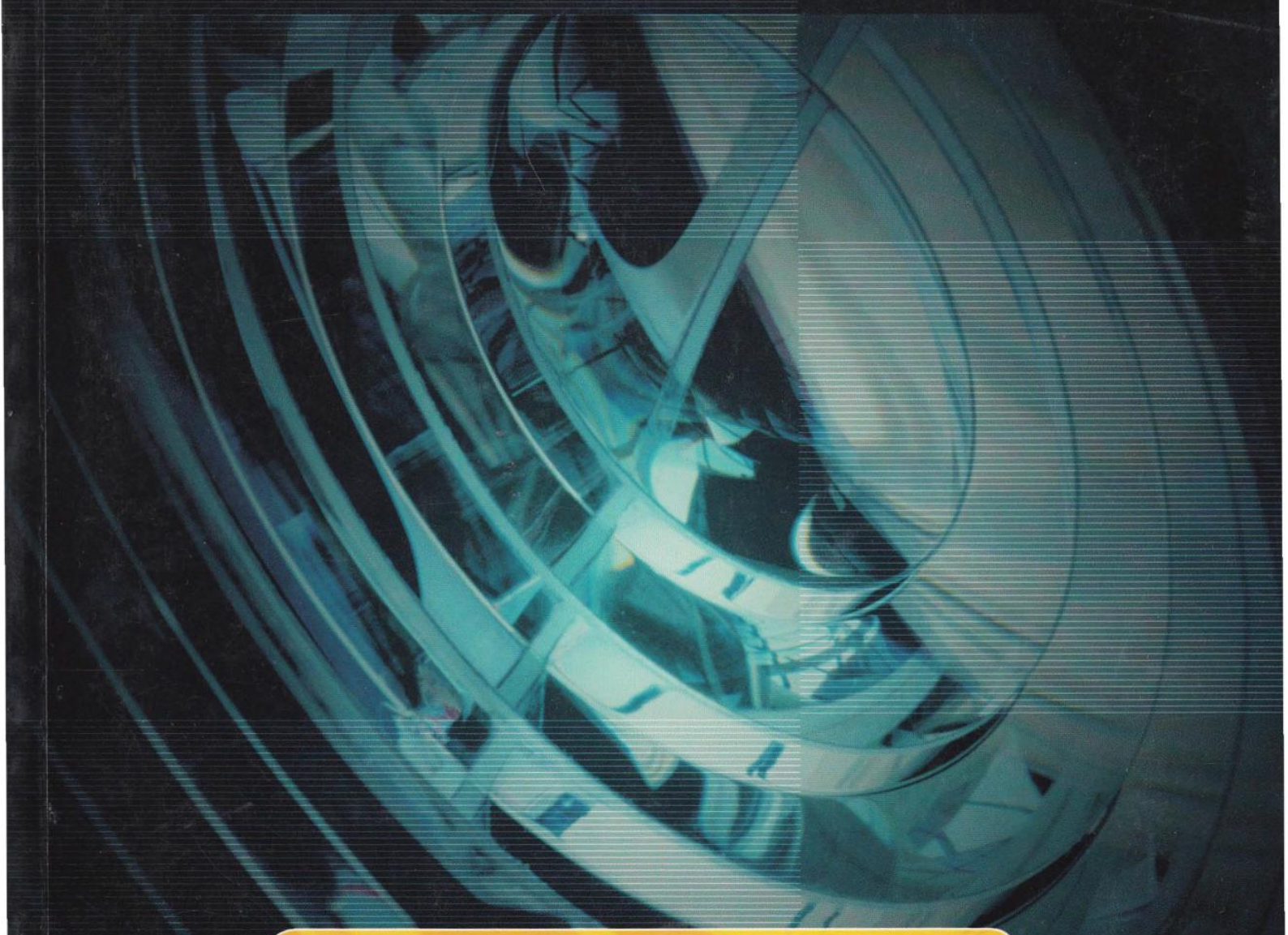
George B. Thomas
Maurice D. Weir
Joel Hass
Frank R. Giordano



Thomas-féle KALKULUS I.

Második kiadás – javítási jegyzékkel kiegészítve

TYPOTEX

Thomas-féle

Kalkulus

I. kötet

THOMAS-FÉLE
KALKULUS

I. kötet

Második kiadás
javítási jegyzékkel kiegészítve

Az eredeti művet készítette
George B. Thomas, Jr.
Massachusetts Institute of Technology

Átdolgozták

Maurice D. Weir
Naval Postgraduate School

Joel Hass
University of California, Davis

Frank R. Giordano
Naval Postgraduate School

A magyar kiadás főszerkesztője

Szász Domokos
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem



Budapest, 2008

Az eredeti mű címe Thomas' Calculus, 11th Edition.

Authorized translation from the English Language edition, entitled THOMAS' Calculus, 11th Edition, ISBN 0321185587, by Thomas, George B.; Weir, Maurice D.; and Giordano, Frank R., published by Pearson Education, Inc, publishing as Addison-Wesley,
Copyright © 2005 Pearson Education, Inc. All rights reserved.
Hungarian translation © Csaba Ferenc; Gerner József; Typotex, 2006

A könyv első kiadása a Korszerű Mérnökért Alapítvány és a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Rektori Hivatalának támogatásával, illetve az Oktatási Minisztérium által kiírt Felsőoktatási Tankönyv- és Szakkönyv-támogatási Pályázat keretében jelent meg.

Szakmailag ellenőrizte Horváth Miklós, Moson Péter, Nagyné Szilvási Márta, Serény György és Szabados Tamás

ISBN 978 963 279 011 4

Témakör: *matematikai analízis*

Kedves Olvasó!

Önre gondoltunk, amikor a könyv előkészítésén munkálkodtunk. Kapcsolatunkat szorosabbra fűzhetjük, ha belép a *TypoKlub*ba, ahonnan értesülhet új kiadványainkról, akcióinkról, programjainkról, és amelyet a *http://www.typotex.hu* címen érhet el. Honlapunkon megismerkedhet kínálatunkkal is, egyes könyveinknél pedig új fejezeteket, bibliográfiát, hivatkozásokat találhat, illetve az esetlegesen előforduló hibák jegyzékét is letöltheti. Észrevételeiket a *velemeny@typotex.hu* e-mail címen várjuk.

Kiadja a Typotex Elektronikus Kiadó Kft., az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesületének tagja.

Felelős kiadó: Votisky Zsuzsa
Felelős szerkesztő: Csaba Ferenc és Szép Gabriella
Műszaki szerkesztő: Hesz Gábor
A borítót Tóth Norbert készítette
Terjedelem: 44 (A/5) ív
Készült a Dürer Nyomda Kft-ben, Gyulán
Ügyvezető igazgató: Kovács János

Tartalomjegyzék

Előszó 7

1. Bevezetés 9

1.1. A valós számok és a valós számegyenes 9
1.2. Egyenesek, körök és parabolák 16
1.3. Függvények és grafikonok 26
1.4. Alapvető függvénytípusok és matematikai modellek 34
1.5. Műveletek függvényekkel és függvénytranszformációk 43
1.6. Trigonometrikus függvények 51
1.7. Grafikus módszerek 60
Áttekintő kérdések 69
Gyakorló feladatok 70
Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok 72

2. Határérték és folytonosság 75

2.1. Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma 75
2.2. Határértékek kiszámítása 86
2.3. A határérték precíz definíciója 92
2.4. Jobb és bal oldali határérték. Határérték a végtelenben 102
2.5. Végtelen határértékek és függőleges aszimptoták 114
2.6. Folytonosság 122
2.7. Érintő és derivált 132
Áttekintő kérdések 138
Gyakorló feladatok 139
Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok 140

3. Differenciálás 143

3.1. A deriváltfüggvény 143
3.2. Deriválási szabályok 153
3.3. A derivált mint változási sebesség 163
3.4. A trigonometrikus függvények deriváltja 174
3.5. A láncszabály. Paraméteres egyenletek 180
3.6. Implicit függvény deriváltja 193

3.7. Kapcsolt deriváltak 201
3.8. Linearizáció és differenciálok 208
Áttekintő kérdések 219
Gyakorló feladatok 220
Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok 225

4. A derivált alkalmazásai 229

4.1. Függvény szélsőértékei 229
4.2. A Lagrange-féle középértéktétel 239
4.3. Monoton függvények és az első derivált teszt 246
4.4. Konvexitás és a függvénygörbe felrajzolása 250
4.5. Alkalmazott optimalizációs problémák 259
4.6. Határozatlan alakok és a L'Hospital-szabály 271
4.7. A Newton-módszer 278
4.8. Primitív függvények 285
Áttekintő kérdések 294
Gyakorló feladatok 295
Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok 298

Függelékek 301

F.1. Teljes indukció 301
F.2. A határértékre vonatkozó tételek bizonyítása 303
F.3. A valós számok elmélete 306
F.4. Komplex számok 309
F.5. Algebrai, geometriai és trigonometriai összefüggések 318

Megoldások 323

Tárgymutató 349

Előszó

Az olvasó kezében tartott tankönyv a mérnökök matematika oktatásában világszerte fogalommá vált. Az eredeti munkát George B. Thomas, az MIT egykori professzora írta a differenciál- és integrálszámítás oktatási segédleteként. Az újabb és újabb kiadások során, részben társszerzők bevonásával, a tankönyv tovább érlelődött, meglevő hiányosságait kijavították, példaanyaga és szerkezete is tovább fejlődött. Legutóbbi, 11. kiadása nagy népszerűségnek örvend nemcsak az Egyesült Államokban, hanem tankönyvként használják Nyugat-Európa számos rangos egyetemén és a BME idegen nyelvű képzésében is.

A mű magyar nyelvű megjelentetése több szempontból indokolttá vált, napjainkban pedig különösen aktuális. A tankönyv a lineáris algebra és a valószínűségszámítás kivételével teljes mértékben lefedi az újonnan bevezetésre kerülő mérnöki B.Sc. képzések matematika anyagát. A B.Sc. program gyakorlat centrikussága természetesen megköveteli a tankönyvek gyakorlatiasabb jellegét is. A jelen tankönyv, azonkívül hogy egységes és komplex tananyagot ad az olvasó kezébe, példatárat is pótol. Emellett a hazai és külföldi egyetemek közötti átjárhatóságot is nagyban elősegíti, ha a magyar felsőoktatás ugyanazt a tankönyvet használja, mint számos nyugat-európai és tengerentúli egyetem. A tankönyv az alapképzések matematika anyagánál helyenként többet is tartalmaz. Igy a művet a hallgatók későbbi tanulmányaik során és munkájukban referenciaként is kiválóan használhatják.

A tankönyv stílusában is különbözik számos Magyarországon korábban elterjedt jegyzettől. Önálló tanulásra is alkalmas, számos kidolgozott feladatot tartalmazó, szépen illusztrált és olvasmányos munka. A könnyebb kezelhetőség végett az 1300 oldalas eredeti könyv fordítását három kötetben jelentetjük meg, ez a forma felel meg leginkább oktatásunk sajátosságainak.

A Thomas-féle kalkulust a BME matematikai alaptankönyvének választotta évekig tartó diszkusszió, kipróbálás és mérlegelés után. Megjelentetésének külön előnye, hogy kiváló felkészülési lehetőséget biztosít azok számára is, akik a BME-n induló M.Sc képzésekre jelentkeznek, viszont más felsőoktatási intézményben szereztek B.Sc fokozatot.

Köszönetünket fejezzük ki a magyar kiadás támogatóinak: a Magyar Mérnökképzés Korszerűsítésért Alapítványnak, az OM Felsőoktatási Tankönyv- és Szakkönyv támogatási Pályázatának és a BME vezetésének, Dr. Molnár Károly rektornak, Dr. Kövesi János oktatási rektor helyettesnek és Dr. Jobbágy Ákos oktatási igazgatónak. Felbecsülhetetlen segítségük teszi lehetővé, hogy a köteteket a mérnökhallgatók számára elérhető áron jelenjen meg. Ugyancsak köszönet illeti a BME Matematika Intézet oktatóit, akik komoly segítséget nyújtottak a matematikai alaptankönyv kiválasztásában, valamint a magyar nyelvű kiadás előkészítésében.

2006. február 16.

Szász Domokos egyetemi tanár

1. fejezet Bevezetés

ÁTTEKINTÉS A fejezetben áttekintjük azokat az alapvető fogalmakat, amelyek analízistanulmányaink megkezdéséhez elengedhetetlenek. A tárgyalás felöleli a valós számok rendszerét, a koordinátageometria alapjait, az egyenesekre, parabolákra és körökre, valamint a függvényekre és grafikonjukra vonatkozó legfontosabb ismereteket, továbbá a legszükségesebb trigonometriai definíciókat és összefüggéseket. Szót ejtünk a számítógépes grafikai módszerekről is.

1.1. A valós számok és a valós számegyenes

Ebben az alfejezetben a valós számokról, az egyenlőtlenségekről, az intervallumokról és az abszolútértékről lesz szó.

Valós számok

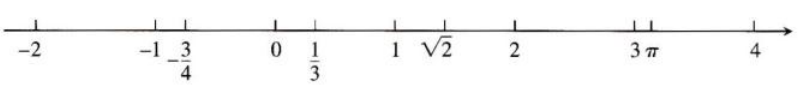
Az analízis nagyrészt a valós számrendszer tulajdonságain alapul. A **valós számok** a tizedes törtekkel kifejezhető számok; íme néhány példa:

$$-\frac{3}{4} = -0,75000\ldots$$
$$\frac{1}{3} = 0,33333\ldots$$
$$\sqrt{2} = 1,4142\ldots$$

A három pont (...) mindhárom esetben arra utal, hogy a tizedestört-kifejtés valójában végtelen hosszú. Minden elképzelhető tizedestört-kifejtés egyértelműen meghatároz egy valós számot, fordítva azonban ez nem áll: vannak olyan számok, amelyek kétféleképpen is felírhatók végtelen tizedes tört alakban. A $0,999\ldots$ és az $1,000\ldots$ végtelen tizedes törtek például ugyanazt a valós számot, az 1-et reprezentálják, és hasonló a helyzet minden olyan valós szám esetében, amelynek tizedes tört alakjában egy csupa 9-esből álló végtelen sorozat szerepel.

A valós számokat egy egyenesen ábrázolhatjuk; ezt az egyenest **valós számegyenesnek** nevezzük.

A valós számok rendszerét és a valós számegyenest is az $\mathbb{R}$ szimbólum jelöli.



A valós számok tulajdonságai három csoportba oszthatók: az algebrai és a rendezési jellemzőkre, valamint a teljességre. A valós számok **algebrai tulajdonságai** alapján két valós szám összedható, egyik a másikból kivonható, egyik a másikkal megszorozható, illetve elosztható (amivel osztunk, nem lehet 0), ezekre a műveletekre a szokásos szabályok érvényesek, eredményük pedig újfent egy valós szám. Hangsúlyozzuk még egyszer: *0-val nem lehet osztani!*

A valós számok **rendezési tulajdonságait** az F.4. függelékben tárgyaljuk. Az ott bemutatott alapvető jellemzők következményei az alábbi hasznos szabályok (a $\Rightarrow$ szimbólum az implikáció jele, $p \Rightarrow q$ kiolvasása: „ha p, akkor q").

Az egyenlőtlenségekre vonatkozó szabályok

Tetszőleges a, b, c valós számok esetén

1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
2. $a < b \Rightarrow a - c < b - c$
3. $a < b$ és $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
4. $a < b$ és $c < 0 \Rightarrow ac > bc$
   Speciálisan ($c = -1$ esetén): $a < b \Rightarrow -b < -a$
5. $a > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > 0$
6. Ha a és b egyaránt pozitív vagy egyaránt negatív, akkor $a < b \Rightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

Jegyezzük meg, milyen szabályok vonatkoznak arra, hogy mi történik, amikor egy egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk ugyanazzal a számmal: ha pozitív számmal szorzunk, az egyenlőtlenség iránya változatlan marad, ha viszont az egyenlőtlenséget negatív számmal szorozzuk meg, akkor az iránya megfordul. Ha mindkét oldal ellentettjét vagy reciprokát vesszük, akkor az egyenlőtlenség iránya megváltozik, például: $2 < 5$, de $-2 > -5$ és $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$.

A valós számok **teljességi** (vagy felsőhatár-) **tulajdonsága** mély és nehezebben definiálható jellemző, viszont a határérték elméletében (l. a 2. fejezetet) központi szerepet játszik. Ez a tulajdonság lényegében azt mondja ki, hogy a valós számegyenesen nincsenek „lyukak", elegendő valós szám van tehát ahhoz, hogy a számegyenest „folytonosan", szakadás nélkül kitöltsék. Az analízis számos tétele a valós számoknak ezen a tulajdonságán alapul. A részletek tárgyalását legjobb, ha egy későbbi, haladóbb szintű kurzusra hagyjuk. Az F.4. függelékben azonban röviden bemutatjuk, hogy miről is van szó, és hogy miként építhető fel a valós számtest.

A valós számoknak három részhalmazát emeljük ki:

1. A **természetes számok**: $1, 2, 3, 4 \ldots$
2. Az **egész számok**: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$
3. A **racionális számok**, vagyis azok a számok, amelyek kifejezhetők m/n alakban, ahol m és n egész számok és $n \neq 0$. Példák racionális számokra:

$$\frac{1}{3},\ -\frac{4}{9} = \frac{-4}{9} = \frac{4}{-9},\ \frac{200}{13},\ 57 = \frac{57}{1}.$$

A racionális számok pontosan azok a valós számok, amelyeknek tizedes tört alakja vagy

(a) véges (azaz egy bizonyos számjegytől kezdve csupa 0-ból áll), például:

$$\frac{3}{4} = 0{,}75000\ldots = 0{,}75, \text{ vagy}$$

(b) végtelen, de szakaszos, vagyis egy bizonyos számjegytől kezdve ugyanazon számokból álló blokk ismétlődik újra és újra, például:

$$\frac{23}{11} = 2{,}090909\ldots = 2{,}\overline{09}$$ a felülvonás az ismétlődő szakaszt jelzi

A véges tizedes törtek a végtelen tizedes törtek speciális esetei, hiszen az előbbiek végén az egyetlen (vagy akárhány) 0-ból álló blokk ismétlődik a végtelenségig.

A valós számok algebrai és rendezési tulajdonságai a racionális számokra is érvényesek, a teljességi tulajdonság azonban nem. Nincs például olyan racionális szám, amelynek a négyzete 2, a racionális számegyenesen tehát „lyuk" van ott, ahol a $\sqrt{2}$-nek kellene lennie.

A nem racionális valós számokat **irracionális számoknak** nevezzük. Az irracionális számok tizedes tört alakjában nincsenek végtelenül ismétlődő szakaszok; ilyen például a π, a $\sqrt{2}$, a $\sqrt[3]{5}$ vagy a $\log_{10} 3$. Mivel minden végtelen tizedes tört meghatároz egy valós számot, így az is világos, hogy végtelen sok irracionális szám van. Bármelyik pontot választjuk is ki a valós számegyenesen, ahhoz tetszőlegesen közel racionális és irracionális számot is találhatunk.

Valós számokból álló összességek megadásához a legalkalmasabb, ha a halmazos jelölést használjuk. Egy (nem üres) **halmaz** bizonyos objektumok összessége, ezeket az objektumokat a halmaz **elemeinek** nevezzük. Tetszőleges S halmaz esetén $a \in S$ jelöli azt, hogy az a objektum eleme S-nek, $a \notin S$ pedig azt, hogy a nem eleme S-nek. Az S halmazt a T halmaz részhalmazának nevezzük, ha S minden eleme az T-nak is eleme; azt, hogy S részhalmaza T-nek, $S \subseteq T$ jelöli. Az S és T halmazok $S \cup T$ **uniója** az a halmaz, amelynek minden olyan objektum eleme, amely S és T közül legalább az egyiknek (akár mindkettőnek) eleme. Az S és T halmazok $S \cap T$ **metszete** az a halmaz, amelynek minden olyan objektum eleme, amely S-nek és T-nek is eleme. Az **üres halmaz** (jele: $\emptyset$) az a halmaz, amelynek egyetlen eleme sincs. A racionális és az irracionális számok halmazának metszete például az üres halmaz.

Bizonyos halmazok megadhatók egyszerűen úgy is, hogy elemeiket – kapcsos zárójelek között – felsoroljuk. Így például, ha A a 6-nál kisebb természetes számok halmaza, akkor A-t így is megadhatjuk:

$$A = \{1,2,3,4,5\}.$$

Az összes egész szám halmazát pedig így:

$$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots\}.$$

Egy halmaz megadható úgy is, hogy megmondjuk, milyen tulajdonságú objektumok az elemei. Így például az

$$A = \{x : x \text{ egész szám és } 0 < x < 6\}$$

halmaz a 6-nál kisebb pozitív egész számok halmaza.

Intervallumok

Az **intervallumok** a valós számegyenes olyan, legalább kételemű részhalmazai, amelyeknek bármely két elemükkel együtt az illető elemek között elhelyezkedő összes valós szám is elemük. Intervallumot alkotnak például a 6-nál nagyobb valós számok, ahogy azok az x valós számok is, amelyekre fennáll $-2 \leq x \leq 5$. A nemnulla valós számok halmaza nem intervallum, mert például -1 és 1 között van olyan szám (a nulla), amely ennek a halmaznak nem eleme.

Ha ábrázoljuk őket, akkor az intervallumok a valós számegyenes szakaszainak és félegyeneseinek felelnek meg, ezeken kívül a teljes valós számegyenes is intervallum. A valós számegyenes egy szakaszának megfeleltethető intervallumokat **véges**, a félegyeneseknek vagy a teljes valós számegyenesnek megfelelő intervallumokat **végtelen** intervallumnak nevezzük.

	Jelölés	Halmazos megadás	Típus	Ábrázolás
Véges	(a,b)	$\{x \mid a < x < b\}$	nyílt	
	$[a,b]$	$\{x \mid a \le x \le b\}$	zárt	
	$[a,b)$	$\{x \mid a \le x < b\}$	félig nyílt	
	$(a,b]$	$\{x \mid a < x \le b\}$	félig nyílt	
Végtelen	(a,∞)	$\{x \mid x > a\}$	nyílt	
	$[a,\infty)$	$\{x \mid x \ge a\}$	zárt	
	$(-\infty,b)$	$\{x \mid x < b\}$	nyílt	
	$(-\infty,b]$	$\{x \mid x \le b\}$	zárt	
	$(-\infty,\infty)$	$\mathbb{R}$ (az összes valós szám halmaza)	egyszerre nyílt és zárt	

1.1. TÁBLÁZAT: Intervallumtípusok

Egy véges intervallum **zárt**, amennyiben mindkét végpontja „hozzátartozik" (vagyis eleme), **félig nyílt** (vagy **félig zárt**), ha csupán az egyik végpontja tartozik hozzá, és **nyílt**, ha egyik végpontja sem. Az intervallum végpontjait az intervallum **határpontjainak**, a belőlük álló kételemű halmazt pedig az intervallum **határának** nevezzük. A többi pontot **belső pontnak** nevezzük, a belső pontok halmaza az intervallum **belseje**. Egy végtelen intervallum zárt, amennyiben van egy végpontja, és ez a végpont az intervallumnak eleme, és nyílt, ha van egy végpontja, de az nem eleme az intervallumnak. A teljes $\mathbb{R}$ számegyenes egyszerre zárt és nyílt. Az intervallumtípusokat az 1.1. táblázatban tekintjük át.

Egyenlőtlenségek megoldása

Egy x-re felírt egyenlőtlenség **megoldása** azt jelenti, hogy megadjuk azt a halmazt (amely általában intervallum vagy intervallumok uniója), amelynek elemeit x helyébe írva az egyenlőtlenség teljesül.

1. PÉLDA

Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket, és ábrázoljuk a megoldáshalmazokat a valós számegyenesen.

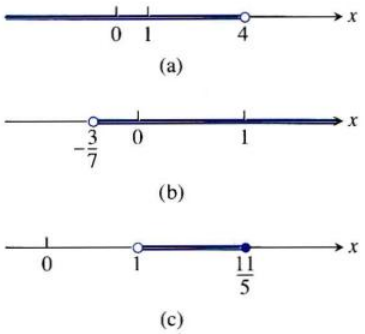
(a) $2x-1 < x+3$ **(b)** $-\dfrac{x}{3} < 2x+1$ **(c)** $\dfrac{6}{x-1} \ge 5$

Megoldás.

(a)
$$\begin{aligned} 2x-1 &< x+3 \\ 2x &< x+4 && \text{mindkét oldalhoz 1-et adtunk} \\ x &< 4 && \text{mindkét oldalból kivontunk } x\text{-et} \end{aligned}$$

A megoldáshalmaz a $(-\infty,4)$ nyílt intervallum; l. az 1.1. ábra (a) részét.

(b)
$$\begin{aligned} -\frac{x}{3} &< 2x+1 \\ -x &< 6x+3 && \text{mindkét oldalt megszoroztuk 3-mal} \end{aligned}$$



1.1. ÁBRA: Az 1. példában szereplő egyenlőtlenségek megoldáshalmazai.

$$0 < 7x+3 \qquad \text{mindkét oldalhoz } x\text{-et adtunk}$$

$$-3 < 7x \qquad \text{mindkét oldalból kivontunk 3-at}$$

$$-\frac{3}{7} < x \qquad \text{osztottunk 7-tel}$$

A megoldáshalmaz a $(-\frac{3}{7},\infty)$ nyílt intervallum; l. az 1.1. ábra (b) részét.

(c) A $6/(x-1) \geq 5$ egyenlőtlenség csak úgy teljesülhet, ha $x > 1$, ellenkező esetben ugyanis a $6/(x-1)$ tört vagy értelmetlen, vagy negatív. Az $(x-1)$ kifejezés tehát pozitív, így megszorozhatjuk vele az egyenlőtlenség mindkét oldalát:

$$\frac{6}{x-1} \geq 5$$

$$6 \geq 5x-5 \qquad \text{mindkét oldalt megszoroztuk } (x-1)\text{-gyel}$$

$$11 \geq 5x \qquad \text{mindkét oldalhoz 5-öt adtunk}$$

$$\frac{11}{5} \geq x \qquad \text{vagy } x \leq \tfrac{11}{5}$$

A megoldáshalmaz az $\left(1, \frac{11}{5}\right]$ félig nyílt intervallum; l. az 1.1. ábra (c) részét. □

Abszolútérték

Az x szám $|x|$ **abszolútértékét** a következőképpen definiáljuk:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0; \text{ illetve} \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

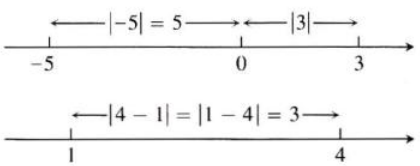
2. PÉLDA

$$|3| = 3,\ |0| = 0,\ |-5| = -(-5) = 5,\ |-|a|| = |a|. \qquad \square$$

Az x valós szám abszolútértéke geometriailag az x 0-tól való távolságát adja meg a valós számegyenesen. Mivel egy távolság nem lehet negatív, világos, hogy tetszőleges x esetén $|x| \geq 0$, és hogy $|x| = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0$. Ezen felül

$$|x-y| = \text{az } x \text{ és az } y \text{ távolsága}$$

a valós számegyenesen (l. az 1.2. ábrát).



1.2. ÁBRA: Az abszolútérték megadja a számegyenes pontjainak távolságát.

Mivel $\sqrt{a}$ az a nemnegatív szám, amelynek négyzete a, a következő egyenlőséget akár $|x|$ egy alternatív definíciójának is tekinthetjük:

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Jegyezzük meg tehát: $\sqrt{a^2} = |a|$; csak akkor írjuk azt, hogy $\sqrt{a^2} = a$, ha biztosak vagyunk abban, hogy $a \geq 0$.

Az abszolútértékekre vonatkozó tulajdonságokat foglalja össze a következő táblázat (az összefüggések bizonyítását a feladatokra hagyjuk).

Az abszolútérték tulajdonságai

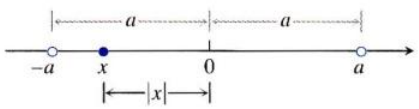
1.	$\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$	Bármely szám ellentettjének abszolútértéke egyenlő a szám abszolútértékével.
2.	$\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$	Szorzat abszolútértéke egyenlő a tényezők abszolútértékének szorzatával.
3.	$\left\lvert \frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$	Tört abszolútértéke (amennyiben a nevező nem nulla) a számláló és a nevező abszolútértékeinek hányadosával egyenlő.
4.	$\lvert a+b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	**Háromszög-egyenlőtlenség**. Egy összeg abszolútértéke sohasem nagyobb a tagok abszolútértékeinek összegénél.

Jegyezzük meg: általában $|-a| \neq -|a|$. Példának okáért $|-3| = 3$, de $-|3| = -3$. Ha a és b előjele különböző, akkor $|a+b|$ mindig kisebb, mint $|a|+|b|$; az összes többi esetben $|a+b| = |a|+|b|$. Az abszolútértékjel zárójelként működik, előbb mindig a | jeleken belül kijelölt műveleteket végezzük el, utána vesszük csak az abszolútértéket.

3. PÉLDA

A háromszög-egyenlőtlenség néhány esete:

$$|-3+5| = |2| = 2 < |-3|+|5| = 8$$
$$|3+5| = |8| = |3|+|5|$$
$$|-3-5| = |-8| = 8 = |-3|+|-5|.$$



1.3. ÁBRA: Az $|x| < a$ egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy x a $-a$ és az a között helyezkedik el.

Tetszőleges pozitív a szám esetén az $|x| < a$ egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy az x szám 0-tól való távolsága kisebb, mint a. Ez utóbbi pedig pontosan azt jelenti, hogy x a valós számegyenesen a $-a$ és az a számok között helyezkedik el, l. az 1.3. ábrát.

A következő egyszerű összefüggések – a definíció könnyen igazolható következményei – leginkább az abszolútértékes egyenletek, illetve egyenlőtlenségek megoldásakor bizonyulnak hasznosnak.

Abszolútértékek és intervallumok

Tetszőleges pozitív a szám esetén:

5.	$\|x\| = a$	pontosan akkor, ha	$x = \pm a$
6.	$\|x\| < a$	pontosan akkor, ha	$-a < x < a$
7.	$\|x\| > a$	pontosan akkor, ha	$x > a$ vagy $x < -a$
8.	$\|x\| \leq a$	pontosan akkor, ha	$-a \leq x \leq a$
9.	$\|x\| \geq a$	pontosan akkor, ha	$x \geq a$ vagy $x \leq -a$

A matematikusok a „pontosan akkor, ha", illetve az „akkor és csak akkor, ha" fordulatot gyakran a $\Leftrightarrow$ jellel rövidítik.

4. PÉLDA

Abszolútértékes egyenlet megoldása. Oldjuk meg a $|2x-3| = 7$ egyenletet.

Megoldás. Az abszolútérték 5. tulajdonsága alapján azt kapjuk, hogy $2x-3 = \pm 7$, vagyis két egyenletet kell megoldanunk (a szokásos módon):

$$\begin{aligned} 2x-3 &= 7 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x-3 &= -7 \\ 2x &= -4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

A $|2x-3| = 7$ egyenlet megoldásai: $x = 5$ és $x = -2$. □

5. PÉLDA **Abszolútértékes egyenlőtlenség megoldása.**

Oldjuk meg az $\left|5 - \frac{2}{x}\right| < 1$ egyenlőtlenséget.

Megoldás.

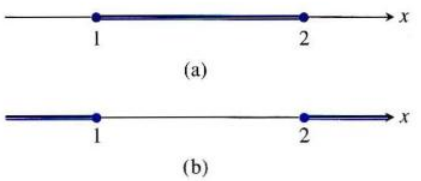
$$\left|5-\frac{2}{x}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < 5-\frac{2}{x} < 1 \qquad \text{6. tulajdonság}$$
$$\Leftrightarrow -6 < -\frac{2}{x} < -4 \qquad \text{kivontunk 5-öt}$$
$$\Leftrightarrow 3 > \frac{1}{x} > 2 \qquad \text{szoroztunk } -\tfrac{1}{2}\text{-del}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} \qquad \text{mindkét oldal reciprokát vettük}$$

Figyeljük meg, miként használtuk az egyenlőtlenségekre vonatkozó szabályainkat. Negatív számmal való szorzás hatására az egyenlőtlenség iránya megfordul, és ha mindkét oldal pozitív, ugyanez történik akkor is, ha mindkét oldal reciprokát vesszük. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, kijelenthetjük: az eredeti egyenlőtlenség azon x számokra áll fenn, amelyekre $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$. Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát az $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ nyílt intervallum. □

6. PÉLDA

Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket, és ábrázoljuk a megoldáshalmazukat a valós számegyenesen.

(a) $|2x-3| \le 1$ **(b)** $|2x-3| \ge 1$



1.4. ÁBRA: A 6. Feladat megoldáshalmazai (a) $[1,2]$ és (b) $(-\infty,1]\cup[2,\infty)$

Megoldás.

(a)

$$\begin{aligned} |2x-3| &\le 1 \\ -1 \le 2x-3 &\le 1 && \text{8. tulajdonság} \\ 2 \le 2x &\le 4 && \text{mindkét oldalhoz 3-at adva} \\ 1 \le x &\le 2 && \text{2-vel osztva} \end{aligned}$$

A megoldáshalmaz az $[1,2]$ zárt intervallum, l. az 1.4. ábra (a) részét.

(b)

$$|2x-3| \ge 1$$

$$\begin{aligned} 2x-3 \ge 1 \quad &\text{vagy} \quad 2x-3 \le -1 && \text{9. tulajdonság} \\ x-\frac{3}{2} \ge \frac{1}{2} \quad &\text{vagy} \quad x-\frac{3}{2} \le -\frac{1}{2} && \text{2-vel osztva} \\ x \ge 2 \quad &\text{vagy} \quad x \le 1 && \tfrac{3}{2}\text{-et hozzáadva} \end{aligned}$$

A megoldáshalmaz: $(-\infty,1]\cup[2,\infty)$, l. az 1.4. ábra (b) részét. □

1.1. Feladatok

Valós számok tizedes tört alakja

1. Írjuk fel $\frac{1}{9}$ (végtelen szakaszos) tizedes tört alakját, az ismétlődő számjegyeket felülvonással jelölve. Határozzuk meg $\frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{8}{9}$ és $\frac{9}{9}$ tizedes tört alakját is.

2. Írjuk fel $\frac{1}{11}$ (végtelen szakaszos) tizedes tört alakját, az ismétlődő számjegyeket most is jelöljük felülvonással. Határozzuk meg $\frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{9}{11}$ és $\frac{11}{11}$ tizedes tört alakját is.

Egyenlőtlenségek

3. A következő állítások közül melyek igazak feltétlenül és melyek nem feltétlenül, amennyiben $2 < x < 6$?

(a) $0 < x < 4$ **(b)** $0 < x-2 < 4$

(c) $1 < \frac{x}{2} < 3$ **(d)** $\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

(e) $1 < \frac{6}{x} < 3$ **(f)** $|x-4| < 2$

(g) $-6 < -x < 2$ **(h)** $-6 < -x < -2$

4. Ha fennáll $-1 < y-5 < 1$, akkor a következő állítások közül melyek a feltétlenül, és melyek a nem feltétlenül igazak?

(a) $4 < y < 6$ **(b)** $-6 < y < -4$

(c) $y > 4$ **(d)** $y < 6$

(e) $0 < y-4 < 2$ **(f)** $2 < \frac{y}{2} < 3$

(g) $\frac{1}{6} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4}$ **(h)** $|y-5| < 1$

Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket; a megoldáshalmazokat ábrázoljuk a számegyenesen (5–12. feladatok).

5. $-2x > 4$ **6.** $8-3x \ge 5$

7. $5x-3 \le 7-3x$ **8.** $3(2-x) > 2(3+x)$

9. $2x-\frac{1}{2} \ge 7x+\frac{7}{6}$ **10.** $\frac{6-x}{4} < \frac{3x-4}{2}$

11. $\frac{4}{5}(x-2) < \frac{1}{3}(x-6)$ **12.** $-\frac{x+5}{2} \le \frac{12+3x}{4}$

Abszolútérték

Oldjuk meg az egyenleteket (13–18. feladatok).

13. $|y| = 3$ **14.** $|y-3| = 7$

15. $|2t+5| = 4$ **16.** $|1-t| = 1$

17. $|8-3s| = \frac{9}{2}$ **18.** $\left|\frac{s}{2}-1\right| = 1$

Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket; a megoldáshalmazokat ábrázoljuk a számegyenesen (19–34. feladatok).

19. $|x| < 2$ **20.** $|x| \le 2$

21. $|t-1| \le 3$ **22.** $|t+2| < 1$

23. $|3y-7| < 4$ **24.** $|2y+5| < 1$

25. $\left|\frac{z}{5}-1\right| \le 1$ **26.** $\left|\frac{3}{2}z-1\right| \le 2$

27. $\left|3-\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}$ **28.** $\left|\frac{2}{x}-4\right| < 3$

29. $|2s| \ge 4$ **30.** $|s+3| \ge \frac{1}{2}$

31. $|1-x| > 1$ **32.** $|2-3x| > 5$

33. $\left|\frac{r+1}{2}\right| \ge 1$ **34.** $\left|\frac{3r}{5}-1\right| > \frac{2}{5}$

Másodfokú egyenlőtlenségek

Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket. A megoldáshalmazt, amely minden esetben intervallum vagy intervallumok uniója, ábrázoljuk a számegyenesen. Használjuk a $\sqrt{a^2} = |a|$ összefüggést.

35. $x^2 < 2$ **36.** $4 \le x^2$ **37.** $4 < x^2 < 9$

38. $\frac{1}{9} < x^2 < \frac{1}{4}$ **39.** $(x-1)^2 < 4$ **40.** $(x+3)^2 < 2$

41. $x^2 - x < 0$ **42.** $x^2 - x - 2 \ge 0$

További példák és feladatok

43. Vigyázzunk: $|-a| = a$ általában nem igaz! Mely valós számokra igaz, és melyekre hamis az egyenlőség?

44. Oldjuk meg az $|x-1| = 1-x$ egyenletet.

45. A háromszög-egyenlőtlenség egy bizonyítása Indokoljuk meg a levezetés számozott lépéseit.

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = \quad (1)$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 \le$$
$$\le a^2 + 2|a|\cdot|b| + b^2 = \quad (2)$$
$$= |a|^2 + 2|a|\cdot|b| + |b|^2 = \quad (3)$$
$$= (|a| + |b|)^2$$
$$|a+b| \le |a| + |b| \quad (4)$$

46. Igazoljuk, hogy tetszőleges a és b valós számok esetén $|ab| = |a|\cdot|b|$.

47. Mit mondhatunk az x valós számról, ha tudjuk, hogy $|x| \le 3$ és $x > -\frac{1}{2}$?

48. Ábrázoljuk az $|x| + |y| \le 1$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát.

49. Legyen $f(x) = 2x+1$, legyen továbbá $\delta > 0$ tetszőleges pozitív szám. Igazoljuk, hogy amennyiben $|x-1| < \delta$, úgy $|f(x) - f(1)| < 2\delta$. Az $f(a)$ itt a $2x+1$ kifejezés azon értékét jelöli, amelyet az $x = a$ behelyettesítéssel kapunk. A függvényekkel kapcsolatos jelölésekkel az 1.3. alfejezetben foglalkozunk részletesebben.

50. Legyen $f(x) = 2x+3$, $\varepsilon > 0$ pedig tetszőleges pozitív szám. Bizonyítsuk be, hogy ha $|x-0| < \frac{\varepsilon}{2}$, akkor $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

51. Igazoljuk, hogy tetszőleges a valós szám esetén $|-a| = |a|$.

52. Legyen a tetszőleges pozitív szám. Mutassuk meg, hogy $|x| > a$ pontosan akkor teljesül, ha $x > a$ vagy $x < -a$.

53. **(a)** Igazoljuk, hogy ha $b \neq 0$, akkor $\left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|}$.

(b) Igazoljuk, hogy tetszőleges a és tetszőleges nemnulla b valós szám esetén $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

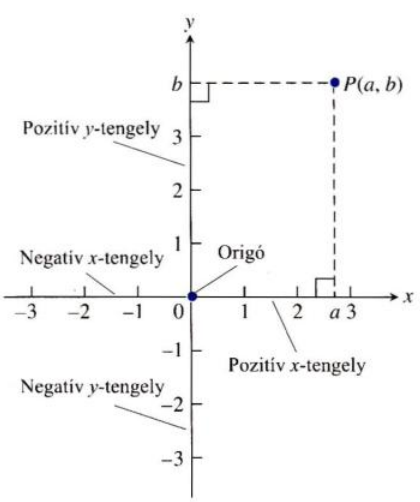
54. Teljes indukcióval igazoljuk (l. az F.1. függeléket), hogy tetszőleges n pozitív egész szám esetén $|a^n| = |a|^n$.

1.2. Egyenesek, körök és parabolák

Ebben az alfejezetben áttekintjük az egyenesekkel, körökkel és parabolákkal kapcsolatos ismereteket; bevezetjük továbbá a növekmény fogalmát.

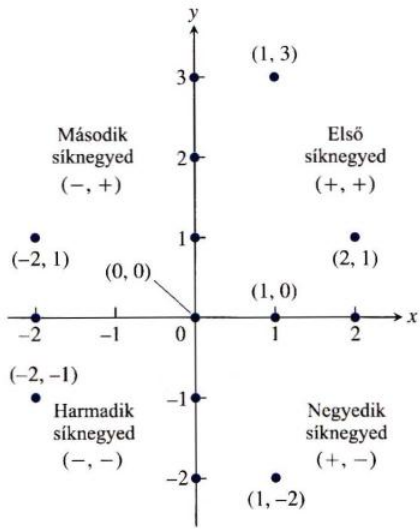
A síkbeli derékszögű koordináta-rendszer

Az előző alfejezetben a valós számegyenes pontjait valós számokkal azonosítottuk, tetszőleges pont esetén az őt meghatározó számot a pont koordinátájának tekintettük. A sík pontjait ennek megfelelően valós számok rendezett párjaival azonosíthatjuk. Ehhez először fölveszünk két, egymásra merőleges valós számegyenest úgy, hogy a metszéspont mindkettőn a 0 pont legyen. Ezeket a számegyeneseket nevezzük a síkbeli **koordináta-rendszer tengelyeinek**. A vízszintes x-tengelyen a számok jobbra, a függőleges y-tengelyen pedig fölfelé nőnek; a tengelyeken gyakran a számokat is x, illetve y jelöli. A koordináta-rendszer O-val – alkalmanként 0-val – jelölt **origója** a sík azon pontja, amelynél x és y egyaránt 0.



1.5. ÁBRA: A Descartes-féle koordináta-rendszert két, egymást a 0 pontban merőlegesen metsző tengely alkotja.

Ezután a sík tetszőleges P pontjának helyzetét egyértelműen megadhatjuk két valós számmal a következőképpen. Húzzunk a P ponton keresztül egy-egy, a koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenest. Ezek az egyenesek a koordinátatengelyeket az a és a b pontokban metszik (l. az 1.5. ábrát); az (a,b) rendezett pár a P pontot megadó **koordinátapár**. A rendezett pár első tagját – tehát az a számot – a P pont **x-koordinátájának** (vagy **abszcisszájának**), b-t pedig a P pont **y-koordinátájának** (vagy **ordinátájának**) nevezzük. Az y-tengely minden pontjának 0 az abszcisszája, az x-tengely minden pontjának 0 az ordinátája. Az origó a $(0,0)$ pont. A koordinátákat általában vesszővel (,) választjuk el, de ha tizedestörtek is szerepelnek, akkor az egyértelmű kiolvasás érdekében pontosvesszőt (;) használunk. Az $(1,5;2)$ pont x-koordinátája tehát 1,5, y-koordinátája pedig 2.



1.6. ÁBRA: Pontok a derékszögű koordináta-rendszerben. A tengelyek osztáspontjait egyetlen számmal adjuk meg. (Így például az x tengely 1-es osztáspontja az $(1,0)$ pont. Figyeljük meg, milyen előjelűek az egyes síknegyedek pontjainak koordinátái.)

Kiindulhatunk természetesen az (a,b) rendezett párból is, ekkor a fenti eljárás megfordításával megkapjuk a P pontot. A P pontot gyakran azonosítjuk az őt meghatározó koordinátapárral, ennek megfelelően használjuk a $P(a,b)$ jelölést is. Előfordul, hogy az (a,b) pontról beszélünk; a szövegkörnyezet alapján mindig világos lesz, hogy (a,b) mikor jelöl pontot, és mikor nyílt intervallumot.

A most bemutatott koordináta-rendszert (síkbeli) derékszögű vagy Descartes-féle koordináta-rendszernek nevezzük; *René Descartes* (1596–1650) francia filozófus és matematikus neve után. A koordinátatengelyek a síkot négy **síknegyedre** osztják, amelyeket – az 1.6. ábra szerint – az óramutató járásával ellenkező irányban haladva számozunk meg 1-től 4-ig.

Egy kétismeretlenes (x és y ismeretlenekkel felírt) egyenlet vagy egyenlőtlenség **grafikonja** azoknak a $P(x,y)$ pontoknak a halmaza, amelyeknek x és y koordinátái kielégítik a szóban forgó egyenletet, illetve egyenlőtlenséget. Amikor bizonyos adatokat derékszögű koordináta-rendszerben jelenítünk meg, vagy olyan egyenlet (illetve egyenlőtlenség) grafikonját ábrázoljuk, amelynek változóit más-más mértékegységben adtuk meg, akkor a két tengelyen nem kell feltétlenül egyforma egységeket használnunk. Ha például egy rakétamotor hajtóerejét ábrázoljuk az idő függvényében, akkor semmi nem indokolja, hogy az x-tengely 1 másodpercnek megfelelő pontja ugyanolyan messze legyen az origótól, mint az y-tengely 1 newtonnak megfelelő pontja.

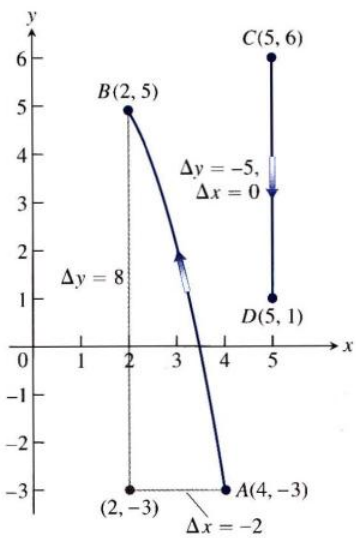
Azokban az esetekben azonban, mikor az ábrázolt függvények nem fizikai mennyiségek közötti kapcsolatot fejeznek ki, vagy amikor geometriai vagy trigonometriai összefüggésekről van szó, általában egyforma skálát használunk a két tengelyen. Ilyenkor tehát a vertikális egység hossza megegyezik a horizontális egység hosszával, így az egyenlő hosszúságú szakaszok egyenlő hosszúnak is látszanak, ahogy az egyenlő nagyságú szögek is.

A számológépek kijelzőjén vagy a monitorokon általában nem ez a helyzet. A gépek többnyire különbözőképpen skálázzák be a tengelyeket, aminek következtében a szakaszok hossza, az egyenesek meredeksége és a szögek nagysága egyaránt megváltozik. Ami „valójában" kör, ilyenkor esetleg ellipszisnek látszik, a derékszög pedig hegyes- vagy tompaszögnek. A témával részletesebben foglalkozunk majd az 1.7. alfejezetben.

Növekmények és egyenesek

Amikor egy – pontszerűnek tekintett – részecske mozog a síkon, a végpont és a kezdőpont koordinátáinak különbségét **növekménynek** (vagy **inkrementumnak**) nevezzük. Ha az x-koordináta x_1-ről x_2-re változik, akkor a növekmény:

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$



1.7. ÁBRA: A koordinátanövekmény pozitív, negatív és nulla is lehet.

1. PÉLDA

Ha az $A(4,-3)$ pontból a $B(2,5)$ pontba jutunk, akkor az x- és az y-koordináta növekménye:

$$\Delta x = 2 - 4 = -2, \quad \Delta y = 5 - (-3) = 8.$$

Ha pedig a $C(5,6)$ pontból jutunk a $D(5,1)$ pontba, akkor

$$\Delta x = 5 - 5 = 0, \quad \Delta y = 1 - 6 = -5.$$

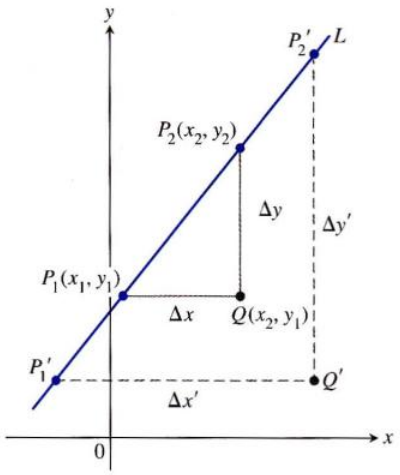
L. az 1.7. ábrát.

A sík bármely két $P_1(x_1,y_1)$ és $P_2(x_2,y_2)$ különböző pontja egyértelműen meghatározza a rajtuk áthaladó P_1P_2 egyenest.

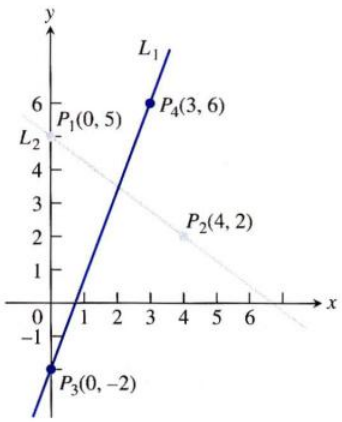
A sík minden nem függőleges egyenesére igaz, hogy az

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

hányados az egyenes bármely két P_1 és P_2 pontja esetén ugyanakkora. (Ehhez elegendő arra hivatkoznunk, hogy a hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő, l. az 1.8. ábrát.)



1.8. ÁBRA: A P_1QP_2 és a $P_1'QP_2'$ háromszög hasonló, így megfelelő oldalaik aránya egyenlő.



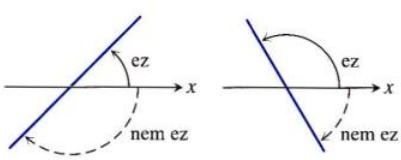
1.9. ÁBRA: Az L_1 egyenes meredeksége:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-(-2))}{3-0} = \frac{8}{3},$$

amíg tehát x 3 egységgel nő, addig az y értéke 8 egységgel. Az L_2 egyenes meredeksége:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-5}{4-0} = \frac{-3}{4},$$

amíg tehát x 4 egységgel nő, az y 3 egységgel csökken.



1.10. ÁBRA: Az irányszöget az x-tengelytől az óramutató járásával ellenkező irányban mérjük.

DEFINÍCIÓ Meredekség.

Az

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

állandót a P_1P_2 (nem függőleges) egyenes **meredekségének** nevezzük.

A pozitív meredekségű egyenesek jobbra-fölfelé emelkednek, a negatív meredekségűek pedig jobbra-lefelé lejtenek (l. az 1.9. ábrát). Minél nagyobb egy egyenes meredekségének abszolútértéke, annál inkább közelebb kerül a függőlegeshez; a függőleges egyenesek meredekségét nem értelmezzük, elvégre ilyen egyeneseknél Δx mindig 0, így nem oszthatunk vele.

Az egyenesek állását nem csupán a meredekségükkel, hanem irányszögükkel is megadhajuk. Egy egyenes irányszöge a pozitív x-tengellyel bezárt, az óramutató járásával ellentétes irányban mért hajlásszöge (1.10. ábra). A vízszintes egyenesek irányszöge 0°, a függőlegeseké 90°. Ha egy egyenes irányszöge ϕ (a görög „fi" betű), akkor nyilván $0° \le \phi < 180°$.

Egy nem függőleges egyenes m meredeksége és ϕ irányszöge között fennáll a következő összefüggés (l. az 1.11. ábrát):

$$m = \operatorname{tg}\phi,$$

az egyenes meredekségét emiatt az egyenes **iránytangensének** is nevezik.

Az egyenesek egyenletének felírása nem túl nehéz feladat. Ha például egy *függőleges egyenes* az x tengelyt az a pontban metszi, akkor az egyenes minden pontjának x-koordinátája a; az egyenes egyenlete tehát $x = a$. Hasonlóan: $y = b$ annak a *vízszintes egyenesnek* az egyenlete, amely az y-tengelyt a b pontban metszi; l. az 1.12. ábrát.

Ha ismerjük az L nem függőleges egyenes meredekségét, továbbá L egy $P_1(x_1, x_2)$ pontjának koordinátáit, akkor könnyen felírhatjuk az egyenes egyenletét. Az m meredekség ugyanis L bármely $P(x, y)$ pontja esetén

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{vagy} \quad y = y_1 + m(x - x_1).$$

Az adott (x_1, y_1) pontra illeszkedő, m meredekségű egyenes egyenlete:

$$y = y_1 + m(x - x_1).$$

2. PÉLDA

Írjuk fel a $(2, 3)$ ponton áthaladó, $-\frac{3}{2}$ meredekségű egyenes egyenletét.

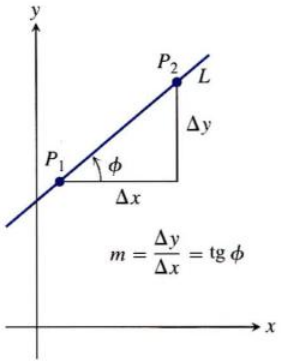
Megoldás. Az iránytangenses egyenletbe az $x_1 = 2$, $y_1 = 3$ és $m = -\frac{3}{2}$ számokat helyettesítve azt kapjuk, hogy:

$$y = 3 - \frac{3}{2}(x - 2) \quad \text{vagy} \quad y = -\frac{3}{2}x + 6.$$

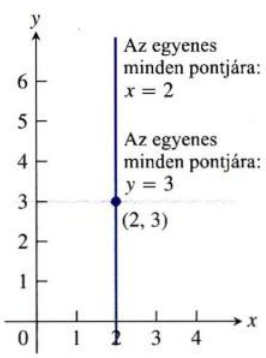
Az $x = 0$ esetben $y = 6$, egyenesünk tehát az y-tengelyt az $y = 6$ helyen metszi. □

3. PÉLDA **Két adott pontra illeszkedő egyenes egyenlete.**

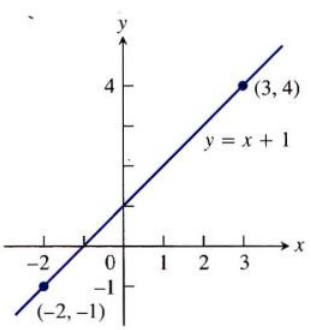
Írjuk fel a $(-2, -1)$ és a $(3, 4)$ pontra illeszkedő egyenes egyenletét.



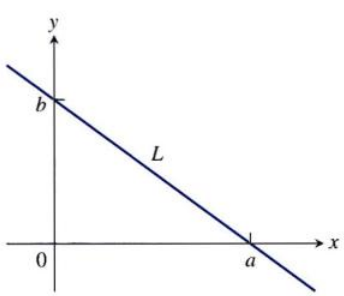
1.11. ÁBRA: A nem függőleges egyenesek meredeksége az egyenes irányszögének tangense.



1.12. ÁBRA: A $(2,3)$ pontra illeszkedő vízszintes és függőleges egyenes egyenlete $y = 3$, illetve $x = 2$.



1.13. ÁBRA: A 3. példában szereplő egyenes.



1.14. ÁBRA: Az L egyenes x-tengelymetszete a, y-tengelymetszete pedig b.

Megoldás. Az egyenes meredeksége:

$$m = \frac{-1-4}{-2-3} = \frac{-5}{-5} = 1$$

Az iránytangens ismeretében ezután bármelyik két pontra felírhatjuk az egyenes egyenletét:

I.	II.
$(x_1,y_1) = (-2,-1)$:	$(x_1,y_1) = (3,4)$:
$y = -1 + 1\cdot(x-((-2))$	$y = 4 + 1\cdot(x-3)$
$y = -1 + x + 2$	$y = 4 + x - 3$
$y = x + 1$	$y = x + 1$

Mindkét esetben az $y = x + 1$ egyenletet kaptuk, l. az 1.13. ábrát. □

Tetszőleges – de nem függőleges – egyenes esetén annak a pontnak az y-koordinátáját, amelyben az egyenes az y-tengelyt metszi, az egyenes **y-tengelymetszetének** nevezzük. Hasonlóan: egy nem vízszintes egyenes **x-tengelymetszete** az egyenes és az x-tengely metszéspontjának x-koordinátája (l. az 1.14. ábrát). Tekintsünk most egy m meredekségű egyenest; ha az egyenes y-tengelymetszete b, akkor az egyenes áthalad a $(0,b)$ ponton, így egyenlete:

$$y = b + m(x-0), \quad \text{vagy egyszerűbben:} \quad y = mx + b$$

Ha egy egyenes meredeksége m, y-tengelymetszete pedig b, akkor az egyenes egyenlete

$$y = mx + b$$

alakban is felírható. Ezt az egyenletet az egyenes **„kanonikus"** egyenletének nevezzük.

Ha egy egyenes egyenlete $y = mx$ alakú, akkor y-tengelymetszete 0, az ilyen egyenesek tehát átmennek az origón. Az egyenesek egyenletét **lineáris** egyenletnek nevezzük. Az

$$Ax + By = C \qquad (A \text{ és } B \text{ közül legalább az egyik nemnulla})$$

alakú egyenleteket **általános lineáris egyenletnek** nevezzük, az ilyen egyenleteket kielégítő (x,y) számpárok ugyanis mindig egy egyenesre illeszkednek; megfordítva: minden egyenes egyenlete (még azoké is, amelyeknek az iránytangense értelmezhetetlen) felírható ilyen alakban.

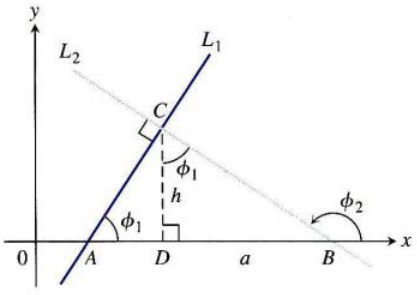
4. PÉLDA **Egyenes meredekségének és y-tengelymetszetének meghatározása.**

Határozzuk meg a $8x + 5y = 20$ egyenletű egyenes meredekségét és y-tengelymetszetét.

Megoldás. Tekintsük ismeretlennek az y változót, az egyenletet y-ra megoldva megkapjuk az egyenes kanonikus egyenletét.

$$\begin{aligned} 8x + 5y &= 20 \\ 5y &= -8x + 20 \\ y &= -\frac{8}{5}x + 4 \end{aligned}$$

A meredekség (iránytangens) eszerint $m = -8/5$, az y-tengelymetszet pedig $b = 4$. □



1.15. ÁBRA: Az L_1 egyenes meredeksége m_1, az L_2 egyenesé m_2. Az ADC és a CDB háromszög hasonló, így a CDB háromszög C csúcsbeli szöge is ϕ_1. A CDB derékszögű háromszögből pedig kiolvasható, hogy $\operatorname{tg}\phi_1 = a/h$.

Párhuzamos és merőleges egyenesek

Ha két egyenes párhuzamos, akkor irányszögük és így iránytangensük is egyenlő (ha nem függőlegesek). Megfordítva, ha két egyenes iránytangense megegyezik, akkor irányszögük is egyenlő, tehát párhuzamosak egymással.

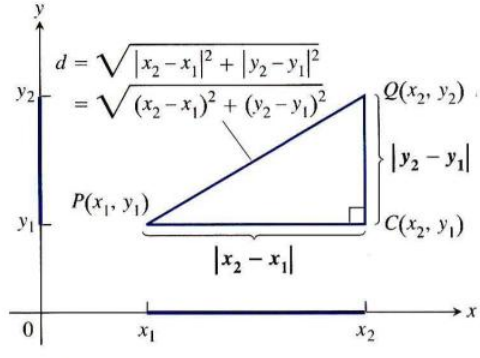
Ha az L_1 és L_2 merőleges egyenesek egyike sem függőleges, akkor m_1 és m_2 iránytangensükre teljesül az $m_1 m_2 = -1$ összefüggés, bármelyik egyenes iránytangense tehát egyenlő a másik iránytangense reciprokának ellentettjével:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

A bizonyításhoz tekintsük az 1.15. ábra hasonló háromszögeit; vegyük észre, hogy $m_1 = a/h$ és $m_2 = -h/a$, amiből $m_1 m_2 = (a/h)(-h/a) = -1$.

Két pont távolsága; kör

A sík két pontjának távolságát Pitagorasz tétele alapján határozzuk meg (1.16. ábra).



1.16. ÁBRA: A $P(x_1,y_1)$ és a $Q(x_2,y_2)$ pontok távolságának meghatározásához írjuk fel Pitagorasz tételét a PCQ derékszögű háromszögre.

A sík két pontjának távolsága

A $P(x_1,y_1)$ és $Q(x_2,y_2)$ pontok távolsága:

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

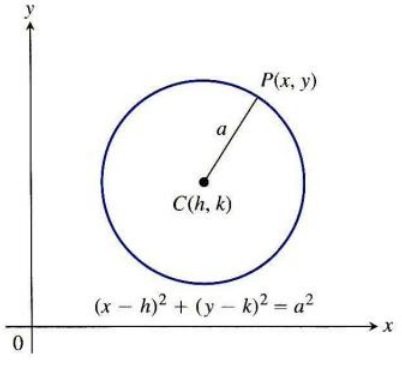
5. PÉLDA **Két pont távolságának meghatározása.**

(a) A $P(-1,2)$ és a $Q(3,4)$ pont távolsága:

$$\sqrt{(3-(-1))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}.$$

(b) A $P(x,y)$ pont origótól való távolsága:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$ □



1.17. ÁBRA: Az a sugarú, (h,k) középpontú kör az xy síkon.

Egy a sugarú, $C(h,k)$ középpontú **kör(vonal)** definíció szerint a sík azon $P(x,y)$ pontjainak halmaza, amelyeknek C-től való távolsága a-val egyenlő (1.17. ábra). Előbbi képletünk szerint a P pont pontosan akkor illeszkedik a körvonalra, ha

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = a,$$

(azaz ha

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2. \qquad (1)$$

Az (1) egyenlet a (h,k) középpontú, a sugarú kör **kanonikus egyenlete**. Az origó középpontú, $a=1$ sugarú **egységkör** egyenlete:

$$x^2+y^2=1.$$

6. PÉLDA

(a) A $(3,4)$ középpontú, 2 sugarú kör egyenlete:

$$(x-3)^2+(y-4)^2=2^2=4$$

(b) Az

$$(x-1)^2+(y+5)^2=3$$

egyenletű kör esetében $h=1$, $k=-5$ és $a=\sqrt{3}$. A kör középpontja tehát a $(h,k)=(1,-5)$ pont, sugara pedig $a=\sqrt{3}$. □

Amennyiben egy kör egyenlete nem kanonikus alakban van felírva, akkor a teljes négyzetté alakítás algebrai technikáját alkalmazva hozhatjuk kanonikus alakra.

7. PÉLDA **Kör sugarának és középpontjának megállapítása.**
Melyik pont a középpontja és mekkora a sugara a

$$x^2+y^2+4x-6y-3=0$$

egyenletű körnek?

Megoldás. Az egyenlet bal oldalán teljes négyzeteket alakítunk ki:

$x^2+y^2+4x-6y-3=0$ — Írjuk fel az egyenletet.

$(x^2+4x\quad)+(y^2-6y\quad)=3$ — Csoportosítsuk a tagokat; a konstanst vigyük át a jobb oldalra.

$$\left(x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2\right)+\left(y^2-6x+\left(\frac{-6}{2}\right)^2\right)=$$
$$=3+\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(\frac{-6}{2}\right)^2$$

Adjuk hozzá az x és az y együtthatója felének a négyzetét az egyenlet mindkét oldalához. A bal oldalon a zárójelekben így teljes négyzetek állnak.

$(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)=3+4+9$

$(x+2)^2+(y-3)^2=16$ — Írjuk fel a zárójelek között szereplő kifejezéseket a megfelelő lineáris kifejezés négyzeteként

A kör középpontja a $(-2,3)$ pont, sugara pedig $a=4$. □

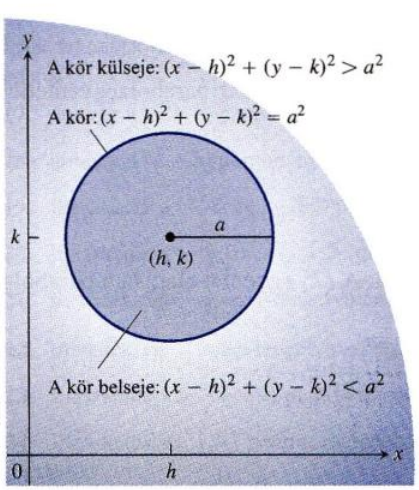
Az

$$(x-h)^2+(y-k)^2<a^2$$

egyenlőtlenséget kielégítő (x,y) pontok alkotják a kör **belsejét**, az

$$(x-h)^2+(y-k)^2>a^2$$

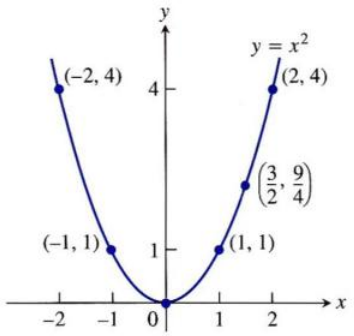
egyenlőtlenséget kielégítő (x,y) pontok pedig a kör **külsejét**; l. az 1.18. ábrát.



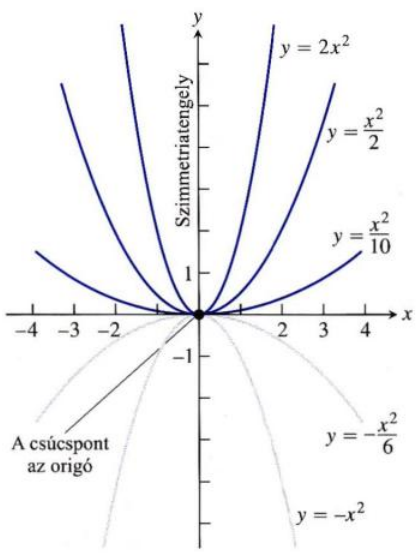
1.18. ÁBRA: Az $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ egyenletű kör belseje és külseje.

Parabola

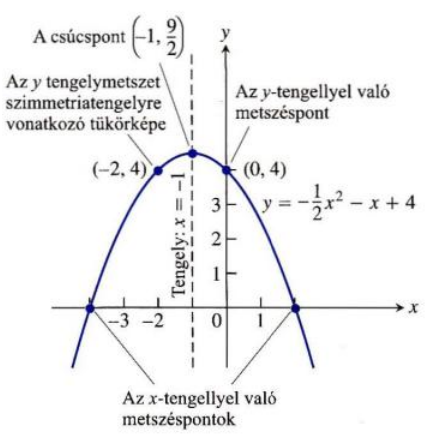
A parabola geometriai definíciójával és tulajdonságaival a 10.1. alfejezetben foglalkozunk. Ehelyütt parabolán egyszerűen az $y=ax^2+bx+c$ alakú egyenletet kielégítő pontok halmazát értjük.



1.19. ÁBRA: Az $y = x^2$ egyenletű parabola.



1.20. ÁBRA: Az a nem csupán azt határozza meg, hogy a parabola szárai fölfelé vagy lefelé nyílnak, de a parabola „szélességéről" is felvilágosítást nyújt. A parabola annál „szélesebb", minél közelebb van a a 0-hoz, és annál „keskenyeb", minél nagyobb az $|a|$ abszolútérték.



1.21. ÁBRA: A 9. példában szereplő parabola.

8. PÉLDA **Az $y = x^2$ egyenletű parabola.**

Tekintsük az $y = x^2$ egyenletet. Az egyenletet kielégítik például a következő pontok: $(0,0)$, $(1,1)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, $(-1,1)$, $(2,4)$, $(-2,4)$. Az egyenletet kielégítő összes ponttal együtt ezek is egy folytonos, parabolának nevezett görbére illeszkednek (l. az 1.19. ábrát). □

Az

$$y = ax^2$$

egyenletet kielégítő pontok egy **parabolára** illeszkednek, amelynek **tengelye** (**szimmetriatengelye**) az y-tengely, **csúcspontja** (az a pont, amelyben a parabola metszi a szimmetriatengelyét) pedig az origó. A parabola szárai „fölfelé nyílnak", amennyiben $a > 0$, és lefelé, ha $a < 0$. Minél nagyobb az a együttható $|a|$ abszolútértéke, a parabola annál „karcsúbb", szárai annál meredekebben törnek fölfelé (vagy lefelé), l. az 1.20. ábrát.

Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletnek megfelelő parabolát az $y = x^2$ egyenletű parabola „transzformációjával" (eltolásával, illetve nyújtásával vagy zsugorításával) kapjuk meg. Erről részletesebben az 1.5. alfejezetben lesz szó.

Az $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ egyenletű görbe

Az $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ egyenletet kielégítő pontok egy parabolára illeszkednek. A parabola szárai „fölfelé nyílnak", amennyiben $a > 0$ és lefelé, ha $a < 0$. A parabola tengelye az

$$x = -\frac{b}{2a} \tag{2}$$

egyenletű egyenes. A parabola csúcspontjának (vagyis a parabola és a tengely metszéspontjának) x-kooordinátája $x = -\frac{b}{2a}$; a csúcspont y-koordinátáját úgy kapjuk meg, hogy a parabola egyenletébe behelyettesítjük az $x = -\frac{b}{2a}$ értéket.

Ha $a = 0$, akkor az $y = bx + c$ egyenletet kapjuk, amely egy egyenes egyenlete. Azt, hogy (2) valóban a tengely egyenlete, a teljes négyzetté alakítás technikájával igazolhatjuk (l. a 4.1. pontot).

9. PÉLDA **Parabola ábrázolása.**

Ábrázoljuk az $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$ egyenletű parabolát.

Megoldás. Egyenletünket az $y = ax^2 + bx + c$ általános parabolaegyenlettel összevetve látjuk, hogy:

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c = 4.$$

Mivel $a < 0$, a parabola szárai lefelé nyílnak. A (2) egyenlet alapján a parabola tengelye az

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2 \cdot (-1/2)} = -1.$$

egyenletű egyenes.

Az $x = -1$ értéket behelyettesítjük a parabola egyenletébe:

$$y = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) + 4 = \frac{9}{2}.$$

A parabola csúcspontja tehát a $(-1, \frac{9}{2})$ pont. A parabola x-tengellyel való metszéspontjait az $y = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x^2 - x + 4 &= 0 \\ x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ (x-2)(x+4) &= 0 \\ x = 2, \quad x &= -4 \end{aligned}$$

A parabolát az 1.21. ábrán vázoltuk, amelyen néhány további pontot is feltüntettünk. □

1.2. Feladatok

Növekmények és távolságok

Egy részecske mozgásának kezdőpontja az A, végpontja a B pont. Határozzuk meg a Δx és Δy növekményeket, valamint a két pont távolságát (1–4. feladatok).

1. $A(3,2)$, $B(-1,-2)$ **2.** $A(-1,-2)$, $B(-3,-2)$

3. $A(-3,2;-2)$, $B(-8,1;-2)$ **4.** $A(\sqrt{2},4)$, $B(0;1,5)$

Mely pontok elégítik ki az alábbi egyenleteket, illetve egyenlőtlenséget (5–8. feladatok)?

5. $x^2+y^2=1$ **6.** $x^2+y^2=2$

7. $x^2+y^2\leq 3$ **8.** $x^2+y^2=0$

Egyenesek meredeksége és metszéspontja

Ábrázoljuk a kooordináta-rendszerben az A és a B pontot, majd határozzuk meg az AB egyenes meredekségét (ha van neki). Állapítsuk meg az AB-re merőleges egyenes meredekségét is (ha van neki). (9–12. feladatok.)

9. $A(-1,2)$, $B(-2,-1)$ **10.** $A(-2,1)$, $B(2,-2)$

11. $A(2,3)$, $B(-1,3)$ **12.** $A(-2,0)$, $B(-2,-2)$

Írjuk fel a megadott pontokon átmenő vízszintes, illetve függőleges egyenesek egyenletét (13–15. feladatok).

13. $(-1,4/3)$ **14.** $(\sqrt{2};-1,3)$

15. $(0,-\sqrt{2})$ **16.** $(-\pi,0)$

Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely (17–30. feladatok)

17. átmegy a $(-1,1)$ ponton, meredeksége pedig -1;

18. átmegy a $(2,-3)$ ponton, meredeksége pedig $\frac{1}{2}$;

19. illeszkedik a $(3,4)$ és $(-2,5)$ pontokra;

20. illeszkedik a $(-8,0)$ és $(-1,3)$ pontokra;

21. meredeksége $-\frac{5}{4}$, az y-tengelymetszete pedig 6;

22. meredeksége $\frac{1}{2}$, az y-tengelymetszete pedig -3;

23. illeszkedik a $(-12,-9)$ pontra, meredeksége pedig 0;

24. illeszkedik a $(\frac{1}{3},4)$ pontra, meredeksége pedig nem értelmezhető;

25. y-tengelymetszete 4, x-tengelymetszete pedig -1;

26. y-tengelymetszete -6, x-tengelymetszete pedig 2;

27. illeszkedik a $(5,-1)$ pontra, és párhuzamos a $2x+5y=15$ egyenletű egyenessel;

28. illeszkedik a $(-\sqrt{2},2)$ pontra, és párhuzamos a $\sqrt{2}x+5y=$ $=\sqrt{3}$ egyenletű egyenessel;

29. illeszkedik a $(4,10)$ pontra, és merőleges a $6x-3y=5$ egyenletű egyenesre;

30. illeszkedik a $(0,1)$ pontra, és merőleges a $8x-13y=13$ egyenletű egyenesre;

Állapítsuk meg, melyik pontokban metszi a megadott egyenes az x-, illetve az y-tengelyt. Ábrázoljuk az egyenest a tengelyekkel alkotott metszéspontjai alapján (31–34. feladatok).

