2y, x > 0$

11. $(t-1)^3\frac{ds}{dt} + 4(t-1)^2 s = t+1, t > 1$

12. $(t+1)\frac{ds}{dt} + 2s = 3(t+1) + \frac{1}{(t+1)^2}, t > -1$

13. $\sin\theta\frac{dr}{d\theta} + (\cos\theta)r = \operatorname{tg}\theta, 0 < \theta < \pi/2$

14. $\operatorname{tg}\theta\frac{dr}{d\theta} + r = \sin^2\theta, 0 < \theta < \pi/2$

Kezdetiérték-problémák megoldása

Oldjuk meg a következő kezdetiérték-feladatokat (15–20. feladatok)!

15. $\frac{dy}{dt} + 2y = 3, y(0) = 1$

16. $t\frac{dy}{dt} + 2y = t^3, t > 0, y(2) = 1$

17. $\theta\frac{dy}{d\theta} + y = \sin\theta, \theta > 0, y(\pi/2) = 1$

18. $\theta\frac{dy}{d\theta} - 2y = \theta^3\sec\theta\operatorname{tg}\theta, \theta > 0, y(\pi/3) = 2$

19. $(x+1)\frac{dy}{dx} - 2(x^2+x)y = \frac{e^{x^2}}{x+1}, x > -1, y(0) = 5$

20. $\frac{dy}{dx} + xy = x, y(0) = -6$

21. Oldjuk meg az exponenciális növekedés/csökkenés kezdetiérték-problémát úgy, hogy a differenciálegyenletet mint egy lineáris egyenletet tekintjük, ahol $P(x) = -k$, és $Q(x) = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = ky \quad (k \text{ konstans}), \quad y(0) = y_0!$$

22. Oldjuk meg a következő kezdetiérték-problémát u-ra, mint t függvényére:

$$\frac{du}{dt} + \frac{k}{m}u = 0 \quad (k \text{ és } m \text{ pozitív konstansok}), \quad u(0) = u_0$$

(a) elsőrendű lineáris egyenletként,

(b) szeparábilis egyenletként!

Elméleti kérdések és példák

23. Helyes-e valamelyik egyenlőség a következőkből? Válaszát indokolja:

(a) $x\int\frac{1}{x}dx = x\ln|x| + C$,

(b) $x\int\frac{1}{x}dx = x\ln|x| + Cx$.

24. Helyes-e valamelyik egyenlőség a következőkből? Válaszát indokolja:

(a) $\frac{1}{\cos x}\int\cos x dx = \operatorname{tg} x + C$,

(b) $\frac{1}{\cos x}\int\cos x dx = \operatorname{tg} x + \frac{C}{\cos x}$.

25. Sóoldat: Egy tartályban 400 liter sóoldat van, ami 25 kilogramm sót tartalmaz. Percenként 20 literes sebességgel olyan oldat folyik a tartályba, ami 0,25 kilogramm sót tartalmaz literenként. Állandó keveréssel az oldatban egyenletes sűrűséget biztosítunk, és percenként 16 litert engedünk le.

(a) Milyen mértékű a sóbeáramlás (kilogramm/perc) a t időpillanatban?

(b) Mennyi oldat van a tartályban a t időpillanatban?

(c) Milyen mértékű a sókiáramlás (kilogramm/perc) a t időpillanatban?

(d) Írjuk fel és oldjuk meg a keverési eljárást leíró kezdetiérték-problémát!

(e) Milyen töménységű lesz a sóoldat 25 perccel a keverés megkezdése után?

26. Keverés: Egy 800 literes tartály félig van desztillált vízzel. A $t = 0$ időpillanatban olyan oldatot kezdünk el 20 liter/perc sebességgel a tartályba önteni, ami 60 g oldott anyagot tartalmaz literenként. Ugyanakkor 12 liter/perc sebességgel elkezdjük leengedi a folyadékot, miközben az egész tartályban levő mennyiséget állandóan jól keverjük.

(a) Mikorra lesz a tartály tele?

(b) Amikor tele van, mennyi oldott anyagot tartalmaz?

27. Műtrágya keverék: Egy tartályban 400 liter csapvíz van. Percenként 4 liter olyan oldatot pumpálunk a tartályba, ami 125 g oldott műtrágyát tartalmaz literenként, és ugyanakkor percenként 12 liter oldatot engedünk ki. Állandó keveréssel biztosítjuk az egyenletes töménységet. Mikor éri el a maximális értéket a tartályban levő műtrágya mennyisége, és mennyi ez az érték?

28. Szénmonoxid szennyezés: A vállalat tárgyalótermében kezdetben 500 liter tiszta levegő van. A $t = 0$ időpillanatban 4% szénmonoxidot tartalmazó cigarettafüstöt kezdenek el fújni a terembe $0{,}015 m^3$/perc mennyiségben. Egy mennyezetventillátor

megfelelően keveri a terem levegőjét és a levegő kifelé is áramlik a teremből, ugyanolyan, $0{,}015m^3$/perc ütemben. Határozzuk meg azt az időpontot, amikor a teremben levő levegő szénmonoxid koncentrációja eléri az 0,01%-ot!

29. Áramerősség egy zárt *RL*-körben: Egy *RL*-kör kapcsolójának zárása után hány másodperccel fogja elérni az i áramerősség az egyensúlyi érték felét? Vegyük észre, hogy ez az idő R és L függvénye, és nem függ attól, mekkora feszültséget alkalmazunk!

30. Áramerősség egy nyitott *RL*-körben: Ha a kapcsolót egy *RL* áramkörben kinyitjuk, miután az áramerősség beállt az egyensúlyi $I = V/R$ értékre, a csökkenő áramerősség (lásd a mellékelt ábrát) a

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

egyenletnek megfelelően viselkedik, ami épp a (9.7) egyenlet $V = 0$ esetén.

(a) Oldjuk meg az egyenletet, hogy megkapjuk i-t t függvényeként!

(b) Mennyivel a kapcsoló kinyitása után csökken az áramerősség az eredeti érték felére?

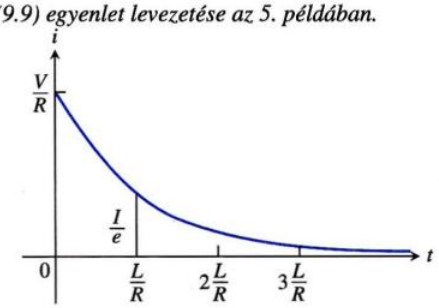
(c) Mutassuk meg, hogy az áramerősség I/e amikor $t = L/R$! (Ennek az időpontnak a jelentőségét a következő feladatban magyarázzuk meg.)

31. Időállandó: A 9.6. ábrán látható L/R számot a mérnökök az *RL*-kör időállandójának hívják. Ennek a számnak az a jelentősége, hogy a kapcsoló zárása után az áramerősség 3 időállandón belül eléri az egyensúlyi érték 95%-át. Azaz, az időállandó egy belső mértéket ad arra, hogy egy adott áramkör milyen gyorsan éri el az egyensúlyi állapotot.

(a) Határozzuk meg a (9.9) egyenletben a $t = 3L/R$ időpontnak megfelelő i értéket, és mutassuk meg, hogy az körülbelül 95%-a az $I = V/R$ egyensúlyi értéknek!

(b) Az áramerősség egyensúlyi értékének körülbelül hány százaléka fog folyni az áramkörben a kapcsoló bekapcsolása után 2 időállandóval (azaz, amikor $t = 2L/R$)?

32. *A (9.9) egyenlet levezetése az 5. példában.*



(a) Mutassuk meg, hogy a

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

egyenlet megoldása

$$i = \frac{V}{R} + Ce^{-(R/L)t}!$$

(b) Ezután, határozzuk meg a C konstanst az $i(0) = 0$ kezdeti feltételből! Ezzel a (9.9) egyenlet levezetése teljessé vált.

(c) Mutassuk meg, hogy $i = V/R$ megoldása a (9.8) egyenletnek, és hogy $i = Ce^{-(R/L)t}$ kielégíti a

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

egyenletet!

A Bernoulli differenciálegyenlet

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

alakú. Ha $n = 0$, a Bernoulli egyenlet lineáris. n más értékeire az $u = y^{1-n}$ helyettesítés a Bernoulli egyenletet a

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$$

lineáris egyenletbe viszi. Például, a

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{-x}y^2$$

egyenletben $n = 2$, így $u = y^{1-2} = y^{-1}$, és $du/dx = -y^{-2}dy/dx$. Azaz $dy/dx = -y^2du/dx = -u^{-2}du/dx$. Ezt az eredeti egyenletbe helyettesítve

$$-u^{-2}\frac{du}{dx} - u^{-1} = e^{-x}u^{-2},$$

ami $(-u^2)$-tel beszorozva

$$\frac{du}{dx} + u = -e^{-x},$$

ami az ismeretlen u függvényben lineáris.

Oldjuk meg a 33–36. feladatokat!

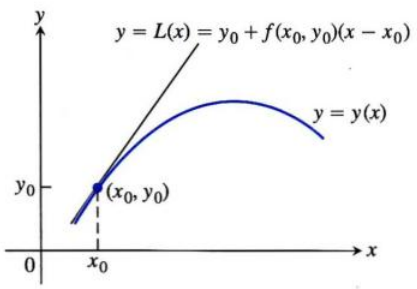
33. $y' - y = -y^2$ **34.** $y' - y = xy^2$

35. $xy' + y = y^{-2}$ **36.** $x^2y' + 2xy = y^3$

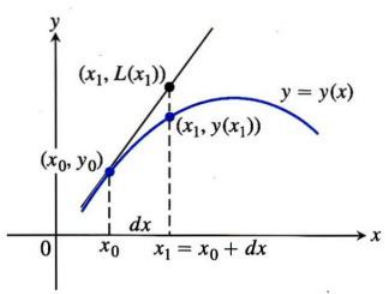
9.3. Euler-módszer

Ha nem akarjuk, vagy nem tudjuk megkeresni egy $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-probléma *egzakt* megoldását, akkor számítógéppel készíthetünk egy közelítő értéktáblázatot az y értékeire egy adott intervallumon. Az ilyen táblázatot a probléma **numerikus megoldásának** nevezzük, a módszert pedig, amellyel a táblázatot készítettük, **numerikus módszernek** vagy **numerikus eljárásnak**. A numerikus módszerek általában gyorsak és megfelelő pontosságúak, és igen

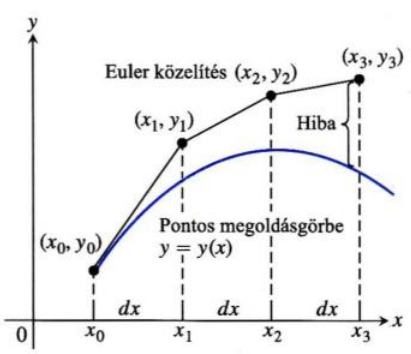
gyakran alkalmazzuk őket, ha az egzakt képlet nem szükséges, vagy nem kifejezhető, vagy túlságosan bonyolult. Ebben a fejezetben egy ilyen módszert mutatunk be, amit Euler-módszernek nevezünk, és amelyre sok másik módszer épül.



9.8. ÁBRA: Az $y = y(x)$ függvény $L(x)$ linearizációja $x = x_0$-nál



9.9. ÁBRA: Az Euler-módszer első lépése $y(x_1)$-et $y_1 = L(x_1)$-gyel közelíti.



9.10. ÁBRA: Az Euler-módszer három lépése az $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-probléma közelítő megoldásához. Ahogy egyre több lépést csinálunk, a hiba általában akkumulálódik, ha nem is olyan mértékben mint ahogy itt mutatjuk.

Euler-módszer

Ha adott egy $dy/dx = f(x,y)$ differenciálegyenlet és az $y(x_0) = y_0$ kezdeti érték, az $y = y(x)$ megoldást közelíthetjük a linearizációjával

$$L(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) \quad \text{vagy} \quad L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Az $L(x)$ értékek jó közelítései az $y(x)$ értékeknek az x_0 pont egy kis környezetében (9.8. ábra).

Tudjuk, hogy az (x_0, y_0) pont a megoldásgörbén van. Legyen a független változó egy új értéke $x_1 = x_0 + dx$. (Emlékezzünk, hogy a teljes differenciál definíciójában $dx = \Delta x$.) Ha az x növekménye kicsi, akkor

$$y_1 = L(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)dx$$

egy jó közelítése a pontos megoldás $y = y(x_1)$ értékének. Így az (x_0, y_0) pontból, ami pontosan a megoldásgörbén fekszik, eljutottunk az (x_1, y_1) pontba, ami közel van a megoldásgörbe $(x_1, y(x_1))$ pontjához (9.9. ábra). Kiindulva az (x_1, y_1) pontból az ezen áthaladó megoldás $f(x_1, y_1)$ meredekségével folytatjuk az eljárást. Az (x_1, y_1) ponton áthaladó megoldásgörbe linearizációjával $x_2 = x_1 + dx$ helyettesítéssel

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)dx$$

adódik. Ez lesz a következő közelítő értéke az $y = y(x)$ megoldásnak (9.10. ábra). Ugyanígy folytatva, az (x_2, y_2) pontból nyerjük a harmadik közelítést

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)dx,$$

és így tovább. Ezzel az eljárással az iránymezőt követve egy megoldásgörbe közelítését építjük fel.

A 9.10. ábrán a lépésközt nagynak vettük, hogy jól szemléltessük az eljárást, így a közelítés nagyon durvának látszik. A gyakorlatban dx elég kicsi ahhoz, hogy a fekete görbe szinte összesimuljon a kékkel és így a közelítés jó legyen.

1. PÉLDA: **Euler-módszer alkalmazása**

Határozzuk meg az

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

kezdetiérték-probléma megoldásának y_1, y_2, y_3 első három közelítését kiindulva $x_0 = 0$-ból $dx = 0{,}1$ esetén!

Megoldás: $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $x_1 = x_0 + dx = 0{,}1$, $x_2 = x_0 + 2dx = 0{,}2$ és $x_3 = x_0 + 3dx = 0{,}3$.

Első :
$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)dx = \\ &= y_0 + (1 + y_0)dx = \\ &= 1 + (1+1)(0{,}1) = 1{,}2 \end{aligned}$$

Második :
$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)dx = \\ &= y_1 + (1 + y_1)dx = \\ &= 1{,}2 + (1 + 1{,}2)(0{,}1) = 1{,}42 \end{aligned}$$

Harmadik :
$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2)dx = \\ &= y_2 + (1 + y_2)dx = \\ &= 1{,}42 + (1 + 1{,}42)(0{,}1) = 1{,}662 \end{aligned}$$

□

Az adott módon az eljárás könnyen folytatható. n darab egyenlő távolságban levő független változó értékre helyettesítsünk

$$x_1 = x_0 + dx,$$
$$x_2 = x_1 + dx,$$
$$\vdots$$
$$x_n = x_{n-1} + dx,$$

és számítsuk a megoldás közelítő értékeit

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)dx,$$
$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)dx,$$
$$\vdots$$
$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})dx.$$

Ha $f(x,y)$ értelmezési tartománya nem korlátozza, akkor a lépések n száma annyi lehet, amennyit csak akarunk, de n növekedtével a hibák akkumulálódnak, és általában hamar túl nagyra nőnek.

Az Euler-módszert könnyű beprogramozni. Ezután a program generálja az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ közelítő értékek táblázatát, ha megadjuk x_0-t, y_0-t, és a lépésszámot, n-t.

Az 1. példa szétválasztható változójú differenciálegyenletével az ott szereplő kezdetiérték-probléma pontos megoldásaként az $y = 2e^x - 1$ függvényt kaptuk. Ezt az eredményt felhasználjuk a 2. példa megoldásánál.

2. PÉLDA: **Az Euler-módszer pontosságának vizsgálata**

Használjuk az Euler-módszert az

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

kezdetiérték-probléma megoldása közelítő értékeinek meghatározására a $0 \leq \leq x \leq 1$ intervallumon, $x_0 = 0$-tól, két különböző lépésközzel:

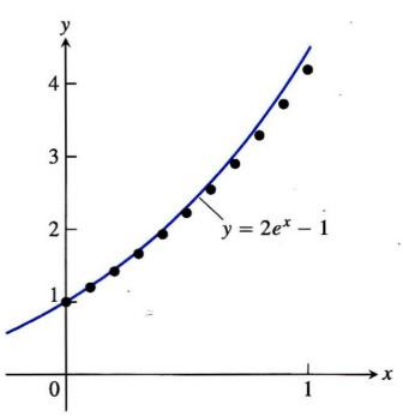
(a) $dx = 0{,}1$, **(b)** $dx = 0{,}05$!

Hasonlítsuk össze a közelítő értékeket a pontos értékekkel!

Megoldás: **(a)** Számítógéppel állítottuk elő a 9.1. táblázatot. A hibát úgy kaptuk, hogy a kerekítetlen függvényértékből kivontuk a kerekítetlen közelítő értéket, majd minden adatot négy tizedesre kerekítettünk.

x	y(Euler)	y(pontos)	Hiba
0	1	1	0
0,1	1,2	1,2103	0,0103
0,2	1,42	1,4428	0,0228
0,3	1,662	1,6997	0,0377
0,4	1,9282	1,9836	0,0554
0,5	2,2210	2,2974	0,0764
0,6	2,5431	2,6442	0,1011
0,7	2,8974	3,0275	0,1301
0,8	3,2872	3,4511	0,1639
0,9	3,7159	3,9192	0,2033
1,0	4,1875	4,4366	0,2491

9.1. TÁBLÁZAT: Az $y' = 1 + y, y(0) = 1$ feladat Euler megoldása. Lépésköz: $dx = 0{,}1$.



9.11. ÁBRA: Az $y = 2e^x - 1$ függvény grafikonját rárajzoltuk az Euler-módszerrel kapott függvényértékek grafikonjára.

Mire elértük $x = 1$-et (10 lépés után), a hiba a pontos megoldásnak kb. 5,6%-a lett. A 9.11. ábra mutatja a pontos megoldást és az Euler-módszerrel kapott értékeket.

x	y(Euler)	y(pontos)	Hiba
0	1	1	0
0,05	1,1	1,1025	0,0025
0,10	1,205	1,2103	0,0053
0,15	1,3153	1,3237	0,0084
0,20	1,4310	1,4428	0,0118
0,25	1,5526	1,5681	0,0155
0,35	1,8142	1,8381	0,0239
0,40	1,9549	1,9836	0,0287
0,45	2,1027	2,1366	0,0340
0,50	2,2578	2,2974	0,0397
0,60	2,5917	2,6442	0,0525
0,65	2,7713	2,8311	0,0598
0,70	2,9599	3,0275	0,0676
0,75	3,1579	3,2340	0,0761
0,80	3,3657	3,4511	0,0853
0,85	3,5840	3,6793	0,0953
0,90	3,8132	3,9192	0,1060
0,95	4,0539	4,1714	0,1175
1,00	4,3066	4,4366	0,1300

9.2. TÁBLÁZAT: Az $y' = 1+y, y(0) = 1$ feladat Euler-megoldása, lépésköz $dx = 0{,}05$.

(b) Nézzük meg, a hiba mennyivel lesz kisebb, ha csökkentjük a lépésközt. A 9.2. táblázat mutatja a számítások eredményét, ha a lépésköz 0,05. Így a lépésszám 20, mire elérjük $x = 1$-et. A kerekítéseket ugyanúgy csináltuk, mint a 9.1. táblázatban. Ebben az esetben $x = 1$-nél a hiba csak 2,9% . □

Csábító gondolat, hogy a lépésköz csökkentésével próbáljuk a pontosságot növelni, de az a helyzet, hogy a megnövekedett lépésszámmal a műveletek száma is nő, és így ezzel együtt a minden egyes műveletnél a számítógép által végrehajtott kerekítések száma is, ami határt szab a pontosságnak.

A módszer hibaanalízise és pontosabb módszerek tárgyalása a felsőbb kurzusok feladata. Mi itt az Euler-módszer egy javítását mutatjuk meg, amit **(másodrendű) Runge–Kutta-módszernek** hívunk. Az Euler-módszert pl. úgy javíthatjuk, ha két meredekség átlagát használjuk. Először megbecsüljük y_n-et ahogy az Euler-módszerrel tettük, de nem ez lesz a közelítő érték, így ezt jelöljük z_n-nel. Ezután $f(x_{n-1}, y_{n-1})$ és $f(x_n, z_n)$ átlaga lesz a továbblépés meredeksége, azaz y_n-et a következőképp kapjuk:

$$z_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})dx,$$
$$y_n = y_{n-1} + \left[\frac{f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_n, z_n)}{2}\right] dx.$$

3. PÉLDA: **A Runge–Kutta (javított Euler) módszer pontosságának vizsgálata**

Használjuk a Runge–Kutta-módszert az

$$y' = 1+y, \quad y(0) = 1$$

kezdetiérték-probléma közelítő megoldására a $0 \le x \le 1$ intervallumon, $x_0 = 0$-ból indulva $dx = 0{,}1$ lépésközzel! Hasonlítsuk össze a közelítő értékeket a pontos megoldás $y = 2e^x - 1$ értékeivel!

Megoldás: Számítógépet használtunk a táblázat előállításához, a kerekítésekkel úgy jártunk el, mint a korábbi esetekben.

Bár itt kb. annyi számolást kellett végezni, mint amikor 20 lépést csináltunk, a relatív hiba $x = 1$-nél kb. 0,19% . □

x	y(Runge–Kutta)	y(pontos)	Hiba
0	1	1	0
0,1	1,21	1,2103	0,0003
0,2	1,4421	1,4428	0,0008
0,3	1,6985	1,6997	0,0013
0,4	1,9818	1,9836	0,0018
0,5	2,2949	2,2974	0,0025
0,6	2,6409	2,6442	0,0034
0,7	3,0231	3,0275	0,0044
0,8	3,4456	3,4511	0,0055
0,9	3,9124	3,9192	0,0068
1,0	4,4282	4,4366	0,0084

9.3. TÁBLÁZAT: Az $y' = 1+y$, $y(0) = 1$ feladat Runge–Kutta (javított Euler) módszerrel, lépésköz: $dx = 0{,}1$.

Összehasonlítva ezt a táblázatot 9.1. és 9.2. táblázatokkal láthatjuk, hogy a Runge–Kutta-módszer sokkal jobb eredményt ad, legalábbis ebben az esetben.

((***) A fordító megjegyzése: Az Euler-módszer egy lépésénél elkövetett hiba a lépésköz négyzetével arányos. A számítógépek általában olyan Runge–Kutta-módszereket használnak, amelyeknél egy lépés hibája a lépésköz hetedik-nyolcadik hatványával arányos. A *másodrendű Runge–Kutta-módszer*, azaz a *javított Euler-módszer* hibája egy lépésre a lépésköz köbével arányos.)

4. PÉLDA: **Olajfinomító tároló tartálya újratárgyalva**

A 9.2. alfejezet 6. példájában egy 8000 literes benzintartályt néztünk, amelybe töltöttek is, és amelyből ezzel egyidőben le is engedtek benzint. A feladat a

$$\frac{dy}{dx} = 40 - \frac{9y}{400-t}, \quad y(0) = 50$$

kezdetiérték-problémára vezetett, ahol $y(t)$ a tartályban levő mennyiség a t időben. A kérdés az volt, hogy határozzuk meg $y(20)$ értékét.

Megoldás: Az Euler-módszert használva 0,2 lépésközzel (azaz 100 lépés)

$$y(0{,}2) \approx 57{,}7750, \quad y(0{,}4) \approx 65{,}5149, \ldots$$

és a végén $y(20) \approx 672{,}1808$. Az $y(20) = 671{,}0137$ pontos megoldáshoz képest a relatív hiba kb. 0,17% . □

9.3. Feladatok

Euler-közelítések számítása

Az 1–6. feladatokban használjunk Euler módszert a kezdetiérték-probléma első három közelítésének kiszámítására! Határozzuk meg az egzakt megoldást is, és vizsgáljuk meg a közelítés pontosságát! Kerekítsünk négy tizedesre!

1. $y' = 1 - \frac{y}{x}$, $y(2) = -1$, $dx = 0{,}5$

2. $y' = x(1-y)$, $y(1) = 0$, $dx = 0{,}2$

3. $y' = 2xy + 2y$, $y(0) = 3$, $dx = 0{,}2$

4. $y' = y^2(1+2x)$, $y(-1) = 1$, $dx = 0{,}5$

T 5. $y' = 2xe^{x^2}$, $y(0) = 2$, $dx = 0{,}1$

T 6. $y' = y + e^x - 2$, $y(0) = 2$, $dx = 0{,}5$

7. Használjuk az Euler-módszert $y(1)$ becslésére, ha $y' = y$, $y(0) = 1$ és $dx = 0{,}2$! Mi $y(1)$ pontos értéke?

8. Használjuk az Euler-módszert $y(2)$ becslésére, ha $y' = y/x$, $y(1) = 2$ és $dx = 0{,}2$! Mi $y(2)$ pontos értéke?

T 9. Használjuk az Euler-módszert $y(5)$ becslésére, ha $y' = y^2\sqrt{x}$, $y(1) = -1$ és $dx = 0{,}5$! Mi $y(5)$ pontos értéke?

T 10. Használjuk az Euler-módszert $y(2)$ becslésére, ha $y' = y - e^{2x}$, $y(0) = 1$ és $dx = 1/3$! Mi $y(2)$ pontos értéke?

Runge–Kutta-módszer

A 11. és 12. feladatban használjuk a Runge–Kutta-módszert a kezdetiérték-probléma első három közelítésének számításához.

Hasonlítsuk össze ezeket ez értékeket a pontos megoldás értékeivel!

11. $y' = 2y(x+1)$, $y(0) = 3$, $dx = 0{,}2$
(A pontos megoldást lásd a 3. feladatban!)

12. $y' = x(1-y)$, $y(1) = 0$, $dx = 0{,}2$
(A pontos megoldást lásd a 2. feladatban!)

SZÁMÍTÓGÉPES VIZSGÁLATOK

Euler-módszer

A 13–16. feladatokban használjuk az Euler-módszert a megoldás x^* pontbeli értékének becslésére! Határozzuk meg a pontos megoldás értékét is x^*-ban!

13. $y' = 2xe^{x^2}$, $y(0) = 2$, $dx = 0{,}1$, $x^* = 1$

14. $y' = y + e^x - 2$, $y(0) = 2$, $dx = 0{,}5$, $x^* = 2$

15. $y' = \sqrt{x}/y$, $y > 0$ $y(0) = 1$, $dx = 0{,}1$, $x^* = 1$

16. $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$, $dx = 0{,}1$, $x^* = 1$

A 17. és 18. feladatokban **(a)** találjuk meg a kezdetiérték-probléma pontos megoldását, majd hasonlítsuk össze $y(x^*)$ értékét az Euler-módszerrel kapott közelítő megoldással, ha x_0-ból indulunk **(b)** 0,2, **(c)** 0,1, **(d)** 0,05 lépésközzel!

17. $y' = 2y^2(x-1)$, $y(2) = -1/2$, $x_0 = 2$ $x^* = 3$

18. $y' = y - 1$, $y(0) = 3$, $x_0 = 0$, $x^* = 1$

Runge–Kutta-módszer

A 19. és 20. feladatokban hasonlítsuk össze a Runge–Kutta-módszerrel kapott közelítő értéket $y(x^*)$-gal! Induljunk x_0-ból, a lépésköz legyen

(a) 0,2, **(b)** 0,1, **(c)** 0,05!

(d) Figyeljük meg, hogyan változik a hiba a lépésköz csökkenésével!

19. $y' = 2y^2(x-1)$, $y(2) = -1/2$, $x_0 = 2$, $x^* = 3$
(A pontos megoldást lásd a 17. feladatban!)

20. $y' = y - 1$, $y(0) = 3$, $x_0 = 0$, $x^* = 1$
(A pontos megoldást lásd a 18. feladatban!)

Differenciálegyenletek megoldása grafikusan

Használjunk a számítógép grafikus programját a 21–24. feladatok grafikus megoldására a következő lépések végrehajtásával:

(a) Rajzoltassunk egy iránymezőt az adott xy ablakban!

(b) Határozzuk meg az általános megoldást egy számítógép segítségével!

(c) A tetszőleges konstans különböző értékeire $C = -2, -1, 0, 1, 2$ rajzoltassuk be a megoldásokat az iránymezőbe!

(d) Keressük meg azt a grafikont, amelyik kielégíti a kezdeti feltételt!