31. $3x+4y=12$ **32.** $x+2y=-4$

33. $\sqrt{2}x-\sqrt{3}y=\sqrt{6}$ **34.** $1,5x-y=-3$

35. Mit mondhatunk általánosságban az $Ax+By=C_1$ és a $Bx-Ay=C_2$ egyenletű egyenesekről (amennyiben $A\neq 0$ és $B\neq 0$)? Válaszunkat indokoljuk.

36. Mit mondhatunk általánosságban az $Ax+By=C_1$ és az $Ax+By=C_2$ egyenletű egyenesekről (amennyiben $A\neq 0$ és $B\neq 0$)? Válaszunkat indokoljuk.

Növekmények és elmozdulás

37. Melyik pontba került az a részecske, amely az $A(-2,3)$ pontból indult, koordinátáinak megváltozása pedig $\Delta x=5$, illetve $\Delta y=-6$?

38. Melyik pontba került az a részecske, amely az $A(6,0)$ pontból indult, koordinátáinak megváltozása pedig $\Delta x=-6$, illetve $\Delta y=0$?

39. Amíg egy részecske az $A(x,y)$ pontból a $B(3,-3)$ pontba ért, koordinátáinak megváltozása $\Delta x=5$ és $\Delta y=6$ volt. Állapítsuk meg x és y értékét.

40. Egy részecske az $A(1,0)$ pontból indulva teljes kört ír le – az óramutató járásával ellenkező irányban – az origó körül. Mekkora a Δx és a Δy?

Körök

Írjuk fel a $C(h,k)$ középpontú, a sugarú körök egyenletét. Ábrázoljuk a kört az xy-síkon, tüntessük fel az ábrán a kör középpontját és – amennyiben létezik – a tengelyekkel való metszéspontját (41–46. feladatok).

41. $C(0,2)$, $a=2$ **42.** $C(-3,0)$, $a=3$

43. $C(-1,5)$, $a=\sqrt{10}$ **44.** $C(1,1)$, $a=\sqrt{2}$

45. $C(-\sqrt{3},-2)$, $a=2$ **46.** $C(3,1/2)$, $a=5$

Ábrázoljuk az egyenletükkel megadott köröket. Valamennyi ábrában tüntessük fel a kör középpontját és – amennyiben létezik – a tengelyekkel való metszéspontját (47–52. feladatok).

47. $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ **48.** $x^2+y^2-8x+4y+16=0$

49. $x^2+y^2-3y-4=0$ **50.** $x^2+y^2-4x-\frac{9}{4}=0$

51. $x^2+y^2-4x+4y=0$ **52.** $x^2+y^2+2x=3$

Parabolák

Ábrázoljuk a parabolákat. Minden esetben tüntessük fel a parabola csúcspontját, tengelyét és a koordinátatengelyekkel való metszéspontjait (53–60. feladatok).

53. $y=x^2-2x-3$ **54.** $y=x^2+4x+3$

55. $y=-x^2+4x$ **56.** $y=-x^2+4x-5$

57. $y=-x^2-6x-5$ **58.** $y=2x^2-x+3$

59. $y=\frac{1}{2}x^2+x+4$ **60.** $y=-\frac{1}{4}x^2+2x+4$

Egyenlőtlenségek

Határozzuk meg az xy-sík azon tartományait, amelyeknek pontjai kielégítik az alábbi egyenlőtlenségeket, illetve egyenlőtlenségpárokat (61–68. feladatok).

61. $x^2+y^2>7$ **62.** $x^2+y^2<5$

63. $(x-1)^2+y^2\le 4$ **64.** $x^2+(y-2)^2\ge 4$

65. $x^2+y^2>1$, $x^2+y^2<4$

66. $x^2+y^2\le 4$, $(x+2)^2+y^2\le 4$

67. $x^2+y^2+6y<0$, $y>-3$

68. $x^2+y^2-4x+2y>4$, $x>2$

69. Írjunk fel olyan egyenlőtlenséget, amelyet a $(-2,1)$ középpontú, $\sqrt{6}$ sugarú kör belső pontjai elégítenek ki.

70. Írjunk fel olyan egyenlőtlenséget, amelyet a $(-4,2)$ középpontú, 4 sugarú körön kívül eső pontok elégítenek ki.

71. Írjunk fel egy egyenlőtlenségpárt, amelyet az origó középpontú, $\sqrt{2}$ sugarú körvonalán, illetve belsejében fekvő pontok közül pontosan azok elégítenek ki, amelyek az $(1,0)$ pontra illeszkedő függőleges egyenesen vagy attól jobbra helyezkednek el.

72. Írjunk fel egy egyenlőtlenségpárt, amelyet az origó középpontú, 2 sugarú körön kívül fekvő pontok közül pontosan azok elégítenek ki, amelyek az $(1,3)$ középpontú, az origón áthaladó kör belsejében helyezkednek el.

Metszéspontok meghatározása

Ábrázoljuk az egyenletükkel megadott alakzatokat és határozzuk meg a metszéspontjukat (vagy metszéspontjaikat) (73–80. feladatok).

73. $y=2x$, $x^2+y^2=1$

74. $x+y=1$, $(x-1)^2+y^2=1$

75. $y-x=1$, $y=x^2$

76. $x+y=0$, $y=-(x-1)^2$

77. $y=-x^2$, $y=2x^2-1$

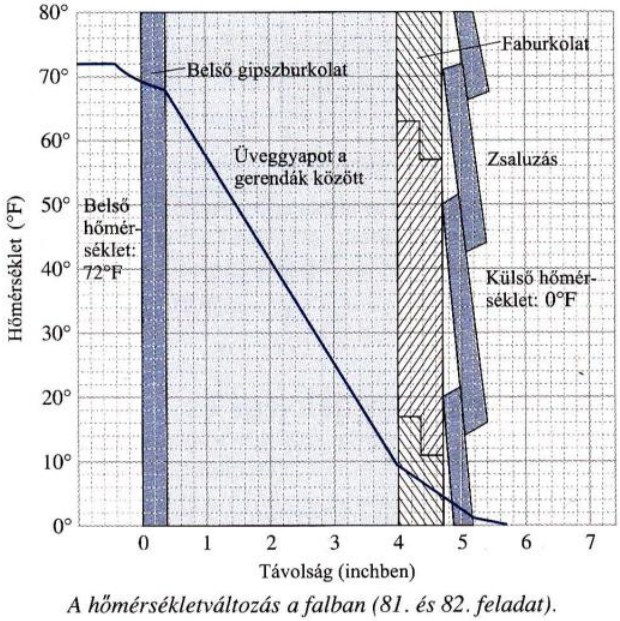
78. $y=\frac{1}{4}x^2$, $y=(x-1)^2$

79. $x^2+y^2=1$, $(x-1)^2+y^2=1$

80. $x^2+y^2=1$, $x^2+y=1$

Alkalmazások

81. Hőszigetelés I Olvassuk le a grafikon egyes szakaszainak meredekségét, és becsüljük meg, mekkora az 1 inchre (2,54 cm-re) eső hőmérsékletváltozás Fahrenheit-fokban (a) a belső gipszburkolatban, (b) az üveggyapot szigetelésben és (c) a külső faburkolatban.

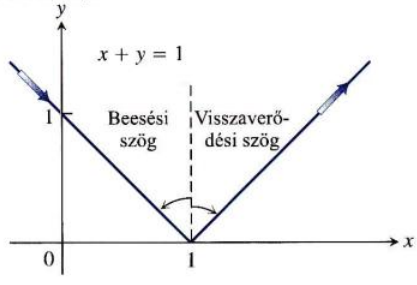


A hőmérsékletváltozás a falban (81. és 82. feladat).

82. Hőszigetelés II Az előző feladatban melyik anyag a legjobb és melyik a legrosszabb szigetelő? Miért?

83. Hidrosztatikai nyomás A búvár által a víz alatt érzékelt nyomás a víz felszíne alatt d távolságban a $p=kd+1$ egyenlettel adható meg, ahol k egy állandó. 100 méter mélyen a nyomás körülbelül 10,94 atmoszféra. Mekkora a nyomás 50 méteres mélységben?

84. Fényvisszaverődés Egy fénysugár az $x+y=1$ egyenes mentén érkezik a 2. síknegyed felől, és az x-tengelyről visszaverődik. Írjuk fel a visszaverődő fénysugár egyenesének egyenletét, ha tudjuk, hogy a beesési szög megegyezik a visszaverődési szöggel (l. az ábrát).



A 84. feladatban szereplő, az x-tengelyről visszaverődő fénysugár. A beesési és a visszaverődési szöget a szaggatott vonallal jelölt függőlegestől mérjük.

85. A Fahrenheit- és a Celsius-skála Ábrázoljuk az FC-síkon a Fahrenheit-, illetve Celsius-fokban mért hőmérséklet kapcsolatát megadó

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

egyenletnek megfelelő alakzatot. Ugyanezen a grafikonon tüntessük fel az $C = F$ egyenletű egyenest is. Van-e olyan hőmérséklet, amelyet a Celsius-, illetve a Fahrenheit-skálán ugyanaz a számérték ad meg?

86. A Mt. Washington hágó A mérnökök a vasútpálya meredekségét **emelkedésnek** nevezik, és általában százalékban adják meg. Sík területen az emelkedés általában kisebb, mint 2%, a hegyekben akár 4% is lehet; de általában nem haladja meg az 5%-ot.

A Mt. Washington-hegyre (New Hampshire) vezető fogaskerekű vasút pályájának legnagyobb emelkedése kivételesen nagy, 37,1%. Ezen a pályaszakaszon a kocsik legelső ülései 4,25 méterrel vannak magasabban, mint a leghátsók. Körülbelül mekkora a legelső és a leghátsó ülések távolsága?

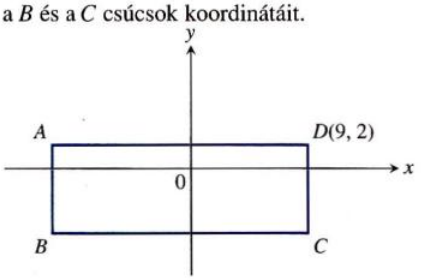
További példák és feladatok

87. Az oldalak hosszának kiszámításával igazoljuk, hogy az $A(1,2)$, $B(5,5)$ és $C(4,-2)$ pontok által meghatározott háromszög egyenlő szárú, de nem egyenlő oldalú.

88. Igazoljuk, hogy az $A(0,0)$, a $B(1,\sqrt{3})$ és a $C(2,0)$ pontok egy egyenlő oldalú háromszög csúcsai.

89. Igazoljuk, hogy az $A(2,-1)$, a $B(1,3)$ és a $C(-3,2)$ pontok egy négyzet csúcsai, és határozzuk meg a negyedik csúcspont koordinátáját.

90. Az ábrán látható $ABCD$ téglalap oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel. A téglalap hosszabbik oldala háromszorosa a rövidebb oldalnak, kerülete pedig 56 egység. Határozzuk meg az A, a B és a C csúcsok koordinátáit.



91. Három olyan paralelogramma van, amelynek egy-egy csúcsa a $(-1,1)$, a $(2,0)$ és a $(2,3)$ pont. Vázoljuk fel mind a hármat, mindegyik esetben határozzuk meg a negyedik csúcs koordinátáit.

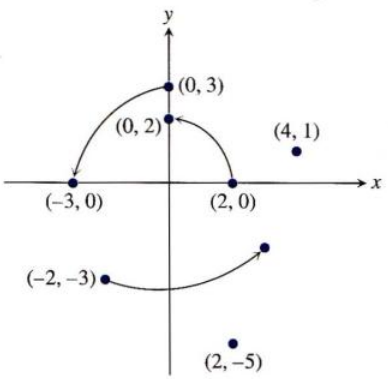
92. Az óramutató járásával ellentétes irányú, 90°-os elforgatás a $(2,0)$ pontot a $(0,2)$ pontba, a $(0,3)$ pontot a $(-3,0)$ pontba viszi, amint az ábra is mutatja. Melyik pont lesz az alábbi pontok képe?

(a) $(4,1)$ **(b)** $(-2,-3)$

(c) $(2,-5)$ **(d)** $(x,0)$

(e) $(0,y)$ **(f)** (x,y)

(g) Melyik pont képe a $(10,3)$ pont?



93. A k paraméter mely értéke mellett lesz a $2x + ky = 3$ egyenletű egyenes merőleges a $4x + y = 1$ egyenletű egyenesre? A k mely értékénél lesz a két egyenes párhuzamos?

94. Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely az $(1,2)$ pontra, valamint az $x + 2y = 3$ és a $2x - 3y = -1$ egyenletű egyenesek metszéspontjára is illeszkedik.

95. Szakasz felezőpontja Igazoljuk, hogy a

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

pont a $P(x_1, x_2)$ és $Q(x_2, y_2)$ pontok által meghatározott szakasz felezőpontja.

96. Pont és egyenes távolsága A $P(x_0, y_0)$ pontnak az L : $Ax + By = C$ egyenestől való távolságát a következő, háromlépéses eljárást követve határozhatjuk meg. (A 12.5. alfejezetben bemutatunk egy valamivel gyorsabb módszert is).

1. Írjuk fel az L-re merőleges, P-n átmenő M egyenes egyenletét.

2. Számítsuk ki az L és az M egyenes Q metszéspontjának koordinátáit.

3. Határozzuk meg a P és a Q pont távolságát.

Ezeket a lépéseket követve határozzuk meg a P pont L egyenestől való távolságát a következő esetekben:

(a) $P(2,1)$, $L : y = x + 2$

(b) $P(4,6)$, $L : 4x + 3y = 12$

(c) $P(a,b)$, $L : x = -1$

(d) $P(x_0, y_0)$, $L : Ax + By = C$

1.3. Függvények és grafikonok

Az analízis mindenekelőtt függvényekkel foglalkozik. A függvények a világ matematikai leírásában alapvető szerepet játszanak. Ebben a fejezetben a függvényekkel, a függvények grafikonjával és ábrázolásukkal foglalkozunk.

Függvények. Függvény értelmezési tartománya és értékkészlete

A víz forráspontja a tengerszint feletti magasságtól, a befektetett összegre járó kamat a lekötés időtartamától, a kör területe a sugarától, egy egyenes pályán mozgó pontnak a kiindulóponttól való távolsága pedig a sebességétől függ.

Valamennyi esetben adott egy mennyiség – nevezzük y-nak –, amelynek értéke egy másik, x-nek nevezett mennyiség értékétől függ. Mivel y értéke egyedül x értékétől függ, azt mondjuk, hogy y az x függvénye. Az y-t gyakran egy szabállyal adjuk meg, amelyből kiderül, miként kell kiszámítani a különböző x értékekhez tartozó y értékeket. A $T = \pi r^2$ egyenlet például ilyen szabály: megadja, miként lehet meghatározni egy kör területét sugarának ismeretében.

Az analízisben, amikor általánosságban beszélünk függvényekről, akkor az

$$y = f(x)$$

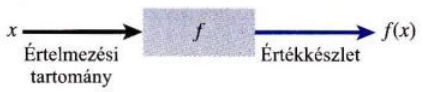
jelölést használjuk arra, hogy y az x függvénye. Magát a függvényt az f betű jelöli, az x **független változó** a „bemenet", az y **függő változó** az adott x-nek megfelelő függvényérték. Az $f(x)$ alkalmanként magát az f függvényt, máskor az x argumentumhoz tartozó függvényértéket jelöli, ez általában nem okoz félreértést.

> DEFINÍCIÓ **Függvény.**
> A D halmazból az Y halmazba leképező **függvénynek** nevezünk minden olyan szabályt, amely a D halmaz minden x eleméhez hozzárendeli az Y halmaz pontosan egy $f(x)$ elemét.

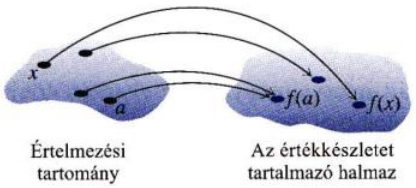
A bemenetekből álló D halmazt a függvény **értelmezési tartományának**, az $f(x)$ függvényértékek halmazát pedig (ahol x a D halmaz valamennyi elemét befutja), a függvény **értékkészletének** nevezzük. Az Y halmaznak olyan elemei is lehetnek, amelyek a függvény értékkészletének nem elemei. Az f függvény értelmezési tartományát általában $D(f)$ (vagy D_f), értékkészletét pedig $R(f)$ (vagy R_f) jelöli.

Egy függvény értelmezési tartományának és értékkészletének elemei bármilyen objektumok lehetnek, de az analízisben elsősorban olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyeknek értelmezési tartománya és értékkészlete egyaránt a valós számok halmaza. (A 13–16. fejezetekben szó lesz többváltozós függvényekről is.)

Egy f függvényt tekinthetünk olyan automatának is, amely minden x inputhoz kidobja a megfelelő $f(x)$ outputot (l. az 1.22. ábrát). Jó példák erre a számológépek bizonyos gombjai. A $\sqrt{x}$ jelzésű gomb megnyomása például azt eredményezi, hogy a számológép kijelzőjén megjelenik az előzőleg beírt nemnegatív szám négyzetgyöke. Az output általában az x szám négyzetgyökének tizedestört-közelítése. Amennyiben az input negatív szám (vagyis $x < 0$), akkor a számológép hibát jelez („E" mint „Error"), az ilyen számok ugyanis nem elemei az elfogadható input-értékekből álló értelmezési tartománynak. Jegyezzük meg: a számológép $\sqrt{x}$ gombja nem ugyanaz a függvény, mint a szokásos matematikai $y = \sqrt{x}$ függvény, mivel az előbbi a függvényértékeknek csak egy véges közelítését adja meg.



1.22. ÁBRA: Az f függvény automataként ábrázolva.



1.23. ÁBRA: A D halmazon értelmezett, Y halmazba leképező függvény a D minden eleméhez az Y pontosan egy elemét rendeli hozzá.

Egy függvényt megjeleníthetünk diagrammal is, ekkor **nyilakkal** jelezzük az egyes input-értékekhez rendelt outputokat (1.23. ábra). A nyilak a D halmaz minden elemének az Y halmaz pontosan egy elemét feleltetik meg. Az ábrában az x-nek az $f(x)$, az a-nak az $f(a)$ függvényérték felel meg, stb.

Egy függvény értelmezési tartománya a kontextustól függően szűkebb is lehet, mint az összes szóba jöhető inputérték halmaza. Például a fentebb említett, a kör területét meghatározó $A = \pi r^2$ függvény esetében az r sugár csak pozitív lehet. Ha egy $y = f(x)$ függvény meghatározásakor az értelmezési tartományt nem rögzítjük, akkor úgy tekintjük, hogy a függvény a valós számok legbővebb olyan halmazán van értelmezve, amelynek elemeire a függvényt definiáló képlet valós számot ad. Ezt nevezzük a függvény **természetes értelmezési tartományának**. Amennyiben ennek egy részhalmazát tekintjük csak értelmezési tartománynak, azt mindig külön jeleznünk kell. Az $y = x^2$ függvény természetes értelmezési tartománya például az összes valós szám halmaza; ha a függvényt leszűkítjük például a pozitív x értékekre, akkor ezt írjuk: $y = x^2$, $x > 0$.

Ha egy függvény értelmezési tartományát megváltoztatjuk, azzal általában a függvény értékkészlete is megváltozik. Az $y = x^2$ függvény értékkészlete például a $[0, \infty)$ halmaz. Az $y = x^2$, $x \geq 2$ függvény értékkészlete a 2-nél nem kisebb valós számok négyzeteinek halmaza, vagyis az $\{x^2 : x \geq 2\}$ (vagy $\{y : y \geq 4\}$ vagy egyszerűen $[4, \infty)$) halmaz.

Azokat a függvényeket, amelyeknek értékkészlete a valós számok egy részhalmaza, valós értékű függvényeknek nevezzük. Az ilyen függvények értelmezési tartománya és értékkészlete általában egy-egy intervallum vagy intervallumok uniója. A szóban forgó intervallumok lehetnek nyíltak, zártak vagy félig nyíltak, végesek vagy végtelenek.

1. PÉLDA **Függvény értelmezési tartományának, illetve értékkészletének meghatározása.**

Igazoljuk, hogy az alábbi függvények (természetes) értelmezési tartománya, illetve értékkészlete a megadott halmaz.

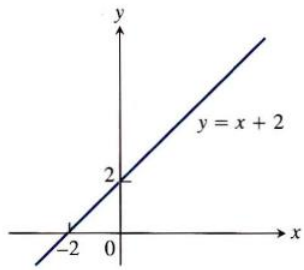
Függvény	Értelmezési tartomány (x)	Értékkészlet (y)
$y = x^2$	(∞, ∞)	$[0, \infty)$
$y = 1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

Megoldás. Az $y = x^2$ formula bármely x inputra ad outputot, az értelmezési tartomány tehát az összes valós szám halmaza, vagyis a $(-\infty, \infty)$ intervallum. A függvény értékkészlete a $[0, \infty)$ végtelen intervallum, mivel minden valós szám négyzete nemnegatív, továbbá minden nemnegatív y valós számhoz található olyan valós szám (például az y négyzetgyöke), amelynek a négyzete éppen y: $y = \left(\sqrt{y}\right)^2$, $y \geq 0$.

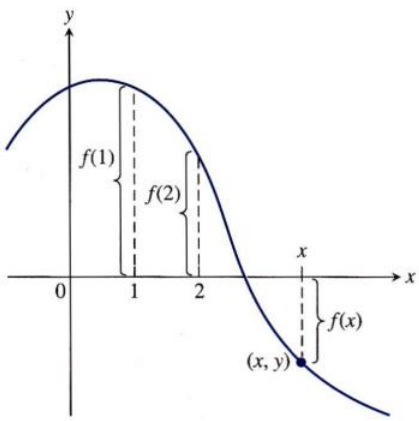
Az $y = 1/x$ formula a 0 kivételével minden x valós számhoz egy valós számot rendel; *0-val nem lehet osztani!* A függvény értékkészlete, vagyis a nemnulla számok reciprokainak halmaza a nemnulla számok halmaza, ami abból látható, hogy az ilyen y számok esetében $y = 1/(1/y)$.

Az $y = \sqrt{x}$ kifejezés minden nemnegatív x esetén értelmes, a függvény értelmezési tartománya tehát a $[0, \infty)$ intervallum. Az értékkészlet ugyancsak a $[0, \infty)$ halmaz, mivel minden nemnegatív szám négyzetgyöke valamely számnak: az illető szám négyzetének.

Ha $y = \sqrt{4 - x}$, akkor $4 - x$ nem lehet negatív, teljesülnie kell tehát a $4 - x \geq$ ≥ 0, vagyis az $x \leq 4$ egyenlőtlenségnek. A függvény az egyenlőtlenségnek eleget tevő x számok mindegyikéhez egy valós számot rendel, értelmezési tartománya tehát valóban a $(-\infty, 4]$ intervallum. A függvény értékkészlete megegyezik az



1.24. ÁBRA: Az $f(x) = x + 2$ függvény grafikonja azoknak az (x,y) pontoknak a halmaza, amelyeknek a koordinátáira teljesül az $y = x + 2$ összefüggés.



1.25. ÁBRA: Ha (x,y) eleme az f függvény grafikonjának, akkor az $y = f(x)$ érték azt mutatja, hogy ez a pont mennyivel van az x osztáspont fölött (vagy alatta, ha y negatív).

x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

A grafikonok ábrázolására képes számológépek, sőt a számítógépek is lényegében ezt a módszert követik – ez a kérdés így velük kapcsolatban is fölmerülhet.

$y = \sqrt{x}$ függvény értékkészletével: a $[0,\infty)$ intervallum, vagyis a nemnegatív valós számok halmaza.

Az $y = \sqrt{1-x^2}$ kifejezés a $[-1,1]$ zárt intervallum minden elemére értelmezve van, az intervallumon kívüli x számok esetében azonban $1 - x^2$ negatív, négyzetgyöke ennélfogva nem lehet valós szám. Az x szám tehát -1 és 1 között változik. Az $1 - x^2$ kifejezés értékei a 0 és 1 közötti valós számok, és ugyanez áll a négyzetgyökeikre is, a függvény értékkészlete ezért a $[0,1]$ zárt intervallum. □

Függvény grafikonja

A függvényekről sokat elárul a grafikonjuk is. A D halmazon értelmezett f valós függvény **grafikonja** a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer azon pontjainak halmaza, amelyeknek a koordinátái összetartozó input-output párok. Ezt a halmazt így is jelölhetjük:

$$\{(x, f(x)) : x \in D\}.$$

Az $f(x) = x + 2$ függvény grafikonja tehát azoknak az (x,y) pontoknak a halmaza, amelyeknek a koordinátái kielégítik az $y = x + 2$ összefüggést (1.24. ábra).

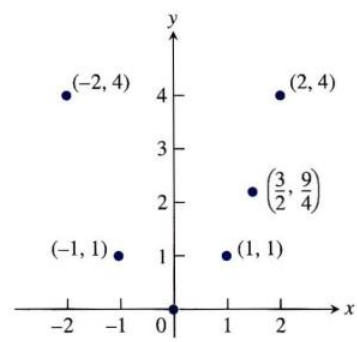
A függvény grafikonja a függvényre vonatkozóan fontos információkkal szolgál. Ha az (x,y) pont rajta van az f függvény grafikonján, akkor $y = f(x)$ azt mutatja, milyen magasan van ez a pont az x fölött; ez a magasság – az $f(x)$ előjelétől függően pozitív és negatív is lehet (1.25. ábra).

2. PÉLDA **Függvény grafikonjának ábrázolása.**

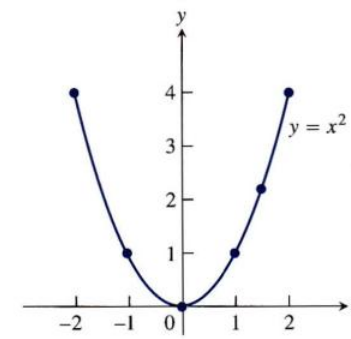
Vázoljuk az $y = x^2$ függvény grafikonját a $[-2,2]$ intervallum felett.

Megoldás. 1. Készítsünk táblázatot, amelyben néhány, az $y = x^2$ egyenletet kielégítő xy számpár szerepel.

2. Ábrázoljuk az összetartozó (x,y) számpárokat a koordináta-rendszerben.

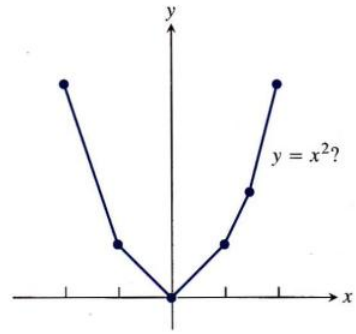


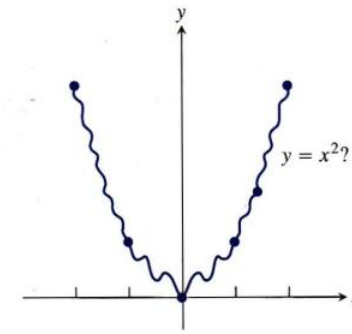
3. Kössük össze a pontokat egy folytonos vonallal; a kapott görbe mellett tüntessük fel az egyenletét. □



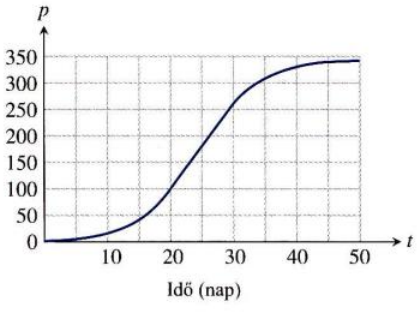
Honnan tudjuk vajon, hogy az $y = x^2$ függvény grafikonja éppen olyan, mint az imént vázoltuk, és nem olyan, mint a következő két grafikon?

A kérdés megválaszolásához további pontokat kell feltüntetnünk a grafikonon, ezekkel kapcsolatban azonban újra fölvethetjük ugyanazt a kérdést: honnan





tudjuk, hogy az ábrázolt pontok *között* hogyan viselkedik a függvény? A végső választ a 4. fejezetben kapjuk meg, ahol a függvény deriváltjának viselkedése alapján vonunk le a grafikon alakjára vonatkozó következtetéseket. Addig azonban megelégszünk azzal, hogy összekötjük a koordináta-rendszerben a megfelelő pontokat.



1.26. ÁBRA: Egy gyümölcslégy-populáció létszámának megváltozása az idő függvényében (3. példa).

3. PÉLDA **Függvénygrafikon használata.**

Az 1.26. ábra egy gyümölcslégy-populáció létszámát mutatja a napokban mért idő függvényében.

(a) Állapítsuk meg, hány tagú volt a populáció a 20., illetve a 45. napon.

(b) Határozzuk meg (közelítőleg) a populációfüggvény értékkészletét a $0 \leq \leq t \leq 50$ időintervallumon.

Megoldás.

(a) Az ábráról leolvasható, hogy a $(20, 100)$ pont rajta van a grafikonon, a 20. napon tehát a populáció $p(20) = 100$ tagot számlált. Hasonlóan: $p(45)$ értéke hozzávetőlegesen 340.

(b) A keresett értékkészlet jó közelítéssel a $[0, 345]$ intervallum. Az ábráról leolvasható, hogy a populáció létszáma az idő előrehaladtával egyre közelebb kerül a 350-hez. □

Függvény numerikus megadása

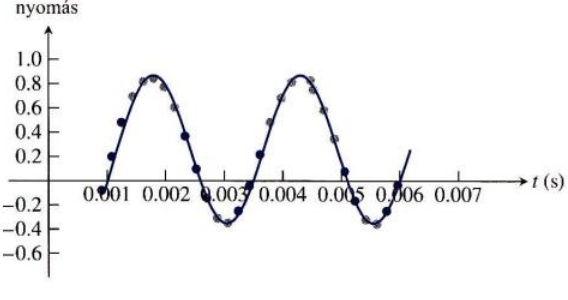
A függények megadására eddig kétféle módszerrel ismerkedtünk meg: a függvény hozzárendelési szabályának algebrai megadásával (a kör területének képlete), illetve a függvény grafikonjának ábrázolásával (2. és 3. példa). Egy függvény ezen kívül **numerikusan**, a függvényértékek táblázatával is megadható, ezt a módszert a természettudósok és a mérnökök is széles körben alkalmazzák. Egy megfelelő táblázat alapján a függvény grafikonja – a 2. példában bemutatott módszerrel, esetleg számítógépes segítséggel – jó közelítéssel felrajzolható. Ha ábránkban csupán a táblázatban szereplő függvényértékeket tüntetjük fel, akkor **pontdiagramról** beszélünk.

4. PÉLDA **Numerikusan adott függvény.**

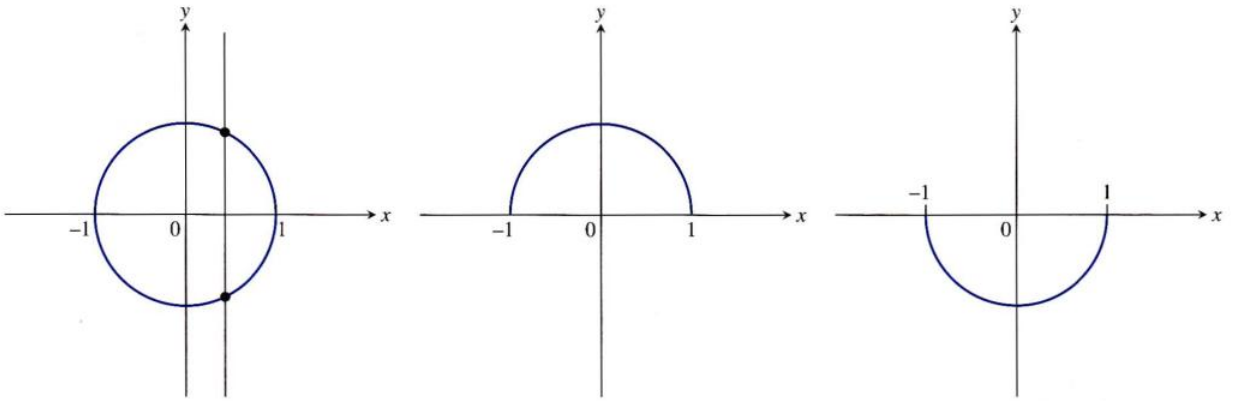
A zenei hangok a levegőben terjedő nyomáshullámok. Az 1.2. táblázat egy hangvilla által keltett légnyomásváltozást mutat az idő függvényében. Ha a függvény adott pontjait ábrázoljuk, és a pontdiagram pontjait összekötjük, az 1.27. ábra szerinti grafikont kapjuk.

Idő	Nyomás	Idő	Nyomás
0,00091	−0,080	0,00362	0,217
0,00108	−0,080	0,00379	0,480
0,00125	0,200	0,00398	0,681
0,00144	0,693	0,00416	0,810
0,00162	0,816	0,00435	0,827
0,00180	0,844	0,00453	0,749
0,00198	0,771	0,00471	0,581
0,00216	0,603	0,00489	0,346
0,00234	0,368	0,00507	0,077
0,00253	0,099	0,00525	−0,164
0,00271	−0,141	0,00543	−0,320
0,00289	−0,309	0,00562	−0,354
0,00307	−0,348	0,00579	0,248
0,00325	−0,248	0,00598	−0,035
0,00344	−0,041		

1.2. TÁBLÁZAT: A hangvilla által keltett nyomás



1.27. ÁBRA: A pontokra folytonos görbét illesztve megkapjuk az 1.2. táblázatban megadott nyomásfüggvény grafikonját.



(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $y = \sqrt{1 - x^2}$ (c) $y = -\sqrt{1 - x^2}$

1.28. ÁBRA: (a) A teljes kör egyetlen $y = f(x)$ függvénynek sem lehet grafikonja, ahogy azt a vertikális teszt mutatja. (b) A felső félkör az $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ függvény grafikonja. (c) Az alsó félkör a $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ függvény grafikonja.

A „vertikális teszt"

Egy függvény grafikonja nem lehet akármilyen görbe. Mivel tetszőleges f függvény az értelmezési tartomány minden x eleméhez csupán egyetlen $f(x)$ értéket rendel, az $y = f(x)$ függvény grafikonját egyetlen függőleges („vertikális") egyenes sem metszheti egynél több pontban. Egy kör ezek szerint egyetlen függvénynek sem lehet a grafikonja, mivel vannak olyan függőleges egyenesek, amelyek a kört két pontban is metszik (1.28.(a) ábra). Amennyiben a eleme az f függvény értelmezési tartományának, úgy az $x = a$ egyenletű függőleges egyenes f grafikonját pontosan az $(a, f(a))$ pontban metszi.

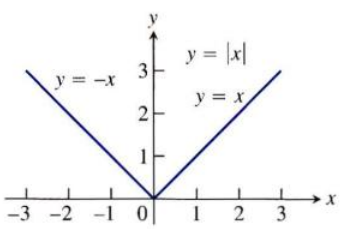
Az 1.28.(a) ábrán látható kört azonban tekinthetjük két függvény grafikonjának: a felső félkör az $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, az alsó pedig a $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ függvény grafikonja (l. az 1.28. ábra (b) és (c) részét).

Szakaszonként definiált függvények

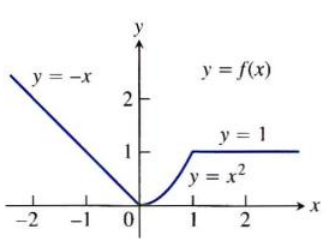
Gyakran előfordul, hogy egy függvényt az értelmezési tartománya különböző részhalmazain eltérő formulákkal adunk meg. Ez volt a helyzet az **abszolútérték-függvény** esetében is, amelynek hozzárendelési szabálya:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0; \text{ illetve} \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

A függvény grafikonja az 1.29. ábrán látható. A következőkben néhány további példát mutatunk szakaszonként megadott függvényekre.



1.29. ÁBRA: Az abszolútérték-függvény értemezési tartománya a $(-\infty, \infty)$, értékkészlete pedig a $[0, \infty)$ intervallum.



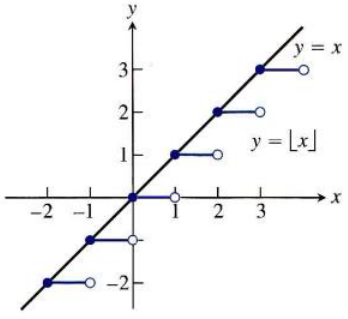
1.30. ÁBRA: Az 5. példában szereplő f függvény grafikonja. A függvényértékek meghatározásakor az értelmezési tartomány különböző részhalmazainak elemeire különböző formulákat kellett alkalmaznunk.

5. PÉLDA **Szakaszosan definiált függvény grafikonja.**
Az alább megadott f függvény minden valós számon értelmezve van, de a függvényértékeket az x értékétől függően három különböző képlet határozza meg:

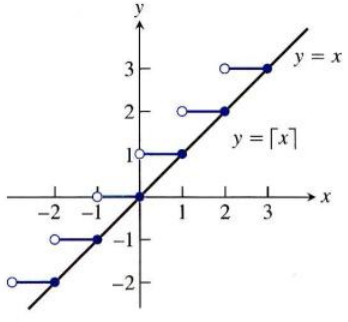
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Ha tehát $x < 0$, akkor a megfelelő függvényértékeket az $y = -x$, ha $0 \leq x \leq 1$, akkor az $y = x^2$, ha pedig $x > 1$, akkor az $y = 1$ képlet adja meg. Az f függvény mindazonáltal *egyetlen*, az összes valós számon értelmezett függvény, amelynek grafikonja az 1.30. ábrán látható.

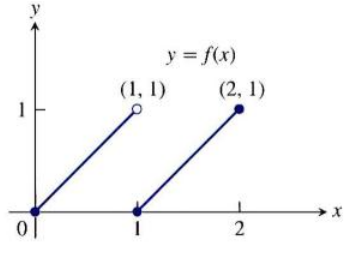
6. PÉLDA **Az alsó egészrészfüggvény.**
Azt a függvényt, amely minden x valós számhoz az x-nél nem nagyobb egész számok közül a legnagyobbat rendeli, **alsó egészrészfüggvénynek** nevezzük. Ebben a könyvben x alsó egészrészét $\lfloor x \rfloor$ jelöli (másutt találkozhatunk az $[x]$, az



1.31. ÁBRA: Az $y = \lfloor x \rfloor$ egészrészfüggvény grafikonja az $y = x$ egyenletű egyenes alatt helyezkedik el (6. példa).



1.32. ÁBRA: Az $y = \lceil x \rceil$ felső egészrészfüggvény grafikonja az $y = x$ egyenletű egyenes fölött helyezkedik el (7. példa).



1.33. ÁBRA: A bal oldali szakasznak a $(0,0)$ pont eleme, az $(1,1)$ viszont nem. A jobb oldali szakaszhoz mindkét végpontja hozzá tartozik.

$[[x]]$ vagy az $\mathrm{int}x$ jelöléssel is). A függvény grafikonját az 1.31. ábra mutatja. Néhány példa:

$$\lfloor 2{,}2 \rfloor = 2, \quad \lfloor 1{,}9 \rfloor = 1, \quad \lfloor 0 \rfloor = 0, \quad \lfloor -1{,}2 \rfloor = -2,$$
$$\lfloor 2 \rfloor = 2, \quad \lfloor 0{,}2 \rfloor = 0, \quad \lfloor -0{,}3 \rfloor = -1, \quad \lfloor -2 \rfloor = -2.$$

7. PÉLDA **A felső egészrészfüggvény.**

Azt a függvényt, amely minden x valós számhoz az x-nél nem kisebb egész számok közül a legkisebbet rendeli, **felső egészrészfüggvénynek** nevezzük; x felső egészrészét $\lceil x \rceil$ jelöli. A függvény grafikonját az 1.32. ábrán tanulmányozhatjuk. Pozitív x-ek esetén ez a függvény adja meg például, hogy mennyit kell fizetnünk x óra elteltével, ha a parkolási díj óránként éppen 1 dollár.

8. PÉLDA **Szakaszosan definiált függvény képlete.**

Írjuk fel annak a szakaszosan definiált függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelynek grafikonja az 1.33. ábra szerinti két szakaszból áll.

Megoldás. Megkeressük a grafikon $(0,0)$ és $(1,1)$, illetve az $(1,0)$ és $(2,1)$ pontokat összekötő szakaszait megadó képleteket, majd ezeket az 5. példa módszerével összekapcsoljuk.

A $(0,0)$ és az $(1,1)$ pont közötti szakasz. A $(0,0)$ és az $(1,1)$ pont közötti szakasz egy olyan egyenes része, amelynek meredeksége $m = (1-0)/(2-1) = 1$, az y-tengelyt pedig a $b = 0$ helyen metszi, egyenlete ennélfogva: $y = x$. A grafikon $(0,0)$ és $(1,1)$ pontok közötti részének a $(0,0)$ pont eleme, az $(1,1)$ viszont nem, ez tehát az $y = x$ függvény azon leszűkítésének grafikonja, amelynek értelmezési tartománya a $0 \le x < 1$ számok halmaza:

$$y = x, \quad 0 \le x < 1.$$

Az $(1,0)$ és az $(2,1)$ pont közötti szakasz. Az $(1,0)$ és $(2,1)$ pontokra illeszkedő egyenes meredeksége $m = (1-0)/(2-1) = 1$, és az egyenes illeszkedik az $(1,0)$ pontra, egyenlete tehát:

$$y = 0 + 1(x-1) \text{ vagy } y = x - 1.$$

Az ábra szerint mind az $(1,0)$, mind a $(2,1)$ pont eleme a függvény grafikonjának, így a szóban forgó szakasz az $y = x - 1$ függvény $[1,2]$ intervallumra való leszűkítésének a grafikonja:

$$y = x - 1, \quad 1 \le x \le 2$$

A kapott formulákat összekapcsoljuk:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ x - 1, & 0 \le 1 \le x \le 2 \end{cases}.$$

□

1.3. Feladatok

Függvények

Határozzuk meg a függvények értelmezési tartományát és értékkészletét (1–6. feladatok).

1. $f(x) = 1 + x^2$

2. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

3. $F(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

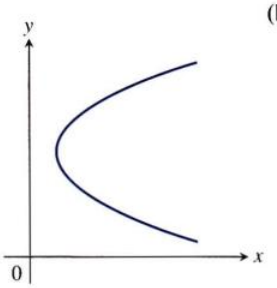
4. $F(t) = \dfrac{1}{1+\sqrt{t}}$

5. $g(z) = \sqrt{4 - z^2}$

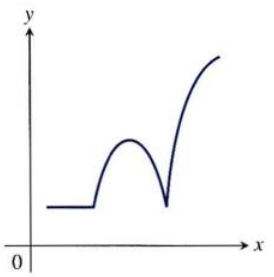
6. $g(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$

A 7. és a 8. feladatban szereplő alakzatok közül melyik lehet egy függvény grafikonja? Miért?

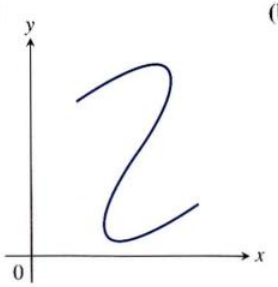
7. **(a)**



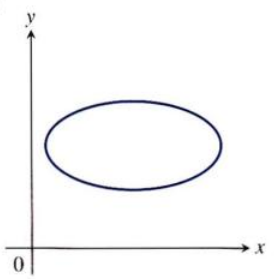
(b)



8. **(a)**



(b)



9. Tekintsük az $y = \sqrt{1/x - 1}$ függvényt.

- **(a)** Lehet-e x negatív?
- **(b)** Lehet-e $x = 0$?
- **(c)** Lehet-e x nagyobb, mint 1?
- **(d)** Mi a függvény értelmezési tartománya?

10. Tekintsük az $y = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$ függvényt.

- **(a)** Lehet-e x negatív?
- **(b)** Lehet-e $\sqrt{x}$ nagyobb mint 2?
- **(c)** Mi a függvény értelmezési tartománya?

A hozzárendelési szabály megkeresése

11. Adjuk meg x függvényeként az x oldalhosszúságú szabályos háromszög kerületét, illetve területét.

12. Írjuk fel a négyzet oldalhosszúságát és területét a négyzet d átlójának függvényeként.

13. Írjuk fel a kocka élének hosszúságát és térfogatát a kocka d testátlójának függvényeként.

14. Az első síknegyedbeli P pont az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonjára illeszkedik. Fejezzük ki P koordinátáit az origóra és P-re illeszkedő egyenes meredekségének függvényeként.

Függvények és grafikonjuk

Állapítsuk meg a függvények értelmezési tartományát és vázoljuk a grafikonjukat (15–20. feladatok).

15. $f(x) = 5 - 2x$

16. $f(x) = 1 - 2x - x^2$

17. $g(x) = \sqrt{|x|}$

18. $g(x) = \sqrt{-x}$

19. $F(t) = t/|t|$

20. $F(t) = 1/|t|$

21. Ábrázoljuk az alábbi egyenleteket kielégítő pontokat, és magyarázzuk meg, miért nem lehetnek az x egyetlen függvényének sem a grafikonjai.

- **(a)** $|y| = x$
- **(b)** $y^2 = x^2$

22. Ábrázoljuk az alábbi egyenleteket kielégítő pontokat, és magyarázzuk meg, miért nem lehetnek az x egyetlen függvényének sem a grafikonjai.

- **(a)** $|x| + |y| = 1$
- **(b)** $|x + y| = 1$

Szakaszosan definiált függvények

Ábrázoljuk a függvények grafikonját (23–26. feladatok).

23. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

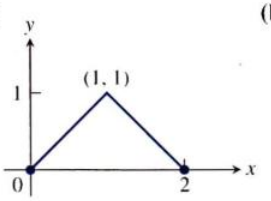
24. $g(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

25. $F(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \le 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$

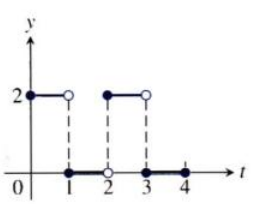
26. $G(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \end{cases}$

Írjuk fel a grafikonjukkal megadott függvények hozzárendelési szabályát (27–30. feladatok).

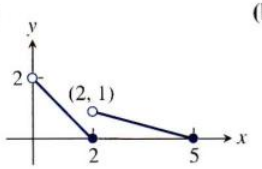
27. **(a)**



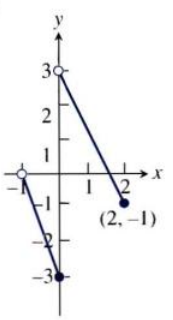
(b)



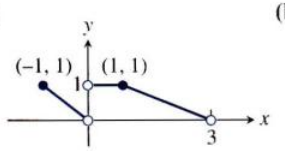
28. **(a)**



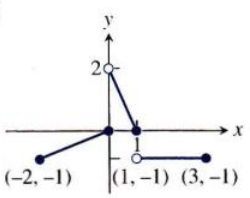
(b)



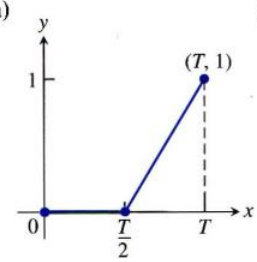
29. **(a)**



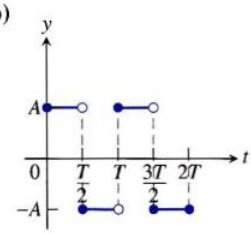
(b)



30. **(a)**



(b)



31. **(a)** Ábrázoljuk közös kooordináta-rendszerben az $f(x) = x/2$ és a $g(x) = 1 + (4/x)$ függvény grafikonját. Az ábra alapján határozzuk meg, x mely értékeire teljesül az $\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}$ egyenlőtlenség.

(b) Ellenőrizzük a megoldást algebrai úton.

32. **(a)** Ábrázoljuk közös kooordináta-rendszerben az $f(x) = 3/(x-2)$ és a $g(x) = 2/(x+1))$ függvény grafikonját. Az ábra alapján határozzuk meg, x mely értékeire teljesül a $\frac{3}{x-2} < \frac{2}{x+1}$ egyenlőtlenség.

(b) Ellenőrizzük a megoldást algebrai úton.

Az egészrészfüggvények

33. Az x milyen értékeire lesz

(a) $\lfloor x \rfloor = 0$; **(b)** $\lceil x \rceil = 0$?

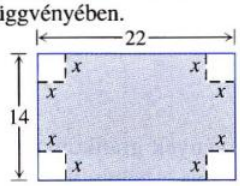
34. Mely x valós számokra teljesül az $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ egyenlet?

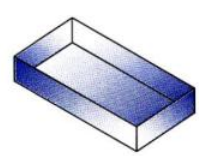
35. Mely x valós számokra teljesül a $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$ egyenlet? Válaszunkat indokoljuk.

36. Ábrázoljuk a $f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geq 0 \\ \lceil x \rceil, & x < 0 \end{cases}$ függvény grafikonját. Miért nevezhetjük $f(x)$-et az x *egészrészének*?

További példák és feladatok

37. Egy téglalap oldalai 14, iletve 24 cm hosszúak. A téglalap sarkaiból egy-egy x oldalhosszúságú négyzetet kivágunk, és a maradékból dobozt hajtogatunk. Fejezzük ki a doboz V térfogatát x függvényében.

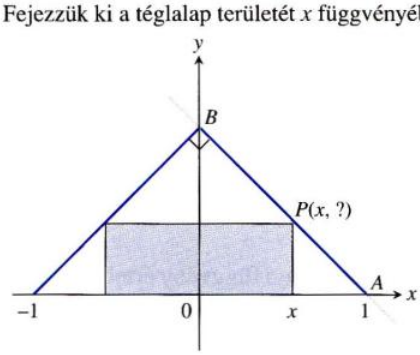




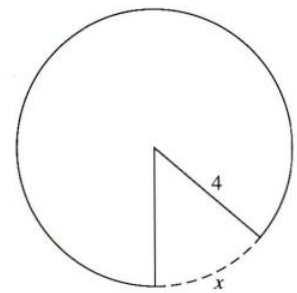
38. Az ábra egy 2 egység alapú egyenlő szárú derékszögű háromszögbe rajzolt téglalapot mutat.

(a) Fejezzük ki a P pont második koordinátáját az x függvényében. (Írjuk fel először az AB egyenes egyenletét.)

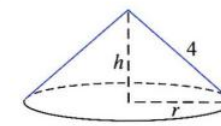
(b) Fejezzük ki a téglalap területét x függvényében.



39. **Kúphajtogatás** Vágjunk ki egy 4 cm sugarú körlapból egy x cm ívhosszúságú körcikket, ahogy az (a) ábra mutatja. A maradékból a (b) ábra szerint hajtogassunk kúpot, amelynek alapja egy r sugarú kör, magassága pedig h, l. a (b) ábrát.



(a)



(b)

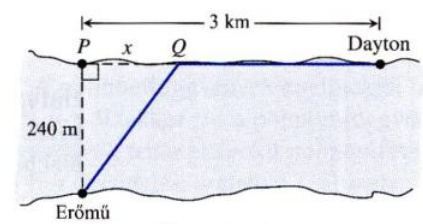
(a) Igazoljuk, hogy a kúp alapjának kerülete $8\pi - x$.

(b) Fejezzük ki r-t x függvényében.

(c) Fejezzük ki h-t x függvényében.

(d) Írjuk fel a kúp V térfogatát x függvényeként.

40. **Költségtervezés** A Dayton Power and Light Inc. cég erőműve a Miami folyó mellett áll, ahol a folyó 240 méter széles. A folyó túlsó partján, 3 kilométerrel feljebb fekvő városba új kábelt vezetnek. Egy méter hosszúságú kábel a folyó alatt 60 dolláros, a szárazföldön 35 dolláros költségen fektethető le.



(Nem méretarányos)

(a) Tegyük fel, hogy a kábelt a folyómeder alatt az erőművel szemközti P ponttól x távolságra eső Q pontba, majd onnan egyenesen a városba vezetik. Írjuk fel a beruházás $C(x)$ költségét x függvényeként.

(b) Készítsünk táblázatot, és állapítsuk meg, hogy a legkisebb költséget 600 méternél nagyobb vagy annál kisebb x esetén kapjuk.

41. Azt mondjuk, hogy egy görbe szimmetrikus az x-tengelyre, ha tetszőleges (x, y) pont pontosan akkor illeszkedik a görbére, ha az $(x, -y)$ pont is. Indokoljuk meg, miért nem lehet egy x-tengelyre szimmetrikus görbe – az $y = 0$ függvényt kivéve – egyetlen függvénynek sem grafikonja.

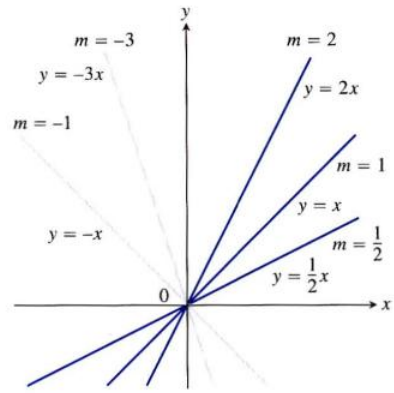
42. **Egy „varázslat"** Biztosan sokan ismerik a következő trükköt: „Gondolj egy számot – adj hozzá 5-öt – az eredményt szorozd meg kettővel – a kapott számból vonj ki hatot – az eredményt oszd el kettővel – vonj ki az így kapott számból 2-t – mondd meg mit kaptál, és én megmondom, melyik számra gondoltál!"

A gondolt számot x-szel jelölve írjuk fel a végeredményt x függvényeként, és lebbentsük fel a fátylat a „varázslatról".

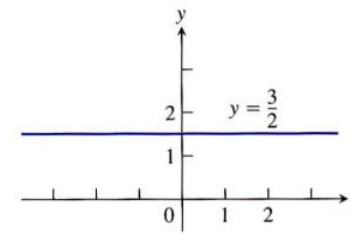
1.4. Alapvető függvénytípusok és matematikai modellek

Analízistanulmányaink során sok fontos függvénytípussal találkozunk. A következőkben ezeket soroljuk fel, és bemutatjuk néhány alapvető jellemzőjüket.

Lineáris függvények. Azokat az f függvényeket, amelyeknek hozzárendelési szabálya $f(x) = mx + b$, ahol m és b egy-egy állandó, **lineáris függvénynek** nevezzük. Az 1.34. ábrán olyan lineáris függvényeket láthatunk, amelyeknél $b = 0$, az ilyen függvények grafikonja áthalad az origón. Ha a grafikon meredekségét meghatározó m állandó 0, akkor konstans függvényt kapunk (1.35. ábra).



1.34. ÁBRA: Az $y = mx$ egyenletű egyenesek mind átmennek az origón, meredekségük pedig m.



1.35. ÁBRA: A konstans függvények meredeksége $m = 0$.

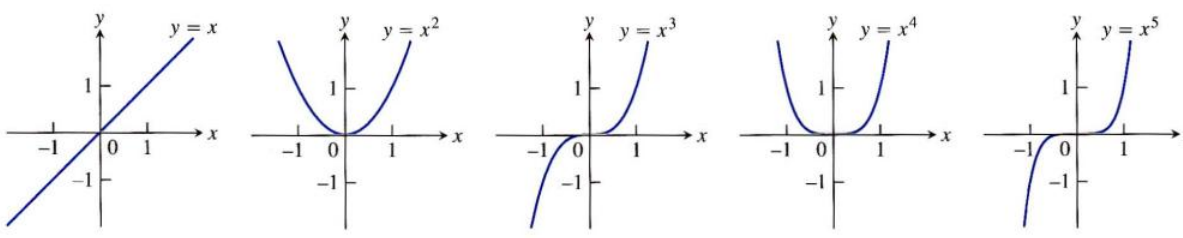
Hatványfüggvények. **Hatványfüggvénynek** nevezzük azokat az f függvényeket, amelyeknek hozzárendelési szabálya $f(x) = x^a$, ahol a állandó. Az alábbiakban néhány speciális esetet vizsgálunk meg.

(a) $a = n$, ahol n pozitív egész szám.

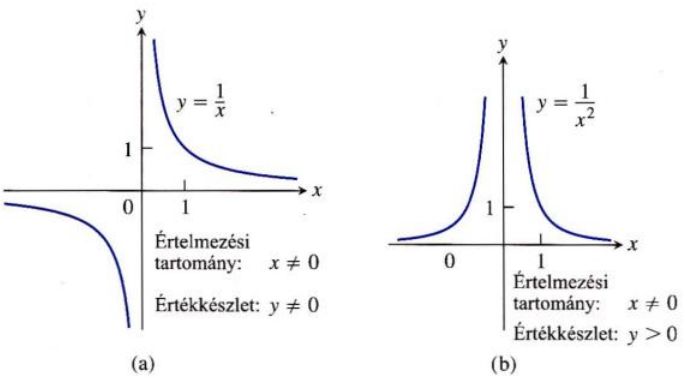
Az 1.36. ábrán az $f(x) = x^n$ hatványfüggvényeket tüntettük fel az $n = 1,2,3,4,5$ esetekben. A függvények értelmezési tartománya az összes valós szám halmaza. Ahogy az n növekszik, a függvény grafikonja a $(-1,1)$ intervallumon „laposabb" lesz, $|x| > 1$ esetén viszont meredekebb. Valamennyi grafikon átmegy az origón és az $(1,1)$ ponton.

(b) $a = -1, a = -2$.

Az $f(x) = x^{-1} = 1/x$ és a $g(x) = x^{-2} = 1/x^2$ függvények grafikonja az 1.37. ábrán látható. Mindkét függvény értelmezési tartománya a nemnulla valós számok halmaza (0-val nem lehet osztani!). Az $y = 1/x$ függvény grafikonja az $xy = 1$ egyenletű hiperbola, amelynek szárai az origótól távolodva egyre jobban megközelítik a koordinátatengelyeket. Az $y = 1/x^2$ függvény grafikonja szintén megközelíti a tengelyeket.



1.36. ÁBRA: Az $f(x) = x^n$, $n = 0,1,2,3,4,5$ hatványfüggvények grafikonja. Valamennyi függvény értelmezési tartománya a $(-\infty, \infty)$ halmaz.



1.37. ÁBRA: Az $f(x) = x^a$ hatványfüggvény grafikonja az (a) $a = -1$ és a (b) $a = -2$ esetben.

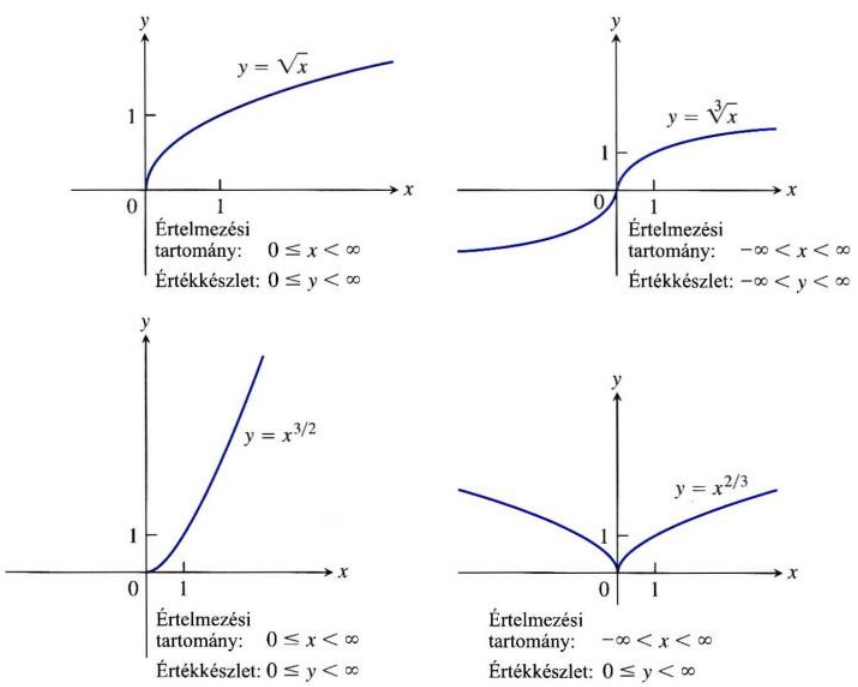
(c) $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$.

Az $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ függvényt **négyzetgyökfüggvénynek**, a $g(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ függvényt **köbgyökfüggvénynek** nevezzük. Az előbbi csak az $x \geq 0$ számokra, utóbbi viszont az összes valós számra értelmezve van. A két függvény grafikonja az 1.38. ábrán látható; itt feltüntettük az $y = x^{3/2}$ és az $y = x^{2/3}$ függvény grafikonját is. [Emlékeztetünk arra, hogy $x^{3/2} = (x^{1/2})^3$ és $x^{2/3} = (x^{1/3})^2$.]

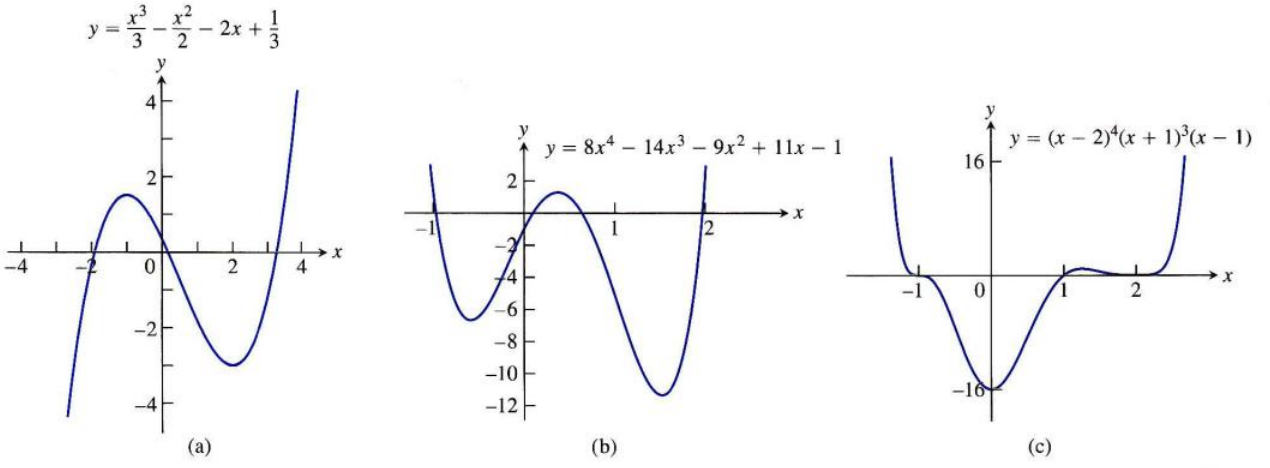
Polinomfüggvények. A p függvényt **polinomfüggvénynek** nevezzük, ha hozzárendelési szabálya:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

ahol n nemnegatív egész szám, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ pedig állandók, utóbbiakat a polinom együtthatóinak nevezzük. A polinomfüggvények értelmezési tartománya $(-\infty, \infty)$. Amennyiben $a_n \neq 0$ és $n > 0$, akkor n-t a polinomfüggvény fokszámának nevezzük. A lineáris függvények tehát elsőfokú polinomfüggvények; a másodfokú polinomfüggvények hozzárendelési szabálya $f(x) = ax^2 + bx + c$, a



1.38. ÁBRA: Az $f(x) = x^a$ hatványfüggvény grafikonja az $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$ esetben.



1.39. ÁBRA: Három polinomfüggvény grafikonja.

harmadfokú polinomfüggvényeké $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ alakú. Az 1.39. ábrán három polinomfüggvény grafikonját tanulmányozhatjuk; a polinomfüggvények grafikonjának ábrázolásával részletesen foglalkozunk majd a 4. fejezetben.

Racionális függvények. A **racionális függvények** két polinomfüggvény hányadosaként adhatók meg:

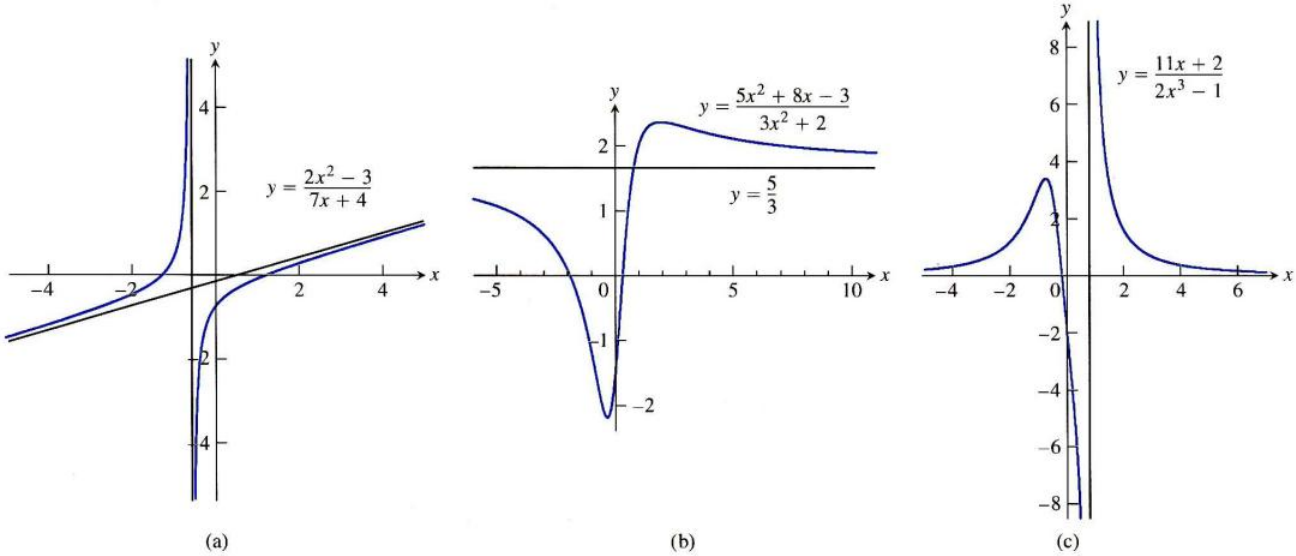
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

itt tehát $p(x)$ és $q(x)$ egy-egy polinomfüggvény. Az ilyen függvények értelmezési tartománya azoknak az x valós számoknak a halmaza, amelyekre $q(x) \neq 0$. Az

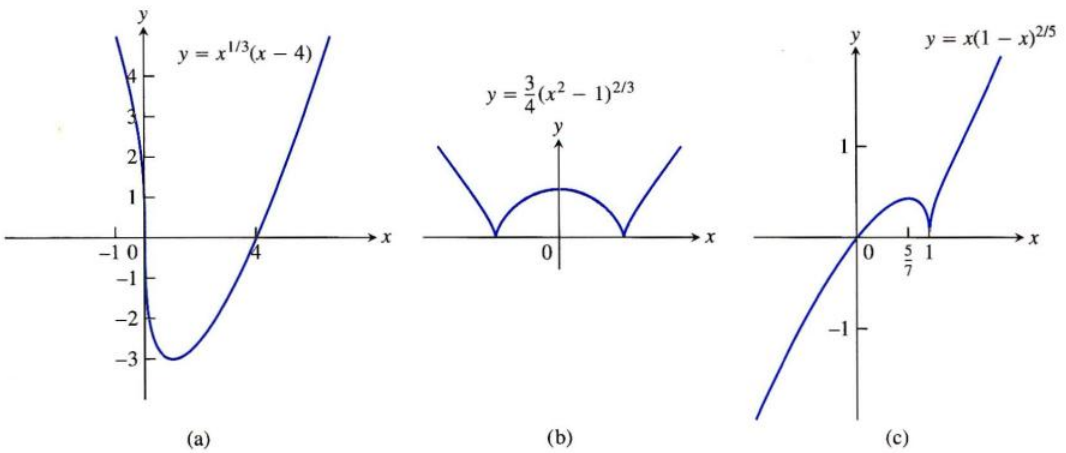
$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4}$$

racionális függvény értelmezési tartománya például az $\{x : x \neq -\frac{4}{7}\}$ halmaz. A függvény grafikonja az 1.40. ábra (a) részén látható; (b) és (c) két további racionális függvényt mutat.

Algebrai függvények. Az **algebrai függvények** a polinomfüggvényekből tetszőleges számú algebrai művelettel – összeadással, kivonással, szorzással,



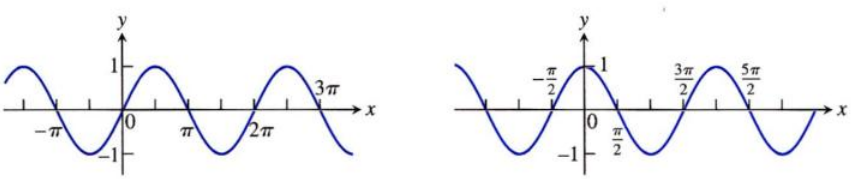
1.40. ÁBRA: Három példa racionális függvényre.



1.41. ÁBRA: Három példa algebrai függvényre.

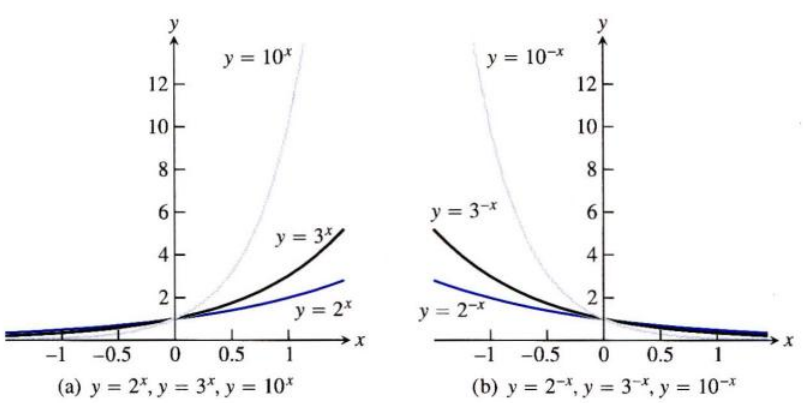
osztással és gyökvonással – származtatott függvények. A racionális függvények is mind algebrai függvények; három további példát az 1.41. ábrán vehetünk szemügyre.

Trigonometrikus függvények. A trigonometrikus függvényeket részletesen tárgyaljuk az 1.6. alfejezetben. A szinusz- és a koszinuszfüggvény grafikonja az 1.42. ábrán látható.

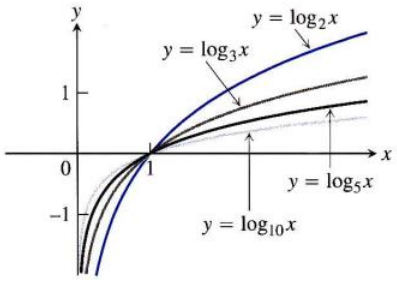


1.42. ÁBRA: A szinusz- és a koszinuszfüggvény grafikonja.

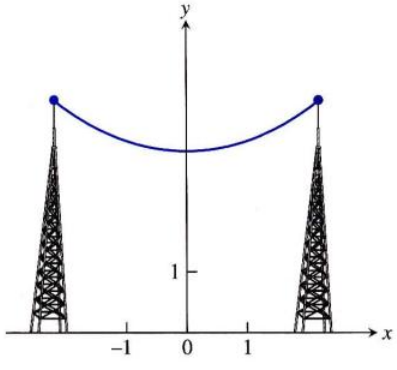
Exponenciális függvények. Az $f(x) = a^x$ alakú függvényeket **exponenciális függvénynek** nevezzük; az a alap csak pozitív szám lehet: $a > 0$ és $a \neq 1$. Valamennyi exponenciális függvény értelmezési tartománya $(-\infty, \infty)$, értékkészlete pedig $(0, \infty)$. Néhány példát az 1.43. ábra mutat; az exponenciális függvényekkel részletesen a 7. fejezetben foglalkozunk.



1.43. ÁBRA: Példák exponenciális függvényre.



1.44. ÁBRA: Különböző alapú logaritmusfüggvények.



1.45. ÁBRA: A láncgörbe.

Logaritmusfüggvények. Az $f(x) = \log_a x$ **logaritmusfüggvények** az exponenciális függvények inverzei; az a alapra vonatkozóan is ugyanazok a kikötéseink, mint az exponenciális függvények esetében: $a > 0$ és $a \neq 1$. A 7. fejezetben ezekről a függvényekről is többet tudunk majd meg. Az 1.44. ábrán négy – különböző alapú – logaritmusfüggvény grafikonját vehetjük szemügyre. Minden logaritmusfüggvény értelmezési tartománya a $(0, \infty)$ intervallum, értékkészlete pedig $(-\infty, \infty)$.

Transzcendens függvények. Minden nem algebrai függvényt **transzcendens függvénynek** nevezünk. Transzcendens függvények eszerint – többek között – a trigonometrikus függvények, a trigonometrikus függvények inverzei, az exponenciális és a logaritmusfüggvények, valamint a 7. fejezetben tárgyalandó hiperbolikus függvények is. Transzcendens függvényre további példa a **láncgörbe**: ilyen alakot ölt az elektromos vagy a telefonvezeték két oszlop között (1.45. ábra).

1. PÉLDA **Függvény típusának azonosítása.**

Milyen típusúak az alábbi függvények? Tartsuk szem előtt, hogy egy típusnak speciális altípusai lehetnek . Az $f(x) = x^2$ függvény például hatványfüggvény és azon belül (másodfokú) polinomfüggvény.

(a) $f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^5$ **(b)** $g(x) = 7^x$

(c) $h(z) = z^7$ **(d)** $y(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

Megoldás.

(a) Az $f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^5$ függvény 5-öd fokú polinomfüggvény.

(b) $g(x) = 7^x$ exponenciális függvény; ne kerülje el e figyelmünket, hogy az x változó a kitevőben szerepel.

(c) A $h(z) = z^7$ függvény hatványfüggvény; a z változó itt a hatvány alapja.

(d) Az $y(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$ függvény trigonometrikus függvény. □

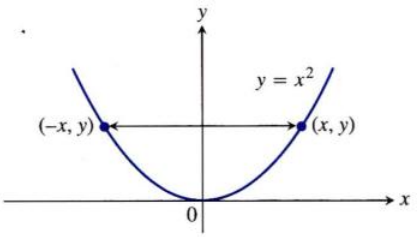
Növekvő és csökkenő függvények

Ha egy függvény grafikonján jobbra haladva a függvényértékek egyre magasabban vannak, akkor *növekvő*, ha egyre lejjebb, akkor *csökkenő* függvényről beszélünk. A precíz definíciókat a 4.3. alfejezetben adjuk majd meg, ahol megtanuljuk, hogyan lehet meghatározni azokat az intervallumokat, amelyeken egy függvény növekszik, és azokat, amelyeken csökken. A következő példában szereplő függvények grafikonjait az 1.36., az 1.37. és az 1.38. ábrákról már ismerjük.

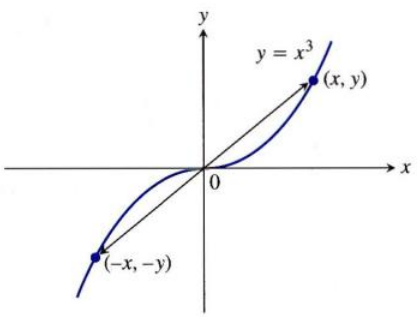
Függvény	Ahol növekszik:	Ahol csökken:
$y = x^2$	$0 \leq x < \infty$	$-\infty < x \leq 0$
$y = x^3$	$-\infty < x < \infty$	sehol sem
$y = 1/x$	sehol sem	$-\infty < x < 0$ és $0 < x < \infty$
$y = 1/x^2$	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
$y = \sqrt{x}$	$0 \leq x < \infty$	sehol sem
$y = x^{2/3}$	$0 \leq x < \infty$	$-\infty < x \leq 0$

Szimmetrikus grafikonok: páros és páratlan függvények

A *páros*, illetve a *páratlan* függvények grafikonjainak jellegzetes szimmetriatulajdonságai vannak.



(a)



(b)

1.46. ÁBRA: Az $y = x^2$ páros függvény grafikonja az x-tengelyre, az $y = x^3$ páratlan függvény grafikonja az origóra szimmetrikus.

DEFINÍCIÓ **Páros és páratlan függvény.**

Az $y = f(x)$ függvény

páros, ha $f(-x) = f(x)$, illetve

páratlan, ha $f(-x) = -f(x)$

a függvény értelmezési tartományának minden x eleme esetén.

Az elnevezések a hatványkitevőkből származnak. Ha y az x páros kitevőjű hatványfüggvénye – mint amilyen az $y = x^2$ vagy az $y = x^4$ függvény –, akkor y páros függvény, elvégre $(-x)^2 = x^2$ és $(-x)^4 = x^4$. Ha pedig y az x páratlan kitevőjű hatványfüggvénye – például $y = x$ vagy $y = x^3$ –, akkor y páratlan függvény, hiszen $(-x) = -x$ és $(-x)^3 = -x^3$.

A páros függvények grafikonja **szimmetrikus az y-tengelyre**. Mivel egy szimmetrikus f függvény értelmezési tartományának tetszőleges x elemére $f(x) = f(-x)$, tetszőleges x esetén az (x, y) pont pontosan akkor illeszkedik a függvény a grafikonjára, amikor a $(-x, y)$ pont (1.46. ábra (a) része); az ilyen függvény grafikonját az y-tengelyre való tükrözés helyben hagyja.

A páratlan függvények grafikonja az **origóra szimmetrikus**: mivel ilyenkor $f(-x) = -f(x)$, az (x, y) pont pontosan akkor illeszkedik a függvény grafikonjára, amikor a $(-x, -y)$ pont (1.46. ábra (b) része); az ilyen függvény grafikonját az origóra való tükrözés – vagy ami ugyanaz: az origó körüli 180°-os elforgatás – helyben hagyja. Jegyezzük meg, hogy definíciónk mindkét esetben megköveteli, hogy mind az x, mind a $-x$ eleme legyen f értelmezési tartományának.

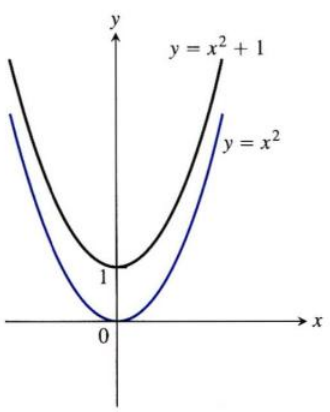
2. PÉLDA **Páros és páratlan függvények.**

$f(x) = x^2$ páros függvény: tetszőleges x esetén $(-x)^2 = x^2$; a függvény grafikonja szimmetrikus az y-tengelyre;

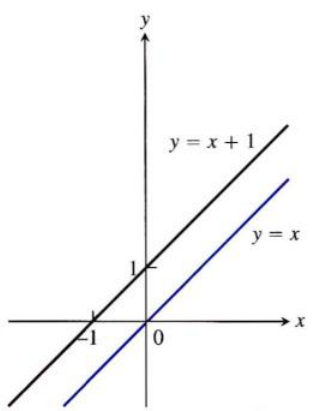
$f(x) = x^2 + 1$ páros függvény: tetszőleges x esetén $(-x)^2 + 1 = x^2 + 1$; a függvény grafikonja szimmetrikus az y-tengelyre (1.47.(a) ábra);

$f(x) = x$ páratlan függvény: tetszőleges x esetén $(-x) = -x$; a függvény grafikonja szimmetrikus az origóra;

$f(x) = x + 1$ nem páros: $f(-x) = -x + 1$, de $-f(x) = -x - 1$; és nem páratlan: ha $x \neq 0$, akkor $(-x) + 1 \neq x + 1$ (1.47.(b) ábra). □

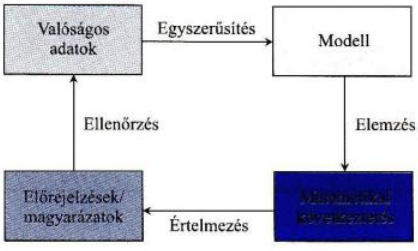


(a)



(b)

1.47. ÁBRA: (a) Ha az $y = x^2$ függvényhez 1-et adunk, a kapott $y = x^2 + 1$ függvény is páros, a grafikonja szimmetrikus marad az x-tengelyre. (b) Ha viszont az $y = x$ függvényhez adunk 1-et, azzal az origóra való szimmetriát elrontjuk: az $y = x + 1$ függvény nem páratlan.



1.48. ÁBRA: A matematikai modellezés folyamata a valós adatok értékelésével kezdődik.

Matematikai modellek

A világ alaposabb megértéséhez gyakran hasznos, ha a jelenségeket matematikai eszközökkel – például függvényekkel vagy egyenletekkel – írjuk le. Az így kapott matematikai modell a valóságos jelenség idealizálása, és csak ritkán tekinthető tökéletesen pontos leírásának. Minden modellnek megvannak ugyan a maga korlátai, egy jó modell mindazonáltal hasznos eredményekkel és tanulságokkal szolgálhat. A modellezés folyamatát az 1.48. ábrán tanulmányozhatjuk.

A legtöbb modell a valóság leegyszerűsített, csupán *közelítőleg pontos* képét nyújtja. Az egyszerűsítés gyakran abban nyilvánul meg, hogy az adatokat egymással *arányosnak* találjuk.

DEFINÍCIÓ **Egyenes arányosság.**

Az y és az x változó egymással (egyenesen) **arányos**, amennyiben egyik a másiknak konstansszorosa, azaz ha

$$y = k \cdot x$$

valamely nemnulla k állandó esetén.

Eszerint ha az összetartozó y és x értékeket ábrázoljuk, akkor azok egy origón áthaladó, k meredekségű egyenesre illeszkednek. Ha tehát két mennyiséget vizsgálunk, akkor a megfelelő értékeket ábrázolva könnyen ellenőrizhetjük, hogy arányosak-e egymással.

3. PÉLDA **Kepler harmadik törvénye.**

A tizenhetedik században fedezte fel Johannes Kepler a bolygómozgást leíró törvényeket, amelyek közül a harmadik két mennyiség arányosságát állapítja meg. Eszerint ha T jelöli egy bolygó keringésének idejét (például napokban megadva), R pedig az ellipszis alakú bolygópálya nagytengelyének felét, akkor T egyenesen arányos az R mennyiség $3/2$-ik hatványával. Létezik tehát egy olyan k állandó, amellyel

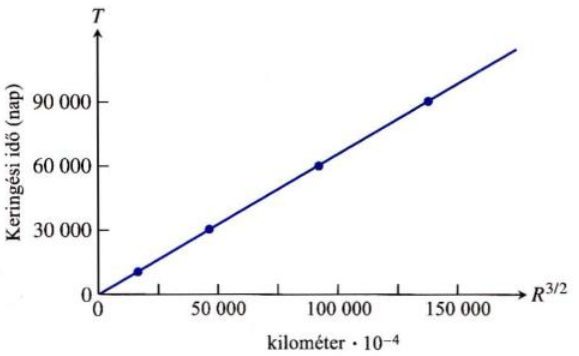
$$T = kR^{3/2}.$$

Az alábbi táblázatban a bolygók keringési idejét és pályájuk nagytengelyének felét tüntettük fel.

Bolygó	T (nap)	R (millió km)
Merkúr	88,0	57,9
Vénusz	224,7	108,2
Föld	365,3	149,6
Mars	687,0	228,1
Jupiter	4331,8	778,4
Szaturnusz	10760,0	1428,7
Uránusz	30684,0	2839,1
Neptunusz	60188,3	4490,8
Plutó	90466,8	5879,1

1.3. TÁBLÁZAT: A bolygók keringési ideje (T) és azt meghatározó távolságuk (R).

Ahhoz, hogy a T és az $R^{3/2}$ mennyiségek közötti viszonyt grafikusan ábrázolhassuk, először a táblázatban szereplő R-ek $3/2$-ik hatványát kell kiszámolnunk, például $5879, 1^{3/2} \approx 450688$ vagy $57,9^{3/2} \approx 440,6$. A vízszintes tengelyen ezek után nem az R, hanem az $R^{3/2}$ értékeket adjuk meg, a koordináta-rendszerben pedig az összetartozó $(T, R^{3/2})$ párokat ábrázoljuk (1.49. ábra). A pontok jó közelítéssel egy origón átmenő egyenesre illeszkednek. Az egyenes két pontját kiválasztva megbecsülhetjük a meredekséget, amely esetünkben az arányosság



1.49. ÁBRA: Kepler harmadik törvényének szemléltetése; $T = 0{,}201 \cdot R^{3/2}$ (3. példa).

tényezője (nap/(10 000 km) egységben):

$$k = \frac{90466{,}8 - 88}{450688 - 440{,}6} \approx 0{,}201$$

Kepler harmadik törvénye a modellünk szerint: $T = 0{,}201 \cdot R^{3/2}$ (az arányossági tényező számértéke természetesen a mértékegységektől függ). Hangsúlyozzuk: eljárásunk *nem bizonyítja* Kepler harmadik törvényét, elvégre egy általános szabály néhány példa alapján nem igazolható. Mindenesetre az 1.49. ábrán látható grafikon a törvényt felettébb hihetővé teszi.

Ha két mennyiség között valamilyen kapcsolat fennállására gyanakszunk, célszerű először az arányosságot ellenőrizni. Az arányosság gyakran szolgál az adatokból leszűrt empirikus modellek alapjául.

1.4. Feladatok

Függvények típusának megállapítása

Határozzuk meg, hogy milyen típusúak az alábbi függvények: konstans, lineáris, hatvány-, polinom-, racionális, algebrai, trigonometrikus, exponenciális vagy logaritmusfüggvények. A polinomfüggvények esetében állapítsuk meg a függvény fokszámát is; gondoljunk az altípusokra is (1–4. feladatok).

1. **(a)** $f(x) = 7 - 3x$ **(b)** $g(x) = \sqrt[5]{x}$

(c) $h(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ **(d)** $r(x) = 8^x$

2. **(a)** $F(t) = t^4 - t$ **(b)** $G(t) = 5^t$

(c) $H(z) = \sqrt{z^3+1}$ **(d)** $R(z) = \sqrt[3]{z^7}$

3. **(a)** $y = \frac{3+2x}{x-1}$ **(b)** $y = x^{5/2} - 2x + 1$

(c) $y = \operatorname{tg}(\pi x)$ **(d)** $y = \log_7 x$

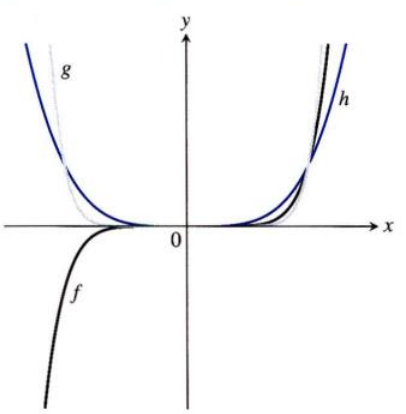
4. **(a)** $y = \log_5\left(\frac{1}{t}\right)$ **(b)** $f(z) = \frac{z^5}{\sqrt{z}+1}$

(c) $g(x) = 2^{1/x}$ **(d)** $w = 5\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

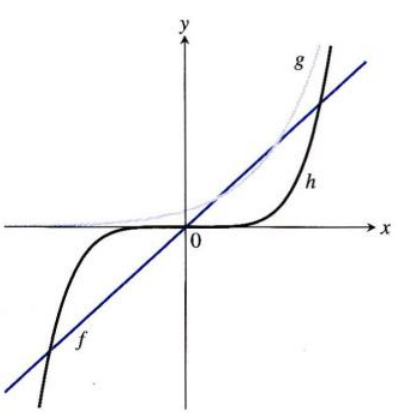
Párosítsuk össze a függvényeket a grafikonjukkal; indokoljuk a választásunkat (5–6. feladatok).

5. **(a)** $y = x^4$ **(b)** $y = x^7$

(c) $y = x^{10}$



6. **(a)** $y = 5x$ **(b)** $y = 5^x$ **(c)** $y = x^5$



Növekvő és csökkenő függvények

Vázoljuk a 7–18. feladatokban szereplő függvények grafikonját, és állapítsuk meg, hogy milyen szimmetriatulajdonságuk van. Határozzuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken a függvények növekednek, és azokat, amelyeken csökkennek.

7. $y = -x^3$

8. $y = -\frac{1}{x^2}$

9. $y = -\frac{1}{x}$

10. $y = \frac{1}{|x|}$

11. $y = \sqrt{|x|}$

12. $y = \sqrt{-x}$

13. $y = x^3/8$

14. $y = -4\sqrt{x}$

15. $y = -x^{3/2}$

16. $y = (-x)^{3/2}$

17. $y = (-x)^{2/3}$

18. $y = -x^{2/3}$

Páros és páratlan függvények

Állapítsuk meg, hogy 19–30. feladatokban szereplő függvények közül melyek párosak és melyek páratlanok. Indokoljuk válaszunkat.

19. $f(x) = 3$

20. $f(x) = x^{-5}$

21. $f(x) = x^2 + 1$

22. $f(x) = x^2 + x$

23. $g(x) = x^3 + x$

24. $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

25. $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$

26. $g(x) = \frac{x}{x^2-1}$

27. $h(t) = \frac{1}{t-1}$

28. $h(t) = |t^3|$

29. $h(t) = 2t + 1$

30. $h(t) = 2|t| + 1$

Arányosság

A 31. és a 32. feladatban állapítsuk meg, alátámasztják-e az adatok az arányossági hipotézist. Ábrázoljuk az összetartozó értékeket, és ha a grafikon egyenes arányosságra utal, állapítsuk meg az arányossági tényezőt.

31. **(a)** y egyenesen arányos x-szel

y	1	2	3	4	5	6	7	8
x	5,9	12,1	17,9	23,9	29,9	36,2	41,8	48,2

(b) y egyenesen arányos $x^{1/2}$-nel

y	3,5	5	6	7	8
x	3	6	9	12	15

32. **(a)** y egyenesen arányos 3^x-nel

y	5	15	45	135	405	1215	3 645	10 935
x	0	1	2	3	4	5	6	7

(b) y egyenesen arányos $\ln x$-szel

y	2	4,8	5,3	6,5	8,0	10,5	14,4	15,0
x	2,0	5,0	6,0	9,0	14,0	35,0	120,0	150,0

33. A táblázat második sora azt mutatja, mekkora d_r utat tesz meg egy gépkocsi adott v sebességnél (első sor) a fékpedálra lépésig tartó reakcióidő alatt, a harmadik sorban pedig az adott sebességhez tartozó d_f féktávolságot tüntettük fel. A v sebességet kilométer/órában, a d_r és a d_f távolságokat méterben adjuk meg.

v	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128
d_r	6,6	8,4	9,9	11,7	13,2	15	16,5	18,3	19,8	21,6	23,1	24,9	26,4
d_f	6	8,4	12,3	15,9	21,6	27,9	35,4	44,7	54,6	66,3	79,8	95,4	112,8

Megállják-e a helyüket az alábbi feltételezések? Ha igen, körülbelül mekkora az arányossági tényező?

(a) A reakciótávolság egyenes arányban áll a sebességgel.

(b) A féktávolság egyenesen arányos a sebesség négyzetével.

34. 2002 októberében a csillagászok felfedeztek egy jégből és kőből álló kisbolygót, amelynek a Naptól való átlagos távolsága nagyobb, mint a Neptunuszé. A Quaoar névre keresztelt égitest a Naptól körülbelül 4 milliárd mérföld távolságra kering, a Naprendszer Kuiper-öv nevű külső részén. Kepler harmadik törvényét felhasználva becsüljük meg, mekkora a Quaoar keringési ideje.

35. **Rugó megnyúlása** A rugók különböző nagyságú terhelésekre adott reakciója többek között a gépkocsik és teherautók tervezésében is fontos szerepet játszik, a mérnököknek így feltétlenül szükségük van a jelenség matematikai modelljére. Az alábbi táblázat egy kísérlet eredményét mutatja, amelyben egy rugót x egységnyi súllyal megterhelve rendre y centiméteres megnyúlást tapasztaltunk.

x	0	1	2	3	4	5
y	0	0,875	1,721	2,641	3,531	4,391

x	6	7	8	9	10
y	5,241	6,120	6,992	7,869	8,741

(a) Ábrázoljuk az összetartozó értékeket, és döntsük el, helyes-e a feltételezés, amely szerint a megnyúlás egyenesen arányos a terheléssel.

(b) Becsüljük meg az arányossági tényezőt.

(c) Mekkora lesz a megnyúlás, ha a terhelés 13 súlyegység?

36. **Fenyődeszkák.** A táblázat azt mutatja, hogy egy – vállmagasságban – x cm körméretű fenyőfából hány dm^3 térfogatú deszkát lehet készíteni.

x	43,2	48,3	50,8	58,4	63,5	71,1	81,3	96,5	99,1	104,1
y	45	59	76	135	168	267	290	595	611	664

Állapítsuk meg, melyik modell illeszkedik jobban az adatokhoz: amely szerint a deszka mennyisége (a) a körméret négyzetével vagy (b) a körméret köbével arányos. Melyik a plauzibilisebb „magyarázat”?

1.5. Műveletek függvényekkel és függvénytranszformációk

Ebben az alfejezetben azt vizsgáljuk, milyen módszerekkel lehet adott függvényekből újakat képezni.

Függvények összege, különbsége, hányadosa és szorzata

Ahogy a számokat, úgy a függvényeket is összeadhatjuk, kivonhatjuk, összeszorozhatjuk és eloszthatjuk egymással (az utóbbi esetben természetesen kikötjük, hogy a nevező nem lehet nulla). Tetszőleges f és g függvények esetén az $f+g$, $f-g$, fg függvényeket – azokra az x számokra, amelyek elemei mind f, mind g értelmezési tartományának, vagyis a $D(f)\cap D(g)$ halmaznak – a következő képletekkel értelmezzük:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ (f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\ (fg)(x) &= f(x)g(x)\end{aligned}$$

A $+$ műveleti jel a bal oldalon függvények, a jobb oldalon pedig számok összeadását jelzi.

Az f és g függvények f/g hányadosát a $D(f)\cap D(g)$ halmaz minden olyan x elemére értelmezzük, amelyre $g(x)\neq 0$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{(amennyiben } g(x)\neq 0\text{)}.$$

A függvények egy állandó számmal is megszorozhatók: tetszőleges c valós szám és f függvény esetén a cf függvény értelmezési tartománya megegyezik f értelmezési tartományával, hozzárendelési szabálya pedig:

$$(cf)(x)=cf(x).$$

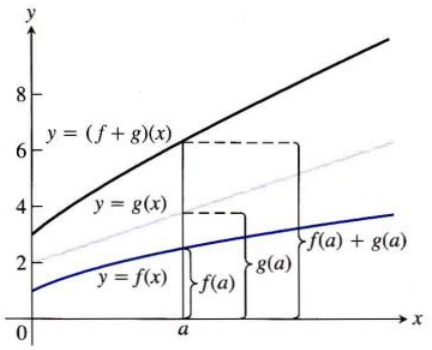
1. PÉLDA **Algebrai műveletek függvényeken.**

Az $f(x)=\sqrt{x}$ és $g(x)=\sqrt{1-x}$ függvények értelmezési tartományai a $D(f)=$ $=[0,\infty)$ és $D(g)=(-\infty,1]$ halmazok, amelyeknek metszete a $[0,1]$ zárt intervallum. A táblázatban az f és g függvényekből az „alapműveletek" segítségével megkapható függvényeket tüntettük fel; valamennyinél megadtuk az értelmezési tartományt is.

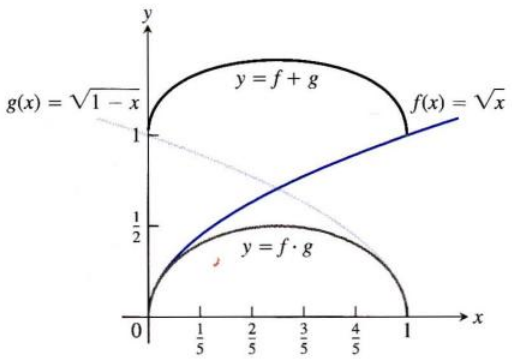
Függvény	Formula	Ért. tart.
$f+g$	$(f+g)(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$	$[0,1]=D(f)\cap D(g)$
$f-g$	$(f-g)(x)=\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$	$[0,1]$
$g-f$	$(g-f)(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}$	$[0,1]$
fg	$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=\sqrt{x(1-x)}$	$[0,1]$
f/g	$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$[0,1)$
g/f	$\frac{g}{f}(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$	$(0,1]$

Figyeljük meg, hogy az utolsó két sorban az értelmezési tartományból az $x=1$, illetve az $x=0$ értéket kizártuk. □

Az $f+g$ függvény grafikonját az f és g grafikonjából egyszerűen a megfelelő y-koordináták (vagyis az $f(x)$ és $g(x)$ függvényértékek, ahol $x\in D(f)\cap D(g)$) összeadásával kapjuk meg, ahogy az 1.50. ábra mutatja. Az $f+g$ és az fg függvény grafikonját az 1.51. ábrán tanulmányozhatjuk.



1.50. ÁBRA: Két függvény „grafikus" összeadása.



1.51. ÁBRA: Az 1. példában szereplő f és g függvények értelmezési tartománya f és g értelmezési tartományának metszete: a $[0,1]$ intervallum. Ugyanez az intervallum az értelmezési tartománya az fg függvénynek is.

Összetett függvények

Két függvény egymás utáni alkalmazásával (vagy összetételével) is képezhetünk új függvényt.

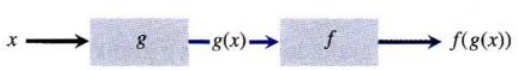
DEFINÍCIÓ **Összetett függvény.**
Az f és g függvényekből képzett $f \circ g$ **összetett függvényt** az

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

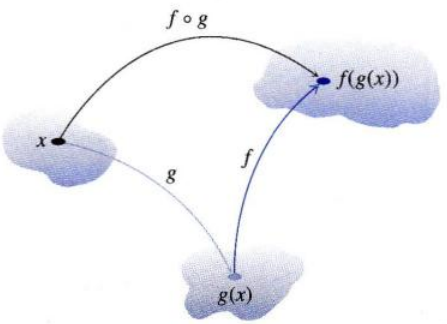
képlettel értelmezzük. Az $f \circ g$ összetett függvény értelmezési tartománya a g értelmezési tartományából vett azon x elemek halmaza, amelyekre a $g(x)$ függvényérték az f értelmezési tartományának eleme.

Az $f \circ g$ függvényt (kiolvasása: „f kör g") tehát olyankor képezhetjük, amikor a g függvény értékkészlete részhalmaza az f függvény értelmezési tartományának. Az $(f \circ g)(x)$ függvényérték kiszámításához *először* $g(x)$-et kell meghatároznunk, és *ezt követően* $f(g(x))$-et. Az 1.52. ábra az $f \circ g$ összetett függvényt automataként mutatja, az 1.53. ábra ugyanezen függvény szokásos „nyilas-halmazos" diagramja.

2. PÉLDA **Összetett függvény felismerése.**
Az $y = \sqrt{1-x^2}$ függvény értékeinek kiszámításakor először az $1-x^2$ értéket határozzuk meg, és ennek vesszük a négyzetgyökét. Az y függvény eszerint a $g(x) = 1-x^2$ és az $f(x) = \sqrt{x}$ függvények összetételével áll elő. Figyeljünk arra, hogy $1-x^2$ nem lehet negatív; az összetett függvény értelmezési tartománya a $[-1,1]$ intervallum. □



1.52. ÁBRA: Az f és a g függvényekből olyankor képezhető összetett függvény, amikor g értékkészlete f értelmezési tartományának részhalmaza. Az összetett függvényt $f \circ g$ jelöli.



1.53. ÁBRA: Az $f \circ g$ összetett függvény „nyilas-halmazos" diagramja.

Amennyiben a $g \circ f$ összetett függvény értékeit akarjuk kiszámítani (azokra az x-ekre, amelyekre értelmezhető), akkor az $f(x)$ függvényérték meghatározásával kezdjük, és azután számítjuk ki $g(f(x))$-et. A $g \circ f$ összetett függvény az f értelmezési tartományából vett azon x elemek halmaza, amelyekre az $f(x)$ függvényérték g értelmezési tartományának eleme.

Az $f \circ g$ és $g \circ f$ függvények általában különböznek egymástól.

3. PÉLDA **Összetett függvények.**

Legyen $f(x) = \sqrt{x}$ és $g(x) = x + 1$; határozzuk meg az alábbi összetett függvények hozzárendelési szabályát, illetve értelmezési tartományát:

(a) $f \circ g$ **(b)** $g \circ f$

(c) $f \circ f$ **(d)** $g \circ g$

Megoldás.

Hozzárendelési szabály	*Ért. tart.*
(a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$	$[-1, \infty)$
(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$
(c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$	$[0, \infty)$
(d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x) + 1 = (x+1) + 1 = x + 2$	$(-\infty, \infty)$

Az $f \circ g$ függvény értelmezési tartományának megállapításakor a következőképpen jártunk el. A $g(x) = x + 1$ függvény az összes valós x esetén értelmes, de csupán akkor eleme f értelmezési tartományának, ha $x + 1 \geq 0$, azaz amikor $x \geq -1$. □

Ha $f(x) = x^2$ és $g(x) = \sqrt{x}$, akkor $(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$, az $f \circ g$ összetett függvény értelmezési tartománya azonban nem a $(-\infty, \infty)$, hanem a $[0, \infty)$ halmaz.

Függvény grafikonjának eltolása

Ha az $y = f(x)$ függvény grafikonját fölfelé akarjuk eltolni, akkor az $y = f(x)$ képlet jobb oldalához egy pozitív állandót adunk.

Ha az $y = f(x)$ függvény grafikonját lefelé akarjuk eltolni, akkor az $y = f(x)$ képlet jobb oldalához egy negatív állandót adunk.

Az $y = f(x)$ függvény grafikonjának balra való eltolásához az x-hez egy pozitív állandót, jobbra való eltolásához egy negatív állandót kell hozzáadni.

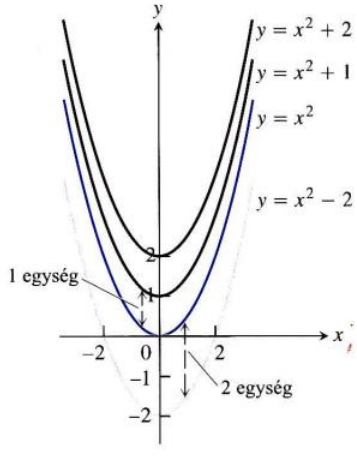
Függvény grafikonjának eltolása

Függőleges eltolás

$y = f(x) + k$	f grafikonját fölfelé tolja el k egységgel, ha $k > 0$, illetve lefelé k egységgel, ha $k < 0$;

vízszintes eltolás

$y = f(x + h)$	f grafikonját balra tolja el h egységgel, ha $h > 0$, illetve jobbra $\lvert h \rvert$ egységgel, ha $h < 0$.



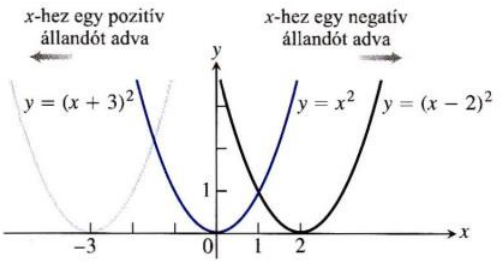
1.54. ÁBRA: Az $f(x) = x^2$ függvény grafikonját fölfelé (lefelé) toljuk el, ha a képlet jobb oldalához egy pozitív (negatív) állandót adunk (4. példa (a) és (b) része).

4. PÉLDA **Függvény grafikonjának eltolása.**

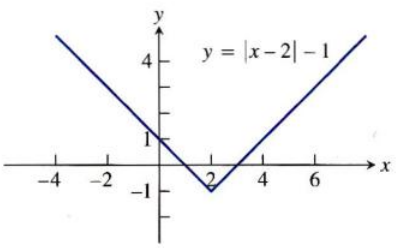
(a) Ha az $y = x^2$ képlet jobb oldalához 1-et adunk (az eredmény $y = x^2 + 1$), a függvény grafikonja 1 egységgel feljebb kerül (1.54. ábra).

(b) Ha az $y = x^2$ képlet jobb oldalához -2-t adunk (az eredmény $y = x^2 - 2$), a függvény grafikonja 1 egységgel lejjebb kerül (1.54. ábra).

(c) Ha az $y = x^2$ képletben x-hez még a négyzetreemelés előtt 3-at adunk (az eredmény $y = (x+3)^2$), akkor a grafikon 3 egységgel balra tolódik el (1.55. ábra).



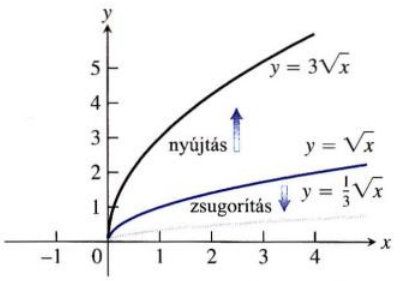
1.55. ÁBRA: Az $f(x) = x^2$ függvény grafikonját balra (jobbra) toljuk el, ha a képletben x-hez egy pozitív (negatív) állandót adunk (4. példa (c) része).



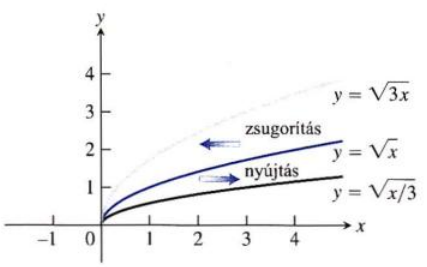
1.56. ÁBRA: Az $f(x) = |x|$ függvény grafikonját 1 egységgel lefelé és 2 egységgel jobbra toltuk el.

(d) Ha az $y = |x|$ képletben az x-hez az abszolútértékjelen belül -2-t adunk, az így kapott jobb oldalhoz pedig -1-et (az eredmény $y = |x-2|-1$), akkor az eredeti grafikon két egységgel balra, egy egységgel pedig lefelé tolódik el.

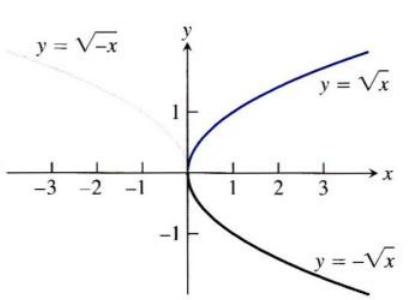
□



1.57. ÁBRA: Az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonjának függőleges irányú, háromszoros nyújtása, illetve harmadrészre való zsugorítása (5. példa (a) része).



1.58. ÁBRA: Az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonjának vízszintes irányú, háromszoros nyújtása, illetve harmadrészre való zsugorítása (5. példa (b) része).



1.59. ÁBRA: Az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonjának az x-, illetve az y-tengelyre való tükrözése (5. példa (c) része).

Függvénygrafikon nyújtása és tükrözése

Az $y = f(x)$ függvény grafikonja függőleges vagy vízszintes irányban – tehát az y- vagy az x-tengely mentén – megnyújtható és zsugorítható. Ilyen hatást úgy érhetünk el, ha a képlet jobb oldalát vagy a független változót egy c állandóval megszorozzuk. A koordinátatengelyekre való tükrözést a $c = -1$ speciális esetben kapjuk meg.

Függvénygrafikon nyújtása, illetve tükrözése

c > 1

$y = cf(x)$	f grafikonját az y-tengely irányában c-szeresére nyújtja
$y = \frac{1}{c}f(x)$	f grafikonját az y-tengely irányában c-ad részére zsugorítja
$y = f(cx)$	f grafikonját az x-tengely irányában c-ad részére zsugorítja
$y = f(x/c)$	f grafikonját az x-tengely irányában c-szeresére nyújtja

c = −1

$y = -f(x)$	tükrözi f grafikonját az x-tengelyre
$y = f(-x)$	tükrözi f grafikonját az y-tengelyre

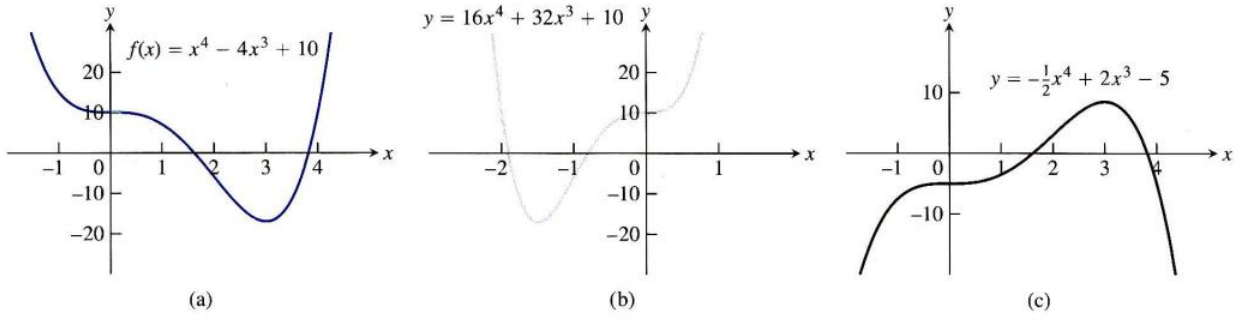
5. PÉLDA **Függvény grafikonjának transzformációi.**

(a) Függőleges irányú nyújtás, illetve zsugorítás. Induljunk ki az $y = \sqrt{x}$ függvényből. A képlet jobb oldalát 3-mal, illetve $\frac{1}{3}$-dal szorozva a függvény grafikonja „háromszor karcsúbb", illetve „háromszor laposabb" lesz.

(b) Vízszintes irányú nyújtás, illetve zsugorítás. Az $y = \sqrt{3x}$ függvény grafikonja az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonjának vízszintes irányban való zsugorításával, az $y = \sqrt{x/3}$ függvény grafikonja az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonjának vízszintes irányú nyújtásával kapható meg (1.58. ábra). Figyeljünk arra, hogy $y = \sqrt{3x} = \sqrt{3}\sqrt{x}$, a vízszintes irányú nyújtás tehát *bizonyos esetekben* megfeleltethető egy függőleges irányú zsugorításnak. Hasonlóan: a vízszintes zsugorítás alkalmanként megfeleltethető egy más állandóval elért függőleges irányú nyújtásnak.

(c) Tükrözés. Az $y = -\sqrt{x}$ függvény grafikonja az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonjának az x-tengelyre vonatkozó tükörképe, az $y = \sqrt{-x}$ grafikonja pedig az $y = \sqrt{x}$ grafikonjának az y-tengelyre vonatkozó tükörképe (1.59. ábra).

□



1.60. ÁBRA: (a) Az eredeti f függvény. (b) Az f függvény grafikonját x irányban a felére zsugorítottuk, a kapott görbét pedig tükröztük az y-tengelyre. (c) Az f függvény grafikonját y irányban a felére zsugorítottuk, majd az így kapott görbét az x-tengelyre tükröztük.

6. PÉLDA **Összetett függvénytranszformációk.**

Tekintsük az $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ függvényt (1.60. ábra (a) része); adjuk meg azt a függvényt, amelynek grafikonját úgy kapjuk meg, hogy

(a) f grafikonját x irányban a felére zsugorítjuk, majd tükrözzük az y-tengelyre (1.60. ábra (b) része);

(b) f grafikonját y irányban a felére zsugorítjuk, majd tükrözzük az x-tengelyre (1.60. ábra (c) része).

Megoldás.

(a) A keresett függvény hozzárendelési szabályát úgy kapjuk meg, hogy f képletében x helyébe $-2x$-et írunk:

$$y = f(-2x) = (-2x)^4 - 4(-2x)^3 + 10 = 16x^4 + 32x^3 + 10.$$

(b) A megoldás:

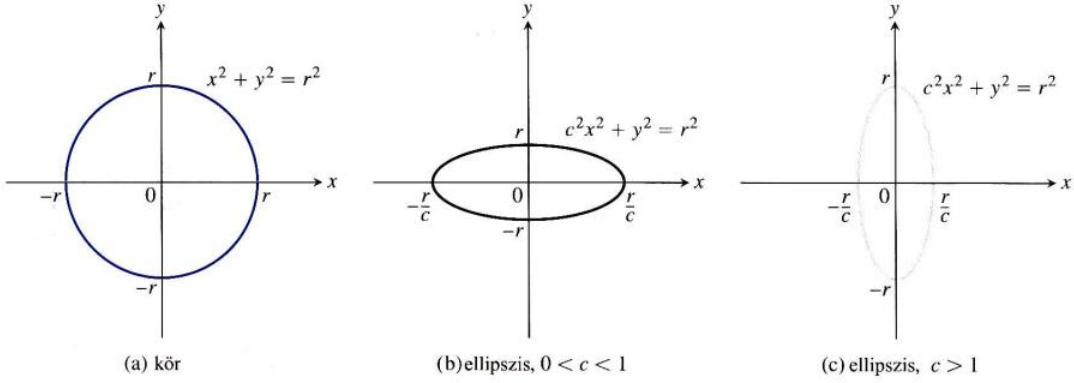
$$y = -\frac{1}{2}f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 5. \qquad \square$$

Ellipszis

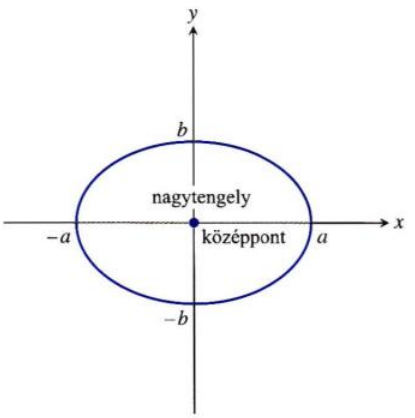
Helyettesítsünk az origó középpontú, r sugarú kör kanonikus egyenletében x helyébe cx-et:

$$c^2x^2 + y^2 = r^2. \tag{1}$$

Amennyiben $0 < c < 1$, az (1) egyenlet által meghatározott görbe a körnek x irányú nyújtásával, ha $c > 1$, akkor zsugorításával keletkezik. Mindkét esetben



1.61. ÁBRA: A kör nyújtásával vagy zsugorításával ellipszist kapunk



1.62. ÁBRA: Az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ egyenletű ellipszis; esetünkben $a>b$, a nagytengely tehát a vízszintes tengely.

egy ellipszist kapunk, lásd az 1.61. ábra (b) és (c) részét. Vegyük észre, hogy az y-tengelyt mindkét görbe a $-r$ és az r helyen metszi. Az 1.61. ábra (b) részén a $(\pm r/c, 0)$ pontokat összekötő szakaszt az ellipszis **nagytengelyének**, a $(0, \pm r)$ pontokat összekötő szakaszt pedig az ellipszis **kistengelyének** nevezzük. Az ábra (c) részén a szereposztás fordított: ez előbbi szakasz a kistengely, az utóbbi pedig a nagytengely. Mindkét esetben a hosszabb szakaszt nevezzük nagytengelynek.

Az (1) egyenlet mindkét oldalát r^2-tel osztva az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2}$$

egyenletet kapjuk, ahol $a=r/c$ és $b=r$. Amennyiben $a>b$, akkor a vízszintes, ha pedig $a<b$, akkor a függőleges tengely a nagytengely. A (2) egyenlettel megadott ellipszis **középpontja** az origó (1.62. ábra).

A (2) egyenletben x helyébe $x-h$-t, y helyébe pedig $y-k$-t írva az

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \tag{3}$$

egyenletet, a (h,k) középpontú **ellipszis kanonikus egyenletét** kapjuk. Az ellipszis geometriai definíciójával és geometriai jellemzőivel a 10.1. alfejezetben foglalkozunk.

1.5. Feladatok

Két függvény összege, különbsége, szorzata és hányadosa

Határozzuk meg az f, g, $f+g$, $f\cdot g$ függvény értelmezési tartományát (1–2. feladat).

1. $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x-1}$

2. $f(x)=\sqrt{x+1}$, $g(x)=\sqrt{x-1}$

Határozzuk meg az f, g, f/g, g/f függvény értelmezési tartományát (3–4. feladat).

3. $f(x)=2$, $g(x)=x^2+1$

4. $f(x)=1$, $g(x)=1+\sqrt{x}$

Összetett függvények

5. Határozzuk meg a függvényértékeket, ha $f(x)=x+5$ és $g(x)=x^2-3$.

(a) $f(g(0))$ **(b)** $g(f(0))$
(c) $f(g(x))$ **(d)** $g(f(x))$
(e) $f(f(-5))$ **(f)** $g(g(2))$
(g) $f(f(x))$ **(h)** $g(g(x))$

6. Határozzuk meg a következő függvényértékeket, ha $f(x)=x-1$ és $g(x)=1/(x+1)$.

(a) $f(g(1/2))$ **(b)** $g(f(1/2))$
(c) $f(g(x))$ **(d)** $g(f(x))$
(e) $f(f(2))$ **(f)** $g(g(2))$
(g) $f(f(x))$ **(h)** $g(g(x))$

7. Legyen $u(x)=4x-5$, $v(x)=x^2$, $f(x)=1/x$. Mi a következő függvények képlete?

(a) $u(v(f(x)))$ **(b)** $u(f(v(x)))$
(c) $v(u(f(x)))$ **(d)** $v(f(u(x)))$
(e) $f(u(v(x)))$ **(f)** $f(v(u(x)))$

8. Legyen $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x/4$, $h(x)=x^3$. Mi a következő függvények képlete?

(a) $h(g(f(x)))$ **(b)** $h(f(g(x)))$
(c) $g(h(f(x)))$ **(d)** $g(f(h(x)))$
(e) $f(g(h(x)))$ **(f)** $f(h(g(x)))$

Legyen $f(x)=x-3$, $g(x)=\sqrt{x}$, $h(x)=x^3$ és $j(x)=2x$. Fejezzük ki a következő függvényeket olyan összetett függvényekként, amelyekben az f, g, h és j függvények is előfordulnak (9–10. feladat.)

9. **(a)** $y=\sqrt{x}-3$ **(b)** $y=2\sqrt{x}$
(c) $y=x^{1/4}$ **(d)** $y=4x$
(e) $y=\sqrt{(x-3)^2}$ **(f)** $y=(2x-6)^3$

10. **(a)** $y=2x-3$ **(b)** $y=x^{3/2}$
(c) $y=x^9$ **(d)** $y=x-6$
(e) $y=2\sqrt{x-3}$ **(f)** $y=\sqrt{x^3-3}$

11. Egészítsük ki a táblázatot.

	$g(x)$	$f(x)$	$(f\circ g)(x)$
(a)	$x-7$	$\sqrt{x}$	?
(b)	$x+2$	$3x$	?
(c)	?	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(d)	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	?
(e)	?	$1+\frac{1}{x}$	x
(f)	$\frac{1}{x}$	?	x

12. Egészítsük ki a táblázatot.

	$g(x)$	$f(x)$	$(f\circ g)(x)$
(a)	$\dfrac{1}{x-1}$	$\lvert x\rvert$	?
(b)	?	$\dfrac{x-1}{x}$	$\dfrac{x}{x+1}$
(c)	?	$\sqrt{x}$	$\lvert x\rvert$
(d)	$\sqrt{x}$	?	$\lvert x\rvert$

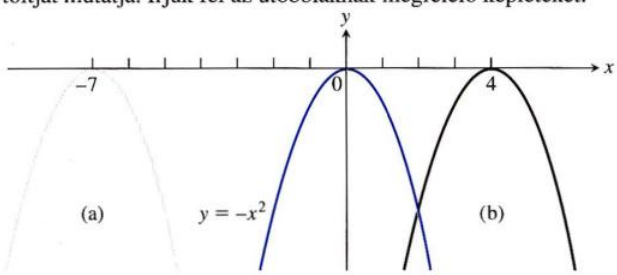
A 13–14. feladatban (a) írjuk fel az $f\circ g$ és a $g\circ f$ függvények képletét, majd állapítsuk meg a kapott összetett függvények (b) értelmezési tartományát és (c) értékkészletét.

13. $f(x)=\sqrt{x+1},\ g(x)=\frac{1}{x}$

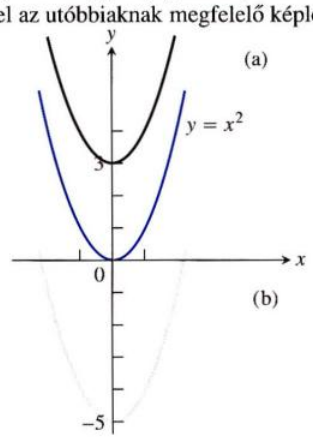
14. $f(x)=x^2,\ g(x)=1-\sqrt{x}$

Vízszintes és függőleges eltolás

15. Az ábra az $y=-x^2$ függvény grafikonját és ennek két eltoltját mutatja. Írjuk fel az utóbbiaknak megfelelő képleteket.



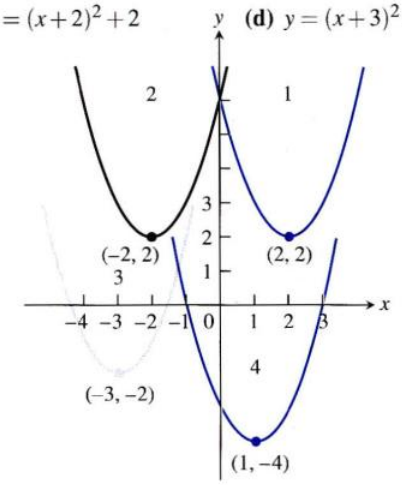
16. Az ábra az $y=x^2$ függvény grafikonját és ennek két eltoltját mutatja. Írjuk fel az utóbbiaknak megfelelő képleteket.



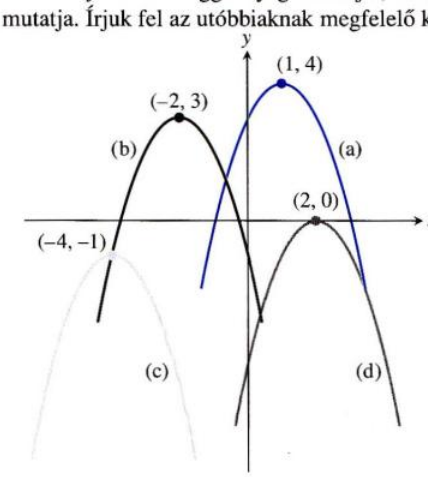
17. Párosítsuk a függvényeket és a függvénygrafikonokat!

(a) $y=(x-1)^2-4$ **(b)** $y=(x-2)^2+2$

(c) $y=(x+2)^2+2$ **(d)** $y=(x+3)^2-2$



18. Az ábra az $y=-x^2$ függvény grafikonját, és ennek négy eltoltját mutatja. Írjuk fel az utóbbiaknak megfelelő képleteket.



Írjuk fel annak az alakzatnak az egyenletét, amely a feladatban szereplő egyenletnek megfelelő alakzat megadott irányú és nagyságú eltolásával kapható meg. Ábrázoljuk mindkét alakzatot (19–28. feladatok).

19. $x^2+y^2=49$, le 3, balra 2

20. $x^2+y^2=25$, fel 3, balra 4

21. $y=x^3$, balra 1, le 1

22. $y=x^{2/1}$, jobbra 1, le 1

23. $y=\sqrt{x}$, balra 0,81

24. $y=-\sqrt{x}$, jobbra 3

25. $y=2x-7$, fel 7

26. $y=\frac{1}{2}(x+1)+5$, le 5, jobbra 1

27. $y=1/x$, fel 1, jobbra 1

28. $y=1/x^2$, balra 2, le 1

Vázoljuk a megadott függvények grafikonját (29–48. feladatok).

29. $y=\sqrt{x+4}$ **30.** $y=\sqrt{9-x}$

31. $y=|x-2|$ **32.** $y=|1-x|-1$

33. $y=1+\sqrt{x-1}$ **34.** $y=1-\sqrt{x}$

35. $y=(x+1)^{2/3}$ **36.** $y=(x-8)^{2/3}$

37. $y=1-x^{2/3}$ **38.** $y+4=x^{2/3}$

39. $y=\sqrt[3]{x-1}-1$ **40.** $y=(x+2)^{3/2}+1$

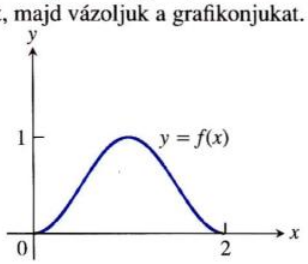
41. $y=\dfrac{1}{x-2}$ **42.** $y=\dfrac{1}{x}-2$

43. $y=\dfrac{1}{x}+2$ **44.** $y=\dfrac{1}{x+2}$

45. $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ **46.** $y=\dfrac{1}{x^2}-1$

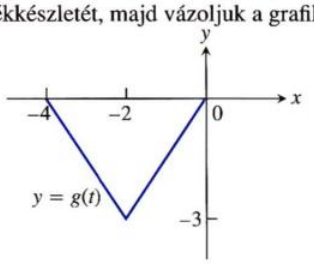
47. $y=\dfrac{1}{x^2}+1$ **48.** $y=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

49. Az ábrán egy $f(x)$ függvény grafikonja látható; a függvény értelmezési tartománya a $[0,2]$, értékkészlete a $[0,1]$ intervallum. Állapítsuk meg a megadott függvények értelmezési tartományát és értékkészletét, majd vázoljuk a grafikonjukat.



(a) $f(x)+2$ **(b)** $f(x)-1$
(c) $2f(x)$ **(d)** $-f(x)$
(e) $f(x+2)$ **(f)** $f(x-1)$
(g) $f(-x)$ **(h)** $-f(x+1)+1$

50. Az ábrán egy $g(t)$ függvény grafikonja látható; a függvény értelmezési tartománya a $[-4,0]$, értékkészlete a $[-3,0]$ intervallum. Állapítsuk meg a megadott függvények értelmezési tartományát és értékkészletét, majd vázoljuk a grafikonjukat.



(a) $g(-t)$ **(b)** $-g(t)$
(c) $g(t)+3$ **(d)** $1-g(t)$
(e) $g(-t+2)$ **(f)** $g(t-2)$
(g) $g(1-t)$ **(h)** $-g(t-4)$

Nyújtás és zsugorítás

Adjuk meg annak a függvénynek a képletét, amelynek grafikonja a feladatban szereplő függvény grafikonjának adott irányú és arányú nyújtásával, illetve zsugorításával kapható meg (51–60. feladatok).

51. $y=x^2-1$, 3 arányú nyújtás y irányban

52. $y=x^2-1$, 2 arányú zsugorítás x irányban

53. $y=1+\dfrac{1}{x^2}$, 2 arányú zsugorítás y irányban

54. $y=1+\frac{1}{x^2}$, 3 arányú nyújtás x irányban

55. $y=\sqrt{x+1}$, 2 arányú zsugorítás x irányban

56. $y=\sqrt{x+1}$, 3 arányú nyújtás y irányban

57. $y=\sqrt{4-x^2}$, 2 arányú nyújtás x irányban

58. $y=\sqrt{4-x^2}$, 3 arányú zsugorítás y irányban

59. $y=1-x^3$, 3 arányú zsugorítás x irányban

60. $y=1-x^3$, 2 arányú nyújtás x irányban

Összetett függvénytranszformációk

Ábrázoljuk a függvények grafikonját (61–68. feladatok). Táblázatkészítés helyett induljunk ki az 1.36–1.38. ábrákon bemutatott grafikonokból, és hajtsuk végre rajtuk a megfelelő transzformációkat.

61. $y=-\sqrt{2x+1}$ **62.** $y=\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}$

63. $y=(x-1)^3+2$ **64.** $y=(1-x)^3+2$

65. $y=\dfrac{1}{2x}-1$ **66.** $y=\dfrac{2}{x^2}+1$

67. $y=-\sqrt[3]{x}$ **68.** $y=(-2x)^{2/3}$

69. Ábrázoljuk az $y=|x^2-1|$ függvény grafikonját.

70. Ábrázoljuk az $y=\sqrt{|x|}$ függvény grafikonját.

Ellipszis

Írjuk fel az ellipszisek kanonikus egyenletét; ábrázoljuk az ellipsziseket (71–76. feladatok).

71. $9x^2+25y^2=225$ **72.** $16x^2+7y^2=112$

73. $3x^2+(y-2)^2=3$ **74.** $(x+1)^2+2y^2=4$

75. $3(x-1)^2+2(y+2)^2=6$

76. $6\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+9(y-\frac{1}{2})^2=54$

77. Írjuk fel az $(x^2/16)+(y^2/9)=1$ egyenletű ellipszis balra 4, fölfelé 3 egységű eltolásával kapott ellipszis egyenletét. Vázoljuk az ellipszist, állapítsuk meg a középpontjának koordinátáit és a nagytengelyének hosszát.

78. Írjuk fel az $(x^2/16)+(y^2/9)=1$ egyenletű ellipszis jobbra 3, lefelé 2 egységű eltolásával kapott ellipszis egyenletét. Vázoljuk az ellipszist, állapítsuk meg a középpontjának koordinátáit és a nagytengelyének hosszát.

Páros és a páratlan függvények

79. Legyen f páros, g pedig páratlan, az összes valós számon értelmezett függvény. Az alábbi függvények közül melyik páros és melyik páratlan (természetesen ott, ahol értelmezve vanak)?

(a) fg **(b)** f/g **(c)** g/f
(d) $f^2=ff$ **(e)** $g^2=gg$ **(f)** $f\circ g$
(g) $g\circ f$ **(h)** $f\circ f$ **(i)** $g\circ f$

80. Lehet-e egy függvény egyszerre páros és páratlan? Indokoljuk válaszunkat.

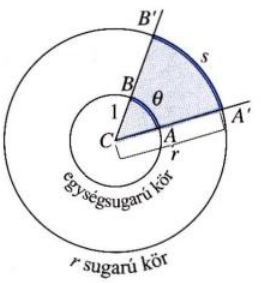
81. (Az 1. példa folytatása). Ábrázoljuk az $f(x)=\sqrt{x}$ és a $g(x)=\sqrt{1-x}$ függvényt, valamint a kettő (a) összegének, (b) szorzatának, (c) kétféle sorrendben vett különbségének és (d) kétféle sorrendben vett hányadosának grafikonját.

82. Legyen $f(x)=x-7$ és $g(x)=x^2$. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben f, g, valamint $f\circ g$ és $g\circ f$ grafikonjait.

1.6. Trigonometrikus függvények

Ebben az alfejezetben az alapvető trigonometrikus függvényekkel foglalkozunk. Ezek a függvények periodikusak, emiatt számos ciklusos, visszatérő jelenség modellezésére alkalmasak.

Ívmérték



1.63. ÁBRA: A C csúcspontú ACB szög radiánban mért nagysága a C középpontú egységkör AB ívének θ hossza. A θ nagyságát tetszőleges körben is megadhatjuk mint az s/r hányadost. Ha θ-t radiánban adjuk meg, akkor $s = r\theta$ éppen a szóban forgó körív hossza.

A szögeket több területen – például a hajózásban vagy a csillagászatban – fokokban mérik, az analízisben viszont az ívmérték használata az igazán kézenfekvő, mivel a későbbi számításokat jelentősen egyszerűsíti.

A C csúcspontú ACB szög ívmértéke – vagy **radiánban** mért nagysága – a C középpontú egységkör azon ívének a hossza, amely a szög szárai közé esik. Ha a θ szöget radiánban adjuk meg, akkor $s = r\theta$ éppen az r sugarú kör θ nagyságú középponti szögéhez tartozó ív hossza, l. az 1.63. ábrát.

Mivel az egységnyi sugarú kör kerülete 2π, a teljes fordulat pedig 360°-nak felel meg, a radiánban és fokokban mért nagyság között tehát az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\pi \text{ radián} = 180^\circ$$

Számítsuk át a 45°-os szöget:

$$45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

A $\pi/6$ radián szög nagysága fokokban:

$$\frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 30^\circ.$$

Átszámítási képletek

1 fok $= \dfrac{\pi}{180}$ ($\approx 0{,}02$) radián

fokokból radiánba: $\dfrac{\pi}{180}$-nal való szorzás

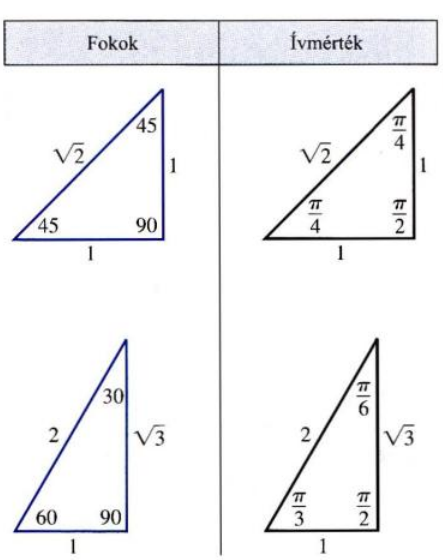
1 radián $= \dfrac{180}{\pi}$ (≈ 57) fok

radiánból fokokba: $\dfrac{180}{\pi}$-vel való szorzás

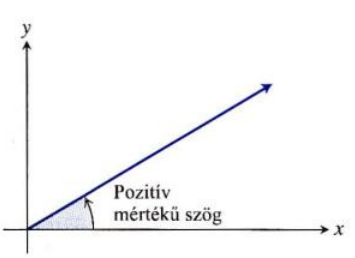
Az 1.64. ábrán két tipikus háromszög szögeinek nagyságát adtuk meg fokokban és radiánban.

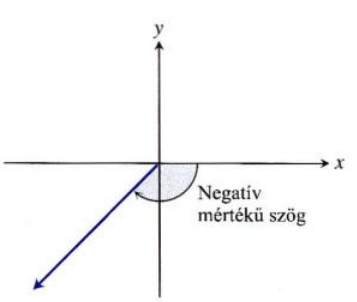
Azt mondjuk, hogy az xy-síkban elhelyezkedő AOB szög **alaphelyzetben** van, ha csúcsa az origó, OA szára pedig az x tengely pozitív irányába mutat (1.65. ábra). Ha a szöget az óramutató járásával ellentétes irányban mérjük, akkor nagyságát pozitív, ha az óramutató járásával egyező irányban mérjük, akkor negatív számmal adjuk meg.

A pozitív mértékű, vagyis az x-tengely pozitív irányának az óramutató járásával ellentétes irányban való elforgatásával megadott szögek 2π-nél, azaz 360°-nál nagyobbak is lehetnek. Hasonlóan: a negatív szögmértékek abszolút értékére sincs felső korlát (1.66. ábra).

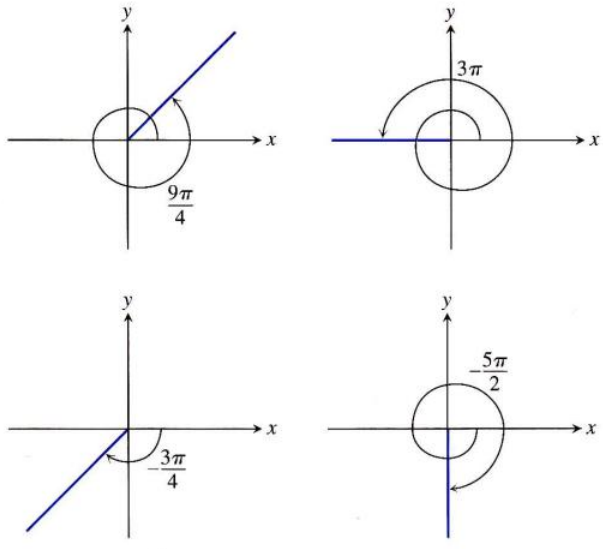


1.64. ÁBRA: Két jól ismert háromszög szögeinek nagysága, fokokban, illetve radiánban.





1.65. ÁBRA: A pozitív x-tengellyel bezárt szögek (szögek alaphelyzete)



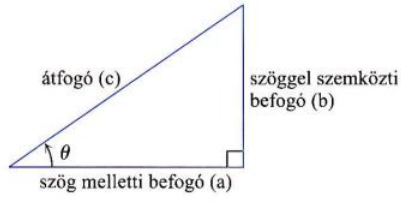
1.66. ÁBRA: A nemnulla szögek radiánban megadott mértéke 2π-nél nagyobb és -2π-nél kisebb is lehet.

Szögmérés: csak radiánban!

Mostantól fogva a szögeket mindig radiánban adjuk meg; ha ettől eltérünk, és fokokat vagy valamiyen más egységet használunk, akkor azt külön jelezzük. Ha tehát egy szög nagyságát $\pi/3$-ként adjuk meg, akkor $\pi/3$ radiánra (vagyis 60°-ra) gondolunk, nem pedig $\pi/3$ fokra. Amíg tehát analízissel foglalkozunk, számológépünket célszerű RAD módba kapcsolni (a fokokban számoló DEG helyett).

A hat alapvető trigonometrikus függvény

Az Olvasó feltehetően ismeri a hegyesszögek trigonometrikus függvényeinek szokásos, derékszögű háromszögek oldalainak arányával kifejezett definícióját (1.67. ábra). A következőkben ezt a definíciót általánosítjuk tetszőleges szö-



$$\sin\theta = \frac{b}{c} \qquad \csc\theta = \frac{c}{b}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{c} \qquad \sec\theta = \frac{c}{a}$$

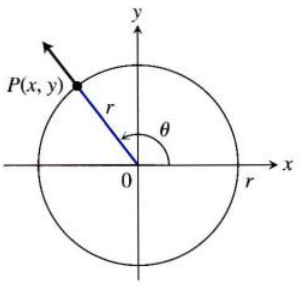
$$\tan\theta = \frac{b}{a} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{átfogó}}{\text{szöggel szemközti befogó}}$$

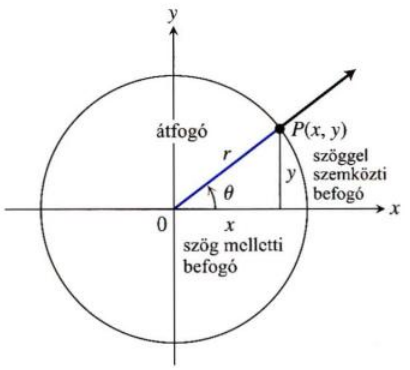
$$\cos\theta = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{átfogó}}{\text{szög melletti befogó}}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög melletti befogó}} \qquad \text{ctg}\,\theta = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{szöggel szemközti befogó}}$$

1.67. ÁBRA: Hegyesszögek szögfüggvényei



1.68. ÁBRA: Egy tetszőleges θ szög szögfüggvényeit x, y és r segítségével fejezzük ki.



1.69. ÁBRA: Hegyesszögek szögfüggvényeire az új definíció ugyanazt adja, mint a régi

gekre. Ehhez a szöget először alaphelyzetbe helyezzük egy r sugarú körben. A trigonometrikus függvényeket ezután annak a $P(x,y)$ pontnak a koordinátáival fejezzük ki, amelyben a szög másik (tehát nem az x-tengely pozitív irányába eső) szára metszi a kört (1.68. ábra).

szinusz:	$\sin\theta = \frac{y}{r}$	**koszekáns:**	$\csc\theta = \frac{r}{y}$
koszinusz:	$\cos\theta = \frac{x}{r}$	**szekáns:**	$\sec\theta = \frac{r}{x}$
tangens:	$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$	**kotangens:**	$\operatorname{ctg}\theta = \frac{x}{y}$

Új definícióink hegyesszögek esetén ugyanazt adják, mint a régiek (1.69. ábra).

A következő összefüggéseket akár definíciónak is tekinthetjük (természetesen azokra a szögekre, amelyekre értelmesek):

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \operatorname{ctg}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

A definíciók alapján nyilvánvaló, hogy sem $\operatorname{tg}\theta$, sem $\sec\theta$ nem értelmezhető abban az esetben, amikor $x = 0$, vagyis a $\theta = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2\ldots$ szögek esetén. Hasonlóan: sem $\operatorname{ctg}\theta$, sem $\csc\theta$ nem értelmezhető abban az esetben, amikor $y = 0$, tehát a $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi\ldots$ szögek esetén.

Az 1.64. ábra alapján néhány nevezetes szög szögfüggvényeinek pontos értékét is megadhatjuk; példának okáért:

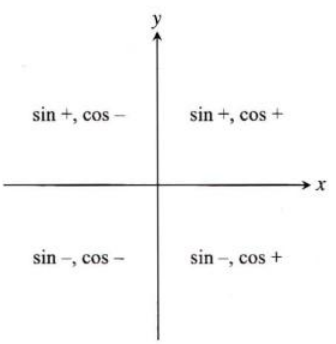
$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Az 1.70. ábra azt mutatja, hogy az egyes síknegyedekben milyen előjelűek a szögfüggvények értékei. Az 1.71. ábra alapján így azt kapjuk, hogy

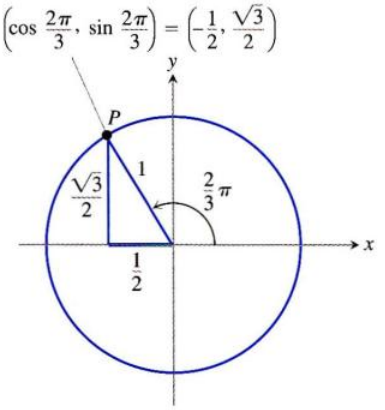
$$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \qquad \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

Hasonló módszerrel kaptuk az 1.4. táblázatban felsorolt értékeket.

A fokokban vagy radiánban megadott szögek szinuszának és koszinuszának jó közelítéssel pontos értékét általában számológéppel állapítjuk meg.



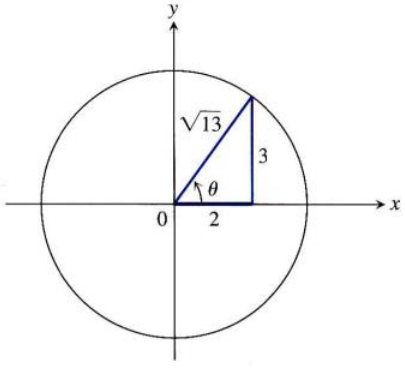
1.70. ÁBRA: A két felső síknegyedben a szögek szinusza, a két jobb oldaliban a szögek koszinusza pozitív



1.71. ÁBRA: A $2\pi/3$ rad nagyságú szög szinuszának és koszinuszának meghatározása

Fok	-180	-135	-90	-45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ rad	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\theta$	-0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg}\theta$	0	1	–	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0

1.4. TÁBLÁZAT: Nevezetes szögek szögfüggvényei



1.72. ÁBRA: Az 1. példában szereplő háromszög.

1. PÉLDA **Szögfüggvényértékek meghatározása.**

Határozzuk meg $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\csc\theta$, $\sec\theta$ és $\operatorname{ctg}\theta$ értékét, ha tudjuk, hogy $\operatorname{tg}\theta = 3/2$ és hogy $0 < \theta < \pi/2$.

Megoldás. Rajzoljunk derékszögű háromszöget, amelyben θ az egyik hegyesszög, a vele szemben lévő befogó 3, a mellette lévő pedig 2 egység hosszú (1.72. ábra). Ekkor $\operatorname{tg}\theta = 3/2$; Pitagorasz tétele szerint az átfogó: $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. Ezek után a trigonometrikus függvények definíciói alapján azt kapjuk, hogy:

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \sec\theta = \frac{\sqrt{13}}{2}, \quad \csc\theta = \frac{\sqrt{13}}{3}, \quad \operatorname{ctg}\theta = \frac{2}{3}. \qquad \square$$

Periodikus függvények; a trigonometrikus függvények grafikonja

Ha egy θ és egy $\theta + 2\pi$ nagyságú szög egyaránt alaphelyzetben van, akkor mindkét száruk egybeesik, ebből következően a trigonometrikus függvények a két szöghöz ugyanazt az értéket rendelik:

$$\cos(\theta+2\pi) = \cos\theta, \quad \sin(\theta+2\pi) = \sin\theta, \quad \operatorname{tg}(\theta+2\pi) = \operatorname{tg}\theta,$$
$$\sec(\theta+2\pi) = \sec\theta, \quad \csc(\theta+2\pi) = \csc\theta, \quad \operatorname{ctg}(\theta+2\pi) = \operatorname{ctg}\theta.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $\cos(\theta-2\pi) = \cos\theta$, $\sin(\theta-2\pi) = \sin\theta$ stb. Ezt a tulajdonságot – amely nem csupán trigonometrikus függvényeket jellemezhet – *periodicitásnak* nevezzük.

DEFINÍCIÓ **Periodikus függvény.**

Az $f(x)$ függvényt **periodikusnak** nevezzük, ha van olyan pozitív p szám, amelyre teljesül, hogy f értelmezési tartományának minden x eleme esetén $f(x+p) = f(p)$. A legkisebb ilyen tulajdonságú p számot f **periódusának** nevezzük.

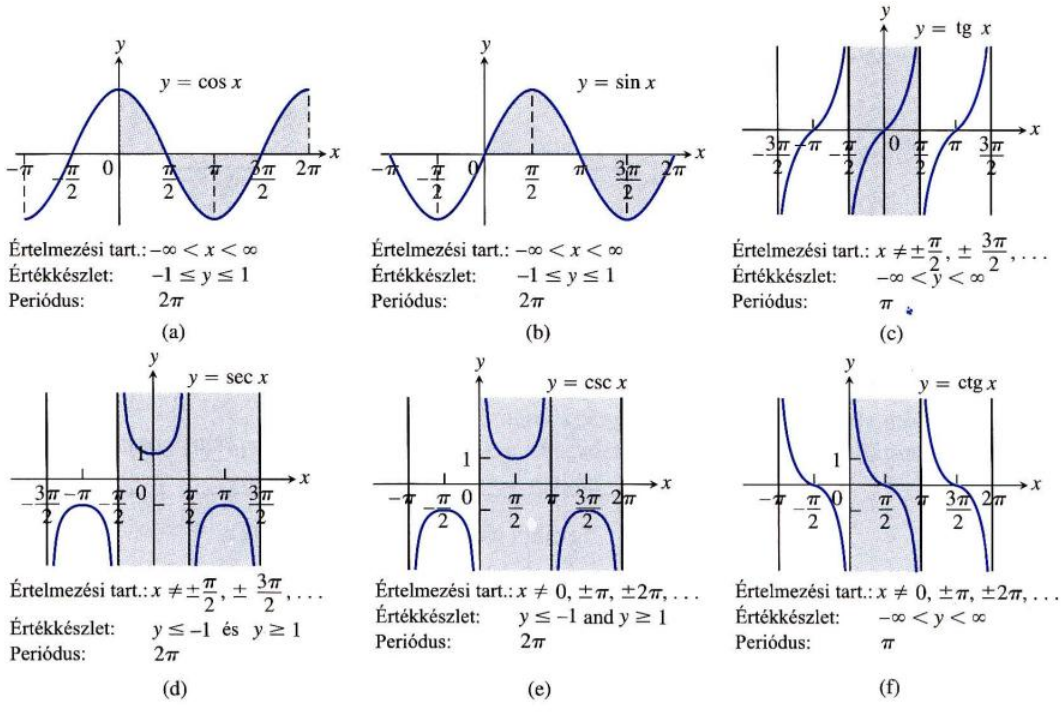
A trigonometrikus függvények periódusai

π periódusú	$\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg}x$
	$\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg}x$
2π periódusú	$\sin(x+2\pi) = \sin x$
	$\cos(x+2\pi) = \cos x$
	$\sec(x+2\pi) = \sec x$
	$\csc(x+2\pi) = \csc x$

Amikor a trigonometrikus függvényeket az xy-síkon ábrázoljuk, a független változót általában nem θ-val, hanem x-szel jelöljük (1.73. ábra).