(e) Határozzuk meg a megoldás numerikus közelítését Euler-módszerrel úgy, hogy az x értékek intervallumát négy részre osztjuk, és ezeket az értékeket is rajzoltassuk be az ábrába!

(f) Ismételjük meg az (e) pontot az x értékek intervallumát 8, 16, 32 részre osztva! Ezeket a közelítéseket is rajzoltassuk be az ábrába!

(g) Határozzuk meg a hibát $(y_{pontos} - y_{Euler})$ a megadott b pontban mind a négy Euler-közelítésre! Vizsgáljuk a hibaszázalékot!

21. $y' = x + y$, $y(0) = -7/10$, $-4 \le x \le 4$, $-4 \le y \le 4$; $b = 1$

22. $y' = -x/y$, $y(0) = 2$, $-3 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 3$; $b = 2$

23. $y' = y(2-y)$, $y(0) = 1/2$, $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 3$; $b = 3$

24. $y' = (\sin x)(\sin y)$, $y(0) = 2$, $-6 \le x \le 6$, $-6 \le y \le 6$; $b = 3\pi/2$

9.4. Autonóm differenciálegyenletek grafikus megoldása

A 4. fejezetben megállapítottuk, hogy az első derivált előjele meghatározza hol növekszik és hol csökken a függvény, a második derivált előjele pedig azt, hogy hol konvex ill. hol konkáv. Ezeket az ismereteinket felhasználhatjuk differenciálegyenletek grafikus megoldásánál. Ehhez először bevezetjük a *fázisegyenes* és az *egyensúlyi helyzet* fogalmát. Most egy kicsit más szemszögből nézzük, mi történik, ha a derivált nulla.

Egyensúlyi érték és fázisegyenes

Ha differenciáljuk az

$$\frac{1}{5}\ln(5y-15) = x + 1$$

implicit egyenletet, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{5}\left(\frac{5}{5y-15}\right)\frac{dy}{dx} = 1.$$

Ezt $y' = dy/dx$-re megoldva $y' = 5y - 15 = 5(y-3)$. Ebben az esetben y' csak y függvénye, és akkor nulla, ha $y = 3$.

> DEFINÍCIÓ: **Autonóm differenciálegyenlet**
> Az olyan differenciálegyenletet, amelyben y' csak y függvénye, **autonóm** differenciálegyenletnek nevezzük.

Nézzük, mi történik, ha a derivált egy autonóm differenciálegyenletben nullával egyenlő?

> DEFINÍCIÓ: **Egyensúlyi érték**
> Ha $dy/dx = g(y)$ egy autonóm differenciálegyenlet, akkor az olyan y értéket, amelyre $dy/dx = 0$, **egyensúlyi helyzetnek** vagy **egyensúlyi értéknek** nevezzük. Ezzel ekvivalens kifejezések a **stacionárius érték**, **stacionárius helyzet**, **nyugalmi érték**, **nyugalmi helyzet**.

Azaz, az egyensúlyi értékek (helyzetek) azok, amelyeknél a függő változó nem változik, azaz nyugalomban van. A hangsúly itt y-nak az értékein van, amelyekre $dy/dx = 0$, és nem x értékein, ahogy az a 4. fejezetben volt.

1. PÉLDA: **Egyensúlyi értékek meghatározása**

A

$$\frac{dy}{dx} = (y+1)(y-2)$$

differenciálegyenlet egyensúlyi értékei $y = -1$ és $y = 2$. □

Ahhoz, hogy megrajzoljuk egy autonóm differenciálegyenlet megoldását, először rajzolunk egy **fázisegyenest**, ami egy kiegészítő információkkal ellátott valós számegyenes, az y értékek egyenese. (Mi itt csak valósértékű y függvényekkel foglalkozunk, de y általában lehet vektorértékű is. A fázisegyenes egy egydimenziós *fázistér*.) Ezután bejelöljük az egyensúlyi értékeket és azokat az intervallumokat, ahol dy/dx és d^2y/dx^2 pozitív ill. negatív. Így megtudjuk, hogy a megoldások hol növekednek, hol csökkennek, hol konvexek, hol konkávok. Azaz, felvázolhatjuk a megoldásgörbéket, anélkül, hogy képleteiket megadnánk.

2. PÉLDA: **Fázisegyenes és megoldásgörbe rajzolása**

Rajzoljunk a

$$\frac{dy}{dx} = (y+1)(y-2)$$

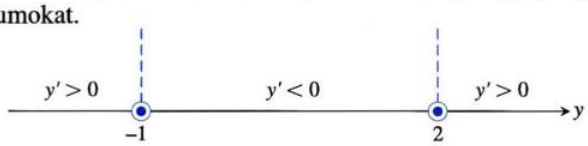
differenciálegyenlethez egy fázisegyenest, és rajzoljunk meg néhány megoldásgörbét!

Megoldás:

1. Rajzoljunk egy számegyenest y értékeinek, és jelöljük be az egyensúlyi értékeket: $y = -1$ és $y = 2$!



2. Jelöljük be az intervallumokat, ahol $y' > 0$ és ahol $y' < 0$! Ez hasonló, mint amit a 4.3. fejezetben csináltunk, csak most az y tengelyen jelölünk meg intervallumokat.



Az y'-re vonatkozó információkat ráírhatjuk magára a fázisegyenesre. Mivel $y' > 0$ a -1 ponttól balra, a differenciálegyenlet megoldása -1-nél kisebb

y értékekre növekedni fog $y=-1$ irányába. Ezt az információt egy -1 felé mutató nyíllal jelöljük.

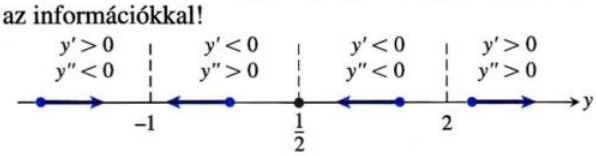


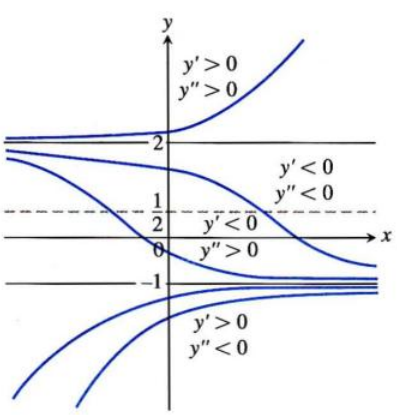
Hasonlóképp, $y=-1$ és $y=2$ között $y'<0$ így minden olyan megoldás, aminek itt van helyettesítési értéke, -1 felé fog csökkenni. Ha $y>2$, akkor $y'>0$, így minden ilyen megoldás monoton növekedő.
Röviden összefoglalva: a megoldásgörbék a vízszintes $y=-1$ egyenes alatt $y=-1$-hez tartván növekednek, a görbék az $y=-1$ és $y=2$ egyenesek között az $y=2$-től távolodva csökkenve tartanak $y=-1$-hez. A megoldásgörbék $y=2$ felett ettől az egyenestől távolodva monoton növekednek, és mivel y minél nagyobb, annál gyorsabban, a függvény nem lesz korlátos.

3. Határozzuk meg azokat az intervallumokat, ahol $y''>0$ és ahol $y''<0$! Deriválva y'-t az implicit deriválás szabályai szerint

$$\begin{aligned} y' &= (y+1)(y-2) = y^2-y-2, \\ y'' &= \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(y^2-y-2) = \\ &= 2yy'-y' = \\ &= (2y-1)y' = \\ &= (2y-1)(y+1)(y-2). \end{aligned}$$

Tehát y'' előjelet vált ha $y=-1$, $y=1/2$, $y=2$. Egészítsük ki a fázisegyenest ezekkel az információkkal!





9.12. ÁBRA: A 2. példa grafikus megoldásgörbéi, az egyensúlyi értékeket felvevő $y=-1$ és $y=2$ vízszintes egyenesekkel együtt.

4. Vázoljunk fel néhányat a megoldásgörbék közül az xy-síkba! Az $y=-1$, $y=1/2$, $y=2$ egyenesek a síkot vízszintes sávokra osztják, amelyekben y' és y'' előjelét ismerjük. Ebből tudjuk, hol növekednek, hol csökkennek, és merre görbülnek (9.12. ábra).
Az egyensúlyi értékekkel képezett egyenesek, $y=-1$ és $y=2$ szintén megoldásgörbék. (Hiszen kielégítik a differenciálegyenletet.) Az $y=1/2$ egyenest metsző megoldásgörbéknek ebben a pontban inflexiós pontjuk van. Konvexből (az egyenes felett) konkávba váltanak (az egyenes alatt).
Ahogy azt a 2. lépésben már megállapítottuk, x növekedtével az alsó és középső sáv görbéi a -1-es értékhez tartanak, míg a felső sáv görbéi minden határon túl nőnek. □

Stabil és instabil egyensúly

Nézzük a 9.12-es ábrát a megoldásgörbék viselkedése szempontjából. Ha egy görbének -1-hez közeli értéke van, ez x növekedtével még inkább közeledik -1-hez. Ezért $y=-1$ egy **stabil egyensúlyi helyzet**. Az $y=2$ körüli viselkedés épp az ellenkezője. Magát az $y=2$ egyenest kivéve minden görbe távolodik ettől. Ezért $y=2$ egy **instabil egyensúlyi helyzet**. Ha a megoldás helyettesítési értéke valahol pontosan kettő, akkor az is marad, de ha egy akármilyen pici értékkel eltér ettől, akkor már folyamatosan távolodni fog. Ezt az eredeti fázisegyenesen is láthatjuk, a nyilak az $y=2$ ponttól elfelé mutatnak.

Most bemutatjuk néhány alkalmazását az előbb tárgyalt módszernek.

A 7.5. alfejezetben már megoldottuk analitikusan a

$$\frac{dH}{dt} = -k(H-H_S), \quad k>0$$

differenciálegyenletet, amikor a lehűlési folyamat Newton-törvényét modellezték. Itt H a hőmérséklete egy tárgynak, és H_S az azt körülvevő közeg hőmérséklete. Az első alkalmazásnál fázisegyenes vizsgálatot használunk, hogy megértsük ennek a hőmérséklet-modellnek a viselkedését.

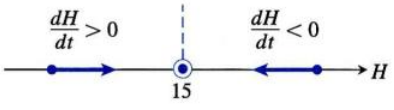
3. PÉLDA: **Hűlő leves**

Hogyan változik a leves hőmérséklete, amikor egy tál forró levest teszünk az asztalra? Tudjuk, hogy lehűl, de hogyan viselkedik egy tipikus hőmérsékletgörbe az idő függvényében?

Megoldás: Tegyük fel, hogy a környezetnek állandó hőmérséklete van, 15°C. Ekkor a hőmérsékletkülönbség $H(t) - 15$. Feltéve, hogy H az idő differenciálható függvénye, a lehűlés Newton-törvénye alapján van egy olyan konstans $k > 0$, hogy

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - 15). \tag{9.13}$$

(Azért van $-k$, mert $H > 15$ esetén negatív derivált kell legyen.) Mivel $dH/dt = 0$, ha $H = 15$, a 15°C egy egyensúlyi érték. Ha $H > 15$, a (9.13) egyenletből következik, hogy $(H - 15) > 0$ és $dH/dt < 0$. Ha a tárgy melegebb, mint a környezete, lehűl. Hasonlóképp, ha $H < 15$, akkor $(H - 15) < 0$ és $dH/dt > 0$. Egy tárgy, ami hidegebb a környezeténél fel fog melegedni. Azaz a (9.13) egyenletben leírt viselkedés megegyezik a tapasztalatunkkal. Ezek a megfigyelések vannak berajzolva a fázisegyenesre a 9.13. ábrán. A $H = 15$ érték egy stabil egyensúlyi pont.



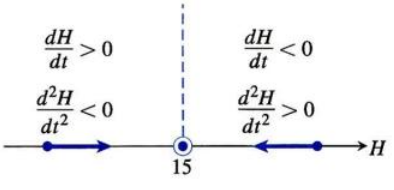
9.13. ÁBRA: Az első lépés a 3. példa fázisegyenesének létrehozásánál. A hőmérséklet az egyensúlyi érték (körülvevő közeg hőmérséklete) felé közelít az idő múlásával.

A megoldásgörbék konvexitását a (9.13) egyenlet t szerinti differenciálásával határozzuk meg:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dH}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(-k(H - 15)),$$

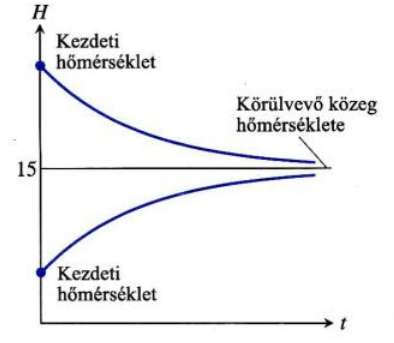
$$\frac{d^2H}{dt^2} = -k\frac{dH}{dt}.$$

Mivel $-k$ negatív, d^2H/dt^2 pozitív, ha $dH/dt < 0$ és negatív, ha $dH/dt > 0$. A 9.14. ábrán hozzáírtuk a fázisegyeneshez ezeket az információkat is. A kiegészített fázisegyenes mutatja, hogy ha a tárgy hőmérséklete az egyensúlyi érték 15°C felett van, akkor $H(t)$ grafikonja csökkenő és konvex, ha a tárgy hőmérséklete 15°C (vagyis az azt körülvevő közeg hőmérséklete) alatt van, akkor $H(t)$ növekvő és konkáv. Ezen információ birtokában vázoltuk fel a tipikus megoldásgörbéket (9.15. ábra).



9.14. ÁBRA: A Newton-féle hűlési törvény teljes fázisegyenese (3. példa).

A 9.15. ábra felső görbéje mutatja, ahogy a tárgy lehűl. A hűlés gyorsasága egyre lassabb, mert dH/dt nullához tart. Ez a megfigyelés benne van a hűlés Newton-törvényében és a differenciálegyenletben is, de ezzel a grafikonnal egy szemléletes ábrázolását is adtuk ennek a jelenségnek. □



9.15. ÁBRA: A hőmérséklet az időben. Függetlenül a kezdeti hőmérséklettől, a tárgy $H(t)$ hőmérséklete 15°C-hoz tart, vagyis a körülvevő közeg hőmérsékletéhez.

4. PÉLDA: **Szabadon eső test mozgásának elemzése közegellenállás figyelembevételével**

Galilei és Newton is megfigyelték, hogy az impulzus változása egy mozgó testnél egyenlő a rá ható erők összegével. Matematikai képlettel:

$$F = \frac{d}{dt}(mv), \tag{9.14}$$

ahol F az erő, m és v pedig a test tömege ill. sebessége. Ha m időben változik, mint pl. egy rakétánál, amelyik üzemanyagot éget el, akkor (9.14) jobb oldala tovább alakul a szorzatderiválás szabályai szerint:

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}.$$

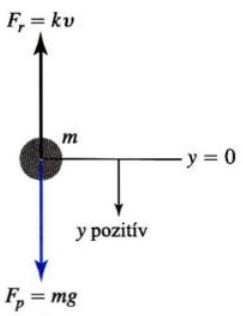
Igen gyakran azonban m konstans, $dm/dt = 0$ és így (9.14) alakja egyszerűbb:

$$F = m\frac{dv}{dt} \quad \text{vagy} \quad F = ma, \tag{9.15}$$

amit *Newton második törvénye néven ismerünk*. Szabadeséskor a konstans gravitációs gyorsulást g-vel jelöljük és az egyetlen erő, ami a testre lefelé hat:

$$F_p = mg.$$

Azonban egy valós helyzetben a test a levegőn keresztül esik, – mint egy pénzdarab valamilyen magasból, vagy egy ejtőernyős még sokkal magasabbról – és tudjuk, hogy a légellenállás hatással van a sebességre. A szabadesés egy reálisabb modelljénél a légellenállást is figyelembe kell vennünk mint erőt, ahogy az F_r erőt mutatja a 9.16. ábra.



9.16. ÁBRA: Egy, a gravitáció hatására szabadon eső testre az ellenállás ereje a sebességgel egyenesen arányosnak van feltételezve.

Alacsony sebességekre, amelyek sokkal kisebbek, mint a hangsebesség, a fizikai kísérletek azt mutatták, hogy ez az erő nagyjából egyenesen arányos a test sebességével, ahol az arányossági tényező függ a test alakjától. Az eredő erő tehát

$$F = F_p - F_r,$$

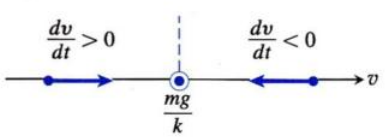
és így

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v. \tag{9.16}$$

Fázisegyenes segítségével elemezhetjük a differenciálegyenlet megoldását adó sebességfüggvényt. A (9.16) egyenlet jobb oldalát nullává tevő egyensúlypont

$$v = \frac{mg}{k}.$$

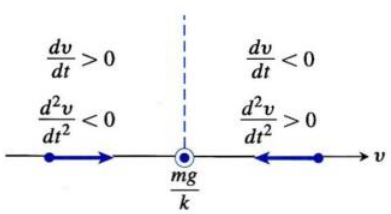


9.17. ÁBRA: Kiinduló fázisegyenes a 4. példához.

Ha a test kezdetben ennél gyorsabb, akkor lelassul. Ha a test sebessége kezdetben a mg/k érték alatt van, akkor $dv/dt > 0$, és a test sebessége növekszik, miközben lefelé halad. Ezeket a megfigyeléseket ábrázoltuk a 9.17. ábra fázisegyenes diagramján.

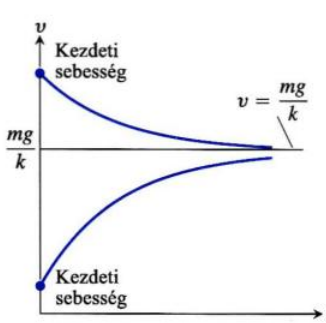
A megoldásgörbe konkavitását a második deriválttal vizsgáljuk, ezért deriváljuk a (9.16) egyenlet mindkét oldalát t szerint:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(g - \frac{k}{m}v\right) = -\frac{k}{m}\frac{dv}{dt}.$$



9.18. ÁBRA: A teljes fázisegyenes a 4. példához.

Láthatjuk, hogy $d^2v/dt^2 < 0$, ha $v < mg/k$, és $d^2v/dt^2 < 0$ ha $v > mg/k$. A 9.18. ábrán ezeket az információkat is hozzáírtuk a fázisegyeneshez. Vegyük észre a hasonlóságot a hűlés fázisegyenesével a 9.14. ábrán. A megoldásgörbék is hasonlóak. A 9.19. ábra két tipikus megoldásgörbét mutat. Függetlenül a kezdeti sebességtől, test sebessége $v = mg/k$ határértékhez tart. Ez az érték, a stabil egyensúlyi érték, a test **végsebessége**. A légiakrobaták (skydiver) a végsebességüket kb. 150 és 290 km/h között tudják változtatni attól függően, mekkora testfelületet fordítanak az esés irányába.



9.19. ÁBRA: A 4. példa jellemző sebességgörbéi. A $v = mg/k$ érték a végső sebességhatár.

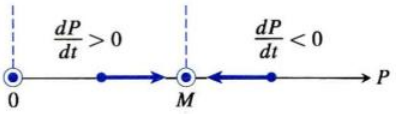
5. PÉLDA: **Populáció növekedésének elemzése behatárolt környezetben**

A 7.5. alfejezetben már vizsgáltuk populáció növekedését az exponenciális változás modelljével. Azaz, ha P az egyedek száma, és eltekintünk a be- és kilépésektől, akkor

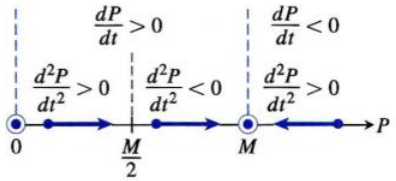
$$\frac{dP}{dt} = kP, \tag{9.17}$$

ahol $k > 0$ az egy főre eső születési ráta mínusz a halálozási ráta egy időegységre. Mivel a természetes környezet csak meghatározott számú egyedet képes eltartani, ésszerűnek látszik feltételezni, hogy a populáció maximális nagysága M számú egyed lehet. Ahogy a populáció nagysága megközelíti ezt a korlátot, az úgynevezett **eltartóképességet**, a források már csak szűkösen lesznek elegek, és a növekedési ráta csökkenni fog. Egy egyszerű kifejezése ennek a kapcsolatnak

$$k = r(M - P),$$



9.20. ÁBRA: A (9.18) egyenlet kezdeti fázisegyenese.



9.21. ÁBRA: A logisztikus növekedés teljes fázisegyenese.

ahol $r > 0$ konstans. Vegyük észre, hogy k csökken, ahogy P közeledik M-hez, és k negatív, ha P meghaladja M-et. Ha $r(M-P)$-t helyettesítünk k helyébe a (9.17) egyenletben, akkor

$$\frac{dP}{dt} = r(M-P)P = rMP - rP^2. \tag{9.18}$$

Ezt a modellt **logisztikus növekedési modellnek** hívják.

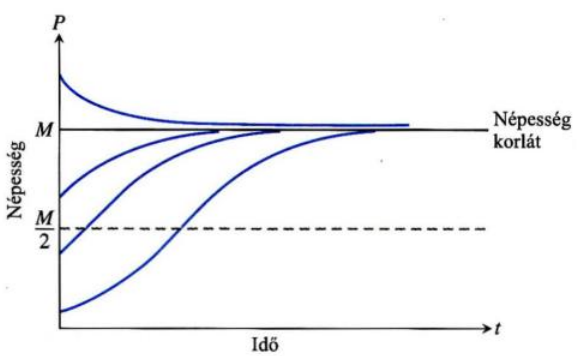
A (9.18) egyenlet fázisegyenesének elemzésével megjósolhatjuk a populáció időtől függő változását. Az egyensúlyi pontok $P = M$ és $P = 0$. $dP/dt > 0$, ha $0 < P < M$ és $dP/dt < 0$, ha $P > M$. Ezt bejelöltük a fázisegyenesre a 9.20. ábrán.

A populációgörbe konkavitását a (9.18) egyenlőség mindkét oldalának t szerinti deriválásával vizsgáljuk

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(rMP - rP^2) = \\ &= rM\frac{dP}{dt} - 2rP\frac{dP}{dt} = \\ &= r(M-2P)\frac{dP}{dt}.\end{aligned} \tag{9.19}$$

Ha $P = M/2$, akkor $d^2P/dt^2 = 0$. Ha $P < M/2$, akkor $(M-2P)$ és dP/dt pozitívak, és $d^2P/dt^2 > 0$. Ha $M/2 < P < M$, akkor $(M-2P) < 0$, $dP/dt > 0$, így $d^2P/dt^2 < 0$. Ha $P > M$, akkor $(M-2p)$ és dP/dt negatívak, és $d^2P/dt^2 > 0$. Ezekkel az információkkal kiegészítjük a fázisegyenest (9.21. ábra).

A $P = M/2$ és $P = M$ egyenesek a tP-sík első negyedét horizontális sávokra bontják, amelyekben dP/dt ésd^2P/dt^2 előjele ismert. Minden egyes sávban tudjuk, hogy az idő múlásával hogyan csökken vagy növekszik a megoldásfüggvény, és hogy hogyan görbül a megoldásgörbe. Az egyensúlyi egyenesek $P = 0$ és $P = M$ megoldásgörbék. Az $P = M/2$ egyenest metsző megoldásgörbéknek itt inflexiós pontjuk van. A 9.22. ábrán berajzoltunk néhány tipikus megoldásgörbét.



9.22. ÁBRA: Populációgörbék az 5. példához.

9.4. Feladatok

Fázisegyenesek és megoldásgörbék

Az 1–8. feladatokban

(a) határozzuk meg az egyensúlyi értékeket,

(b) rajzoljuk meg a fázisegyenest; határozzuk meg y' és y'' értékeit, és azt, hogy melyik egyensúlyi érték stabil, és melyik instabil;

(c) húzzunk be néhány megoldásgörbét!

1. $\frac{dy}{dx} = (y+2)(y-3)$ **2.** $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$

3. $\frac{dy}{dx} = y^3 - y$ **4.** $\frac{dy}{dx} = y^2 - 2y$

5. $y' = \sqrt{y}, \quad y > 0$ **6.** $y' = y - \sqrt{y}, \quad y > 0$

7. $y' = (y-1)(y-2)(y-3)$ **8.** $y' = y^3 - y^2$

Populáció-növekedési modellek

A 9–12. feladatok differenciálegyenletei populáció növekedést modelleznek. Minden feladathoz használjunk fázisegyenes-elemzést a $P(t)$ megoldásgörbe felvázolásához, úgy hogy vá-

lasszunk különböző $P(0)$ indulási értékeket (ahogy az 5. példában)! Melyik egyensúlyi érték stabil, melyik instabil?

9. $\frac{dP}{dt} = 1 - 2P$ **10.** $\frac{dP}{dt} = P(1-2P)$

11. $\frac{dP}{dt} = 2P(P-3)$ **12.** $\frac{dP}{dt} = 3P(1-P)(P-\frac{1}{2})$

13. *Az 5. feladat folytatása katasztrófával.* Tegyük fel, hogy bizonyos egyedek egészséges populációja él és növekszik egy zárt környezetben, és a pillanatnyi létszám, P_0, meglehetősen közel van az eltartható M_0 létszámhoz. Elképzelhetünk egy halpopulációt egy édesvízi tóban egy lakatlan vidéken. Hirtelen valamilyen katasztrófa, mint pl. a Szent Ilona vulkán kitörése, beszennyezi a tavat, és jelentős részét megsemmisíti a táplálléknak és az oxigénnek, amire a halaknak szükségük van. Ennek eredménye egy új környezet egy új eltartható M_1 létszámmal, ami jóval alatta van a réginek, és alatta van a populáció pillanatnyi M_0 létszámának is. Kiindulva valamennyi idővel a katasztrófa előtt, rajzoljuk meg az előtte-utána görbét, ami megmutatja, hogyan reagál a populáció a környezet megváltozására!

14. Populáció szabályozás: Egy bizonyos államban a vadgazdálkodási hivatal vadászati engedélyek kiadását tervezi, hogy szabályozza a szarvasállományt (egy szarvas engedélyenként). Ismert, hogy ha a vadállomány egy bizonyos m létszám alá süllyed, akkor kihal. Az is ismert, hogy ha a szarvasállomány az eltartható M korlát fölé megy, akkor visszacsökken az M értékre betegség és éhezés miatt.

(a) Elemezzük az ésszerűségét a következő populációnövekedési modellnek, mint az idő függvényének:

$$\frac{dP}{dt} = rP(M-P)(P-m),$$

ahol P a szarvaspopuláció, r egy pozitív konstans arányossági tényező!

(b) Magyarázzuk meg, mennyiben különbözik ez a $dP/dt = rP(M-P)$ logisztikai modelltől! Ez jobb, vagy rosszabb, mint a logisztikai modell?

(c) Mutassuk meg, ha $P > M$ minden t-re, akkor $\lim_{t\to\infty} P(t) = M$!

(d) Mi van, ha $P < m$ minden t-re?

(e) Elemezzük a differenciálegyenlet megoldásait. Mik lesznek a modell egyensúlypontjai? Magyarázzuk meg P stabil állapotait a P kezdeti értékének függvényében! Körülbelül hány engedélyt adhatnak ki?

Alkalmazások és példák

15. Légiakrobata (skydiver): Ha egy m tömegű test, amire csak a gravitáció hat, nulla kezdősebességgel esik úgy, hogy a légellenállás a sebesség négyzetével arányos, akkor a test t-től függő sebessége, ahol t-t másodpercekben mérjük, kielégíti a következő egyenletet:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \quad k > 0,$$

ahol k konstans, ami csak a test aerodinamikai tulajdonságaitól és a levegő sűrűségétől függ. (Feltesszük, hogy az esés rövidebb annál, minthogy közben a levegő sűrűsége változna.)

(a) Rajzoljuk meg az egyenlet fázisegyenesét!

(b) Rajzoljunk fel egy jellegzetes sebesség-görbét!

(c) Egy 80 kilogrammos ($mg = 800$) ejtőernyős esetén a konstansra egy tipikus érték $k = 0{,}27$. Mi a zuhanó test végsebessége?

16. $\sqrt{v}$-vel arányos légellenállás: Egy m tömegű testet v_0 kezdősebességgel dobtunk lefelé. Tegyük fel, hogy a közegellenállás arányos a sebesség négyzetgyökével! Állapítsuk meg a végsebességet grafikai elemzéssel!