Az 1.73. ábra tanúsága szerint a tangens- és a kotangensfüggvény periódusa π, a többi trigonometrikus függvényé pedig 2π. A periodikus függvények jelentősége abban áll, hogy a tudomány által vizsgált jelenségek közül igen sok van, amely – legalábbis közelítőleg – periodikus. Az analízis egyik fontos tétele szerint bármely periodikus függvény felírható szinusz- és koszinuszfüggvények algebrai kombinációiként; a módszerrel a 11.11. fejezetben ismerkedünk majd meg.

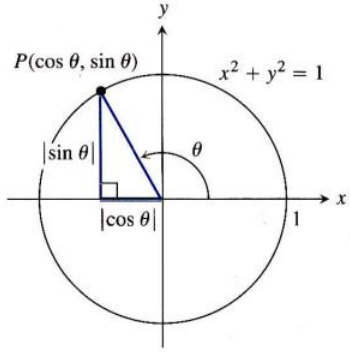
Az 1.73. ábrából az is kiderül, hogy a koszinusz- és a szekánsfüggvény páros, a másik négy trigonometrikus függvény pedig páratlan.



1.73. ÁBRA: A koszinusz- (a), a szinusz- (b), a tangens- (c), a szekáns- (d), a koszekáns- (e) és a kotangensfüggvény (f) grafikonja. Az árnyékolás a periódust mutatja.

Páros:	**Páratlan:**
$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\sec(-x) = \sec x$	$\mathrm{tg}\,(-x) = -\mathrm{tg}\,x$
	$\csc(-x) = -\csc(x)$
	$\mathrm{ctg}\,(-x) = -\mathrm{ctg}\,(x)$

Trigonometrikus azonosságok



1.74. ÁBRA: A θ szög „referencia-háromszöge"

Az xy-sík tetszőleges $P(x,y)$ pontjának koordinátái kifejezhetők a pont origótól való távolsága, valamint az origó végpontú OP félegyenes és az x-tengely pozitív iránya által bezárt θ szög segítségével (1.69. ábra). Mivel $x/r = \cos\theta$ és $y/r = \sin\theta$, azt kapjuk, hogy:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$$

Az $r = 1$ esetben az 1.74. ábrán kiemelt háromszögre Pitagorasz tételét felírva a nevezetes

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad (1)$$

egyenletet kapjuk. Ez az egyenlet, amely tetszőleges θ szögre érvényes, a leggyakrabban használt trigonometriai összefüggés. Mindkét oldalát $\cos^2\theta$-val, illetve $\sin^2\theta$-val osztva a következőket kapjuk:

$$1 + \mathrm{tg}^2\theta = \sec^2\theta,$$
$$1 + \mathrm{ctg}^2\theta = \csc^2\theta.$$

Az alábbi azonosságok – amelyek bizonyítására az 53. és az 54. feladatokban kerül sor – szintén bármely A és B szögre igazak:

Összegezési képletek

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B,$$
$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B. \tag{2}$$

Hasonló képletek adhatók meg $\cos(A-B)$, illetve $\sin(A-B)$ kifejezésére (35. és 36. feladat). Az ebben a könyvben felhasznált triginometrikus összefüggések mindegyike megkapható az (1) és (2) egyenletekből. Ha például az összegezési képletekben A és B helyébe egyaránt θ-t írunk, a következőket kapjuk:

Kétszeres szögek szögfüggvényei

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta,$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta. \tag{3}$$

További összefüggésekhez jutunk a

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

azonosságokból. A kettőt összeadva a $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$, az elsőből a másodikat kivonva a $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$ egyenlőséget kapjuk. Ez utóbbiakból nyerjük az integrálszámításban különösen hasznosnak bizonyuló félszögképleteket:

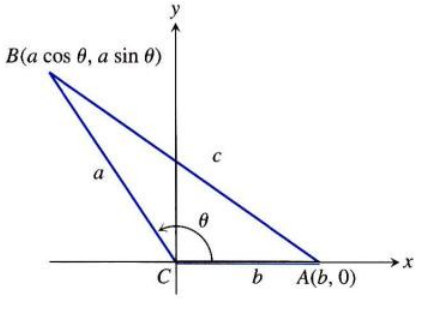
Félszögképletek

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}, \tag{4}$$
$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}. \tag{5}$$

A koszinusztétel

Ha az ABC háromszög oldalai a, b és c, a c oldallal szemközti szög pedig θ, akkor

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta. \tag{6}$$



1.75. ÁBRA: A koszinusztétel bizonyításához az A és B pontok távolságának négyzetét írjuk fel.

Ezt az összefüggést nevezzük **koszinusztételnek**.

A tétel igazolásához vegyünk fel egy koordináta-rendszert, amelynek origója a háromszög C csúcsa, a háromszög A csúcsa pedig az x-tengely pozitív felére esik (1.75. ábra). Az A csúcs koordinátái $(b,0)$, a B csúcsé pedig $(a\cos\theta, a\sin\theta)$. Az A és a B pontok közötti távolság négyzete eszerint:

$$\begin{aligned} c^2 &= (a\cos\theta - b)^2 + (a\sin\theta)^2 = \\ &= a^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} + b^2 - 2ab\cos\theta = \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta. \end{aligned}$$

A tétel speciális eseteként megkaphatjuk a Pitagorasz-tételt: ha ugyanis $\theta = \pi/2$, akkor $\cos\theta = 0$, így $c^2 = a^2 + b^2$.

Trigonometrikus függvény grafikonjának transzformációi

A függvénygrafikon eltolására, nyújtására, zsugorítására és a koordinátatengelyekre való tükrözésére vonatkozó szabályok a trigonometrikus függvények esetében is érvényesek. A következő ábrában az alapvető paraméterek szerepét foglaltuk össze.

a: az y irányú (vertikális) nyújtás mértéke; ha negatív, akkor a grafikont tükrözi az x-tengelyre

d: eltolás az y-tengely mentén

$$y = af(b(x+c)) + d$$

b: az x irányú (horizontális) nyújtás mértéke; ha negatív, akkor a grafikont tükrözi az y-tengelyre

c: eltolás az x-tengely mentén

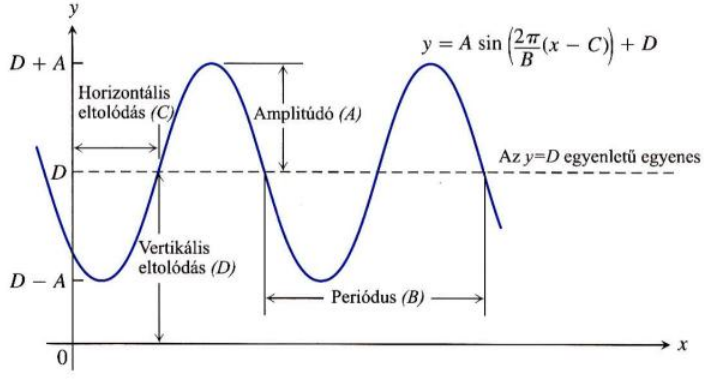
2. PÉLDA Az átlaghőmérséklet változása Alaszkában.

Az alaszkai távvezetéket szigetelés védi a külső hőmérsékleti változásoktól. A szigetelés tervezésekor a mérnököknek szükségük volt az átlaghőmérséklet éves ingadozását jelző adatokra. Az adatok ábrázolásához **általános szinuszfüggvényt** használtak, amelynek alakja:

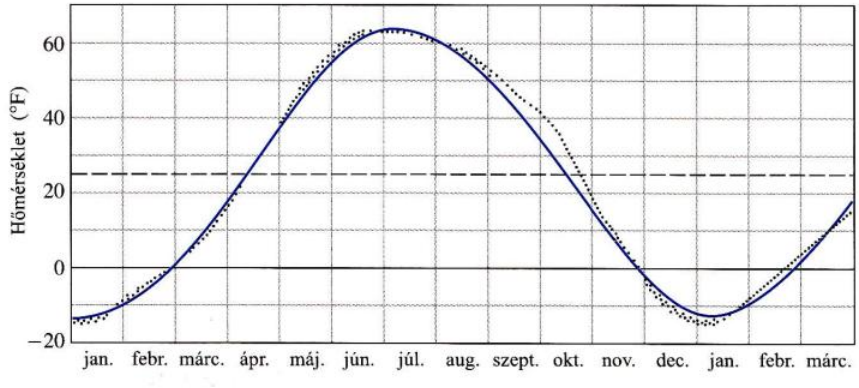
$$f(x) = A\sin\left[\frac{2\pi}{B}(x-C)\right] + D,$$

ahol $|A|$ az *amplitúdó*, $|B|$ a *periódus*, C a *horizontális*, D pedig a *vertikális eltolás* (1.76. ábra).

Az 1.77. ábrán azt tanulmányozhatjuk, hogyan használhatjuk az általános szinuszfüggvényt a gyakorlatban. Az 1.77. ábrán pontok jelölik a Fairbanksben mért napi átlaghőmérsékletet Fahrenheit-fokban, amelyet a Nemzeti Meteorológiai Szolgálat 1941 és 1970 között mért adataiból számoltak ki. Az adatokra



1.76. ÁBRA: Az $y = A\sin\left[\frac{2\pi}{B}(x-C)\right] + D$ általános szinuszgörbe; esetünkben az A, B, C, D állandók mindegyike pozitív



1.77. ÁBRA: A levegő átlaghőmérséklete Fairbanksben (Alaszka). A pontokkal jelzett mérési adatokra legjobban illeszkedő általános szinuszfüggvény:

$$f(x) = 37\sin\left[\frac{2\pi}{365}(x-101)\right] + 25$$

legjobban illeszkedő általános szinuszfüggvény az

$$f(x) = 37\sin\left[\frac{2\pi}{365}(x-101)\right] + 25$$

függvény, amely meglehetős pontossággal megadja az év x-edik napjának (Fahrenheit-fokban mért) $f(x)$ átlagos hőmérsékletét. A legjobban illeszkedő függvényt a szinuszos regresszió módszerével keresték meg, a módszerről a következő fejezetben részletesebben is szót ejtünk.

1.6. Feladatok

Radiánok és fokok

1. Milyen hosszú ív tartozik egy 10 méter sugarú körben egy (a) $4\pi/5$ rad, illetve egy (b) $110°$ nagyságú középponti szöghöz?

2. Mekkora egy 8 egység sugarú kör 10π hosszúságú ívéhez tartozó középponti szög? Adjuk meg a szög nagyságát radiánban és fokokban is.

3. 12 cm átmérőjű korongban $80°$ nagyságú középponti szöget akarunk berajzolni. Adjuk meg tized centiméter pontossággal a megfelelő ív hosszát.

4. Sík terepen 30 centiméternyivel hajtunk előre egy 1 méter átmérőjű kereket. Mekkora szöggel fordul el közben a kerék? Adjuk meg a szög nagyságát radiánban (tized pontossággal) és fokokban (egy fok pontossággal) is.

Trigonometrikus függvények értékének kiszámítása

5. Töltsük ki a táblázatot. Jelezzük, ahol a szóban forgó függvényérték nem létezik. Ne használjunk számológépet.

θ	$-\pi$	$-2\pi/3$	0	$\pi/2$	$3\pi/4$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\operatorname{tg}\theta$					
$\operatorname{ctg}\theta$					
$\sec\theta$					
$\csc\theta$					

6. Töltsük ki a táblázatot. Jelezzük, ahol a szóban forgó függvényérték nem létezik. Ne használjunk számológépet.

θ	$-3\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/6$	$\pi/4$	$5\pi/6$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\operatorname{tg}\theta$					
$\operatorname{ctg}\theta$					
$\sec\theta$					
$\csc\theta$					

A következő feladatokban a $\sin x$, a $\cos x$ és a $\operatorname{tg} x$ értékek közül az egyiket megadtuk. Állapítsuk meg a másik kettő pontos értékét abban az esetben, amikor x a megadott intervallumba esik.

7. $\sin x = \frac{3}{5}$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

8. $\operatorname{tg} x = 2$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

9. $\cos x = \frac{1}{3}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

10. $\cos x = -\frac{5}{13}$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

11. $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$, $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

12. $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

Trigonometrikus függvények grafikonjának ábrázolása

Ábrázoljuk a megadott függvényeket, mindegyiknek állapítsuk meg a periódusát.

13. $\sin 2x$

14. $\sin(x/2)$

15. $\cos \pi x$

16. $\cos\frac{\pi x}{2}$

17. $-\sin\frac{\pi x}{3}$

18. $-\cos 2\pi x$

19. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

20. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

21. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

22. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$

Ábrázoljuk a függvényeket a ts-síkon (t a vízszintes, s a függőleges tengely). Állapítsuk meg a függvények periódusát; milyen szimmetriatulajdonságai vannak a grafikonoknak? (23–26. feladatok.)

23. $s = \operatorname{ctg} 2t$

24. $s = -\operatorname{tg} \pi t$

25. $s = \sec\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

26. $s = \csc\left(\frac{t}{2}\right)$

27. **(a)** Ábrázoljuk az $y = \cos x$ és a $y = \sec x$ függvényt a $-3\pi/2 \le x \le 3\pi/2$ intervallumon. Milyen összefüggés van a két függvény értékeinek nagysága és előjele között?

(b) Ábrázoljuk az $y = \sin x$ és a $y = \csc x$ függvényt a $-\pi \le x \le 2\pi$ intervallumon. Milyen összefüggés van a két függvény értékeinek nagysága és előjele között?

28. Ábrázoljuk az $y = \operatorname{tg} x$ és a $y = \operatorname{ctg} x$ függvényt a $-7 \le x \le 7$ intervallumon. Milyen összefüggés van a két függvény értékeinek nagysága és előjele között?

29. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $y = \sin x$ és az $y = \lfloor \sin x \rfloor$ függvényt. Határozzuk meg az $y = \lfloor \sin x \rfloor$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét.

30. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $y = \sin x$ és az $y = \lceil \sin x \rceil$ függvényt. Határozzuk meg az $y = \lceil \sin x \rceil$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét.

További trigonometriai összefüggések

Az összegezési képleteket felhasználva bizonyítsuk be az alábbi összefüggéseket (31–36. feladatok).

31. $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$ **32.** $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$

33. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ **34.** $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$

35. $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$ (L. még az 53. feladatot is.)

36. $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

37. Mit kapunk a $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$ képletből az $A=B$ esetben? Összhangban van-e az eredmény azzal, amit már korábban is tudtunk?

38. Mit mondanak a $B=2\pi$ esetben az összegezési képletek? Olyasmit talán, amit már korábban is tudtunk?

Az összegezési képletek alkalmazása

Fejezzük ki a megadott kifejezéseket $\sin x$ és $\cos x$ segítségével (39–42. feladatok).

39. $\cos(\pi+x)$ **40.** $\sin(2\pi-x)$

41. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$ **42.** $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$

43. Határozzuk meg $\sin\frac{7\pi}{12}$ értékét $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$ kifejtésével.

44. Határozzuk meg $\cos\frac{11\pi}{12}$ értékét $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)$ kifejtésével.

45. Számoljuk ki $\cos\frac{\pi}{12}$ pontos értékét.

46. Számoljuk ki $\sin\frac{5\pi}{12}$ pontos értékét.

A kétszeres szögekre vonatkozó képletek alkalmazása

Határozzuk meg a kifejezések pontos értékét (47–50. feladatok).

47. $\cos^2\frac{\pi}{8}$ **48.** $\cos^2\frac{\pi}{12}$

49. $\sin^2\frac{\pi}{12}$ **50.** $\sin^2\frac{\pi}{8}$

További példák és feladatok

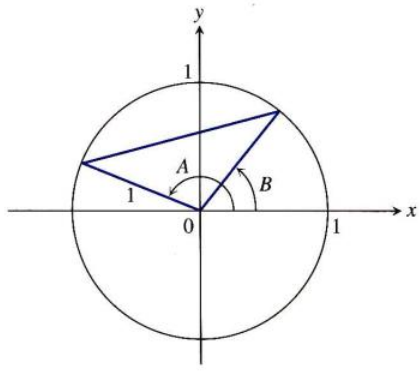
51. Két szög összegének tangensét az alábbi képlet adja meg:

$$\operatorname{tg}(A+B)=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}.$$

Igazoljuk az összefüggést.

52. (Az előző folytatása.) Vezessük le a $\operatorname{tg}(A-B)$-re vonatkozó összefüggést.

53. Vezessük le a $\cos(A-B)$-re vonatkozó képletet az ábrán feltüntetett háromszög leghosszabb oldalára felírt koszinusztétel alapján.



54. **(a)** Alkalmazzuk a $\cos(A-B)$-re kapott formulát a $\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ összefüggésre, és vezessük le a $\sin(A+B)$-re vonatkozó képletet.

(b) Vezessük le $\cos(A-B)$ képletéből a $\cos(A+B)$-re vonatkozó összegezési képletet. (Írjunk B helyébe $-B$-t.)

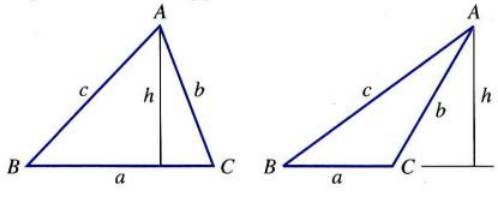
55. Mekkora annak a háromszögnek a c oldala, amelyben $a=2$, $b=3$, a C csúcsnál lévő szög pedig 60°-os?

56. Mekkora annak a háromszögnek a c oldala, amelyben $a=2$, $b=3$, a C csúcsnál lévő szög pedig 40°-os?

57. **A szinusztétel.** A szinusztétel szerint amennyiben egy háromszög a, b és c oldalával szemben rendre A, B és C nagyságú szög helyezkedik el, akkor

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}.$$

Bizonyítsuk be a tételt. Használjuk az ábrát és ha szükséges, a $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ összefüggést.



58. Egy háromszögben $a=2$, $b=3$ és $C=60°$ (mint az 55. feladatban). Számítsuk ki a B szög nagyságát.

59. Mekkora annak a háromszögnek az a oldala, amelyben $c=2$, az a és b oldallal szemközti szögek pedig rendre $\pi/4$ és $\pi/3$ nagyságúak?

60. **A $\sin x\approx x$ közelítés** Jó tudni, hogy ha az x szög nagyságát radiánban adjuk meg, akkor megfelelően kicsi x értékek esetén $\sin x\approx x$. (A 3.8. alfejezetben kiderül, miért érvényes ez a közelítés.) Ha $|x|<0,1$, akkor a közelítés hibája kisebb x értékének $1/5000$-ed részénél.

(a) Vizsgáljuk meg számítógéppel – RAD állásban – az $y=\sin x$ és az $y=x$ függvény grafikonját az origó közelében. Mit tapasztalunk akkor, amikor x értéke egyre kisebb?

(b) Vizsgáljuk meg számítógéppel – DEG állásban – az $y=\sin x$ és az $y=x$ függvény grafikonját az origó közelében. Különbözik-e az ábra az előzőtől?

(c) Könnyen megállapíthatjuk, hogy számológépünk RAD üzemmódban van-e, ha egy megfelelően kicsi számot – például 0,1-et – beírva benyomjuk a $\sin x$ gombot. Ha azt találjuk, hogy az output közelítőleg egyenlő az inputtal, a számológép radiánban számol, ha nem, akkor valamilyen más egységben. Próbáljuk ki.

Általános szinuszgörbék

Az alábbi függvények az

$$f(x) = A\sin\left[\frac{2\pi}{B}(x-C)\right] + D$$

általános szinuszgörbe speciális esetei; állapítsuk meg az A, B, C, D állandók értékét (61–64. feladatok).

61. $y = 2\sin(x+\pi) - 1$

62. $y = \frac{1}{2}\sin(\pi x - \pi) + \frac{1}{2}$

63. $y = -\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{\pi}$

64. $y = \frac{L}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi t}{L}\right), L > 0$

65. A fairbanksi (Alaszka) átlaghőmérséklet Határozzuk meg az alábbi általános szinuszfüggvényben (a) az amplitúdó, (b) a periódus, (c) a horizontális és (d) a vertikális eltolás nagyságát:

$$f(x) = 37\sin\left[\frac{2\pi}{365}(x-101)\right] + 25.$$

66. A fairbanksi (Alaszka) átlaghőmérséklet Az előző feladat képlete alapján adjunk közelítőleg pontos választ az alábbi kérdésekre (tegyük fel, hogy az év 365 napból áll; l. még az 1.77. ábrát is).

(a) Mennyi a legmagasabb és a legalacsonyabb napi átlaghőmérséklet?

(b) Menyi a legmagasabb és a legalacsonyabb napi átlaghőmérséklet átlaga? Miért egyezik meg ez az átlag a vertikális eltolás nagyságával?

Általános szinuszgörbe ábrázolása

A 67–70. feladatokban az

$$f(x) = A\sin\left[\frac{2\pi}{B}(x-C)\right] + D,$$

általános szinuszgörbe grafikonját vizsgáljuk az A, B, C, D állandók különböző értékei mellett. A megoldáshoz használhatunk számítógépet is.

67. A B periódus. Legyen $A = 3, C = D = 0$.

(a) Vázoljuk az $f(x)$ függvény grafikonját a $-4\pi \le x \le 4\pi$ intervallumon a $B = 1, 3, 2\pi, 5\pi$ értékekkel. Mi történik a grafikonnal, ha a periódus nő?

(b) Mi történik a grafikonnal, ha B-nek negatív értékeket adunk? Próbáljuk ki a $B = -3$ és a $B = -2\pi$ eseteket.

68. A C horizontális eltolás. Legyen $A = 3, B = 6$ és $D = 0$.

(a) Vázoljuk az $f(x)$ függvény grafikonját a $-4\pi \le x \le 4\pi$ intervallumon a $C = 0, 1, 2$ értékekkel. Mi történik $f(x)$ grafikonjával, ha C-nek egyre nagyobb pozitív értékeket adunk?

(b) Mi történik a grafikonnal, ha C-nek negatív értékeket adunk?

(c) Melyik az a legkisebb pozitív érték, amelyet C helyébe írva a grafikonon nem észlelhető a horizontális eltolás? Ellenőrizzük válaszunkat néhány függvényérték kiszámításával.

69. A D vertikális eltolás
Legyen $A = 3, B = 6$ és $C = 0$.

(a) Vázoljuk az $f(x)$ függvény grafikonját a $-4\pi \le x \le 4\pi$ intervallumon a $D = 0, 1, 3$ értékek esetén. Mi történik $f(x)$ grafikonjával, ha D-nek egyre nagyobb pozitív értékeket adunk?

(b) Mi történik a grafikonnal, ha D-nek negatív értékeket adunk?

70. Az A amplitúdó
Legyen $B = 6, C = D = 0$.

(a) Mi történik az általános szinuszfüggvény grafikonjával, ha az A amplitúdónak egyre nagyobb pozitív értékeket adunk? Illusztráljuk válaszunkat az $A = 1, 2, 9$ értékekkel.

(b) Mi történik a grafikonnal, ha A-nak negatív értékeket adunk?

1.7. Grafikus módszerek

Számítógép vagy újabb típusú számológép segítségével a legbonyolultabb függvények grafikonját is nagy pontossággal ábrázolhatjuk. Sok olyan függvény van, amelynek grafikus megjelenítése más módon különösen nehéz feladat lenne. Ebben az alfejezetben a függvényábrázoló programok és számológépek hatékony használatához szükséges ismereteket tárgyaljuk. A 4. fejezetben majd kiderül, hogyan bizonyosodhatunk meg arról, hogy a grafikus módszer nem vezetett félre bennünket.

A megfelelő ablakméret

Amikor egy függvényábrázoló programot vagy függvénygrafikon megjelenítésére is alkalmas számológépet használunk, maga a grafikon egy erre szolgáló **ablakban** jelenik meg. A default (alapértelmezésben adott) ablak gyakran hiányos, esetenként egyenesen félrevezető képet ad a vizsgált függvényről. Az ablakot **négyzetesnek** nevezzük, ha a vízszintes és a függőleges tengelyen ugyanazt a skálát alkalmazza. A kifejezés tehát nem az ablak alakjára utal – ez általában

téglalap –, hanem csupán arra, hogy az x-egységek ugyanolyan hosszúak, mint az y-egységek.

Egy függvény grafikonjának ábrázolásakor a x-skála nem feltétlenül egyezik meg az y-skálával. Az ablak kijelölése azt jelenti, hogy a program rögzít két $a \le x \le b$ és $c \le y \le d$ intervallumot, ezzel megadja az $[a,b] \times [c,d]$ méretű ablakot, amelyben tehát a függő és független változók összetartozó értékeiből alkotott (x,y) pontok csak akkor jelenhetnek meg, ha mindkét kordinátájuk a megfelelő intervallumba esik. Ezután az $[a,b]$ intervallumban egyenlő eloszlásban meghatározza az ábrázolandó pontok x-koordinátáit. Az első kijelölt x számnál először ellenőrzi, hogy eleme-e x a függvény értelmezési tartományának. Ha igen, és a hozzá tartozó függvényérték ráadásul a $[c,d]$ intervallumba esik, akkor az ablak koordináta-rendszerében feltűnik az $(x,f(x))$ pont. Amennyiben a szóban forgó x nem eleme az értelmezési tartománynak, vagy a hozzá tartozó $f(x)$ függvényérték nem esik bele a $[c,d]$ intervallumba, a program az $[a,b]$ intervallum soron következő számával folytatja. Végeredményben általában elég sok összetartozó $(x,f(x))$ pont bekerül az ablakba. A szomszédos pontokat a gép – rövid kis egyenes szakaszokkal, ahogy papíron és ceruzával mi is tennénk – összeköti, aminek eredményeként a kapott grafikon többnyire folytonos görbe benyomását kelti. Az eljárás azonban nem mindig vezet megfelelő eredményhez, amint azt a következő példák is mutatják.

1. PÉLDA **A megfelelő ablak megtalálása.**

Ábrázoljuk az $f(x) = x^3 - 7x^2 + 28$ függvény grafikonját a

(a) $[-10,10] \times [-10,10]$ **(b)** $[-4,4] \times [-50,10]$

(c) $[-4,10] \times [-60,60]$

méretű ablakokban.

Megoldás.

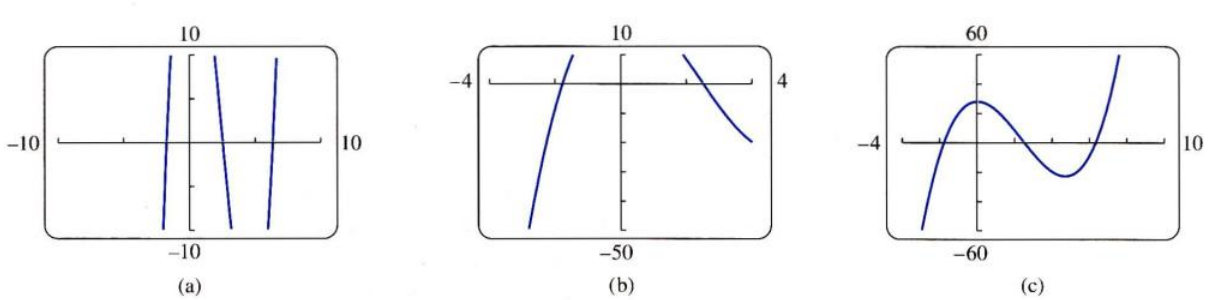
(a) Esetünkben tehát $a = -10$, $b = 10$, $c = -10$ és $d = 10$. Az eredmény az 1.78. ábra (a) részén látható, hogy az ablak levágta a grafikon alsó részét, az x-intervallum pedig mintha túlságosan nagy lenne. Próbálkozzunk egy másik ablakkal.

(b) Az 1.78. ábra (b) része már többet elárul a grafikonról, de a görbe fölső része még mindig hiányzik, és valószínűleg az $x = 4$ helytől jobbra eső x-ek is fontos információkkal szolgálnak. A következő ablakban mindkét hiányosságot orvosolni próbáljuk.

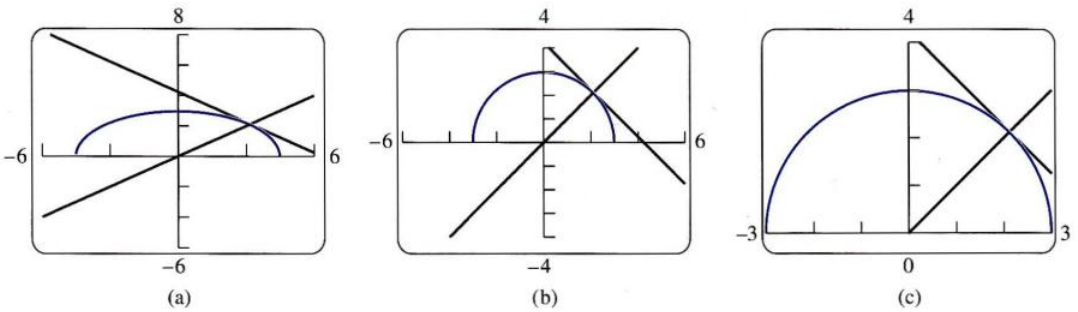
(c) Az 1.78. (c) ábrán látható grafikon már valóban emlékeztet egy harmadfokú polinom grafikonjára. A megfelelő méretű ablak kiválasztása tehát egyfajta próbálgatós („trial & error") eljárás. □

2. PÉLDA **Négyzetes ablakok.**

Amikor a számítógép egy függvény grafikonját megjeleníti, az x- és az y-tengelyen gyakran nem egyforma hosszúságú egységeket használ; így történt ez



1.78. ÁBRA: Az $f(x) = x^3 - 7x^2 + 28$ függvény grafikonja három különböző méretű ablakban (1. példa).



1.79. ÁBRA: Az $y = x$ és az $y = -x + 3\sqrt{2}$ egyenletű egyenesek és az $y = \sqrt{9 - x^2}$ félkör grafikonja (a) nem négyzetes, illetve ((b) és (c) ábrák) négyzetes ablakokban (2. példa).

az előző példa (b) és (c) részénél is. Az ablak az egységek megváltoztatásával természetesen négyzetessé tehető. A legtöbb program fel is kínálja ezt a lehetőséget. Ha az általunk használt program nem ilyen, akkor választhatunk: vagy kiszámítjuk a megfelelő ablakméretet, és azt adjuk meg, vagy a „torz" grafikonnál maradunk, de a képet fenntartásokkal kezeljük.

Az 1.79. (a) ábra az $y = x$ és az $y = -x + 3\sqrt{2}$ egyenletű merőleges egyeneseket, valamint az $y = \sqrt{9 - x^2}$ egyenletű félkört mutatja egy nem négyzetes, $[-6,6] \times [-6,8]$ méretű ablakban. Az kép nyilvánvalóan torzít: az egyenesek nem merőlegesek, a kör pedig ellipszisnek látszik.

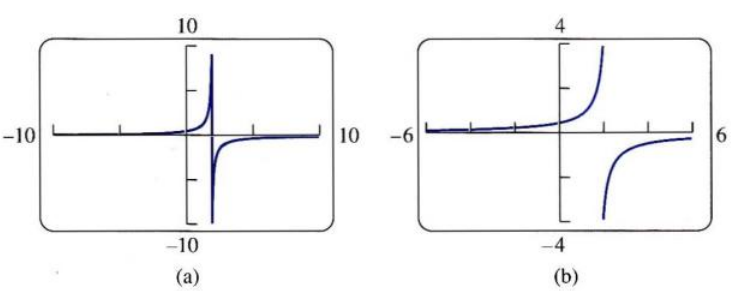
Az 1.79. ábra (b) része ugyanezen függvények grafikonjait egy négyzetes ablakban mutatja, amelyben a két tengelyen ugyanaz a skála. Vegyük észre, hogy az x-tengely beosztása ugyanaz, mint az (a) ablakban, az y-tengely egységeit azonban valamelyest széthúztuk. Az ábra (c) része a (b) ábra nagyítása egy $[-3,3] \times [0,4]$ ablakban. □

Ha egy racionális függvény nevezője éppen egy olyan x esetén 0, amely benne van az ablak x-intervallumában, akkor előfordulhat, hogy a számológép vagy a grafikus program egy meredek, függőleges közelítő egyenest rajzol az ablak aljától a tetejéig. Lássunk egy példát:

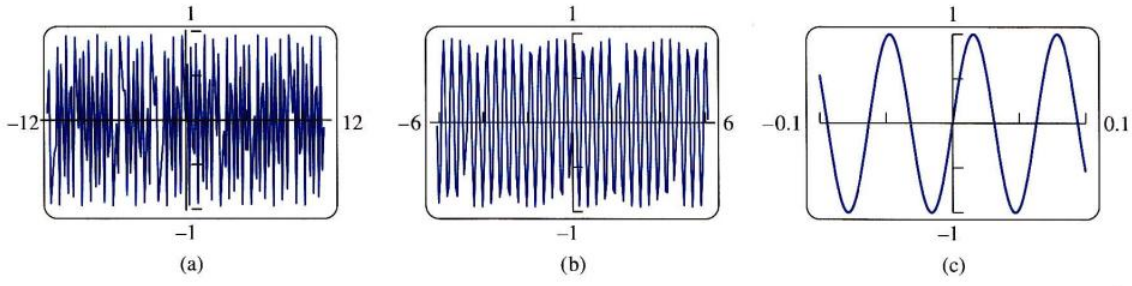
3. PÉLDA **Racionális függvény grafikonja.**

Ábrázoljuk az $y = \dfrac{1}{2 - x}$ függvény grafikonját.

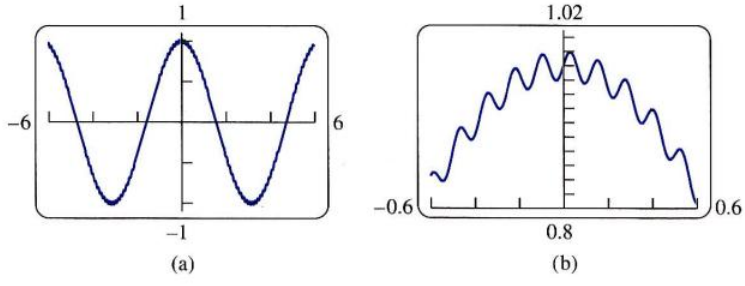
Megoldás. Az 1.80. ábra (a) részén a függvény grafikonja a programunk alapértelmezett, $[-10,10] \times [-10,10]$ méretű négyzetes ablakában látható. Az $x = 2$ helyen egy közelítőleg függőleges egyenes éktelenkedik, holott az $x = 2$ hely nem is eleme a függvény értelmezési tartományának. A hibát próbálgatós módszerrel küszöböltük ki; a kisebb, $[-6,6] \times [-4,4]$ méretű – szintén négyzetes – ablak jobb eredményt ad. □



1.80. ÁBRA: Az $y = \dfrac{1}{2 - x}$ függvény grafikonja két különböző ablakban (3. példa).



1.81. ÁBRA: Az $f(x) = \sin 100x$ függvény grafikonja három ablakban. Mivel a periódus kicsi ($2\pi/100 \approx$ $\approx 0,063$), a függvény tényleges alakja csak a legkisebb x-intervallumot használó (c) ablakban látható.



1.82. ÁBRA: Az $y = \cos x + \frac{1}{50}\sin 50x$ függvény grafikonja (a) „madártávlatból", és a középső csúcs kinagyított képe (b), amelyen a második, szinuszos tag által okozott oszcillációk is jól láthatók.

Amikor a számítógép egy gyorsan oszcilláló trigonometrikus függvény grafikonját jeleníti meg, előfordul, hogy számos maximum-, illetve minimumhely láthatatlan marad. Az ábra ilyenkor kifejezetten félrevezető is lehet.

4. PÉLDA **Gyorsan oszcilláló függvény I.**

Ábrázoljuk az $f(x) = \sin 100x$ függvény grafikonját.

Megoldás. Az 1.81. ábra (a) része azt mutatja, amit a $[-12,12] \times [-1,1]$ ablakmérettel kaptunk. A grafikon meglehetősen furcsa, elvégre tudjuk, hogy a szinuszfüggvény értékei -1 és 1 között váltakoznak. Eztuán egy kisebb, $[-6,6]\times$ $\times[-1,1]$ méretű ablakkal próbálkoztunk, nem sok sikerrel: az eredményt az 1.81. ábra (b) része mutatja. A problémát az okozza, hogy az $y = \sin 100x$ függvény periódusa kicsi: $2\pi/100 \approx 0,063$. Egy sokkal kisebb, $[-0,1;0,1] \times [-1,1]$ méretű ablakban – amint az ábra (c) részén látható – már azt kapjuk, amit várunk: szinuszgörbét. □

5. PÉLDA **Gyorsan oszcilláló függvény II.**

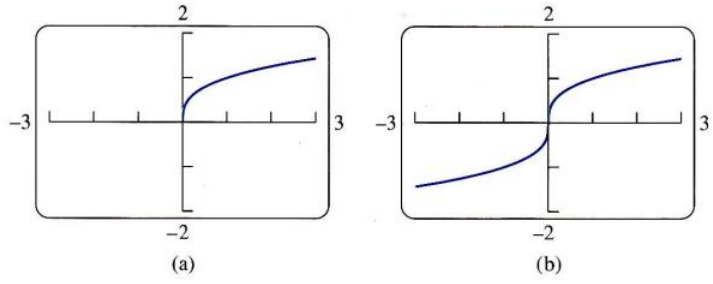
Ábrázoljuk az $y = \cos x + \dfrac{1}{50}\sin 50x$ függvény grafikonját.

Megoldás. A $[-6,6] \times [-1,1]$ méretű ablakban, az 1.82. ábra (a) részén látható grafikon nagyon emlékeztet egy koszinuszfüggvényre, eltekintve az alig látható cakkoktól. A grafikon valódi alakja csupán megfelelő nagyításban tárul elénk. Az ábra (b) részének $[-0,6;0,6] \times [0,8;1,02]$ méretű ablakában már láthatók a második, $\frac{1}{50}\sin 50x$ tag által okozott, a $\cos x$ fő tagénál sokkal kisebb és sokkal gyorsabb oszcillációk is. □

6. PÉLDA **Törtkitevőjű hatványfüggvény.**

Ábrázoljuk az $y = x^{1/3}$ függvény grafikonját.

Megoldás. Jó néhány program az 1.83. ábra (a) részén látható grafikont rajzolja ki. Ha ezt összevetjük az $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ függvénynek az 1.38. ábra alapján



1.83. ÁBRA: (a) Az $y = x^{1/3}$ függvény grafikonjának a fele lemaradt. (b) Az elveszített ágat az $f(x) = \frac{|x|}{x} \cdot x^{1/3}$ függvénnyel kaptuk vissza (6. példa).

már jól ismert grafikonjával, azt látjuk, hogy a bal oldali ág hiányzik. A csonkítást az okozza, hogy sok számoló-, illetve számítógép $x^{1/3}$ értékét $e^{(1/3)\ln x}$-ként számolja ki. (Az exponenciális és a logaritmusfüggvényről a 7. fejezetben lesz szó.) Mivel pedig az ln természetes alapú logaritmusfüggvény negatív x-ek esetén nem értelmezett, a program csak a jobb oldali ágnak megfelelő pontokat tünteti fel. Kis ügyeskedéssel ezen felülkerekedhetünk: az

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \cdot |x|^{1/3}$$

függvény ugyanis az $x = 0$ helyet leszámítva megegyezik az $y = x^{1/3}$ függvénnyel ($0^{1/3} = 0$, viszont f viszont a 0 helyen nincs értelmezve). A kapott grafikont az 1.83. ábra (b) részén tanulmányozhatjuk. □

Empirikus modellezés: a trendek feltárása

x (*év*)	y (*ár*)
1968	0,06
1971	0,08
1974	0,10
1975	0,13
1977	0,15
1981	0,18
1981	0,20
1985	0,22
1987	0,25
1991	0,29
1995	0,32
1998	0,33
2002	0,37

1.5. TÁBLÁZAT: Bélyegárak az USA-ban

Az 1.4. alfejezet 3. példájában empirikus adatokkal támasztottuk alá Kepler hipotézisét, miszerint egy bolygó keringési ideje egyenesen arányos az ellipszispálya nagytengelyének 3/2-ik hatványával. Amikor azonban sejtésünk sincs a függő és a független változó között fennálló összefüggésről, célszerű, ha minél több adatot összegyűjtünk, és megvizsgáljuk, hogy milyen görbe „illik" hozzájuk a legjobban. Azt az eljárást, amellyel az egymáshoz tartozó értékekre legjobban illeszkedő görbét keressük, **regresszióanalízisnek**, a kapott görbét pedig **regressziós görbének** nevezzük. A számítógépek általában azt a görbét választják, amelyre teljesül, hogy az adatokban szereplő pontok és a görbe ugyanolyan abszcisszájú pontjai közötti függőleges távolságok négyzetének összege minimális. Ezt a módszert – a legkisebb négyzetek módszerét – a 14.7. alfejezet feladataiban részletesebben tárgyaljuk.

A regressziószámításban sokféle függvénytípus hasznosnak bizonyulhat: vannak lineáris-, hatvány-, exponenciális, logaritmus- és általános szinuszfüggvényt használó regressziós eljárások. A számítógépek programjai vagy az erre alkalmas számológépek ennek megfelelően az adatokhoz többféle típusú regressziós görbét is megkereshetnek. A következő példában az 1.5. táblázat adataihoz illesztünk egyenest (lineáris regresszió).

7. PÉLDA **Regressziós egyenes illesztése az adatokra.**

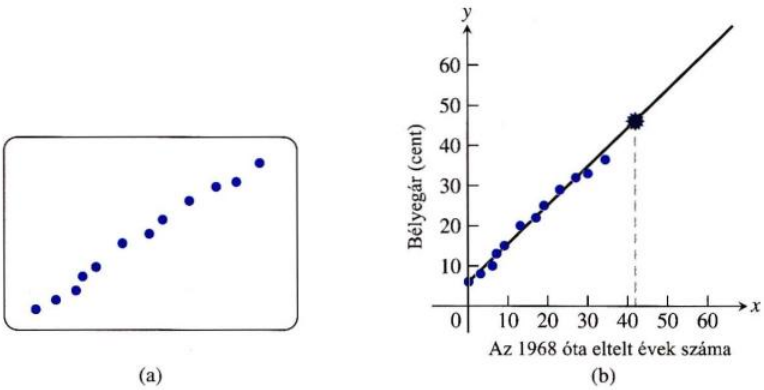
Az 1.5. táblázat adatai alapján alkossunk modellt, amely az idő függvényében leírja a bélyegár alakulását az Egyesült Államokban. Ha a modell ésszerűnek tűnik, adjunk előrejelzést, hogyan alakul a bélyegár 2010-ben.

Megoldás. A bélyegárakra vonatkozó adatok 1968-tól kezdve állnak rendelkezésünkre. 1981-ben két áremelés is volt, egyszer 3, majd újabb 2 cent; ezeket, hogy a többi adattal összhangba hozzuk, egyetlen 5 centes emelkedésként könyveljük el. Új táblázatot (1.6.) készítünk, amelyben az éveket 1968-tól számítjuk; az adatokat az 1.84. ábra (a) részén tüntettük fel.

A pontok jó közelítéssel egy egyenesre illeszkednek, így az adatok bevitele után számítógépünkön a lineáris regressziószámítás opciót választjuk. Regressziós

x	0	3	6	7	9	13	17	19	23	27	30	34
y	6	8	10	13	15	20	22	25	29	32	33	37

1.6. TÁBLÁZAT: Bélyegárak az USA-ban 1968-tól



(a) (b)

1.84. ÁBRA: (a) Az 1.6. táblázat adatai. (b) A regressziós egyenes alapján megbecsülhetjük, hány cent lesz egy bélyeg 2010-ben (7. példa).

„görbénk" tehát egyenes lesz, méghozzá az

$$y = 0,94x + 6,10$$

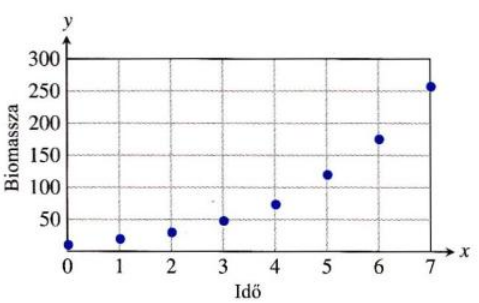
egyenletű egyenes. Az 1.84. ábra (b) része az adatokat a rájuk illesztett regressziós egyenessel együtt mutatja. Az illeszkedés szemmel láthatóan jó, modellünk ésszerűnek tűnik.

A regressziós egyenes egyenletét felhasználva azt kapjuk, hogy 2010-ben (amikor tehát $x = 42$), egy bélyeg $y = 0,94 \cdot 42 + 6,10 \approx 46$ centbe fog kerülni. Előrejelzésünket az 1.84. ábra (b) részén a kiemelt pont jelzi. □

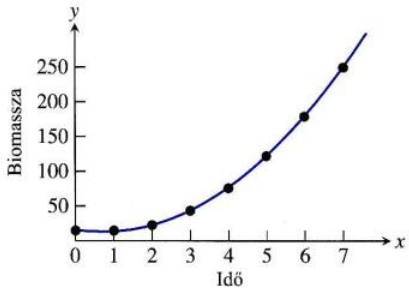
8. PÉLDA **Populáció nagysága.**

Előfordul, hogy egy populáció nagyságát akarjuk modellezni; a populációt alkothatják például egy halgazdaság pisztrángjai vagy törpeharcsái. Az 1.85. ábra – R. Pearl adatai alapján – egy élesztőgomba-tenyészetben lévő sejtek számának (a tenyészet biomasszájának) növekedését mutatja az (órában mért) idő függvényében.

A pontok folytonos, növekedő görbét sejtetnek. Többféle regressziós görbét is kipróbálhatunk: polinomot (például egy $y = ax^2 + bx + c$ alakú másodfokú polinomfüggvényt), $y = ax^b$ alakú hatványfüggvényt vagy exponenciális függvényt (amelynek képlete $y = ae^{bx}$). Az 1.86. ábra tanúsága szerint a másodfokú polinomfüggvény jó választásnak tűnhet.



1.85. ÁBRA: Élesztőgomba-tenyészet növekedése (8. példa)
Forrás: R. Pearl, The Growth of Population. *Quart. Rev. Biol.*, Vol. 2 (1927), 532–548. o.



1.86. ÁBRA: Az adatokra legjobban illeszkedő másodfokú görbe: $y = 6,10x^2 - 9,28x + 16,43$, amelynek alapján az $y(17) = 1622,65$ előrejelzést adhatjuk

Az $y = 6,10x^2 - 9,28x + 16,43$ modell jól illeszkedik az adatokhoz (1.86. ábra). A modell szerint 17 óra elteltével a biomassza nagysága

$$y(17) = 1622,65.$$

Vizsgáljuk meg, helyénvaló-e ez az előrejelzés.

Az 1.87. ábrán Pearl összes mérési eredményét feltüntettük. Az

$$y(17) = 1622,65$$

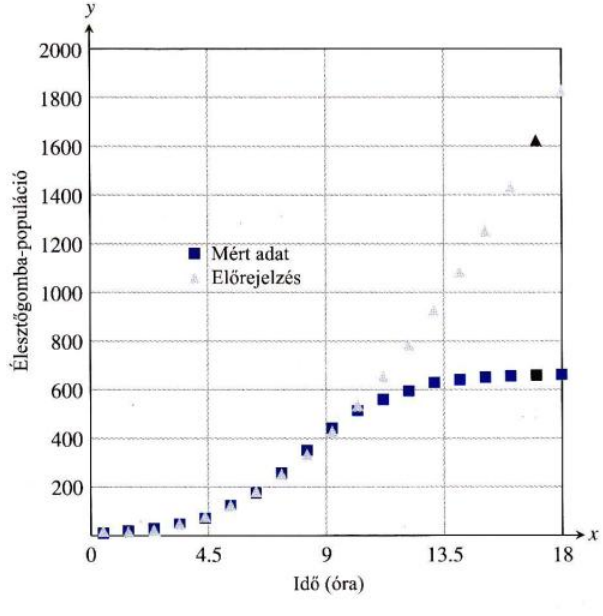
előrejelzés a tényleges adatok fényében meglehetősen elhibázottnak tűnik, elvégre a biomassza nagysága 17 óra elteltével csupán 659,6 volt. Miért mondott csődöt a kezdeti adatokra olyan remekül illeszkedő másodfokú modell?

Gyakran kétséges eredményt kapunk, ha az empirikus modell alapjául szolgáló adatok tartományán messze túl eső értékeket akarunk előrejelezni. (Esetünkben a $0 \leq x \leq 7$ értékekhez tartozó adatok alapján alkottuk meg a modellt, de $x = 17$-re próbáltunk előrejelzést adni.) Az ilyen *extrapoláció* különösen akkor veszélyes, ha semmiféle alapos indok nem támasztja alá, hogy modellünknek pontosan olyan típusúnak kell lennie, ahogy választottuk. Vajon miből gondoltuk, hogy az élesztőgomba-populáció növekedését egy másodfokú függvény írja le? Miért nem inkább exponenciális? Mindezeket figyelembe véve, hogyan jelezzük előre a jövőbeli értékeket? Az analízis gyakran segítségünkre lesz az efféle kérdések megválaszolásában; a populációnövekedés problémájával például a 9. fejezetben foglalkozunk. □

Regresszióanalízis

A regresszióanalízis négy lépése:

1. Az adatok ábrázolása (pontdiagram).
2. A regressziós görbe megkeresése. Ez lineáris regresszió esetében $y = mx + b$, kvadratikus regresszió esetén $y = ax^2 + bx + c$ alakú.
3. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az adatokat és a regressziós görbét, hogy lássuk, mennyire jó az illeszkedés.
4. Amennyiben az illeszkedés megfelelő, használjuk a regressziós görbe egyenletét olyan x-ekhez tartozó y értékek előrejelzésére, amelyek nem szerepelnek az adataink között.



1.87. ÁBRA: Pearl összes mérési eredménye

1.7. Feladatok

Ablakméret-választás

Számoló- vagy számítógép segítségével állapítsuk meg, melyik ablakból tudhatunk meg legtöbbet a megadott függvényről (1–4. feladatok).

1. $f(x) = x^4 - 7x^2 + 6x$

(a) $[-1,1] \times [-1,1]$ **(b)** $[-2,2] \times [-5,5]$

(c) $[-10,10] \times [-10,10]$ **(d)** $[-5,5] \times [-25,15]$

2. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

(a) $[-1,1] \times [-5,5]$ **(b)** $[-3,3] \times [-10,10]$

(c) $[-5,5] \times [-10,20]$ **(d)** $[-20,20] \times [-100,100]$

3. $f(x) = 5 + 12x - x^3$

(a) $[-1,1] \times [-1,1]$ **(b)** $[-5,5] \times [-10,10]$

(c) $[-4,4] \times [-20,20]$ **(d)** $[-4,5] \times [-15,25]$

4. $f(x) = \sqrt{5 + 4x - x^2}$

(a) $[-2,2] \times [-2,2]$ **(b)** $[-2,6] \times [-1,4]$

(c) $[-3,7] \times [0,10]$ **(d)** $[-10,10] \times [-10,10]$

A megfelelő ablakméret meghatározása

Határozzuk meg a megfelelő ablakméretet, és ábrázoljuk a függvény grafikonját (5–30. feladatok).

5. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 15$

6. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1$

7. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10$

8. $f(x) = 4x^3 - x^4$

9. $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$

10. $f(x) = x^2(6 - x^3)$

11. $y = 2x - 3x^{2/3}$

12. $y = x^{1/3}(x^2 - 8)$

13. $y = 5x^{2/5} - 2x$

14. $y = x^{2/3}(5 - x)$

15. $y = |x^2 - 1|$

16. $y = |x^2 - x|$

17. $y = \frac{x+3}{x+2}$

18. $y = 1 - \frac{1}{x+3}$

19. $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$

20. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

21. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}$

22. $f(x) = \frac{8}{x^2-9}$

23. $f(x) = \frac{6x^2 - 15x + 6}{4x^2 - 10x}$

24. $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

25. $y = \sin 250x$

26. $y = 3\cos 60x$

27. $y = \cos\left(\frac{x}{50}\right)$

28. $y = \frac{1}{10}\sin\left(\frac{x}{10}\right)$

29. $y = x + \frac{1}{10}\sin 30x$

30. $y = x^2 + \frac{1}{50}\cos 100x$

31. Ábrázoljuk az $x^2 + 2x = 4 + 4y - y^2$ egyenletű kör alsó félkörét.

32. Ábrázoljuk az $y^2 - 16x^2 = 1$ egyenletű hiperbola felső ágát.

33. Ábrázoljuk az $f(x) = -\operatorname{tg} 2x$ függvény négy periódusát.

34. Ábrázoljuk az $f(x) = 3\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + 1$ függvény két periódusát.

35. Ábrázoljuk az $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$ függvény grafikonját.

36. Ábrázoljuk az $f(x) = \sin^3 x$ függvény grafikonját.

A DOTS opció használata

A 3. példáéhoz hasonló hibákat úgy is elkerülhetjük, hogy a grafikonábrázoló program DOTS opcióját választjuk, amely csak az összetartozó pontokat jeleníti meg, és azokat nem köti össze. Ha programunk erre lehetőséget ad, rajzoltassuk ki a megadott függvények pontdiagramját (37–40. feladatok).

37. $y = \frac{1}{x-3}$

38. $y = \sin\frac{1}{x}$

39. $y = x\lfloor x \rfloor$

40. $y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

Regresszióanalízis

41. Az 1.7. táblázatban az építőipari munkások éves átlagkeresetének alakulását követhetjük nyomon.

Év	Átlagkereset (dollár)
1980	22 033
1985	27 581
1988	30 466
1990	32 836
1992	43 815
1995	37 996
1999	42 236
2002	45 413

1.7. TÁBLÁZAT: Építőipari dolgozók átlagkeresete az USA-ban
Forrás: U.S. Bureau of Economic Analysis

(a) Keressük meg az adatokhoz legjobban illeszkedő lineáris regressziós függvényt.

(b) Határozzuk meg a regressziós egyenes meredekségét. Mit mutat ez az adat?

(c) Ábrázoljuk a táblázat adatait és a regressziós egyenest közös koordináta-rendszerben.

(d) A modellünk szerint mennyit fog keresni egy építőipari dolgozó 2010-ben?

42. A használt lakások ára az Egyesült Államokban 1970 óta folyamatosan emelkedik. Az 1.8. táblázatból az is kiderül, hogy az áremelkedés üteme az ország különböző részeiben jelentős eltérést mutat.

(a) Írjuk fel az északkeleti régió lakásárait leíró lineáris regressziós függvényt.

(b) Mit mutat a függvény meredeksége?

(c) Írjuk fel a középnyugati régió lakásárait leíró lineáris regressziós függvényt.

(d) Melyik vizsgált régióban emelkednek gyorsabban az árak?

Év	Északkelet (dollár)	Középnyugat (dollár)
1970	25 200	20 100
1975	39 300	30 100
1980	60 800	51 900
1985	88 900	58 900
1990	141 200	74 000
1995	197 100	88 300
2000	264 700	97 000

1.8. TÁBLÁZAT: Átlagos használtlakás-árak az USA-ban
Forrás: National Association of Realtors®

T 43. Az 1.9. táblázatban egy gépkocsi (méterben megadott) átlagos féktávolságát tüntettük fel a (km/h-ban mért) sebesség függvényében.

sebesség (km/h)	féktávolság (méter)
32	12,6
40	16,8
48	22,0
56	27,4
64	34,8
72	42,7
80	51,9
88	62,8
96	74,4
104	87,7
112	102,9
120	120,3
128	139,2

1.9. TÁBLÁZAT: Féktávolság a sebesség függvényében
Forrás: U.S. Bureau of Public Roads

(a) Keressük meg az adatokhoz illeszkedő kvadratikus (másodfokú polinom alakú) regressziós függvényt.

(b) Ábrázoljuk a táblázat adatait és a regressziós görbét közös koordináta-rendszerben.

(c) A grafikon alapján becsüljük meg, mekkora a féktávolság 115, illetve 136 km/h sebesség esetén. Ellenőrizzük a becslést számolással.

(d) Becsüljük meg ugyanezeket az értékeket lineáris regressziós függvény esetében is. Vessük össze a regressziós egyenest az adatokkal. Melyik regressziós görbe esetén jobb az illeszkedés?

T 44. A megfigyelés azt mutatja, hogy egy hajó mögött keletkező hullám legközelebbi tarajainak távolsága (a hullámhossz) a hajó sebességével növekszik. Az 1.10. táblázat egy ilyen megfigyelés eredményét rögzíti.

Hullámhossz (méter)	Sebesség (km/h)
0,20	1,8
0,65	3,6
1,13	5,4
2,55	7,2
4,00	9,0
5,75	10,8
7,80	12,6
10,20	14,4
12,90	16,2
16,00	18,0
18,40	19,8

1.10. TÁBLÁZAT: Hullámhossz és terjedési sebesség

(a) Keressük meg az adatokhoz ileszkedő $y = ax^b$ alakú regressziós függvényt (x a hullámhossz, y a sebesség).

(b) Ábrázoljuk a táblázat adatait és a regressziós görbét közös koordináta-rendszerben.

(c) A grafikon alapján becsüljük meg, mekkora a csónak sebessége, ha a hullámhossz 11 m. Ellenőrizzük az eredményt algebrai úton.

(d) Becsüljük meg a 11 méteres hullámhosszhoz tartozó sebességet lineáris regresszióval is. Új regressziós „görbénket" is vessük össze az adatokkal. Melyik esetben jobb az illeszkedés?

1. fejezet Áttekintő kérdések

1. Hogyan ábrázoljuk a valós számokat? Melyek a valós számrendszer főbb jellemzői? Melyek a valós számok leggyakrabban szóba kerülő részhalmazai?

2. Mi jellemzi a racionális számok tizedes tört alakját? Milyen számokat nevezünk irracionálisnak? Mondjunk példát irracionális számokra.

3. Soroljuk fel a valós számok alapvető rendezési tulajdonságait. Hogyan használjuk ezeket az egyenletek megoldása során?

4. Hogyan értelmezzük egy valós szám abszolútértékét? Adjunk példákat. Hogyan viszonyulnak a $|-a|$, $|ab|$, $|a/b|$ és $|a+b|$ abszolútértékek $|a|$-hoz és $|b|$-hez?

5. Hogyan használható az abszolútérték intervallumok vagy intervallumuniók megadására? Mondjunk példákat.

6. Hogyan adjuk meg a pontokat a derékszögű koordinátarendszerben? Milyen ponthalmazt határoz meg egy kétismeretlenes egyenlet?

7. Hogyan írható fel a sík két adott pontjára illeszkedő egyenes egyenlete? Hogyan írható fel egy adott pontra illeszkedő, adott meredekségű egyenes egyenlete? Hogyan írható fel annak az egyenesnek az egyenlete, amelynek ismert a meredeksége, valamint az egyenes és az y-tengely metszéspontja? Mindegyik esetre adjunk példát.

8. Hogyan adjuk meg a koordinátatengelyekre merőleges egyenesek egyenletét?

9. Mi a kapcsolat az egymásra merőleges egyenesek meredeksége között? Mondjunk példákat.

10. Milyen a kapcsolat egy – az y-tengellyel nem párhuzamos – egyenes meredeksége és az x-tengely pozitív irányával bezárt hajlásszöge között?

11. Hogyan határozható meg a sík két pontjának távolsága?

12. Írjuk fel a (h,k) középpontú, a sugarú kör kanonikus egyenletét.

13. Hogyan ábrázoljuk az $x^2+y^2+4x-6y+12=0$ egyenletű kört?

14. Adjuk meg azt az egyenlőtlenséget, amelyet a (h,k) középpontú, a sugarú kör belsejének pontjai elégítenek ki. Ugyanez a feladat a kör belsejében *vagy* a körvonalon, illetve a körön kívül eső pontokra.

15. Mit mondhatunk az $y=ax^2+bx+c$ egyenletet kielégítő (x,y) pontok halmazáról, ahol a, b és c állandók és $a\neq 0$. Mi a teendő, ha az $y=2x^2+4x$ egyenletű görbét akarjuk ábrázolni?

16. Hogyan adunk meg egy függvényt? Mit nevezünk egy függvény értelmezési tartományának, illetve értékkészletének? Hogyan ábrázolható egy függvény halmazokkal és nyilakkal? Mutassunk példát.

17. Mit értünk egy valós számokon értelmezett, valós értékeket felvevő függvény grafikonján? Mi a függőleges egyenes teszt?

18. Hogyan értelmezhető egy függvény szakaszonként? Adjunk példákat.

19. Melyek az analízisben leggyakrabban előforduló függvénytípusok? Adjunk példát mindegyikre.

20. Mit jelent egy függvény grafikonjának szempontjából, ha a függvény növekvő, illetve csökkenő? Adjunk példát növekvő, illetve csökkenő függvényre.

21. Mikor nevezünk egy függvényt párosnak, illetve páratlannak? Milyen szimmetriatulajdonság jellemzi a páros, illetve a páratlan függvények grafikonját? Adjunk példát olyan függvényre, amelyik nem páros és nem is páratlan.

22. Mit jelent az, hogy az y mennyiség egyenesen arányos az x mennyiséggel? Mikor mondjuk, hogy az y mennyiség arányos az $x^{3/2}$-nel? Mit jelent az arányosság geometriai szempontból? Hogyan használható ez a tulajdonság egy arányosság fennállásának vagy fenn nem állásának ellenőrzésére?

23. Ha f és g egyaránt valós értékű függvények, akkor milyen kapcsolat áll fenn az f és a g, illetve az $f+g$, az $f-g$, az fg és az f/g függvény értelmezési tartománya között? Válaszunkat illusztráljuk példákkal.

24. Mikor lehet két függvény összetett függvényét értelmezni? Adjunk példát összetett függvényekre, mindegyiknél adjunk meg néhány függvényértéket is. Van-e jelentősége annak, hogy milyen sorrendben képezzük az összetételt?

25. Hogyan kell megváltoztatni az $y=f(x)$ formulát, ha a függvény grafikonját fölfelé vagy lefelé, illetve jobbra vagy balra el akarjuk tolni $k>0$ egységgel? Adjunk példát mind a négy esetre.

26. Hogyan kell megváltoztatni az $y=f(x)$ képletet, ha a függvény grafikonját $c>1$ arányban meg akarjuk nyújtani, illetve ha tükrözni akarjuk a grafikont valamelyik koordinátatengelyre? Válaszunkat példákkal illusztráljuk.

27. Adjuk meg a (h,k) középpontú ellipszis kanonikus egyenletét. Mit nevezünk az ellipszis nagytengelyének, illetve kistengelyének? Adjunk példát.

28. Hogyan mérünk szöget radiánban? Hogyan váltjuk át a fokokban megadott mértéket radiánba, illetve a radiánban megadott mértéket fokokba?

29. Vázoljuk a hat alapvető trigonometrikus függvény grafikonját. Milyen szimmetriatulajdonságai vannak a grafikonoknak?

30. Mikor nevezünk egy függvényt periodikusnak? Mondjunk példát periodikus függvényre. Mi a periódusa az alapvető trigonometrikus függvényeknek?

31. Adjunk példákat a $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ azonosság, valamint az összegezési képletek alapján levezethető trigonometriai összefüggésekre.

32. Melyek az $f(x)=A\sin((2\pi/B)(x-C))+D$ általános szinuszfüggvényben szereplő állandók geometriai jelentései. Mondjunk példát általános szinuszfüggvényre, vázoljuk a grafikonját és azonosítsuk a benne szereplő állandókat.

33. Nevezzünk meg három olyan tipikus problémát, amely a függvénygrafikonok számítógépes ábrázolásakor merülhet fel. Mindegyikre adjunk példát.

1. fejezet Gyakorló feladatok

Egyenlőtlenségek

Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket; a megoldáshalmazokat ábrázoljuk a valós számegyenesen (1–4. feladatok).

1. $7+2x \geq 3$

2. $-3x < 10$

3. $\frac{1}{5}(x-1) < \frac{1}{4}(x-2)$

4. $\frac{x-3}{2} \geq -\frac{4+x}{3}$

Abszolútérték

Oldjuk meg az egyenletet és az egyenlőtlenségeket (5–8. feladatok).

5. $|x+1| = 7$

6. $|y-3| < 4$

7. $\left|1-\frac{x}{2}\right| > \frac{3}{2}$

8. $\left|\frac{2x+7}{3}\right| \leq 5$

Koordináták

9. Egy részecske az $A(-2,5)$ pontból indulva az y-tengelyig halad, eközben $\Delta y = 3\Delta x$. Adjuk meg a részecske új koordinátáit.

10. **(a)** Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az $A(8,1), B(2,10), C(-4,6), D(2,-3)$ és $E(\frac{14}{3},6)$ pontokat.

(b) Határozzuk meg az AB, a BC, a CD a DA, a CE és a BD egyenes meredekségét.

(c) Van-e a pontok között négy olyan, amely paralelogrammát alkot?

(d) Van-e az öt pont között három olyan, amely egy egyenesbe esik? Válaszunkat indokoljuk.

(e) A (b) részben említett egyenesek közül melyik megy át az origón?

11. Egyenlő szárú-e az $A(6,4), B(4,-3), C(-2,3)$ pontok által meghatározott háromszög? Esetleg derékszögű? Válaszunkat indokoljuk.

12. Adjuk meg az $y = 3x+1$ egyenletű egyenes azon pontját, amely egyenlő távolságra van a $(0,0)$ és a $(-3,4)$ pontoktól.

Egyenesek

A 13–24. feladatokban adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely

13. átmegy a $(1,-6)$ ponton, meredeksége pedig 3;

14. átmegy a $(-1,2)$ ponton, meredeksége pedig $-1/2$;

15. függőleges, és átmegy a $(0,-3)$ ponton;

16. átmegy a $(-3,6)$ és a $(1,-2)$ ponton;

17. vízszintes, és átmegy a $(2,0)$ ponton;

18. átmegy a $(3,3)$ és a $(-2,5)$ ponton;

19. az y-tengelyt a 3 helyen metszi, meredeksége pedig -3;

20. átmegy a $(3,1)$ ponton, és párhuzamos a $2x-y=-2$ egyenletű egyenessel;

21. átmegy a $(4,-12)$ ponton, és párhuzamos a $4x+3y=12$ egyenletű egyenessel;

22. átmegy a $(-2,-3)$ ponton, és merőleges a $3x-5y=1$ egyenletű egyenesre;

23. átmegy a $(-1,2)$ ponton, és merőleges az $(1/2)x+$ $+(1/3)y=1$ egyenletű egyenesre;

24. az x-tengelyt a 3, az y-tengelyt pedig a -5 helyen metszi.

Függvények és grafikonjuk

25. Fejezzük ki a kör kerületét a kör sugarának függvényében, majd adjuk meg a kör területét a kör kerületének függvényében.

26. Fejezzük ki a gömb felszínét a gömb sugarának függvényében, majd adjuk meg a gömb térfogatát a gömb felszínének függvényében.

27. Az első síknegyedbeli P pont rajta van az $y=x^2$ egyenletű parabolán. Fejezzük ki P koordinátáit az origót P-vel összekötő szakasz és az x-tengely hajlásszögének függvényében.

28. Egy pontosan a felszállóhely fölött lebegő hőlégballont a felszállóhelytől 500 méter távolságban rögzített huzalok tartanak. Fejezzük ki a hőlégballon magasságát a huzalok és a (sík) földfelszín hajlásszögének függvényében.

Szimmetrikus-e a megadott függvények grafikonja az y-tengelyre vagy az origóra? (29–32. feladatok)

29. $y = x^{1/5}$

30. $y = x^{2/5}$

31. $y = x^2 - 2x - 1$

32. $y = e^{-x^2}$

Állapítsuk meg, melyek a felsoroltak közül a páros, és melyek a páratlan függvények (33–40. feladatok).

33. $y = x^2 + 1$

34. $y = x^5 - x^3 - x$

35. $y = 1 - \cos x$

36. $y = \sec x \operatorname{tg} x$

37. $y = \frac{x^4+1}{x^3-2x}$

38. $y = 1 - \sin x$

39. $y = x + \cos x$

40. $y = \sqrt{x^4-1}$

Adjuk meg a függvények (a) értelmezési tartományát és (b) értékkészletét (41–50. feladatok).

41. $y = |x| - 2$

42. $y = -2 + \sqrt{1-x}$

43. $y = \sqrt{16-x^2}$

44. $y = 3^{2-x} + 1$

45. $y = 2e^{-x} - 3$

46. $y = \operatorname{tg}(2x - \pi)$

47. $y = 2\sin(3x+\pi) - 1$

48. $y = x^{2/5}$

49. $y = \ln(x-3) + 1$

50. $y = -1 + \sqrt[3]{2-x}$

Szakaszonként definiált függvények

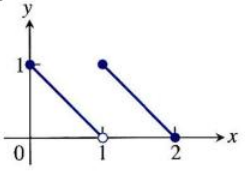
Határozzuk meg a szakaszonként definiált függvények (a) értelmezési tartományát és (b) értékkészletét (51–52. feladatok).

51. $y = \begin{cases} \sqrt{-x}, & -4 \le x \le 0 \\ \sqrt{x}, & 0 < x \le 4 \end{cases}$

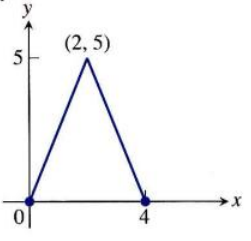
52. $y = \begin{cases} -x-2, & -2 \le x \le -1 \\ x, & -1 < x \le 1 \\ -x+2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

Adjuk meg azt a függvényt, amelynek grafikonja az ábrán látható (53–54. feladatok).

53.



54.



Összetett függvények

Határozzuk meg (a) az $(f \circ g)(-1)$, (b) a $(g \circ f)(2)$, (c) az $(f \circ f)(x)$ és (d) a $(g \circ g)(x)$ függvényértéket (55–56. feladatok).

55. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

56. $f(x) = 2-x$, $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$

Adjuk meg (a) az $f \circ g$ és a $g \circ f$ összetett függvény képletét; valamennyinek határozzuk meg (b) az értelmezési tartományát és (c) az értékkészletét (57–58. feladatok).

57. $f(x) = 2-x^2$, $g(x) = \sqrt{x+2}$

58. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{1-x}$

Abszolútérték összetett függvényben. Ábrázoljuk közös grafikonban az $f_1(x)$ és az $f_2(x)$ függvényt. Hogyan hat az f_1 függvény grafikonjára az abszolútérték-függvény „előzetes" alkalmazása? (59–64. feladatok)

	$f_1(x)$	$f_2(x) = f_1(\lvert x \rvert)$
59.	x	$\lvert x \rvert$
60.	x^3	$\lvert x \rvert^3$
61.	x^2	$\lvert x \rvert^2$
62.	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\lvert x \rvert}$
63.	$\sqrt{x}$	$\sqrt{\lvert x \rvert}$
64.	$\sin x$	$\sin \lvert x \rvert$

Függvény abszolútértéke. Ábrázoljuk közös grafikonban a $g_1(x)$ és a $g_2(x)$ függvényt. Hogyan hat a g_1 függvény grafikonjára az abszolútértékfüggvény „utólagos" alkalmazása? (65–68. feladatok)

	$g_1(x)$	$g_2(x) = \lvert g_1(x) \rvert$
65.	x^3	$\lvert x^3 \rvert$
66.	$\sqrt{x}$	$\lvert \sqrt{x} \rvert$
67.	$4-x^2$	$\lvert 4-x^2 \rvert$
68.	x^2+x	$\lvert x^2+x \rvert$

Trigonometria

Vázoljuk a megadott függvény grafikonját; állapítsuk meg a függvény periódusát is (69–72. feladatok).

69. $y = \cos 2x$

70. $y = \sin \frac{x}{2}$

71. $y = \sin \pi x$

72. $y = \cos \frac{\pi x}{2}$

73. Vázoljuk az $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ függvény grafikonját.

74. Vázoljuk az $y = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ függvény grafikonját.

A 75–78. feladatokban szereplő ABC háromszög derékszögű, a derékszög a C szög. Az A, B és C szögekkel szembeni oldalak rendre a, b és c.

75. **(a)** Mekkora az a, ha $c = 2$ és $B = \pi/3$?

(b) Mekkora az a, ha $b = 2$ és $B = \pi/3$?

76. **(a)** Fejezzük ki a-t A-val és c-vel.

(b) Fejezzük ki a-t A-val és c-vel.

77. **(a)** Fejezzük ki a-t B-vel és b-vel.

(b) Fejezzük ki c-t A-val és a-val.

78. **(a)** Fejezzük ki $\sin A$-t a-val és c-vel.

(b) Fejezzük ki $\sin A$-t b-vel és c-vel.

79. Az oszlop magassága Egy függőleges oszlop T tetőpontjától két zsinórt feszítettünk ki és rögzítettünk a talajon, az egyiket a B, másikat a C pontban. A C pont 10 méterel közelebb van az oszlop lábához, mint a B pont; a földfelszínnel a BT egyenes 35°-os, a CT egyenes pedig 50°-os szöget zár be. Milyen magas az oszlop?

80. A meteorológiai léggömb Az egymástól 2 kilométer távolságban elhelyezkedő A és B földi megfigyelők ugyanazt a léggömböt 40, illetve 70 fokos szögben látják. Milyen magasan van a léggömb, ha éppen az AB szakasz egy pontja fölött lebeg?