17. Vitorlázás: Egy vitorlás halad egyenes pályán állandó szél mellett, ami 25 N erővel tolja előre. Az egyetlen egyéb erő, ami a hajóra hat, a víz ellenállása. A vízellenállás numerikusan egyenlő a sebesség ötszörösével, a kezdő sebesség pedig $0{,}3m/s$. Mekkora a hajó m/s-ban mért maximális sebessége emellett a szél mellett?

18. Információterjedés: Szociológusok beszélnek az ún. *szociális diffúzióról*, ami például valamilyen információnak a terjedése, technológiai újítás elterjedése, kulturális szokás elterjedése. A népesség két csoportra osztható: az egyikbe tartoznak azok, akik már ismerik az információt, a másikba azok, akik nem. Adott nagyságú népesség esetén ésszerűnek tekinthető, ha feltesszük, hogy a terjedés sebessége arányos azok számával, akik már ismerik az információt, és azokéval is, akik majd még fogják. Ha egy N lélekszámú népességben X jelöli azon egyének számát, akik már ismerik az információt, akkor a matematikai modell:

$$\frac{dX}{dt} = kX(N-X),$$

ahol t az idő, és k egy pozitív konstans.

(a) Gondoljuk át a modell ésszerűségét.

(b) Készítsük el a fázisegyenest bejelölvén X' és X'' előjelét!

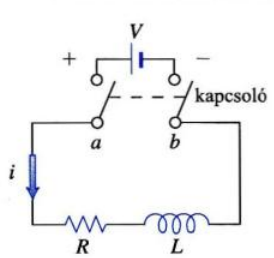
(c) Vázoljunk fel néhány jellemző megoldásgörbét!

(d) Tippeljük meg X azon értékét, amelyre az információ a leggyorsabban terjed!

19. Áramerősség egy RL-körben: Az alábbi ábrán egy elektromos áramkör diagramja látható, aminek teljes ellenállása R ohm, önindukciója (rugóként mutatva az ábrán) L henry, szintén konstans. Van egy kapcsoló, amelynek a és b végpontjait zárva egy állandó V feszültséget lehet az áramkörre kötni. Ohm törvényét, $V = RI$, most kissé módosítani kell:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V,$$

ahol I az áramerősség amperben, és t az idő másodpercben mérve. Megoldva ezt az egyenletet, meg tudjuk mondani, mennyi lesz az áramerősség, t másodperccel az áramkör zárása után. Fázisegyenes segítségével vázoljuk fel a megoldásgörbét azt feltételezve, hogy az áramkört $t = 0$-ban zártuk! Hogyan alakul az áramerősség, ha $t \to \infty$? Ez az érték az *állandósult érték* megoldás.



20. Gyöngy samponban: Tegyük fel, hogy egy gyöngy süllyed valamilyen sűrű folyadékban, például samponban, és a

súrlódási erő, ami a süllyedés ellen hat, egyenesen arányos a gyöngy sebességével. A samponban a felhajtó erő is hat, Archimédesz törvényének megfelelően egyenlő a gyöngy által kiszorított folyadék súlyával. A gyöngy tömegét m-mel, az általa kiszorított sampon tömegét P-vel jelölve hajtsuk végre a következő lépéseket!

(a) Rajzoljunk egy sematikus ábrát bejelölve a gyöngyre ható erőket, pl. mint a 9.16-os ábrán!

(b) A gyöngy sebességét mint t függvényét $v(t)$-vel jelölve írjuk fel a sebességre vonatkozó differenciálegyenletet, ha a gyöngyöt egy lefelé eső tárgynak tekintjük!

(c) Rajzoljuk fel a fázisegyenest, valamint v' és v'' előjelét!

(d) Vázoljunk fel jellemző megoldásgörbéket!

(e) Mi a gyöngy végsebessége?

9.5. Elsőrendű differenciálegyenletek alkalmazásai

Nézzük most három alkalmazását azoknak a differenciálegyenleteknek, amiket eddig tanultunk! Az első alkalmazás egy egyenes mentén mozgó test mozgását írja le, amelyre a mozgással ellentétes irányú erő hat. A második egy populációnövekedés modellje, amely figyelembe veszi a környezet által meghatározott korlátokat, mint pl. élelem és más élethez szükséges források elérhetősége. A harmadik alkalmazás olyan görbéket vizsgál, amelyek más görbéket merőlegesen metszenek.

Sebességgel arányos ellenállás

Bizonyos esetekben, egy tárgy mozgásánál olyan ellenállást kell figyelembe venni, ami egyenesen arányos a tárgy sebességével. Pl. amikor egy kocsi megállásig szabadon gurul. Minél gyorsabban mozog egy tárgy, annál jobban nyomja az elejét a levegő. Matematikai eszközökkel ezt úgy írjuk le, hogy elképzelünk egy m tömegű testet amint egy számegyenes mentén mozog, a t időpontban s pozíciófüggvénnyel és v sebességfüggvénnyel. Newton második mozgástörvényéből a mozgást gátló ellenálló erő

$$\text{erő} = \text{tömeg} \times \text{gyorsulás} = m\frac{dv}{dt}.$$

Azt a feltevést, hogy az ellenálló erő egyenesen arányos a sebességgel, az

$$m\frac{dv}{dt} = -kv \quad \text{vagy} \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} \quad (k > 0)$$

egyenlőségekkel fejezzük ki. Ez egy exponenciális változást leíró szeparábilis differenciálegyenlet. A megoldása ennek az egyenletnek a $v(0) = v_0$ kezdeti feltétellel

$$v = v_0 e^{-(k/m)t}. \tag{9.20}$$

Mit tudhatunk meg a (9.20) egyenletből? Egyrészt, hogy ha a tömeg nagy, mint pl. egy 20000 tonnás hajó az Erie tavon, akkor sok ideig tart, amíg a sebesség megközelíti a nullát (t-nek nagynak kell lennie, hogy a kt/m hányadost naggyá tegye). Még többet megtudhatunk, ha a (9.20) egyenletet t szerint integráljuk azért, hogy megkapjuk az s pozíciót, mint t függvényét.

Tegyük fel, hogy a tárgy „szabadon fut" amíg meg nem áll, az egyetlen erő ami hat, a közegellenállás, ami arányos a sebességével. Milyen messzire jut el? Hogy ezt megállapítsuk, tekintsük a (9.20) egyenletet, és oldjuk meg a

$$\frac{ds}{dt} = v_0 e^{-(k/m)t}, \quad s(0) = 0$$

kezdetiérték-problémát! t szerint integrálva

$$s = -\frac{v_0 m}{k} e^{-(k/m)t} + C.$$

Behelyettesítve az $s = 0, t = 0$ kezdeti értékeket

$$0 = -\frac{v_0 m}{k} + C \quad \text{és} \quad C = \frac{v_0 m}{k}.$$

A test helyzete a t időpontban eszerint

$$s(t) = -\frac{v_0 m}{k} e^{-(k/m)t} + \frac{v_0 m}{k} = \frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-(k/m)t}). \tag{9.21}$$

Ahhoz, hogy megtudjuk, milyen messzire jut el a test, meg kell határoznunk a $\lim_{t\to\infty} s(t)$ értéket. Mivel $-(k/m) < 0$, $e^{-(k/m)t} \to 0$ ha $t \to \infty$, így

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-(k/m)t}) = \frac{v_0 m}{k}.$$

Azaz

$$\text{megtett távolság} = \frac{v_0 m}{k}. \tag{9.22}$$

Ez persze egy idealizált helyzet. A valóságban az idő nem tarthat a végtelenhez. A $v_0 m/k$ érték csak egy felső korlát. Egy fontos tanulság azért levonható, mégpedig az, ha nagy az m tömeg, sok energia kell a test megállításához. Ezért kellenek vontatóhajók az óceánjárók móló mellé állításához a kikötőben. Ha egy hagyományos óceánjáró akkora sebességgel futna a kikötőbe, hogy még kormányozható lenne, akkor beleszaladna a mólóba, mielőtt meg tudna állni.

1. PÉLDA: **Siklás a jégen**

Egy 80 kilogrammos korcsolyázó esetén az (9.20) egyenletben $k = 4{,}46$ kg/s. Mennyit siklik a korcsolyázó, mire 3,3 m/s sebességről 0,3 m/s sebességre lassul? Mekkora utat tesz meg a teljes megállásig?

Megoldás: Az első kérdésre a választ úgy kapjuk, hogy t-t kifejezzük a (9.20) egyenletből.

$$\begin{aligned} 3{,}3e^{-(4{,}46/80)t} &= 0{,}3, \\ -0{,}05575t &= \ln 0{,}3/3{,}3 = -\ln 11, \\ t &= 43{,}01. \end{aligned}$$

A második kérdésre a választ a (9.22) egyenletből kapjuk:

$$\text{a távolság, amíg siklik: } = \frac{v_0 m}{k} \approx 59{,}2m. \qquad \square$$

Populáció növekedésének modellezése

A 7.5. alfejezetben a populáció növekedését az exponenciális változással modelleztük:

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad P(0) = P_0,$$

ahol P a populáció nagysága a t időpillanatban, $k > 0$ konstans növekedési ráta, és P_0 a populáció nagysága a $t = 0$ időpillanatban. A 7.5. alfejezetben a megoldást is megadtuk, $P = P_0 e^{kt}$. A következő kérdés, hogy milyen jó ez a modell?

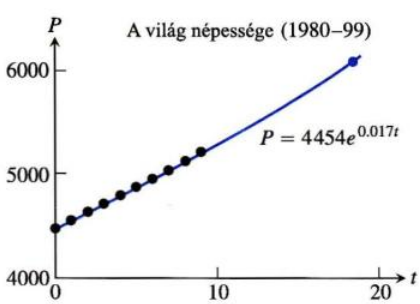
A vizsgálódást azzal kezdjük, hogy megjegyezzük, hogy az exponenciális növekedést leíró differenciálegyenlet

$$\frac{dP/dt}{P} = k. \tag{9.23}$$

A jobboldalon álló konstanst **relatív növekedési rátának**, vagy **relatív növekedési hányadosnak** hívják. A 9.4 táblázat a világ népességének adatait tartalmazza 1980-tól 1989-ig. Ha $dt = 1$ és $dP \approx \Delta P$, akkor a (9.23) egyenletben szereplő növekedési ráta 0,017. Azaz, a táblázatban $t = 0$ felel meg az 1980-as évnek, $t = 1$ 1981-nek stb. Így a világ népessége modellezhető a

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}017P \quad \text{differenciálegyenlettel}$$

$$\text{és} \quad P(0) = 4454 \quad \text{kezdeti értékkel.}$$



9.23. ÁBRA: Vegyük észre, hogy $t = 19$ esetén $P = 4454e^{0{,}017t}$ értéke 6152,16, ami valamivel több, mint az 1999-es tényleges népesség.

Év	Népesség (millió)	$\Delta P/P$
1980	4454	76/4454≈0,0171
1981	4530	80/4530≈0,0177
1982	4610	80/4610≈0,0174
1983	4690	80/4690≈0,0171
1984	4770	81/4770≈0,0170
1985	4851	82/4851≈0,0169
1986	4933	85/4933≈0,0172
1987	5018	87/5018≈0,0173
1988	5105	85/5105≈0,0167
1989	5190	

9.4. TÁBLÁZAT: Világ népessége (átlag).

Év	Népesség (millió)	$\Delta P/P$
1990	5275	84/5275≈0,0159
1991	5359	84/5359≈0,0157
1992	5443	81/5443≈0,0149
1993	5524	81/5524≈0,0147
1994	5605	80/5605≈0,0143
1995	5685	79/5685≈0,0139
1996	5764	80/5764≈0,0139
1997	5844	79/5844≈0,0135
1998	5923	78/5923≈0,0132
1999	6001	78/6001≈0,0130
2000	6079	73/6079≈0,0120
2001	6152	76/6152≈0,0124
2002	6228	?
2003		

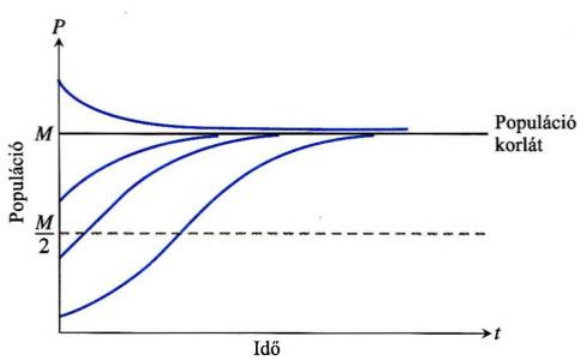
9.5. TÁBLÁZAT: Világ népessége napjainkban.

Ennek a kezdetiérték-problémának a megoldása adja a $P = 4454e^{0,017t}$ népességfüggvényt. 1999-re, azaz $t = 19$ esetén, ez a képlet 6152 millió lakost jósol, ami több, mint a 6001 milliós tényleges érték volt (U.S. Bureau of the Census, 9.5. táblázat). Nézzünk újabb adatokat, hogy van-e változás a növekedési rátában!

A 9.5. táblázat a világ népességét mutatja 1990-től 2002-ig. A táblázatból láthatjuk, hogy a növekedési ráta továbbra is pozitív, gazdasági és egyéb tényezők miatt csökken, ahogy a népesség növekszik. A növekedési ráta az 1990-től 2002-ig tartó időszakban évenként átlagosan kb. 0,0003-mal csökkent. Azaz, a (9.23) egyenletből k grafikonja vízszintes helyett inkább közelebb van egy $-r = -0,0003$ meredekségű egyeneshez. Az 5. példában a reálisabb **logisztikus növekedési modellt** javasoltuk:

$$\frac{dP}{dt} = r(M-P)P, \tag{9.24}$$

ahol M a maximális népesség, vagy **eltartóképesség**, amit a környezet hosszú távon el tud tartani. Ha összehasonlítjuk a (9.24) egyenletet az exponenciális modellel, látjuk, hogy $k = r(M-P)$ a népesség monoton csökkenő függvénye, nem pedig konstans. A (9.24) egyenlet logisztikus modelljének megoldásgörbéjét már meghatároztuk a 9.4. alfejezetben, és most újra megadjuk a 9.24. ábrán. Vegyük észre, hogy ha $P < M$, akkor a népesség növekszik és tart M-hez, ha $P > M$, akkor a növekedési ráta negatív (hiszen $r > 0$, $M > 0$), és a népesség csökken.



9.24. ÁBRA: A logisztikus populáció modell $dP/dt = r(M-P)P$ megoldásgörbéi.

t	P(Euler)	t	P(Euler)
0	10		
1	10,9	11	24,3629
2	11,8712	12	26,2056
3	12,9174	13	28,1395
4	14,0423	14	30,1616
5	15,2493	15	32,2680
6	16,5417	16	34,4536
7	17,9222	17	36,7119
8	19,3933	18	39,0353
9	20,9565	19	41,4151
10	22,6130	20	43,8414

9.6. TÁBLÁZAT: Euler megoldás a $dP/dt = 0{,}001(100 - P)P$, $P(0) = 10$, lépésköz $dt = 1$.

2. PÉLDA: **Medvenépesség modellezése**

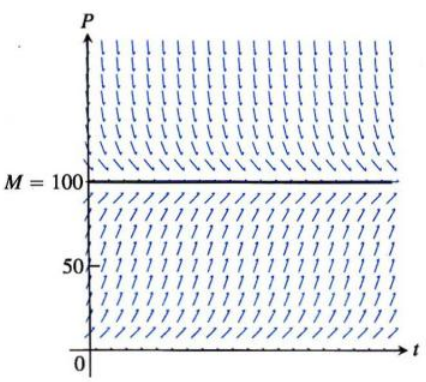
Egy nemzeti parkról tudjuk, hogy el tud tartani 100 szürke (grizzly) medvét, de többet nem. Jelenleg 10 medve van a parkban. A medvenépességet logisztikus differenciálegyenlettel modellezzük, ahol $r = 0{,}001$ (jóllehet, nagyon kis populáció esetén a modell nem ad jó közelítést).

1. Rajzoljuk meg és elemezzük a differenciálegyenlethez tartozó iránymezőt!

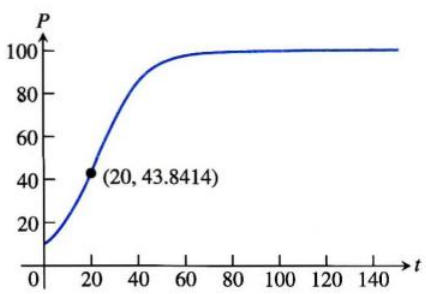
2. Becsüljük meg Euler-módszerrel a populáció nagyságát 20 év múlva $dt = 1$ lépésközzel!

3. Határozzunk meg egy analitikus $P(t)$ megoldást, és rajzoljuk meg a grafikonját!

4. Mikor éri el a populáció az ötvenes létszámot?



9.25. ÁBRA: A logisztikus $dP/dt = 0{,}001(100 - P)P$ differenciálegyenlet iránymezője (2. példa).



9.26. ÁBRA: Euler megoldás a $dP/dt = 0{,}001(100 - P)P$, $P(0) = 10$, lépésköz $dt = 1$ feladathoz.

Megoldás:

1. *Iránymező.* Az eltartható egyedek száma 100, így $M = 100$. A megoldás, amit keresünk a

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}001(100 - P)P$$

differenciálegyenlet megoldása. A 9.25. ábra ennek a differenciálegyenletnek az iránymezőjét mutatja. Egy vízszintes aszimptotát találunk $P = 100$-nál. A megoldásgörbék ehhez tartanak, fölötte lefelé, alatta felfelé közelítve.

2. *Euler-módszer.* Legyen a lépésköz $dt = 1$, $t_0 = 0$, $P(0) = 10$, és

$$\frac{dP}{dt} = f(t,P) = 0{,}001(100 - P)P.$$

A

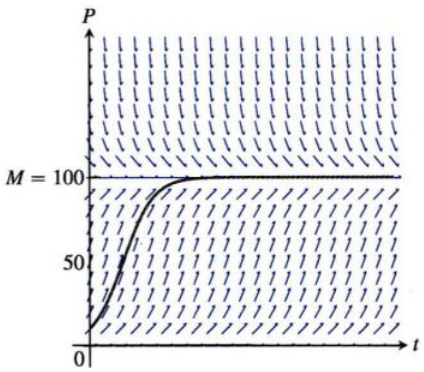
$$P_n = P_{n-1} + 0{,}001(100 - P_{n-1})P_{n-1}$$

képletet használva a 9.6. táblázatban található közelítéseket kapjuk.
Húsz év múlva kb. 44 szürkemedve (grizzly) lesz a parkban. A 9.26. ábra az Euler-közelítés értékeit mutatja a $0 \le t \le 150$ intervallumon $dt = 1$ lépésközzel. Ez a 9.24. legalsó görbéjéhez hasonlít.

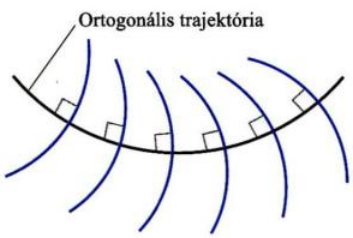
3. *Analitikus megoldás.* Feltehetjük, hogy az időt akkor kezdjük mérni, amikor a populáció 10, így $P(0) = 10$. A logisztikus növekedés modellje a következő kezdetiérték-probléma megoldása:

$$\text{differenciálegyenlet} \quad : \quad \frac{dP}{dt} = 0{,}001(100 - P)P,$$

$$\text{kezdeti érték} \quad : \quad P(0) = 10.$$



9.27. ÁBRA: A $P = \frac{100}{1+9e^{-0,1t}}$ függvény görbéje berajzolva az iránymezőbe a 9.25. ábrán (2. példa).



9.28. ÁBRA: Egy ortogonális trajektória a görbesereget merőlegesen metszi.

Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet, ahol a bal oldalt parciális törtekre bontva kapjuk, hogy

$$\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{100-p}\right)\frac{dP}{dt}=0{,}1,$$

$$\ln|P|-\ln|100-P|=0{,}1t+C, \qquad \text{integrálás } t \text{ szerint}$$

$$\ln\left|\frac{P}{100-P}\right|=0{,}1t+C,$$

$$\ln\left|\frac{100-P}{P}\right|=-0{,}1t-C, \qquad \ln\tfrac{a}{b}=-\ln\tfrac{b}{a}$$

$$\frac{100-P}{P}=(\pm e^{-C})e^{-0{,}1t},$$

$$\frac{100}{P}-1=Ae^{-0{,}1t},$$

$$P=\frac{100}{1+Ae^{-0{,}1t}}. \qquad P\text{-re megoldva}$$

Ez az egyenlet általános megoldása. Ha $t=0$, $P=10$, és

$$10=\frac{100}{1+Ae^{0}}, \quad \text{azaz} \quad 1+A=10, \text{ azaz} \quad A=9.$$

A logisztikus növekedés modellje tehát

$$P=\frac{100}{1+9e^{-0{,}1t}}.$$

A 9.27. ábrán ennek grafikonját belerajzoltuk az iránymezőbe.

4. Mikor lesz a medvelétszám 50? Ennél a modellnél

$$50=\frac{100}{1+9e^{-0{,}1t}},$$

$$e^{-0{,}1t}=\frac{1}{9},$$

$$t=\frac{\ln 9}{0{,}1}\approx 22 \text{ év}. \qquad \square$$

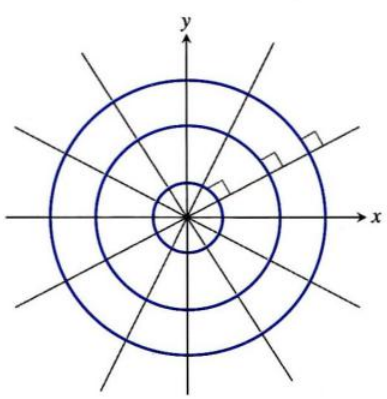
A

$$\frac{dP}{dt}=r(M-P)P$$

általános logisztikus egyenlet általános megoldását is így kaphatjuk meg. A 10. feladatban meg kell mutatnunk, hogy ez a megoldás

$$P=\frac{M}{1+Ae^{-rMt}}.$$

A értékét a megfelelő kezdeti érték határozza meg.



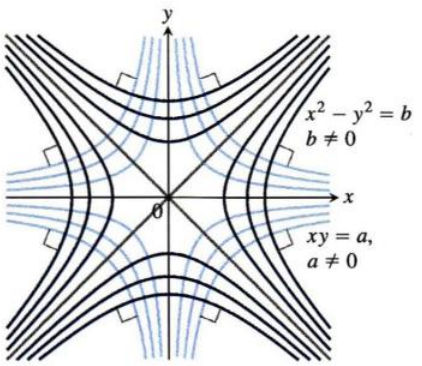
9.29. ÁBRA: Minden origón átmenő egyenes merőleges az origó középpontú körök seregére.

Ortogonális trajektóriák

Egy görbesereg **ortogonális trajektóriája** egy olyan görbe, amelyik az eredeti görbéket minden pontban merőlegesen metszi. Pl. mindegyik origón átmenő egyenes ortogonális trajektóriája az $x^2+y^2=a^2$ körseregnek (9.29. ábra). Ilyen, egymásra kölcsönösen merőleges rendszereknek különös jelentőségük van a fizikában, pl. az elektromos potenciállal kapcsolatos problémáknál, ahol az egyik görbesereg az áram iránya, a másik megfelel az ekvipotenciális görbéknek. Ilyen görbeseregek előfordulnak a hidrodinamikában és hőáramlásnál is.

3. PÉLDA: **Ortogonális trajektória meghatározása**

Mik lesznek az ortogonális trajektóriái az $xy=a$ görbeseregnek, ahol $a\neq 0$ tetszőleges konstans?



9.30. ÁBRA: Minden görbe merőleges a másik sereghez tartozó görbére abban a pontban, ahol metszi.

Megoldás: Az $xy = a$ görbék olyan hiperbolák, amelyeknek az aszimptotái a koordinátatengelyek. Először is meghatározzuk ezen görbék meredekségét, vagyis a dy/dx értékeket. Az $xy = a$ egyenlőséget x szerint deriválva

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \text{vagy} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

adódik. Azaz, a görbék érintőinek meredeksége minden (x,y) pontban $y' = -y/x$. Az ortogonális trajektória ugyanezen a ponton átmenő görbéjének meredeksége, azaz, ebben a pontban az érintőjének a meredeksége ennek negatív reciproka kell, hogy legyen, vagyis x/y. Így az ortogonális trajektóriának ki kell elégítenie a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

differenciálegyenletet. Ez a differenciálegyenlet szeparábilis, és a 9.1. alfejezetben adott módon oldjuk meg.

$$\begin{aligned} ydy &= xdx, && \text{változók szétválasztása} \\ \int ydy &= \int xdx, && \text{integrálás} \\ \frac{1}{2}y^2 &= \frac{1}{2}x^2 + C, \\ y^2 - x^2 &= b, && (9.25) \end{aligned}$$

ahol $b = 2C$ tetszőleges konstans. Az ortogonális trajektóriák tehát a (9.25) egyenlőséggel definiált hiperbolák, lásd a 9.30. ábrát. □

9.5. Feladatok

1. Guruló kerékpár: Egy 66 kg-os kerékpáros egy 7 kg-os kerékpárral sík terepen 9 m/s sebességgel kezd szabadon gurulni. A (9.20) egyenletben szereplő k állandó kb. 3,9 m/s.

(a) Körülbelül milyen messzire gurul el a kerékpáros?

(b) Mennyi idő alatt csökken a sebessége 1 m/s-ra?

2. Sikló csatahajó: Tegyük fel, hogy egy 51000 tonna tömegű csatahajó 9 m/s sebességgel halad, amikor elromlik a motorja. A (9.20) egyenletben szereplő konstans $k = 59000$ kg/s.

(a) Milyen messzire jut, mire tehetetlenül megáll?

(b) Mennyi idő múlva lesz a sebessége 1 m/s?

3. A 9.7. táblázat adatait Valerie Sharritts, Ohio állam Columbus városában a St. Francis DeSales Középiskola matematikatanára mérte egy mozgásérzékelővel és egy CBL™-mel. A táblázat azt mutatja, hogy Ashley nevű lánya milyen s távolságra gurult el görkorcsolyával t másodperc alatt, amikor 10 éves volt. A távolság méterben van megadva. Adjuk meg egy (9.21) összefüggés alakú modelljét Ashley a 9.7. tábla adatai által megadott helyzetének! Kezdősebessége $v_0 = 2{,}75$ m/s, tömege 39,92 kg, és a teljes távolság, ameddig elgurult 4,91 m.

4. Gurulás megállásig: A 9.8. táblázat a Kelly Schmitzer által megtett távolságot (méter) mutatja az idő függvényében (másodperc) görkorcsolyával való gurulás közben. Adjunk meg egy (9.21) képlet alakú modellt a helyzetére az idő függvényében! Kezdő sebessége $v_0 = 0{,}80$ m/s, a tömege $m = 49{,}90$ kg, és a teljes megtett távolság 1,32 m.

t	s	t	s	t	s
0	0	2,24	3,05	4,48	4,77
0,16	0,31	2,40	3,22	4,64	4,82
0,32	0,57	2,56	3,38	4,80	4,84
0,48	0,80	2,72	3,52	4,96	4,86
0,64	1,05	2,88	3,67	5,12	4,88
0,80	1,28	3,04	3,82	5,28	4,89
0,96	1,50	3,20	3,96	5,44	4,90
1,12	1,72	3,36	4,08	5,60	4,90
1,28	1,93	3,52	4,18	5,76	4,91
1,44	2,09	3,68	4,31	5,92	4,90
1,60	2,30	3,84	4,41	6,08	4,91
1,76	2,53	4,00	4,52	6,24	4,90
1,92	2,73	4,16	4,63	6,40	4,91
2,08	2,89	4,32	4,69	6,56	4,91

9.7. TÁBLÁZAT: Ashley Sharritts korcsolya adatai.

t	s	t	s	t	s
0	0	1,5	0,89	3,1	1,30
0,1	0,07	1,7	0,97	3,3	1,31
0,3	0,22	1,9	1,05	3,5	1,32
0,5	0,36	2,1	1,11	3,7	1,32
0,7	0,49	2,3	1,17	3,9	1,32
0,9	0,60	2,5	1,22	4,1	1,32
1,1	0,71	2,7	1,25	4,3	1,32
1,3	0,81	2,9	1,28	4,5	1,32

9.8. TÁBLÁZAT: Kelly Schmitzer korcsolya adatai.

5. Guppi populáció: Egy 2000 literes akvárium nem több, mint 150 guppit tud eltartani. Hat guppit telepítettünk az akváriumba. Tegyük fel, hogy a populáció növekedési rátája

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}0015(150 - P)P,$$

ahol az idő hetekben van mérve.