81. **(a)** Ábrázoljuk az $f(x) = \sin x + \cos(x/2)$ függvény grafikonját.

(b) A grafikon alapján becsüljük meg a függvény periódusát.

(c) Ellenőrizzük a (b)-beli sejtésünket számítással.

82. **(a)** Ábrázoljuk az $f(x) = \sin(1/x)$ függvény grafikonját.

(b) Állapítsuk meg f értelmezési tartományát és értékkészletét.

(c) Periodikus-e az f függvény? Válaszunkat indokoljuk.

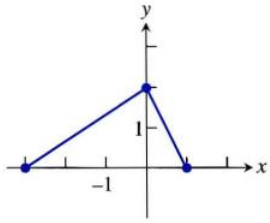
1. fejezet Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

Függvények és grafikonjuk

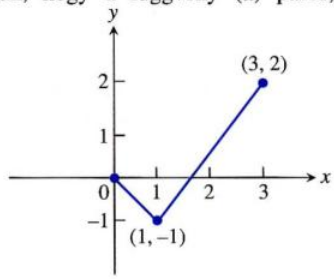
1. Az ábrán az f függvény grafikonja látható. Ábrázoljuk az alábbi függvények grafikonját.

(a) $y=f(-x)$ **(b)** $y=-f(x)$

(c) $y=-2f(x+1)+1$ **(d)** $y=3f(x-2)-2$



2. Az ábrán egy $[-3,3]$ intervallumon definiált függvény grafikonjának egyik fele látható. Egészítsük ki a grafikont, ha tudjuk, hogy a függvény **(a)** páros, **(b)** páratlan.



3. Vannak-e olyan f és g függvények, amelyekre $f\circ g=g\circ f$? Indokoljuk válaszunkat.

4. Vannak-e olyan f és g függvények, amelyekre teljesül, hogy sem f, sem g grafikonja nem egyenes, $f\circ g$ grafikonja viszont az? Indokoljuk válszunkat.

5. Mit mondhatunk a $g(x)=f(x)-2$ függvényről, ha tudjuk, hogy f páratlan? És ha páros? Indokoljuk válaszunkat.

6. Ha g a teljes valós számegyenesen értelmezett páratlan függvény, tudhatunk-e valamit a $g(0)$ függvényértékről? Indokoljuk válaszunkat.

7. Ábrázoljuk a kooordináta-rendszerben az $|x|+|y|=1+x$ egyenletet kielégítő pontokat.

8. Ábrázoljuk a kooordináta-rendszerben az $y+|y|=x+|x|$ egyenletet kielégítő pontokat.

Trigonometria

A 9–14. feladatokban ABC általános háromszög, amelyben az A, B, C szögekkel szemben rendre az a, b és c oldalak helyezkednek el. Mekkora

9. b, ha $a=\sqrt{3}$, $A=\pi/3$, $B=\pi/4$;

10. $\sin B$, ha $a=4$, $b=3$, $A=\pi/4$;

11. $\cos A$, ha $a=2$, $b=2$, $c=3$;

12. c, ha $a=2$, $b=3$, $C=\pi/4$;

13. $\sin B$, ha $a=2$, $b=3$, $c=4$;

14. $\sin C$, ha $a=2$, $b=4$, $c=5$?

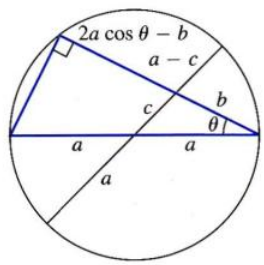
Bizonyítások

15. Bizonyítsuk be az azonosságokat.

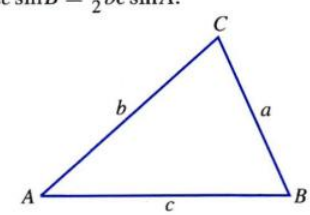
(a) $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

(b) $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}$

16. Értelmezzük a koszinusztétel alábbi, „szöveg nélküli" bizonyítását. [Forrás: Sidney H. Kung: Proof without Words: The Law of Cosines. *Mathematics Magazine* Vol. 63. No. 5. (1990) p. 342.]



17. Igazoljuk, hogy az ábrán látható háromszög területe $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$.



18. Hérón képlete Igazoljuk, hogy az ABC háromszög területe:

$$T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

ahol $s=(a+b+c)/2$, a háromszög kerületének a fele.

19. Egyenlőtlenségek. Tetszőleges a és b valós számok esetén akkor mondjuk, hogy a kisebb, mint b, ha $b-a$ pozitív szám. Ezen definíció alapján igazoljuk, hogy bármely a, b és c valós számra

(1) $a<b\Rightarrow a+c<b+c$

(2) $a<b\Rightarrow a-c<b-c$

(3) $a<b$ és $c>0\Rightarrow ac<bc$

(4) $a<b$ és $c<0\Rightarrow ac>bc$

Speciális eset: $a<b\Rightarrow -b<-a$

(5) $a>0\Rightarrow \dfrac{1}{a}>0$

(6) $0<a<b\Rightarrow \dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$

(7) $a<b<0\Rightarrow \dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$

20. Igazoljuk, hogy az alábbi egyenlőtlenségek tetszőleges a és b valós számok esetén fennállnak:

(a) $|a|<|b|\Leftrightarrow a^2<b^2$

(b) $|a-b|\geq ||a|-|b||$

Az általános háromszög-egyenlőtlenség. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy az alábbi egyenlőtlenségek tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valós számok esetén fennállnak (21–22. feladatok). [A teljes indukció módszerét a függelékben tárgyaljuk.]

21. $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$

22. $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \geq |a_1| - |a_2| - \ldots - |a_n|$

23. Igazoljuk, hogy ha az f függvény páros és páratlan is egyszerre, akkor D_f minden x elemére $f(x) = 0$.

24. **(a) Páros-páratlan felbontás.** Legyen f olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya szimmetrikus az origóra, azaz $-x$ pontosan akkor eleme D_f-nek, ha x. Igazoljuk, hogy f felírható egy E páros és egy O páratlan függvény összegeként:

$$f(x) = E(x) + O(x)$$

[Útmutatás: Legyen $E(x) = (f(x) + f(-x))/2$. Mutassuk meg, hogy $E(x) = E(-x)$, azaz E páros függvény. Ezután igazoljuk, hogy $O(x) = f(x) - E(x)$ páratlan függvény.]

(b) Igazoljuk, hogy a fenti f függvényt pontosan egyféleképpen lehet egy páros és egy páratlan függvény összegeként felírni. [Útmutatás: Azt, hogy legalább egyféleképpen fel lehet írni, az (a) részben már láttuk. Ha ezen felül valamely E_1 páros és O_1 páratlan függvényre szintén fennáll, hogy $f(x) = E_1(x) + O_1(x)$, akkor belátható, hogy $E - E_1 = O_1 - O$. A 23. feladat alapján ekkor $E = E_1$ és $O = O_1$.]

Grafikus módszerek

25. Mi történik az $y = ax^2 + bx + c$ függvény grafikonjával, ha

(a) a-t változtatjuk, miközben b és c változatlan marad;

(b) b-t változtatjuk, miközben a és c változatlan marad (és $a \neq 0$);

(c) c-t változtatjuk, miközben a és b változatlan marad (és $a \neq 0$)?

26. Mi történik az $y = a(x+b)^3 + c$ függvény grafikonjával, ha

(a) a-t változtatjuk, miközben b és c változatlan marad;

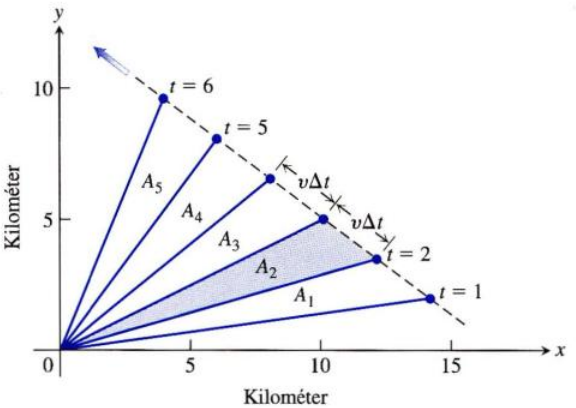
(b) b-t változtatjuk, miközben a és c változatlan marad (és $a \neq 0$);

(c) c-t változtatjuk, miközben a és b változatlan marad (és $a \neq 0$)?

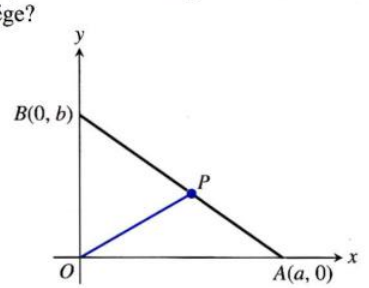
27. Mekkora lehet az $y = mx + 2$ egyenletű egyenes m meredeksége, ha tudjuk, hogy az egyenes az x-tengelyt az $\frac{1}{2}$ ponttól jobbra metszi?

Geometria

28. Egy test tömegközéppontja állandó v sebességgel mozog egy, az origót elkerülő egyenes mentén. Az ábrán a mozgás egyenese látható, a pontok a tömegközéppont helyzetét jelzik a (másodpercekben mért) idő függvényében. Igazoljuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_5$ területek egyenlőek. [L. ehhez Kepler második törvényének a 13.6. alfejezetbeli tárgyalását.]



29. **(a)** Az ábrán látható OBC háromszögben P az AB oldal felezőpontja. Mekkora az origón és P-n átmenő egyenes meredeksége?



(b) Mikor lesz az OP egyenes merőleges AB-re?

2. fejezet Határérték és folytonosság

ÁTTEKINTÉS A határérték az analízis alapvető fogalma, amely területünket mind az algebrától, mind a trigonometriától megkülönbözteti. Egy görbe érintőjének meredekségét vagy egy test pillanatnyi sebességét egyaránt határértékként határozhatjuk meg.

Ebben a fejezetben a határérték fogalmát tárgyaljuk, kezdetben a szemléletre hagyatkozunk, utóbb aztán a precíz meghatározásokat is megadjuk. A határértéket a változások leírására használjuk. Bizonyos függvények esetében ez a változás folytonos: az x független változó kicsiny megváltozása az $f(x)$ függvényértékben is csak kicsiny változást idéz elő. Más függvények esetében különféle szakadások, ugrások is előfordulnak. A határérték fogalmának segítségével ezek a jelenségek pontosan megragadhatók. A határértéket a geometriában a görbék érintőjének meghatározására használjuk, ez pedig természetes módon vezet a függvény deriváltjának fogalmához. A derivált, amellyel részletesen a 3. fejezetben foglalkozunk, a függvények változásának sebességéről ad számszerű jellemzést.

2.1. Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma

Ebben az alfejezetben értelmezzük az átlagos és pillanatnyi változás fogalmát; a vizsgálódás természetes módon vezet el a határérték fogalmához.

Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség

Egy mozgó test adott időtartam alatti átlagsebességét úgy számoljuk ki, hogy a megtett utat elosztjuk az eltelt idő nagyságával. A sebesség mértékegysége ennek megfelelően hosszúságegység/időegység, például kilométer/óra, méter/másodperc, vagy más, a tárgyalt jelenségnek leginkább megfelelő egység.

1. PÉLDA **Az átlagsebesség meghatározása.**
Egy kődarab leválik a szikláról és a mélybe zuhan. Állapítsuk meg a kő átlagsebességét

(a) a zuhanás első két másodpercében;

(b) a zuhanás második másodpercében.

Megoldás. A megoldás során a Galilei által a 16. század végén felfedezett **szabadesési törvényt** használjuk, amely szerint egy nyugalmi helyzetből elengedett test által adott idő alatt megtett út hossza a földfelszín közelében egyenesen arányos a szóban forgó időtartam négyzetével. (A légellenállást elhanyagoljuk; feltesszük, hogy a testre egyedül a gravitáció hat. Az ilyen mozgást nevezzük **szabadesésnek**.) Ha a kő által t idő alatt megtett y utat méterben mérjük, akkor a Galilei-törvényben szereplő állandó éppen 4,9:

$$y = 4{,}9t^2$$

Az átlagsebességet mindkét esetben úgy határozzuk meg, hogy a Δy távolságot elosztjuk a megadott Δt nagyságú időtartammal.

(a) $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{4{,}9\cdot(2)^2 - 4{,}9\cdot(0)^2}{2-0} = 9{,}8\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

(b) $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{4{,}9\cdot(2)^2 - 4{,}9\cdot(1)^2}{2-1} = 14{,}7\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ □

2. PÉLDA **A pillanatnyi sebesség meghatározása.**

Állapítsuk meg a kő pillanatnyi sebességét a $t = 1$s és a $t = 2$s pillanatban.

Megoldás. A kő átlagsebességét egy $\Delta t = h$ hosszúságú $[t_0, t_0 + \Delta t]$ időintervallumban a következő képlet alapján határozhatjuk meg:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4{,}9\cdot(t_0+h)^2 - 4{,}9\cdot(t_0)^2}{h}. \tag{1}$$

Ez a formula természetesen nem használható a t_0 időpontbeli „pillanatnyi" sebesség meghatározására, hiszen ekkor $h = 0$, 0-val pedig nem lehet osztani. Azt azonban megvizsgálhatjuk, hogy mekkora az átlagsebesség a $t_0 = 1$, illetve a $t_0 = 2$ időpontot követő, egyre rövidebb időintervallumokban. A számítások eredményét a következő táblázatban foglaltuk össze. Az adatok szembeötlő szabályosságot követnek.

Az átlagsebesség: $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{4{,}9\cdot(t_0+h)^2 - 4{,}9\cdot(t_0)^2}{h}$.

A h időintervallum hossza	**Átlagsebesség a $t_0 = 1$ kezdetű, h nagyságú időintervallumban**	**Átlagsebesség a $t_0 = 2$ kezdetű, h nagyságú időintervallumban**
1	14,7	24,5
0,1	10,3	20,09
0,01	9,849	16,649
0,001	9,8049	16,6049
0,0001	9,8000	19,6000

2.1. TÁBLÁZAT: Átlagsebesség rövid időintervallumokban

Minél kisebb a $t_0 = 1$ időpont utáni intervallum hossza, az átlagsebesség annál közelebb kerül 9,8-hoz. Ezt azt sugallja, hogy a $t_0 = 1$s pillanatban a kő sebessége 9,8 m/s. Próbáljuk meg ezt a sejtést algebrai úton is alátámasztani.

Végezzük el a négyzetre emelést az (1) tört számlálójában:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4{,}9\cdot(1+h)^2 - 4{,}9\cdot(1)^2}{h} = \frac{4{,}9\cdot(1+2h+h^2) - 4{,}9}{h} = \frac{9{,}8h + 4{,}9h^2}{h} =$$
$$= 9{,}8 + 4{,}9h.$$

Amennyiben h értéke 0-tól különböző, az egyenlőség két oldalán mindig azonos mennyiség áll; az átlagsebesség a vizsgált intervallumban ezek szerint

$9{,}8 + 4{,}9h$. Most már világos, hogy az átlagsebesség határértéke, miközben h végtelenül közel kerül 0-hoz, éppen $9{,}8 + 4{,}9 \cdot 0 = 9{,}8$ m/s.

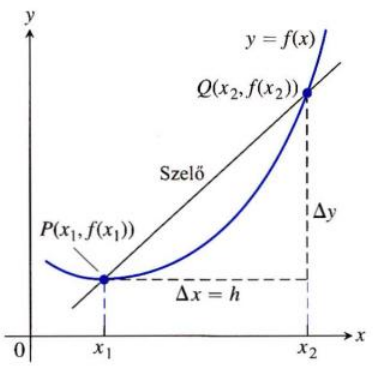
Hasonlóan: az (1) egyenletből a $t_0 = 2$ esetben azt kapjuk, hogy

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = 19{,}6 + 4{,}9h$$

(a 0-tól különböző h értékekre). Ahogy h a 0-hoz közelít, az átlagsebesség a 19,6 m/s értékhez tart. □

A változás átlagos üteme; szelők

Tetszőleges $y = f(x)$ függvény esetében az y változásának sebességét az $[x_1, x_2]$ intervallumon úgy kapjuk meg, hogy az y függő változó értékének $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ megváltozását elosztjuk a vizsgált intervallum $\Delta x = x_2 - x_1$ hosszával.



2.1. ÁBRA: Az $y = f(x)$ függvény grafikonjának egyik szelője. A szelő $\Delta y/\Delta x$ meredeksége az f függvény átlagos változási sebessége az $[x_1, x_2]$ intervallumon.

DEFINÍCIÓ Átlagos változási sebesség egy intervallumon.

Az $y = f(x)$ függvény **átlagos változási sebessége** az $[x_1, x_2]$ intervallumon:

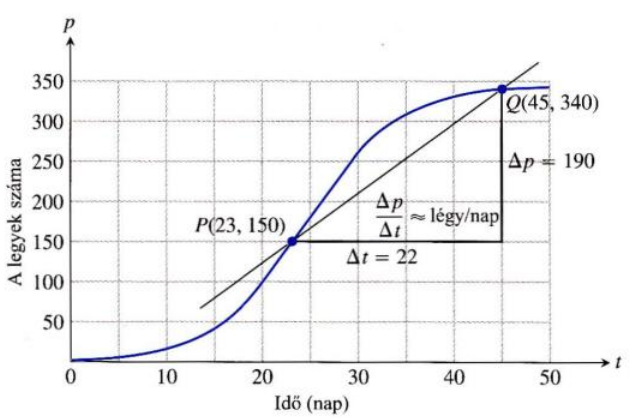
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \qquad h \neq 0$$

Ezek szerint egy f függvény átlagos változási sebessége az $[x_1, x_2]$ intervallumon geometriai szempontból a $P(x_1, f(x_1))$ és $Q(x_2, f(x_2))$ pontokon átmenő egyenes meredekségét adja meg, l. a 2.1. ábrát. Egy görbe két pontján áthaladó egyenest a geometriában a görbe **szelőjének** nevezzük, az f függvény átlagos változási sebessége x_1-től x_2-ig eszerint az f grafikonját a P és Q pontokban metsző szelő meredekségével egyenlő.

A kísérleti biológusok gyakran kíváncsiak arra, hogy mekkora egy laboratóriumi körülmények között szaporodó populáció növekedésének változási sebessége.

3. PÉLDA **Populáció növekedésének átlagos sebessége.**

A 2.2. ábra egy gyümölcslégy- (*Drosophilia*-) populáció növekedését vizsgáló, 50 napos kísérlet eredményeit összesíti. A rovarokat szabályos időközönként megszámolták és az adatokat feltüntették a (t, p)-koordináta-rendszerben (t az idő, p a rovarok száma); az összetartozó adatoknak megfelelő pontokat pedig folytonos (az ábrán kék színű) vonallal kötötték össze. Mekkora volt a populáció növekedésének átlagos sebessége a 23. és a 45. nap között?



2.2. ÁBRA: Gyümölcslégy-populáció növekedése laboratóriumi körülmények között. A 22 napos időtartam alatti átlagos létszámnövekedést az ábrán feltüntetett szelő $\Delta p/\Delta t$ meredeksége.

Megoldás. A 23. napon a populáció 150, a 45. napon 340 tagú volt. A rovarok száma az eltelt $45-23=22$ nap alatt $340-150=190$-nel nőtt, a populáció növekedésének átlagos sebessége tehát a szóban forgó intervallumban:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{340-150}{45-23}=\frac{190}{22}\approx 8{,}6 \text{ légy/nap}$$

Ez az érték megfelel az ábrán feltüntetett szelő meredekségének. □

A 23. és a 45. nap közötti átlagos növekedés alapján természetesen nem tudjuk megmondani, mekkora volt a populáció növekedésének sebessége a 23. napon. Ehhez a 23. napot tartalmazó sokkal rövidebb intervallumokat kell megvizsgálnunk.

4. PÉLDA **Populáció növekedésének sebessége a 23. napon.**

Mekkora volt az előző példában vizsgált *Drosophilia*-populáció növekedésének sebessége a 23. napon?

Megoldás. A kérdés megválaszolásához a 23. nappal kezdődő, egyre rövidebb intervallumokat kell megvizsgálnunk. Szemléletesen arról van szó, hogy olyan PQ szelők meredekségét határozzuk meg, amelyeknél a Q pont – a görbe mentén – egyre jobban megközelíti a 23. napot reprezentáló P pontot (2.3. ábra).

A táblázat szerint a PQ szelő meredeksége 8,6-ről 16,4-re növekedett, miközben a Q pont t-koordinátája 45-ről 30-ra csökkent, és úgy tűnik, tovább közelítve a $t=23$-hoz, a meredekség valamelyest még tovább növekszik. A P ponton átmenő szelők mintha az ábrán pirossal jelölt egyeneshez közelítenének, amelynek iránya megegyezik a populáció változását leíró görbe „P pontbeli irányával". Az ilyen egyenest a görbe P pontbeli *érintőjének* nevezzük. A piros görbe az ábra tanúsága szerint átmegy a $(14,0)$ és a $(35,350)$ pontokon, meredeksége ennélfogva:

$$\frac{350-0}{35-14}=16{,}7 \text{ légy/nap}$$

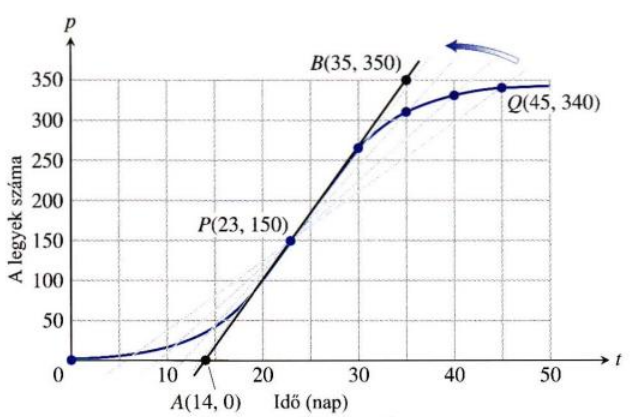
A 23. napon a populáció növekedése hozzávetőleg 16,7 légy/nap volt. □

A 2. és a 4. példában bizonyos folyamatok (a szabadon eső kődarab, a laboratóriumi körülmények között szaporodó gyümölcslégy-populáció) adott időpontbeli, *pillanatnyi változási sebességét* határoztuk meg. A példák azt sugallják, hogy a pillanatnyi változási sebességet átlagos változási sebességek határértékeként értelmezhetjük. A 4. példából az is kiderült, hogy egy görbe adott pontbeli érintője szintén egyfajta határérték: a ponton átmenő szelők határhelyzete.

A hatérérték intuitív fogalma

A példák nagyban hozzájárultak, hogy közelebb kerüljünk a határérték fogalmához. Most megadjuk a hatértérték szemléletes definícióját; a precíz meghatározást későbbre halasztjuk.

Q	A PQ szelő meredeksége: $(\Delta p/\Delta t)$ (légy/nap)
$(45,340)$	$\frac{340-150}{45-23}\approx 8{,}6$
$(40,330)$	$\frac{330-150}{40-23}\approx 10{,}6$
$(35,310)$	$\frac{310-150}{35-23}\approx 13{,}3$
$(30,265)$	$\frac{265-150}{30-23}\approx 16{,}4$



2.3. ÁBRA: A 4. példában szereplő szelők.

Legyen x_0 egy nyílt intervallum egy pontja és tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van ezen az intervallumon, *kivéve esetleg magát az* x_0 *helyet.* Ha az $f(x)$ függvényértékek tetszőlegesen közel kerülhetnek egy L számhoz, amennyiben az x értékek eléggé megközelítik x_0-t, akkor azt mondjuk, hogy f az L számhoz tart, miközben x tart x_0-hoz; ezt gyakran úgy fejezzük ki, hogy f **határértéke** az x_0 pontban L. Azt, hogy f határértéke az x_0 helyen L, így jelöljük:

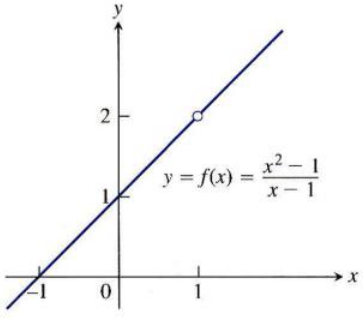
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

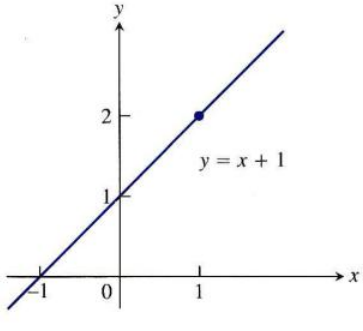
„Definíciónk" lényegében azt mondja, hogy x_0-hoz (akár jobbról, akár balról) egyre közelebbi x-ek esetén az $f(x)$ függvényértékek L-hez közelítenek. A meghatározás nem precíz, mivel sem a *tetszőlegesen közel,* sem az *eléggé közel* fordulatot nem definiáltuk pontosan. Amikor egy dugattyú kialakításáról van szó, a 'közel' a milliméter töredékét jelenti, a távoli galaxisokat vizsgáló csillagász számára viszont meglehet, hogy a 'közel': néhány ezer fényév. A meghatározás mindazonáltal eléggé világos ahhoz, hogy megadjuk bizonyos függvények határértékeit. A pontos definícióra a 2.3. alfejezetben lesz majd szükségünk, amikor bebizonyítjuk a határértékekkel kapcsolatos tételeket.

5. PÉLDA **Függvény „viselkedése" egy adott pont közelében.**
Hogyan viselkedik a

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

függvény az $x = 1$ hely közelében?





2.4. ÁBRA: Az f függvény grafikonja az $y = x + 1$ egyenletű egyenes az $(1,2)$ pont nélkül; f az $x = 1$ helyen nem értelmezett (5. példa).

Megoldás. Az f függvény értelmezési tartománya az összes valós szám halmaza, kivéve az $x = 1$ pontot, elvégre 0-val nem lehet osztani. Amikor $x \neq 1$, a függvény hozzárendelési szabálya egyszerűsíthető:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1, \text{ ha } x \neq 1$$

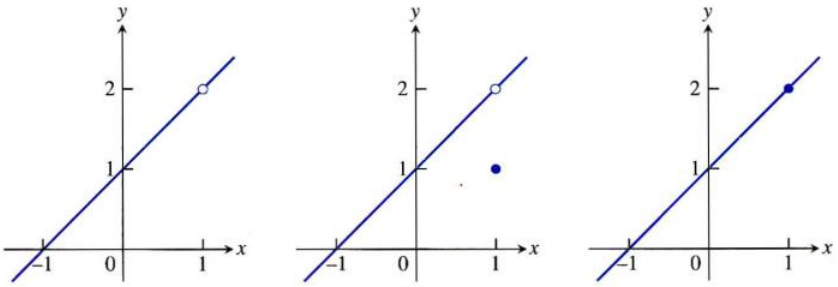
Az f függvény grafikonja ezek szerint az $y = x + 1$ egyenletű egyenes – az $(1,2)$ pont nélkül! A 2.4. ábrán a pont helyét kis kör jelzi. Az ábra és a 2.2. táblázat alapján leszögezhetjük: annak ellenére, hogy f az $x = 1$ helyen nincs értelmezve, az $f(x)$ függvényértékek tetszőlegesen megközelítik 2-t, amennyiben x-nek 1-hez elegendően közeli értékeket adunk.

x értékei 1 előtt és után	$\mathbf{f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1,\ x \neq 1}$
0,9	1,9
1,1	2,1
0,99	1,99
1,01	2,01
0,999	1,999
1,001	2,001
0,999999	1,999999
1,000001	2,000001

2.2. TÁBLÁZAT: Minél közelebb kerül x az 1-hez, az $f(x) = \frac{(x^2-1)}{(x-1)}$ függvényértékek annál jobban megközelítik a 2-t.

Eszerint tehát az $f(x)$ függvény határértéke, amint x tart 1-hez, 2-vel egyenlő:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2, \quad \text{vagy:} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2. \qquad \square$$



(a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ (b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ (c) $h(x) = x + 1$

2.5. ÁBRA: Midőn x tart 1-hez, az f, g és h függvények határértéke egyaránt 2, holott ez a határérték csupán a h esetében azonos az $x = 1$ helyen felvett függvényértékkel.

6. PÉLDA **A határérték nem függ a függvényértéktől.**

Amint $x \to 1$, a 2.5. ábrán látható valamennyi függvény határértéke 2. Az f függvény nincs értelmezve az $x = 1$ helyen, a g esetében pedig $g(1) \neq 2$. Egyedül a h függvényre teljesül, hogy $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1)$, azaz a határérték itt megegyezik a függvényértékkel; ez utóbbi jelenséggel részletesebben a 2.6. alfejezetben foglalkozunk. □

Bizonyos esetekben a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ határérték megegyezik az $f(x_0)$ függvény-értékkel. Ez a helyzet például, ha $f(x)$ polinom- és trigonometrikus függvényekből algebrai műveletekkel áll elő, és x_0 eleme az értelmezési tartománynak (a problémára a 2.2. és a 2.6. alfejezetben még visszatérünk).

7. PÉLDA **A határérték meghatározása a függvényérték kiszámításával.**

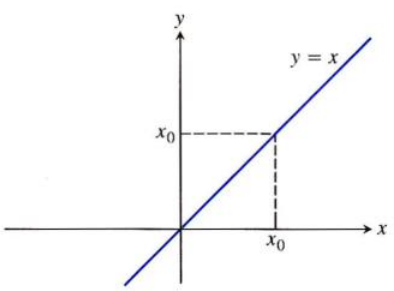
(a) $\lim\limits_{x\to 2}(4) = 4$

(b) $\lim\limits_{x\to -13}(4) = 4$

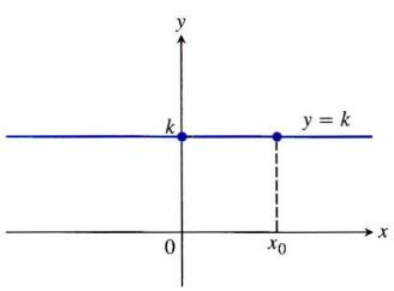
(c) $\lim\limits_{x\to 3} x = 3$

(d) $\lim\limits_{x\to 2}(5x-3) = 10-3 = 7$

(e) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x+4}{x+5} = \dfrac{-6+4}{-2+5} = -\dfrac{2}{3}$



(a) Az identikus leképzés



(b) Konstans függvény

2.6. ÁBRA: A 8. példában szereplő függvények.

8. PÉLDA **Az identikus és a konstans függvény határértéke.**

(a) Ha f identikus leképezés, azaz minden x-re $f(x) = x$, akkor tetszőleges x_0 esetén (l. a 2.6. ábra (a) részét):

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0.$$

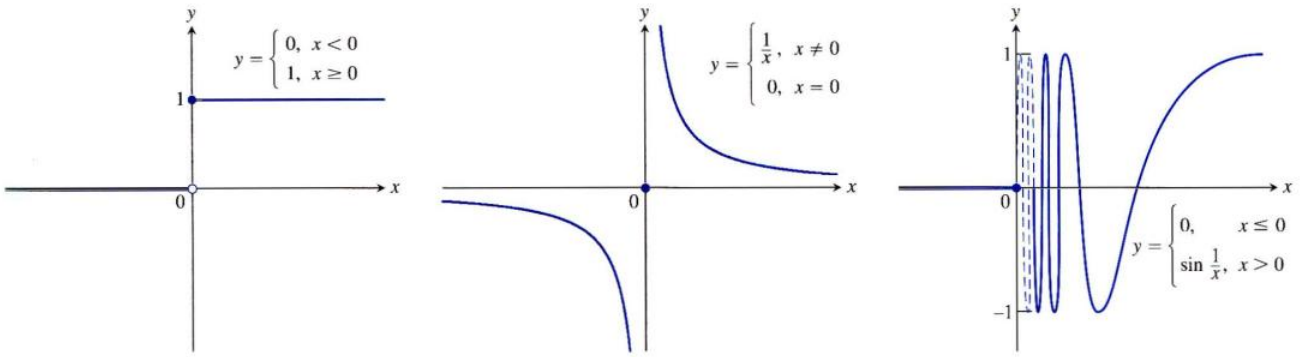
(b) Ha f konstans függvény, azaz minden x-re $f(x) = k$, valamely k számra, akkor tetszőleges x_0 esetén (l. a 2.6. ábra (b) részét):

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} k = k.$$

Lássunk néhány példát:

$$\lim_{x\to 3} x = 3 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to -7}(4) = \lim_{x\to 2}(4) = 4.$$

Állításainkat a 2.3. alfejezetben be is bizonyítjuk.



(a) Az $U(x)$ egységugrásfüggvény (b) $g(x)$ (c) $f(x)$

2.7. ÁBRA: Az $x \to 0$ esetben egyik függvénynek sem létezik hatértéke (9. példa).

Előfordul, hogy bizonyos határértékek nem léteznek; a következő példában ilyen eseteket vizsgálunk.

9. PÉLDA **Amikor nem létezik határérték.**

Hogyan viselkednek az alábbi függvények, amikor $x \to 0$?

(a) $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin\dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

Megoldás.

(a) Az U függvényt **egységugrásfüggvénynek** nevezzük; a függvénynek $x \to 0$ esetén nincs határértéke. A magyarázat a következő: 0-hoz tetszőlegesen közeli negatív x számok esetén $U(x) = 0$, a 0-hoz tetszőlegesen közeli pozitív x-ek esetén viszont $U(x) = 1$. Nem egyetlen, hanem két olyan szám létezik, amelyet a függvényértékek megközelítenek, miközben $x \to 0$ (2.7. ábra (a) része).

(b) A g függvény értékei a 0 környékén *túlságosan gyorsan nőnek;* bármilyen nagy számot mondunk is, a $g(x)$ függvényértékek abszolútértékei azt meghaladják, amint $x \to 0$, a függvény tehát nem tart egyetlen valós számhoz sem (2.7. ábra (b) része).

(c) Az f függvény *túlságosan gyorsan oszcillál* ahhoz, hogy létezhessen a 0 pontbeli határértéke. A függvény a 0-t tartalmazó bármely nyílt intervallumban a $+1$ és a -1 közötti összes valós számot fölveszi, nincsen tehát olyan szám, amelyhez az $f(x)$ függvényértékek tetszőlegesen közel kerülnének, amint $x \to 0$ (2.7. ábra (c) része). □

A határérték számítógépes becslése

A 2.1. és a 2.2. táblázat alapján is világos, hogy a számítógép vagy a számológép komoly hasznunkra lehet, amikor azt vizsgáljuk, miként viselkedik egy függvény, amint $x \to x_0$. Az eljárás a 7. példában szereplő függvények esetében is célravezető (az itt szereplőkhöz hasonló, *folytonos* függvényekkel részletesebben a 2.6. alfejezetben foglalkozunk). Nem árt azonban, ha óvatosak vagyunk:

a számítógépek hamis vagy félrevezető következtetések levonására sarkallhatnak bennünket számos olyan esetben, amikor a függvény egy adott helyen nincs értelmezve, vagy ott nincs határértéke. A differenciálszámítás eszközei segítségünkre lesznek majd abban, hogy a számítógép különös vagy nem egyértelmű adatait megfelelően értelmezzük (l. a 4.4. és a 4.6. alfejezetet). Lássunk most egy éberségre intő példát.

10. PÉLDA **A határérték becslése.**

Határozzuk meg a $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$ határértéket.

Megoldás. Kiszámoltunk néhány 0-hoz közeli x esetén a függvényértéket, az adatokat 2.3. táblázatban tüntettük fel. A ± 1, $\pm 0{,}5$, $\pm 0{,}10$, $\pm 0{,}01$ helyeken fölvett függvényértékek alaján arra következtethetünk, hogy a függvény határértéke 0,05.

Amint azonban a kisebb, $\pm 0{,}0005$, $\pm 0{,}0001$, $\pm 0{,}000001$ értékekeket vizsgáljuk, a határérték mintha mégis inkább 0 lenne.[1]

Mi lehet vajon a keresett határérték? Vajon a 0,5, a 0, vagy egy mindkettőtől különböző szám? A kiszámított függvényértékek ennek eldöntésében nincsenek segítségünkre, a következő alfejezetben szereplő tételek alapján azonban kiderül: a helyes válasz $0{,}05 = 1/20$. Az ehhez hasonló példák mutatják a kidolgozott elméletre épülő érvelés felsőbbségét a néhány megfigyelés alapján levont következtetésekkel szemben. A valóság leírásában mindazonáltal mindkét módszernek megvannak az előnyei (ahogy a hátrányai is). □

x	f(x)	
± 1	0,049876	A határérték 0,05?
$\pm 0{,}5$	0,049969	
$\pm 0{,}1$	0,049999	
$\pm 0{,}01$	0,050000	
$\pm 0{,}0005$	0,000000	A határérték 0?
$\pm 0{,}0001$	0,000000	
$\pm 0{,}00001$	0,000000	
$\pm 0{,}0000001$	0,000000	

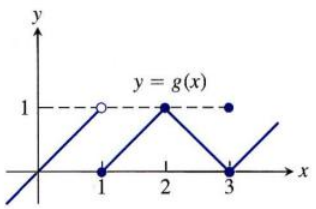
2.3. TÁBLÁZAT: Az $f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$ függvény értékei az $x = 0$ hely közelében.

[1] A számításokat a $(\sqrt{x^2+100}-10)/x^2$ összefüggésbe helyettesítve és 6 számjegyre kerekítve elvégezve adódnak a táblázatban feltüntetett eredmények. A kis értékekre így a számláló 0 lesz. (A lektor megjegyzése.)

2.1. Feladatok

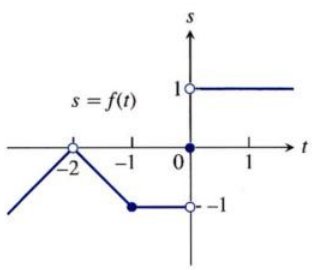
A határérték megállapítása a függvénygrafikon alapján

1. Az ábrán egy $g(x)$ függvény grafikonja látható. Léteznek-e az alábbi határértékek? (Ha létezik a határérték, adjuk meg, ha nem létezik, magyarázzuk meg, miért nem.)



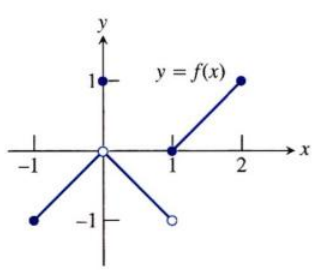
(a) $\lim_{x\to 1} g(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 2} g(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 3} g(x)$

2. Az ábrán egy $f(t)$ függvény grafikonja látható. Léteznek-e az alábbi határértékek? (Ha létezik a határérték, adjuk meg, ha nem létezik, magyarázzuk meg, miért nem.)



(a) $\lim_{t\to -2} f(t)$ **(b)** $\lim_{t\to -1} f(t)$ **(c)** $\lim_{t\to 0} f(t)$

3. Mely állítások igazak és melyek hamisak az ábrán látható $f(x)$ függvényre vonatkozóan?



(a) létezik a $\lim_{x\to 0} f(x)$ határérték

(b) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

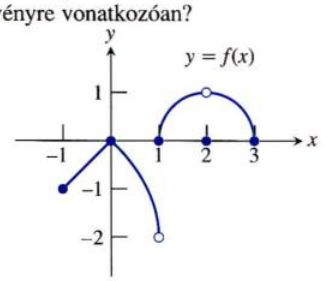
(c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

(d) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

(e) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

(f) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a $(-1,1)$ nyílt intervallum minden x_0 pontjában létezik

4. Mely állítások igazak és melyek hamisak az ábrán látható $y = f(x)$ függvényre vonatkozóan?



(a) $\lim_{x\to 2} f(x)$ határérték nem létezik

(b) $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

(c) $\lim_{x\to 1} f(x) =$ határérték nem létezik

(d) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a $(-1,1)$ nyílt intervallum minden x_0 pontjában létezik

(e) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ az $(1,3)$ nyílt intervallum minden x_0 pontjában létezik

A határérték létezése

Az 5. és a 6. feladatban magyarázzuk meg, miért nem létezik a szóban forgó határérték!

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$ **6.** $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$

7. Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény az $x = x_0$ kivételével minden x valós számra értelmezett. Mondhatunk-e ennek alapján bármit a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ határértékről? Indokoljuk válaszunkat.

8. Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény a $[-1,1]$ zárt intervallum minden pontjában értelmezett. Mondhatunk-e ennek alapján bármit a $\lim_{x\to 0} f(x)$ határértékről? Indokoljuk válaszunkat.

9. Következik-e abból, hogy $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$, az, hogy f értelmezve van az 1 helyen? Ha igen, vajon szükségképpen fennáll, hogy $f(1) = 5$? Állíthatunk egyáltalán *bármit* is az $f(1)$ függvényértékről? Indokoljuk válaszunkat.

10. Tegyük fel, hogy $f(1) = 5$. Szükségképpen létezik-e ekkor a $\lim_{x\to 1} f(x)$ határérték? Ha igen, vajon szükségképpen fennáll $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ is? Állíthatunk egyáltalán *bármit* is a $\lim_{x\to 1} f(x)$ határértékről? Indokoljuk válaszunkat.

A határérték becslése

T A 11–20. feladatok megoldásában egy függvényábrázoló program (vagy számológép) jó hasznunkra lehet.

11. Legyen $f(x) = (x^2 - 9)/(x+3)$

(a) Készítsünk táblázatot az $x = -3{,}1,\ -3{,}01,\ -3{,}001\ldots$ helyeken fölvett függvényértékekről (a számológépünkkel elérhető pontosságig). Adjunk becslést az adatok alapján a $\lim_{x\to -3} f(x)$ határértékre. Hogyan változna a becslésünk, ha a fentiek helyett az $x = -2{,}9,\ -2{,}99,\ -2{,}999\ldots$ helyeken felvett függvényértékeket számítanánk ki?

(b) Támasszuk alá az (a) pontban adott válaszunkat számítógéppel. Ábrázoljuk a függvény grafikonját az $x_0 = -3$ pont közelében; a ZOOM AND TRACE paranccsal vizsgáljuk, mi történik, amint $x \to -3$.

(c) Az 5. példában alkalmazott módszert követve számoljuk ki a $\lim_{x\to -3} f(x)$ határértéket.

12. Legyen $g(x) = (x^2 - 2)/(x - \sqrt{2})$

(a) Készítsünk táblázatot a $\sqrt{2}$-höz közelítő $x =$ 1, 1,4, 1,41, 1,414... helyeken felvett függvényértékekről. Becsüljük meg ennek alapján $\lim_{x\to\sqrt{2}} g(x)$ értékét.

(b) Támasszuk alá az (a) pontban adott válaszunkat számítógéppel. Ábrázoljuk a függvény grafikonját az $x_0 = \sqrt{2}$ pont közelében; a ZOOM AND TRACE paranccsal vizsgáljuk meg, hogy mi történik, amint $x \to \sqrt{2}$.

(c) Határozzuk meg algebrai úton a $\lim_{x\to\sqrt{2}} g(x)$ értéket.

13. Legyen $G(x) = (x+6)/(x^2 + 4x - 12)$

(a) Készítsünk táblázatot a G függvény $x =$ $= -5{,}9$, $-5{,}99$, $-5{,}999$... helyeken felvett értékeiről, az adatok alapján becsüljük meg $\lim_{x\to -6} G(x)$ értékét. Más eredményre jutnánk-e, ha az $x = -6{,}1$, $-6{,}01$, $-6{,}001$... értékeket vizsgálnánk?

(b) Támasszuk alá iménti válaszunkat számítógéppel. Ábrázoljuk a függvény grafikonját az $x_0 = -6$ pont közelében; használjuk a ZOOM AND TRACE parancsot annak vizsgálatára, hogy mi történik, amint $x \to -6$.

(c) Számoljuk ki $\lim_{x\to -6} G(x)$ értékét.

14. Legyen $h(x) = (x^2 - 2x - 3)/(x^2 - 4x + 3)$

(a) Készítsünk táblázatot a h függvény $x =$ 2,9, 2,99, 2,999... helyeken felvett értékeiről, az adatok alapján pedig becsüljük meg $\lim_{x\to 3} h(x)$ értékét. Más eredményre jutnánk-e, ha az $x = 3{,}1$, $3{,}01$, $3{,}001$... értékeket vizsgálnánk?

(b) Támasszuk alá iménti válaszunkat számítógéppel. Ábrázoljuk a függvény grafikonját az $x_0 = 3$ pont közelében; használjuk a ZOOM AND TRACE parancsot annak vizsgálatára, hogy mi történik, amint $x \to 3$.

(c) Határozzuk meg algebrai úton $\lim_{x\to 3} h(x)$ értékét.

15. Legyen $f(x) = (x^2 - 1)/(|x| - 1)$.

(a) Készítsünk táblázatot annak vizsgálatára, hogy miként viselkedik az f függvény, amint x értékei (jobbról, illetve balról) a -1 számhoz közelítenek. Becsüljük meg adataink alapján $\lim_{x\to -1} f(x)$ értékét.

(b) Támasszuk alá válaszunkat a függvénygrafikon számítógépes vizsgálatával is.

(c) Számítsuk ki $\lim_{x\to -1} f(x)$ pontos értékét.

16. Legyen $F(x) = (x^2 + 3x + 2)/(2 - |x|)$.

(a) Készítsünk táblázatot annak vizsgálatára, hogy miként viselkedik az f függvény, amint x értékei (jobbról, illetve balról) -2-höz közelítenek. Becsüljük meg adataink alapján $\lim_{x\to -2} F(x)$ értékét.

(b) Támasszuk alá válaszunkat a függvény grafikonjának számítógépes vizsgálatával.

(c) Határozzuk meg $\lim_{x\to -2} F(x)$ pontos értékét.

17. Legyen $g(\theta) = (\sin\theta)/\theta$.

(a) Készítsünk táblázatot annak vizsgálatára, hogy miként viselkedik a g függvény, amikor θ értékei (jobbról, illetve balról) $\theta_0 = 0$-hoz közelítenek. Becsüljük meg adataink alapján $\lim_{\theta\to 0} g(\theta)$ értékét.

(b) Ábrázoltassuk számítógéppel a g függvény grafikonját a $\theta_0 = 0$ hely közelében.

18. Legyen $F(t) = (1 - \cos t)/t^2$.

(a) Készítsünk táblázatot, és állapítsuk meg, miként viselkedik az F függvény, amikor t értékei (jobbról, illetve balról) egyre jobban megközelítik a $t_0 = 0$ helyet. Becsüljük meg adataink alapján $\lim_{t\to 0} F(t)$ értékét.

(b) Rajzoltassuk ki a számítógéppel az F függvény grafikonját a $t_0 = 0$ közelében.

19. Legyen $f(x) = x^{1/(1-x)}$.

(a) Készítsünk táblázatot, és állapítsuk meg, hogyan viselkedik a függvény, amikor x értékei (jobbról, illetve balról) 1-hez közelítenek. Van-e határértéke az f függvénynek, amint $x \to 1$? Ha van, mi lehet az? Ha nincs, miért nincs?

(b) Támasszuk alá válaszunkat a függvénygrafikon számítógépes vizsgálatával.

20. Legyen $f(x) = (3^x - 1)/x$

(a) Készítsünk táblázatot, és állapítsuk meg, hogyan viselkedik a függvény, amikor x értékei (jobbról, illetve balról) 0-hoz közelítenek. Van-e határértéke az f függvénynek, amint $x \to 0$? Ha van, mi lehet az? Ha nincs, miért nincs?

(b) Támasszuk alá válaszunkat a függvénygrafikon számítógépes vizsgálatával.

A határérték kiszámítása behelyettesítéssel

A 21–28. feladatokban szereplő határértékeket a behelyettesítés módszerével számíthatjuk ki legkönnyebben. Amennyiben lehetséges, a kapott eredményt ellenőrizzük számoló- (vagy számító-) géppel is.

21. $\lim_{x\to 2} 2x$

22. $\lim_{x\to 0} 2x$

23. $\lim_{x\to 1/3} (3x - 1)$

24. $\lim_{x\to 1} \dfrac{-1}{3x - 1}$

25. $\lim_{x\to -1} 3x(2x - 1)$

26. $\lim_{x\to -1} \dfrac{3x^2}{2x - 1}$

27. $\lim_{x\to \pi/2} x\sin x$

28. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\cos x}{1 - \pi}$

Átlagos változási sebesség

Határozzuk meg a függvények átlagos változási sebességét a megadott intervallumokon (29–34. feladatok).

29. $f(x) = x^3 + 1$

(a) $[2,3]$; **(b)** $[-1,1]$

30. $g(x) = x^2$

(a) $[-1,1]$; **(b)** $[-2,0]$

31. $h(t) = \operatorname{ctg} t$

(a) $[\pi/4, 3\pi/4]$; **(b)** $[\pi/6, \pi/2]$

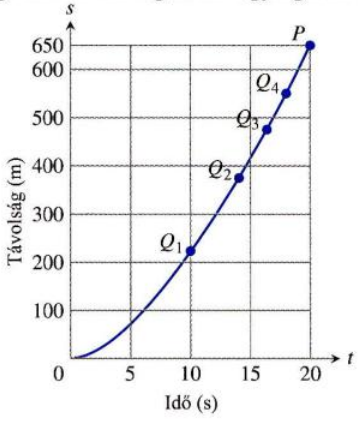
32. $g(t) = 2 + \cos t$

(a) $[0, \pi]$; **(b)** $[-\pi, \pi]$

33. $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1}$; $[0, 2]$

34. $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta$; $[1, 2]$

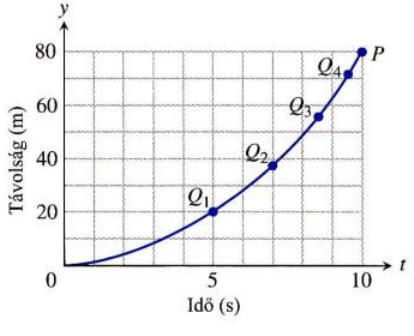
35. Ford Mustang Cobra Az ábra egy álló helyzetből induló Ford Mustang Cobra által megtett út nagyságát mutatja.



(a) A 2.3. ábra mintájára készítsünk táblázatot és határozzuk meg a PQ_1, PQ_2, PQ_3 és PQ_4 szakaszok meredekségét. Mi a megfelelő mértékegység?

(b) Becsüljük meg a gépkocsi sebességét a $t = 20$ s pillanatban.

36. A Hold felszínétől 80 méter magasságban a leszállóegységről levált egy alkatrész. Az ábra az alkatrész által megtett utat mutatja az idő függvényében.



(a) A 2.3. ábra mintájára készítsünk táblázatot és határozzuk meg a PQ_1, PQ_2, PQ_3 és PQ_4 szakaszok meredekségét. Mi a megfelelő mértékegység?

(b) Körülbelül mekkora sebességgel csapódott be az alkatrész?

T 37. Az alábbi táblázatban egy kisvállalkozás nettó nyereségét tüntettük fel a működés első öt évében.

Év	**Profit** (ezer dollár)
1990	6
1991	27
1992	62
1993	111
1994	174

(a) Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben az összetartozó értékeket, a kapott pontokra pedig illesszünk folytonos görbét.

(b) Mekkora az 1992 és 1994 közötti átlagos évi profitnövekedés?

(c) Grafikonunk alapján becsüljük meg a profit növekedésének ütemét 1992-ben.

T 38. Készítsünk táblázatot az $F(x) = (x+2)/(x-2)$ függvénynek az $x = 1{,}2$, $x = 11/10$, $x = 101/100$, $x = 1001/1000$, $y = 10001/10000$ és $x = 1$ helyeken felvett értékeiről.

(a) Határozzuk meg $F(x)$ átlagos változási sebességét az $[1, x]$ intervallumokon (a táblázatban szereplő 1-től különböző x-ek esetén).

(b) Becsüljük meg az F függvény változási sebességét az $x = 1$ pontban (ha szükséges, egészítsük ki a táblázatot).

T 39. Legyen $g(x) = \sqrt{x}$; $x \geq 0$.

(a) Határozzuk meg $g(x)$ átlagos változási sebességét az $[1, 2]$, az $[1,\ 1{,}5]$ és az $[1, 1+h]$ intervallumon.

(b) Készítsünk táblázatot a g függvény átlagos változási sebességéről az $[1, 1+h]$ intervallumokon, ahol h egyre jobban megközelíti a 0-t (vizsgáljuk például a $h =$ $= 0{,}1,\ 0{,}01,\ 0{,}001,\ 0{,}0001,\ 0{,}00001,\ 0{,}000001$ értékeket).

(c) A táblázat alapján becsüljük meg g változási sebességét az $x = 1$ pontban.

(d) Számoljuk ki, mennyi a g függvény $[1, 1+h]$ intervallumbeli változási sebességét megadó függvény határértéke, amint $h \to 0$.

T 40. Legyen $f(t) = 1/t$; $t \neq 0$.

(a) Határozzuk meg $f(t)$ átlagos változási sebességét (i) a $t = 2$-től $t = 3$-ig; (ii) $t = 2$-től $t = T$-ig.

(b) Készítsünk táblázatot az f függvény átlagos változási sebességéről az $[2, T]$ intervallumokon, ahol T egyre jobban megközelíti 2-t (vizsgáljuk például a $T =$ $= 2{,}1,\ 2{,}01,\ 2{,}001,\ 2{,}0001,\ 2{,}00001,\ 2{,}000001$ értékeket).

(c) A táblázat alapján becsüljük meg f változási sebességét az $t = 2$ pontban.

(d) Számoljuk ki, mennyi az f függvény $[2, T]$ intervallumbeli változási sebességét megadó függvény határértéke, amint $T \to 2$. (A behelyettesítés előtt alakítsuk át a függvény hozzárendelési szabályát megadó formulát.)

Határértékbecslés számítógéppel

A 41–46. feladatokban ábrázoljuk számítógéppel a függvények grafikonját a megadott pont környezetében, és a grafikon alapján becsüljük meg a szóban forgó határértéket.

41. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

42. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{(x+1)^2}$

43. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$

44. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 + 7} - 4}$

45. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \sin x}$

46. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{3 - 3\cos x}$

2.2. Határértékek kiszámítása

A 2.1. alfejezetben a függvények határértékét a grafikonjuk, illetve számológéppel kiszámított értékeik alapján becsültük meg. Ebben az alfejezetben több olyan tételt mondunk ki, amely a határértékek pontos kiszámításában segítségünkre lesz. Az első három tétel felhatalmazást nyújt arra, hogy az előző alfejezetbeli 7. példa módszerét alkalmazzuk polinom-, racionális és hatványfüggvények határértékének meghatározására. A negyedik és az ötödik tétel a későbbi számításokat készíti elő.

A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek

A következő tétel azt adja meg, miként lehet meghatározni két függvény összegének, különbségének, szorzatának, hányadosának, illetve egy függvény konstansszorosának, illetve racionális kitevőjú hatványfüggvénnyel vett kompozíciójának határértékét.

1. TÉTEL Határértékek és algebrai műveletek.
Legyenek L, M, c és k valós számok; tegyük fel, hogy

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{és} \quad \lim_{x\to c} g(x) = M.$$

Ekkor fennállnak a következők.
1. ÖSSZEG: $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L+M$, két függvény összegének határértéke a határértékek összege.
2. KÜLÖNBSÉG: $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = L-M$ két függvény különbségének határértéke a határértékek különbsége.
3. SZORZAT: $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot M$, két függvény szorzatának határértéke a határértékek szorzata.
4. KONSTANSSAL VALÓ SZORZÁS: $\lim_{x\to c}(k\cdot f(x)) = k\cdot L$, egy függvény konstansszorosának határértéke a függvény határértékének konstansszorosa.
5. HÁNYADOS: $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (amennyiben $M \neq 0$), két függvény hányadosának határértéke a határértékek hányadosa (feltéve, hogy a nevező határértéke nem 0).
6. RACIONÁLIS KITEVŐJŰ HATVÁNYOZÁS: Ha r és s relatív prím egész számok, továbbá $s \neq 0$, akkor $\lim_{x\to c}(f(x))^{r/s} = L^{r/s}$, feltéve, hogy $L^{r/s}$ valós szám (ha s páros, akkor fel kell tennünk, hogy $L > 0$); egy függvény racionális kitevőjű hatványfüggvénnyel vett kompozíciójának határértéke a függvény határértékének adott kitevőjű hatványával egyenlő, amennyiben ez a hatvány valós szám.

A szemléletünk alapján mindegyik szabályt elfogadhatjuk (bár jegyezzük meg: a „szemléleti evidencia" általában nem helyettesíti a bizonyítást). Ha x elég közel van c-hez, akkor a határérték szemléletes definíciója szerint $f(x)$ tetszőleges mértékben megközelíti L-t, $g(x)$ pedig M-et. Ekkor nyilvánvalónak tűnik, hogy $f(x)+g(x)$ az $L+M$, $f(x)-g(x)$ az $L-M$, $f(x)g(x)$ az LM, $kf(x)$ a kL, $f(x)/g(x)$ pedig – amennyiben $M \neq 0$ – az L/M számhoz közelít. Az összegre vonatkozó szabályt a következő alfejezetben a határérték pontos meghatározása alapján be fogjuk bizonyítani; a 2–5. szabályok igazolását a függelékre, a 6. szabály érvényességének belátását pedig a magasabb szintű analíziskurzusokra hagyjuk.

Lássunk néhány példát arra, hogy miként használhatók szabályaink polinomfüggvények, illetve racionális törtfüggvények határértékének meghatározására.

1. PÉLDA **Határérték kiszámítása az 1. Tétel alapján.**

Számítsuk ki a következő határértékeket. Használjuk az 1. Tételbeli szabályokat, valamint azt, hogy $\lim_{x\to c} k = k$, és hogy $\lim_{x\to c} x = c$ (2.1. alfejezet, 8. példa).

(a) $\lim_{x\to c} x^3 + 4x^2 - 3$ **(b)** $\lim_{x\to c} \dfrac{x^4+x^2-1}{x^2+5}$ **(c)** $\lim_{x\to -2} \sqrt{4x^2-3}$

Megoldás.

(a)
$$\lim_{x\to c}(x^3+4x^2-3) = \lim_{x\to c} x^3 + \lim_{x\to c} 4x^2 - \lim_{x\to c} 3 = \quad \text{összeg, különbség}$$
$$= c^3 + 4c^2 - 3 \quad \text{szorzat, konstansszoros}$$

(b)
$$\lim_{x\to c} \frac{x^4+x^2-1}{x^2+5} = \frac{\lim_{x\to c}(x^4+x^2-1)}{\lim_{x\to c}(x^2+5)} = \quad \text{hányados (a nevező nem 0)}$$
$$= \frac{\lim_{x\to c} x^4 + \lim_{x\to c} x^2 - \lim_{x\to c} 1}{\lim_{x\to c} x^2 + \lim_{x\to c} 5} = \quad \text{összeg, különbség}$$
$$= \frac{c^4+c^2-1}{c^2+5} \quad \text{hatványozás (vagy szorzat)}$$

(c)
$$\lim_{x\to -2} \sqrt{4x^2-3} = \sqrt{\lim_{c\to -2}(4x^2-3)} = \quad \text{hatványozás } r/s = 1/2$$
$$= \sqrt{\lim_{c\to -2} 4x^2 - \lim_{c\to -2} 3} = \quad \text{különbség}$$
$$= \sqrt{4(-2)^2-3} = \quad \text{szorzat, konstansszoros}$$
$$= \sqrt{13}$$

□

Most kimondjuk az 1. Tétel két következményét, ezek jelentősen megkönnyítik a polinomfüggvények, illetve racionális törtfüggvények határértékének kiszámítását. Az első szerint ha egy polinomfüggvény határértékére vagyunk kíváncsiak, amint $x \to c$, akkor egyszerűen helyettesítsük be x helyébe c-t a függvényt megadó formulában. Racionális törtfüggvények esetében majdnem ugyanez a helyzet: ha egy ilyen függvény határértékét akarjuk meghatározni az $x \to c$ esetben – *feltéve, hogy c-nél a nevező nem 0* –, akkor nincs más teendő, mint behelyettesíteni c-t a függvény formulájába (l. az 1. példa (a) és (b) részét).

2. TÉTEL

Ha $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, akkor

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_0.$$

3. TÉTEL

Ha $P(x)$ és $Q(x)$ polinomfüggvények és $Q(c) \neq 0$, akkor

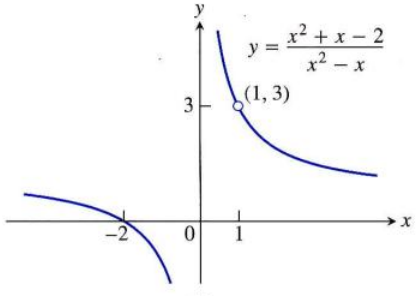
$$\lim_{x\to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

2. PÉLDA **Racionális törtfüggvény határértéke.**

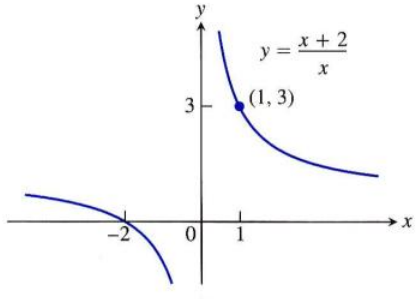
$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5} = \frac{(-1)^3+4\cdot(-1)^2-3}{(-1)^2+5} = \frac{0}{6} = 0$$

(Mint az 1. példa a $c = -1$ esetben, de most már elég, ha az imént kimondott tételre hivatkozunk.)

A közös tényező felismerése.
Belátható, hogy ha egy $Q(x)$ polinomra $Q(c) = 0$, akkor $Q(c)$ előáll egy eggyel alacsonyabb fokú polinom és $(x-c)$ szorzataként. Ha tehát egy racionális törtfüggvénynek a számlálója és a nevezője egyaránt 0, amennyiben $x = c$, akkor az $(x-c)$ tényező mindkettőből kiemelhető.



(a)



(b)

2.8. ÁBRA: Az $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ függvény grafikonja (l. az ábra (a) részét) az $x = 1$ helyet leszámítva megegyezik a $g(x) = (x+2)/x$ függvénynek az ábra (b) részén látható grafikonjával. Az $x = 1$ helyen az f függvény nem értelmezett, de amikor $x \to 1$, a két függvény határértéke megegyezik (3. példa).

A nullává váló nevező algebrai kiküszöbölése

A 3. Tétel csak olyan racionális törtfüggvényekre alkalmazható, amelyeknek nevezője a vizsgált helyen nem 0. De amikor a nevező 0, még mindig előfordulhat, hogy egyszerűsítés eredményeként nemnulla nevezőjű törtet kapunk. Ilyen esetben az egyszerűsítéssel kapott törtbe helyettesítünk be.

3. PÉLDA **Egyszerűsítés a közös tényezővel.**
Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$$

határértéket.

Megoldás. Mivel a nevező $x = 1$ esetén 0, ezért a behelyettesítés módszere nem alkalmazható. Az $x = 1$ esetben azonban a számláló is 0, az $(x-1)$ tényező tehát mind a számlálóból, mind a nevezőből kiemelhető. A közös tényezővel egyszerűsítve olyan törtet kapunk, amely tetszőleges $x \neq 1$ esetén megegyezik az eredetivel:

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)} = \frac{x+2}{x}, \quad \text{ha } x \neq 1$$

Az egyszerűbb törtbe már behelyettesíthetünk:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$$

L. ehhez a 2.8. ábrát. □

4. PÉLDA **Közös tényező kialakítása.**
Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$$

határértéket.

Megoldás. A feladattal már találkoztunk az előző alfejezet 10. Példájában. Az $x = 0$ értéket nem tudjuk behelyettesíteni, ráadásul a számlálóból és a nevezőből nem emelhető ki közös tényező sem. Kis ügyeskedéssel azonban a probléma megkerülhető: ha a számlálót és a nevezőt egyaránt megszorozzuk a $\sqrt{x^2+100}+10$ kifejezéssel, akkor a számlálóból a gyökjel eltüntethető, a nevező pedig a szóban forgó helyen 0-tól különböző lesz:

$$\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+100}+10}{\sqrt{x^2+100}+10} =$$

$$= \frac{x^2+100-100}{x^2(\sqrt{x^2+100}+10)} =$$

$$= \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+100}+10)} = \qquad \text{a közös tényező: } x^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10} \qquad \text{egyszerűsítés, amennyiben } x \neq 0$$

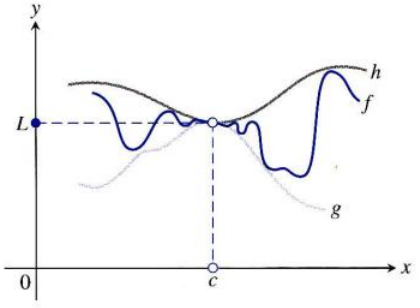
Mindezek alapján

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0^2+100}+10} = \qquad \text{mivel a nevező} \neq 0, \text{ behelyettesíthettünk}$$

$$= \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

Emlékezzünk vissza: az előző alfejezet 10. Példájában a számológéppel kapott adatokból nem lehetett egyértelműen megmondani, mennyi is a határérték. A megnyugtató választ a számítás adta meg. □



2.9. ÁBRA: A g és a h függvény grafikonja – mint a zsemle két fele a felvágottat – közrefogja az f függvény grafikonját.

A szendvicstétel

A következő tételt a későbbi fejezetekben többször fogjuk alkalmazni. A tétel neve abból származhat, hogy olyan f függvényről szól, amelynek értékei két másik – esetünkben h-val és g-vel jelölt – függvény megfelelő értékei közé esnek. A tétel szerint amennyiben g és h határértéke az $x = c$ helyen ugyanaz az L szám, akkor a c helyen f határértéke is L, a felvágott sorsa ugyanaz, mint a két zsemleszeleté. A tételt a 2.9. ábra szemlélteti; bizonyítását az F.2. függelékben adjuk meg.

4. TÉTEL Szendvicstétel.

Tegyük fel, hogy valamely, a c pontot tartalmazó nyílt intervallum minden (de legalábbis c kivételével minden) x elemére teljesül $g(x) \le f(x) \le h(x)$. Ha ezen felül

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L,$$

akkor fennáll $\lim_{x\to c} f(x) = L$ is.

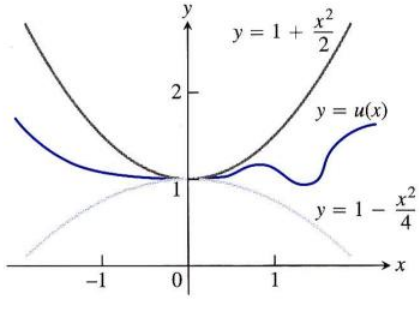
A szendvicstételt *rendőrelvnek* is nevezik (a letartóztatott bűnözőnek ugyanoda kell tartania, ahova az őt közrefogó közegek tartanak).

5. PÉLDA A szendvicstétel alkalmazása.

Az $u(x)$ függvényről tudjuk, hogy tetszőleges $x \neq 0$ esetén

$$1 - \frac{x^2}{4} \le u(x) \le 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Mit mondhatunk a $\lim_{x\to 0} u(x)$ határértékről?



2.10. ÁBRA: Bármilyen is az $u(x)$ függvény, ha grafikonja az $y = 1 + (x^2/2)$ és az $y = 1 - (x^2/4)$ függvény grafikonja közé esik, akkor $\lim_{x\to 0} u(x) = 1$.

Megoldás. Mivel $\lim_{x\to 0}(1 - (x^2/4)) = \lim_{x\to 0}(1 + (x^2/2) = 1$, a szendvicstétel feltételei teljesülnek, így fennáll $\lim_{x\to 0} u(x) = 1$ is (bármilyen bonyolult is az $u(x)$ függvény formulája); l. a 2.10. ábrát. □

6. PÉLDA A szendvicstétel további alkalmazásai.

(a) A szinuszfüggvény értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy tetszőleges θ esetén $-|\theta| \le \sin\theta \le |\theta|$, így mivel $\lim_{\theta\to 0}(-|\theta|) = \lim_{\theta\to 0}(|\theta|) = 0$, azt kapjuk, hogy

$$\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$$

is fennáll (l. a 2.11. ábra (a) részét).

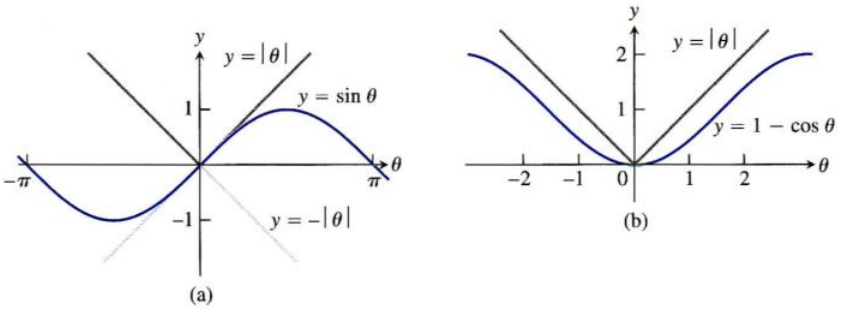
(b) A koszinuszfüggvény értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy tetszőleges θ esetén $0 \le 1 - \cos\theta \le |\theta|$, így azt kapjuk, hogy $\lim_{\theta\to 0}(1 - \cos\theta) = 0$, azaz

$$\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$$

L. a 2.11. ábra (b) részét.

(c) Tetszőleges $f(x)$ függvény esetén amennyiben $\lim_{x\to c}|f(x)| = 0$, úgy fennáll $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ is. Elegendő arra hivatkozni, hogy $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, továbbá hogy $\lim_{x\to c} -|f(x)| = \lim_{x\to c}|f(x)| = 0$.

A határértékek újabb fontos jellemzőjét mondja ki a következő tétel, amelynek hamarosan (a következő alfejezetben) a bizonyítására is sor kerül.



2.11. ÁBRA: A szendvicstétellel könnyen igazolható, hogy (a) $\lim_{\theta\to 0}\sin\theta = 0$, és hogy (b) $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$.

5. TÉTEL

Tegyük fel, hogy valamely, a c pontot tartalmazó nyílt intervallum minden (de legalábbis c kivételével minden) x elemére teljesül az $f(x) \le g(x)$ egyenlőtlenség. Ha mind az f, mind a g függvénynek létezik a határértéke, amint $x \to c$, akkor

$$\lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x)$$

is fennáll.

A tétel állításában a $\le$ nem szigorítható határozottan kisebbé ($<$). Egy ellenpéldát a 2.11. ábra mutat: amennyiben $\theta \neq 0$, úgy $-|\theta| < \sin\theta < |\theta|$, de a $\theta \to 0$ esetben a határértékek már egyenlőek.

2.2. Feladatok

A határértékek kiszámítása

Számítsuk ki a határértékeket (1–36. feladatok).

1. $\lim_{x\to -7}(2x+5)$

2. $\lim_{x\to 12}(10-3x)$

3. $\lim_{x\to 2}(-x^2+5x-2)$

4. $\lim_{x\to -2}(x^3-2x^2+4x+8)$

5. $\lim_{t\to 6} 8(t-5)(t-7)$

6. $\lim_{s\to 2/3} 3s(2s-1)$

7. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x+6}$

8. $\lim_{x\to 5}\dfrac{4}{x-7}$

9. $\lim_{y\to -5}\dfrac{y^2}{5-y}$

10. $\lim_{y\to 2}\dfrac{y+2}{y^2+5y+6}$

11. $\lim_{x\to -1} 3(2x-1)^2$

12. $\lim_{x\to -4}(x+3)^{1984}$

13. $\lim_{y\to -3}(5-y)^{4/3}$

14. $\lim_{z\to 0}(2z-8)^{1/3}$

15. $\lim_{h\to 0}\dfrac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$

16. $\lim_{h\to 0}\dfrac{5}{\sqrt{5h+4}+2}$

17. $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{3h+1}-1}{h}$

18. $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{5h+4}-2}{h}$

19. $\lim_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^2-25}$

20. $\lim_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2+4x+3}$

21. $\lim_{x\to -5}\dfrac{x^2+3x-10}{x+5}$

22. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}$

23. $\lim_{t\to 1}\dfrac{t^2+t-2}{t^2-1}$

24. $\lim_{t\to -1}\dfrac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$

25. $\lim_{x\to -2}\dfrac{-2x-4}{x^3+2x^2}$

26. $\lim_{y\to 0}\dfrac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2}$

27. $\lim_{u\to 1}\dfrac{u^4-1}{u^3-1}$

28. $\lim_{v\to 2}\dfrac{v^3-8}{v^4-16}$

29. $\lim_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

30. $\lim_{x\to 4}\dfrac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$

31. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

32. $\lim_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$

33. $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2}$

34. $\lim_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

35. $\lim_{x\to -3}\dfrac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3}$

36. $\lim_{x\to 4}\dfrac{4-x}{5-\sqrt{x^2-9}}$

A szabályok alkalmazása

37. Tegyük fel, hogy $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ és hogy $\lim_{x\to 0} g(x) = -5$. Az 1. Tételben szereplő szabályok közül melyeket alkalmaztuk az (a) (b) és (c) lépésnél?

$$\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)-g(x)}{(f(x)+7)^{2/3}} = \frac{\lim_{x\to 0}(2f(x)-g(x))}{\lim_{x\to 0}\left((f(x)+7)^{2/3}\right)} = \quad \text{(a)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0}2f(x)-\lim_{x\to 0}g(x)}{(\lim_{x\to 0}(f(x)+7))^{2/3}} = \quad \text{(b)}$$

$$= \frac{2\lim_{x\to 0}f(x)-\lim_{x\to 0}g(x)}{(\lim_{x\to 0}f(x)+\lim_{x\to 0}7)^{2/3}} = \quad \text{(c)}$$

$$= \frac{(2)(1)-(-5)}{(1+7)^{2/3}} = \frac{7}{4}$$

38. Tegyük fel, hogy $\lim_{x\to 1} h(x) = 5$, $\lim_{x\to 1} p(x) = 1$ és $\lim_{x\to 1} r(x) = 2$ Az 1. Tételben szereplő szabályok közül melyeket alkalmaztuk

az (a), (b) és (c) jelű lépésekben?