(a) Adjuk meg a guppi populáció nagyságának képletét az idő függvényében!

(b) Mennyi idő múlva lesz a populáció nagysága 100, illetve 150?

6. Gorilla populáció: Egy bizonyos vadrezervátum 250 síkvidéki gorillát tud eltartani. 1970-ben 28 gorillát számoltak össze a rezervátumban. Tegyük fel, hogy a populáció növekedési rátája

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}0004(250 - P)P,$$

ahol az időt években mérjük.

(a) Határozzuk meg a gorilla-populációt az idő függvényében!

(b) Mennyi időbe telik, hogy a gorilla-populáció elérje az eltartható létszámot?

7. Csendes-óceáni halibut halállomány: A Csendes-óceáni halibut halállomány nagyságát a

$$\frac{dy}{dt} = r(M - y)y$$

logisztikus egyenlettel modellezhetjük, ahol $y(t)$ a teljes állomány kilogrammban mérve a t időpontban, amit években mérünk. A maximális eltartható állomány becsült értéke $M = 8 \times \times 10^7$ kg, és $r = 0{,}08875 \times 10^{-7}$ évente.

(a) Ha $y(0) = 1{,}6 \times 10^7$ kg, mennyi a halibut populáció teljes tömege egy év múlva?

(b) Mikor éri el a halibut halállomány teljes tömege a 4×10^7 kilogrammot?

8. Módosított logisztikus modell: Tegyük fel, hogy a 2. példa logisztikus differenciálegyenletét egy c konstanssal módosítjuk:

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}001(100 - P)P - c.$$

(a) Magyarázzuk meg c jelentését! Milyen c értékek tűnnek reálisnak a grizzly medvék esetében?

(b) Rajzoljuk meg a differenciálegyenlet iránymezőjét, ha $c = 1$. Mik lesznek az egyensúlyi megoldások? (9.4. alfejezet)

T **(c)** Rajzoljunk be néhány megoldásgörbét az előbb meghatározott iránymezőbe! Elemezzük, mi történik a populációval különböző kezdeti értékek esetén!

9. Egzakt megoldások: Határozzuk meg a következő kezdetiérték-problémák pontos megoldását:

(a) $y' = 1 + y, y(0) = 1,$

(b) $y' = 0{,}5(400 - y)y, y(0) = 2!$

10. Logisztikus differenciálegyenlet: Mutassuk meg, hogy a

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P$$

differenciálegyenlet megoldása

$$P = \frac{M}{1 + Ae^{-rMt}},$$

ahol A egy tetszőleges konstans!

11. Katasztrófás-jellegű megoldás: Legyenek k és P_0 pozitív konstansok!

(a) Oldjuk meg a

$$\frac{dP}{dt} = kP^2, \quad P(0) = P_0$$

kezdetiérték-problémát!

T **(b)** Mutassuk meg, hogy az előző pont megoldásgörbéjének függőleges aszimptotája van t egy pozitív értékére! Mi ez az érték?

12. Kihaló populáció: Tekintsük a

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)(P - m)$$

modellt, ahol $r > 0$, M a maximális eltartható populáció, m pedig az a minimális populáció létszám, ami alatt a populáció kihal!

(a) Legyen $m = 100$, $M = 1200$, és tegyük fel, hogy $m < < P < M$! Mutassuk meg, hogy a differenciálegyenlet

$$\left[\frac{1}{1200 - P} + \frac{1}{P - 100}\right]\frac{dP}{dt} = 1100r$$

alakra hozható, és oldjuk meg ezt a szeparábilis differenciálegyenletet!

(b) Határozzuk meg azt a megoldást, amire $P(0) = 300$!

(c) Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását $m < P < M$ feltétellel!

Ortogonális trajektóriák

A 13–18. feladatokban határozzuk meg a megadott görbeseregek ortogonális trajektóriáit!

13. $y = mx$ **14.** $y = cx^2$

15. $kx^2 + y^2 = 1$ **16.** $2x^2 + y^2 = c^2$

17. $y = ce^{-x}$ **18.** $y = e^{kx}$

19. Mutassuk meg, hogy a $2x^2 + 3y^2 = 5$ és az $y^2 = x^3$ görbék merőlegesek!

20. Határozzuk meg a differenciálegyenletek megoldásait, és az így kapott egyparaméteres görbeseregek ortogonális trajektóriáit! Vázoljuk fel a görbéket!

(a) $xdx + ydy = 0$ **(b)** $xdy - 2ydx = 0$

21. Tegyük fel, hogy a és b pozitív számok! Vázoljuk fel a következő parabolákat ugyanabban a koordinátarendszerben:

$$y^2 = 4a^2 - 4ax \quad \text{és} \quad y^2 = 4b^2 + 4bx!$$

Mutassuk meg, hogy ezek egymást a $(a - b, \pm 2\sqrt{ab})$ pontban metszik, és minden „a-parabola" merőleges minden „b-parabolára"!

9. fejezet Áttekintő kérdések

1. Mi egy elsőrendű differenciálegyenlet? Mikor megoldása egy függvény egy ilyen egyenletnek?

2. Hogyan oldunk meg szétválasztható változójú (szeparábilis) differenciálegyenleteket?

3. Mi az exponenciális változás szabálya? Adjunk néhány példát ennek a szabálynak az alkalmazására!

4. Mi az $y' = f(x,y)$ differenciálegyenlet iránymezője? Mit tudhatunk meg egy ilyen iránymezőből?

5. Hogyan oldunk meg elsőrendű lineáris differenciálegyenletet?

6. Mondjuk el, hogyan oldunk meg numerikusan egy $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ alakú kezdetiérték-problémát Euler-módszerrel? Adjunk rá példát! Elemezzük a pontosságot! Miért lehet szükség numerikus megoldásra?

7. Mondjuk el, hogyan oldunk meg numerikusan egy $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-problémát Runge–Kutta-módszerrel! Hasonlítsuk össze az Euler-módszerrel!

8. Mit nevezünk autonóm differenciálegyenletnek? Mik az egyensúlyi értékei? Miben különböznek ezek a kritikus pontoktól? Mi a stabil, és mi az instabil egyensúlyi érték?

9. Hogyan konstruáljuk egy autonóm differenciálegyenlet fázisegyenesét? Hogyan segít a fázisegyenes egy olyan grafikon megrajzolásában, ami a differenciálegyenlet megoldásainak lényegesebb tulajdonságait írja le?

10. Miért nem reális az exponenciális modell a populáció hosszú távú becsléseinél? Hogyan javítja a logisztikus modell ezt a hiányosságát az exponenciális modellnek? Mi a logisztikus differenciálegyenlet? Milyen alakú a megoldása? Mik a logisztikus megoldás grafikonjának tulajdonságai?

9. fejezet Gyakorló feladatok

Az 1–20. feladatokban oldjuk meg a differenciálegyenletet!

1. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}\cos^2\sqrt{y}$

2. $y' = \frac{3y(x+1)^2}{y-1}$

3. $yy' = \sec y^2 \sec^2 x$

4. $y\cos^2 x dy + \sin x dx = 0$

5. $y' = xe^y\sqrt{x-2}$

6. $y' = xye^{x^2}$

7. $\sec x dy + x\cos^2 y dx = 0$

8. $2x^2dx - 3\sqrt{y}\csc x dy = 0$

9. $y' = \frac{e^y}{xy}$

10. $y' = xe^{x-y}\csc y$

11. $x(x-1)dy - ydx = 0$

12. $y' = (y^2-1)x^{-1}$

13. $2y' - y = xe^{x/2}$

14. $\frac{y'}{2} + y = e^{-x}\sin x$

15. $xy' + 2y = 1 - x^{-1}$

16. $xy' - y = 2x\ln x$

17. $(1+e^x)dy + (ye^x + e^{-x})dx = 0$

18. $e^{-x}dy + (e^{-x}y - 4x)dx = 0$

19. $(x+3y^2)dy + ydx = 0$ (*Útmutatás:* $d(xy) = ydx + xdy$.)

20. $xdy + (3y - x^{-2}\cos x)dx = 0, x > 0$

Kezdetiérték-problémák

A 21–30. feladatokban oldjuk meg a kezdetiérték-problémát!

21. $\frac{dy}{dx} = e^{-x-y-2}, y(0) = -2$

22. $\frac{dy}{dx} = \frac{y\ln y}{1+x^2}, y(0) = e^2$

23. $(x+1)\frac{dy}{dx} + 2y = x, x > -1, y(0) = 1$

24. $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 1, x > 0, y(1) = 1$

25. $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = x^2, y(0) = -1$

26. $xdy + (y - \cos x)dx = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

27. $xdy - (y - \sqrt{y})dx = 0, y(1) = 1$

28. $y^{-2}\frac{dx}{dy} = \frac{e^x}{e^{2x}+1}, y(0) = 1$

29. $xy' + (x-2)y = 3x^3e^{-x}, y(1) = 0$

30. $ydx + (3x - xy + 2)dy = 0, y(2) = -1, y < 0$

Euler-módszer

A 31. és 32. feladatban az adott kezdetiérték-probléma megoldására használjuk az adott módszert az adott intervallumon, kezdve x_0-nál, és $dx = 0{,}1$ lépésközzel!

T 31. Euler: $y' = y + \cos x, y(0) = 0, 0 \le x \le 2, x_0 = 0$

T 32. Runge–Kutta: $y' = (2-y)(2x+3), y(-3) = 1, -3 \le x \le -1, x_0 = -3$

A 33. és 34. feladatban használjuk a megadott módszert $y(c)$ becslésére $dx = 0{,}05$ lépésközzel, ahol y a keresett függvény!

T 33. Runge–Kutta:

$$c = 3, \frac{dy}{dx} = \frac{x-2y}{x+1}, y(0) = 1$$

T 34.

$$c = 4, \frac{dy}{dx} = \frac{x^2-2y+1}{x}, y(1) = 1$$

A 35. és 36. feladatban használjuk a megadott módszert a kezdetiérték-probléma grafikus megoldására, kezdve x_0-nál!

(a) $dx = 0{,}1$ és **(b)** $dx = -0{,}1$.

T 35. Euler:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{x+y+2}}, \quad y(0) = -2$$

T 36. Runge–Kutta:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2+y}{e^y+x}, \quad y(0) = 0$$

Iránymezők

A 37–40. feladatokban vázoljuk fel az iránymező egy részletét! Ezután ugyanebbe az ábrába húzzuk be azt a megoldásgörbét, amelyik átmegy a $P(1,-1)$ ponton! Használjuk az Euler-módszert $y(2)$ becslésére, $x_0 = 1$-ből indulva $dx = 0{,}2$ lépésközzel!

37. $y' = x$ **38.** $y' = 1/x$

39. $y' = xy$ **40.** $y' = 1/y$

Autonóm differenciálegyenletek és fázisegyenesek

A 41. és 42. feladatban:

(a) Találjuk meg az egyensúlyi értékeket! Melyik stabil, melyik instabil?

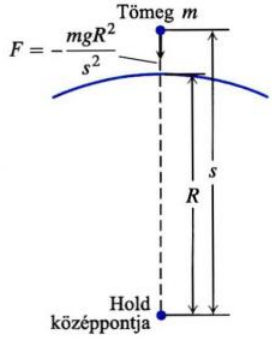
(b) Rajzoljuk meg a fázisegyenest! Határozzuk meg y' és y'' előjelét!

(c) Rajzoljunk meg néhány jellemző megoldásgörbét!

41. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$ **42.** $\frac{dy}{dx} = y - y^2$

Alkalmazások

43. Szökési sebesség: Egy légkör nélküli holdon, a középpontjától s távolságra, egy m tömegű testre ható gravitációs erő $F = -mgR^2 s^{-2}$, ahol g a gravitáció a hold felszínén, és R a hold sugara (lásd a mellékelt ábrát). F negatív, mert s csökkenésének irányába hat.



(a) Ha egy testet a $t = 0$ időpillanatban v_0 kezdősebességgel függőlegesen fellövünk a hold felszínéről, akkor használjuk Newton második törvényét, $F = ma$, hogy megmutassuk, a test sebességét az s magasságban a

$$v^2 = \frac{2gR^2}{s} + v_0^2 - 2gR$$

egyenlet adja meg! Azaz, a sebesség akkor marad bármilyen s távolságban pozitív, ha $v_0 \geq \sqrt{2gR}$. A $v_0 = \sqrt{2gR}$ sebesség a **szökési sebesség** a holdon. Ha egy testet ekkora, vagy ennél nagyobb sebességgel lövünk fel, kiszökik a hold gravitációs vonzásköréből.

(b) Mutassuk meg, hogy ha $v_0 = \sqrt{2gR}$, akkor

$$s = R\left(1 + \frac{3v_0}{2R}t\right)^{2/3}!$$

44. Gurulás megállásig: A 9.9. táblázat a Jonathan Krueger által t másodperc alatt megtett s távolságokat mutatja méterben. Modellezzük az általa megtett távolságot a 9.5. alfejezet (9.21) egyenletének megfelelő formában! Kezdő sebessége $v_0 =$ $= 0{,}86$m/s volt, tömege $m = 30{,}84$kg, a teljes megtett távolság pedig 0,97 m.

t	s	t	s	t	s
0	0	0,93	0,61	1,86	0,93
0,13	0,08	1,06	0,68	2,00	0,94
0,27	0,19	1,20	0,74	2,13	0,95
0,40	0,28	1,33	0,79	2,26	0,96
0,53	0,36	1,46	0,83	2,39	0,96
0,67	0,45	1,60	0,87	2,53	0,97
0,80	0,53	1,73	0,90	2,66	0,97

9.9. TÁBLÁZAT: Jonathan Kruegel gurulási adatai.

9. fejezet További összetettebb feladatok

1. Áramlás sejthártyán keresztül: Bizonyos körülmények között, egy oldott anyag sejthártyán keresztül való áramlását a

$$\frac{dy}{dt} = k\frac{A}{V}(c - y)$$

egyenlet írja le. Ebben az egyenletben y az anyag sejten belüli koncentrációja, dy/dt pedig a koncentráció időbeli változásának sebessége. A k, A, V és c betűk állandókat jelölnek: k a permeabilitási együttható (a sejthártyától függ), A a hártyafelület területe, V a sejt térfogata, c az anyag koncentrációja a sejten kívül. Az egyenlet azt fejezi ki, hogy a sejten belüli koncentráció változása arányos a sejten belüli és sejten kívüli koncentráció különbségével.

(a) Határozzuk meg az $y(t)$ függvényt, $y(0) = y_0$ kezdeti feltétellel!

(b) Határozzuk meg $\lim_{t\to\infty} y(t)$ egyensúlyi koncentrációt! (A feladat alapja: *Néhány matematikai modell a biológiában (Some Mathematical Models in Biology)*, Szerk: R. M. Thrall, J. A. Mortimer, K. R. Rebman, R. F. Baum, 1967. dec. PB-202 364, 101–103. oldalak, N.T.I.S., U.S. Department of Commerce)

2. Oxigénkeverék: Egy csövön oxigén áramlik egy egyliteres lombikba, amely levegőt tartalmaz, miközben a jól összekeveredett oxigén-levegő-keverék egy másik csövön folyamatosan távozik. Feltételezve, hogy a levegő 21 % oxigént tartalmaz, hány százalék oxigént fog a lombik tartalmazni miután 5 liter ment keresztül a bevezető csövön?

3. Széndioxid a tanteremben: Ha egy ember átlagosan 20-szor lélegzik percenként, minden alkalommal 1600 cm^3 4% széndioxidot tartalmazó levegőt lélegez ki, akkor hány százalék széndioxid van egy 200 m^3-es zárt tanterem levegőjében 1 órával azután, hogy 30 diák megkezdte a tanulást? Tegyük fel, hogy induláskor a teremben friss levegő volt, és a szellőzőberendezés percenként 20 m^3 friss levegőt fúj a terembe. A friss levegő széndioxidtartalma 0,04%.

4. Rakéta távolsága: Ha egy külső F erő hat egy rendszerre, amelynek tömege időben változik, akkor Newton mozgástörvénye:

$$\frac{d(mv)}{dt} = F + (v+u)\frac{dm}{dt}.$$

Ebben az egyenletben m a rendszer tömege a t időpillanatban, $v+u$ a sebessége annak a tömegnek, amelyik dm/dt „mennyiségben" hozzáadódik a rendszerhez (illetve elhagyja a rendszert). Tegyük fel, hogy egy rakéta indulási tömege m_0, és saját tömege egy részének lefelé való kilövellésével emelkedik felfelé. A kilövellés mértéke állandó, $dm/dt = -b$ egység másodpercenként, és a rakéta sebességéhez képest állandó $u = -c$ sebességű. Egyetlen külső erő, az $F = -mg$ gravitációs erő hat a rakétára. Mutassuk meg, hogy ezen feltételek mellett, t másodperc múlva a rakéta távolsága a földtől

$$y = c\left[t + \frac{m_0 - bt}{b}\ln\frac{m_0 - bt}{m_0}\right] - \frac{1}{2}gt^2$$

(ha t kicsi m_0/b-hez képest)!

5. **(a)** Tegyük fel, hogy $P(x)$ és $Q(x)$ folytonosak az $[a,b]$ intervallumon. használjuk a Newton–Leibniz tételt annak bizonyítására, hogy minden olyan y, ami kielégíti a

$$v(x)y = \int v(x)Q(x)dx + C$$

egyenletet, ahol $v(x) = e^{\int P(x)dx}$, megoldása a

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek!

(b) Mutassuk meg, hogy ha $C = y_0 v(x_0) - \int_{x_0}^{x} v(t)Q(t)dt$, akkor minden olyan y, ami megoldása az **a)** résznek, kielégíti az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt!

6. *Az 5. feladat folytatása.* Tegyük fel, az 5. feladat feltételei teljesülnek, és hogy $y_1(x)$ és $y_2(x)$ mindketten megoldásai az elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltétellel.

(a) Mutassuk meg, hogy $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ megoldásai az

$$y' + P(x)y = 0, \quad y(x_0) = 0$$

kezdetiérték-problémának!

(b) Mutassuk meg, hogy a $v(x) = e^{\int P(x)dx}$ integráló tényező kielégíti a

$$\frac{d}{dx}(v(x)[y_1(x) - y_2(x)]) = 0$$

egyenletet, következésképp $v(x)[y_1(x) - y_2(x)] =$ konstans!

(c) Az **a)** részből tudjuk, hogy $y_1(x_0) - y_2(x_0) = 0$. Mivel $v(x) > 0$ minden $a < x < b$ esetén, a **b)** rész segítségével mutassuk meg, hogy $y_1(x) - y_2(x) \equiv 0$ mindenütt az (a,b) intervallumban. Következésképp $y_1(x) = y_2(x)$, ha $a < x < b$.

Megoldások

5. fejezet

5.1. Közelítés véges összegekkel

1. **(a)** 0,125; **(b)** 0,21875; **(c)** 0,625; **(d)** 2,46875.

3. **(a)** 1,066667; **(b)** 1,283333; **(c)** 2,666667; **(d)** 2,083333.

5. 0,3125; 0,328125. **7.** 1,5; 1,574603.

9. **(a)** 87 cm; **(b)** 87 cm.

11. **(a)** 1150 m; **(b)** 1260 m.

13. **(a)** 23,35 m/s^2; **(b)** 14,17 m/s^2.

15. $\frac{31}{16}$. **17.** 1.

19. **(a)** felső = 3032 liter, alsó = 2172 liter; **(b)** felső = 9452 liter, alsó = 6772 liter; **(c)** $\approx 31{,}22$ h, $\approx 32{,}14$ h.

21. **(a)** 2; **(b)** $2\sqrt{2} \approx 2{,}828$; **(c)** $8\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 3{,}061$; **(d)** Mindegyik terület kisebb a kör területénél, π-nél. n növekedtével a sokszög területe π-hez tart.

5.2. Véges összegek határértéke és a szumma jel

1. $\frac{6(1)}{1+1} + \frac{6(2)}{2+1} = 7$

3. $\cos(1)\pi + \cos(2)\pi + \cos(3)\pi + \cos(4)\pi = 0$

5. $\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}-2}{2}$

7. Mindegyik. **9.** b.

11. $\sum_{k=1}^{6} k$ **13.** $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{2^k}$

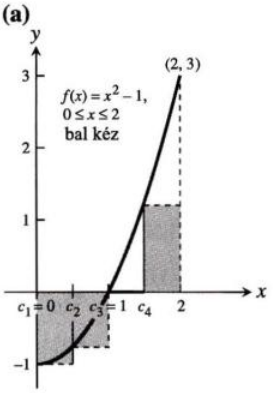
15. $\sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$

17. **(a)** -15; **(b)** 1; **(c)** 1; **(d)** -11; **(e)** 16

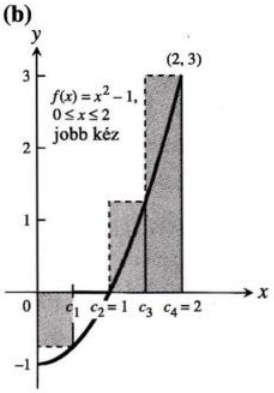
19. **(a)** 55; **(b)** 385; **(c)** 3025

21. -56. **23.** -73. **25.** 240. **27.** 3376.

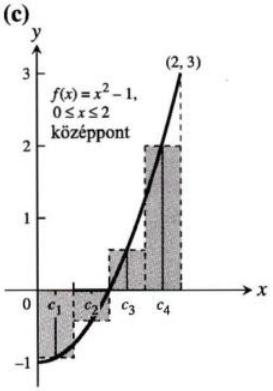
29. **(a)**



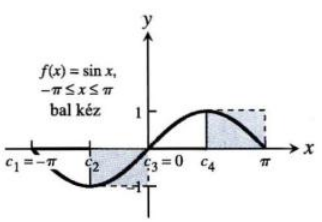
(b)



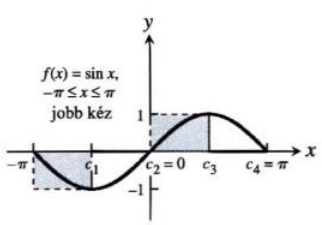
(c)



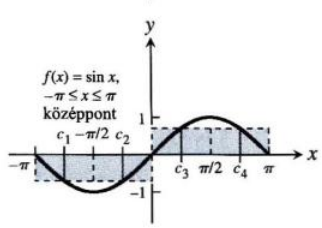
31. **(a)**



(b)



(c)



33. 1,2. **35.** $\frac{2}{3}+\frac{3n-1}{6n^2}, \frac{2}{3}$.

37. $12+\frac{27n+9}{2n^2}, 12$ **39.** $\frac{5}{6}+\frac{6n+1}{6n^2}, \frac{5}{6}$

5.3. A határozott integrál

1. $\int_0^2 x^2dx$ **3.** $\int_{-7}^5 (x^2-3x)dx$

5. $\int_2^3 \frac{1}{1-x}dx$ **7.** $\int_{-\pi/4}^0 \sec x dx$

9. **(a)** 0; **(b)** -8; **(c)** -12; **(d)** 10; **(e)** -2; **(f)** 16.

11. **(a)** 5; **(b)** $3\sqrt{3}$; **(c)** -5; **(d)** -5.

13. **(a)** 4; **(b)** -4

15. A terület = 21 egység. **17.** A terület = $9\pi/2$ egység.

19. A terület = 2,5 egység. **21.** A terület = 3 egység.

23. $b^2/4$. **25.** b^2-a^2 **27.** 1/2 **29.** $3\pi^2/2$

31. 7/3 **33.** 1/24 **35.** $3a^2/2$ **37.** $b/3$

39. -14 **41.** 10 **43.** -2 **45.** $-7/4$

47. 7 **49.** 0

51. n számú, $\delta x = b/n$ hosszúságú részintervallummal és a jobb oldali végpontokhoz tartozó függvényértékekkel:

$$\text{Terület} = \int_0^b 3x^2dx = b^3.$$

53. n számú, $\delta x = b/n$ hosszúságú részintervallummal és a jobb oldali végpontokhoz tartozó függvényértékekkel:

$$\text{Terület} = \int_0^b 2xdx = b^2.$$

55. $f_{\text{átlag}} = 0$ **57.** $f_{\text{átlag}} = -2$ **59.** $f_{\text{átlag}} = 1$

61. **(a)** $g_{\text{átlag}} = -1/2$; **(b)** $g_{\text{átlag}} = 1$; **(c)** $g_{\text{átlag}} = 1/4$

63. $a = 0$ és $b = 1$ esetén lesz a legnagyobb az integrál értéke.

65. Felső korlát = 1, alsó korlát = 1/2.

67. Például: $\int_0^1 \sin(x^2)dx \le \int_0^1 dx = 1$

69. $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b 0dx = 0$

71. Felső korlát = 1/2

5.4. Newton–Leibniz-tétel (az analízis alaptétele)

1. 6 **3.** 8 **5.** 1 **7.** 5/2 **9.** 2

11. $2\sqrt{3}$ **13.** 0 **15.** $-\pi/4$ **17.** $\frac{2\pi^3}{3}$

19. $-8/3$ **21.** $-3/4$ **23.** $\sqrt{2}-\sqrt[4]{8}+1$

25. 16 **27.** $(\cos\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ **29.** $4t^5$

31. $\sqrt{1+x^2}$ **33.** $-\frac{1}{2}x^{-1/2}\sin x$ **35.** 1

37. 28/3 **39.** 1/2 **41.** 51/4 **43.** π

45. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

47. d, mivel $y' = \frac{1}{x}$ és $y(\pi) = \int_\pi^\pi \frac{1}{t}dt - 3 = -3$

49. b, mivel $y' = \sec x$ és $y(0) = \int_0^0 \sec t dt + 4 = 4$

51. $y = \int_2^x \sec t dt + 3$ **53.** $s = \int_{t_0}^t f(x)dx + s_0$

55. $\frac{2}{3}bh$ **57.** 9 §

59. **(a)** $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_0^t f(x)dx = f(t) \Rightarrow v(5) = f(5) = 2$ m/s

(b) $a = df/dt$ negatív, mivel az érintőegyenes meredeksége a $t = 5$ pontban negatív.

(c) $s = \int_0^3 f(x)dx = \frac{1}{2}(3)(3) = \frac{9}{2}$ m, mivel az integrál az $y = f(x)$ görbe, az x-tengely és az $x = 3$ egyenes által határolt tartomány területe.

(d) $t = 6$, miután $t = 6$ és $t = 9$ között a tartomány az x-tengely alatt helyezkedik el.

(e) $t = 4$-nél és $t = 7$-nél, mivel ezekben a pontokban az érintő vízszintes.

(f) $t = 6$ és $t = 9$ között az origó felé tart, mivel ebben az intervallumban a sebesség negatív. $t = 0$ és $t = 6$ között az origótól elfele, mivel ott a sebesség pozitív.

(g) A jobb vagyis a pozitív oldalon, mert f integrálja 0-tól 9-ig pozitív érték, lévén, hogy nagyobb az x-tengely felett, mint az alatta fekvő terület.

63. $2x-2$ **65.** $-3x+5$

67. **(a)** Igaz. Mivel f folytonos, g az analízis alaptétele értelmében differenciálható.

(b) Igaz. g folytonos, mivel differenciálható.

(c) Igaz, mert $g'(1) = f(1) = 0$.

(d) Hamis, mivel $g''(1) = f'(1) > 0$.

(e) Igaz, mivel $g'(1) = 0$ és $g''(1) = f'(1) > 0$.

(f) Hamis: $g''(x) = f'(x) > 0$, így g'' sehol sem vált előjelet.

(g) Igaz, mert $g'(1) = f(1) = 0$ és $g'(x) = f(x)$ az x-nek növekvő függvénye (mert $f'(x) > 0$).

5.5. A határozatlan integrál és a helyettesítési szabály

1. $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$ **3.** $\frac{1}{2}\sec 2t + C$

5. $-(7x-2)^{-4} + C$ **7.** $-6(1-r^3)^{1/2} + C$

9. $\frac{1}{3}(x^{3/2}-1) - \frac{1}{6}\sin(2x^{3/2}-2) + C$

11. **(a)** $-\frac{1}{4}(\text{ctg}^2 2\theta) + C$ **(b)** $-\frac{1}{4}(\csc^2 2\theta) + C$

13. $-\frac{1}{3}(3-2s)^{3/2} + C$ **15.** $\frac{2}{5}(5s+4)^{1/2} + C$

17. $-\frac{2}{5}(1-\theta^2)^{5/4} + C$ **19.** $-\frac{1}{3}(7-3y^2)^{3/2} + C$

21. $(-2(1+\sqrt{x})) + C$ **23.** $\frac{1}{3}\sin(3z+4) + C$

25. $\frac{1}{3}\text{tg}(3x+2) + C$ **27.** $\frac{1}{2}\sin^6\left(\frac{x}{3}\right) + C$

29. $\left(\frac{r^2}{18}-1\right)^6 + C$ **31.** $-\frac{2}{3}\cos(x^{3/2}+1) + C$

33. $\sec\left(v+\frac{\pi}{2}\right) + C$ **35.** $\frac{1}{2\cos(2t+1)} + C$

37. $-\frac{2}{3}(\text{ctg}^3 y)^{1/2} + C$ **39.** $-\sin\left(\frac{1}{t}-1\right) + C$

41. $-\frac{\sin(1/\theta)}{2} + C$ **43.** $\frac{(s^3+2s^2-5s+5)^2}{2} + C$

45. $\frac{1}{16}(1+t^4)^4 + C$

47. $\frac{1}{5}(x^2+1)^{5/2}-\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}+C$

49. **(a)** $-\frac{6}{2+\mathrm{tg}^3 x}+C$ **(b)** $-\frac{6}{2+\mathrm{tg}^3 x}+C$
(c) $-\frac{6}{2+\mathrm{tg}^3 x}+C$

51. $\frac{1}{6}\sin\sqrt{3(2r-1)^2+6}+C$

53. $s=\frac{1}{2}(3t^2-1)^4-5$

55. $s=4t-2\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)+9$

57. $s=\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)+100t+1$

59. 6 m

63. **(b)** 339 volt

5.6. Helyettesítés és görbék által közbezárt terület

1. **(a)** 14/3 **(b)** 2/3

3. **(a)** 1/2 **(b)** −1/2

5. **(a)** 15/16 **(b)** 0

7. **(a)** 0 **(b)** 1/8

9. **(a)** 4 **(b)** 0

11. **(a)** 1/6 **(b)** 1/2

13. **(a)** 0 **(b)** 0

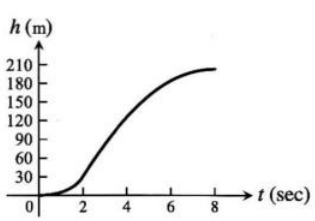
15. $2\sqrt{3}$ **17.** 3/4 **19.** $3^{5/2}-1$ **21.** 3
23. $\pi/3$ **25.** 16/3 **27.** $2^{5/2}$ **29.** $\pi/2$
31. 128/15 **33.** 4/3 **35.** 5/6 **37.** 38/3
39. 49/6 **41.** 32/3 **43.** 48/5 **45.** 8/3
47. 8 **49.** 5/3 (Három metszéspont van.)
51. 18 **53.** 243/8 **55.** 8/3 **57.** 2
59. 104/15 **61.** 56/15 **63.** 4 **65.** $\frac{4}{3}-\frac{4}{\pi}$
67. $\pi/2$ **69.** 2 **71.** 1/2 **73.** 1

75. **(a)** $(\pm\sqrt{c},c)$ **(b)** $c=4^{2/3}$ **(c)** $c=4^{2/3}$

77. 11/3 **79.** 3/4 **81.** Egyik sem.
83. $F(6)-F(2)$ **85.** **(a)** −3 **(b)** 3 **87.** $I=a/2$

Gyakorló feladatok

1. **(a)** Kb. 205 m **(b)**



3. **(a)** −1/2 **(b)** 31 **(c)** 13 **(d)** 0

5. $\int_1^5(2x-1)^{-1/2}dx=2$ **7.** $\int_{-\pi}^{0}\cos\frac{x}{2}dx=2$

9. **(a)** 4 **(b)** 2 **(c)** −2
(d) -2π **(e)** 8/5

11. 8/3 **13.** 62 **15.** 1
17. 1/6 **19.** 18 **21.** 9/8
23. $\frac{\pi^2}{32}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$ **25.** 4 **27.** $\frac{8\sqrt{2}-7}{6}$

29. Minimum: −4, maximum: 0, terület 27/4.

31. 6/5 **35.** $y=\int_5^x\left(\frac{\sin t}{t}\right)dt-3$

37. $-4(\cos x)^{1/2}+C$ **39.** $\theta^2+\theta+\sin(2\theta+1)+C$
41. $\frac{t^3}{3}+\frac{4}{t}+C$ **43.** $-\frac{1}{3}\cos(2t^{3/2})+C$ **45.** 16
47. 2 **49.** 1 **51.** 8 **53.** $27\sqrt{3}/160$
55. $\pi/2$ **57.** $\sqrt{3}$ **59.** $6\sqrt{3}-2\pi$ **61.** −1
63. 2 **65.** −2 **67.** 1 **69.** $\sqrt{2}-1$
71. **(a)** b **(b)** b **75.** 25°F **77.** $\sqrt{2+\cos^3 x}$
79. $\frac{-6}{3+x^4}$ **81.** Igen **83.** $-\sqrt{1+x^2}$
85. Alsó becsléssel a költség ≈ 10710 dollár.
87. 600; 18,00 dollár **89.** 300; 6,00 dollár

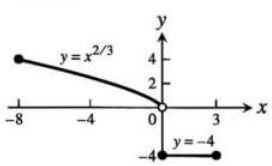
Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. **(a)** Igen **(b)** Nem

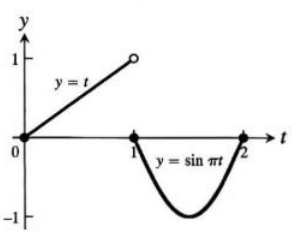
5. **(a)** 1/4 **(b)** $\sqrt[3]{12}$

7. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **9.** $y=x^3+2x-4$

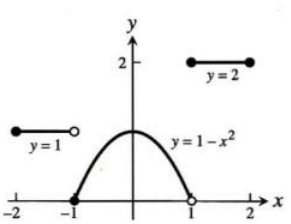
11. 36/6



13. $\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}$



15. 13/3



17. 1/2 **19.** $2/x$ **21.** $\frac{\sin 4y}{\sqrt{y}}-\frac{\sin y}{2\sqrt{y}}$

23. 1/6 **25.** $\int_0^1 f(x)dx$

29. **(a)** 0 **(b)** −1
(c) $-\pi$ **(d)** $x=1$
(e) $y=2x+2-\pi$ **(f)** $x=-1, x=2$
(g) $[-2\pi,0]$

6. fejezet

6.1. Szeletelés és tengely körüli forgatás

1. **(a)** $A(x)=\pi(1-x^2)$ **(b)** $A(x)=4(1-x^2)$ **(c)** $A(x)=2(1-x^2)$ **(d)** $A(x)=\sqrt{3}(1-x^2)$

3. 16 **5.** $\frac{16}{3}$

7. **(a)** $2\sqrt{3}$; **(b)** 8 **9.** 8π

11. **(a)** s^2h; **(b)** s^2h **13.** $\frac{2\pi}{3}$

15. $4-\pi$ **17.** $\frac{32\pi}{5}$

19. 36π **21.** π

23. $\pi\left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-\frac{11}{3}\right)$ **25.** 2π

27. 2π **29.** 3π

31. $\pi^2-2\pi$ **33.** $\frac{2\pi}{3}$

35. $\frac{117\pi}{5}$ **37.** $\pi(\pi-2)$

39. $\frac{4\pi}{3}$ **41.** 8π

43. $\frac{7\pi}{6}$

45. **(a)** 8π; **(b)** $\frac{32\pi}{5}$; **(c)** $\frac{8\pi}{3}$; **(d)** $\frac{224\pi}{15}$

47. **(a)** $\frac{16\pi}{5}$; **(b)** $\frac{56\pi}{15}$; **(c)** $\frac{64\pi}{15}$

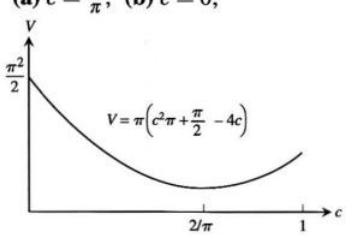
49. $V=2a^2b\pi$

51. **(a)** $V=\frac{\pi h^2(3a-h)}{3}$; **(b)** $\frac{1}{120\pi}$m/s

55. $V=3308\text{cm}^3$

57. **(a)** $c=\frac{2}{\pi}$; **(b)** $c=0$;

(c)



6.2. Térfogatszámítás hengerhéj-módszerrel

1. 6π **3.** 2π **5.** $\frac{14\pi}{3}$

7. 8π **9.** $\frac{5\pi}{6}$ **11.** $\frac{7\pi}{15}$

13. **(b)** 4π **15.** $\frac{16\pi}{15}\left(3\sqrt{2}+5\right)$ **17.** $\frac{8\pi}{3}$

19. $\frac{4\pi}{3}$ **21.** $\frac{16\pi}{3}$

23. **(a)** $\frac{6\pi}{5}$; **(b)** $\frac{4\pi}{5}$; **(c)** 2π; **(d)** 2π

25. **(a)** Az x-tengely körül: $V=\frac{2\pi}{15}$; az y-tengely körül: $V=\frac{\pi}{6}$; **(b)** Az x-tengely körül: $V=\frac{2\pi}{15}$; az y-tengely körül: $V=\frac{\pi}{6}$

27. **(a)** $\frac{5\pi}{3}$; **(b)** $\frac{4\pi}{3}$; **(c)** 2π; **(d)** $\frac{2\pi}{3}$

29. **(a)** $\frac{4\pi}{15}$; **(b)** $\frac{7\pi}{30}$

31. **(a)** $\frac{24\pi}{5}$; **(b)** $\frac{48\pi}{5}$

33. **(a)** $\frac{9\pi}{16}$; **(b)** $\frac{9\pi}{16}$

35. Korong: 2 integrál; gyűrű: 2 integrál; héj: integrál

6.3. Síkgörbék hossza

1. $\frac{5\sqrt{10}}{3}$ **3.** 7 **5.** $\frac{21}{2}$

7. 12 **9.** $\frac{53}{6}$ **11.** $\frac{123}{32}$

13. $\frac{99}{8}$ **15.** 2

17. **(a)** $\int_{-1}^{2}\sqrt{1+4x^2}dx$; **(c)** $\approx 6{,}13$

19. **(a)** $\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 y}dy$; **(c)** $\approx 3{,}82$

21. **(a)** $\int_{-1}^{3}\sqrt{1+(y+1)^2}dy$; **(c)** $\approx 9{,}29$

23. **(a)** $\int_{0}^{\pi/6}\sec x dx$; **(c)** $\approx 0{,}55$

25. Igen, $f(x)=\pm x+C$, ahol C valamilyen valós szám.

27. **(a)** $y=\sqrt{x}$ $(1,1)$ és $(4,2)$ között. **(b)** Csak egy. Ismerjük a függvény deriváltját és a függvényértéket egy x értékre.

29. **(a)** π; **(b)** π

6.4. Tehetetlenségi nyomaték és tömegközéppont

1. 1,2 m **3.** $(L/4,L/4)$

5. $M_0=8, M=8, \bar{x}=1$

7. $M_0=15/2, M=9/2, \bar{x}=5/3$

9. $M_0=73/6, M=5, \bar{x}=73/30$

11. $M_0=3, M=3, \bar{x}=1$ **13.** $\bar{x}=0, \bar{y}=12/5$

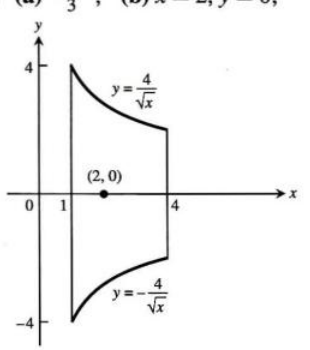
15. $\bar{x}=1, \bar{y}=-3/5$ **17.** $\bar{x}=16/105, \bar{y}=8/15$

19. $\bar{x}=0, \bar{y}=\pi/8$ **21.** $\bar{x}=1, \bar{y}=-2/5$

23. $\bar{x}=\bar{y}=\frac{2}{4-\pi}$ **25.** $\bar{x}=3/2, \bar{y}=1/2$

27. **(a)** $\frac{224\pi}{3}$; **(b)** $\bar{x}=2, \bar{y}=0$;

(c)



31. $\bar{x}=\bar{y}=1/3$ **33.** $\bar{x}=a/3, \bar{y}=b/3$

35. $13\delta/6$ **37.** $\bar{x}=0, \bar{y}=\frac{a\pi}{4}$

6.5. Forgásfelületek és Papposz tételei

1. (a) $2\pi\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}x\sqrt{1+\sec^4 x}dx$; (c) $\approx 3{,}84$

3. (a) $2\pi\int_1^2\frac{1}{y}\sqrt{1+y^{-4}}dy$; (c) $\approx 5{,}02$

5. (a) $2\pi\int_1^4(3-\sqrt{x})^2\sqrt{1+(1-3x^{-1/2})^2}dx$; (c) $\approx 63{,}37$

7. (a) $2\pi\int_0^{\pi/3}\left(\int_0^y\operatorname{tg}t dt\right)\sec y dy$; (c) $\approx 2{,}08$

9. $4\pi\sqrt{5}$ **11.** $3\pi\sqrt{5}$

13. $98\pi/81$ **15.** 2π

17. $\pi(\sqrt{8}-1)/9$ **19.** $35\pi\sqrt{5}/3$

21. $253\pi/20$

25. $2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x)\sqrt{1+\sin^2 x}dx$

27. Minden színből 226,2 litert kell rendelni.

31. $5\sqrt{2}\pi$ **33.** $8\pi^2$

35. $52\pi/3$ **37.** $3\pi\sqrt{5}$

41. $V=32\pi$, $S=32\sqrt{2}\pi$ **43.** $4\pi^2$

45. $\bar{x}=0$, $\bar{y}=\frac{2a}{\pi}$ **47.** $\bar{x}=0$, $\bar{y}=\frac{4b}{3\pi}$

49. $\sqrt{2}\pi a^3(4+3\pi)/6$ **51.** $\frac{2a^3}{3}$

6.6. Munka

1. 400 N·m **3.** 4 cm, 0,08 N/m

5. (a) 166 667 N/m, (b) 8,39 J és 33,33 J

7. 780 J **9.** 81000 J

13. 960 J

15. (a) 1944000 J (b) kb. 1 óra 5 perc
(c) A felső felének kiszivattyúzása 486000 J.

17. 152472 J **19.** 12723450 J

21. (a) 172243 J (b) 304943 J

23. 15 073 100,75 J **27.** 123 J

29. 96,5 J **31.** 139,3 J

33. (a) $r(y)=18-\sqrt{15^2-(y-110)^2}$, $110\le y\le 125$ m
(b) $\Delta V\approx\pi[18-\sqrt{225-(y-110)^2}]^2\Delta y$
(c) $W=8{,}208\cdot 10^7$ J

35. 0,682825 J **37.** $5{,}144\times 10^{10}$ J

6.7. A folyadék nyomása és a folyadékra ható erők

1. kb. 270 kN **3.** kb. 450 kN

5. (a) kb. 186,7 kN (b) kb. 191,5 kN

7. kb. 5,6 kN **9.** kb. 6,667 kN

11. (a) 403,2 N (b) 1,013 m

13. 30,7 m^3 **15.** $wb/2$

17. Nem. A mozgatható vég 1,44 méternyit mozdul el az alatt az idő alatt, amíg a tartály megtelik.

19. 10,45 N ill. 17,11 N

21. (a) 17,778 kN (b) 41,3 cm-rel (c) Nem

Gyakorló feladatok

1. $\frac{9\pi}{280}$ **3.** π^2 **5.** $\frac{72\pi}{35}$

7. (a) 2π (b) π (c) $12\pi/5$ (d) $26\pi/5$

9. (a) 8π (b) $1088\pi/15$ (c) $512\pi/15$

11. $\pi(3\sqrt{3}-\pi)/3$

13. (a) $16\pi/15$ (b) $8\pi/5$ (c) $8\pi/3$ (d) $32\pi/5$

15. $28\pi/3$ m^3 **17.** $\frac{10}{3}$

19. $\frac{285}{8}$ **21.** 10

23. $\frac{9\pi}{2}$ **25.** $\bar{x}=0$, $\bar{y}=8/5$

27. $\bar{x}=3/2$, $\bar{y}=12/5$ **29.** $\bar{x}=9/5$, $\bar{y}=11/10$

31. $28\pi\sqrt{2}/3$ **33.** 4π

35. $76\pi/3$ **37.** 4640 J

39. 15 J, 60 J **41.** 298,57 kJ

43. 96,38 kJ, kb. 4 perc **45.** 106,667 kN

47. 12,672 kN **49.** $216w_1+360w_2$

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. $f(x)=\sqrt{\frac{2x-a}{\pi}}$

3. $f(x)=\sqrt{C^2-1}x+a$, ahol $C\ge 1$

5. $\bar{x}=0$, $\bar{y}=\frac{n}{2n+1}$, $(0,1/2)$

9. (a) $\bar{x}=\bar{y}=4(a^2+ab+b^2)/(3\pi(a+b))$
(b) $(2a/\pi,2a/\pi)$

11. $28/3$ **13.** $\frac{4h\sqrt{3mh}}{3}$ **15.** 10080 N

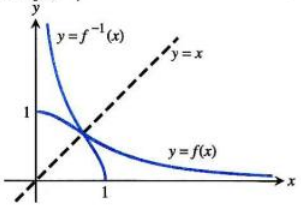
17. (a) $2h/3$ (b) $(6a^2+8ah+3h^2)/(6a+4h)$

7. fejezet

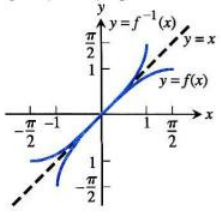
7.1. Inverz függvény deriváltja

1. Injektív **3.** Nem injektív **5.** Injektív

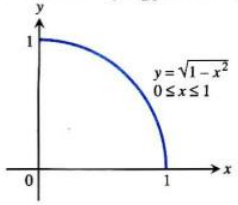
7. $D:(0;1]$, $R:[0,\infty)$



9. $D:[-1;1]$, $R:[-\pi/2,\pi/2]$



11. **(a)** Szimmetrikus az $x = y$ egyenletű egyenesre.



13. $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ **15.** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$

17. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$

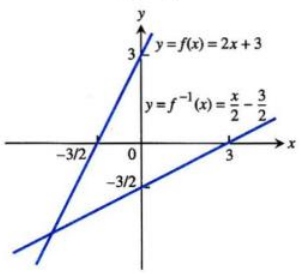
19. $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$; $D: (-\infty, \infty)$; $R: (-\infty, \infty)$

21. $f^{-1}(x) = 5\sqrt{x-1}$; $D: (-\infty, \infty)$; $R: (-\infty, \infty)$

23. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $D: (0, \infty)$; $R: (0, \infty)$

25. **(a)** $f^{-1}(x) = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2}$

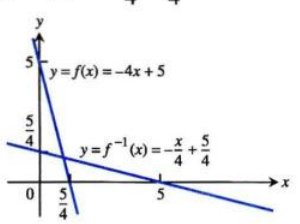
(b)



(c) 2, 1/2

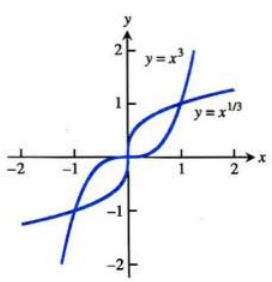
27. **(a)** $f^{-1}(x) = -\dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{4}$

(b)



(c) -4, $-1/4$

29. **(b)**



(c) Az $(1,1)$ pontban f meredeksége 3, g meredeksége $1/3$; a $(-1,-1)$ pontban f meredeksége 3, g meredeksége $1/3$.

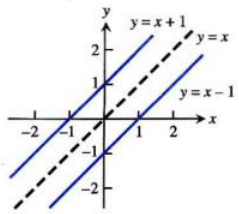
(d) az $y = x^3$ egyenletű görbe érintője az $x = 0$ helyen az $y = 0$ egyenletű egyenes; $y = \sqrt[3]{x}$ érintője az $x = 0$ helyen az $x = 0$ egyenletű egyenes.

31. $1/9$ **33.** 3

35. **(a)** $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{m}x$

(b) Az f^{-1} függvény grafikonja az origón átmenő $1/m$ meredekségű egyenes.

37. **(a)**



(b) $f^{-1}(x) = x - b$. Az f^{-1} függvény grafikonja párhuzamos f grafikonjával; a két egyenes az $x = y$ egyenletű egyenes ellenkező partjain helyezkedik el, attól egyenlő távolságra.

(c) A grafikonok párhuzamosak, az $x = y$ egyenletű egyenes ellenkező partjain, attól egyenlő távolságra elhelyezkedő egyenesek.

41. Növekvő, és így injektív; $df^{-1}/dx = \dfrac{1}{9}x^{-2/3}$.

43. Csökkenő, és így injektív; $df^{-1}/dx = -\dfrac{1}{3}x^{-2/3}$.

7.2. A természetes logaritmusfüggvény

1. **(a)** $\ln 3 - 2\ln 2$ **(b)** $2(\ln 2 - \ln 3)$

(c) $-\ln 2$ **(d)** $\dfrac{2}{3}\ln 3$

(e) $\ln 3 + \dfrac{1}{2}\ln 2$ **(f)** $\dfrac{1}{2}(3\ln 3 - \ln 2)$

3. **(a)** $\ln 5$ **(b)** $\ln(x-3)$ **(c)** $\ln t^2$

5. $1/x$ **7.** $2/t$ **9.** $-1/x$

11. $\dfrac{1}{\theta+1}$ **13.** $3/x$ **15.** $2\ln t + (\ln t)^2$

17. $x^3 \ln x$ **19.** $\dfrac{1-\ln t}{t^2}$ **21.** $\dfrac{1}{x(1+\ln x)^2}$

23. $\dfrac{1}{x \ln x}$ **25.** $2\cos(\ln\theta)$ **27.** $-\dfrac{3x+2}{2x(x+1)}$

29. $\dfrac{2}{t(1-\ln t)^2}$ **31.** $\dfrac{\operatorname{tg}(\ln\theta)}{\theta}$ **33.** $\dfrac{10x}{x^2+1} + \dfrac{1}{2(1-x)}$

35. $2x\ln|x| - x\ln\dfrac{|x|}{\sqrt{2}}$ **37.** $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$

39. $\ln|y^2 - 25| + C$ **41.** $\ln 3$

43. $(\ln 2)^2$ **45.** $\dfrac{1}{\ln 4}$ **47.** $\ln|6 + 3\operatorname{tg} t| + C$

49. $\ln 2$ **51.** $\ln 27$ **53.** $\ln(1+\sqrt{x}) + C$

55. $\left(\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{x(x+1)}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}\right) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}$

57. $\left(\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{\dfrac{t}{t+1}}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}(t+1)^{3/2}}$

59. $\sqrt{\theta+3}\sin\theta\left(\dfrac{1}{2(\theta+3)} + \operatorname{ctg}\theta\right)$

61. $t(t+1)(t+2)\left[\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+1} + \dfrac{1}{t+2}\right] = 3t^2 + 6t + 2$

63. $\dfrac{\theta+5}{\theta\cos\theta}\left[\dfrac{1}{\theta+5} - \dfrac{1}{\theta} + \operatorname{tg}\theta\right]$

65. $\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}}\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{2}{3(x+1)}\right]$

67. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^2+1}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}-\frac{2x}{x^2+1}\right)$

69. **(a)** Maximum az $x=0$ helyen 0; minimum az $x=\pi/3$ helyen $-\ln 2$.

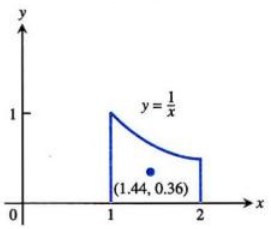
(b) Maximum az $x=1$ helyen 1; minimum az $x=1/2$ és $x=2$ helyeken $\cos(\ln 2)$.

71. $\ln 16$ **73.** $4\pi\ln 4$ **75.** $\pi\ln 16$

77. **(a)** $6+\ln 2$ **(b)** $8+\ln 9$

79. **(a)** $\bar{x}\approx 1{,}44$; $\bar{y}\approx 0{,}36$

(b)



81. $y=x+\ln|x|+2$ **83.** **(b)** 0,00469

7.3. Az exponenciális függvény

1. **(a)** 7,2 **(b)** $\frac{1}{x^2}$ **(c)** $\frac{x}{y}$

3. **(a)** 1 **(b)** 1 **(c)** $-x^x-y^2$

5. e^{2t+4} **7.** $e^{5t}+40$ **9.** $y=2xe^x+1$

11. **(a)** $k=\ln 2$ **(b)** $k=(1/10)\ln 2$

(c) $k=1000\ln a$

13. **(a)** $t=-10\ln 3$ **(b)** $t=-\frac{\ln 2}{k}$

(c) $t=\frac{\ln 0{,}4}{\ln 0{,}2}$

15. $4(\ln x)^2$ **17.** $-5e^{-5x}$

19. $-7e^{5-7x}$ **21.** xe^x

23. x^2e^x **25.** $2e^\theta\cos\theta$

27. $2\theta e^{-\theta^2}\sin\left(e^{-\theta^2}\right)$ **29.** $\frac{1-t}{t}$

31. $1/(1+e^\theta)$ **33.** $e^{\cos t}(1-t\sin t)$

35. $(\sin x)/x$ **37.** $\frac{ye^y\cos x}{1-ye^y\sin x}$

39. $\frac{2e^{2x}-\cos(x+3y)}{3\cos(x+3y)}$ **41.** $\frac{1}{3}e^{3x}-5e^{-x}+C$

43. 1 **45.** $8e^{x+1}+C$

47. 2 **49.** $2e^{\sqrt{r}}+C$

51. $-e^{-t^2}+C$ **53.** $-e^{1/x}+C$

55. e **57.** $\frac{1}{\pi}e^{\sec\pi t}+C$

59. 1 **61.** $\ln(1+e^r)+C$

63. $y=1-\cos(e^t-2)$ **65.** $y=2(e^{-x}+x)-1$

67. Maximum az $x=0$ helyen 1; minimum az $x=\ln 2$ helyen $2-\ln 2$.

69. Abszolút maximum az $x=1/\sqrt{e}$ helyen $1/(2e)$.

71. 2 **73.** $y=e^{x/2}-1$

75. **(a)** $\frac{d}{dx}(x\ln x-x+C)=x\cdot\frac{1}{x}+\ln x-1+0=\ln x$

(b) $\frac{1}{e-1}$

77. **(b)** $|\text{hiba}|\approx 0{,}02140$ **79.** 2,71828183

7.4. Az a^x és a $\log_a x$ függvények

1. **(a)** 7 **(b)** $\sqrt{2}$ **(c)** 75

(d) 2 **(e)** 0,5 **(f)** -1

3. **(a)** $\sqrt{x}$ **(b)** x^2 **(c)** $\sin x$

5. **(a)** $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ **(b)** 3 **(c)** 2

7. $x=12$ **9.** $x=3$ vagy $x=2$

11. $2^x\ln x$ **13.** $\left(\frac{\ln 5}{2\sqrt{s}}\right)5^{\sqrt{s}}$

15. $\pi x^{\pi-1}$ **17.** $-\sqrt{2}\cos\theta^{\sqrt{2}-1}\sin\theta$

19. $7^{\sec\theta}(\ln 7)^2(\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta)$ **21.** $(3\cos 3t)(2^{\sin 3t})\ln 2$

23. $\frac{1}{\theta\ln 2}$ **25.** $\frac{3}{x\ln 4}$

27. $\frac{2(\ln r)}{r(\ln 2)(\ln 4)}$ **29.** $\frac{-2}{(x+1)(x-1)}$

31. $\sin(\log_7\theta)+\frac{1}{\ln 7}\cos(\log_7\theta)$

33. $\frac{1}{\ln 5}$ **35.** $\frac{1}{t}(\log_2 3)3^{\log_2 t}$ **37.** $\frac{1}{t}$

39. $(x+1)^x\left(\frac{x}{x+1}+\ln(x+1)\right)$

41. $(\sqrt{t})^t\left(\frac{\ln t}{2}+\frac{1}{2}\right)$ **43.** $(\sin x)^x(\ln\sin x+x\,\mathrm{ctg}\,x)$

45. $(x^{\ln x})\left(\frac{\ln x^2}{x}\right)$ **47.** $\frac{5^x}{\ln 5}+C$

49. $\frac{1}{2\ln 2}$ **51.** $\frac{1}{\ln 2}$

53. $\frac{6}{\ln 7}$ **55.** 32 760

57. $\frac{3x^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1}+C$ **59.** $3^{\sqrt{2}+1}$

61. $\frac{1}{\ln 10}\left(\frac{(\ln x)^2}{2}\right)+C$ **63.** $2(\ln 2)^2$

65. $\frac{3\ln 2}{2}$ **67.** $\ln 10$

69. $(\ln 10)\ln|\ln x|+C$ **71.** $\ln(\ln x)$, $x>1$

73. $-\ln x$ **75.** $2\ln 5$

77. $[10^{-7{,}44}, 10^{-7{,}37}]$ **79.** $k=10$

81. **(a)** 10^{-7} **(b)** 7 **(c)** 1 : 1

83. $x\approx 0{,}76666$

85. **(a)** $L(x)=1+(\ln 2)x\approx 0{,}69x+1$

87. **(a)** 1,89279 **(b)** $-0{,}35621$

(c) 0,94575 **(d)** $-2{,}80735$

(e) 5,29595 **(f)** 0,97041

(g) $-1{,}03972$ **(h)** $-1{,}61181$

7.5. Exponenciális ütemű változások

1. **(a)** $-0{,}00001$ **(b)** 10 536 év **(c)** 82%.