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4-r(x))} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to 1}\sqrt{5h(x)}}{\lim_{x\to 1}(p(x)(4-r(x)))} = \quad \text{(a)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 1}5h(x)}}{(\lim_{x\to 1}p(x))(\lim_{x\to 1}(4-r(x)))} = \quad \text{(b)}$$

$$= \frac{\sqrt{5\lim_{x\to 1}h(x)}}{(\lim_{x\to 1}p(x))(\lim_{x\to 1}4-\lim_{x\to 1}r(x))} = \quad \text{(c)}$$

$$= \frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4-2)} = \frac{5}{2}$$

39. Adjuk meg a következő határértékeket, ha tudjuk, hogy $\lim_{x\to c} f(x) = 5$ és $\lim_{x\to c} g(x) = -2$.

(a) $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$ **(b)** $\lim_{x\to c} 2f(x)g(x)$

(c) $\lim_{x\to c}(f(x)+3g(x))$ **(d)** $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{f(x)-g(x)}$

40. Adjuk meg a következő határértékeket, ha tudjuk, hogy $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$ és $\lim_{x\to 4} g(x) = -3$.

(a) $\lim_{x\to 4}(g(x)+3)$ **(b)** $\lim_{x\to 4}(xf(x))$

(c) $\lim_{x\to 4}(g(x))^2$ **(d)** $\lim_{x\to 4}\frac{g(x)}{f(x)-1}$

41. Adjuk meg a következő határértékeket, ha tudjuk, hogy $\lim_{x\to b} f(x) = 7$ és $\lim_{x\to b} g(x) = -3$.

(a) $\lim_{x\to b}(f(x)+g(x))$ **(b)** $\lim_{x\to b} f(x)\cdot g(x)$

(c) $\lim_{x\to b} 4g(x)$ **(d)** $\lim_{x\to b} f(x)/g(x)$

42. Adjuk meg a következő határértékeket, ha tudjuk, hogy $\lim_{x\to -2} p(x) = 4$, $\lim_{x\to -2} r(x) = 0$ és $\lim_{x\to -2} s(x) = -3$.

(a) $\lim_{x\to -2}(p(x)+r(x)+s(x))$

(b) $\lim_{x\to -2}(p(x)\cdot r(x)\cdot s(x))$

(c) $\lim_{x\to -2}(-4p(x)+5r(x))/s(x)$

A változási sebesség határértéke

A

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

alakú határértékek szoros kapcsolatban állnak a szelőkkel, az érintőkkel és a változási sebességgel, emiatt az analízisben lépten-nyomon előfordulnak. A 43–48. feladatokban az ilyen alakú határértéket kell kiszámítani a megadott $f(x)$ függvények x értéke esetén.

43. $f(x) = x^2$, $x = 1$ **44.** $f(x) = x^2$, $x = -2$

45. $f(x) = 3x-4$, $x = 2$ **46.** $f(x) = 1/x$, $x = -2$

47. $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 7$ **48.** $f(x) = \sqrt{3x+1}$, $x = 0$

A szendvicstétel alkalmazása

49. Mennyi $\lim_{x\to 0} f(x)$, ha minden $-1 \le x \le 1$ esetén $\sqrt{5-2x^2} \le$ $\le f(x) \le \sqrt{5-x^2}$?

50. Mennyi $\lim_{x\to 0} g(x)$, ha minden, 0-hoz elég közeli x-re $2-x^2 \le$ $\le g(x) \le 2\cos x$?

51. **(a)** Belátható, hogy az

$$1-\frac{x^2}{6} < \frac{x\sin x}{2-2\cos x} < 1$$

egyenlőtlenség minden, 0-hoz elég közeli x szám esetén fennáll. Mit állíthatunk ennek alapján a

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2-2\cos x}$$

határértékről (már ha egyáltalán mondhatunk róla valamit)? Indokoljuk válaszunkat.

(b) Ábrázoljuk a $[-2,2]$ intervallumon az $y = 1-(x^2/6)$, az $y = (x\sin x)/(2-2\cos x)$ és az $y = 1$ függvények grafikonját. Hogyan viselkednek a grafikonok, amint $x \to 0$?

52. **(a)** Tegyük fel, hogy az

$$\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24} < \frac{1-\cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenség minden, 0-hoz elég közeli x szám esetén fennáll. (Valóban ez a helyzet, amint ezt a 11.9. alfejezetben látni is fogjuk.) Mit állíthatunk ennek alapján a

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

határértékről (feltéve, hogy egyáltalán mondhatunk róla valamit)? Indokoljuk válaszunkat.

(b) Ábrázoljuk a $[-2,2]$ intervallumon az $y = (1/2)-$ $-(x^2/24)$, az $y = (1-\cos x)/x^2$ és az $y = 1/2$ függvények grafikonját. Mit mondhatunk a grafikonokról, amint $x \to 0$?

További példák és feladatok

53. Tegyük fel, hogy a $[-1,1]$ intervallum minden x elemére $x^4 \le f(x) \le x^2$, $x < -1$ és $x > 1$ esetén pedig $x^2 \le f(x) \le x^4$. Mely c pontok esetén tudjuk ennek alapján biztosan, hogy létezik a $\lim_{x\to c}$ határérték? Mit mondhatunk ezekről a határértékekről?

54. Tegyük fel, hogy minden $x \neq 2$ esetén $g(x) \le f(x) \le h(x)$, továbbá, hogy

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} h(x) = -5.$$

Levonhatunk-e mindezek alapján bármiféle következtetést arról, hogy mennyi $f(2)$, $g(2)$ vagy $h(2)$? Lehet-e vajon $f(2) = 0$? Lehetséges-e, hogy $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$? Mindkét esetben indokoljuk meg a válaszunkat.

55. Mennyi $\lim_{x\to 4} f(x)$, ha $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-5}{x-2} = 1$?

56. Ha tudjuk, hogy $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x^2} = L$, akkor mennyi

(a) $\lim_{x\to -2} f(x)$;

(b) $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x}$?

57. **(a)** Mennyi $\lim_{x\to 2} f(x)$, ha $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 3$?

(b) Mennyi $\lim_{x\to 2} f(x)$, ha $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 4$?

58. Mennyi

(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$; **(b)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$;

ha $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$.

T **59.** **(a)** Ábrázoljuk a $g(x) = x\sin(1/x)$ függvény grafikonját az $x = 0$ hely közelében, és becsüljük meg $\lim_{x\to 0} g(x)$ értékét. [Ha szükséges, nagyítsunk.]

(b) Támasszuk alá becslésünket bizonyítással.

T **60.** **(a)** Ábrázoljuk a $h(x) = x^2\cos(1/x^3)$ függvény grafikonját az $x = 0$ hely közelében, és becsüljük meg $\lim_{x\to 0} h(x)$ értékét. [Ha szükséges, nagyítsunk.]

(b) Támasszuk alá becslésünket bizonyítással.

2.3. A határérték precíz definíciója

Miután megismerkedtünk a határérték szemléletes fogalmával, itt az ideje, hogy megadjuk a precíz definíciót is. A szemléletes meghatározásban szereplő, kissé homályos „tetszőlegesen közel" fordulat helyett pontos, minden esetben alkalmazható kifejezést fogunk használni. A határérték precíz definíciója alapján nemcsak az előző alfejezetben kimondott tételeket lehet bebizonyítani, de több, az analízistanulmányainkban kiemelt jelentőséggel bíró határértékeket is ki tudunk majd számítani.

Ha azt akarjuk belátni, hogy a $\lim_{x\to x_0} g(x)$ határérték L-lel egyenlő, akkor azt kell megmutatnunk, hogy az $f(x)$ függvényértékek L-től való eltérése *tetszőlegesen kicsivé tehető*, ha az x értékeket x_0-hoz *elég közelinek* választjuk. Vizsgáljunk meg néhány példát, milyen kikötést jelent, ha az $f(x)$-ek és az L közötti távolságok nem haladhatnak meg egy bizonyos értéket.

1. PÉLDA **Lineáris függvény.**

Vizsgáljuk az $y = 2x - 1$ függvényt az $x_0 = 4$ hely közelében. Szemléletünk számára nyilvánvaló, hogy y tetszőlegesen megközelíti 7-et, amennyiben x megfelelően közel kerül 4-hez, azaz $\lim_{x\to 4}(2x-1) = 7$. Feltehetjük azonban a következő kérdést: milyen közel legyenek x értékei 4-hez, ha azt akarjuk, hogy az $y = 2x-1$ értékek 7-től való eltérése 2 egységnél kisebb legyen?

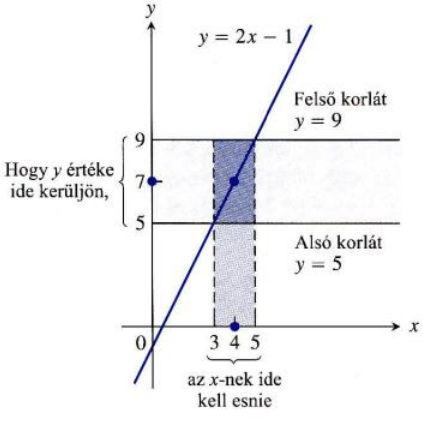
Megoldás. A következő kérdésre kell válaszolnunk: x milyen értékei esetén teljesül az $|y-7| < 2$ egyenlőtlenség? A válaszhoz először írjuk fel az $|y-7|$ kifejezést x-szel:

$$|y-7| = |(2x-1)-7| = |2x-8|$$

A megválaszolandó kérdés tehát így szól: x mely értékei elégítik ki a $|2x-8| < 2$ egyenlőtlenséget?

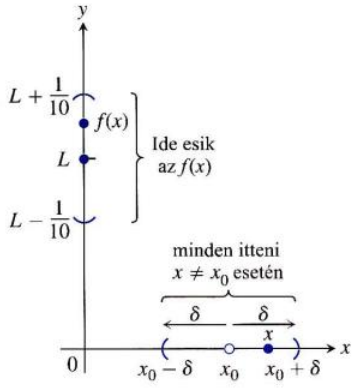
$$\begin{aligned} |2x-8| &< 2 \\ -2 < 2x-8 &< 2 \\ 6 < 2x &< 10 \\ 3 < x &< 5 \\ -1 < x-4 &< 1 \end{aligned}$$

Ha tehát x és $x_0 = 4$ eltérése kisebb, mint 1, akkor y és $y_0 = 7$ eltérése kisebb lesz, mint 2. □

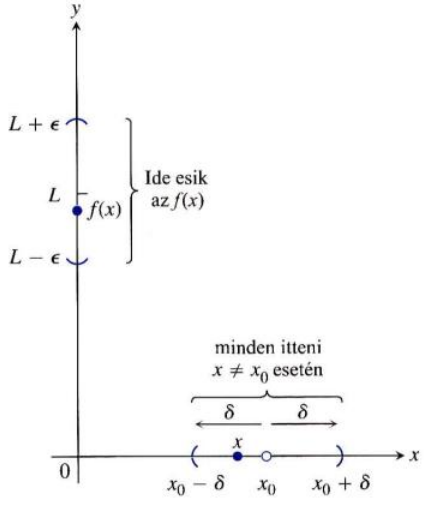


2.12. ÁBRA: Ha x és $x_0 = 4$ eltérése kisebb, mint 1, akkor y és $y_0 = 7$ eltérése kisebb lesz, mint 2.

A példában kiszámítottuk, milyen közel kell lennie x-nek a megadott x_0 értékhez, ha azt akarjuk elérni, hogy az x-hez tartozó $f(x)$ függvényértékek az L határérték körüli, előírt nagyságú intervallumba essenek. Ha azt akarjuk belátni, hogy az $f(x)$ függvény határértértéke $x \to x_0$ esetén valóban L, akkor azt kell megmutatnunk, hogy az $f(x)$ és L közötti eltérés tetszőlegesen kicsivé tehető, ha x-nek az x_0-hoz elég közeli értékeket adunk.



2.13. ÁBRA: Hogyan adjuk meg δ értékét, ha azt akarjuk, hogy minden, az $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ intervallumba eső $x \neq x_0$ esetén az $f(x)$ függvényérték az $\left(L-\frac{1}{10}, L+\frac{1}{10}\right)$ intervallumba essen?



2.14. ÁBRA: A határérték definíciójában szereplő ε és δ viszonya.

A határérték definíciója

Tegyük fel, hogy egy $f(x)$ függvény értékeit vizsgáljuk, amint x egyre jobban megközelíti (de nem éri el) x_0-t. Minden bizonnyal megadhatunk ekkor egy δ számot, amelyre teljesül, hogy $f(x)$ függvényértékek L-től való eltérése 1/10 egységnél kisebb lesz, amennyiben x-nek az x_0-tól való eltérése kisebb, mint δ (l. a 2.13. ábrát). Ennek alapján persze még nem mondhatjuk, hogy $f(x)$ határértéke az x_0 helyen L, elvégre semmi sem garantálja, hogy a megadott x-ek esetén az $f(x)$ függvényértékek nem kalandoznak összevissza az $(L-1/10, L+1/10)$ intervallumban úgy, hogy közben nem közelítenek folyamatosan L-hez.

Kiköthetjük, hogy az $f(x)$ értékek L-től való eltérése (a „hibahatár") ne haladja meg az 1/100-ot, az 1/1000-et vagy az 1/100 000-et. Mindegyik esetben megadhatunk egy-egy újabb, a szóban forgó kikötésnek megfelelő δ-t, ezzel kapcsolatban azonban továbbra is felmerülhet az iménti probléma: miként lehetnénk biztosak abban, hogy a függvényértékek *valóban* L-hez közelítenek?

A problémát jól illusztrálják a következő oldalon levő ábrák. Tekinthetjük a sorozatot egy szkeptikussal folytatott vita különböző állomásainak. A határérték létezésében kételkedő szkeptikus újabb és újabb ε-kihívások elé állít bennünket, amelyeknek rendre megfelelünk egy δ megadásával.

Hogyan kerülhetjük el, hogy a kihívások és válaszok sora a végtelenségig folytatódjon? Úgy, hogy *bebizonyítjuk:* akármilyen kicsi is a szkeptikus által követelt ε hibahatár, mindig képesek leszünk kiszámítani (vagy megbecsülni) azt a δ-t, amelyre teljesül, hogy ha x értékének x_0-tól való eltérése δ-nál kisebb, akkor $f(x)$ értékeinek L-től való eltérése kisebb lesz, mint ε (l. a 2.14. ábrát). Ezzel készen is állunk arra, hogy kimondjuk a definíciót.

DEFINÍCIÓ **Függvény határértéke.**

Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény értelmezve van valamely, az x_0-t tartalmazó nyílt intervallum – esetleg x_0 kivételével – minden pontjában. Azt mondjuk, hogy $f(x)$ tart L-hez, amint x tart x_0-hoz ($f(x)$ határértéke az x_0 helyen L), szimbolikusan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden x esetén

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

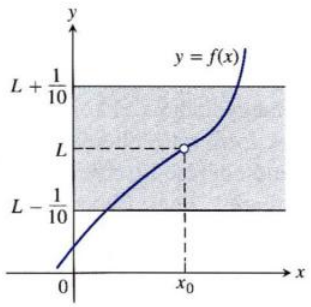
Gondoljunk például egy szerelőre, akinek egy adott L átmérőjű dugattyút kell készítenie. Mivel tökéletes pontosság nem létezik, meg kell elégednie azzal, ha az átmérő nagysága $L-\varepsilon$ és $L+\varepsilon$ közé esik; ahhoz, hogy az ε a hibahatáron belül maradjon, a műszert adott δ pontossággal kell beállítania. Minél kisebb a megengedett hibahatár, annál inkább finomítani kell a beállítás δ pontosságát.

A definíció alkalmazása: példák

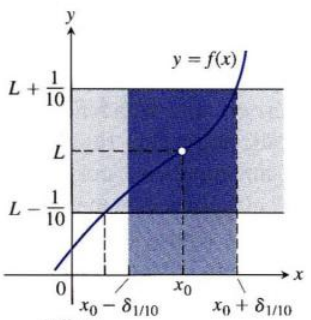
Definíciónk nem ad módszert arra, hogy egy függvény adott pontbeli határértékét kiszámítsuk, csupán arra alkalmas, hogy ellenőrizzük, helyes-e a sejtésünk. Az alább következő példák gondolatmenetei alkalmasak arra, hogy különféle típusú függvények határértékeire vonatkozóan állításokat tehessünk. (Első két példánk a 2.1. alfejezet 7. és 8. példáinak szabatosabb megoldása.) A definíció igazi jelentősége mégsem az efféle számításokban rejlik, hanem abban, hogy a precíz meghatározás alapján már *be lehet bizonyítani* azokat a tételeket, amelyek a határértékek kiszámítását megkönnyítik.

2. PÉLDA **A definíció próbája.**

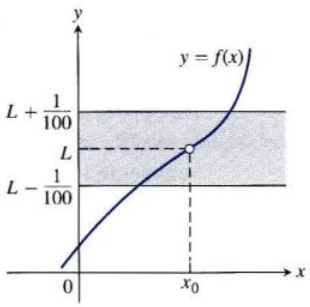
Igazoljuk, hogy $\lim_{x \to 1}(5x-3) = 2$.



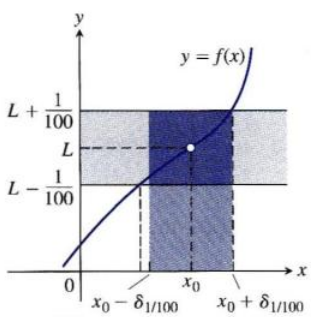
A kihívás:
Legyen: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{10}$



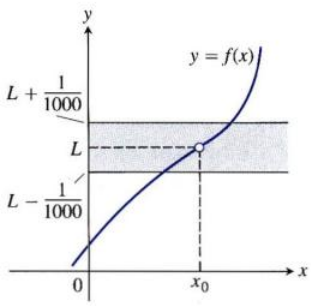
Válasz:
$|x - x_0| < \delta_{1/10}$



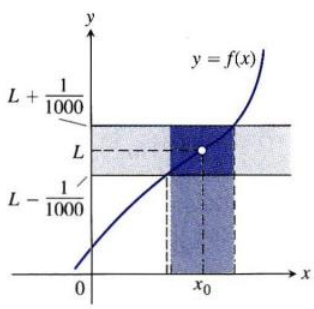
Új kihívás:
Legyen: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{100}$



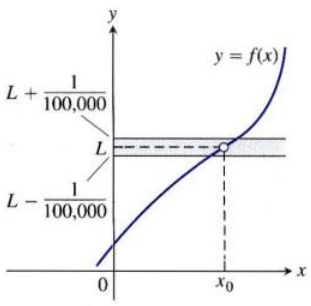
Válasz:
$|x - x_0| < \delta_{1/100}$



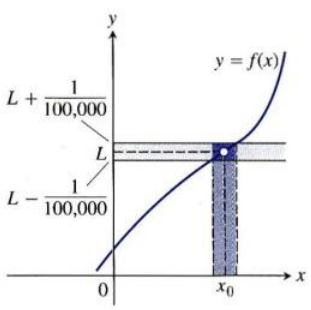
Új kihívás:
$\epsilon = \frac{1}{1000}$



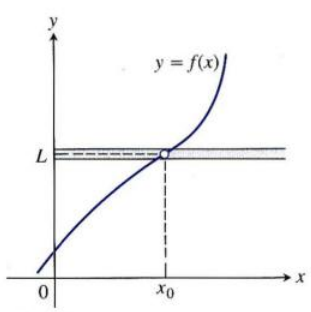
Válasz:
$|x - x_0| < \delta_{1/1000}$



Új kihívás:
$\epsilon = \frac{1}{100,000}$



Válasz:
$|x - x_0| < \delta_{1/100,000}$



Új kihívás:
$\epsilon = \cdots$

Megoldás. Esetünkben tehát $x_0 = 1$, $f(x) = 5x - 3$ és $L = 2$. Be kell látnunk, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén megadható egy $\delta > 0$, amelyre teljesül, hogy minden 1-től különböző, de x_0-tól δ távolságon belül elhelyezkedő, vagyis az

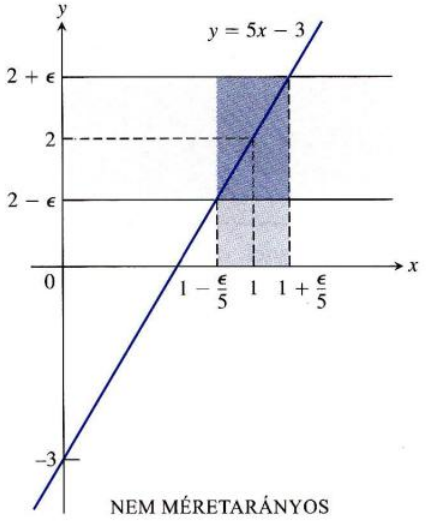
$$0 < |x - 1| < \delta$$

kielégítő x-ek esetén a megfelelő $f(x)$ függvényértéknek az $L = 2$ számtól való távolsága kisebb mint ε, azaz teljesül az

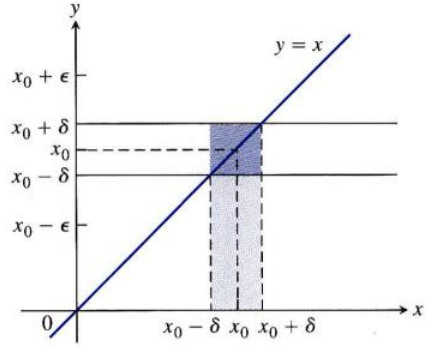
$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség. A kívánt δ az ε-ra vonatkozó egyenlőtlenségből határozható meg.

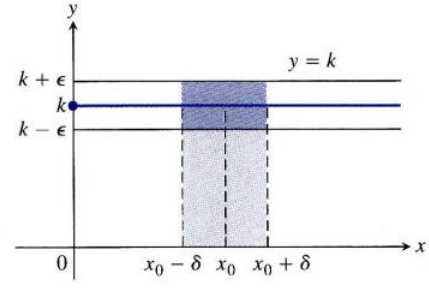
$$\begin{aligned} |(5x - 3) - 2| = |5x - 5| &< \varepsilon \\ 5|x - 1| &< \varepsilon \\ |x - 1| &< \frac{\varepsilon}{5} \end{aligned}$$



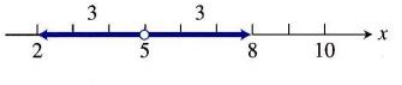
2.15. ÁBRA: Ha $f(x) = 5x - 3$, akkor $0 < |x-1| < \delta$ esetén $|f(x) - 2| < \varepsilon$ is fennáll (2. példa).



2.16. ÁBRA: Amennyiben $f(x) = x$, akkor $0 < |x - x_0| < \delta$ fennállásából $|f(x) - x_0| < \varepsilon$ következik (3. (a) példa).



2.17. ÁBRA: Amennyiben $f(x) = k$, akkor $|f(x) - k| < \varepsilon$ bármely pozitív δ esetén fennáll (3. (b) példa).



2.18. ÁBRA: Az $(5 - 3{,}5 + 3)$ 5-középpontú intervallum része a $(2,10)$ intervallumnak.

Eszerint tehát $\delta = \varepsilon/5$ megfelel (l. a 2.15. ábrát). Valóban, ha $0 < |x-1| < \delta = \varepsilon/5$, akkor

$$|(5x-3)-2| = |5x-5| = 5|x-1| < 5(\varepsilon/5) = \varepsilon,$$

vagyis $\lim\limits_{x\to 1}(5x-3) = 2$.

A $\delta = \varepsilon/5$ természetesen nem az egyetlen lehetséges választás, amellyel $0 < |x-1| < \delta$ fennállásából $|5x-5| < \varepsilon$ következik. Megfelelt volna bármilyen, az általunk megadottnál kisebb δ is. De nem is az volt a feladat, hogy megkeressük „a legjobb" δ-t, csupán egy olyat, amely megfelel a definícióban szereplő kikötésnek. □

3. PÉLDA **Az identikus és a konstans függvények határértéke.** Igazoljuk, hogy tetszőleges x_0 esetén (a) $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, és hogy (b) $\lim\limits_{x\to x_0} k = k$ (ahol k állandó).

Megoldás.

(a) Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Találnunk kell egy $\delta > 0$ számot, amelyre teljesül, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ fennállásából $|x - x_0| < \varepsilon$ következik. Ez azonban tetszőleges ε-nál nem nagyobb δ esetén teljesül (l. a 2.16. ábrát). Ez pedig *per definitionem* azt jelenti, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

(b) Legyen adott egy $\varepsilon > 0$ szám. Most olyan δ-t kell találnunk, amelyre teljesül, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ fennállásából $|k - k| < \varepsilon$ következik. Mivel azonban $k - k = 0$, a szóban forgó implikáció bármely pozitív δ esetén igaz (2.17. ábra). Eszerint tehát $\lim\limits_{x\to x_0} k = k$. □

Az adott ε-hoz tartozó δ kiszámítása

A 2. és 3. Példában azt az intervallumot, amelynek x elemeire $|f(x) - L|$ teljesült, tekinthettük x_0-ra szimmetrikusnak, vagyis olyannak, amelynek x_0 éppen a felezőpontja. Ha ilyen szimmetria nem áll fenn, akkor δ a szóban forgó intervallum x_0-hoz közelebbi végpontjának x_0-tól való távolsága.

4. PÉLDA δ **kiszámítása.** Tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x-1} = 2$; keressünk egy $\varepsilon = 1$-nek megfelelő δ-t, vagyis olyat, amelyre teljesül, hogy tetszőleges x-re

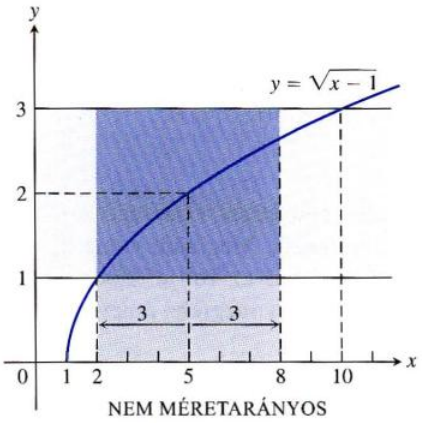
$$0 < |x-5| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x-1} - 2| < 1.$$

Megoldás. A megoldást két lépésben adjuk meg.

1. *Az $|\sqrt{x-1} - 2| < 2$ egyenlőtlenség megoldásával keressünk egy $x_0 = 5$-öt tartalmazó intervallumot, amelynek minden x_0-tól különböző eleme kielégíti az egyenlőtlenséget.*

$$\begin{gathered} |\sqrt{x-1} - 2| < 2 \\ -1 < \sqrt{x-1} - 2 < 1 \\ 1 < \sqrt{x-1} < 3 \\ 1 < x - 1 < 9 \\ 2 < x < 10 \end{gathered}$$

2. *Keressünk egy δ-t, amelyre teljesül, hogy az 5 középpontú $(5-\delta, 5+\delta)$ intervallum a $(2,10)$ intervallum belsejébe esik.* A $(2,10)$ intervallum 5-höz közelebbi végpontja 5-től 3 egységnyi távolságra van (l. a 2.18. ábrát). Ha tehát δ-nak a 3 számot választjuk (vagy egy 3-nál kisebb számot), akkor a



2.19. ÁBRA: A 4. Példában szereplő függvény és az ε-, illetve δ-intervallumok.

$0 < |x-5| < \delta$ egyenlőtlenség teljesülése automatikusan maga után vonja $2 < x < 10$ fennállását, utóbbi viszont már elégséges ahhoz, hogy teljesüljön $|\sqrt{x-1}-2| < 1$ is (l. a 2.19. ábrát). Igaz tehát, hogy

$$0 < |x-5| < \delta = 3 \Rightarrow |\sqrt{x-1}-2| < \varepsilon = 1. \qquad \square$$

Hogyan keressük meg az f, L, x_0 és $\varepsilon > 0$ négyesnek megfelelő δ-t?

Azt a δ-t, amelyre teljesül, hogy tetszőleges x esetén

$$0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon,$$

két lépésben keressük meg.

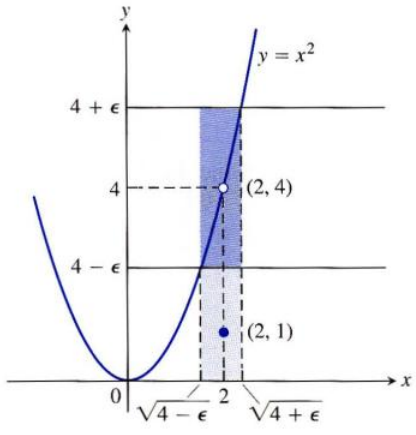
1. *Az $|f(x)-L| < \varepsilon$ egyenlőtlenség megoldásával* keressünk egy (a,b) nyílt intervallumot, amelynek minden x_0-tól különböző elemére teljesül az egyenlőtlenség.

2. *Adjunk meg egy $\delta > 0$ számot,* amelyre teljesül, hogy az x_0 középpontú $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ nyílt intervallum az (a,b) intervallum belsejébe esik. Az $|f(x)-L| < \varepsilon$ egyenlőtlenség természetesen az így megadott δ-intervallum x_0-tól különböző elemeire is teljesül.

5. PÉLDA

Igazoljuk, hogy $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$, amennyiben

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$



2.20. ÁBRA: Olyan, az $x = 2$ pontot tartalmazó intervallum, amellyel az 5. példában szereplő f függvényre teljesül az $|f(x)-4| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

Megoldás. Be kell bizonyítanunk, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy minden x-re

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-4| < \varepsilon,$$

1. Keresünk egy nyílt intervallumot, amelynek minden x_0-tól különböző elemére teljesül az $|f(x)-4| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

Ha $x \neq 2$, akkor $f(x) = x^2$, így a megoldandó egyenlőtlenség: $|x^2-4| < \varepsilon$.

$$\begin{gathered} |x^2-4| < \varepsilon \\ -\varepsilon < x^2-4 < \varepsilon \\ 4-\varepsilon < x^2 < 4+\varepsilon \\ \sqrt{4-\varepsilon} < |x| < \sqrt{4+\varepsilon} \\ \sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon} \end{gathered}$$

Amikor gyököt vontunk, feltettük, hogy $\varepsilon < 4$. Eredményünk szerint a $(\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$ nyílt intervallum valamennyi 2-től különböző x eleme esetén teljesül az $|f(x)-4| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

2. Adjunk meg egy $\delta > 0$ számot, amelyre teljesül, hogy a 2 középpontú $(2-\delta, 2+\delta)$ nyílt intervallum a $(\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$ nyílt intervallum belsejébe esik.

Legyen δ a $(\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$ intervallum 2-höz közelebbi végpontjának 2-től való távolsága, azaz legyen

$$\delta = \min\{2-\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon}-2\}.$$

Gyakran használjuk ezt a jelölést: $\min\{a,b\}$ az $\{a,b\}$ halmaz legkisebb elemét, vagyis a és b közül a kisebbet, ha pedig egyenlőek, akkor az egyiket

(vagy a másikat) jelöli. Ha δ-nak ezt a számot választjuk (vagy tetszőleges ennél kisebb számot), akkor $0 < |x-2| < \delta$ fennállásából automatikusan következik, hogy az x szám $\sqrt{4-\varepsilon}$ és $\sqrt{4+\varepsilon}$ közé esik, amiből pedig $|f(x)-4| < \varepsilon$ már következik. Vagyis tetszőleges x szám esetén

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-4| < \varepsilon,$$

márpedig pontosan ezt kellett bebizonyítanunk.

Milyen alapon tehettük fel, hogy $\varepsilon < 4$? A magyarázat egyszerű. Ha ugyanis valamely δ-ra teljesül, hogy $0 < |x-2| < \delta$ fennállásából minden x esetén következik $|f(x)-4| < \varepsilon < 4$, akkor ez a δ minden, az előbbinél nagyobb ε-hoz is megfelelő választás.

Végül emeljük ki azt a szabadságot, amelyet a $\delta = \min\{2-\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon}-2\}$ választás biztosít számunkra. Nem kellett azzal bajlódnunk, hogy megállapítsuk, a két szám közül melyik a kisebb (ha egyáltalán kisebb valamelyik) – egyszerűen *kineveztük* δ-nak a kisebbet, ez pedig elég is volt a bizonyítás befejezéséhez. □

A határértékre vonatkozó tételek bizonyítása a definíció alapján

Amikor valamely függvény adott pontbeli határértékét akarjuk kiszámítani, általában nem a definícióra, hanem a határértékekre vonatkozó általános tételekre, mindenekelőtt az előző alfejezetben kimondott állításokra hivatkozunk. A szóban forgó tételeket a határérték definíciója alapján bizonyíthatjuk be (l. az F.2. függeléket). Példaképpen belátjuk az előző alfejezet 1. Tételének 1. pontjában szereplő, két függvény összegének határértékére vonatkozó tételt.

6. PÉLDA

Igazoljuk, hogy ha $\lim_{x\to c} f(x) = L$ és $\lim_{x\to c} g(x) = M$, akkor

$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L+M.$$

Megoldás. Legyen adott az $\varepsilon > 0$ szám. Meg kell adnunk egy pozitív δ-t, amelyre teljesül, hogy minden x esetén

$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)+g(x)-(L+M)| < \varepsilon.$$

A tagokat átrendezve és a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva a következőt kapjuk:

$$|f(x)+g(x)-(L+M)| = |(f(x)-L)+(g(x)-M)| \leq$$
$$\leq |f(x)-L|+|g(x)-M|.$$

Mivel $\lim_{x\to c} f(x) = L$, a megadott ε-hoz létezik olyan $\delta_1 > 0$, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$0 < |x-c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon/2.$$

Hasonlóan: mivel $\lim_{x\to c} g(x) = M$, a megadott ε-hoz létezik olyan $\delta_2 > 0$, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$0 < |x-c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-M| < \varepsilon/2.$$

Legyen ezután $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ha most $0 < |x-c| < \delta$, akkor $|x-c| < \delta_1$, az utóbbi következtében pedig $|f(x)-L| < \varepsilon/2$, ezen felül $|x-c| < \delta_2$, és így $|g(x)-M| < \varepsilon/2$ is fennáll. Mindezek következtében

$$|f(x)+g(x)-(L+M)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ami azt bizonyítja, hogy valóban: $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L+M$. □

Most pedig bebizonyítjuk a 2.2. alfejezet 5. Tételét.

7. PÉLDA

Tegyük fel, hogy $\lim_{x\to c} f(x) = L$ és $\lim_{x\to c} g(x) = M$, továbbá hogy egy, a c pontot tartalmazó nyílt intervallum c kivételével minden x elemére $f(x) \le g(x)$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $L \le M$ is fennáll.

Megoldás. Indirekt bizonyítunk; megmutatjuk, hogy az $L > M$ feltevés alapján ellentmondásra jutunk. Az előző alfejezet 1. Tételének a függvények különbségére vonatkozó része szerint

$$\lim_{x\to c}(g(x) - f(x)) = M - L.$$

Eszerint tetszőleges pozitív ε-hoz létezik pozitív δ, hogy a $0 < |x-c| < \delta$ egyenlőtlenséget kielégítő minden x esetén

$$|(g(x) - f(x)) - (M - L)| < \varepsilon.$$

Feltevésünk szerint $L - M > 0$, így az $\varepsilon = L - M$ számhoz is létezik olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x-c| < \delta$ esetén

$$(g(x) - f(x)) - (M - L) < L - M.$$

Az egyenlőtlenséget átrendezve azt kapjuk, hogy $0 < |x-c| < \delta$ esetén

$$g(x) < f(x),$$

ami viszont ellentmond annak, hogy $f(x) \le g(x)$. Az $L > M$ egyenlőtlenség tehát nem állhat fenn, azaz $L \le M$. □

2.3. Feladatok

Adott középpontú intervallumok meghatározása

Az 1–6. feladatokban megadunk egy (a,b) intervallumot és az intervallum egy x_0 elemét. Adjunk meg olyan δ számot, amelyre teljesül hogy minden x-re $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow a < x < b$.

1. $a = 1,\ b = 7,\ x_0 = 5$

2. $a = 1,\ b = 7,\ x_0 = 2$

3. $a = -7/2,\ b = -1/2,\ x_0 = -3$

4. $a = -7/2,\ b = -1/2,\ x_0 = -3/2$

5. $a = 4/9,\ b = 4/7,\ x_0 = 1/2$

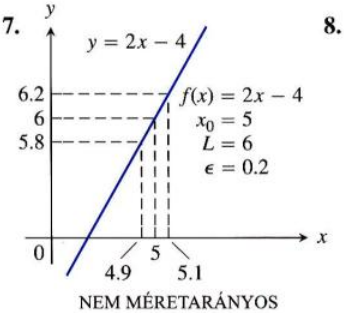
6. $a = 2{,}7591,\ b = 3{,}2391,\ x_0 = 3$

A megfelelő δ grafikus meghatározása

A 7–17. feladatokban a függvénygrafikonok és a feltüntetett értékek alapján keressünk olyan $\delta > 0$ számot, amelyre teljesül, hogy tetszőleges x-re

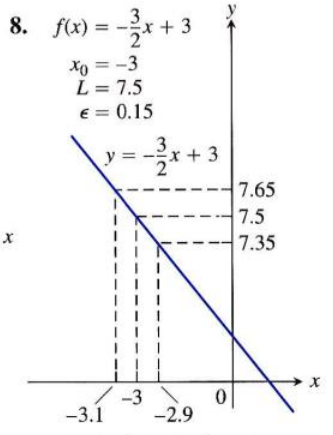
$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

7.



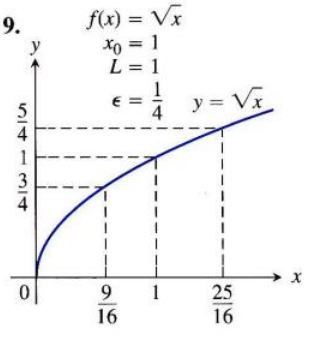
NEM MÉRETARÁNYOS

8.

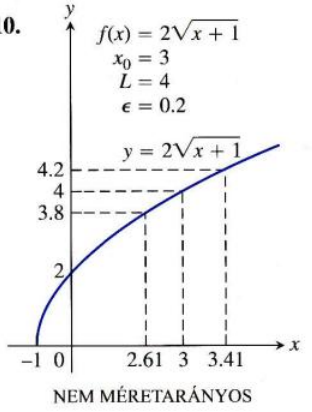


NEM MÉRETARÁNYOS

9.

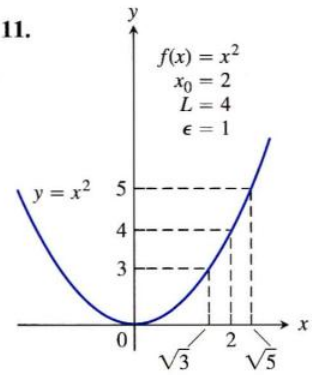


10.



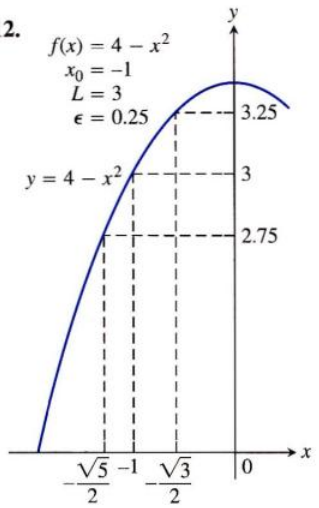
NEM MÉRETARÁNYOS

11.



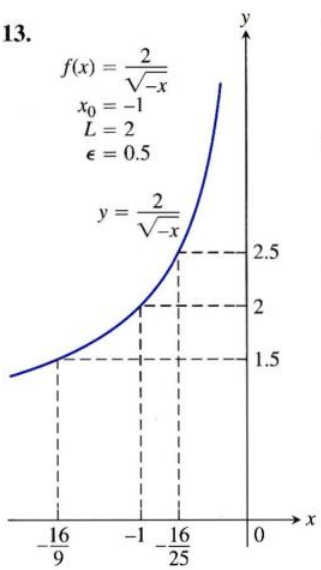
NEM MÉRETARÁNYOS

12.

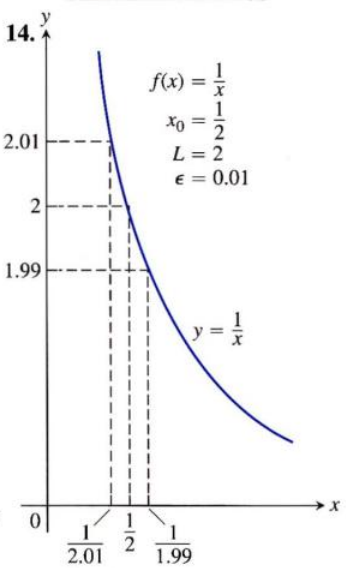


NEM MÉRETARÁNYOS

13.



14.



NEM MÉRETARÁNYOS

A megfelelő δ kiszámítása algebrai eszközökkel

A 15–30. feladatok mindegyikében adott egy $f(x)$ függvény, egy L, egy x_0 és egy ε szám. Minden esetben írjunk fel egy olyan, x_0-t tartalmazó nyílt intervallumot, amelynek valamennyi x elemére teljesül az $|f(x)-L|<\varepsilon$ egyenlőtlenség. Ezután adjunk meg egy $\delta>0$ számot, amelyre igaz, hogy az $|f(x)-L|<\varepsilon$ egyenlőtlenség minden, a $0<|x-x_0|<\delta$ egyenlőtlenséget kielégítő x esetén teljesül.

15. $f(x)=x+1,\ L=5,\ x_0=4,\ \varepsilon=0{,}001$

16. $f(x)=2x-2,\ L=-6,\ x_0=-2,\ \varepsilon=0{,}02$

17. $f(x)=\sqrt{x+1},\ L=1,\ x_0=0,\ \varepsilon=0{,}1$

18. $f(x)=\sqrt{x},\ L=1/2,\ x_0=1/4,\ \varepsilon=0{,}1$

19. $f(x)=\sqrt{19-x},\ L=3,\ x_0=10,\ \varepsilon=1$

20. $f(x)=\sqrt{x-7},\ L=4,\ x_0=23,\ \varepsilon=1$

21. $f(x)=1/x,\ L=1/4,\ x_0=4,\ \varepsilon=0{,}05$

22. $f(x)=x^2,\ L=3,\ x_0=\sqrt{3},\ \varepsilon=0{,}1$

23. $f(x)=x^2,\ L=4,\ x_0=-2,\ \varepsilon=0{,}5$

24. $f(x)=1/x,\ L=-1,\ x_0=-1,\ \varepsilon=0{,}1$

25. $f(x)=x^2-5,\ L=11,\ x_0=4,\ \varepsilon=1$

26. $f(x)=120/x,\ L=5,\ x_0=24,\ \varepsilon=1$

27. $f(x)=mx,\ m>0,\ L=2m,\ x_0=2,\ \varepsilon=0{,}03$

28. $f(x)=mx,\ m>0,\ L=3m,\ x_0=3,\ \varepsilon=c>0$

29. $f(x)=mx+b,\ m>0,\ L=(m/2)+b,\ x_0=1/2,\ \varepsilon=c>0$

30. $f(x)=mx+b,\ m>0,\ L=m+b,\ x_0=1,\ \varepsilon=0{,}05$

Határértékek kiszámítása és igazolása

A 31–36. feladatokban adott egy $f(x)$ függvény, valamint egy x_0 és egy ε szám. Állapítsuk meg, hogy mennyi $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Ezután adjunk meg egy δ számot, amelyre teljesül, hogy minden x esetén

$$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon.$$

31. $f(x)=3-2x,\ x_0=3,\ \varepsilon=0{,}02$

32. $f(x)=-3x-2,\ x_0=-1,\ \varepsilon=0{,}03$

33. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2},\ x_0=2,\ \varepsilon=0{,}05$

34. $f(x)=\dfrac{x^2+6x+5}{x+5},\ x_0=-5,\ \varepsilon=0{,}05$

35. $f(x)=\sqrt{1-5x},\ x_0=-3,\ \varepsilon=0{,}5$

36. $f(x)=4/x,\ x_0=2,\ \varepsilon=0{,}4$

Bizonyítsuk be, hogy fennállnak az alábbiak (37–50. feladatok).

37. $\lim_{x\to 4}(9-x)=5$

38. $\lim_{x\to 3}(3x-7)=2$

39. $\lim_{x\to 9}\sqrt{x-5}=2$

40. $\lim_{x\to 0}\sqrt{4-x}=2$

41. $\lim_{x\to 1} f(x)=1$, ahol $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$

42. $\lim_{x\to -2} f(x)=4$, ahol $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq -2\\ 1, & x=-2\end{cases}$

43. $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=1$

44. $\lim_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{3}$

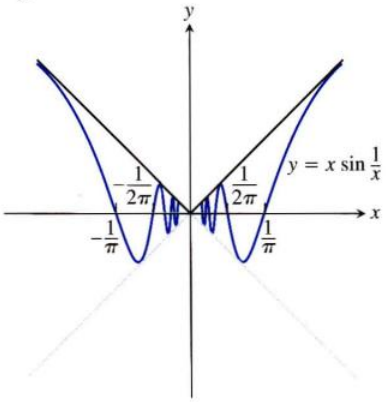
45. $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=-6$

46. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

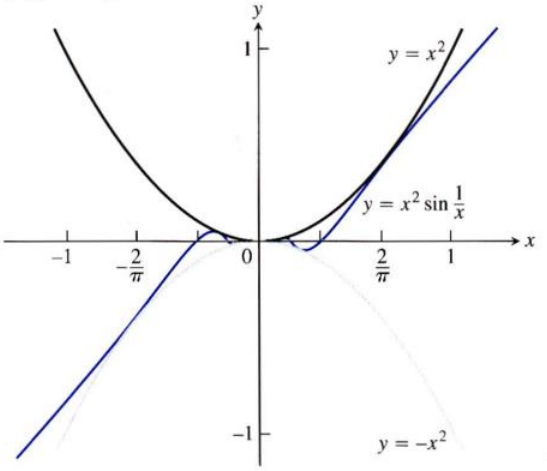
47. $\lim_{x\to 1} f(x)=2$, ahol $f(x)=\begin{cases}4-2x & x<1\\ 6x-4, & x\geq 1\end{cases}$

48. $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, ahol $f(x)=\begin{cases}2x & x<0\\ x/2, & x\geq 0\end{cases}$

49. $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$



50. $\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} = 0$



További példák és feladatok

51. Mit jelent a definíció alapján, hogy $\lim_{x\to 0} g(x) = k$?

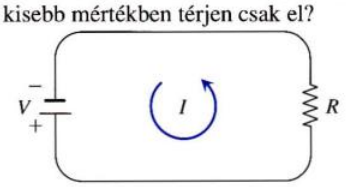
52. Igazoljuk, hogy $\lim_{x\to c} f(x) = L$ pontosan akkor áll fenn, ha $\lim_{h\to 0} f(h+c) = L$.

53. Egy téves állítás. Bizonyítsuk be ellenpéldával, hogy a következő állítás hamis: *Az L szám az $f(x)$ függvény határértéke, amint x tart x_0-hoz, ha az $f(x)$ függvényértékek egyre közelebb kerülnek L-hez, amint x tart x_0-hoz.* Magyarázzuk meg, hogy a példánkban szereplő függvénynek miért nem határértéke L, amint $x \to x_0$.

54. Még egy téves állítás. Bizonyítsuk be ellenpéldával, hogy a következő állítás hamis: *Az L szám az $f(x)$ függvény határértéke, amint x tart x_0-hoz, ha tetszőleges pozitív ε számhoz létezik olyan x, amelyre teljesül, hogy $|f(x) - L| < \varepsilon$.* Magyarázzuk meg, hogy a példánkban szereplő függvénynek miért nem határértéke L, amint $x \to x_0$.

55. Hengercsiszolás Mennyi eltérést engedhetünk meg az $x_0 = 3{,}385$ cm átmérőtől, hogy a henger keresztmetszetének 9 cm^2-től való eltérése ne haladja meg a 0,01 cm^2-et? Esetünkben $A = \pi(x/2)^2$; meg kell határoznunk azt az intervallumot, amelynek minden x elemére fennáll $|A - 9| \le 0{,}01$.

56. Ellenállásméretezés Ohm törvénye szerint az U feszültség, az I áramerősség és az R ellenállás között mindig fennáll az $U = IR$ összefüggés. Tegyük fel, hogy cégünk a következő megrendelést kapja: készítsünk ellenállásokat, amelyeken keresztül az $U = 120$ voltos feszültség hatására $I = 5 \pm 0{,}1$ amper erősségű áram folyik. Milyen intervallumba kell az R ellenállás értékének esnie, ha azt akarjuk, hogy az áramerősség az $I_0 = 5$ ampertől 0,1 ampernél kisebb mértékben térjen csak el?

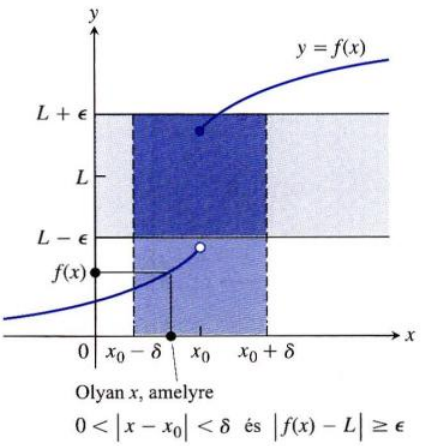


Mikor nem határértéke az L szám az $f(x)$ függvénynek, amint $x \to x_0$?

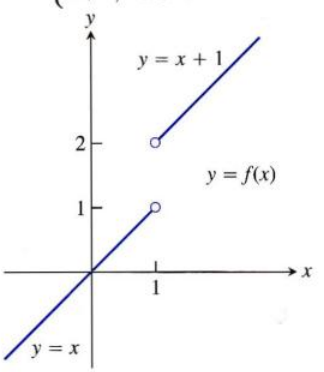
Ha azt akarjuk belátni, hogy $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq L$, akkor meg kell adnunk egy ε-t, amelyre teljesül, hogy a

$$\text{minden } x\text{-re } [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$$

feltétel egyetlen δ esetén sem teljesül. Ehhez azt kell belátni, hogy a szóban forgó ε-hoz bármilyen δ-t választunk is, létezik olyan x, amelyre $0 < |x - x_0| < \delta$ és $|f(x) - L| \ge \varepsilon$ egyaránt teljesül.



57. Legyen $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$.



(a) Legyen $\varepsilon = 1/2$. Igazoljuk, hogy a következő feltételnek egyetlen δ sem tesz eleget:

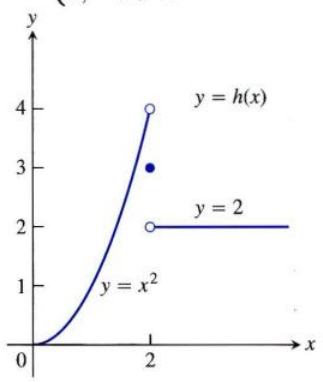
$$\text{minden } x\text{-re } 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < 1/2$$

Minden δ-hoz létezik tehát olyan x, amelyre $0 < |x - 1| < \delta$ és $|f(x) - 2| \ge 1/2$ egyaránt teljesül. Mindez természetesen azt igazolja, hogy $\lim_{x\to 1} f(x) \neq 2$.

(b) Igazoljuk, hogy $\lim_{x\to 1} f(x) \neq 1$.

(c) Igazoljuk, hogy $\lim_{x\to 1} f(x) \neq 1{,}5$.

58. Legyen $h(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$.



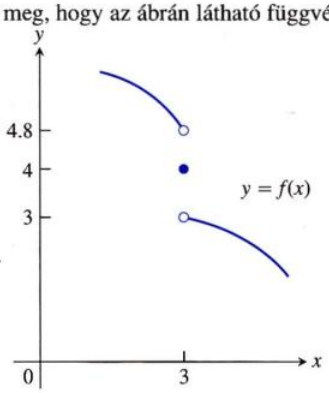
Mutassuk meg, hogy

(a) $\lim_{x\to 2} h(x) \neq 4$;

(b) $\lim_{x\to 2} h(x) \neq 3$; és hogy

(c) $\lim_{x\to 2} h(x) \neq 2$.

59. Mutassuk meg, hogy az ábrán látható függvény esetében



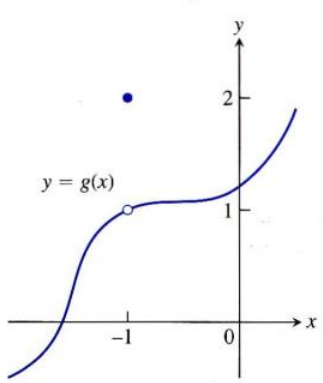
(a) $\lim_{x\to 3} f(x) \neq 4$;

(b) $\lim_{x\to 3} f(x) \neq 4{,}8$; és hogy

(c) $\lim_{x\to 3} f(x) \neq 3$.

60. **(a)** Mutassuk meg, hogy az ábrán látható $g(x)$ függvény esetében $\lim_{x\to -1} g(x) \neq 2$.

(b) Kijelenthetjük-e az ábra alapján, hogy létezik a $\lim_{x\to -1} g(x)$ határérték? Indokoljuk válaszunkat.



A megfelelő δ megkeresése számítógép segítségével

A 61–66. feladatokban kövessük a következő lépéseket.

(a) Ábrázoljuk az $f(x)$ függvény grafikonját a megadott x_0 pont környezetében.

(b) Tippeljük meg, mennyi a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ határérték, majd ellenőrizzük becslésünket számítással.

(c) Legyen $\varepsilon = 0{,}2$; ábrázoljuk az $f(x)$ grafikonja mellett az $y_1 = L - \varepsilon$ és az $y_2 = L + \varepsilon$ egyeneseket is.

(d) Az ábra alapján becsüljük meg, mekkorának kell lennie a δ számnak, ha

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

minden x esetén fennáll. Ellenőrizzük a becslést úgy, hogy az $0 < |x - x_0| < \delta$ egyenlőtlenségnek eleget tevő x-ekre ábrázoljuk az f, az y_1 és az y_2 függvények grafikonját. Az ablakot megadó intervallumok legyenek a következők: $x_0 - 2\delta \le x \le x_0 + 2\delta$, illetve $L - 2\varepsilon \le y \le L + 2\varepsilon$. Ha van olyan $f(x)$ függvényérték, amely az $[L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ intervallumon kívülre esik, akkor az általunk megadott δ túl nagy. Ha így jártunk, próbálkozzunk egy kisebb δ-val.

(e) Ismételjük meg a (c) és (d) pontban leírtakat az $\varepsilon = 0{,}1,\ 0{,}05,\ 0{,}001$ értékekre.

61. $f(x) = \dfrac{x^4 - 81}{x - 3}$, $x_0 = 3$

62. $f(x) = \dfrac{5x^3 + 9x^2}{2x^5 + 3x^2}$, $x_0 = 0$

63. $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{3x}$, $x_0 = 0$

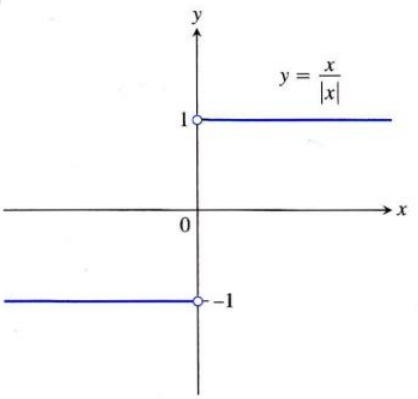
64. $f(x) = \dfrac{x(1 - \cos x)}{x - \sin x}$, $x_0 = 0$

65. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$, $x_0 = 1$

66. $f(x) = \dfrac{3x^2 - (7x + 1)\sqrt{x} + 5}{x - 1}$, $x_0 = 1$

2.4. Jobb és bal oldali határérték. Határérték a végtelenben

Ebben az alfejezetben bevezetjük a jobb, illetve bal oldali határérték fogalmát; amely arról ad felvilágosítást, hogyan viselkedik egy függvény valamely x_0 szám környezetében, amint az x független változóval jobbról (vagyis amikor $x > x_0$), illetve balról (vagyis amikor $x < x_0$) közelítünk az x_0-hoz. Megvizsgáljuk továbbá, hogyan viselkednek bizonyos – racionális, illetve másféle – függvények, amint $x \to \pm\infty$.



2.21. ÁBRA: Az $f(x) = |x|/x$ függvény jobb és bal oldali határértéke a 0 helyen nem egyenlő.

Jobb és bal oldali határértékek

Ahhoz, hogy egy f függvénynek létezzen a c pontbeli határértéke, f-nek a c mindkét oldalán értelmezve kell lennie, és az $f(x)$ függvényértékeknek mindenképpen az L határértékhez kell közelíteniük, függetlenül attól, hogy az x jobb vagy bal oldalról közelít c-hez. Az előző alfejezetekben tárgyalt határértéket éppen emiatt olykor **„kétoldali" határértéknek** is nevezik.

Attól, hogy az f függvénynek a c helyen nem létezik a kétoldali határértéke, még létezhetnek azok a határértékek, amelyekhez a függvényértékek akkor közelítenek, amikor a független változó értékei az egyik oldalról tartanak c-hez. Ilyenkor jobb, illetve bal oldali határértékről beszélünk attól függően, hogy x jobbról (a c-nél nagyobb számokon keresztül) vagy balról (a c-nél kisebb számokon keresztül) közelít c-hez.

Az $f(x) = |x|/x$ függvény bal oldali határértéke a 0 helyen -1, jobb oldali határértéke pedig 1 (l. a 2.21. ábrát). A két határérték nem egyezik meg, így nincs egyetlen olyan szám, amelyhez a függvényértékek tartanának, amint $x \to 0$, f-nek tehát 0-ban nincs (kétoldali) határértéke.

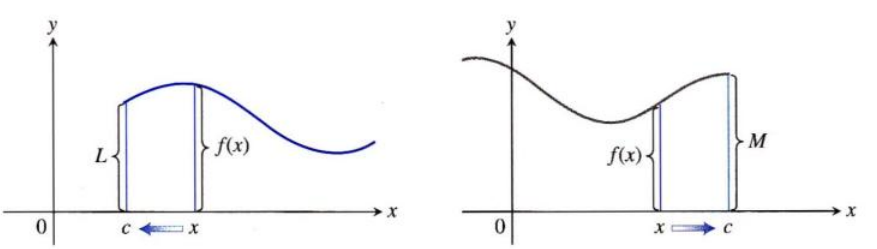
A szemléletes meghatározások a következők. Ha az f függvény értelmezve van a (c,b) intervallumon (ahol $c < b$), akkor az L-számot az f függvény c-beli **jobb oldali határértékének** nevezzük, ha az $f(x)$ függvényértékek tetszőlegesen megközelítik L-t, amennyiben a megadott intervallumbeli x-ek megfelelően közel kerülnek c-hez. Azt, hogy az f függvény jobb oldali határértéke a c helyen az L szám, így jelöljük:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

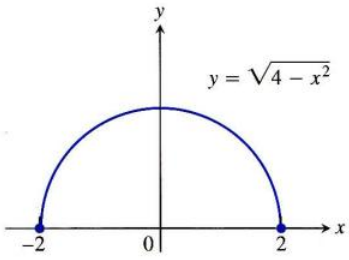
Az $x \to c^+$ kifejezésben a $+$ index azt jelzi, hogy x értékei felülről (vagyis a számegyenesen jobbról) közelítenek c-hez. Ha pedig f értelmezve van az (a,c) intervallumon (ahol $a < c$), akkor L-t az f függvény c-beli **bal oldali határértékének** nevezzük, ha az $f(x)$ függvényértékek tetszőlegesen megközelítik L-t, amennyiben a megadott intervallumból vett x-ek elég közel kerülnek c-hez. Azt, hogy az f függvény bal oldali határértéke a c helyen az L szám, így jelöljük:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

Az $x \to c^-$ kifejezésben a $-$ index azt jelzi, hogy x értékei alulról (vagyis a számegyenesen balról) közelítenek c-hez.



2.22. ÁBRA: (a) A c helyen vett jobb oldali határérték. (b) A c helyen vett bal oldali határérték.



2.23. ÁBRA: Az 1. Példában szereplő függvény: $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 0$ és $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$.

A szemléletes meghatározásokat a 2.22. ábrán illusztráltuk. A 2.21. ábrán látható $f(x) = |x|/x$ függvény esetében

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1, \text{ de } \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$$

1. PÉLDA **Határértékek egy félkör végpontjaiban.**
Az $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ függvény értelmezési tartománya a $[-2,2]$ zárt intervallum, grafikonja a 2.23. ábrán látható félkör. Erre a függvényre:

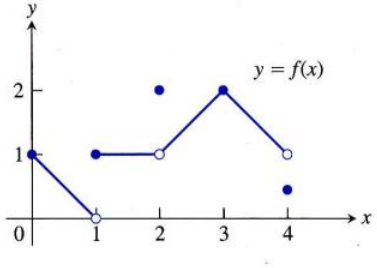
$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = 0 \text{ és } \lim_{x\to 2^-} f(x) = 0.$$

A függvénynek a -2 helyen nincs bal oldali, a 2 helyen pedig nincs jobb oldali határértéke; ezekben a pontokban a szokásos értelemben vett (kétoldali) határérték sem létezik. □

A 2.2 alfejezet 1. Tételében felsorolt kellemes tulajdonságokkal a jobb, illetve bal oldali határértékek is rendelkeznek, így tehát két függvény összegének jobb oldali határértéke valamely pontban az adott pontbeli jobb oldali határértékek összege stb. A polinomfüggvényekre és a racionális törtfüggvényekre kimondott tételek szintén érvényben maradnak, csakúgy, mint a szendvicstétel és az 5. Tétel. A jobb, illetve bal oldali, valamint a kétoldali határérték kapcsolatát tisztázza a következő tétel.

6. TÉTEL
Az f függvénynek pontosan akkor létezik a c helyen vett határértéke, ha ugyanitt létezik mind a jobb, mind a bal oldali határértéke, és ezek egyenlőek:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to c^+} f(x) = L \text{ és } \lim_{x\to c^-} f(x) = L.$$



2.24. ÁBRA: A 2. Példában szereplő függvény grafikonja.

2. PÉLDA **A 2.24. ábrán látható függvény határértékei.**

$x = 0$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$
A $\lim_{x\to 0^-} f(x) =$ és $\lim_{x\to 0} f(x) =$ határértékek nem léteznek. A függvény a 0-tól balra eső x-ekre nem értelmezett.

$x = 1$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$, holott $f(1) = 1$.
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$,
A $\lim_{x\to 1} f(x)$ nem létezik, mivel az 1 helyen a jobb és a bal oldali határérték nem egyenlő.

$x = 2$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$
$\lim_{x\to 2} f(x) = 1$, bár $f(2) = 2$.

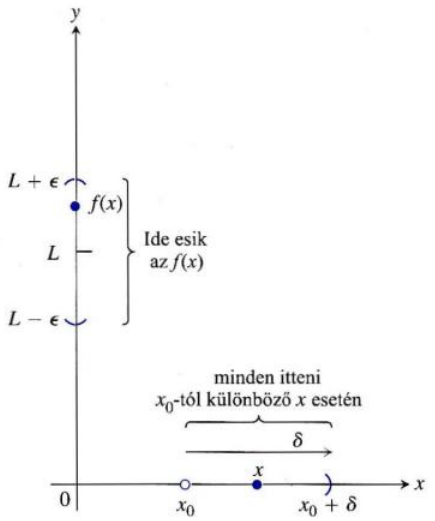
$x = 3$ $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 2$

$x = 4$ $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$, holott $f(4) \neq 1$
A $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ és a $\lim_{x\to 4} f(x)$ határértékek nem léteznek, mivel a 4-től jobbra eső számokra az f függvényt nem értelmeztük.

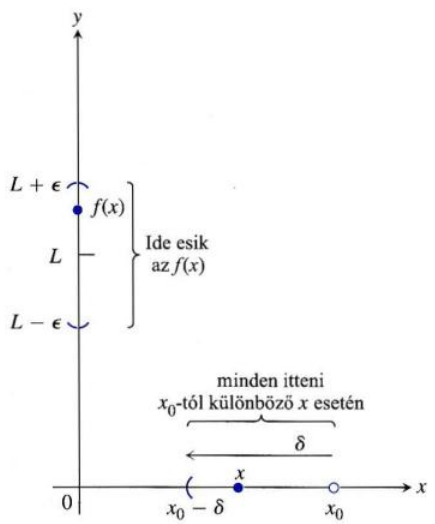
A $[0,4]$ intervallum összes többi c pontjában $f(x)$ (valamennyi) határértéke $f(c)$.

A jobb, illetve bal oldali határérték precíz definíciója

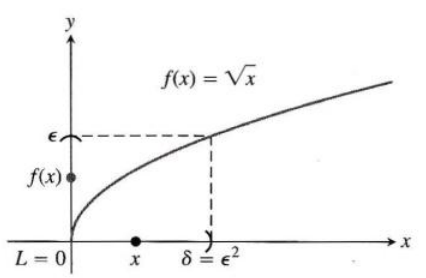
Az előző alfejezetben megadott pontos határérték-definíciók mintájára a jobb, illetve bal oldali határérték precíz meghatározását is megadhatjuk.



2.25. ÁBRA: A jobb oldali határérték definíciójában szereplő intervallumok.



2.26. ÁBRA: A bal oldali határérték definíciójában szereplő intervallumok.



2.27. ÁBRA: 3. példa: $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

DEFINÍCIÓK Jobb és bal oldali határérték

Azt mondjuk, hogy az f függvény jobb oldali határértéke az x_0 helyen az L szám – jelölése: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ –, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Azt mondjuk, hogy az f függvény bal oldali határértéke az x_0 helyen az L szám – jelölés: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ –, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Lásd a 2.25. és a 2.26. ábrát.

3. PÉLDA **A definíció alkalmazása.**

Igazoljuk, hogy

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

Megoldás. Legyen $\varepsilon > 0$. Esetünkben $x_0 = L = 0$, olyan δ-t kell tehát találnunk, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$0 < x < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon,$$

azaz

$$0 < x < \delta \Rightarrow \sqrt{x} < \varepsilon.$$

Az utolsó egyenlőséget négyzetre emelve a következő ekvivalens feltételt kapjuk:

$$x < \varepsilon^2, \text{ amennyiben } 0 < x < \delta.$$

A $\delta = \varepsilon^2$ választással

$$0 < x < \delta = \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{x} < \varepsilon,$$

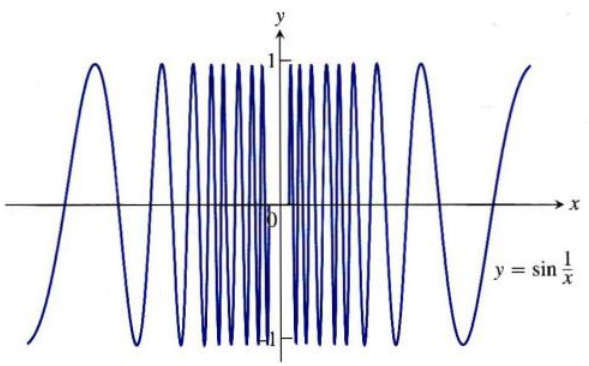
vagy másképpen:

$$0 < x < \varepsilon^2 \Rightarrow |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon,$$

beláttuk tehát, hogy $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$. □

4. PÉLDA

Igazoljuk, hogy az $f(x) = \sin(1/x)$ függvénynek a 0 helyen sem a jobb, sem a bal oldali határértéke nem létezik (2.28. ábra).

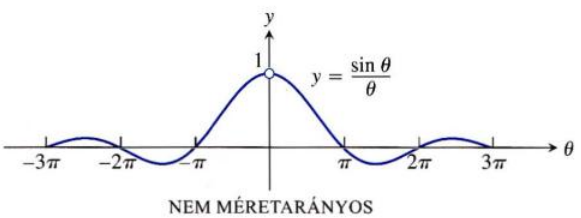


2.28. ÁBRA: Az $f(x) = \sin(1/x)$ függvénynek a 0 helyen sem a jobb, sem a bal odali határértéke nem létezik

Megoldás. Miközben x jobbról (balról) a 0-hoz közelít, $1/x$ minden határon túl nő (csökken), a $\sin(1/x)$ értékek pedig újra és újra befutják a -1 és 1 közötti számokat. Nem létezik tehát egyetlen olyan L szám, amelyhez a függvényértékek tartanának, amint x egyre közelebb kerül 0-hoz. Ez akkor is igaz marad, ha vizsgálódásunkat a pozitív (vagy a negatív) x-ekre korlátozzuk. A függvénynek a 0 helyen sem jobb, sem bal oldali határértéke nem létezik. □

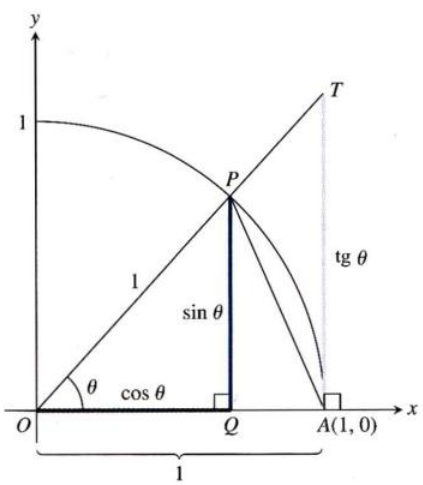
A $(\sin\theta)/\theta$ függvény határértéke

A $(\sin\theta)/\theta$ függvény alapvető jellemzője, hogy – amennyiben θ-t radiánban adjuk meg – határértéke a 0 helyen 1. Az állítást a 2.29. ábra illusztrálja, bizonyítása pedig a szendvicstétel könnyű alkalmazása.



NEM MÉRETARÁNYOS

2.29. ÁBRA: Az $f(\theta) = (\sin\theta)/\theta$ függvény grafikonja.



2.30. ÁBRA: A 7. Tétel bizonyításához. Az ábra alapján $TA/OA = \mathrm{tg}\,\theta$, mivel azonban $OA = 1$, azt kapjuk, hogy $TA = \mathrm{tg}\,\theta$.

7. TÉTEL

Ha a θ szöget radiánban adjuk meg, akkor

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1. \qquad (1)$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb és a bal oldali határérték egyaránt 1, ebből már következik, hogy a kétoldali határérték is 1.

Először azt bizonyítjuk, hogy a jobb oldali határérték 1; tekintsük ehhez a pozitív, mindazonáltal $\pi/2$-nél kisebb θ értékeket l. a 2.30. ábrát). Vegyük észre, hogy

az $OAP\,\triangle$ területe $<$ az OAP körcikk területe $<$ az $OAT\,\triangle$ területe.

Az iménti területeket a következőképpen adhatjuk meg:

$$\begin{aligned} T_{OAP\triangle} &= \frac{1}{2}\cdot \text{alap}\cdot\text{magasság} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin\theta = \frac{1}{2}\sin\theta,\\ T_{OAP\,\text{körcikk}} &= \frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\theta = \frac{1}{2}\cdot(1)^2\cdot\theta = \frac{\theta}{2},\\ T_{OAT\triangle} &= \frac{1}{2}\cdot \text{alap}\cdot\text{magasság} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\mathrm{tg}\,\theta = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\theta. \end{aligned} \qquad (2)$$

A kapott kifejezéseket az előbbi egyenlőtlenségbe behelyettesítve:

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\theta.$$

Ha mindhárom kifejezést elosztjuk $\frac{1}{2}\sin\theta$-val, akkor egyik egyenlőtlenség sem változik meg, hiszen $0 < \theta < \pi/2$ miatt $\sin\theta > 0$:

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}.$$

A reciprokokat véve az egyenlőtlenségek iránya megfordul:

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \frac{\cos\theta}{1}.$$

A (2) egyenlőségben kihasználtuk, hogy θ-t radiánban adtuk meg. (Az OAP körcikk területe nyilván csak akkor egyenlő $\theta/2$-vel, ha θ-t radiánban adjuk meg.)

Mivel $\lim_{\theta \to 0^+} \cos\theta = 1$ (l. a 6. példa (b) részét), a szendvicstétel alapján azt kapjuk, hogy

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

Idézzük most emlékezetünkbe, hogy $\sin\theta$ és θ egyaránt páratlan függvények, $f(x) = (\sin\theta)/\theta$ ennélfogva páros függvény, grafikonja tehát szimmetrikus az y-tengelyre (l. a 2.29. ábrát). A szimmetria miatt a 0 helyen nem csak a jobb, de a bal oldali határérték is létezik, és a kettő egyenlő:

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0^-} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1,$$

ez pedig a 6. Tétel szerint már elég $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ fennállásához. □

5. PÉLDA **A $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ határérték alkalmazásai.**

Bizonyítsuk be, hogy (a) $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$, és hogy (b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$.

Megoldás.

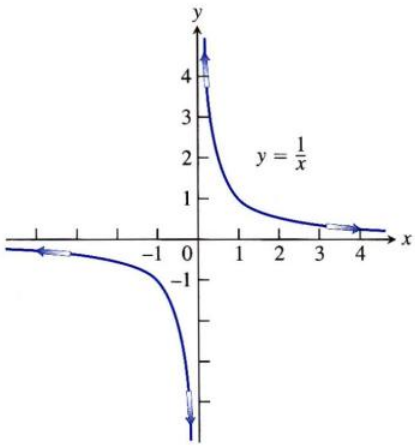
(a) A $\cos h = 1 - 2\sin^2(h/2)$ félszögképletet alkalmazzuk:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{2\sin^2(h/2)}{h} = \qquad \text{legyen } \theta = h/2$$
$$= -\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \sin\theta =$$
$$= -(1)(0) = 0.$$

(b) Az (1) összefüggés a szóban forgó törtre nem alkalmazható minden további nélkül, hiszen a nevezőben $2x$-nek kellene szerepelni, nem pedig $5x$-nek. Ha azonban mind a számlálót, mind a nevezőt megszorozzuk $2/5$-del, akkor a helyzet megváltozik:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \lim_{x \to 0} \frac{(2/5) \cdot \sin 2x}{(2/5) \cdot 5x}$$
$$= \frac{2}{5} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \qquad \text{már alkalmazható (1), } \theta = 2x$$
$$= \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}.$$

□



2.31. ÁBRA: Az $f(x) = 1/x$ függvény grafikonja.

Véges határérték a végtelenben

A ∞ szimbólum egyetlen valós számot sem jelöl; olyankor használjuk, amikor azt akarjuk leírni, miként viselkedik egy függvény, miközben x minden határon túl nő. Az $f(x) = 1/x$ függvény például minden 0-tól különböző számra értelmezve van (l. a 2.31. ábrát). Ahogy x nő, $1/x$ egyre kisebb lesz; amikor x egyre kisebb (egyre nagyobb abszolút értékű) negatív értékeket vesz fel, $1/x$ abszolút értéke szintén egyre kisebbé válik. Mindezeket úgy foglalhatjuk össze, hogy az $f(x) = 1/x$ függvény határértéke, amint $x \to \pm\infty$, 0-val egyenlő. Az ilyen határértékeket a végtelenben, illetve a negatív végtelenben vett határértéknek nevezzük. A pontos meghatározások a következők:

DEFINÍCIÓK **Határérték a végtelenben**

1. Azt mondjuk, hogy az f függvény **határértéke a végtelenben** L – jelölése $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ –, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan M, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

2. Azt mondjuk, hogy az f függvény **határértéke a negatív („mínusz") végtelenben** L – jelölése $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ –, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan N, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Szemléletesen $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ azt mondja, hogy amint x értékei egyre nagyobb pozitív számok, az $f(x)$ függvényértékek egyre közelebb kerülnek L-hez. Hasonlóan: ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, akkor az $f(x)$ függvényértékek szintén L-hez közelítenek, amint x értékei negatív irányban egyre inkább eltávolodnak az origótól.

Az $x \to \pm\infty$ esetekben a határértékek kiszámításakor is a 2.2. alfejezetben leírt stratégiát követjük. Akkor a konstans- és identikus függvényekből indultunk ki, majd kiterjesztettük az eredményeket jó néhány további függvénytípusra, például a racionális törtfüggvényekre. A végtelenben vett határértékek esetében is így járunk el, a különbség csupán annyi, hogy nem az $y = k$ és $y = x$ függvényekből, hanem az $y = 1/x$ és az $y = k$ függvényekből indulunk ki.

Alapvető a következő két tény:

$$\lim_{x\to\pm\infty} k = k \quad \text{és} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Az utóbbit rögvest bebizonyítjuk, az előbbi igazolását a 71. és a 72. feladatban az Olvasóra bízzuk.

6. PÉLDA **Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény végtelenben vett határértékei.**

Igazoljuk, hogy (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, és hogy (b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Megoldás.

(a) Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. Találnunk kell egy olyan M-et, amelyre teljesül, hogy minden x-re

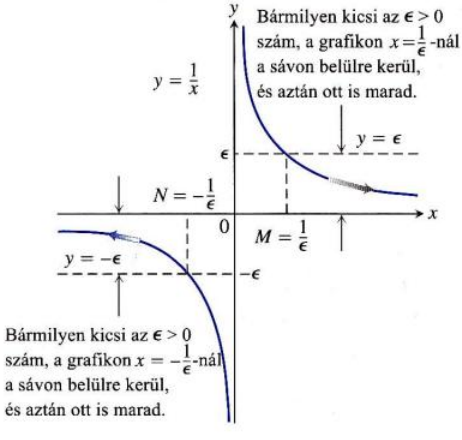
$$x > M \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon.$$

Az implikáció teljesül például az $M = 1/\varepsilon$, vagy annál nagyobb pozitív szám választásával (l. a 2.32. ábrát). Ez pedig azt bizonyítja, hogy $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

(b) Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. Találnunk kell egy olyan N számot, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$x < N \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon.$$

Az implikáció teljesül például az $N = -1/\varepsilon$, vagy bármely $-1/\varepsilon$-nál kisebb negatív szám választásával (l. a 2.32. ábrát). Ez pedig azt bizonyítja, hogy $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$. □



2.32. ÁBRA: A 6. példa érve mögötti geometria.

A végtelenben vett határértékekre a végesbeliekhez hasonló tételek érvényesek.

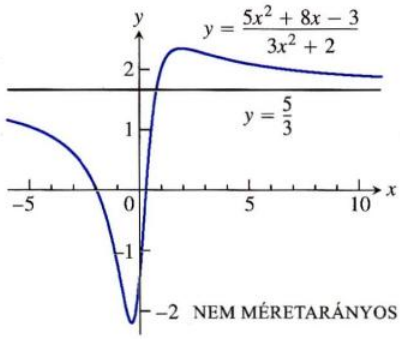
8. TÉTEL **Az $x \to \pm\infty$ esetre érvényes szabályok.**

Legyenek L, M és k valós számok; ha

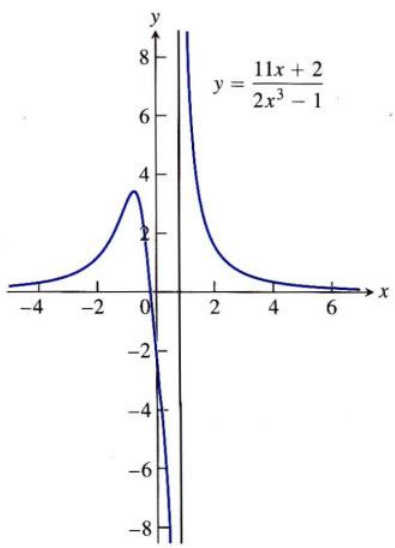
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \text{ és } \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M,$$

akkor teljesülnek az alábbiak:

1. ÖSSZEG: $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) + g(x)) = L + M.$
2. KÜLÖNBSÉG: $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - g(x)) = L - M.$
3. SZORZAT: $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M.$
4. KONSTANSSAL VALÓ SZORZÁS: $\lim_{x\to\pm\infty} (k \cdot f(x)) = k \cdot L.$
5. HÁNYADOS: $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (amennyiben $M \neq 0$).
6. RACIONÁLIS KITEVŐJŰ HATVÁNYOZÁS: Amennyiben r és s relatív prím egész számok, továbbá $s \neq 0$, úgy $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$, feltéve, hogy $L^{r/s}$ valós szám (ha s páros, akkor fel kell tennünk, hogy $L > 0$).



2.33. ÁBRA: A 8. példában szereplő függvény grafikonja. Amint $|x|$ egyre nagyobb, a grafikon egyre inkább megközelíti az $y = 5/3$ egyenletű egyenest.



2.34. ÁBRA: A 9. példában szereplő függvény grafikonja. Amint $|x|$ egyre nagyobb, a grafikon egyre inkább megközelíti az x-tengelyt.

A fenti jellemzők a 2.2. alfejezetbeli 1. Tétel megfelelői; alkalmazásukban sincs sok különbség.

7. PÉLDA **A 8. Tétel alkalmazása.**

(a) $\lim_{x\to\infty} \left(5 + \dfrac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 5 + 0 = 5$

Előbb az összegre vonatkozó szabályt alkalmaztuk, majd a már ismert határértéket használtuk fel.

(b) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\pi\sqrt{3}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} \cdot \lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \pi\sqrt{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0$

A szorzatra vonatkozó szabályt, aztán újra a már ismert határértéket alkalmaztuk.

Racionális törtfüggvények végtelenben vett határértéke

Ha egy racionális függvény viselkedésére vagyunk kíváncsiak, amint $x \to \pm\infty$, a számlálót és a nevezőt is el kell osztanunk a nevezőben szereplő legmagasabb kitevőjű x-hatvánnyal. A határérték a számlálóban és a nevezőben szereplő polinomok fokszámától függ.

8. PÉLDA **A számláló- és a nevezőbeli polinom azonos fokszámú.**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 + (8/x) - (3/x^2)}{3 + (2/x^2)} =$$

a számlálót és a nevezőt is elosztottuk x^2-tel

$$= \frac{5 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{5}{3}$$

L. a 2.33. ábrát.

9. PÉLDA **A számlálóbeli polinom alacsonyabb fokszámú.**

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{11x + 2}{2x^3 - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(11/x^2) + (2/x^3)}{2 - (1/x^3)} =$$

a számlálót és a nevezőt is elosztottuk x^3-nel

$$= \frac{0 + 0}{2 - 0} = 0$$

L. a 2.34. ábrát.

A következő alfejezet 8. példájában olyan racionális törtfüggvényt vizsgálunk, amelynek számlálójában magasabb fokú polinom szerepel, mint a nevezőjében.

Vízszintes aszimptoták

Amennyiben egy függvény grafikonjának egy adott egyenestől való távolsága az origótól távolodva a 0-hoz tart, akkor a szóban forgó egyenest a grafikon *aszimptotájának* nevezzük.

Az $f(x) = 1/x$ függvény grafikonjának például az x-tengely az aszimptotája; jobb felé azért, mert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

bal felé pedig azért, mert

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Az x-tengelyt az $f(x) = 1/x$ függvény *vízszintes aszimptotájának* nevezzük.

DEFINÍCIÓ **Vízszintes aszimptota.**

Az $y = b$ egyenletű egyenest az $y = f(x)$ függvénygrafikon vízszintes aszimptotájának nevezzük, ha

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \text{ vagy } \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

A 8. példában szereplő

$$f(x) = \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}$$

függvény 2.33. ábrán tanulmányozható grafikonjának az $y = 5/3$ egyenletű egyenes jobbról és balról is aszimptotája, mivel

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{5}{3} \text{ és } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{5}{3}.$$

10. PÉLDA **Új változó bevezetése.**

Számítsuk ki a $\lim_{x\to\infty} \sin(1/x)$ határértéket.

Megoldás. Új változót vezetünk be: legyen $t = 1/x$. A 6. példából tudjuk, hogy $x \to \infty$ esetén $t \to 0^+$ (l. a 2.31. ábrát). Így aztán:

$$\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^+} \sin t = 0.$$

□

Még egyszer a szendvicstételről

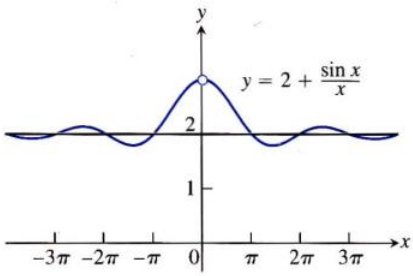
A szendvicstétel érvényben marad a végtelenben vett határértékekre is.

11. PÉLDA **Görbe, amelyik metszi saját vízszintes aszimptotáját.**

A szendvicstétel alkalmazásával keressük meg az

$$y = 2 + \frac{\sin x}{x}$$

egyenletű görbe vízszintes aszimptotáját.



2.35. ÁBRA: Olyan görbe is van, amelyik metszi saját vízszintes aszimptotáját (11. példa).

Megoldás. Arra vagyunk kíváncsiak, merre tart a görbe, amikor $x \to \pm\infty$. Mivel

$$0 \le \left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \left|\frac{1}{x}\right|,$$

ezen felül pedig $\lim_{x\to\pm\infty} |1/x| = 0$, így a szendvicstétel alapján azt kapjuk, hogy $\lim_{x\to\pm\infty} (\sin x)/x = 0$. Ennek alapján

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(2 + \frac{\sin x}{x}\right) = 2 + 0 = 2,$$

az $y = 2$ egyenletű egyenes tehát a görbének mindkét irányban vízszintes aszimptotája, l. a 2.35. ábrát. □

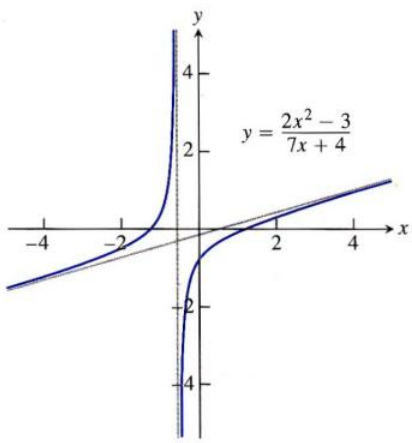
A példa azt illusztrálja, hogy egy függvény – akár többször is – metszheti a vízszintes aszimptotáját.

Ferde aszimptoták

Ha egy racionális törtfüggvény számlálójában eggyel magasabb fokú polinom szerepel, mint a nevezőben, akkor a függvény grafikonjának **ferde aszimptotája** van. Az aszimptota egyenletét úgy kapjuk meg, hogy a számlálót elosztjuk a nevezővel és a függvényt egy lineáris, valamint egy a végtelenben 0-hoz tartó függvény összegeként írjuk fel. Lássunk egy példát.

12. PÉLDA **Ferde aszimptota meghatározása.**

Adjuk meg az $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{7x+4}$ függvény – a 2.36. ábrán tanulmányozható – grafikonjának ferde aszimptotáját.



2.36. ÁBRA: A 12. példában szereplő függvény grafikonjának ferde aszimptotája.

Megoldás. Kissé hosszadalmas osztás után a következőt kapjuk:

$$f(x) = \frac{2x^2-3}{7x+4} = \underbrace{\left(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49}\right)}_{g \text{ lineáris függvény}} + \underbrace{\frac{-115}{49(7x+4)}}_{\text{a maradék}}.$$

Miközben $x \to \pm\infty$, az f és g grafikonja közötti vertikális távolságot megadó maradéktag nullához tart, a

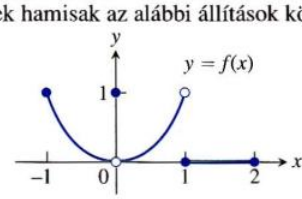
$$g(x) = \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}$$

lineáris függvény grafikonja tehát valóban f grafikonjának (ferde) aszimptotája. A következő alfejezetben látni fogjuk, hogy az $f(x)$ függvényértékek abszolútértéke minden határon túl nő, amint $x \to -4/7$, mivel ilyenkor a nevező 0-hoz tart (l. a 2.36. ábrát). □

2.4. Feladatok

A határértérték a függvénygrafikon alapján

1. Az ábrán egy $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. Melyek igazak és melyek hamisak az alábbi állítások közül?



(a) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$

(b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

(c) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

(d) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

(e) $\lim_{x\to 0} f(x)$ létezik

(f) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

(g) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

(h) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

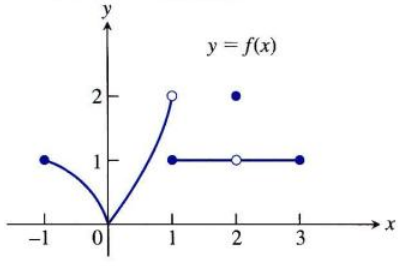
(i) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

(j) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$

(k) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ nem létezik

(l) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$

2. Melyek igazak és melyek hamisak az ábrán látható $y = f(x)$ függvényre vonatkozó állítások közül?



(a) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$

(b) $\lim_{x\to 2} f(x)$ nem létezik

(c) $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

(d) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$

(e) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

(f) $\lim_{x\to 1} f(x)$ nem létezik

(g) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

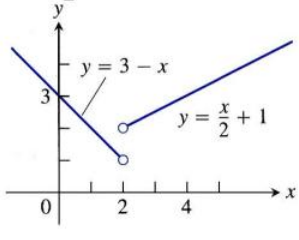
(h) $\lim_{x\to c} f(x)$ a $(-1,1)$ intervallum minden c eleme esetén létezik

(i) $\lim_{x\to c} f(x)$ az $(1,3)$ intervallum minden c eleme esetén létezik

(j) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0$

(k) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ nem létezik

3. Legyen $f(x) = \begin{cases} 3-x, & x < 2 \\ \frac{x}{2}+1, & x > 2 \end{cases}$.



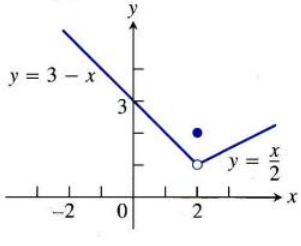
(a) Mennyi $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ és $\lim_{x\to 2^-} f(x)$?

(b) Létezik-e $\lim_{x\to 2} f(x)$? Ha igen, mennyi? Ha nem, miért nem?

(c) Mennyi $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ és $\lim_{x\to 4^+} f(x)$?

(d) Létezik-e $\lim_{x\to 4} f(x)$? Ha igen, mennyi? Ha nem, miért nem?

4. Legyen $f(x) = \begin{cases} 3-x, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ \frac{x}{2}, & x > 2 \end{cases}$.



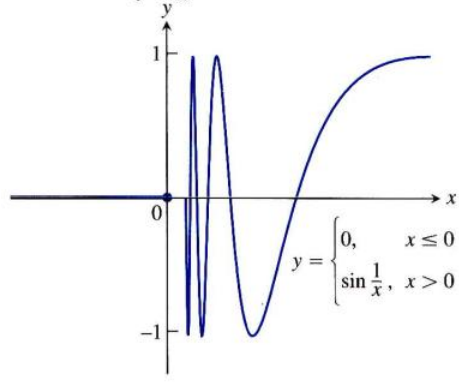
(a) Mennyi $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ és $f(2)$?

(b) Létezik-e $\lim_{x\to 2} f(x)$? Ha igen, mennyi? Ha nem, miért nem?

(c) Mennyi $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ és $\lim_{x\to 1^+} f(x)$?

(d) Létezik-e $\lim_{x\to -1} f(x)$? Ha igen, mennyi? Ha nem, miért nem?

5. Legyen $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sin\frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$.

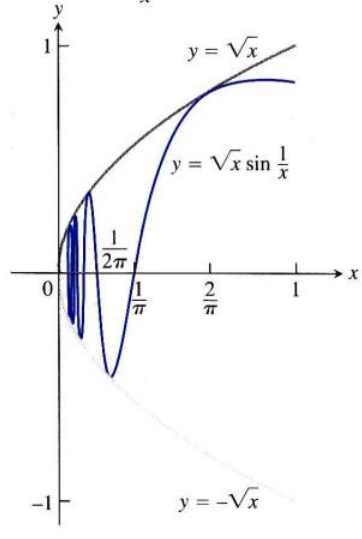


(a) Létezik-e $\lim_{x\to 0^+} f(x)$? Ha igen, mennyi? Ha nem, miért nem?

(b) Létezik-e $\lim_{x\to 0^-} f(x)$? Ha igen, mennyi? Ha nem, miért nem?

(c) Létezik-e $\lim_{x\to 0} f(x)$? Ha igen, mennyi? Ha nem, miért nem?

6. Legyen $g(x) = \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$.



(a) Létezik-e $\lim_{x\to 0^+} g(x)$? Ha igen, mennyi? Ha nem, miért nem?

(b) Létezik-e $\lim_{x\to 0^-} g(x)$? Ha igen, mennyi? Ha nem, miért nem?

(c) Létezik-e $\lim_{x\to 0} g(x)$? Ha igen, mennyi? Ha nem, miért nem?

7. **(a)** Ábrázoljuk az $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ függvény grafikonját.

(b) Mennyi $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ és $\lim_{x\to 1^+} f(x)$?

(c) Létezik-e $\lim_{x\to 1} f(x)$? Ha igen, mennyi? Ha nem, miért nem?

8. **(a)** Ábrázoljuk az $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ függvény grafikonját.

(b) Mennyi $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ és $\lim_{x\to 1^-} f(x)$?

(c) Létezik-e $\lim_{x\to 1} f(x)$? Ha igen, mennyi? Ha nem, miért nem?

A 9. és a 10. feladatban először ábrázoljuk a megadott f függvény grafikonját, aztán válaszoljunk az alábbi kérdésekre.

(a) Mi az f függvény értelmezési tartománya és értékkészlete?

(b) Vannak-e olyan c pontok, amelyekben létezik a $\lim_{x\to c} f(x)$ határérték? Ha igen, melyek azok?

(c) Mely pontokban létezik az f függvénynek bal oldali határértéke?

(d) Mely pontokban létezik az f függvénynek jobb oldali határértéke?

9. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0 \text{ vagy } 0 < x \le 1 \\ 1, & x = 0 \\ 0 & x < -1 \text{ vagy } x > 1 \end{cases}$

Határértékek kiszámítása algebrai úton

Számítsuk ki a határértékeket (11–18. feladatok).

11. $\lim_{x\to -0{,}5^-} \sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}$

12. $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

13. $\lim_{x\to -2^+} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)\left(\dfrac{2x+5}{x^2+x}\right)$

14. $\lim_{x\to 1^-} \left(\dfrac{1}{x+1}\right)\left(\dfrac{x+6}{x}\right)\left(\dfrac{3-x}{7}\right)$

15. $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$

16. $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{5h^2+11h+6}}{h}$

17. **(a)** $\lim_{x\to -2^+} (x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$ **(b)** $\lim_{x\to -2^-} (x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$

18. **(a)** $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$ **(b)** $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$

Idézzük emlékezetünkbe az $y = \lfloor x \rfloor$ alsó egészrészfüggvény grafikonját (1.3. alfejezet, 1.31. ábra); ez hasznunkra lehet a 19. és a 20. feladatbeli határértékek kiszámításában.

19. **(a)** $\lim_{\theta\to 3^+} \dfrac{\lfloor\theta\rfloor}{\theta}$ **(b)** $\lim_{\theta\to 3^-} \dfrac{\lfloor\theta\rfloor}{\theta}$

20. **(a)** $\lim_{t\to 4^+} (t - \lfloor t \rfloor)$ **(b)** $\lim_{t\to 4^-} (t - \lfloor t \rfloor)$

A $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$ összefüggés alkalmazása

Számítsuk ki a következő határértékeket (21–36. feladatok). [Emlékeztetünk arra, hogy a 27. és a 28. feladatban szereplő koszekánsfüggvény definíciója: $\csc x = 1/\sin x$.]

21. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\sqrt{2\theta}}{\sqrt{2\theta}}$

22. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin kt}{t}$, ahol k állandó

23. $\lim_{y\to 0} \dfrac{\sin 3y}{4y}$

24. $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{h}{\sin 3h}$

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$

26. $\lim_{t\to 0} \dfrac{2t}{\operatorname{tg} t}$

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\csc 2x}{\cos 5x}$

28. $\lim_{x\to 0} 6x^2(\operatorname{ctg} x)(\csc 2x)$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x+x\cos x}{\sin x\cos x}$

30. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-x+\sin x}{2x}$

31. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin(1-\cos t)}{1-\cos t}$

32. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(\sin h)}{\sin h}$

33. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\sin 2\theta}$

34. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$

35. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 8x}$

36. $\lim_{y\to 0} \dfrac{\sin 3y \operatorname{ctg} 5y}{y \operatorname{ctg} 4y}$

Végtelenben vett határértékek kiszámítása

A 37–42. feladatokban számítsuk ki a megadott függvények határértékét, amint **(a)** $x \to \infty$ és **(b)** amint $x \to -\infty$. (A megoldásban segítségünkre lehet, ha a függvények grafikonját (esetleg számítógép segítségével) ábrázoljuk.

37. $f(x) = \dfrac{2}{x} - 3$

38. $f(x) = \pi - \dfrac{2}{x^2}$

39. $g(x) = \dfrac{1}{2+(1/x)}$

40. $g(x) = \dfrac{1}{8-(5/x^2)}$

41. $h(x) = \dfrac{-5+(7/x)}{3-(1/x^2)}$

42. $h(x) = \dfrac{3-(2/x)}{4+(\sqrt{2}/x^2)}$

Adjuk meg a határértékeket (43–46. feladatok).

43. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin 2x}{x}$

44. $\lim_{\theta\to -\infty} \dfrac{\cos\theta}{3\theta}$

45. $\lim_{t\to -\infty} \dfrac{2-t+\sin t}{t+\cos t}$

46. $\lim_{r\to\infty} \dfrac{r+\sin r}{2r+7-5\sin r}$

Racionális törtfüggvények határértékei a végtelenben

A 37–42. feladatokban határozzuk meg, hova tartanak a megadott függvények, amint **(a)** $x \to \infty$ és **(b)** amint $x \to -\infty$.

47. $f(x) = \dfrac{2x+3}{5x+7}$

48. $f(x) = \dfrac{2x^3+7}{x^3-x^2+x+7}$

49. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$

50. $f(x) = \dfrac{3x+7}{x^2-2}$

51. $h(x) = \dfrac{7x^3}{x^3-3x^2+6x}$

52. $g(x) = \dfrac{1}{x^3-4x+1}$

53. $g(x) = \dfrac{10x^5+x^4+31}{x^6}$

54. $h(x) = \dfrac{9x^4+x}{2x^4+5x^2-x+6}$

55. $h(x) = \dfrac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}$

56. $h(x) = \dfrac{-x^4}{x^4-7x^3+37x^2+9}$

Negatív és racionális kitevőjű hatványfüggvények határértéke

A racionális törtfüggvények határértékének kiszámítására megtanult módszerek azon függvények határértékének kiszámítására is alkalmazhatók, amelyeknek hozzárendelési szabályában negatív, illetve törtkitevőjű hatványkifejezések fordulnak elő. A teendőnk ilyenkor is a következő: osszuk el a számlálót és a nevezőt az x változó nevezőben szereplő legmagasabb kitevőjű hatványával. Számítsuk ki ezzel a módszerrel a következő határértékeket (57–62. feladatok).

57. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\sqrt{x}+x^{-1}}{3x-7}$

58. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$

59. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}$

60. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{-1}+x^{-4}}{x^{-2}-x^{-3}}$

61. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^{5/3}-x^{1/3}+7}{x^{8/5}+3x+\sqrt{x}}$

62. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}-5x+3}{2x+x^{2/3}-4}$

További példák és feladatok

63. Legyen a az f függvény értelmezési tartományának egy belső pontja. Abból, hogy ismerjük $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ értékét, vajon következik-e, hogy $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ értékét is ismerjük? Indokoljuk válaszunkat.

64. Ha tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ létezik, meghatározhatjuk-e az értékét úgy, hogy kiszámoljuk, mennyi $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$? Indokoljuk válaszunkat.

65. Legyen f páratlan függvény. Mondhatunk-e valamit $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ bal oldali határértékről, ha tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -3$?

66. Legyen f páros függvény. Mondhatunk-e valamit $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$, illetve a $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ határértékről, ha tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 7$?

67. Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ olyan polinomfüggvények, amelyekre teljesül, hogy $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)/g(x)) = 2$. Levonhatunk-e ebből bármiféle következtetést a $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)/g(x))$ határértékre vonatkozóan? Indokoljuk válaszunkat.

68. Legyen f és g az x változó polinomfüggvénye. Lehet-e az $f(x)/g(x)$ függvény grafikonjának aszimptotája, ha a $g(x)$ függvényérték sohasem 0? Válaszunkat indokoljuk.

69. Hány vízszintes aszimptotája lehet egy racionális törtfüggvény grafikonjának? Indokoljuk válaszunkat.

70. Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right) = 2$.

A végtelenben vett határérték definíciója alapján igazoljuk a következőket (71–72. feladatok).

71. Ha f konstans függvény és minden x-re $f(x) = k$, akkor $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = k$.

72. Ha f konstans függvény és minden x-re $f(x) = k$, akkor $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = k$.

A bal és jobb oldali határérték definíciója

73. Legyen ε pozitív szám. Adjunk meg egy $I = (5,\ 5+\delta)$ intervallumot (ahol $\delta > 0$), amelynek minden x elemére teljesül a $\sqrt{x-5} < \varepsilon$ egyenlőtlenség. Mely határérték létezését bizonyítottuk ezzel?

74. Legyen ε pozitív szám. Adjunk meg egy $I = (4-\delta, 4)$ intervallumot (ahol $\delta > 0$), amelynek minden x elemére teljesül a $\sqrt{4-x} < \varepsilon$ egyenlőtlenség. Mely határérték létezését bizonyítottuk ezzel?

A bal és jobb oldali határérték definíciója alapján igazoljuk a következőket (75–76. feladatok).

75. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1$

76. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-2}{|x-2|} = 1$

77. Az alsó egészrészfüggvény Mennyi **(a)** $\lim\limits_{x\to 400^+} \lfloor x \rfloor$ és **(b)** $\lim\limits_{x\to 400^-} \lfloor x \rfloor$? Ellenőrizzük válaszunkat a bal, illetve jobb oldali határérték definíciója alapján. **(c)** Válaszaink alapján mit állathatunk (már ha egyáltalán állíthatunk valamit) a $\lim\limits_{x\to 400} \lfloor x \rfloor$ határértékről?

78. Bal és jobb oldali határértékek Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Mennyi **(a)** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ és **(b)** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$? (c) Válaszaink alapján mit állathatunk (már ha egyáltalán állíthatunk valamit) a $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ határértékről?

Számítógépes grafikai „kísérletek”

Gyakran előfordul, hogy egy kifejezés határértékét alkalmas helyettesítéssel már ismert határértékekre vezethetjük vissza. Például a

$$\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = \lim_{\theta\to 0^+} \sin\theta = 0,$$

határérték kiszámításakor a $\theta = 1/x$ helyettesítést alkalmaztuk. A példa a határértékek „kreatív” megjelenítésének egy módszerét sugallja. Írjuk le a módszert, majd használjuk a 79–84. feladatokban szereplő határértékek meghatározására.

79. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

80. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cos(1/x)}{1+(1/x)}$

81. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x+4}{2x-5}$

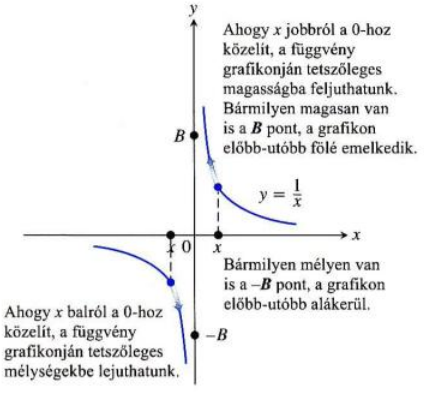
82. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{1/x}$

83. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(3+\dfrac{2}{x}\right)\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$

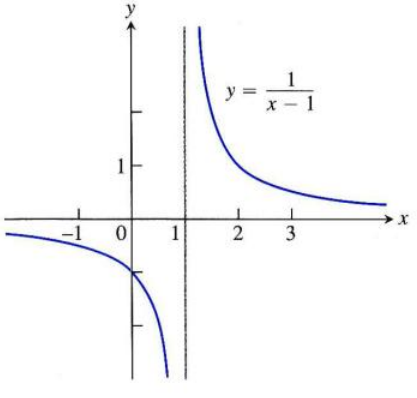
84. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3}{x^2}-\cos\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\sin\dfrac{1}{x}\right)$

2.5. Végtelen határértékek és függőleges aszimptoták

Ebben a fejezetben újfajta határértékfogalmat vezetünk be. A *végtelen határértékek* nem hagyományos értelemben vett határértékek, inkább a határértékfogalom kiterjesztésének tekinthetők. A végtelen határértékek kiválóan alkalmasak arra, hogy leírjuk, miként viselkedik egy függvény, amely bármilyen nagy pozitív vagy bármilyen kicsi negatív értéket felvehet. Az előző alfejezet végén szó volt a függvénygrafikonok vízszintes aszimptotáiról, ebben az alfejezetben ehhez kapcsolódva értelmezzük a *függőleges aszimptota* és a *domináns tag* fogalmát.



2.37. ÁBRA: Jobb, illetve bal oldali végtelen határértékek: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ és $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.



2.38. ÁBRA: Az $x = 1$ hely közelében az $y = 1/(x-1)$ függvény pontosan úgy viselkedik, ahogy az $y = 1/x$ függény a 0 környékén. Valóban, az utóbbi függvény grafikonját 1 egységgel jobbra eltolva az előbbiét kapjuk (1. példa).

Végtelen határértékek

Kezdjük a vizsgálódást az $f(x) = 1/x$ függvénnyel (l. a 2.37. ábrát). Miközben $x \to 0^+$, az $f(x)$ függvényértékek minden határon túl nőnek, azaz bármilyen nagy is egy B pozitív szám, f értékei elérik és meghaladják. Eszerint nem létezik a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ jobb oldali határérték. Mégis célszerűnek tűnik, ha ilyenkor azt mondjuk: amint $x \to 0^+$, az f függvény végtelenhez (∞) tart, szimbolikusan:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Amikor ilyen jelölést használunk, akkor nem azt mondjuk, hogy létezik a szóban forgó jobb oldali határérték. Még kevésbé állítjuk, hogy ∞ valós szám lenne, hiszen nem az. Egyszerűen a következőről van szó: *a* $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ *határérték nem létezik, mert* $1/x$ *tetszőleges nagy értéket felvehet, amint* $x \to 0^+$.

Amikor $x \to 0^-$, az $f(x) = 1/x$ függvény értékei „minden határon túl csökkennek", azaz tetszőleges negatív $-B$ szám esetén van olyan x, amelyre teljesül, hogy az $f(x)$ függvényérték kisebb, mint $-B$; l. a 2.37. ábrát. Ebben az esetben a

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

jelölést használjuk. Természetesen ilyenkor sem azt állítjuk, hogy létezik az f függvény 0 helyen vett bal oldali határértéke, ahogy azt sem, hogy $-\infty$ valós szám. Csupán annyit, hogy *a* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ *határérték nem létezik, mert* $1/x$ *tetszőleges kicsi (negatív) értéket felvehet, amint* $x \to 0^-$.

1. PÉLDA **Jobb és bal oldali végtelen határértékek.**

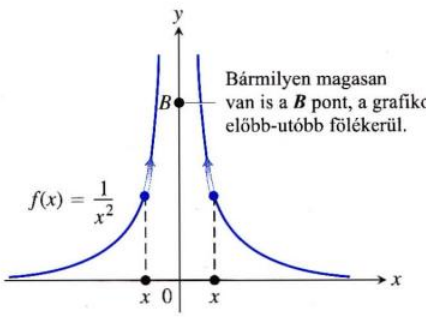
Mennyi $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1}$ és $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1}$?

Megoldás.

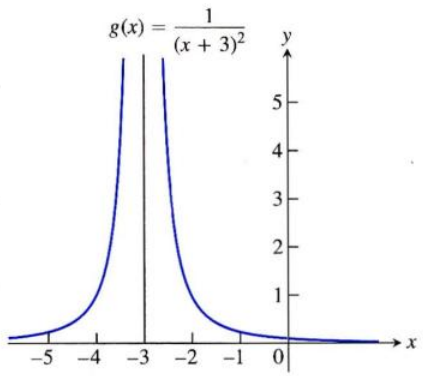
1. Geometriai megoldás. Az $y = 1/(x-1)$ függvény grafikonját úgy kapjuk meg, hogy az $y = 1/x$ függény grafikonját 1 egységgel jobbra eltoljuk (2.38. ábra). Nyilvánvaló tehát, hogy az $x = 1$ hely közelében az $y = 1/(x-1)$ függvény pontosan úgy viselkedik, ahogy az $y = 1/x$ függvény az $x = 0$ hely környékén:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

2. Algebrai megoldás. Ha egy szám jobbról, illetve balról minden határon túl a nullához közelít, akkor a szám reciproka ∞-hez, illetve $-\infty$-hez tart. Amikor $x \to 1^+$, akkor $(x-1) \to 0^+$, így $1/(x-1) \to \infty$. Ha pedig $x \to 1^-$, akkor $(x-1) \to 0^-$, minek következtében $1/(x-1) \to -\infty$. □



(a)



(b)

2.39. ÁBRA: A 2. példában szereplő függvények. **(a)** Amint $x \to 0$, az $f(x)$ függvény tart a végtelenhez. **(b)** A $g(x)$ függvény a végtelenhez tart, ha $x \to -3$.

2. PÉLDA **„Kétoldali" végtelen határértékek.**

Vizsgáljuk meg az

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ függvény viselkedését az $x = 0$, és a

(b) $g(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2}$ függvény viselkedését az $x = -3$

hely közvetlen közelében.

Megoldás.

(a) Bármelyik oldalról közelít is x a 0-hoz, $1/x^2$ tetszőleges nagy értékeket felvehet (l. a 2.39. ábra (a) részét), így

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

(b) A $g(x) = 1/(x+3)^2$ függvény grafikonját megkaphatjuk, ha az $f(x) = 1/x^2$ függvény grafikonját 3 egységgel eltoljuk balra (l. a 2.39. ábra (a) részét), g tehát pontosan úgy viselkedik a -3 hely közelében, mint f a 0 környékén:

$$\lim_{x\to -3} g(x) = \lim_{x\to -3} \frac{1}{(x+3)^2} = \infty. \qquad \square$$

3. PÉLDA **Racionális függvények viselkedése a nevező zérushelyei közelében.**

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x+2} = 0$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

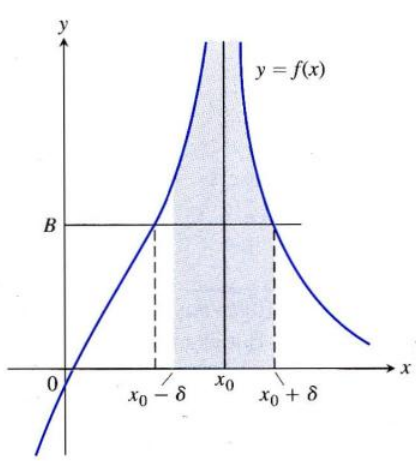
(c) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty$ (2-höz elég közeli, de annál nagyobb x-ekre a tört negatív)

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty$ (2-höz elég közeli, de annál kisebb x-ekre a tört pozitív)

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)}$ nem létezik (lásd a (c) és a (d) pontot)

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)}{(x-3)^3} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$

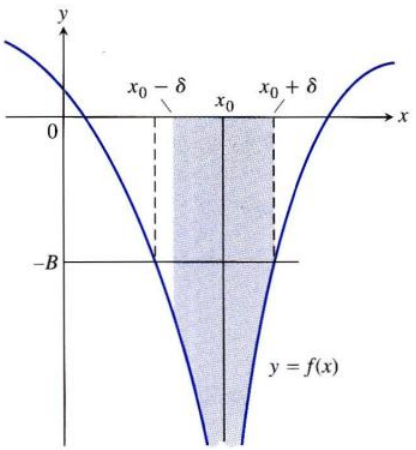
Az (a) és a (b) példában a nevező 0 ugyan az $x = 2$ helyen, de ugyanitt a számláló is 0, így a tört nem tart egyik irányban sem a végtelenhez, vagyis az $x = 2$ helyen létezik az „igazi" határérték. Ugyanez az (f) példára már nem áll, itt ugyanis a nevező – a vizsgált helyen – egyszerűsítés után is 0 marad.



2.40. ÁBRA: Miközben $x \to x_0$, az $f(x)$ értékek végtelenhez tartanak.

A végtelen határérték precíz definíciója

A végtelen határérték (nem összekeverendő a végtelenben *vett* határértékkel) definíciójában nem azt követeljük meg, hogy a függvényértékek tetszőlegesen megközelítsék az adott L számot, amennyiben x tart x_0-hoz, hanem azt, hogy tetszőleges mértékben eltávolodjanak az origótól. Ettől eltekintve a definíció (logikai szerkezete) lényegében ugyanaz, mint a (véges) határérték meghatározásáé. Lássuk tehát a precíz definíciókat, amelyekhez a 2.40. és a 2.41. ábrák szolgálnak illusztrációként.



2.41. ÁBRA: Miközben $x \to x_0$, az $f(x)$ értékek a negatív végtelenhez tartanak.

DEFINÍCIÓK Végtelen határértékek

1. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen végtelen (∞), szimbolikusan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

ha tetszőleges pozitív B számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > B.$$

2. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen mínusz végtelen ($-\infty$), szimbolikusan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$

ha tetszőleges negatív $-B$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -B.$$

4. PÉLDA **A definíció alkalmazása.**
Igazoljuk, hogy $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Megoldás. Belátjuk, hogy tetszőleges B-hez megadható olyan $\delta > 0$, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > B.$$

Világos mármost, hogy

$$\frac{1}{x^2} > B \text{ pontosan akkor, ha } x^2 < \frac{1}{B} \quad (B > 0),$$

azaz ha

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{B}}.$$

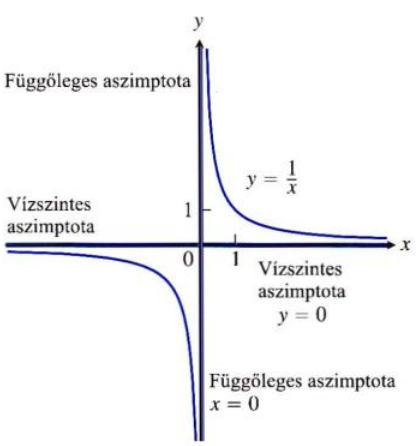
Ha tehát $\delta = 1/\sqrt{B}$ (vagy tetszőleges $1/\sqrt{B}$-nél kisebb szám), akkor minden x-re

$$|x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} \geq B,$$

ez pedig a definíció szerint pontosan azt jelenti, hogy

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

□



2.42. ÁBRA: Az $y = 1/x$ egyenletű hiperbola aszimptotái a koordinátatengelyek.

Függőleges aszimptoták

Vegyük észre, hogy az origótól távolodva az $y = 1/x$ függvény grafikonja és az y-tengely közötti távolság a 0-hoz tart (l. a 2.42. ábrát). Ennek oka természetesen az, hogy

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Azt mondjuk, hogy az $x = 0$ egyenletű egyenes (vagyis az y-tengely) az $f(x) = 1/x$ függvény grafikonjának *függőleges aszimptotája*. Ne tévesszük szem elől, hogy az $x = 0$ esetben a nevező 0, a függvény tehát itt nincs értelmezve.

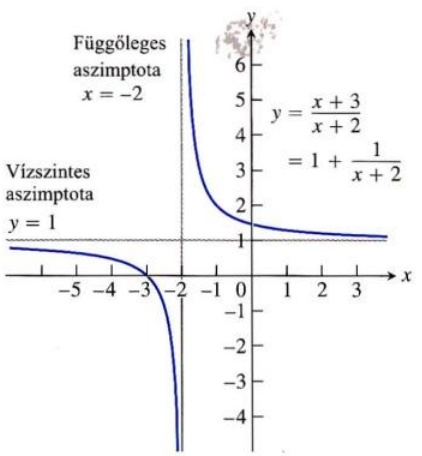
DEFINÍCIÓ Függőleges aszimptota.
Az $x = a$ egyenletű egyenes az $y = f(x)$ függvény grafikonjának függőleges aszimptotája, ha

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty, \quad \text{vagy ha} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

5. PÉLDA Aszimptoták meghatározása.
Adjuk meg az

$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

egyenletű görbe vízszintes és függőleges aszimptotáit.

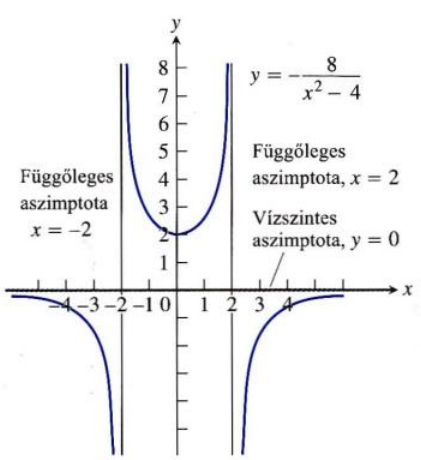


2.43. ÁBRA: Az $y = (x+3)/(x+2)$ egyenletű görbe aszimptotái az $y = 1$ és $x = -2$ egyenletű egyenesek.

Megoldás. Azt kell megvizsgálnunk, hogy miként viselkedik a görbe, amint $x \to -2$, vagyis amikor a nevező értéke egyre jobban megközelíti a 0-t. Első lépésben átalakítjuk a formulát:

$$y = \frac{x+3}{x+2} = \frac{(x+2)+1}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}.$$

A példában szereplő grafikon tehát úgy kapható meg, hogy az $y = 1/x$ egyenletű hiperbolát 1 egységgel fölfelé és 2 egységgel balra eltoljuk (l. a 2.43. ábrát). Ennek megfelelően az aszimptoták sem a koordinátatengelyek, hanem az $y = 1$ és $x = -2$ egyenletű egyenesek. □



2.44. ÁBRA: Az $y = -8/(x^2 - 4)$ egyenletű görbe aszimptotái (6. példa).

6. PÉLDA „Több oldalú" aszimptoták.
Melyek az

$$f(x) = -\frac{8}{x^2 - 4}$$

függvény grafikonjának vízszintes és függőleges aszimptotáit.

Megoldás. Arra vagyunk kíváncsiak, mi történik, ha $x \to \pm\infty$, illetve amikor $x \to \pm 2$. Vegyük észre, hogy f páros függvény, grafikonja ennélfogva szimmetrikus az y-tengelyre.

(a) *Amikor* $x \to \pm\infty$. Mivel $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, az $y = 0$ egyenletű egyenes (vagyis az x-tengely) a jobb oldalon (és az említett szimmetria miatt a bal oldalon is) aszimptota. A 2.44. ábrán azt is megfigyelhetjük, hogy a grafikon mindkét oldalon alulról közelít a vízszintes aszimptotához.

(b) *Amikor* $x \to \pm 2$. Mivel

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \text{ és } \lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty,$$

az $x = 2$ egyenletű egyenes mindkét oldalról függőleges aszimptota. A szimmetria miatt ugyanez áll az $x = -2$ egyenletű egyenesre is.
Több aszimptota nincs, elvégre a függvény határértéke a vizsgált helyeken kívül mindenütt véges. □

7. PÉLDA **Görbék, amelyeknek végtelen sok függőleges aszimptotájuk van.** Az

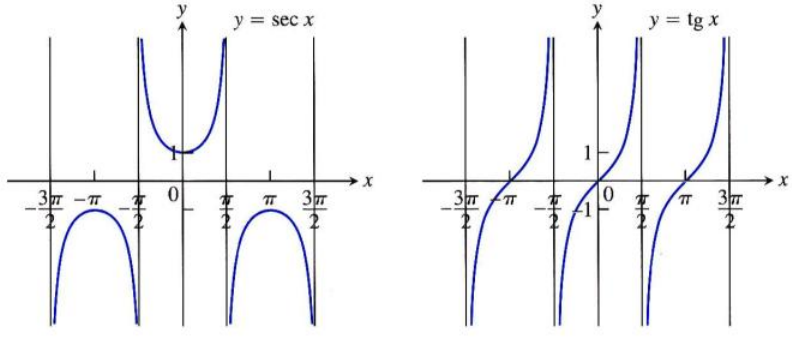
$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ és az } y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

egyenletű görbéknek a $\pi/2$ szám valamennyi páratlan többszörösénél függőleges aszimptotájuk van, ezeken a helyeken ugyanis $\cos x = 0$, minek következtében mindkét függvény határértéke („plusz vagy mínusz") végtelen (l. a 2.45. ábrát).

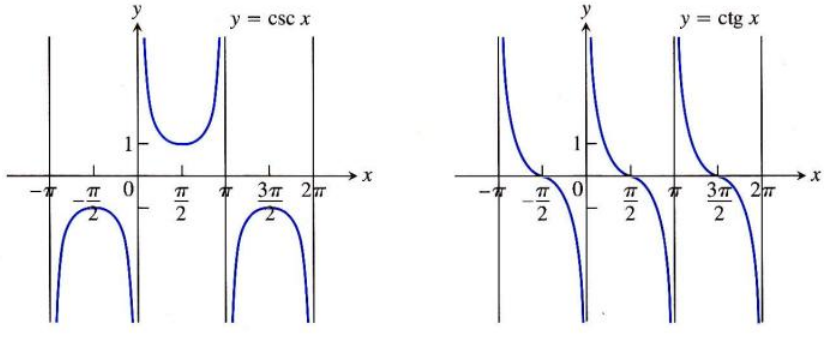
Az

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x} \text{ és az } y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

egyenletű görbéknek a $\pi/2$ valamennyi páros többszörösénél függőleges aszimptotájuk van, ezeken a helyeken ugyanis $\sin x = 0$ (l. a 2.46. ábrát).



2.45. ÁBRA: Mind a $\sec x$, mind a $\operatorname{tg} x$ függvény grafikonjának végtelen sok függőleges aszimptotája van (7. példa).



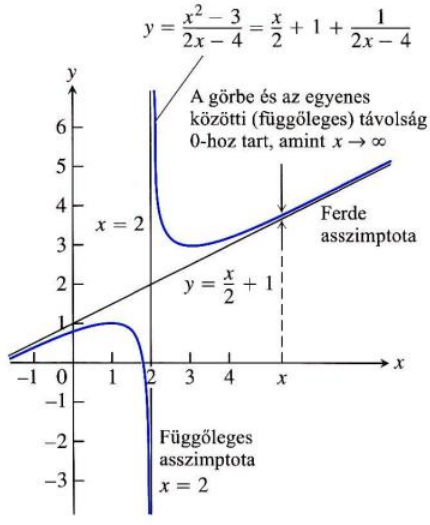
2.46. ÁBRA: A $\csc x$ és a $\operatorname{ctg} x$ függvény grafikonja (7. példa).

8. PÉLDA **Racionális törtfüggvény, amelyben a számláló magasabbfokú polinom, mint a nevező.**

Adjuk meg az

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

függvény grafikonjának aszimptotáit.



2.47. ÁBRA: Az $y = \frac{x^2-3}{2x-4}$ egyenletű görbe egyik aszimptotája függőleges, a másik pedig ferde (8. példa).

Megoldás. A számunkra érdekes esetek azok, amikor $x \to \pm\infty$, illetve amikor $x \to 2$ (utóbbi esetben a nevező 0-hoz tart). Első lépésként átalakítjuk a törtet:

$$\frac{x^2-3}{2x-4} = \frac{\frac{x}{2}(2x-4)+(2x-4)+1}{2x-4} = \frac{x}{2}+1+\frac{1}{2x-4}$$

Az f függvény tehát egy lineáris és egy jól ismert viselkedésű racionális törtfüggvény összege:

$$f(x) = \underbrace{\frac{x}{2}+1}_{\text{lineáris}} + \underbrace{\frac{1}{2x-4}}_{\text{„maradék”}}$$

Mivel $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$ és $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, az $x = 2$ egyenletű egyenes „kétoldali” függőleges aszimptota. Amint $x \to \pm\infty$, a „maradék” 0-hoz tart, minek következtében $f(x) \to (x/2)+1$. Az $y = (x/2)+1$ egyenletű egyenes ennélfogva a függvény grafikonjának *ferde aszimptotája*. □

Jegyezzük meg: amikor egy racionális törtfüggvény számlálójában magasabb fokú polinom szerepel, mint a nevezőben, akkor a függvény a végtelenben ∞-hez vagy $-\infty$-hez tart, attól függően, hogy a számláló és a nevező milyen előjelű, amint $|x| \to \infty$.

Domináns tagok

A 8. példa legfontosabb tanulsága az

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$$

függvény hozzárendelési szabályának átalakítása volt:

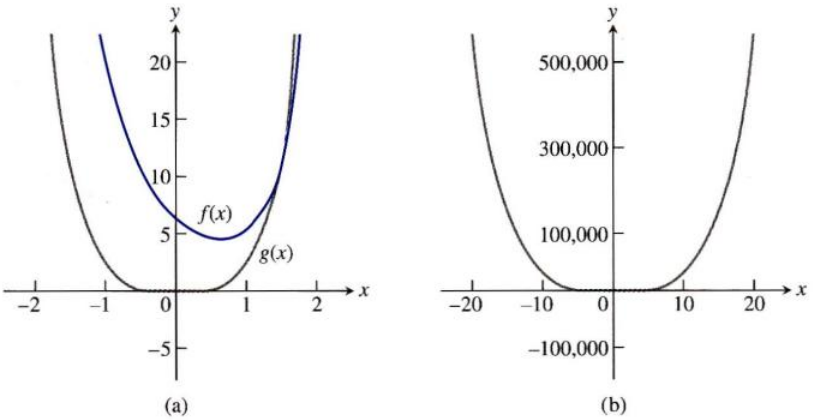
$$f(x) = \frac{x}{2}+1+\frac{1}{2x-4}$$

Ennek alapján

$$f(x) \approx \frac{x}{2}+1 \quad \text{ha } |x| \text{ elég nagy, illetve}$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2x-4} \quad \text{a 2 közelében}$$

Az $f(x)$ függvény ezek szerint elég nagy abszolút értékű x-ek esetén úgy viselkedik, mint az $y = (x/2)+1$ lineáris függvény, mivel ilyenkor az $1/(2x-4)$



2.48. ÁBRA: Az f és a g függvény grafikonja **(a)** kis léptékben különböznek ugyan, **(b)** nagy $|x|$-ek esetében azonban közelítőleg azonosak.

tag csak igen keveset nyom a latban. A 2 környékén azonban a két tag szerepet cserél: $1/(2x-4)$ viszi a prímet, a lineáris tag pedig csak másodhegedűs.

Amikor $|x|$ elég nagy, az $(x/2)+1$ tagot, a 2 közelében pedig az $1/(2x-4)$ tagot nevezzük **dominánsnak**. Lássunk még egy példát.

9. PÉLDA **Nagy léptékben azonosnak tűnő grafikonok.**

Legyen $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6$ és $g(x) = 3x^4$. Mutassuk meg, hogy f és g – bár kisebb számok esetében jelentősen eltérnek – elég nagy abszolút értékű x-ek esetén jó közelítéssel azonosnak tekinthetők.

Megoldás. Az f és g az origó környékén meglehetősen eltérően viselkednek (2.48. ábra (a) része), elegendően nagy léptéket választva azonban jó közelítéssel azonosnak tekitnhetők (2.48. ábra (b) része).

Ha kiszámítjuk az f és a g függvény hányadosának határértékét, amint $x \to \pm\infty$, akkor kiderül, hogy a f-ben valóban a $3x^4$ tag a domináns:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6}{3x^4} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{3x^3} + \frac{2}{x^4}\right).$$

Elég nagy abszolút értékű x-ek esetén tehát f és g jó közelítéssel azonosnak tekinthető. □

2.5. Feladatok

Végtelen határértékek

Számítsuk ki a megadott határértékeket (1–16. feladatok).

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3x}$

2. $\lim_{x\to 0^-} \frac{5}{2x}$

3. $\lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2}$

4. $\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}$

5. $\lim_{x\to -8^+} \frac{2x}{x+8}$

6. $\lim_{x\to -5^-} \frac{3x}{2x+10}$

7. $\lim_{x\to 7} \frac{4}{(x-7)^2}$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2(x+1)}$

9. **(a)** $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3x^{1/3}}$ **(b)** $\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{3x^{1/3}}$

10. **(a)** $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^{1/5}}$ **(b)** $\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x^{1/5}}$

11. $\lim_{x\to 0} \frac{4}{x^{2/5}}$

12. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}}$

13. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \operatorname{tg} x$

14. $\lim_{x\to(-\pi/2)^+} \sec x$

15. $\lim_{\theta\to 0^-} (1 + \csc\theta)$

16. $\lim_{\theta\to 0} (2 - \operatorname{ctg}\theta)$

További számítások

Állapítsuk meg a határértékeket (17–26. feladatok).

17. $\lim \frac{1}{x^2-4}$, amint

(a) $x \to 2^+$ **(b)** $x \to 2^-$

(c) $x \to -2^+$ **(d)** $x \to -2^-$

18. $\lim \frac{x}{x^2-1}$, amint

(a) $x \to 1^+$ **(b)** $x \to 1^-$

(c) $x \to -1^+$ **(d)** $x \to -1^-$

19. $\lim\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}\right)$, amint

(a) $x \to 0^+$ (b) $x \to 0^-$

(c) $x \to \sqrt[3]{2}$ (d) $x \to -1$

20. $\lim\frac{x^2-1}{2x+4}$, amint

(a) $x \to -2^+$ (b) $x \to -2^-$

(c) $x \to 1^+$ (d) $x \to 0^-$

21. $\lim\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2}$, amint

(a) $x \to 0^+$ (b) $x \to 2^+$

(c) $x \to 2^-$ (d) $x \to 2$

(e) Mit mondhatunk (ha mondhatunk valamit egyáltalán) a függvény határértékéről, amint $x \to 0$?

22. $\lim\frac{x^2-3x+2}{x^3-4x}$, amint

(a) $x \to 2^+$ (b) $x \to -2^+$

(c) $x \to 0^-$ (d) $x \to 1^+$

(e) Mit mondhatunk (ha mondhatunk valamit egyáltalán) a függvény határértékéről, amint $x \to 0$?

23. $\lim\left(2-\frac{3}{t^{1/3}}\right)$, amint

(a) $t \to 0^+$ (b) $t \to 0^-$

24. $\lim\left(\frac{1}{t^{3/5}}+7\right)$, amint

(a) $t \to 0^+$ (b) $t \to 0^-$

25. $\lim\left(\frac{1}{x^{1/3}}+\frac{2}{(x-1)^{2/3}}\right)$, amint

(a) $x \to 0^+$ (b) $x \to 0^-$

(c) $x \to 1^+$ (d) $x \to 1^-$

26. $\lim\left(\frac{1}{x^{2/3}}-\frac{1}{(x-1)^{4/3}}\right)$, amint

(a) $x \to 0^+$ (b) $x \to 0^-$

(c) $x \to 1^+$ (d) $x \to 1^-$

Racionális törtfüggvények

Ábrázoljuk a függvények grafikonját; írjuk fel a grafikonok aszimptotáinak egyenletét; állapítsuk meg, melyek a domináns tagok (27–38. feladatok).

27. $y=\frac{1}{x-1}$ **28.** $y=\frac{1}{x+1}$

29. $y=\frac{1}{2x+4}$ **30.** $y=\frac{-3}{x-3}$

31. $y=\frac{x+3}{x+2}$ **32.** $y=\frac{2x}{x+1}$

33. $y=\frac{x^2}{x-1}$ **34.** $y=\frac{x^2+1}{x-1}$

35. $y=\frac{x^2-4}{x-1}$ **36.** $y=\frac{x^2-1}{2x+4}$

37. $y=\frac{x^2-1}{x}$ **38.** $y=\frac{x^3+1}{x^2}$

Adott feltételeknek megfelelő grafikonok

Vázoljunk egy olyan grafikont, amely tekinthető a feltételeket kielégítő $y=f(x)$ függvény grafikonjának (39–42. feladatok). Természetesen több grafikon is szóba jöhet, elképzelhető tehát, hogy a megoldásokban megadott grafikonok itt-ott eltérnek az Olvasó által vázoltaktól.

39. $f(0)=0$, $f(1)=2$, $f(-1)=-2$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$ és $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$

40. $f(0)=0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to0^+} f(x)=2$ és $\lim_{x\to0^-} f(x)=-2$

41. $f(0)=0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^+} f(x)=\infty$ és $\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$

42. $f(2)=1$, $f(-1)=0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to0^+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty$ és $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

Adott feltételeknek megfelelő függvények

Adjunk meg olyan függvényeket, amelyek kielégítik a feltételeket (43–46. feladatok). Egyértelmű megoldások természetesen most sem léteznek. (Alkalmazzuk bátran a szakaszonkénti függvényértelmezés módszerét.)

43. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to2^-} f(x)=\infty$ és $\lim_{x\to2^+} f(x)=\infty$

44. $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to3^-} g(x)=-\infty$ és $\lim_{x\to3^+} g(x)=\infty$

45. $\lim_{x\to-\infty} h(x)=-1$, $\lim_{x\to\infty} h(x)=1$, $\lim_{x\to0^-} h(x)=-1$ és $\lim_{x\to0^+} h(x)=1$

46. $\lim_{x\to\pm\infty} k(x)=1$, $\lim_{x\to1^-} k(x)=\infty$ és $\lim_{x\to1^+} k(x)=-\infty$

Végtelen határérték: a definíció alkalmazása

A végtelen határérték definíciója alapján igazoljuk az állításokat (47–50. feladatok).

47. $\lim_{x\to0}\frac{-1}{x^2}=-\infty$

48. $\lim_{x\to0}\frac{1}{|x|}=\infty$

49. $\lim_{x\to3}\frac{-2}{(x-3)^2}=-\infty$

50. $\lim_{x\to-5}\frac{1}{(x+5)^2}=\infty$

„Féloldali" végtelen határértékek

51. Mikor mondjuk azt, hogy az f függvény jobb oldali határértéke az x_0 helyen végtelen? Íme a definíció:

> DEFINÍCIÓ **Végtelen jobb oldali határértékek.**
>
> Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke végtelen (∞), amint x jobbról tart az x_0 számhoz, szimbolikusan
>
> $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty,$$
>
> ha tetszőleges pozitív B számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy minden x-re
>
> $$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > B.$$

A definíció megfelelő módosításával értelmezzük az alábbi állításokat:

(a) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ **(b)** $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

(c) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

Az előző feladatbeli formális definíciók alapján igazoljuk a következő állításokat (52–56. feladatok).

52. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ **53.** $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

54. $\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$ **55.** $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$

56. $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \infty$

„Tagonkénti" függvényábrázolás

Az 57–60. feladatokban két függvény összegeként megadott függvények szerepelnek. Ábrázoljuk a két tagot ugyanabban a koordináta-rendszerben, majd vázoljuk az összegfüggvény grafikonját is.

57. $y = \sec x + \frac{1}{x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

58. $y = \sec x - \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

59. $y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

60. $y = \frac{1}{x} - \operatorname{tg} x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

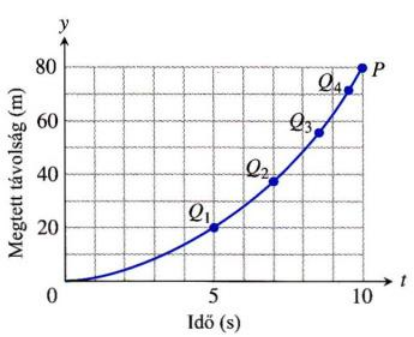
Még néhány függvénygrafikon

Ábrázoljuk a megadott görbéket számítógép segítségével; értelmezzük, amit kaptunk (61–64. feladatok).

61. $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ **62.** $y = \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$

63. $y = x^{2/3} + \frac{1}{x^{1/3}}$ **64.** $y = \sin\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right)$

2.6. Folytonosság



2.49. ÁBRA: Egy szabadon eső test mozgását jellemző Q_1, Q_2, Q_3... pontokat folytonos görbével kötöttük össze.

Amikor a laboratóriumban vagy a terepen összegyűjtött adatokat egy koordináta-rendszerben ábrázoljuk, az összetartozó adatokat ábrázoló pontokra gyakran görbét illesztünk. Ilyenkor valójában azt becsüljük meg, hogy miként viselkedik a szóban forgó függvény azokon a helyeken, amelyeken a függvényértéket nem állapítottuk meg (l. a 2.49. ábrát). Így eljárva feltesszük, hogy a függvény folytonos, vagyis hogy a függvényértékek folytonosan – ugrás nélkül – változnak. Ha egy f függvény folytonos, akkor bármely c helyen vett határértéke megegyezik az $f(c)$ függvényértékkel. (A polinomfüggvényeknek ezt a tulajdonságát a 2.2. alfejezetben többször is kihasználtuk.)

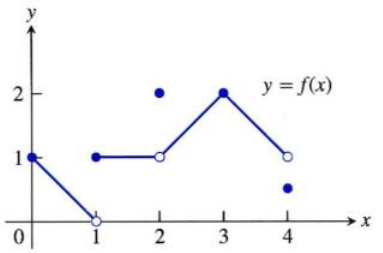
Ha egy $y = f(x)$ függvénygrafikont a ceruzánk felemelése nélkül le tudunk rajzolni, akkor biztos, hogy folytonos függvénnyel van dolgunk. Ebben az alfejezetben megadjuk a folytonosság precíz meghatározását is. Megvizsgáljuk, milyen jellemzői vannak a folytonos függvényeknek, és látni fogjuk, hogy az 1.4. alfejezetben bemutatott függvények többsége folytonos függvény.

Pontbeli folytonosság

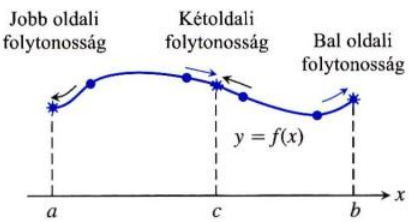
A folytonosság fogalmának alapos megértéséhez jó kiindulópont a 2.50. ábrán látható függvény viselkedésének tanulmányozása (a szóban forgó függvény kritikus határértékeit a 2.4. alfejezet 2. példájában elemeztük).

1. PÉLDA

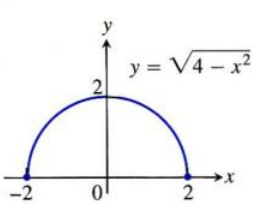
Állapítsuk meg, hogy a 2.50. ábrán látható f függvény mely pontokban folytonos, és melyekben nem.



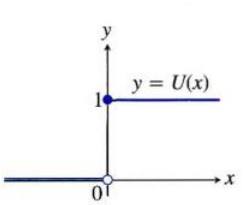
2.50. ÁBRA: A függvény a $[0,4]$ zárt intervallum minden pontjában folytonos az $x = 1$, az $x = 2$ és az $x = 4$ hely kivételével.



2.51. ÁBRA: Folytonosság az a, b és c pontokban.



2.52. ÁBRA: Függvény, amely értelmezési tartománya minden pontjában folytonos.



2.53. ÁBRA: Függvény, amely a 0 helyen jobbról folytonos, balról viszont nem (3. példa).

Megoldás. A függvény az $x = 1$, az $x = 2$ és az $x = 4$ hely kivételével a $[0,4]$ zárt intervallum minden pontjában folytonos. Ezekben a pontokban a függvény grafikonja „megszakad".
Pontok, amelyekben f folytonos:

$x = 0$:	$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$
$x = 3$:	$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$
$0 < c < 4$, $c \neq 1{,}2$:	$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Pontok, amelyekben f nem folytonos:

$x = 1$:	$\lim_{x\to 1}$ nem létezik
$x = 2$:	$\lim_{x\to 2} = 1 \neq f(2)$
$x = 4$:	$\lim_{x\to 4^-} = 1 \neq f(4)$
$c < 0, c > 4$:	ezeken a helyeken f nem értelmezett

□

A pontbeli folytonosság meghatározásakor külön kell vizsgálnunk a belső, illetve a végpontokat (l. a 2.51. ábrát).

DEFINÍCIÓ **Adott pontban folytonos függvény.**

Belső pont: az $y = f(x)$ függvényt értelmezési tartománya egy belső c pontjában folytonosnak nevezzük, ha

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Végpont: az $y = f(x)$ függvényt értelmezési tartománya bal oldali a, illetve jobb oldali b végpontjában folytonosnak nevezzük, ha

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a), \text{ illetve ha } \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

Ha egy f függvény a c pontban nem folytonos, akkor azt mondjuk, hogy f-nek c-ben szakadása van, a c pontot ilyenkor f **szakadási pontjának** nevezzük. Jegyezzük meg, hogy c szakadási pont nem feltétlenül eleme f értelmezési tartományának.

Az f függvény a c helyen jobbról folytonos, ha $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$, illetve balról folytonos, ha $\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$. Egy függvény tehát pontosan akkor folytonos az értelmezési tartománya bal oldali a végpontjában, ha az a pontban jobbról folytonos, és pontosan akkor folytonos az értelmezési tartománya jobb oldali b végpontjában, ha a b pontban balról folytonos (l. a 2.51. ábrát).

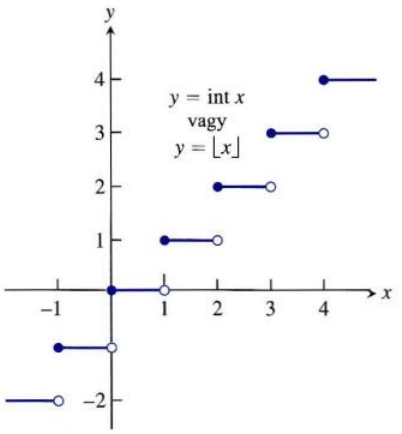
2. PÉLDA **Értelmezési tartománya minden pontjában folytonos függvény.**
Az $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ a $[-2,2]$ intervallum minden pontjában folytonos; az $x = -2$ helyen eszerint jobbról, az $x = 2$ helyen pedig balról folytonos (l. a 2.52. ábrát).

3. PÉLDA **Az egységugrásfüggvénynek a 0 helyen szakadása van.**
A 2.53. ábrán látható $U(x)$ egységugrásfüggvénynek az $x = 0$ helyen szakadása van (az ilyen szakadást „*ugrásnak*" mondjuk)

Egy függvény adott pontbeli folytonosságával kapcsolatos megfigyeléseinket a következő hármas feltételben foglaljuk össze.

A pontbeli folytonosság feltételei

Az $f(x)$ függvény az $x = c$ helyen pontosan akkor folytonos, ha az alábbi feltételek mindegyike teljesül:
1. $f(c)$ létezik, vagyis c eleme f értelmezési tartományának;
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ létezik;
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$



2.54. ÁBRA: Az alsó egészrészfüggvény minden nem egész helyen folytonos; az egész számoknál jobbról folytonos, balról azonban nem (4. példa).

A jobb, illetve bal oldali folytonosság esetében a 2. és a 3. pontban a bal, illetve jobb oldali határértékekre kell hivatkoznunk.

4. PÉLDA **Az alsó egészrészfüggvény.**

Az $y = \lfloor x \rfloor$ (vagy $y = \operatorname{int} x$) alsó egészrészfüggvény grafikonját a 2.54. ábrán tanulmányozhatjuk. A függvénynek minden olyan $x = n$ helyen szakadása van, ahol n egész szám, ilyenkor ugyanis

$$\lim_{x \to n^-} \operatorname{int} x = n - 1, \quad \text{viszont} \quad \lim_{x \to n^+} \operatorname{int} x = n,$$

amint tehát $x \to n$, a függvény jobb, illetve bal oldali határértéke különbözik. Mivel minden n egész számra $\operatorname{int} n = n$, az int függvény minden egész számnál jobbról folytonos (balról viszont nem).

A függvény mindazonáltal valamennyi nem egész helyen folytonos; példának okáért

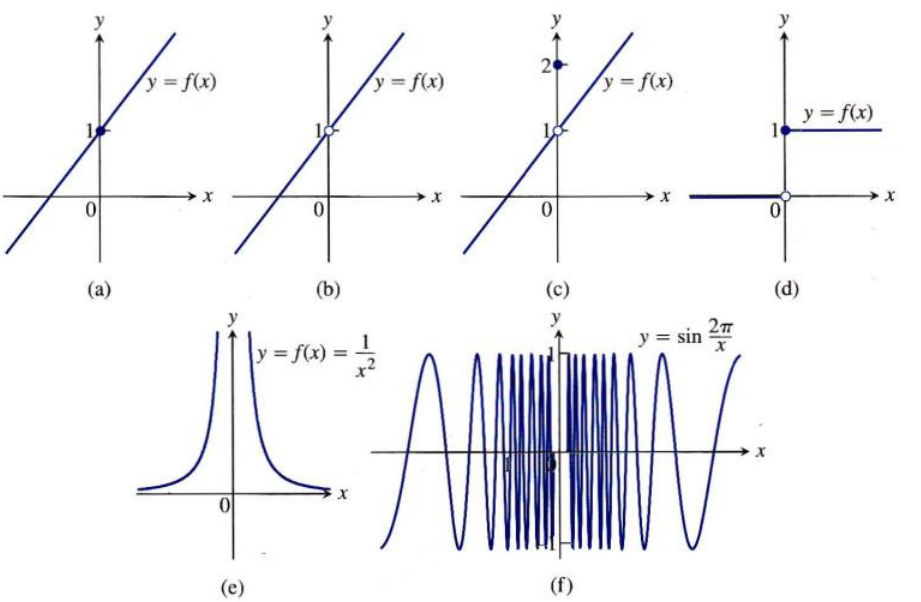
$$\lim_{x \to 1{,}5} \operatorname{int} x = 1 = \operatorname{int} 1{,}5.$$

Általában, ha valamely n egész szám esetén $n - 1 < c < n$, akkor

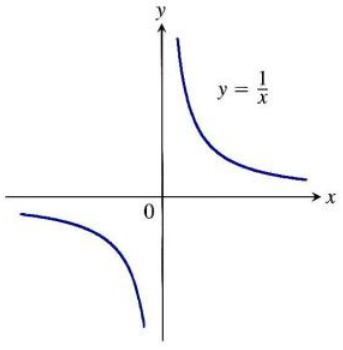
$$\lim_{x \to c} \operatorname{int} x = n - 1 = \operatorname{int} c.$$

A 2.55. ábra a különböző típusú szakadási helyek katalógusa. Az ábra (a) részén látható függvénynek még nincs baja: folytonos a 0 helyen. Az ábra (b) részén tanulmányozható függvény folytonos lenne a 0 helyen, de nincs itt értelmezve. Ugyanez állna a (c) ábra függvényére is, ha $f(0)$ nem 2, hanem 1 lenne. Az ábra (b) és (c) részén látható függvények (0-beli) szakadását **megszüntethető szakadásnak** nevezzük. Mindkét esetben létezik a függvény határértéke, amint $x \to 0$, és ha a 0 helyen ez a határérték lenne a függvényérték, a folytonosság helyreállna.

A (d), az (e) és az (f) ábrán láthtó szakadások már súlyosabbak: a $\lim_{x \to 0} f(x)$ határérték egyik esetben sem létezik, és a helyzet nem javul, bárhogy változtatjuk is meg $f(0)$ értékét. A (d) ábra függvényét jellemző szakadást **ugrásnak** nevezzük: ilyenkor tehát létezik a jobb és a bal oldali határérték is, de a kettő nem egyenlő. Az ábra (e) részén látható $f(x) = 1/x^2$ függvénynek végtelen szakadása van, az (f) ábrán látható függvény pedig túlságosan gyorsan oszcillál a 0 hely környékén ahhoz, hogy ott határértéke lehessen.