3. 54,88 g **5.** kb. 18 m

7. $2{,}8147498 \cdot 10^{14}$

9. **(a)** 8 év **(b)** 32,02 év

11. 15,28 év

13. **(a)** $A_0 e^{0,2}$ **(b)** 17,33 év; 27,47 év

15. 4,50% **17.** 0,585 nap

21. **(a)** 17,5 perc **(b)** 13,26 perc

23. -3°C **25.** kb. 6659 év **27.** 41 éves

7.6. Relatív növekedési ütem

1. **(a)** lassabban **(b)** lassabban
(c) lassabban **(d)** gyorsabban
(e) lassabban **(f)** lassabban
(g) ugyanolyan ütemben **(h)** lassabban

3. **(a)** ugyanolyan ütemben **(b)** gyorsabban
(c) ugyanolyan ütemben **(d)** ugyanolyan ütemben
(e) lassabban **(f)** gyorsabban
(g) lassabban **(h)** ugyanolyan ütemben

5. **(a)** ugyanolyan ütemben **(b)** ugyanolyan ütemben
(c) ugyanolyan ütemben **(d)** gyorsabban
(e) gyorsabban **(f)** ugyanolyan ütemben
(g) lassabban **(h)** gyorsabban

7. d, a, c, b

9. **(a)** hamis **(b)** hamis **(c)** igaz
(d) igaz **(e)** igaz **(f)** igaz
(g) hamis **(h)** igaz

13. Ha f fokszáma nem nagyobb, mint g-é.

15. 1, 1

21. **(b)** $\ln(e^{17000000}) = 17000000 < (e^{17 \cdot 10^6})^{1/10^6} = e^{17} \approx$
$\approx 24154952{,}75$,

(c) $x \approx 3{,}4306311 \cdot 10^{15}$,

(d) az $x \approx 3{,}4306311 \cdot 10^{15}$ helyen metszik egymást.

23. **(a)** Az algoritmusnak $O(n \log_2 n)$ lépésre van szüksége.

25. Szekvenciális keresésnél akár egymillió lépés, bináris keresés esetében legfeljebb 20.

7.7. Inverz trigonometrikus függvények

1. **(a)** $\pi/4$ **(b)** $-\pi/3$ **(c)** $\pi/6$

3. **(a)** $-\pi/6$ **(b)** $\pi/4$ **(c)** $-\pi/3$

5. **(a)** $\pi/3$ **(b)** $3\pi/4$ **(c)** $\pi/6$

7. **(a)** $3\pi/4$ **(b)** $\pi/6$ **(c)** $2\pi/3$

9. **(a)** $\pi/4$ **(b)** $-\pi/3$ **(c)** $\pi/6$

11. **(a)** $3\pi/4$ **(b)** $\pi/6$ **(c)** $2\pi/3$

13. $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\sec\alpha = \frac{13}{12}$,
$\csc\alpha = \frac{13}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$

15. $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -2$,
$\csc\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{2}$

17. $1/\sqrt{2}$ **19.** $-1/\sqrt{3}$

21. $\frac{4+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ **23.** 1

25. $-\sqrt{2}$ **27.** $\pi/6$

29. $\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$ **31.** $\sqrt{9y^2-1}$

33. $\sqrt{1-x^2}$ **35.** $\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}$

37. $\frac{\sqrt{9-4y^2}}{3}$ **39.** $\frac{\sqrt{x^2-16}}{x}$

41. $\pi/2$ **43.** $\pi/2$

45. $\pi/2$ **47.** 0

49. $\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$ **51.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t^2}}$

53. $\frac{1}{|2s+1|\sqrt{s^2+s}}$ **55.** $\frac{-2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+2x^2}}$

57. $\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$ **59.** $\frac{-1}{2\sqrt{t}(1+t)}$

61. $\frac{1}{(\operatorname{tg}^{-1}x)(1+x^2)}$

63. $\frac{-e^t}{|e^t|\sqrt{(e^t)^2-1}} = \frac{-1}{\sqrt{e^{2t}-1}}$

65. $\frac{-2s^n}{\sqrt{1-s^2}}$ **67.** 0

69. $\arcsin x$ **71.** $\arcsin\frac{x}{7}+C$

73. $\frac{1}{\sqrt{17}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{17}}+C$ **75.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsec}\left|\frac{5x}{\sqrt{2}}\right|$

77. $2\pi/3$ **79.** $\pi/16$

81. $-\pi/12$ **83.** $\frac{3}{2}\arcsin 2(r-1)+C$

85. $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C$ **87.** $\frac{1}{4}\operatorname{arcsec}\left|\frac{2x-1}{2}\right|+C$

89. π **91.** $\pi/12$

93. $\frac{1}{2}\arcsin y^2+C$ **95.** $\arcsin(x-2)+C$

97. π **99.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y-1}{2}\right)+C$

101. 2π **103.** $\operatorname{arcsec}|x+1|+C$

105. $e^{\arcsin x}$ **107.** $\frac{1}{3}\left(\arcsin(x)^3\right)+C$

109. $\ln|\operatorname{arctg} y|+C$ **111.** $\sqrt{3}-1$

113. 5 **115.** 2

121. $y=\arcsin x$ **123.** $\operatorname{arcsec} x+\frac{2\pi}{3},\quad x>1$

127. $\theta=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\approx 54{,}7^\circ$

133. **(a)** Értelmezve van: létezik szög, amelynek tangense 2,

(b) nincs értelmezve: nincs olyan szög, amelynek koszinusza 2.

135. **(a)** Nincs értelmezve: nincs olyan szög, amelynek szekánsa 0,

(b) nincs értelmezve: nincs olyan szög, amelynek szinusza $\sqrt{2}$.

137. $\sqrt{5}$ m.

139. Igen, $\arcsin x$ és $-\arccos x$ a $\pi/2$ konstansban különbözik.

147. $\pi^2/2$

149. **(a)** $\pi^2/2$ **(b)** 2π

151. **(a)** 0,84107 **(b)** $-0{,}72973$ **(c)** 0,46365

153. **(a)** Értelmezési tartomány: az összes valós szám a $\frac{\pi}{2}+k\pi$ alakúak kivételével (k egész szám); értékkészlet: $-\pi/2<y<\pi/2$,

(b) D: $-\infty<x<\infty$; R: $-\infty<y<\infty$.

155. **(a)** D: $-\infty<x<\infty$; R: $0\le y\le\pi$,

(b) D: $-1\le x\le 1$; R: $-1\le y\le 1$.

157. A grafikonok azonosak.

7.8. Hiperbolikus függvények

1. $\operatorname{ch}x=5/4$, $\operatorname{th}x=-3/5$, $\operatorname{cth}x=-5/3$, $\operatorname{sech}x=4/5$, $\operatorname{csch}x=-4/3$

3. $\operatorname{sh}x=8/15$, $\operatorname{th}x=8/17$, $\operatorname{cth}x=17/8$, $\operatorname{sech}x=15/17$, $\operatorname{csch}x=15/8$

5. $x+\frac{1}{x}$ **7.** e^{5x}

9. e^{4x} **13.** $2\operatorname{ch}\frac{x}{3}$

15. $\operatorname{sech}^2\sqrt{t}+\frac{\operatorname{th}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ **17.** $\operatorname{cth}z$

19. $(\ln\operatorname{sech}\theta)(\operatorname{sech}\theta\operatorname{th}\theta)$ **21.** $\operatorname{th}^3 v$

23. 2 **25.** $\frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}$

27. $\frac{1}{1+\theta}-\operatorname{arth}\theta$ **29.** $\frac{1}{2\sqrt{t}}-\operatorname{arcth}\sqrt{t}$

31. $-\operatorname{arsech}x$ **33.** $\frac{\ln 2}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2\theta}}}$

35. $|\sec x|$ **41.** $\frac{\operatorname{ch}2x}{2}+C$

43. $12\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}-\ln 3\right)+C$ **45.** $7\ln|e^{x/7}+e^{-x/7}|+C$

47. $\operatorname{th}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$ **49.** $-2\operatorname{sech}\sqrt{t}+C$

51. $\ln\frac{5}{2}$ **53.** $\frac{3}{32}+\ln 2$

55. $e-e^{-1}$ **57.** 3/4

59. $\frac{3}{8}+\ln\sqrt{2}$ **61.** $\ln(2/3)$

63. $\frac{-\ln 3}{2}$ **65.** $\ln 3$

67. **(a)** $\operatorname{arsh}\sqrt{3}$ **(b)** $\ln(\sqrt{3}+2)$

69. **(a)** $\operatorname{arcth}2-\operatorname{arcth}(5/4)$ **(b)** $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$

71. **(a)** $-\operatorname{arsech}\frac{12}{13}+\operatorname{arsech}\frac{4}{5}$

(b) $-\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-(12/13)^2}}{12/13}\right)+\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-(4/5)^2}}{4/5}\right)=$

$=-\ln\frac{3}{2}+\ln 2=\ln\frac{4}{3}$

73. **(a)** 0 **(b)** 0

75. **(b)** (i) $f(x)=\frac{2f(x)}{2}+0=f(x)$

(ii) $f(x)=0+\frac{2f(x)}{2}=f(x)$

77. **(b)** $\sqrt{\frac{mg}{k}}$ **(c)** 196,3 km/h

79. $y=\operatorname{arsech}x-\sqrt{1-x^2}$ **81.** 2π

83. $\frac{6}{5}$ **85.** $16\pi\ln 6+\frac{455\pi}{9}$

89. **(c)** $a\approx 0{,}108738$ **(d)** 275 N

Gyakorló feladatok

1. $-2e^{-x/5}$ **3.** xe^{4x}

5. $\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}=2\operatorname{ctg}\theta$ **7.** $\frac{2}{(\ln 2)x}$

9. $-8^{-t}\ln 8$ **11.** $18x^{2{,}6}$

13. $(x+2)^{x+2}(\ln(x+2)+1)$ **15.** $-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

17. $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}$ **19.** $\operatorname{arctg}t+\frac{t}{1+t^2}-\frac{1}{2t}$

21. $\frac{1-z}{\sqrt{z^2-1}}+\operatorname{arcsec}z$ **23.** -1

25. $\frac{2(x^2+1)}{\sqrt{\cos 2x}}\left[\frac{2x}{x^2+1}+\operatorname{tg}2x\right]$

27. $5\left[\frac{(t+1)(t-1)}{(t-2)(t+3)}\right]^5\left[\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+3}\right]$

29. $\frac{1}{\sqrt{\theta}}(\sin\theta)^{\sqrt{\theta}}\left(\frac{\ln\sqrt{\sin\theta}}{2}+\theta\operatorname{ctg}\theta\right)$

31. $-\cos e^x+C$ **33.** $\operatorname{tg}(e^x-7)+C$

35. $e^{\operatorname{tg}x}+C$ **37.** $\frac{-\ln 7}{3}$

39. $\ln 8$ **41.** $\ln(9/25)$

43. $-[\ln|\cos(\ln v)|]+C$ **45.** $-\frac{1}{2}(\ln x)^{-2}+C$

47. $-\operatorname{ctg}(1+\ln r)+C$ **49.** $\frac{1}{2\ln 3}3^{x^2}+C$

51. $3\ln 7$ **53.** $15/16+\ln 2$

55. $e-1$ **57.** $1/6$ **59.** $9/14$

61. $\frac{1}{3}\left[(\ln 4)^3-(\ln 2)^3\right]$ vagy $\frac{7}{3}(\ln 2)^3$

63. $\frac{9\ln 2}{4}$ **65.** π **67.** $\pi/\sqrt{3}$

69. $\operatorname{arcsec}|2y|+C$ **71.** $\pi/12$

73. $\arcsin(x+1)+C$ **75.** $\pi/2$

77. $\frac{1}{3}\operatorname{arcsec}\left(\frac{t+1}{3}\right)+C$ **79.** $y=\frac{\ln 2}{\ln(3/2)}$

81. $y=\ln x-\ln 3$ **83.** $y=\frac{1}{1-e^x}$

85. $\ln 10$ **87.** $\ln 2$ **89.** 5

91. $-\infty$ **93.** 1 **95.** e^3

97. **(a)** ugyanolyan ütemben **(b)** ugyanolyan ütemben
(c) gyorsabban **(d)** gyorsabban
(e) ugyanolyan ütemben **(f)** ugyanolyan ütemben

99. **(a)** igaz **(b)** hamis
(c) hamis **(d)** igaz
(e) igaz **(f)** igaz

101. $1/3$

103. Abszolút maximum az $x=e/2$ helyen 0; abszolút minimum az $x=0{,}5$ helyen $-0{,}5$.

105. 1 **107.** $1/e$ m/s

109. $1/\sqrt{2}$ egység hosszú, $1/\sqrt{e}$ egység magas; $A=1/\sqrt{2e}\approx$ $\approx 0{,}43$ területegység.

111. $\ln 5x-\ln 3x=\ln(5/3)$ **113.** $1/2$

115. **(a)** Abszolút maximum az $x=e^2$ helyen $2/e$, inflexiós pont: $(e^{8/3},(8/3)e^{-4/3})$; konvex az $(e^{8/3},\infty)$, konkáv a $(0,e^{8/3})$ intervallumon.

(b) Abszolút maximum az $x=0$ helyen 1; inflexiós pontok: $(\pm 1/\sqrt{2},1/\sqrt{e})$, konvex a $(-\infty,-1/\sqrt{2})\cup(1/\sqrt{2},\infty)$ halmazon, konkáv a $(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ intervallumon.

(c) Abszolút maximum az $x=0$ helyen 1; inflexiós pont: $(1,2/e)$; konvex az $(1,\infty)$, konkáv a $(-\infty,1)$ intervallumon.

117. 18 935 év **119.** $20(5-\sqrt{17})$ m

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. $\pi/2$ **3.** $1/\sqrt{e}$ **5.** $\ln 2$

7. **(a)** 1 **(b)** $\pi/2$ **(c)** π

9. $\frac{1}{\ln 2}$, $\frac{1}{2\ln 2}$, 2 : 1 **11.** $x=2$

13. $2/17$ **21.** $\bar{x}=\frac{\ln 4}{\pi}$, $\bar{y}=0$ **25.** **(b)** $61°$

8. fejezet

8.1. Egyszerű integrációs formulák

1. $2\sqrt{8x^2+1}+C$ **3.** $2(\sin v)^{3/2}+C$

5. $\ln 5$ **7.** $2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+C$

9. $-\frac{1}{7}\ln|\sin(3-7x)|+C$

11. $-\ln|\csc(e^\theta+1)+\operatorname{ctg}(e^\theta+1)|+C$

13. $3\ln\left|\sec\frac{t}{3}+\operatorname{tg}\frac{t}{3}\right|+C$

15. $-\ln|\csc(s-\pi)+\operatorname{ctg}(s-\pi)|+C$

17. 1 **19.** $e^{\operatorname{tg}v}+C$ **21.** $\frac{3^{(x+1)}}{\ln 3}+C$

23. $\frac{2\sqrt{w}}{\ln 2}+C$ **25.** $3\operatorname{arctg}3u+C$ **27.** $\pi/18$

29. $\arcsin s^2+C$ **31.** $6\operatorname{arcsec}|5x|+C$ **33.** $\operatorname{arctg}e^x+C$

35. $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ **37.** 2π **39.** $\arcsin(t-2)+C$

41. $\operatorname{arcsec}|x+1|+C$, ha $|x+1|>1$

43. $\operatorname{tg}x-2\ln|\csc x+\operatorname{ctg}x|-\operatorname{ctg}x-x+C$

45. $x+\sin 2x+C$ **47.** $x-\ln|x+1|+C$

49. $7+\ln 8$ **51.** $2t^2-t+2\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C$

53. $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$ **55.** $\sqrt{2}$

57. $\operatorname{tg}x-\sec x+C$ **59.** $\ln|1+\sin\theta|+C$

61. $\operatorname{ctg}x+x+\csc x+C$ **63.** 4

65. $\sqrt{2}$ **67.** 2

69. $\ln\left|\sqrt{2}+1\right|-\ln\left|\sqrt{2}-1\right|$ **71.** $4-\frac{\pi}{2}$

73. $-\ln|\csc(\sin\theta)+\operatorname{ctg}(\sin\theta)|+C$

75. $\ln|\sin x|+\ln|\cos x|+C$ **77.** $12\operatorname{arctg}(\sqrt{y})+C$

79. $\operatorname{arcsec}\left|\frac{x-1}{7}\right|+C$ **81.** $\ln|\sec(\operatorname{tg}t)|+C$

83. **(a)** $\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta+C$

(b) $\sin\theta-\frac{2}{3}\sin^3\theta+\frac{1}{5}\sin^5\theta+C$

(c) $\int\cos^9\theta\,d\theta=\int\cos^8\theta(\cos\theta)\,d\theta=$
$=\int(1-\sin^2\theta)^4(\cos\theta)\,d\theta$

85. **(a)** $\int\operatorname{tg}^3\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\theta-\int\operatorname{tg}\theta\,d\theta=$
$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\theta+\ln|\cos\theta|+C$

(b) $\int\operatorname{tg}^5\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4\theta-\int\operatorname{tg}^3\theta\,d\theta$

(c) $\int\operatorname{tg}^7\theta\,d\theta=\frac{1}{6}\operatorname{tg}^6\theta-\int\operatorname{tg}^5\theta\,d\theta$

(d) $\int\operatorname{tg}^{2k+1}\theta\,d\theta=\frac{1}{2k}\operatorname{tg}^{2k}\theta-\int\operatorname{tg}^{2k-1}\theta\,d\theta$

87. $2\sqrt{2}-\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$ **89.** π^2

91. $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ **93.** $\bar{x}=0,\quad \bar{y}=\dfrac{1}{\ln\left(2\sqrt{2}+3\right)}$

8.2. Parciális integrálás

1. $-2x\cos(x/2)+4\sin(x/2)+C$

3. $t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t+C$ **5.** $\ln 4-\dfrac{3}{4}$

7. $y\operatorname{arctg} y-\ln\sqrt{1+y^2}+C$ **9.** $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C$

11. $(x^3-3x^2+6x-6)e^x+C$ **13.** $(x^2-7x+7)e^x+C$

15. $(x^5-5x^4+20x^3-60x^2+120x-120)e^x+C$

17. $\dfrac{\pi^2-4}{8}$ **19.** $\dfrac{5\pi-3\sqrt{3}}{9}$

21. $\dfrac{1}{2}\left(-e^{\theta}\cos\theta+e^{\theta}\sin\theta\right)+C$

23. $\dfrac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C$

25. $\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{3s+9}e^{\sqrt{3s+9}}-e^{\sqrt{3s+9}}\right)+C$

27. $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}-\ln 2-\dfrac{\pi^2}{18}$

29. $\dfrac{1}{2}\Big(-x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)\Big)+C$

31. **(a)** π **(b)** 3π **(c)** 5π **(d)** $(2n+1)\pi$

33. $2\pi(1-\ln 2)$ **35.** **(a)** $\pi(\pi-2)$ **(b)** 2π

37. $\dfrac{1}{2\pi}(1-e^{-2\pi})$ **39.** $u=x^n,\ dv=\cos x\,dx$

41. $u=x^n,\ dv=e^{ax}\,dx$

43. $x\arcsin x+\cos(\arcsin x)+C$

45. $x\operatorname{arcsec} x-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$ **47.** igen

49. **(a)** $x\operatorname{arsh} x-\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)+C$ **(b)** $x\operatorname{arsh} x-(1+x^2)^{1/2}+C$

8.3. Racionális törtfüggvények integrálása parciális törtekre bontással

1. $\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{3}{x-2}$ **3.** $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{(x+1)^2}$

5. $\dfrac{-2}{z}+\dfrac{-1}{z^2}+\dfrac{2}{z-1}$ **7.** $1+\dfrac{17}{t-3}+\dfrac{-12}{t-2}$

9. $\dfrac{1}{2}\big(\ln|1+x|-\ln|1-x|\big)+C$

11. $\dfrac{1}{7}\ln\left|(x+6)^2(x-1)^5\right|+C$ **13.** $(\ln 15)/2$

15. $-\dfrac{1}{2}\ln|t|+\dfrac{1}{6}\ln|t+2|+\dfrac{1}{3}\ln|t-1|+C$

17. $3\ln 2-2$ **19.** $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|-\dfrac{x}{2(x^2-1)}+C$

21. $(\pi+2\ln 2)/8$ **23.** $\operatorname{arctg} y-\dfrac{1}{y^2+1}+C$

25. $-(s-1)^{-2}+(s-1)^{-1}+\operatorname{arctg} s+C$

27. $\dfrac{-1}{\theta^2+2\theta+2}+\ln(\theta^2+2\theta+2)-\operatorname{arctg}(\theta+1)+C$

29. $x^2+\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|+C$

31. $9x+2\ln|x|+\dfrac{1}{x}+7\ln|x-1|+C$

33. $\dfrac{y^2}{2}-\ln|y|+\dfrac{1}{2}\ln(1+y^2)+C$

35. $\ln\left(\dfrac{e^t+1}{e^t+2}\right)+C$ **37.** $\dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{\sin y-2}{\sin y+3}\right|+C$

39. $\dfrac{(\operatorname{arctg} 2x)^2}{4}-3\ln|x-2|+\dfrac{6}{x-2}+C$

41. $x=\ln|t-2|-\ln|t-1|+\ln 2$

43. $x=\dfrac{6t}{t+2}-1$ **45.** $3\pi\ln 25$ **47.** 1,10

49. **(a)** $x=\dfrac{1000e^{4t}}{499+e^{4t}}$ **(b)** 1,55 nap

51. **(a)** $\dfrac{22}{7}-\pi$ **(b)** 0,04%
(c) a terület kisebb mint 0,003

8.4. Trigonometrikus integrálok

1. 8/15 **3.** 4/3 **5.** 16/35 **7.** 3π

9. π **11.** 2 **13.** 1 **15.** 4

17. 2 **19.** $2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ **21.** $\sqrt{2}$

23. $2\sqrt{3}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ **25.** 4/3

27. 4/3 **29.** $2(1-\ln 2)$ **31.** $\dfrac{4}{3}-\ln\sqrt{3}$

33. $-6/5$ **35.** π **37.** 0

39. $\dfrac{2\pi\left(\left(9\sqrt[3]{4}+1\right)^{3/2}-1\right)}{27}$ **41.** $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

43. $\pi^2/2$

8.5. Trigonometrikus helyettesítések

1. $\ln\left|\sqrt{9+y^2}+y\right|+C$ **3.** $\pi/4$

5. $\pi/6$ **7.** $\dfrac{25}{2}\arcsin\dfrac{t}{5}+\dfrac{t\sqrt{25-t^2}}{2}+C$

9. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{2x}{7}+\dfrac{\sqrt{4x^2-49}}{7}\right|+C$

11. $7\left(\dfrac{\sqrt{y^2-49}}{7}-\operatorname{arcsec}\dfrac{y}{7}\right)+C$

13. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$ **15.** $\dfrac{1}{3}(x^2+4)^{3/2}-4\sqrt{x^2+4}+C$

17. $\dfrac{-2\sqrt{4-w^2}}{w}+C$ **19.** $4\sqrt{3}-4\pi/3$

21. $-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}+C$ **23.** $-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^5+C$

25. $2\operatorname{arctg}2x+\dfrac{4x}{(4x^2+1)}+C$ **27.** $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right)^3+C$

29. $\ln 9-\ln\left(1+\sqrt{10}\right)$ **31.** $\pi/6$

33. $\operatorname{arcsec}x+C$ **35.** $\sqrt{x^2-1}+C$

37. $y=2\left(\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2}-\operatorname{arcsec}\dfrac{x}{2}\right)$

39. $y=\dfrac{3}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}-\dfrac{3\pi}{8}$ **41.** $3\pi/4$

43. $\dfrac{2}{1-\operatorname{tg}(x/2)}+C$ **45.** 1

47. $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}$ **49.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}(t/2)+1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}(t/2)+1+\sqrt{2}}\right|+C$

51. $\ln\left|\dfrac{1+\operatorname{tg}(\theta/2)}{1-\operatorname{tg}(\theta/2)}\right|+C$

8.6. Integrál táblázatok és matematikai programcsomagok

1. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x-3}{3}}\right)+C$

3. $\sqrt{x-2}\left(\dfrac{2(x-2)}{3}+4\right)+C$

5. $\dfrac{(2x-3)^{3/2}(x+1)}{5}+C$

7. $\dfrac{-\sqrt{9-4x}}{x}-\dfrac{2}{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt{9-4x}-3}{\sqrt{9-4x}+3}\right|+C$

9. $\dfrac{(x+2)(2x-6)\sqrt{4x-x^2}}{6}+4\arcsin\left(\dfrac{x-2}{2}\right)+C$

11. $-\dfrac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{7+x^2}}{x}\right|+C$

13. $\sqrt{4-x^2}-2\ln\left|\dfrac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+C$

15. $\dfrac{p}{2}\sqrt{25-p^2}+\dfrac{25}{2}\arcsin\dfrac{p}{5}+C$

17. $2\arcsin\dfrac{r}{2}-\dfrac{1}{2}r\sqrt{4-r^2}+C$

19. $-\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)\right)+C$

21. $\dfrac{e^{2t}}{13}(2\cos 3t+3\sin 3t)+C$

23. $\dfrac{x^2}{2}\arccos x+\dfrac{1}{4}\arcsin x-\dfrac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C$

25. $\dfrac{s}{18(9-s^2)}+\dfrac{1}{108}\ln\left|\dfrac{s+3}{s-3}\right|+C$

27. $-\dfrac{\sqrt{4x+9}}{x}+\dfrac{2}{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt{4x+9}-3}{\sqrt{4x+9}+3}\right|+C$

29. $2\sqrt{3t-4}-4\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3t-4}{4}}+C$

31. $\dfrac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$

33. $-\dfrac{\cos 5x}{10}-\dfrac{\cos x}{2}+C$

35. $8\left(\dfrac{\sin(7t/2)}{7}-\dfrac{\sin(9t/2)}{9}\right)+C$

37. $6\sin(\theta/12)+\dfrac{6}{7}\sin(7\theta/12)+C$

39. $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+\dfrac{x}{2(1+x^2)}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$

41. $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+C$

43. $\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+C$

45. $\sqrt{1-\sin^2 t}-\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}\right|+C$

47. $\ln\left|\ln y+\sqrt{3+(\ln y)^2}\right|+C$

49. $\ln\left|3r+\sqrt{9r^2-1}\right|+C$

51. $x\arccos\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\arcsin\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+C$

53. $-\dfrac{\sin^4 2x\cos 2x}{10}-\dfrac{2\sin^2 2x\cos 2x}{15}-\dfrac{4\cos 2x}{15}+C$

55. $\dfrac{\cos^3 2\pi t\sin 2\pi t}{\pi}+\dfrac{3}{2}\dfrac{\cos 2\pi t\sin 2\pi t}{\pi}+3t+C$

57. $\dfrac{\sin^3 2\theta\cos^2 2\theta}{10}+\dfrac{\sin^3 2\theta}{15}+C$

59. $\dfrac{2}{3}\operatorname{tg}^3 t+C$ **61.** $\operatorname{tg}^2 2x-2\ln|\sec 2x|+C$

63. $8\left(-\dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 t+\operatorname{ctg}t+t\right)+C$

65. $\dfrac{(\sec\pi x)(\operatorname{tg}\pi x)}{\pi}+\dfrac{1}{\pi}\ln|\sec\pi x+\operatorname{tg}\pi x|+C$

67. $\dfrac{\sec^2 3x\operatorname{tg}3x}{3}+\dfrac{2}{3}\operatorname{tg}3x+C$

69. $\dfrac{-\csc^3 x\operatorname{ctg}x}{4}-\dfrac{3\csc x\operatorname{ctg}x}{8}-\dfrac{3}{8}\ln|\csc x+\operatorname{ctg}x|+C$

71. $4x^4(\ln x)^2-2x^4(\ln x)+\dfrac{x^2}{2}+C$

73. $\dfrac{e^{3x}}{9}(3x-1)+C$

75. $2x^3e^{x/2}-12x^2e^{x/2}+96e^{x/2}\left(\dfrac{x}{2}-1\right)+C$

77. $\dfrac{x^2 2^x}{\ln 2}-\dfrac{2}{\ln 2}\left(\dfrac{x2^x}{\ln 2}-\dfrac{2^x}{(\ln 2)^2}\right)+C$

79. $\dfrac{x\pi^x}{\ln\pi}-\dfrac{\pi^x}{(\ln\pi)^2}+C$

81. $\dfrac{1}{2}\left[\sec(e^t-1)\operatorname{tg}(e^t-1)+\ln|\sec(e^t-1)+\operatorname{tg}(e^t-1)|\right]+C$

83. $\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ **85.** $\pi/3$

87. $\dfrac{1}{120}\operatorname{sh}^4 3x\operatorname{ch}3x-\dfrac{1}{90}\operatorname{sh}^2 3x\operatorname{ch}3x+\dfrac{1}{45}\operatorname{ch}3x+C$

89. $\dfrac{x^2}{3}\operatorname{sh}3x-\dfrac{2x}{9}\operatorname{ch}3x+\dfrac{2}{27}\operatorname{sh}3x+C$

91. $-\dfrac{1}{7\operatorname{ch}^7 x}+C$

101. $2\pi\sqrt{3}+\pi\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

103. $\bar{x}=4/3,\ \bar{y}=\ln\sqrt{2}$

105. 7,62 **107.** $\pi/8$ **111.** $\pi/4$

8.7. Numerikus integrálás

1. **I:** **(a)** 1,5; 0 **(b)** 1,5; 0 **(c)** 0%
II: **(a)** 1,5; 0 **(b)** 1,5; 0 **(c)** 0%

3. **I:** **(a)** 2,75; 0,08 **(b)** 2,67; 0,08 **(c)** $0{,}0312 \approx 3\%$
II: **(a)** 2,67; 0 **(b)** 2,67; 0 **(c)** 0%

5. **I:** **(a)** 6,25; 0,5 **(b)** 6; 0,25 **(c)** $0{,}0417 \approx 4\%$
II: **(a)** 6; 0 **(b)** 6; 0 **(c)** 0%

7. **I:** **(a)** 0,509; 0,03125 **(b)** 0,5; 0,009 **(c)** $0{,}018 \approx 2\%$
II: **(a)** 0,5; 0,002604 **(b)** 0,5; 0,0004 **(c)** 0%

9. **I:** **(a)** 1,8961; 0,161 **(b)** 2; 0,1039 **(c)** $0{,}052 \approx 5\%$
II: **(a)** 2,0045; 0,0066 **(b)** 2; 0,00454 **(c)** 0%

11. **(a)** 0,31929 **(b)** 0,32812 **(c)** 1/3, 0,01404, 0,00521

13. **(a)** 1,95643 **(b)** 2,00421 **(c)** 2, 0,04357, −0,00421

15. **(a)** 1 **(b)** 2 **17.** **(a)** 116 **(b)** 2

19. **(a)** 283 **(b)** 2 **21.** **(a)** 71 **(b)** 10

23. **(a)** 76 **(b)** 12 **25.** **(a)** 82 **(b)** 8

27. 3615 m^3 **29.** 0,9785 mérföld $\approx$ 1575 méter

31. 3,405 méter

33. **(a)** $\approx 0{,}00021$ **(b)** $\approx 1{,}37079$ **(c)** $\approx 0{,}015\%$

35. **(a)** 3,11571 **(b)** 0,02588
(c) $M=3{,}11$-el $|E_T| \le (\pi^3/1200)(3{,}11) < 0{,}081$

39. 1,08943 **41.** 0,82812

43. **(a)** $T_{10} \approx 1{,}983523538$, $T_{100} \approx 1{,}999835504$, $T_{1000} \approx 1{,}999998355$

(b)

n	$\lvert E_T\rvert = 2 - T_n$
10	$1{,}6476462 \cdot 10^{-2}$
100	$1{,}64496 \cdot 10^{-4}$
1000	$1{,}645 \cdot 10^{-6}$

(c) $|E_{10n}| \approx 10^{-2}|E_n|$

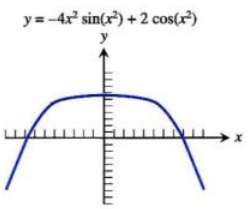
(d) $b-a=\pi$, $h^2=\dfrac{\pi^2}{n^2}$, $M=1$

$$|E_n| \le \frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right)=\frac{\pi^3}{12n^2}$$

$$|E_{10n}| \le \frac{\pi^3}{12(10n)^2}=10^{-2}|E_n|$$

45. **(a)** $f''(x)=2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2)$

(b)



(c) A grafikonról leolvasható, hogy $-3 \le f''(x) \le 2$, ha $-1 \le x \le 1$.

(d) $|E_T| \le \dfrac{1-(-1)}{12}(\Delta x^2)(3)=\dfrac{\Delta x^2}{2}$

(e) $|E_T| \le \dfrac{\Delta x^2}{2} \le \dfrac{0{,}1^2}{2} < 0{,}01$ **(f)** $n \ge 20$

47. **(a)** 0,023, 0,016, 0,015, 0,021, 0,032, 0,048, 0,070, 0,093, 0,107, 0,107, 0,093, 0,064, 0,032 (m^2)

(b) $\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^6 (C(y))^2\,dy$

(c) $\approx 0{,}347\ m^3$

(d) $\approx 0{,}3479\ m^3$. A Simpson-formulával számolt eredmény pontosabb, mint a trapézformulával számolt. Mivel $\Delta x = 0{,}05$ m, a Simpson-formula hibája $\Delta x^4 = 0{,}00000625$, a trapézformuláé $\Delta x^2 = 0{,}0025$ nagyságrendű.

49. **(a)** $\approx 5{,}870$ **(b)** $|E_T| \le 0{,}0032$

51. 63,21 cm **53.** 14,4 **55.** 54,9

8.8. Improprius integrálok

1. $\pi/2$ **3.** 2 **5.** 6 **7.** $\pi/2$

9. $\ln 3$ **11.** $\ln 4$ **13.** 0 **15.** $\sqrt{3}$

17. π **19.** $\ln\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)$ **21.** -1 **23.** 1

25. $-1/4$ **27.** $\pi/2$ **29.** $\pi/3$ **31.** 6

33. $\ln 2$ **35.** divergens **37.** konvergens

39. konvergens **41.** konvergens **43.** divergens

45. konvergens **47.** konvergens **49.** divergens

51. konvergens **53.** konvergens **55.** divergens

57. konvergens **59.** divergens **61.** konvergens

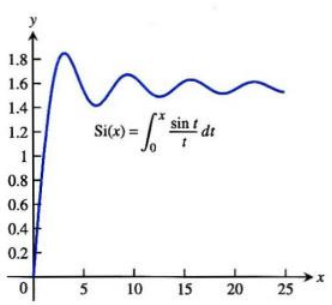
63. konvergens

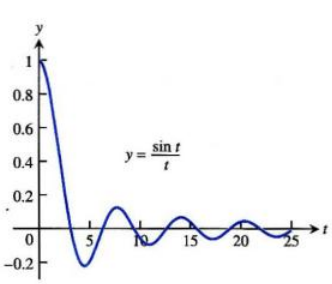
65. **(a)** $p < 1$ esetén konvergens
(b) $p > 1$ esetén konvergens

67. 1 **69.** 2π **71.** $\ln 2$

73. **(b)** $\approx 0{,}88621$

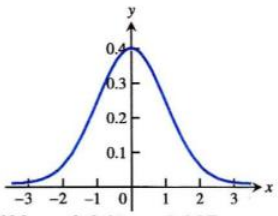
75. **(a)**





(b) $\pi/2$

77. (a)



(b) $\approx 0{,}683$, $\approx 0{,}954$, $\approx 0{,}997$

81. divergens **83.** konvergens

85. konvergens **87.** divergens

Gyakorló feladatok

1. $\frac{1}{12}(4x^2-9)^{3/2}+C$

3. $\frac{(2x+1)^{5/2}}{10}-\frac{(2x+1)^{3/2}}{6}+C$

5. $\frac{\sqrt{8x^2+1}}{8}+C$ **7.** $\frac{1}{2}\ln(25+y^2)+C$

9. $\frac{-\sqrt{9-4t^4}}{8}+C$ **11.** $\frac{9}{25}(z^{5/3}+1)^{5/3}+C$

13. $-\frac{1}{2(1-\cos 2\theta)}+C$ **15.** $-\frac{1}{4}\ln|3+4\cos t|+C$

17. $-\frac{1}{2}e^{\cos 2x}+C$ **19.** $-\frac{1}{3}\cos^3(e^{\theta})+C$

21. $\frac{2^{x-1}}{\ln 2}+C$ **23.** $\ln|\ln v|+C$

25. $\ln|2+\operatorname{arctg} x|+C$ **27.** $\arcsin 2x+C$

29. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3t}{4}+C$ **31.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C$

33. $\frac{1}{5}\operatorname{arcsec}\left|\frac{5x}{4}\right|+C$ **35.** $\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$

37. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y-2}{2}\right)+C$ **39.** $\operatorname{arcsec}|x-1|+C$

41. $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$ **43.** $\frac{2}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}-2\cos\frac{\theta}{2}+C$

45. $\frac{\operatorname{tg}^2(2t)}{4}-\frac{1}{2}\ln|\sec 2t|+C$

47. $-\frac{1}{2}\ln|\csc(2x)+\operatorname{ctg}(2x)|+C$

49. $\ln\sqrt{2}$ **51.** 2 **53.** $2\sqrt{2}$

55. $x-2\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$

57. $x+x^2+2\ln|2x-1|+C$

59. $\ln(y^2+4)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2}+C$

61. $-\sqrt{4-t^2}+2\arcsin\frac{t}{2}+C$

63. $x-\operatorname{tg} x+\sec x+C$

65. $-\frac{1}{3}\ln|\sec(5-3x)+\operatorname{tg}(5-3x)|+C$

67. $4\ln\left|\sin\frac{x}{4}\right|+C$

69. $-2\left(\frac{(\sqrt{1-x})^3}{3}-\frac{(\sqrt{1-x})^5}{5}\right)+C$

71. $\frac{1}{2}\left(z\sqrt{z^2+1}+\ln\left|z+\sqrt{z^2+1}\right|\right)+C$

73. $\ln\left|y+\sqrt{25+y^2}\right|+C$

75. $\frac{-\sqrt{1-x^2}}{x}+C$

77. $\frac{\arcsin x}{2}-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$

79. $\ln\left|\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right|+C$

81. $\sqrt{w^2-1}-\operatorname{arcsec} w+C$

83. $(x+1)(\ln(x+1))-(x+1)+C$

85. $x\operatorname{arctg} 3x-\frac{1}{6}\ln(1+9x^2)+C$

87. $(x+1)^2e^x-2(x+1)e^x+2e^x+C$

89. $\frac{2e^x\sin 2x}{5}+\frac{e^x\cos 2x}{5}+C$

91. $2\ln|x-2|-\ln|x-1|+C$

93. $\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C$

95. $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\cos\theta-1}{\cos\theta+2}\right|+C$

97. $4\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+4\operatorname{arctg} x+C$

99. $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{(v-2)^5(v+2)}{v^6}\right|+C$

101. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t-\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C$

103. $\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\ln|x-1|+C$

105. $\frac{x^2}{2}-\frac{9}{2}\ln|x+3|+\frac{3}{2}\ln|x+1|+C$

107. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$

109. $\ln|1-e^{-s}|+C$ **111.** $-\sqrt{16-y^2}+C$

113. $-\frac{1}{2}\ln|4-x^2|+C$ **115.** $\ln\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}+C$

117. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|+C$ **119.** $-\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{\cos^7 x}{7}+C$

121. $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C$ **123.** $\frac{\cos\theta}{2}-\frac{\cos 11\theta}{22}+C$

125. $4\sqrt{1-\cos(t/2)}+C$ **127.** legalább 16

129. $T=\pi$, $S=\pi$ **131.** $-3{,}9$°C

133. (a) 9,075 liter, (b) 8,349 l/100km

135. $\pi/2$ **137.** 6 **139.** $\ln 3$ **141.** 2

143. $\pi/6$ **145.** divergens

147. divergens **149.** konvergens

151. $\frac{2x^{3/2}}{3}-x+2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C$

153. $\ln\left|\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}}\right|-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2+C$

155. $\arcsin(x+1)+C$

157. $\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|+C$

159. $-2\operatorname{ctg}x-\ln|\csc x+\operatorname{ctg}x|+\csc x+C$

161. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3+v}{3-v}\right|+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{v}{3}+C$

163. $\frac{\theta\sin(2\theta+1)}{2}+\frac{\cos(2\theta+1)}{4}+C$

165. $\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$

167. $-\cos\left(2\sqrt{x}\right)+C$

169. $-\ln|\csc 2y+\operatorname{ctg}2y|+C$

171. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+C$

173. $-\sqrt{4-(r+2)^2}+C$

175. $\frac{1}{4}\sec^2\theta+C$

177. $\frac{\sqrt{2}}{2}+C$

179. $2\left(\frac{\left(\sqrt{2-x}\right)^3}{3}-2\sqrt{2-x}\right)+C$

181. $\operatorname{arctg}(y-1)+C$

183. $\frac{1}{3}\ln|\sec\theta^3|+C$

185. $\frac{1}{4}\ln|z|-\frac{1}{4z}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\ln(z^2+4)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{2}\right)+C$

187. $-\frac{1}{4}\sqrt{9-4t^2}+C$

189. $\ln|\sin\theta|-\frac{1}{2}\ln(1+\sin^2\theta)+C$

191. $\ln|\sec\sqrt{y}|+C$

193. $-\theta\ln\left|\frac{\theta+2}{\theta-2}\right|+C$

195. $x+C$

197. $-\frac{\cos x}{2}+C$

199. $\ln(1+e^t)+C$

201. $1/4$

203. $\ln|\ln\sin v|+C$

205. $\frac{2}{3}x^{3/2}+C$

207. $-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}(\cos 5t)+C$

209. $\frac{1}{3}\left(\frac{27^{3\theta+1}}{\ln 27}\right)+C$

211. $2\sqrt{r}-2\ln\left(1+\sqrt{r}\right)+C$

213. $\ln\left|\frac{y}{y+2}\right|+\frac{2}{y}-\frac{2}{y^2}+C$

215. $4\operatorname{arcsec}\frac{7m}{2}+C$

217. $\frac{\sqrt{8}-1}{6}$

219. $\frac{\pi}{2}(3b-a)+2$

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. $x(\arcsin x)^2+2(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}-2x+C$

3. $\frac{x^2\arcsin x}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}-\arcsin x}{4}+C$

5. $\frac{\ln|\sec 2\theta+\operatorname{tg}2\theta|+2\theta}{4}+C$

7. $\frac{1}{2}\left(\ln\left(t-\sqrt{1-t^2}\right)-\arcsin t\right)+C$

9. $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right|+\frac{1}{8}(\operatorname{arctg}(x+1)+\operatorname{arctg}(x-1))+C$

11. 0 **13.** $\ln 4-1$ **15.** 1 **17.** $32\pi/35$

19. 2π **21.** (a) π (b) $\pi(2e-5)$

23. (b) $\pi\left(\frac{8(\ln 2)^2}{3}-\frac{16(\ln 2)}{9}+\frac{16}{27}\right)$

25. $\left(\frac{e^2+1}{4},\ \frac{e-2}{2}\right)$

27. $\sqrt{1+e^2}-\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^2}}{e}+\frac{1}{e}\right)-\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

29. 6 **31.** $y=\sqrt{x},\quad 0\le x\le 4$

33. (b) 1 **37.** $a=\frac{1}{2},\quad -\frac{\ln 2}{4}$

39. $\frac{1}{2}<p\le 1$ **41.** $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C$

43. $\frac{\cos x\sin 3x-3\sin x\cos 3x}{8}+C$

45. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$

47. $x\ln(ax)-x+C$

9.fejezet

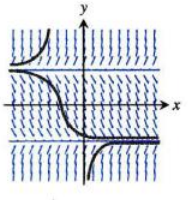
9.1. Iránymező és szétválasztható változójú differenciálegyenletek

9. $\frac{2}{3}y^{3/2}-x^{1/2}=C$ **11.** $e^y-e^x=C$

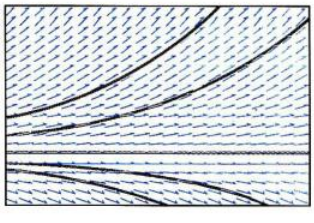
13. $-x+2\operatorname{tg}\sqrt{y}=C$ **15.** $e^{-y}+2e^{\sqrt{x}}=C$

17. $y=\sin(x^2+C)$ **19.** (d) **21.** (a)

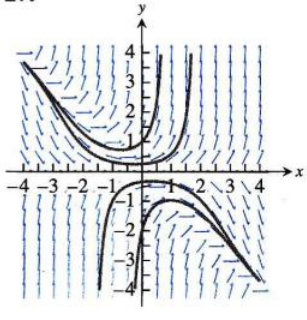
23.



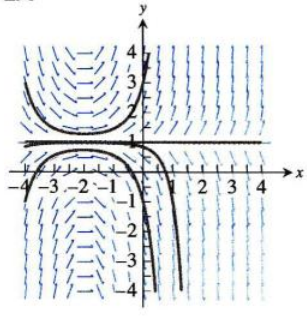
25.



27.



29.



9.2. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

1. $y = \frac{e^x + C}{x}, x > 0$ **3.** $y = \frac{C - \cos x}{x^3}, x > 0$

5. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}, x > 0$ **7.** $y = \frac{1}{2}xe^{x/2} + Ce^{x/2}$

9. $y = x(\ln x)^2 + Cx$

11. $s = \frac{t^3}{3(t-1)^4} - \frac{t}{(t-1)^4} + \frac{C}{(t-1)^4}$

13. $r = (\csc\theta)(\ln|\sec\theta| + C), 0 < \theta < \pi/2$

15. $y = \frac{3}{2} - q\frac{1}{2}e^{-2t}$ **17.** $y = -\frac{1}{\theta}\cos\theta + \frac{\pi}{2\theta}$

19. $y = 6e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x+1}$ **21.** $y = y_0e^{kt}$

23. **(b)** helyes, **(a)** nem.

25. **(a)** 5kg/perc **(b)** $400 + 4t$liter **(c)** $\frac{16y}{400+4t}$
(d) $y' = 5 - \frac{4y}{100+t}, y(0) = 25; y = 100t - \frac{75\cdot 100^4}{(100+t)^4}$
(e) $y(25) = 94{,}28$

27. 27,78 perc **29.** $t = \frac{L}{R}\ln 2$

31. **(a)** $i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-3} \approx 0{,}95\frac{V}{R}$ amper **(b)** 86%

33. $y = \frac{1}{1+Ce^{-x}}$ **35.** $y^3 = 1 + Cx^{-3}$

9.3. Euler-módszer

1. $y_{pontos} = \frac{x}{2} - \frac{4}{x}, y_1 = -0{,}25, y_2 = 0{,}3, y_3 = 0{,}75$

3. $y_{pontos} = 3e^{x(x+2)}, y_1 = 4{,}2, y_2 = 6{,}216, y_3 = 9{,}697$

5. $y_{pontos} = e^{x^2} + 1, y_1 = 2{,}0, y_2 = 2{,}0202, y_3 = 2{,}0618$

7. $y \approx 2{,}48832$, a pontos érték e.

9. $y \approx -0{,}2272$, a pontos érték $1/(1-2\sqrt{5}) \approx -0{,}2880$

11.

x	z	y-Runge–Kutta	y-pontos	Hiba
0	1	3	3	0
0,2	4,2	4,608	4,658122	0,050122
0,4	6,81984	7,623475	7,835089	0,211614
0,6	11,89262	13,56369	14,27646	0,712777

13. Az Euler-módszer eredménye $y \approx 3{,}45835$; a pontos megoldás $y = 1 + e \approx 3{,}71828$.

15. $y \approx 1{,}5000$; a pontos megoldás 1,5275.

17. **(a)** $y = \frac{-1}{x^2-2x+2}, y(3) = -0{,}2$

(b) $-0{,}1851$; hiba $\approx 0{,}0149$

(c) $-0{,}1929$; hiba $\approx 0{,}0071$

(d) $-0{,}1965$; hiba $\approx 0{,}0035$

19. A pontos megoldás $y = \frac{1}{x^2-2x+2}$, így $y(3) = -0{,}2$. A közelítéshez legyen $z_n = y_{n-1} + 2y_{n-1}(x_{n-1} - 1)dx$, és $y_n = y_{n-1} + (y_{n-1}^2(x_{n-1} - 1) + z_n^2(x_n^2 - 1))dx$, a kezdeti feltételek: $x_0 = 2$, $y_0 = -\frac{1}{2}$. Használjunk kalkulátort vagy számítógépet az (a)–(d) pontok megválaszolásához.

(a) $-0{,}2024$; hiba $\approx 0{,}0024$

(b) $-0{,}2005$; hiba $\approx 0{,}0005$

(c) $-0{,}2001$; hiba $\approx 0{,}0001$

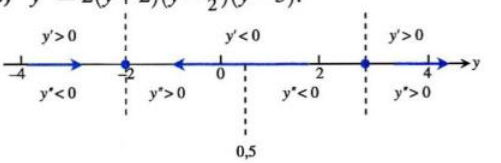
(d) Minden esetben, ha a lépésköz felére csökken, a hiba körülbelül negyedelődik.

9.4. Autonóm differenciálegyenletek grafikus megoldása

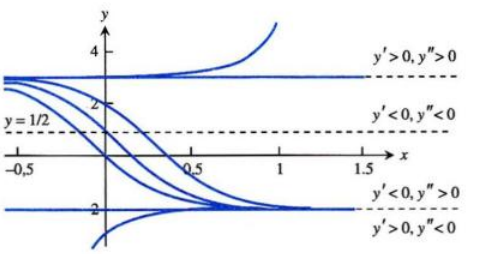
1. $y' = (y+2)(y-3)$

(a) $y = -2$ stabil egyensúlyi érték, $y = 3$ instabil egyensúlyi érték,

(b) $y'' = 2(y+2)(y-\frac{1}{2})(y-3)$.



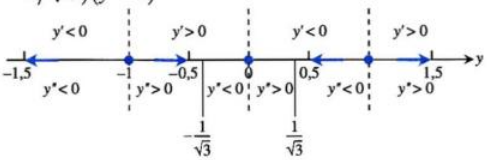
(c)



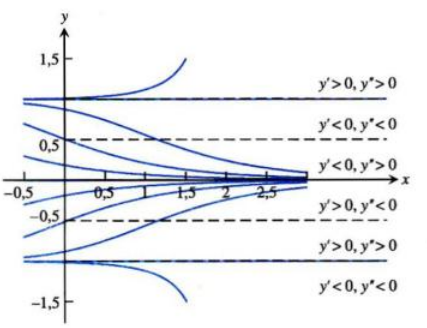
3. $y' = y^3 - y = (y+1)y(y-1)$

(a) $y = -1$ és $y = 1$ instabil egyensúlyi értékek, $y = 0$ pedig stabil egyensúlyi érték.

(b) $y'' = (3y^2 - 1)y' = 3(y + 1)(y + 1/\sqrt{3})y(y - -1/\sqrt{3})(y-1)$



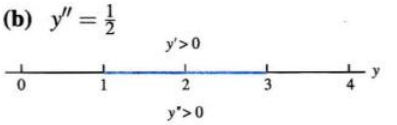
(c)



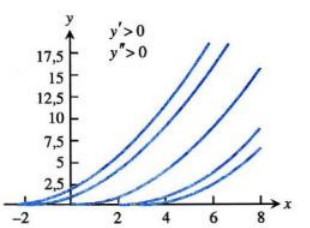
5. $y' = \sqrt{y}, y > 0$

(a) Nincs egyensúlyi érték.

(b) $y'' = \frac{1}{2}$



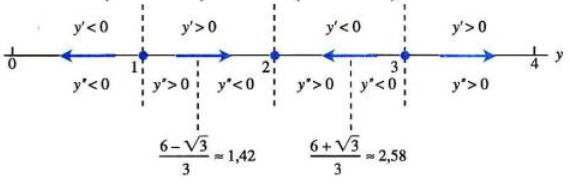
(c)



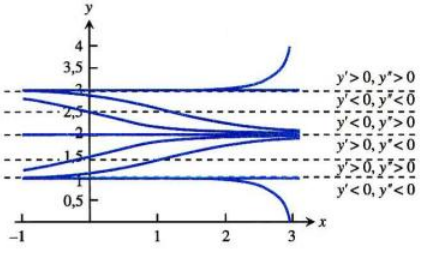
7. $y' = (y-1)(y-2)(y-3)$

(a) $y = 1$ és $y = 3$ instabil egyensúlyi értékek, $y = 2$ stabil egyensúlyi érték.

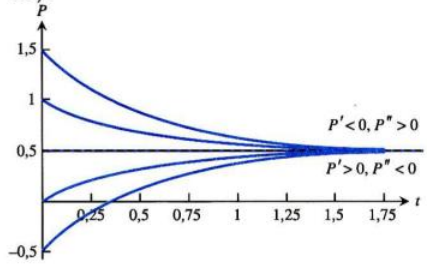
(b) $y'' = (3y^2 - 12y + 11)(y-1)(y-2)(y-3) =$
$= (y-1)\left(y - \frac{6-\sqrt{3}}{3}\right)(y-2)\left(y - \frac{6+\sqrt{3}}{3}\right)(y-3)$



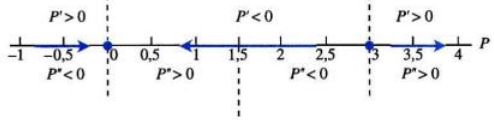
(c)

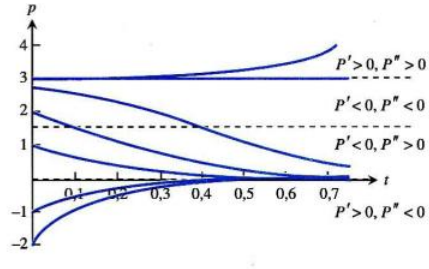


9. $\frac{dP}{dt} = 1 - 2P$ stabil egyensúlyi értéke $P = \frac{1}{2}$; $\frac{d^2P}{dt^2} = -2\frac{dP}{dt} =$
$= -2(1-2P)$.

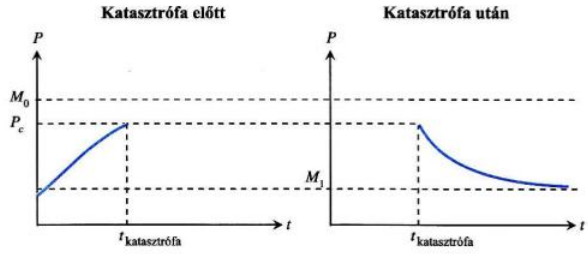


11. $\frac{dP}{dt} = 2P(P-3)$, ennek stabil egyensúlyi értéke $P = 0$ és instabil egyensúlyi értéke $P = 3$; $\frac{d^2P}{dt^2} = 2(2P-3)\frac{dP}{dt} = 4P(2P-$
$-3)(P-3)$.



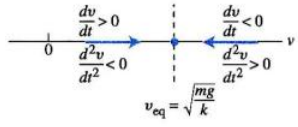


13. A katasztrófa előtt a populáció logisztikus növekedést mutat, és $P(t)$ M_0 felé növekszik, ami a stabil egyensúlyi érték. A katasztrófa után a populáció logisztikusan csökken, és $P(t)$ M_1 felé csökken, ami az új stabil egyensúlyi érték.

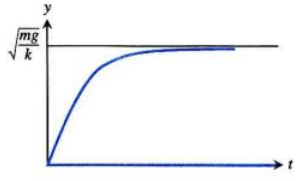


15. $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2$, $g, k, m > 0$ és $v(t) \geq 0$
Egyensúlyi érték: $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2 = 0$, azaz $v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$
Konkavitás: $\frac{d^2}{dt^2}v = -2\left(\frac{k}{m}v\right)\left(g - \frac{k}{m}v^2\right)$

(a)



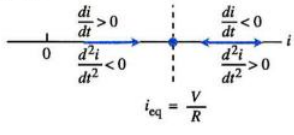
(b)



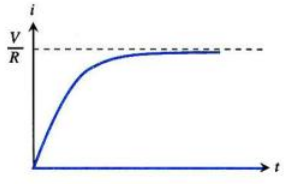
(c) $v_{\text{végső}} = \sqrt{\frac{800}{0{,}27}} \approx 54{,}43\text{m/s} \approx 196\text{km/h}$

17. $F = F_p - F_r$; $ma = 25 - 5|v|$, $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}(25 - 5|v|)$. A sebesség maximális, amikor $\frac{dv}{dt} = 0$, ill. $v = 5$.

19. A fázisegyenes:



Ha a kapcsolót $t = 0$-nál zárjuk, akkor $i(0) = 0$, és a megoldás alakja:



Amint $t \to \infty$, $i(t) \to i_{\text{állandósult érték}} = \frac{V}{R}$.

9.5. Elsőrendű differenciálegyenletek alkalmazásai

1. **(a)** 168,5 m **(b)** 41,13 s

3. $s(t) = 4{,}91(1 - e^{-(22{,}36/39{,}92)t})$

5. **(a)** $P(t) = \frac{150}{1+24e^{-0{,}225t}}$

(b) Kb. 17,21 hét; Kb. 21,28 hét.

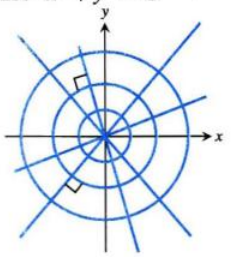
7. **(a)** $y(t) = \frac{8\times10^7}{1+4e^{-0{,}71t}}$, így $y(1) \approx 2{,}69671 \times 10^7\text{kg}$

(b) $t \approx 1{,}95253$ év.

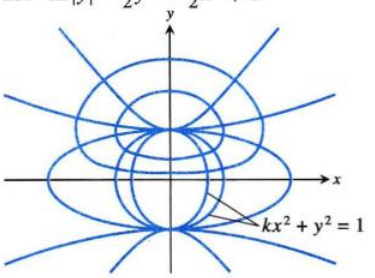
9. **(a)** $y = 2e^t - 1$ **(b)** $y(t) = \frac{400}{1+199e^{-200t}}$

11. **(a)** $P(t) = \frac{P_0}{1-kP_0t}$ **(b)** Függőleges aszimptota $t = \frac{1}{kP_0}$

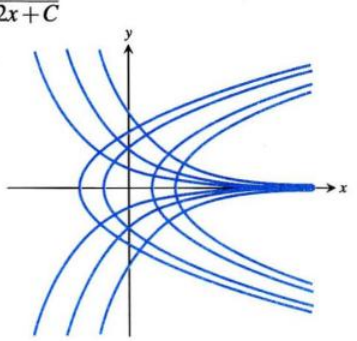
13. $x^2 + y^2 = C$



15. $\ln|y| - \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$



17. $y = \pm\sqrt{2x+C}$



Gyakorló feladatok

1. $y = \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x+C}{2}\right)\right)^2$

3. $y^2 = \arcsin(2\operatorname{tg}x + C)$

5. $y = -\ln\left(C - \frac{2}{5}(x-2)^{5/2} - \frac{4}{3}(x-2)^{3/2}\right)$

7. $\operatorname{tg}y = -x\sin x - \cos x + C$

9. $(y+1)e^{-y} = -\ln|x| + C$

11. $y = C\frac{x-1}{x}$

13. $y = \frac{x^4}{4}e^{x/2} + Ce^{x/2}$

15. $y = \frac{x^2-2x+C}{2x^2}$

17. $y = \frac{e^{-x}+C}{1+e^x}$

19. $xy + y^3 = C$

21. $y = -2 + \ln(2 - e^{-x})$

23. $y = \frac{2x^3+3x^2+6}{6(x+1)^2}$

25. $y = \frac{1}{3}(1 - 4e^{-x^2})$

27. $y = 4x - 4\sqrt{x} + 1$

29. $y = e^x(3x^3 - 3x^2)$

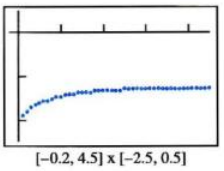
31.

x	y
0	0
0,1	0,1000
0,2	0,2095
0,3	0,3285
0,4	0,4568
0,5	0,5946
0,6	0,7418
0,7	0,8986
0,8	1,0649
0,9	1,2411
1,0	1,4273

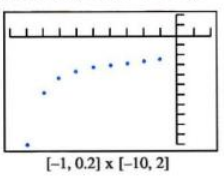
x	y
1,1	1,6241
1,2	1,8319
1,3	2,0513
1,4	2,2832
1,5	2,5285
1,6	2,7884
1,7	3,0643
1,8	3,3579
1,9	3,6709
2,0	4,0057

33. $y(3) \approx 0{,}9063$

35. **(a)**



(b) Megjegyezzük, hogy egy kis intervallumot választunk x értékeire, mert y értékei nagyon gyorsan csökkennek, és a kalkulátorunk nem tudja kezelni ezeket az értékeket $x \le -1$ esetén. (Azért, mert az analitikus megoldás $y = -2 + \ln(2 - e^{-x})$, aminek függőleges aszimptotája van $x = -\ln 2 \approx -0{,}69$. Tehát az Euler approximáció félrevezető, hibás értékeket ad, ha $x < \ln 2$).

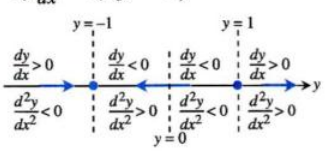


37. $y_{pontos} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$; $y(2) \approx 0{,}4$; a pontos érték $\frac{1}{2}$

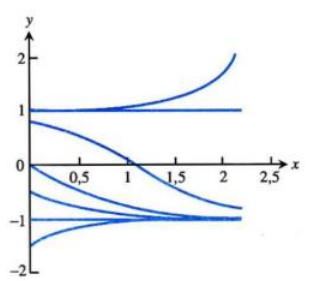
39. $y_{pontos} = -e^{(x^2-1)}/2$; $y(2) \approx -3{,}4192$; a pontos érték $-e^{3/2} \approx -4{,}4817$.

41. **(a)** $y = -1$ stabil, és $y = 1$ instabil.

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y\frac{dy}{dx} = 2y(y^2 - 1)$



(c)



Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. **(a)** $y = c + (y_0 - c)e^{-k(A/V)t}$

(b) Az egyensúlyi érték megoldás $y_\infty = c$.

3. 0,232%

Integráltáblázatok

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C,\ a \neq 1,\ a > 0$

3. $\int \cos u\,du = \sin u + C$

4. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

5. $\int (ax+b)^n\,dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C,\ n \neq -1$

6. $\int (ax+b)^{-1}\,dx = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

7. $\int x(ax+b)^n\,dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a^2}\left[\dfrac{ax+b}{n+2} - \dfrac{b}{n+1}\right] + C,\ n \neq -1,\ -2$

8. $\int x(ax+b)^{-1}\,dx = \dfrac{x}{a} - \dfrac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$

9. $\int x(ax+b)^{-2}\,dx = \dfrac{1}{a^2}\left[\ln|ax+b| + \dfrac{b}{ax+b}\right] + C$

10. $\int \dfrac{dx}{x(ax+b)} = \dfrac{1}{b}\ln\left|\dfrac{x}{ax+b}\right| + C$

11. $\int (\sqrt{ax+b})^n\,dx = \dfrac{2}{a}\dfrac{(\sqrt{ax+b})^{n+2}}{n+2} + C,\ n \neq -2$

12. $\int \dfrac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

13. **(a)** $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax-b}} = \dfrac{2}{\sqrt{b}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{ax-b}{b}} + C$ **(b)** $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C$

14. $\int \dfrac{\sqrt{ax+b}}{x^2}dx = -\dfrac{\sqrt{ax+b}}{x} + \dfrac{a}{2}\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$

15. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\dfrac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \dfrac{a}{2b}\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$

16. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$

17. $\int \dfrac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \dfrac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \dfrac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$

18. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right| + C$

19. $\int \dfrac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \dfrac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \dfrac{1}{4a^3}\ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right| + C$

20. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{arsh}\dfrac{x}{a} + C = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

21. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

22. $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \dfrac{x}{8}(a^2+2x^2)\sqrt{a^2+x^2} - \dfrac{a^4}{8}\ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

23. $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2+x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C$

24. $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) - \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + C$

25. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = -\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + C$

26. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C$

27. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x} + C$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

29. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

30. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{8}x\sqrt{a^2-x^2}(a^2-2x^2) + C$

31. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$

32. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\arcsin\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C$

33. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C$

34. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$

35. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C$

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{arch}\frac{x}{a} + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

37. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

38. $\int \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n dx = \frac{x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n}{n+1} - \frac{na^2}{n+1}\int \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2} dx,\ n \neq -1$

39. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n} = \frac{x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{2-n}}{(2-n)a^2} - \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2}},\ n \neq 2$

40. $\int x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n dx = \frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n+2}}{n+2} + C,\ n \neq -2$

41. $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

42. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\operatorname{arcsec}\left|\frac{x}{a}\right| + C$

43. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + C$

44. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + C$

45. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left|\frac{x}{a}\right| + C = \frac{1}{a}\arccos\left|\frac{a}{x}\right| + C$

46. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C$

47. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

48. $\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

49. $\int \left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^n dx = \frac{(x-a)\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^n}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int \left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^{n-2} dx$

50. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^n} = \frac{(x-a)\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^{2-n}}{(n-2)a^2} + \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^{n-2}}$

51. $\int x\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{(x+a)(2x-3a)\sqrt{2ax-x^2}}{6} + \frac{a^3}{2}\arcsin\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

52. $\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{2ax-x^2} + a\arcsin\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

53. $\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^2}\,dx = -2\sqrt{\frac{2a-x}{x}} - \arcsin\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

54. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = a\arcsin\left(\frac{x-a}{a}\right) - \sqrt{2ax-x^2} + C$

55. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}} + C$

56. $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

57. $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$

58. $\int \sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C$

59. $\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C$

60. $\int \sin^n ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\,dx$

61. $\int \cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1} ax\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\,dx$

62. $\int \sin ax\cos bx\,dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C,\ a^2 \neq b^2$

63. $\int \sin ax\sin bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C,\ a^2 \neq b^2$

64. $\int \cos ax\cos bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C,\ a^2 \neq b^2$

65. $\int \sin ax\cos ax\,dx = -\frac{\cos 2ax}{4a} + C$

66. $\int \sin^n ax\cos ax\,dx = \frac{\sin^{n+1} ax}{(n+1)a} + C,\ n \neq -1$

67. $\int \frac{\cos ax}{\sin ax}\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax| + C$

68. $\int \cos^n ax\sin ax\,dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n+1)a} + C,\ n \neq -1$

69. $\int \frac{\sin ax}{\cos ax}\,dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| + C$

70. $\int \sin^n ax\cos^m ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax\cos^{m+1} ax}{a(m+n)} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2} ax\cos^m ax\,dx,\ n \neq -m$ (visszavezethető $\sin^n ax$-re)

71. $\int \sin^n ax\cos^m ax\,dx = -\frac{\sin^{n+1} ax\cos^{m-1} ax}{a(m+n)} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^n ax\cos^{m-2} ax\,dx,\ m \neq -n$ (visszavezethető $\cos^m ax$-re)

72. $\int \frac{dx}{b+c\sin ax} = \frac{-2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)\right] + C,\quad b^2 > c^2$

73. $\int \frac{dx}{b+c\sin ax} = \frac{-1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\left|\frac{c+b\sin ax+\sqrt{c^2-b^2}\cos ax}{b+c\sin ax}\right| + C,\ b^2 < c^2$

74. $\int \frac{dx}{1+\sin ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)+C$

75. $\int \frac{dx}{1-\sin ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)+C$

76. $\int \frac{dx}{b+c\cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right]+C,\ b^2>c^2$

77. $\int \frac{dx}{b+c\cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\left|\frac{c+b\cos ax+\sqrt{c^2-b^2}\sin ax}{b+c\cos ax}\right|+C,\ b^2<c^2$

78. $\int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}+C$

79. $\int \frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}+C$

80. $\int x\sin ax\,dx = \frac{1}{a^2}\sin ax-\frac{x}{a}\cos ax+C$

81. $\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}\cos ax+\frac{x}{a}\sin ax+C$

82. $\int x^n\sin ax\,dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax+\frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx$

83. $\int x^n\cos ax\,dx = \frac{x^n}{a}\sin ax-\frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,dx$

84. $\int \operatorname{tg} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax|+C$

85. $\int \operatorname{ctg} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax|+C$

86. $\int \operatorname{tg}^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax-x+C$

87. $\int \operatorname{ctg}^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax-x+C$

88. $\int \operatorname{tg}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} ax}{a(n-1)}-\int \operatorname{tg}^{n-2} ax\,dx,\ n\neq 1$

89. $\int \operatorname{ctg}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} ax}{a(n-1)}-\int \operatorname{ctg}^{n-2} ax\,dx,\ n\neq 1$

90. $\int \sec ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax+\operatorname{tg} ax|+C$

91. $\int \csc ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln|\csc ax+\operatorname{ctg} ax|+C$

92. $\int \sec^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax+C$

93. $\int \csc^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax+C$

94. $\int \sec^n ax\,dx = \frac{\sec^{n-2} ax\operatorname{tg} ax}{a(n-1)}+\frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} ax\,dx,\ n\neq 1$

95. $\int \csc^n ax\,dx = -\frac{\csc^{n-2}\operatorname{ctg} ax}{a(n-1)}+\frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} ax\,dx,\ n\neq 1$

96. $\int \sec^n ax\operatorname{tg} ax\,dx = \frac{\sec^n ax}{na}+C,\ n\neq 0$

97. $\int \csc^n ax\operatorname{ctg} ax\,dx = -\frac{\csc^n ax}{na}+C,\ n\neq 0$

98. $\int \arcsin ax\,dx = x\arcsin ax+\frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2}+C$

99. $\int \arccos ax\,dx = x\arccos ax-\frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2}+C$

100. $\int \operatorname{arctg} ax\,dx = x\operatorname{arctg} ax-\frac{1}{2a}\ln(1+a^2x^2)+C$

101. $\int x^n\arcsin ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\arcsin ax-\frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{1-a^2x^2}},\ n\neq -1$

102. $\int x^n \arccos ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\arccos ax + \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{1-a^2x^2}},\ n \neq -1$

103. $\int x^n \operatorname{arctg} ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arctg} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}dx}{1+a^2x^2},\ n \neq -1$

104. $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

105. $\int b^{ax}dx = \frac{1}{a}\frac{b^{ax}}{\ln b} + C,\ b > 0,\ b \neq 1$

106. $\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C$

107. $\int x^n e^{ax}dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$

108. $\int x^n b^{ax}dx = \frac{x^n b^{ax}}{a\ln b} - \frac{n}{a\ln b}\int x^{n-1}b^{ax}dx,\ b > 0,\ b \neq 1$

109. $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$

110. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C$

111. $\int \ln ax\,dx = x\ln ax - x + C$

112. $\int x^n(\ln ax)^m dx = \frac{x^{n+1}(\ln ax)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int x^n(\ln ax)^{m-1}dx,\ n \neq -1$

113. $\int x^{-1}(\ln ax)^m dx = \frac{(\ln ax)^{m+1}}{m+1} + C,\ m \neq -1$

114. $\int \frac{dx}{x\ln ax} = \ln|\ln ax| + C$

115. $\int \operatorname{sh} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{ch} ax + C$

116. $\int \operatorname{ch} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sh} ax + C$

117. $\int \operatorname{sh}^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{sh} 2ax}{4a} - \frac{x}{2} + C$

118. $\int \operatorname{ch}^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{sh} 2ax}{4a} + \frac{x}{2} + C$

119. $\int \operatorname{sh}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{sh}^{n-1} ax \operatorname{ch} ax}{na} - \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sh}^{n-2} ax\,dx,\ n \neq 0$

120. $\int \operatorname{ch}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{ch}^{n-1} ax \operatorname{sh} ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{ch}^{n-2} ax\,dx,\ n \neq 0$

121. $\int x\operatorname{sh} ax\,dx = \frac{x}{a}\operatorname{ch} ax - \frac{1}{a^2}\operatorname{sh} ax + C$

122. $\int x\operatorname{ch} ax\,dx = \frac{x}{a}\operatorname{sh} ax - \frac{1}{a^2}\operatorname{ch} ax + C$

123. $\int x^n \operatorname{sh} ax\,dx = \frac{x^n}{a}\operatorname{ch} ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\operatorname{ch} ax\,dx$

124. $\int x^n \operatorname{ch} ax\,dx = \frac{x^n}{a}\operatorname{sh} ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\operatorname{sh} ax\,dx$

125. $\int \operatorname{th} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\operatorname{ch} ax) + C$

126. $\int \operatorname{cth} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{sh} ax| + C$

127. $\int \operatorname{th}^2 ax\,dx = x - \frac{1}{a}\operatorname{th} ax + C$

128. $\int \operatorname{cth}^2 ax\,dx = x - \frac{1}{a}\operatorname{cth} ax + C$

129. $\int \operatorname{th}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{th}^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \operatorname{th}^{n-2} ax\,dx,\ n \neq 1$

130. $\int \operatorname{cth}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{cth}^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \operatorname{cth}^{n-2} ax\,dx,\ n \neq 1$

131. $\int \operatorname{sech} ax\,dx = \frac{1}{a}\arcsin(\operatorname{th} ax) + C$

132. $\int \operatorname{csch} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{th}\frac{ax}{2}\right| + C$

133. $\int \operatorname{sech}^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{th} ax + C$

134. $\int \operatorname{csch}^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}\operatorname{cth} ax + C$

135. $\int \operatorname{sech}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} ax \operatorname{th} ax}{(n-1)a} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{sech}^{n-2} ax\,dx,\ n \neq 1$

136. $\int \operatorname{csch}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{csch}^{n-2} ax \operatorname{cth} ax}{(n-1)a} - \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{csch}^{n-2} ax\,dx,\ n \neq 1$

137. $\int \operatorname{sech}^n ax \operatorname{th} ax\,dx = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na} + C,\ n \neq 0$

138. $\int \operatorname{csch}^n ax \operatorname{cth} ax\,dx = -\frac{\operatorname{csch}^n ax}{na} + C,\ n \neq 0$

139. $\int e^{ax} \operatorname{sh} bx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} - \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C,\ a^2 \neq b^2$

140. $\int e^{ax} \operatorname{ch} bx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} + \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C,\ a^2 \neq b^2$

141. $\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = \Gamma(n) = (n-1)!,\ n > 0$

142. $\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\ a > 0$

143. $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{ha } n \geq 2 \text{ páros egész szám} \\ \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n}, & \text{ha } n \geq 3 \text{ páratlan egész szám} \end{cases}$

Tárgymutató

A, Á
a alapú logaritmus 167
algebrai függvény 139, 158
algebrai szám 158
alsó közelítő összeg 8, 26
area koszinusz hiperbolikusz 203
area szinusz hiperbolikusz 203
arkuszkoszinusz 187
arkuszkotangens 188
arkuszszinusz 187
arkusztangens 188
átlagérték 12, 31
átlagos élettartam 178
autonóm differenciálegyenlet 319

B
Bernoulli differenciálegyenlet 313
bináris keresés 183

C
Cavalieri elv 75

Cs
csillaggörbe 95

D
decibel-skála 169
differenciálegyenlet
  autonóm 319
  Bernoulli 313
  elsőrendű 299
  elsőrendű lineáris 306
  iránymező 301
  partikuláris megoldás 300
  szeparábilis 301
  szétválasztható változójú 301

E, É
egyenletesen folytonos 35
egyensúlyi állapot 309
egyensúlyi érték 319
egyensúlyi helyzet 318, 319
  instabil 320
  stabil 320
elsőrendű differenciálegyenlet 299
e szám 149
Euler-módszer 313
  javított 316
exponenciális függvény 157
  deriváltja 160

F
fázisegyenes 318, 319
felezési idő 174
felosztás 21
felosztás normája 22
felső közelítő összeg 8, 26
folytonos jóváírás 174
forgástest 76
forgástest felszíne 112
forgástest térfogata 76, 88
forgatás 79
forgatónyomaték 100
földrengés 168
függvény
  algebrai 139
  injektív 139
  inverze 140
  transzcendens 139

G
gamma-függvény 297
görbe alatti terület 30

H
hangerő skála 169
hányadosteszt 286
határozott integrál 24, 25
  folytonos függvényé 26
Heaviside-féle letakarásos módszer 237
héjmódszer 86
hengerhéj-módszer 86
Hermite, Charles 158
hiba
  Simpson-formula 270
  trapézformula 266
hidrosztatikai nyomás 128
hiperbolikusz
  koszinusz 200
  szinusz 200
  tangens 200

I, Í
improprius integrál 278, 281
injektív függvény 139
instabil egyensúlyi helyzet 320
integrál
  határozott 24, 25
  improprius 278, 281
  Riemann 24
  változó felső határ 38
integrálás
  parciális 224
  táblázatos 228
integrálközelítő összeg 22
integráló tényező 307
integrálszámítás középértéktétele 36
inverz függvény 140
iránymező 301
ívhossz 96
  paraméteres görbe 94

K
kamat 173
keresés
  bináris 183
  szekvenciális 182
keresztmetszet 73
kezdetiérték-probléma 300
kezdeti feltétel 300
kis ordó 181
korong-módszer 76
koszinusz hiperbolikusz 200
közelítő összeg
  alsó 8, 26
  felső 8, 26
középértéktétel határozott integrálokra 36

L
Lagrange-féle középértéktétel 141
láncgörbe 209
lépésköz 263
letakarásos módszer 237
lineáris elsőrendű differenciálegyenlet 306
logaritmus
  természetes 149
logaritmusfüggvény
  a alapú 167
logaritmusos deriválás 154
logisztikus növekedési modell 323

M
megoldásgörbe 301

metszet 73
munka 121, 122

N
nagy ordó 181
nem korlátos integrandus 287
Newton-féle hűlési törvény 175
Newton-Leibniz formula 41
Newton-Leibniz tétel 1. rész 38
Newton-Leibniz tétel 2. rész 41
norma 22

Ny
nyomás 128
nyugalmi érték 319
nyugalmi helyzet 319

O, Ó
ordó 181
ortogonális trajektória 329

Ö, Ő
összehasonlító kritérium 285

P
Papposz tétele 117
paraméteres görbe 93
parciális integrálás 224
parciális törtekre bontás 232
partikuláris megoldás 300
pH-érték 169
populációnövekedés 172

R
radioaktív bomlás 174
redukciós formula 255
relatív növekedés 179
Richter-skála 168
Riemann-integrál 24
Riemann összeg 22
rugóállandó 122
Runge–Kutta módszer 316

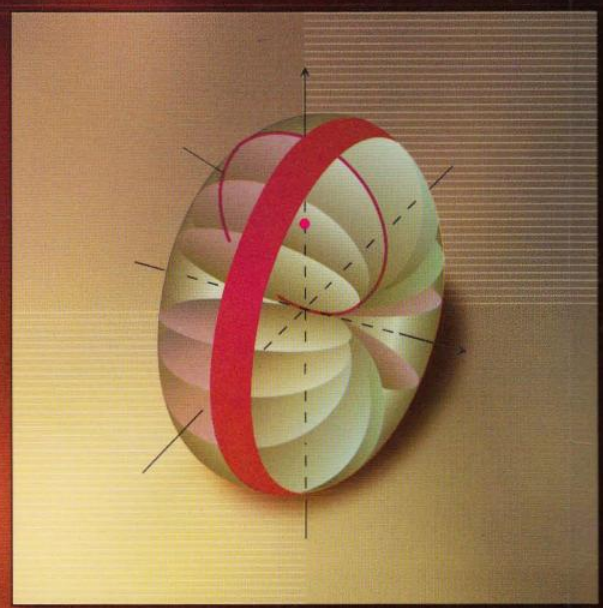
S
sima görbe 93
Simpson-formula 269
Simpson-formula hibája 270
stabil egyensúlyi helyzet 320
Stirling-formula 297
súlypont 108
sűrűség 102

Sz
szekvenciális keresés 182
szeparábilis differenciálegyenlet 301
szétválasztható változójú differenciálegyenlet 301
szinusz hiperbolikusz 200
szumma jel 17

T
táblázatos integrálás 228
tangens hiperbolikusz 200
téglányösszeg 22
tehetetlenségi nyomaték 101
térfogat 75
forgástesté 76, 88
természetes logaritmus 148
tórusz 117, 118
tömegközéppont 101, 104
töröttvonal 93
traktrix 208
transzcendens függvény 139
transzcendens szám 158
trapézformula 264
trapézformula hibája 266

A Thomas-féle Kalkulus a mérnökök matematikai oktatásában világszerte fogalommá vált. Az eredeti, 15 fejezetből álló terjedelmes tankönyv központi témája a differenciál- és az integrálszámítás, célja pedig, hogy az olvasót bevezesse az analízis e két alapvető eszközének legfontosabb alkalmazásaiba, a kúpszeletek, a véges sorok és sorozatok, a vektorszámítás, a vektorfüggvények, a parciális deriváltak és a többszörös integrálok elméletébe. A magyar kiadás 3 kötetben jelenik meg.

Az Olvasó most a második kötetet tartja a kezében. Mivel a fejezetek folyamatos számozását a három kötetben végig fenntartjuk, a 2. kötet az 5. fejezettel kezdődik. Ebben a fejezetben a határozott integrál fogalmával és a Newton–Leibniz-tétellel ismerkedhet meg az olvasó. A 6. fejezet a határozott integrál tipikus alkalmazásait tárgyalja, a terület- és térfogatszámítást, továbbá egyes fizikai alkalmazásokat. A 7. fejezet témája a transzcendens függvények. A következő két fejezet ismét az integrál gyakorlati oldalához tér vissza. A 8. fejezetben a különféle integrálási technikákkal ismerkedhet meg az olvasó, míg a 9. fejezetben az integrál kevésbé triviális alkalmazásairól: a differenciálegyenletek néhány típusáról esik szó. A kötet egyik nagy erénye, hogy rendkívül nagy számban tartalmaz kidolgozott példákat, illetve különböző szintű gyakorlófeladatokat, így egységes komplex tankönyvként és példatárként használható.



A Thomas-féle Kalkulust első lépcsőben (hosszas és alapos mérlegelést követően) a BME választotta a BSc-képzés alaptankönyvének. Ez a nagyszabású vállalkozás lehetőséget teremt más egyetemek és főiskolák számára, hogy olyan tankönyvsorozatra tervezzék a BSc-szintű analízistanításukat, amely mind hazai, mind világviszonylatban konvertálható tudást ad a hallgatóknak. A Thomas-féle Kalkulus magyar kiadását és használatát éppen ez indokolja. Számtalan kiváló magyar nyelvű analízistankönyv létezik, de a Thomas-féle Kalkulussal egyik sem vetekedhet ismertség és elfogadottság tekintetében.

Az 1. kötet már kapható, a 2. kötetet hamarosan követi a 3. kötet is.

Az eredeti művet George B. Thomas, a Massachusetts Institute of Technology néhai professzora írta a differenciál- és integrálszámítás oktatására szolgáló tankönyvként.

TYPOTEX

3500 Ft

ISBN 963-9664-27-8

9 789639 664272