2.55. ÁBRA: Egyedül az ábra (a) részén látható függvény folytonos.



2.56. ÁBRA: Az $y = 1/x$ függvény az $x = 0$ hely kivételével mindenütt folytonos.

Folytonos függvények

Egy függvény egy **intervallumon folytonos**, ha annak miden pontjában folytonos. A 2.52. ábra félköre például a teljes értelmezési tartományán, vagyis a $[-2,2]$ zárt intervallumon folytonos. Egy **függvény folytonos**, ha értelmezési tartománya minden pontjában folytonos. Ha egy függvény folytonos, abból nem következik, hogy minden intervallumon folytonos. Az $y = 1/x$ függvény például nem folytonos a $[-1,1]$ intervallumon, viszont értelmezési tartománya – vagyis a $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$ halmaz – minden pontjában az (l. a 2.56. ábrát).

5. PÉLDA **Folytonos függvények.**

(a) Az $y = 1/x$ függvény értelmezési tartománya minden pontjában folytonos; az $x = 0$ helyen szakadása van (l. a 2.56. ábrát).

(b) Az $f(x) = x$ identikus leképezés, valamint a konstans függvények mindenütt folytonosak.

Folytonos függvényekből algebrai műveletekkel folytonos függvényeket kapunk.

9. TÉTEL **Folytonos függvények és algebrai műveletek.**

Ha az f és a g függvény egyaránt folytonos az $x = c$ helyen, akkor ilyenek a következő függvények is:

1. $f+g$,
2. $f-g$,
3. $f \cdot g$,
4. $k \cdot f$, k állandó,
5. f/g, amennyiben $g(c) \neq 0$,
6. $f^{r/s}$, ha f értelmezett egy c-t tartalmazó nyílt intervallumon, r és s pedig relatív prím egész számok, $s \neq 0$, és ha s páros, akkor fel kell tennünk, hogy $f(c) > 0$.

A tételt a 2.2. alfejezet 1. Tételében kimondott, határértékre vonatkozó szabályok alapján bizonyíthatjuk. Az összegre vonatkozó állítást például a következőképpen láthatjuk be:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c}(f+g)(x) &= \lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \\
&= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = && \text{összeg; 1. Tétel} \\
&= f(c)+g(c) = && \text{mivel } f \text{ és } g \text{ folytonos} \\
&= (f+g)(c),
\end{aligned}$$

ami azt igazolja, hogy $f+g$ folytonos a c pontban.

6. PÉLDA **Polinomok és racionális törtfüggvények.**

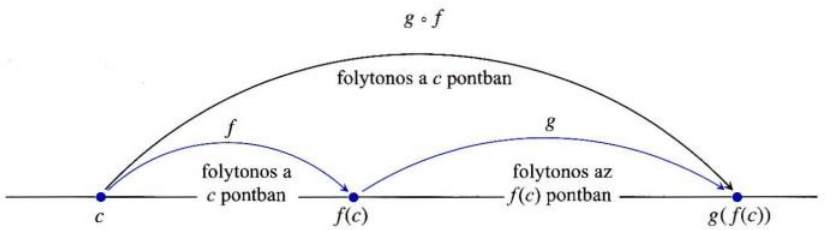
(a) Minden $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ polinomfüggvény folytonos, mivel tetszőleges c esetén $\lim_{x\to c} P(x) = P(c)$; l. a 2.2. alfejezet 2. Tételét.

(b) Tetszőleges $P(x)$ és $Q(x)$ polinomfüggvények esetén a $P(x)/Q(x)$ racionális törtfüggvény értelmezési tartománya minden c pontjában folytonos (azaz minden olyan c helyen, ahol $Q(c) \neq 0$).

7. PÉLDA **Az abszolútérték-függvény.**

Az $f(x) = |x|$ abszolútérték-függvény minden pontban folytonos. Amikor $x > 0$, akkor $f(x) = x$, ha pedig $x < 0$, akkor $f(x) = -x$, és mindkettő polinomfüggvény. Ami pedig az origót illeti, itt $\lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0|$.

A 2.2. alfejezetbeli 6. példa szerint a sin és a cos függvény egyaránt folytonos az $x = 0$ helyen. Ennél több is igaz: mindkét függvény mindenütt folytonos (l. 62. feladatot). A 9. Tétel alapján így arra következtethetünk, hogy a trigonometrikus függvények – értelmezési tartományuk minden pontjában – folytonosak. Az $\operatorname{tg} x$ függvény például folytonos az $\ldots \cup (-\pi/2,\pi/2) \cup (\pi/2,3\pi/2) \cup \ldots$ halmazon.



2.57. ÁBRA: Folytonos függvények kompozíciója is folytonos.

Összetett függvények

Folytonos függvények kompozíciója is folytonos. Az alapgondolat egyszerű: ha $f(x)$ folytonos az $x = c$, $g(x)$ pedig az $x = f(c)$ pontban, akkor $g \circ f$ folytonos az $x = c$ helyen (l. a 2.57. ábrát). A $g \circ f$ függvény határértéke, amint $x \to c$, nyilván $g(f(c))$.

10. TÉTEL Folytonos függvények kompozíciója.
Ha f folytonos a c, g pedig az $f(c)$ pontban, akkor a $g \circ f$ összetett függvény folytonos a c pontban.

A tétel állítása szemléletünk számára meglehetősen evidens, elvégre ha x elég közel van c-hez, akkor – f folytonossága miatt – $f(x)$ elég közel van $f(c)$-hez, minek következtében – a g függvény $f(c)$-beli folytonossága miatt – a $g(x)$ függvényértékek elég közel lesznek $g(f(c))$-hez.

A függvénykompozíció határértékére vonatkozó tétel érvényben marad kettőnél több függvény kompozíciója esetén is (a bizonyítás vázlatát l. az F.2. függelék 6. feladatában).

8. PÉLDA A 9. és a 10. Tétel alkalmazása.
Igazoljuk, hogy az alábbi fügvények értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak.

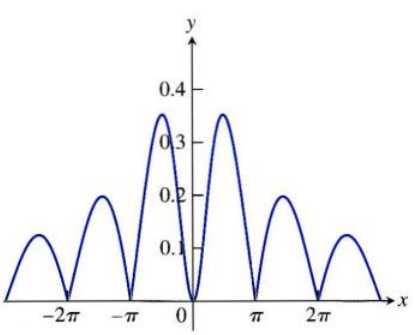
(a) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ **(b)** $y = \dfrac{x^{2/3}}{1 + x^4}$

(c) $y = \left| \dfrac{x-2}{x^2-2} \right|$ **(d)** $y = \left| \dfrac{x \sin x}{x^2+2} \right|$

Megoldás.

(a) A négyzetgyökfüggvény folytonos a $[0, \infty)$ intervallumon, mivel az $f(x) = x$ folytonos függvény racionális kitevőjű hatványa (9. Tétel 6. pontja), az adott függvény az $f(x) = x^2 - 2x + 5$ polinomfüggvény és a $g(t) = \sqrt{t}$ függvény kompozíciója, és mint ilyen, a 10. Tétel szerint folytonos.

(b) A számláló az identikus leképezés és egy racionális kitevőjű hatványfüggvény kompozíciója, a nevező pedig egy kizárólag pozitív értékeket felvevő polinomfüggvény, ennélfogva a kettő hányadosa is folytonos függvény.



2.58. ÁBRA: Mint a grafikon is sugallja, az $y = |(x \sin x)/(x^2 + 2)|$ függvény mindenütt folytonos.

(c) Az $y = (x-2)/(x^2-2)$ függvény minden $x \neq \pm\sqrt{2}$ pontban folytonos, így folytonos a szintén folytonos abszolútérték-függvénnyel vett kompozíciója is.

(d) A számláló két folytonos függvény szorzata (elvégre a szinuszfüggvény is folytonos), a nevező pedig egy mindenütt pozitív polinomfüggvény. Az adott függvény ezek szerint egy folytonos függvény és az abszolútérték-függvény kompozíciója, és mint ilyen, ugyancsak folytonos. □

Függvény folytonos kiterjesztése

Az $f(x) = (\sin x)/x$ függvény az $x = 0$ hely kivételével mindenütt folytonos. Ebben a tekintetben olyan, mint az $y = 1/x$ függvény, van azonban egy jelentős különbség. Az $f(x) = (\sin x)/x$ függvénynek létezik véges határértéke, amint $x \to 0$, az $y = 1/x$ függvény határértéke azonban az $x = 0$ helyen – jobbról pozitív, balról negatív – végtelen. Az előbbi függvény értelmezési tartománya ennélfogva kiterjeszthető úgy, hogy a kapott függvény már folytonos az $x = 0$ helyen is:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Az $F(x)$ függvény már az $x = 0$ helyen is folytonos, elvégre

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = F(0).$$

(L. a 2.59. ábrát)

A példa általánosítható: ha az $f(x)$ függvény (amely lehet például egy racionális törtfüggvény) az $x = c$ helyen nincs értelmezve, viszont a $\lim_{x \to c} f(x) = L$ határérték létezik, akkor az

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq c \\ L, & x = c \end{cases}$$

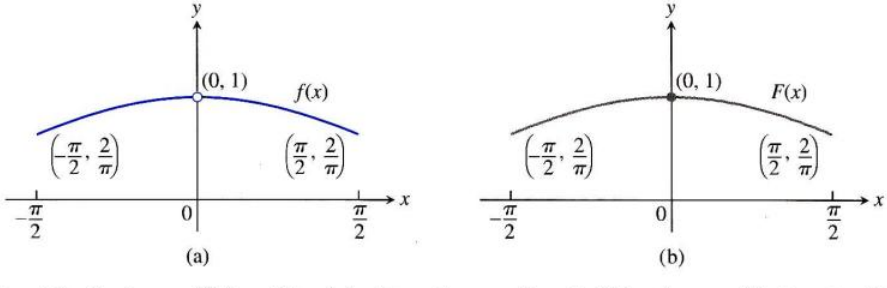
előírással definiált függvény folytonos az $x = c$ helyen. Az $F(x)$ függvényt az f függvény (c-re való) **folytonos kiterjesztésének** nevezzük. Racionális törtfüggvények folytonos kiterjesztését általában úgy kapjuk meg, hogy egyszerűsítünk a számláló és a nevező közös tényezőivel.

9. PÉLDA **Racionális törtfüggvény folytonos kiterjesztése.**

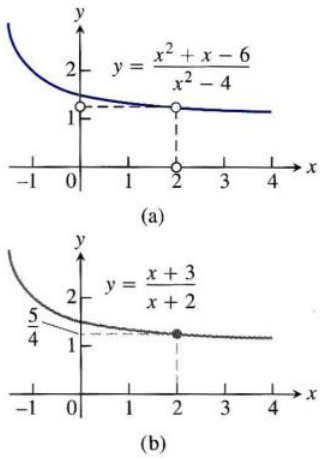
Igazoljuk, hogy az

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

függvény folytonosan kiterjeszthető az $x = 2$ helyen.



2.59. ÁBRA: Az ábra (a) részén az $f(x) = (\sin x)/x$ függvény grafikonja látható a $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ egyenlőtlenségnek eleget tevő x-ekre. A $(0,1)$ pont nem eleme a grafikonnak, mivel f az $x = 0$ helyen nem értelmezett. (b) Ez a szakadás azonban az $f(x)$ függvény kiterjesztésével megszüntethető: definiáljuk az $F(x)$ függvényt a következőképpen: $F(0) = 1$, minden $x \neq 0$ szám esetén pedig $F(x) = f(x)$. Ekkor $F(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$.



2.60. ÁBRA: A 9. példában szereplő $f(x)$ függény az ábra (a) részén, ennek $F(x)$ folytonos kiterjesztése pedig az ábra (b) részén látható.

Megoldás. Az f függvény az $x = 2$ helyen nem értelmezett, amikor azonban $x \neq 2$, akkor

$$f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}.$$

Az

$$F(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

függvény ennélfogva minden $x \neq 2$ számhoz ugyanazt rendeli, mint az f függvény, és az $x = 2$ helyen is folytonos. Az itt felvett függvényérték $F(2) = 5/4$, továbbá fennáll

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} f(x) = \frac{5}{4}$$

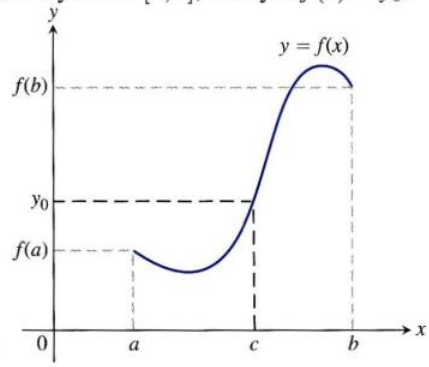
is, F tehát valóban f folytonos kiterjesztése az $x = 2$ helyre. A két függvény grafikonját a 2.60. ábrán tanulmányozhatjuk. A két grafikon lényegében megegyezik, kivéve, hogy F grafikonjának a $(2,5/4)$ pont is eleme, míg itt f grafikonja „megszakad". A folytonos kiterjesztés éppen ezt a szakadást szüntette meg. □

A Bolzano-tétel

A folytonos függvények több olyan tulajdonsággal rendelkeznek, amely mind az elméleti, mind az alkalmazott matematikában kitüntetett jelentőséget biztosít nekik. Ezek egyike a **közbensőérték-tulajdonság**, amellyel egy függvény akkor rendelkezik, ha tetszőleges, a függvény értelmezési tartományának részét képező zárt intervallum elemein fölvett függvényértékek között a végpontbeli függvényértékek közötti összes valós szám megjelenik.

11. TÉTEL **Bolzano-tétel.**

Ha az f függvény folytonos az $[a,b]$ zárt intervallumon, akkor itt fölvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket, azaz tetszőleges, $f(a)$ és $f(b)$ közötti y_0 számhoz létezik olyan $c \in [a,b]$, amelyre $f(c) = y_0$.

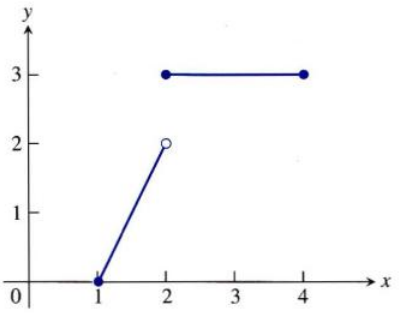


A Bolzano-tétel geometriai szempontból a következőt állítja: az $y = y_0$ egyenletű, az y-tengelyt $f(a)$ és $f(b)$ között metsző vízszintes egyenes az $y = f(x)$ egyenletű görbét az $[a,b]$ intervallum fölött legalább egyszer biztosan metszi.

A tétel a valós számok teljességi tulajdonságán alapul, a bizonyítást az emelt szintű tankönyvekre, illetve kurzusokra hagyjuk.

A folytonosság alapvető feltétel: ha f-nek a szóban forgó intervallum akárcsak egy pontjában is szakadása van, a tétel állítása már nem feltétlenül teljesül, l. a 2.61. ábrát.

I. Következmény: összefüggőség. A 11. Tétel a magyarázata, hogy egy adott intervallumon folytonos függvény grafikonjának nem lehetnek olyan ugrásai, mint az egészrészfüggvényeknek (l. pl. a 2.54. ábrát) és nem szakadhat két ágra, mint az $1/x$ függvény grafikonja (2.56. ábra).



2.61. ÁBRA: Az $f(x) = \begin{cases} 2x-2, & 1 \le x < 2 \\ 3, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$ függvény értékei között nem szerepel minden $f(1) = 0$ és $f(4) = 3$ közötti szám: a teljes $[2,3)$ intervallum kimarad.

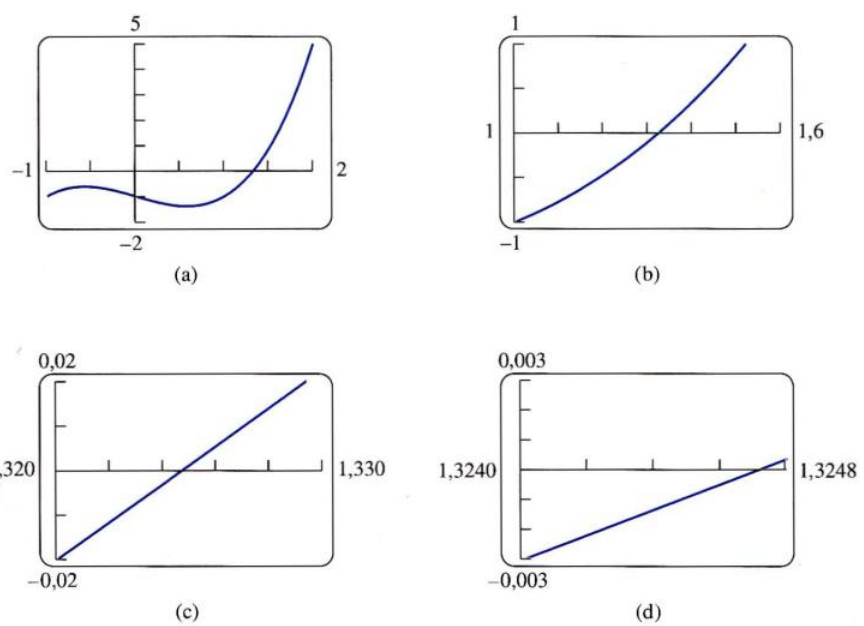
II. Következmény: zérushelyek megkeresése. Az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásait az f függvény **zérushelyeinek** nevezzük. A 11. Tétel alapján könnyen belátható, hogy ha egy folytonos függvény egy adott intervallumon előjelet vált, akkor abban az intervallumban van legalább egy zérushelye.

Ha tehát azt látjuk, hogy a képernyőre kirajzolt függvénygrafikon metszi a vízszintes tengelyt, akkor a szóban forgó függvénynek – amennyiben folytonos – valahol biztosan van zérushelye. A zérushely megkeresésekor a következő eljárást célszerű követnünk:

1. Ábrázoljuk a függvény grafikonját egy nagy intervallumon, hogy lássuk, körülbelül hol lehetnek a zésushelyek.

2. „Közelítsünk rá" a zérushelyekre, és a nagyított kép alapján becsüljük meg a megfelelő x-koordinátákat.

A 2.62. ábrán azt tanulmányozhatjuk, hogy miként alkalmazható a módszer az $x^3 - x - 1 = 0$ egyenlet zérushelyeinek megkeresésére.



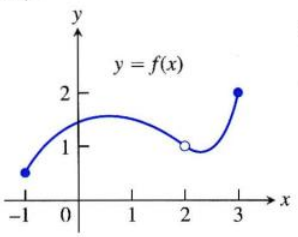
2.62. ÁBRA: Az $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ zérushelyének megkeresése. A zérushely jó közelítéssel az $x = 1{,}3247$ pont.

2.6. Feladatok

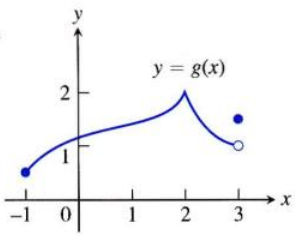
Függvénygrafikonok elemzése

Az 1–4. feladatokban állapítsuk meg, hogy az ábrázolt függvény folytonos-e a $[-1,3]$ intervallumon. Indokoljuk válaszunkat (ha a függvénynek valahol szakadása van, mondjuk meg, milyen típusú).

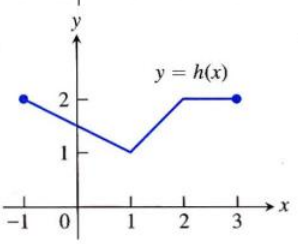
1.



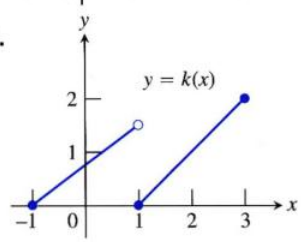
2.



3.



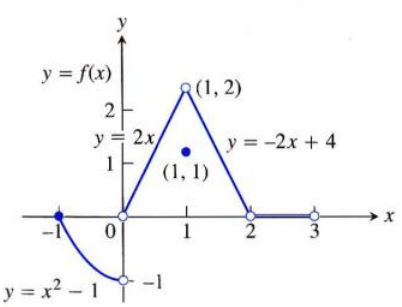
4.



Az 5–10. feladatok tárgya a

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & -1\le x<0\\ 2x, & 0<x<1\\ 1, & x=1\\ -2x+4, & 1<x<2\\ 0, & 2<x<3 \end{cases}$$

függvény.



Az 5–10. feladatokban szereplő f függvény.

5. **(a)** Létezik-e $f(-1)$?

(b) Létezik-e a $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ határérték?

(c) Igaz-e, hogy $\lim_{x\to -1^-} f(x)=f(-1)$?

(d) Folytonos-e f az $x=-1$ pontban?

6. **(a)** Létezik-e $f(1)$?

(b) Létezik-e a $\lim_{x\to 1} f(x)$ határérték?

(c) Igaz-e, hogy $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$?

(d) Folytonos-e f az $x=1$ pontban?

7. **(a)** Értelmezve van-e az f függvény az $x=2$ helyen?

(b) Folytonos-e f az $x=2$ helyen?

8. Melyik pontokban folytonos az f függvény?

9. Mit rendelne 2-höz a függvény folytonos kiterjesztése?

10. Mit rendelne 1-hez a függvény folytonos kiterjesztése?

A folytonosság ellenőrzése

Melyek a 11. és a 12. feladatban megadott függvény szakadási helyei? Milyen típusúak a szakadási helyek?

11. L. a 2.4. alfejezet 1. feladatát.

12. L. a 2.4. alfejezet 2. feladatát.

Mely pontokban folytonosak a 13–28. feladatokban megadott függvények?

13. $y=\dfrac{1}{x-2}-3x$

14. $y=\dfrac{1}{(x+2)^2}+4$

15. $y=\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$

16. $y=\dfrac{x+3}{x^2-3x-10}$

17. $y=|x-1|+\sin x$

18. $y=\dfrac{1}{|x|+1}-\dfrac{x^2}{2}$

19. $y=\dfrac{\cos x}{x}$

20. $y=\dfrac{x+2}{\cos x}$

21. $y=\csc 2x$

22. $y=\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

23. $y=\dfrac{x\operatorname{tg}x}{x^2+1}$

24. $y=\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{1+\sin^2 x}$

25. $y=\sqrt{2x+3}$

26. $y=\sqrt[4]{3x-1}$

27. $y=(2x-1)^{1/3}$

28. $y=(2-x)^{1/5}$

Összetett függvények

Számítsuk ki a határértékeket. Folytonosak-e a megadott helyeken a függvények?

29. $\lim_{x\to\pi}\sin(x-\sin x)$

30. $\lim_{t\to 0}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cos(\operatorname{tg}t)\right)$

31. $\lim_{y\to 1}\sec(y\sec^2 y-\operatorname{tg}^2 y-1)$

32. $\lim_{x\to 0}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}\cos\left(\sin^{1/3}x\right)\right)$

33. $\lim_{t\to 0}\cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{19-3\sec 2t}}\right)$

34. $\lim_{x\to\pi/6}\sqrt{\csc^2 x+5\sqrt{3}\operatorname{tg}x}$

Folytonos kiterjesztések

35. Adjuk meg azt a függvényértéket, amellyel a

$$g(x)=(x^2-9)/(x-3)$$

függvény folytonossá válik az $x=3$ helyen.

36. Adjuk meg azt a $h(2)$ függvényértéket, amellyel a

$$h(t)=(t^2+3t-10)/(t-2)$$

függvény folytonossá válik az $t=2$ helyen?

37. Adjunk meg azt a függvényértéket, amellyel a

$$h(s) = (s^3 - 1)/(s^2 - 1)$$

függvény folytonossá válik az $s = 1$ helyen.

38. Adjunk meg azt a függvényértéket, amellyel a

$$g(x) = (x^2 - 16)/(x^2 - 3x - 4)$$

függvény folytonossá válik az $x = 4$ helyen.

39. Adjuk meg a értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

függvény mindenütt folytonos legyen.

40. Adjuk meg b értékét úgy, hogy a

$$g(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ bx^2, & x \geq -2 \end{cases}$$

függvény mindenütt folytonos legyen.

T Ábrázoljuk a megadott függvények grafikonját, és állapítsuk meg, létezik-e folytonos kiterjesztésük az $x = 0$ helyen. Ha igen, a TRACE AND ZOOM segítségével keressük meg a kiterjesztett függvény 0 helyen felvett értékét. Azokban az esetekben, amikor nincs folytonos kiterjesztés, vizsgáljuk meg, hogy létezik-e olyan kiterjesztés, amellyel a függvény jobbról, illetve balról folytonos a 0 pontban; ha igen, adjuk meg a kiterjesztett függvény(ek) 0-nál fölvett értékeit.

41. $f(x) = \dfrac{10^x - 1}{x}$

42. $f(x) = \dfrac{10^{|x|} - 1}{x}$

43. $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$

44. $f(x) = (1 + 2x)^{1/x}$

További példák és feladatok

45. Tudjuk, hogy az $y = f(x)$ folytonos függvény az $x = 0$ helyen negatív, az $x = 1$ helyen pedig pozitív értéket vesz fel. Igazoljuk, hogy ebben az esetben az $f(x) = 0$ egyenletnek biztosan van megoldása a $(0, 1)$ intervallumban.

46. Magyarázzuk meg, miért nem lehet a $\cos x = x$ egyenletnek egynél több megoldása?

47. Harmadfokú egyenlet gyökei. Mutassuk meg, hogy az $x^3 - 15x + 1 = 0$ egyenletnek három megoldása van a $[-4, 4]$ zárt intervallumban.

48. Bizonyítsuk be, hogy van olyan c szám, amelyre az $F(x) = (x-a)^2 \cdot (x-b)^2 + x$ függvény értéke: $F(c) = (a+b)/2$.

49. Legyen $f(x) = x^3 - 8x + 10$; mutassuk meg, hogy vannak olyan c számok, amelyekre **(a)** $f(c) = \pi$, **(b)** $f(c) = -\sqrt{3}$ és **(c)** $f(c) = 5000000$.

50. Az alábbi öt feladat valójában egy és ugyanaz. Miért?

(a) Keressük meg az $f(x) = x^3 - 3x - 1$ függvény zérushelyeit.

(b) Adjuk meg azoknak a pontoknak az x-koordinátáit, amelyekben az $y = x^3$ egyenletű görbe metszi az $y = 3x + 1$ egyenletű egyenest.

(c) Milyen x-ek esetén teljesül az $x^3 - 3x = 1$ egyenlőség?

(d) Adjuk meg azoknak a pontoknak az x-koordinátáit, amelyekben az $y = x^3 - 3x$ egyenletű harmadfokú görbe metszi az $y = 1$ egyenletű egyenest.

(e) Oldjuk meg az $x^3 - 3x - 1 = 0$ egyenletet.

51. Megszüntethető szakadás. Adjunk példát olyan $f(x)$ függvényre, amely mindenütt folytonos az $x = 2$ hely kivételével, ahol megszüntethető szakadása van. Indokoljuk meg, hogy függvényünk miért nem folytonos az $x = 2$ helyen, és hogy miért megszüntethető a szakadás.

52. Nem megszüntethető szakadás. Mondjunk példát olyan $g(x)$ függvényre, amely mindenütt folytonos az $x = 2$ hely kivételével, ahol nem megszüntethető szakadása van. Indokoljuk meg, hogy függvényünk miért nem folytonos az $x = 2$ helyen, és hogy miért nem lehet megszüntetni a szakadást.

53. Függvény, amely egyetlen pontban sem folytonos.

(a) Igazoljuk, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

Dirichlet-függvény egyetlen pontban sem folytonos. (*Útmutatás:* a valós számegyenes minden nemüres intervallumában egyaránt vannak racionális és irracionális számok.)

(b) Van-e olyan pont, amelyben f akár jobbról, akár balról folytonos?

54. Tegyük fel, hogy $f(x)$ és $g(x)$ egyaránt folytonos függvények valamennyi $0 \leq x \leq 1$ helyen. Lehet-e az $f(x)/g(x)$ függvénynek szakadása az $[0, 1]$ intervallum valamely pontjában? Indokoljuk válaszunkat.

55. Tegyük fel, hogy a $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ függvény folytonos az $x = 0$ helyen. Következik-e ebből, hogy ugyanott mind az $f(x)$, mind a $g(x)$ folytonos? Indokoljuk válaszunkat.

56. Folytonos függvények nem folytonos kompozíciója. Adjunk példát olyan, az $x = 0$ helyen folytonos f és g függvényekre, amelyeknek $f \circ g$ kompozíciója nem folytonos az $x = 0$ helyen. Ellentmond-e ez a 10. Tételnek? Indokoljuk válaszunkat.

57. Zérushely nélküli folytonos függvények. Igaz-e, hogy ha egy folytonos függvény egy intervallum egyetlen pontjában sem 0, akkor a függvény sohasem vált előjelet az intervallumban? Indokoljuk válaszunkat.

58. Gumiszalag nyújtása. Igaz-e, hogy ha egy gumiszalagot úgy nyújtunk, hogy egyik végét jobbra, a másikat pedig balra húzzuk, akkor lesz a szalagnak olyan pontja, amely a nyújtás során helyben marad? Indokoljuk válaszunkat.

59. Egy fixponttétel. Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos a $[0, 1]$ intervallumban, és hogy minden $x \in [0, 1]$ esetén $0 \leq f(x) \leq 1$. Igazoljuk, hogy ekkor létezik olyan $c \in [0, 1]$ szám, amelyre $f(c) = c$. (Az ilyen c-t az f függvény fixpontjának nevezzük.)

60. Folytonos függvények előjeltartó tulajdonsága. Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van az (a, b) intervallumon, és hogy az intervallum egy c pontjában f folytonos és $f(c) \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik egy c-t tartalmazó $(c - \delta, c + \delta)$ intervallum, amelyen az $f(x)$ függvényértékek előjele nem változik. (Vegyük észre: kikötjük ugyan, hogy f a teljes (a, b) intervallumon értelmezve legyen, a folytonosságot azonban a c kivételével egyetlen más pontban sem követeljük meg. A c-beli folytonosság és az $f(c) \neq 0$ feltétel elég ahhoz, hogy a függvényértékek előjele egy teljes intervallumon állandó maradjon.)

61. Igazoljuk, hogy egy f függvény pontosan akkor folytonos az $x = c$ helyen, ha

$$\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c).$$

62. A 61. feladat és a

$$\sin(h+c) = \sin h\cos c + \cos h\sin c,$$
$$\cos(h+c) = \cos h\cos c - \sin h\sin c$$

azonosságok alapján igazoljuk, hogy $f(x) = \sin x$ és $g(x) = \cos x$ mindenütt folytonos függvények.

Grafikus egyenletmegoldás

T Számológép vagy számítógép segítségével oldjuk meg grafikusan az egyenleteket (63–70. feladatok).

63. $x^3 - 3x - 1 = 0$

64. $2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

65. $x(x-1)^2 = 1$

66. $x^x = 2$

67. $\sqrt{x} + \sqrt{1+x} = 4$

68. $x^3 - 15x + 1 = 0$ (3 megoldás van)

69. $\cos x = x$ (1 megoldás van; ügyeljünk arra, hogy a számológépet RAD módban használjuk.)

70. $2\sin x = x$ (3 megoldás van; ügyeljünk arra, hogy a számológépet RAD módban használjuk.)

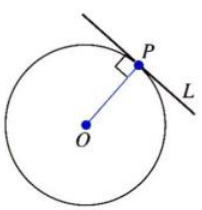
2.7. Érintő és derivált

Ebben az alfejezetben folytatjuk a szelők és érintők 2.1. alfejezetben megkezdett vizsgálatát. Az érintő meredekségét a szelők meredekségének határértékeként határozzuk meg.

Mit nevezünk egy görbe érintőjének?

Már tudjuk, hogy mikor nevezünk egy egyenest egy kör érintőjének: ahogy a 2.63. ábrán is látható, az L egyenes az adott kört a P pontban érinti, ha L merőleges a kör P végpontú sugarára. A kérdés mármost az, hogyan lehet ezt a fogalmat általánosítani, azaz: mikor mondjuk, hogy egy L egyenes az adott C görbét – annak P pontjában – *érinti?* A körre vonatkozó példa alapján a következőket állíthatnánk:

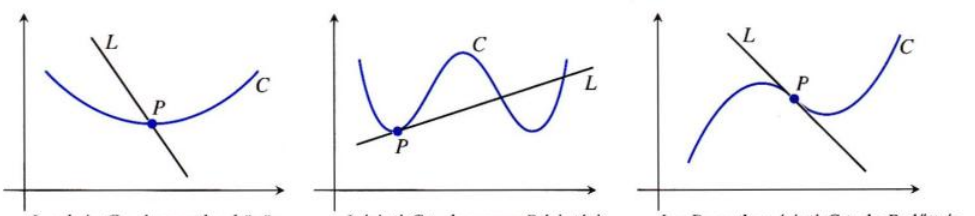
1. L átmegy P-n és merőleges a P pontot a C középpontjával összekötő szakaszra;
2. L-nek és C-nek csak egy közös pontja van: a P;
3. L átmegy P-n és teljes egészében C egyik oldalán halad.



2.63. ÁBRA: Az L egyenes a kör P pontbeli érintője, ha merőleges a kör P végpontú sugarára.

Kör és érintője esetén mindhárom állítás igaz ugyan, de egyik sem általánosítható tetszőleges görbére. A legtöbb görbének nincs is középpontja, az az egyenes pedig, amelyet C érintőjének akarunk nevezni, lehetséges, hogy a görbét más pontokban is metszi, sőt az is előfordulhat, hogy az érintési pont előtt a görbe egyik odalán, utána pedig a görbe másik oldalán halad. (2.64. ábra).

Az általános érintődefiníció *dinamikus:* azon alapul, hogy miként viselkednek a P-re és a görbe P-hez közeli Q pontjaira illeszkedő szelők, amint Q egyre közelebb kerül P-hez, l. a 2.65. ábrát. Az alábbi lépéseket követjük:

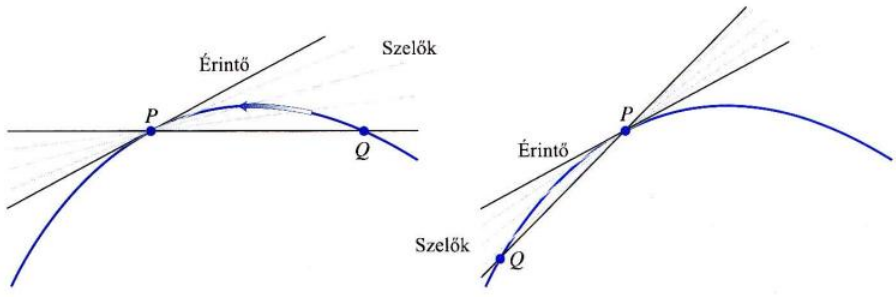


L-nek és C-nek egyetlen közös pontja van, L mégsem érintő.

L érinti C-t, de nem a P érintési pont az egyetlen közös pontja C-vel.

L a P pontban érinti C-t, de P előtt és után a görbe különböző oldalain halad.

2.64. ÁBRA: Az érintőkkel kapcsolatos tévhitek cáfolata.



2.65. ÁBRA: A dinamikus érintőfogalom. A görbe P pontbeli érintője az az egyenes, amelynek meredeksége a PQ szelők meredekségének határértéke, amint $Q \to P$.

1. Abból indulunk ki, amit könnyen ki tudunk számolni: a PQ szelő meredekségéből.

2. Megvizsgáljuk, mi lesz a szelők meredekségének határértéke, amint Q – a görbe mentén – P-hez közelít.

3. Ha ez a határérték létezik, ezt tekintjük a görbe P-beli *meredekségének*, az ilyen meredekségű, a P ponton átmenő egyenest pedig a görbe P pontbeli érintőjének nevezzük.

Ezt az eljárást követtük a zuhanó kődarabról és a gyümölcslégy-populációról szóló, 2.1. alfejezetbeli példákban.

1. PÉLDA **Parabola érintője.**

Határozzuk meg az $y = x^2$ egyenletű parabola meredekségét a $(2,4)$ pontban. Írjuk fel a parabolát ebben a pontban érintő egyenes egyenletét.

Megoldás. Tekintsük először a P-n és a P-hez közeli $Q(2+h,(2+h)^2)$ parabolapontokon átmenő szelőket. A PQ szelő meredeksége:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{h^2+4h+4-4}{h} = \frac{h^2+4h}{h} = h+4$$

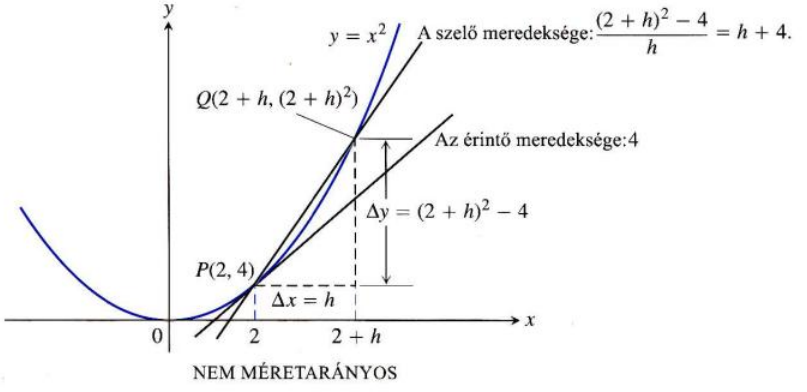
Ha $h > 0$, akkor a Q pont a P-től jobbra helyezkedik el (mint a 2.66. ábrán); ha $h < 0$, akkor P-től balra. Mindkét esetben igaz azonban, hogy amint $Q \to P$, vagyis $h \to 0$, a PQ szelő meredeksége 4-hez tart:

$$\lim_{h\to 0}(4+h) = 4.$$

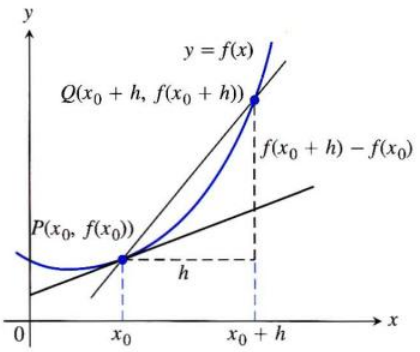
A parabola $(2,4)$ pontbeli meredeksége ezek szerint 4.

A keresett érintő a P ponton átmenő, 4 meredekségű egyenes:

$y = 4 + 4(x-2)$ (adott ponton átmenő, adott iránytangensű egyenes egyenlete)
$y = 4x - 4$ □



2.66. ÁBRA: Az $y = x^2$ egyenletű parabola meredeksége $P(2,4)$ pontban.



2.67. ÁBRA: A P-beli érintő meredeksége: $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Függvénygrafikon érintője

A különféle görbék érintőjének megtalálása a 17. század első felében a legfontosabb matematikai problémák egyike volt. A feladat több területen is kiemelt fontossággal bírt. Az optikában az érintő határozza meg, hogy az adott alakú lencsére érkező fénysugárnak mekkora a beesési szöge. A mechanikában a test pályáját leíró görbe érintője adja meg a sebesség irányát az adott pillanatban. A geometriában az egymást metsző görbék szögét a közös pontbeli érintők által bezárt szögként határozzák meg. Egy $y = f(x)$ egyenletű görbe $P(x, f(x))$ pontbeli érintőjét a fent leírt dinamikus eljárással határozzuk meg. Első lépésben kiszámítjuk a P és a $Q(x+h, f(x+h))$ pontokon átmenő szelő meredekségét. Ezután megvizsgáljuk, létezik-e a meredekség határértéke, amint $h \to 0$ (l. a 2.67. ábrát). Amennyiben a határérték létezik, a görbe P pontbeli meredekségének tekintjük, a P-beli érintő pedig az ilyen meredekségű, P-n átmenő egyenes.

DEFINÍCIÓK **Görbe meredeksége, érintője**

Az $y = f(x)$ egyenletű **görbe meredeksége** a $P(x_0, f(x_0))$ pontban:

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{(amennyiben a határérték létezik)}$$

A görbe P-beli **érintője** a P-n átmenő, m meredekségű egyenes.

Ha egy új definíció helyességéről akarunk meggyőződni, érdemes kipróbálni, hogy alkalmazható-e a korábbról már ismert esetekre. A következő példa igazolja, hogy a meredekség új definíciója a nem függőleges egyenesek esetében ekvivalens az 1.2. alfejezetbeli meghatározással.

2. PÉLDA **A definíció próbája.**

Igazoljuk, hogy az $y = mx + b$ egyenes érintője bármely $(x_0, mx_0 + b)$ pontban önmaga.

Megoldás. Legyen $f(x) = mx + b$.

1. Adjuk meg az $f(x_0)$ és az $f(x_0 + h)$ függvényértékeket.

$$f(x_0) = mx_0 + b$$
$$f(x_0 + h) = m(x_0 + h) + b = mx_0 + mh + b$$

2. Határozzuk meg a $\lim_{h\to 0}(f(x_0 + h) - f(x_0))/h$ határértéket.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(mx_0+mh+b)-(mx_0+b)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{mh}{h} = m$$

3. Írjuk fel a P-beli érintő egyenletét. Az $(x_0, mx_0 + b)$ ponton átmenő, m iránytangensű egyenes egyenlete:

$$y = (mx_0 + b) + m(x - x_0)$$
$$y = mx_0 + b + mx - mx_0$$
$$y = mx + b$$ □

Foglaljuk össze a 2. példában követett eljárás lépéseit.

Az $y = f(x)$ egyenletű görbe $(x_0, f(x_0))$ pontbeli érintője.

1. Határozzuk meg az $f(x_0)$ és az $f(x_0 + h)$ függvényértékeket.
2. Határozzuk meg az

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

meredekséget.

3. Ha létezik ez a határérték, akkor a keresett érintő egyenlete:

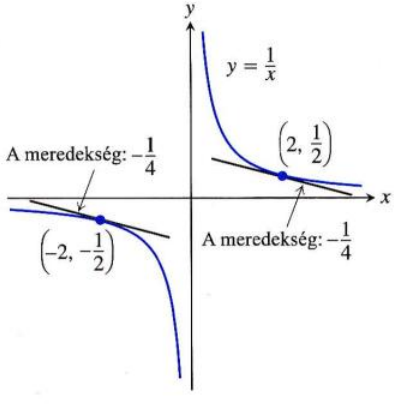
$$y = f(x_0) + m(x - x_0).$$

3. PÉLDA **Az $y = 1/x$ egyenletű görbe meredeksége és érintője az $x \neq 0$ abszcisszájú pontokban..**

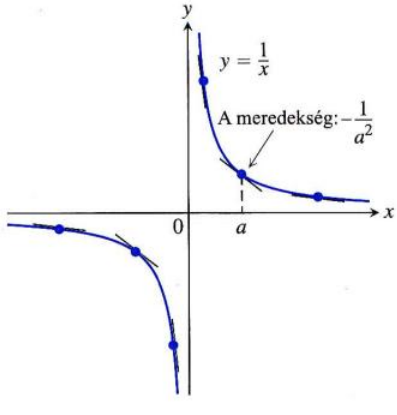
(a) Határozzuk meg az $y = 1/x$ egyeletű görbe meredekségét az $x = a \neq 0$ abszcisszájú pontban.

(b) Melyik pontban lesz az érintő meredeksége $-1/4$?

(c) Mi történik a görbe $(a, 1/a)$ pontbeli érintőjével, ha a változik?



2.68. ÁBRA: Az $y = 1/x$ egyenletű görbének két olyan érintője van, amelynek meredeksége $-1/4$ (3. példa).



2.69. ÁBRA: Az origó környékén igencsak meredek érintők egyre jobban közelítenek a vízszinteshez, amint az érintési pont az origótól távolodik.

Megoldás.

(a) Esetünkben tehát $f(x) = 1/x$. Az $(a, 1/a)$ pontbeli meredekség:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h} = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{ha(a+h)} = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a $\lim_{h \to 0}$ „előtagot" minden tört előtt szerepeltetnünk kellett, egészen addig, amíg az utolsó lépésben – behelyettesítéssel – meg nem adtuk, mennyi is ez a határérték. Az a szám pozitív és negatív is lehet, de nem lehet egyenlő 0-val.

(b) Az $y = 1/x$ egyenletű görbe meredeksége az $x = a$ abszcisszájú pontban $-1/a^2$. Értéke tehát akkor $-1/4$, ha

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4},$$

vagyis ha $a^2 = 4$, azaz ha $a = 2$ vagy $a = -2$ (l. a 2.68. ábrát).

(c) Vegyük észre, hogy $-1/a^2$ minden $a \neq 0$ esetén negatív. Amennyiben $a \to 0^+$, az érintő egyre meredekebb lesz (l. a 2.69. ábrát). Ugyanez a helyzet akkor is, amikor $a \to 0^-$. Ahogy a egyre messzebb kerül (bármelyik irányban) az origótól, az érintő meredeksége 0^- felé, maga az érintő pedig a vízszinteshez közelít. □

Változási sebesség. Függvény pontbeli deriváltja

Az

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

kifejezést az **f függvény x_0 pontbeli, h növekményhez tartozó differenciahányadosának** nevezzük. Ha a differenciahányadosnak létezik határértéke, amint $h \to 0$, akkor ezt a határértéket az **f függvény x_0 pontbeli deriváltjának** vagy **differenciálhányadosának** nevezzük. Ha a differenciahányadost a megfelelő szelő meredekségeként értelmezzük, akkor a derivált a görbe $x = x_0$ pontbeli meredekségét – vagyis az x_0 abszcisszájú ponthoz tartozó érintő meredekségét – adja meg. Ha a differenciahányadost a 2.1. alfejezetbeli példák nyomán a függvény átlagos változási sebességeként interpretáljuk, akkor a deriváltat a függvény $x = x_0$ pontbeli változási sebességének tekinthetjük. A derivált az analízis két legfontosabb fogalmának egyike, a következő két fejezetetben ő lesz a főszereplő. (A másik alapvető fogalom az integrálé, ezt az 5. fejezetben definiáljuk.)

4. PÉLDA **Pillanatnyi sebesség.**

A 2.1. alfejezet 1. és 2. példájában egy szabadon eső kődarab mozgását vizsgáltuk. A szabadesés Galilei-féle törvénye alapján tudjuk, hogy a kő t másodperc alatt $y = 4{,}9t^2$ méter hosszúságú utat tesz meg. Egyre rövidebb időtartamokat figyelembe véve becsültük meg, mekkora a kő sebessége 1 másodperc elteltével. Újabb ismereteink alapján már pontos választ adhatunk a kérdésre: mekkora a kő sebessége a $t = 1$ pillanatban?

Megoldás. Legyen $f(t) = 4{,}9t^2$. A kő átlagsebessége a $t = 1$ és a $t = 1+h$ pillanatok között eltelt idő alatt

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{4{,}9(1+h)^2 - 4{,}9\cdot 1^2}{h} = \frac{4{,}9h^2+9{,}8h}{h} = 4{,}9\cdot(h+2).$$

Eszerint a kő sebessége a $t = 1$ időpontban:

$$\lim_{h\to 0} 4{,}9(h+2) = 4{,}9(0+2) = 9{,}8 \text{ m/s}$$

A 2.1. alfejezetben tehát jó becslést adtunk. □

Összegzés

Összefoglalásképpen leszögezhetjük: a görbék meredeksége és érintője, a függvény változási sebessége, a differenciahányados határértéke és a derivált tárgyalásakor lényegében mindig ugyanarról volt szó, az éremnek tehát öt odala van:

1. az $y = f(x)$ egyenletű görbe meredeksége az $x = x_0$ helyen;

2. az $y = f(x)$ egyenletű görbe $x = x_0$ abszcisszájú pontbeli érintőjének meredeksége;

3. az $f(x)$ függvény változási sebessége az $x = x_0$ helyen;

4. az f függvény $x = x_0$ pontbeli deriváltja;

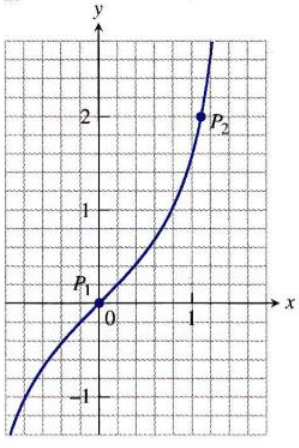
5. az $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ differenciahányados határértéke, amint $h \to 0$.

2.7. Feladatok

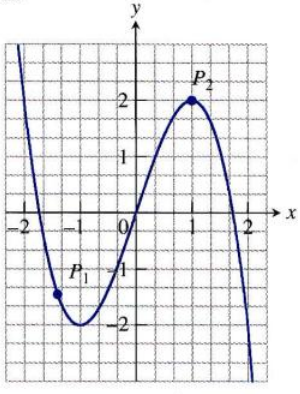
Meredekség. Érintők

Az 1–4. feladatokban az ábra alapján becsüljük meg a görbék meredekségét a P_1, illetve a P_2 pontban. (A nyomda ördöge nem alszik: lehetséges, hogy az Olvasó becslése jobb mint az, amelyik a Megoldásokban szerepel.)

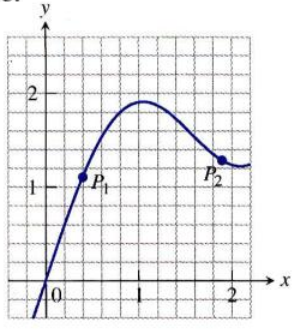
1.



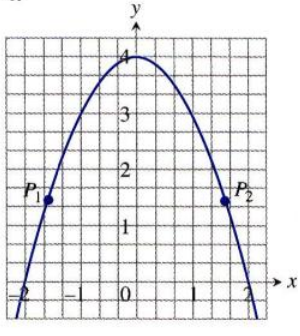
2.



3.



4.



Az 5–10. feladatokban írjuk fel a görbét az adott pontban érintő egyenes egyenletét; számításunkat ellenőrizzük a görbe és az érintő ábrázolásával.

5. $y = 4 - x^2$, $(-1,3)$

6. $y = (x-1)^2 + 1$, $(1,1)$

7. $y = 2\sqrt{x}$, $(1,2)$

8. $y = \dfrac{1}{x^2}$, $(-1,1)$

9. $y = x^3$, $(-2,-8)$

10. $y = \dfrac{1}{x^3}$, $\left(-2,-\frac{1}{8}\right)$

Állapítsuk meg a görbe adott pontbeli meredekségét, majd írjuk fel a görbét az adott pontban érintő egyenes egyenletét (11–18. feladatok).

11. $f(x) = x^2 + 1$, $(2,5)$

12. $f(x) = x - 2x^2$, $(1,-1)$

13. $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$, $(3,3)$

14. $g(x) = \dfrac{8}{x^2}$, $(2,2)$

15. $h(t) = t^3$, $(2,8)$

16. $h(t) = t^3 + 3t$, $(1,4)$

17. $f(x) = \sqrt{x}$, $(4,2)$

18. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $(8,3)$

Állapítsuk meg a görbét az adott abszcisszájú pontban érintő egyenes meredekségét (19–22. feladatok).

19. $y = 5x^2$, $x = -1$

20. $y = 1 - x^2$, $x = 2$

21. $y = \dfrac{1}{x-1}$, $x = 3$

22. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, $x = 0$

Adott meredekségű érintő

A megadott görbék melyik pontjában lesz vízszintes az érintő (23–24. feladatok)?

23. $f(x) = x^2 + 4x - 1$

24. $g(x) = x^3 - 3x$

25. Írjuk fel azoknak a -1 meredekségű egyeneseknek az egyenletét, amelyek érintik az $y = 1/(x-1)$ egyenletű görbét.

26. Írjuk fel azoknak az $1/4$ meredekségű egyeneseknek az egyenletét, amelyek érintik az $y = \sqrt{x}$ egyenletű görbét.

Változási sebesség

27. Ledobott kő. Egy 100 méter magas torony tetejéről leejtünk egy követ; a kő t másodperc elteltével $100 - 4{,}9t^2$ méter távolságra van a talajtól. Mekkora a kő sebessége 2 másodperc elteltével?

28. Rakéta sebessége. A kilövés után t másodperccel a rakéta $3t^2$ méter magasságban van a földfelszín felett. Mekkora a rakéta sebessége 10 másodperccel a kilövés után?

29. Körterület változási sebessége. Mekkora a kör $A = \pi r^2$ területének változási sebessége, ha $r = 3$?

30. Gömbtérfogat változási sebessége Mekkor a gömb $V = (4/3)\pi r^3$ térfogatának változási sebessége, amikor $r = 2$?

Létezik-e érintő az adott pontban?

31. Van-e az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

függvény grafikonjának érintője az origóban?

32. Van-e a

$$g(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

függvény grafikonjának érintője az origóban?

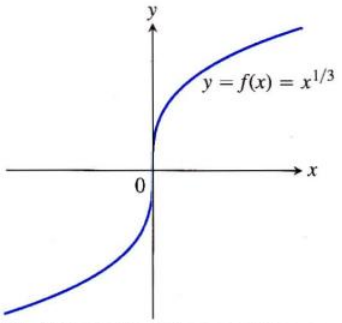
Függőleges érintők

Azt mondjuk, hogy az $y = f(x)$ egyenletű görbének az $x = x_0$ abszcisszájú pontban függőleges érintője van, ha

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \infty \text{ vagy } -\infty.$$

Az $y = f(x) = x^{1/3}$ függvény esetében ez a helyzet az $x = 0$ helyen:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{1/3} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty.$$

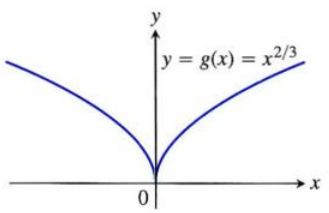


FÜGGŐLEGES ÉRINTŐ AZ ORIGÓBAN

Nem így áll a dolog a $y = g(x) = x^{2/3}$ függvény esetében:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{2/3}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{1/3}},$$

ez a határérték azonban nem létezik, mivel $\lim_{h\to 0^+} = \infty$, viszont $\lim_{h\to 0^-} = -\infty$ (l. az ábrát).



NEM LÉTEZIK ÉRINTŐ AZ ORIGÓBAN

33. Van-e az

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

függvény grafikonjának érintője az origóban? Indokoljuk válaszunkat.

34. Van-e az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

függvény grafikonjának érintője a $(0,1)$ pontban? Indokoljuk válaszunkat.

T A 35–44. feladatokban a következők a teendőink:

(a) Vázoljuk a megadott egyenletű görbét. Az ábra alapján állapítsuk meg, hol lehet a görbéknek függőleges érintőjük.

(b) Az (a) pontban adott válaszunkat számítással ellenőrizzük (a számítás során használjuk fel a 33. feladat előtt mondottakat).

35. $y = x^{2/5}$

36. $y = x^{4/5}$

37. $y = x^{1/5}$

38. $y = x^{3/5}$

39. $y = 4x^{2/5} - 2x$

40. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

41. $y = x^{2/3} - (x-1)^{1/3}$

42. $y = x^{1/3} + (x-1)^{1/3}$

43. $y = \begin{cases} -\sqrt{|x|}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

44. $y = \sqrt{|4-x|}$

Számítógépes függvényvizsgálat

Vizsgáljuk a 45–48. feladatokban megadott függvényeket az alábbiak szerint.

(a) Ábrázoljuk az $y = f(x)$ függvény grafikonját az $[x_0 - 1/2, x_0 + 3]$ intervallumon.

(b) Rögzített x_0 esetén a

$$q(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

függvényérték csupán a h növekménytől függ.

(c) Állapítsuk meg, mennyi a $\lim_{h\to 0} q(h)$ határérték.

(d) Ábrázoljuk az $y = f(x_0) + q(h)\cdot(x - x_0)$ egyenletű szelőket a $h = 3, 2, 1$ esetben. Ugyanebben a koordinátarendszerben rajzoltassuk ki az x_0 abszcisszájú ponthoz tartozó érintőt is.

45. $f(x) = x^3 + 2x, \quad x_0 = 0$

46. $f(x) = x + \dfrac{5}{x}, \quad x_0 = 1$

47. $f(x) = x + \sin(2x), \quad x_0 = \pi/2$

48. $f(x) = \cos x + 4\sin(2x), \quad x_0 = \pi$

2. fejezet Áttekintő kérdések

1. Mit nevezünk egy $g(t)$ függvény átlagos változási sebességének az $[a,b]$ intervallumon? Milyen kapcsolatban áll ez a fogalom a szelőkkel?

2. Milyen határérték adja meg egy $g(t)$ függvény $t = t_0$ pontbeli változási sebességét?

3. Hogyan szól a

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

határérték szemléletes (informális) definíciója? Miért nem precíz ez a definíció? Adjunk példákat.

4. Függ-e egy $f(x)$ függvény $\lim_{x\to x_0} f(x)$ határértékének létezése és számértéke attól, hogy mennyi az $f(x_0)$ függvényérték? Válaszunkat indokoljuk és illusztráljuk példákkal.

5. Milyen eseteket ismerünk, amikor nem létezik egy függvény adott pontbeli határértéke? Mondjunk mindegyikre példát.

6. Milyen tételekre támaszkodhatunk a határértékek kiszámításakor? Adjunk példákat a tételek alkalmazására.

7. Milyen kapcsolat áll fenn a jobb és bal oldali, illetve a „kétoldali" határérték között? Hogyan használható ez az összefüggés a határértékek kiszámításakor, vagy annak bzonyítására, hogy a határérték nem létezik? Adjunk példákat.

8. Mennyi $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}$? Van-e jelentősége annak, hogy θ-t szögben vagy radiánban adjuk meg? Indokoljuk válaszunkat.

9. Mikor mondjuk, hogy $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$? Adjunk példát arra, hogyan határozható meg adott f, x_0, L és ε esetén a határérték definíciójában szereplő δ.

10. Adjuk meg a következő állítások precíz definícióját.

(a) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 5$ **(b)** $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 5$

(c) $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$ **(d)** $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$

11. Mit értünk azon, hogy $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, illetve hogy $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$? Adjunk mindkettőre példát.

12. Mennyi $\lim_{x\to\pm\infty} k$ (ahol k állandó), illetve $\lim_{x\to\pm\infty} (1/x)$? Hogyan alkalmazhatók ezek a határértékek más függvények esetében? Válaszunkat illusztráljuk példákkal.

13. Milyen módszerrel határozható meg egy racionális törtfüggvény határértéke, amint $x \to \pm\infty$? Válaszunkat példákkal illusztráljuk.

14. Mit nevezünk egy függvénygrafikon vízszintes, függőleges, illetve ferde aszimptotájának? Adjunk mindegyikre példát.

15. Mi a feltétele annak, hogy egy függvény értelmezési tartománya valamely belső pontjában folytonos legyen? Hogyan módosul ez a feltétel az értelmezési tartomány végpontjai esetében?

16. A grafikon milyen támpontot ad ahhoz, hogy eldöntsük: mely pontokban folytonos egy függvény?

17. Mikor mondjuk, hogy egy függvény valamely pontban jobbról, illetve balról folytonos? Milyen kapcsolat áll fenn egy adott pontbeli folytonosság, valamint a jobb, illetve bal oldali folytonosság között?

18. Mit tudunk a polinomfüggvények, a racionális törtfüggvények, a trigonometrikus függvények, a hatványfüggvények és az abszolútérték-függvény folytonosságáról? Milyen összefüggés áll fenn a folytonosság és az algebrai műveletek, a racionális kitevőjű hatványozás, valamint a függvénykompozíció között?

19. Mikor lehet egy függvényt kiterjeszteni úgy, hogy valamely $x = c$ szakadási pontjában *is* folytonos legyen? Adjunk példákat.

20. Mikor mondjuk, hogy egy függvény valamely intervallumon folytonos?

21. Mikor nevezünk egy függvényt folytonosnak? Adjunk példát függvényre, amely (teljes értelmezési tartományán) nem folytonos ugyan, de az értelmezési tartomány bizonyos részintervalumain már az.

22. Milyen típusú szakadásai lehetnek egy függvénynek? Mikor mondjuk, hogy egy függvénynek valamely pontban megszüntethető szakadása van? Adjunk példákat.

23. Mikor mondjuk, hogy egy függvény rendelkezik a közbensőérték-tulajdonsággal? Milyen feltételek mellett igaz ez a tulajdonság egy adott intervallumon értelmezett függvényre? Milyen következményekkel jár ez a tulajdonság egy $f(x)$ függvény grafikonjára, illetve az $f(x) = 0$ egyenlet megoldására nézve?

24. Gyakran halljuk a következő „definíciót": egy függvény folytonos, ha a grafikonja lerajzolható anélkül, hogy ceruzánkat fel kellene emelnünk a papírról. Magyarázzuk meg, mi az alapja ennek a „meghatározásnak"?

25. Milyen egyenest nevezünk egy C görbe P pontbeli érintőjének?

26. Mi a jelentősége a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

határértéknek? Mit jelent ez a határérték a geometriában és a fizikában?

27. Hogyan határozzuk meg egy $y = f(x)$ egyenletű görbe valamely (x_0, y_0) pontbeli érintőjének egyenletét?

28. Milyen kapcsolat áll fenn az $y = f(x)$ egyenletű görbe $x = x_0$ helyen vett meredeksége, az $x = x_0$ pontbeli változási sebessége, valamint az $x = x_0$ pontbeli deriváltja között?

2. fejezet Gyakorló feladatok

Határérték és folytonosság

1. Ábrázoljuk az

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le -1 \\ -x, & -1 < x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

függvény grafikonját. Vizsgáljuk meg határérték, jobb, illetve bal oldali határérték, valamint folytonosság, jobb, illetve bal oldali folytonosság szempontjából az $x = -1, 0$ és 1 helyeket. Van-e az $f(x)$ függvénynek megszüntethető szakadása?

2. Ugyanaz, mint az 1. feladat, de az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 1/x, & 0 < |x| < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

függvény esetében.

3. Tegyük fel, hogy $f(t)$ és $g(t)$ mindenütt definiált függvények, továbbá, hogy $\lim_{t\to t_0} f(t) = -7$ és $\lim_{t\to t_0} g(t) = 0$. Mi az alábbi függvények határértéke, amint $t \to t_0$?

(a) $3f(t)$ **(b)** $(f(t))^2$

(c) $f(t)\cdot g(t)$ **(d)** $\dfrac{f(t)}{g(t)-7}$

(e) $\cos(g(t))$ **(f)** $|f(t)|$

(g) $f(t)+g(t)$ **(h)** $1/f(t)$

4. Tegyük fel, hogy $f(x)$ és $g(x)$ mindenütt definiált függvények, továbbá, hogy $\lim_{x\to 0} f(x) = 1/2$ és $\lim_{x\to 0} g(x) = \sqrt{2}$. Mi az alábbi függvények határértéke, amint $x \to 0$?

(a) $-g(x)$ **(b)** $g(x)\cdot f(x)$

(c) $f(x)+g(x)$ **(d)** $1/f(x)$

(e) $x+f(x)$ **(f)** $\dfrac{f(x)\cdot\cos x}{x-1}$

Az 5–6. feladatokban állapítsuk meg, mennyi $\lim_{x\to 0} g(x)$, ha

5. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{4-g(x)}{x}\right) = 1$?

6. $\lim_{x\to -4}\left(x\cdot \lim_{x\to 0} g(x)\right) = 2$?

7. Mely intervallumokon folytonosak az alábbi függvények?

(a) $f(x)=x^{1/3}$ **(b)** $g(x)=x^{3/4}$

(c) $h(x)=x^{-2/3}$ **(d)** $k(x)=x^{-1/6}$

8. Mely intervallumokon folytonosak az alábbi függvények?

(a) $f(x)=\operatorname{tg} x$ **(b)** $g(x)=\csc x$

(c) $h(x)=\dfrac{\cos x}{x-\pi}$ **(d)** $k(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

Határértékek kiszámítása

Számítsuk ki a határértékeket; ha valamelyik nem létezik, magyarázzuk meg, miért nem (9–16. feladatok).

9. $\lim \dfrac{x^2-4x+4}{x^3+5x^2-14x}$, amint **(a)** $x\to 0$; **(b)** $x\to 2$.

10. $\lim \dfrac{x^2+x}{x^5+2x^4+x^3}$, amint **(a)** $x\to 0$; **(b)** $x\to -1$.

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ **12.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x^4-a^4}$

13. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$ **14.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$ **16.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^3-8}{x}$

Számítsuk ki a g függvény adott helyen vett határértékét, ha fennállnak a következők (17–20. feladatok).

17. $\lim\limits_{x\to 0^+}(4g(x))^{1/3}=2$ **18.** $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\dfrac{1}{x+g(x)}=2$

19. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+1}{g(x)}=\infty$ **20.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5-x^2}{\sqrt{g(x)}}=0$

Határérték a végtelenben

Számítsuk ki a kijelölt határértékeket.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{5x+7}$ **22.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2+3}{5x^2+7}$

23. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-4x+8}{3x^3}$ **24.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2-7x+1}$

25. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-7x}{x+1}$ **26.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^3}{12x^3+128}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{\lfloor x\rfloor}$ **28.** $\lim\limits_{\theta\to\infty}\dfrac{\cos\theta-1}{\theta}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x+2\sqrt{x}}{x+\sin x}$ **30.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{2/3}+x^{-1}}{x^{2/3}+\cos^2 x}$

Folytonos kiterjesztés

31. Ki lehet-e terjeszteni az $f(x)=x(x^2-1)/|x^2-1|$ függvényt úgy, hogy az $x=1$ vagy az $x=-1$ helyen folytonossá váljon? Indokoljuk válaszunkat. (A függvény grafikonja meglehetősen érdekes, érdemes ábrázolni.)

32. Magyarázzuk meg, miért nem lehet az $f(x)=\sin(1/x)$ függvényt folytonosan kiterjeszteni az $x=0$ helyre?

T A 33–36. feladatokban először ábrázoljuk számítógép segítségével a megadott függvény grafikonját, hogy lássuk, létezik-e folytonos kiterjesztés az a pontban. Ha van, a TRACE AND ZOOM segítségével adjunk becslést a kiterjesztett függvény a helyen felvett értékére. Ha nincs „kétoldali" folytonos kiterjesztés, vizsgáljuk meg, hogy létezik-e – ugyancsak az a helyen – jobbról vagy balról folytonos kiterjesztés. Ha van, hasonló módszerrel becsüljük meg a megfelelő függvényértéket.

33. $f(x)=\dfrac{x-1}{x-\sqrt[4]{x}}$, $a=1$ **34.** $g(\theta)=\dfrac{5\cos\theta}{4\theta-2\pi}$, $a=\frac{\pi}{2}$

35. $h(t)=(1+|t|)^{1/t}$, $a=0$ **36.** $k(x)=\dfrac{x}{1-2^{|x|}}$, $a=0$

Zérushelyek

T **37.** Legyen $f(x)=x^3-x-1$.

(a) Igazoljuk, hogy f-nek van zérushelye -1 és 2 között.

(b) Oldjuk meg grafikusan (számítógép segítségével) az $f(x)=0$ egyenletet 10^{-8} pontossággal.

(c) Belátható, hogy a (b) feladat megoldása:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{1/3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{1/3}.$$

Ellenőrizzük ennek alapján a (b) pontban adott megoldásunkat.

T **38.** Legyen $f(\theta)=\theta^3-2\theta+2$.

(a) Igazoljuk, hogy f-nek van zérushelye -2 és 0 között.

(b) Oldjuk meg grafikusan (számítógép segítségével) az $f(\theta)=0$ egyenletet 10^{-4} pontossággal.

(c) Belátható, hogy a (b) feladat megoldása:

$$\left(\sqrt{\frac{19}{27}}-1\right)^{1/3}-\left(\sqrt{\frac{19}{27}}+1\right)^{1/3}.$$

Ellenőrizzük ennek alapján a (b) pontbeli megoldásunkat.

2. fejezet Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

T **1. Mennyi legyen 0^0?** A hatványozás alapvető szabályainak egyike szerint minden 0-tól különböző a szám esetén $a^0=1$. Azt is tudjuk, hogy minden n pozitív egész szám esetén $0^n=0$.

Ha megpróbálnánk ezeket a szabályokat a 0^0 hatványra alkalmazni, egymásnak ellentmondó eredményre jutnánk: 0^0 az első szabály szerint 1, a második szerint pedig 0.

Persze valójában semmiféle ellentmondás nincs, elvégre esetünkben egyik szabály sem alkalmazható. Valójában 0^0 értékét tetszőlegesen definiálhatjuk – feltéve, hogy jó érveink vannak definíciónk helyessége mellett.

A kedves Olvasó mit javasol? A döntésben segítségére lehetnek az alábbi megfontolások (illetve a következő feladat).

(a) Számoljuk ki x^x értékét $x=0{,}1$, $0{,}01$ és $0{,}001$ stb. esetekben, ameddig a számológépünk engedi. Mire következtethetünk az eredményekből?

(b) Rajzoltassuk ki számítógéppel az $y = x^x$ függvény grafikonját a $(0, 1]$ intervallumon. Igaz ugyan, hogy ez a függvény a 0 helyen nincs értelmezve, a grafikon azonban jobbról az y-tengely egy meghatározott pontja felé közelít. Melyik ez a pont?

T 2. További vizsgálódás 0^0 ügyében. Amint $x \to \infty$, mind az $1/x$, mind az $1/\ln x$ értéke 0-hoz tart. Mi történik az

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{1/\ln x}$$

számokkal, ha $x \to \infty$? A kérdés kétféleképpen is megközelíthető:

(a) Számítsuk ki az $f(x)$ értékeket, amikor $x = 10$, 100, 1000 stb., amíg a számológépünk bírja. Milyen mintázatra bukkanunk?

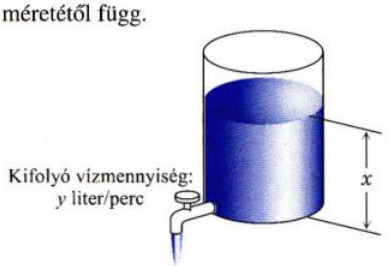
(b) Rajzoltassuk ki f grafikonját több ablakban, olyanban is, amely az origót is tartalmazza. Mit mutatnak a grafikonok?

3. A Lorentz-kontrakció. A relativitáselmélet szerint egy mozgó test (például egy rakéta) a külső megfigyelő számára – a test sebességétől függő arányban – rövidebbnek látszik. Amennyiben egy megfigyelő a rakéta hosszát nyugalmi helyzetben L_0-nak mérte, úgy ha a rakéta hozzá képest v sebességgel halad, akkor számára

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

hosszúnak látszik. Ezt az egyenlet nevezzük Lorentz-formulának; c a fénysebesség ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s). Mi történik L-lel, amint v növekszik? Számítsuk ki a $\lim_{v \to c^-} L$ határértéket. Miért a bal oldali határértékre kérdeztünk rá?

4. Tartályból kiengedett víz mennyiségének ellenőrzése. Torricelli törvénye szerint egy tartályból egységnyi idő alatt kifolyó y vízmennyiség (l. az ábrát) a tartályban lévő víz x magasságának négyzetgyökével arányos. Az arányossági tényező a csap alakjától és méretétől függ.



Tegyük fel, hogy olyan tartályunk és csapunk van, amelyre $y = \sqrt{x}/2$. A tartályba időről-időre öntünk egy kevés vizet, hogy a kifolyó víz mennyisége állandó legyen. Milyen határok között mozoghat a tartályban lévő víz magassága, ha azt akarjuk, hogy

(a) percenként 1 liter víz folyjon ki legfeljebb 20% eltéréssel;

(b) percenként 1 liter víz folyjon ki legfeljebb 10% eltéréssel?

5. Hőtágulás. A legtöbb fém melegben tágul, hidegben pedig összehúzódik. Precíziós műszerek esetében emiatt az üzletekben ugyanolyan hőmérsékleten kell tárolni az alkatrészeket, amilyen hőmérsékleten a laboratóriumban használni fogjuk őket. Egy 21 C°-os 10 cm-es alumíniumtű hossza 21 C° közeli t hőmérsékleteken

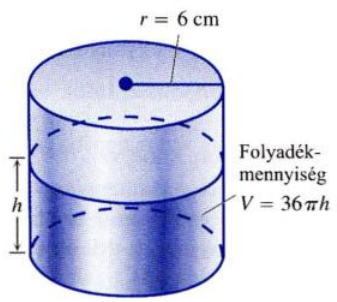
$$y = 10 + 1{,}8(t - 21) \cdot 10^{-4} \text{ cm}.$$

Tegyük fel, hogy a tűt gravitációs hullámok mérésére akarjuk használni, így hossza legfeljebb 0,0005 cm-rel térhet el az ideális 10 cm-től. Mennyire térhet el a hőmérséklet a 21 C°-tól, ha azt akarjuk, hogy a tű hossza a megengedett határokon belül maradjon?

6. Mérőedény jelzővonalai.



(a)



(b)

Az egyliteres mérőedények belseje általában egy 6 cm sugarú henger (l. az (a) ábrát). Az edénybe töltött folyadék térfogata az edényben lévő folyadék magasságától függ:

$$V = \pi 6^2 h = 36\pi h \text{ liter}.$$

Mennyivel térhet el a folyadékszint az 1 literes jelzővonaltól (l. a (b) ábrát), ha 1 százalékos pontossággal akarunk egy litert kimérni?

A határérték pontos definíciója

A 7–10. feladatokban a határérték precíz („epszilon-deltás") definíciója alapján igazoljuk, hogy a függvények az adott pontban folytonosak.

7. $f(x) = x^2 - 7$, $x_0 = 1$ **8.** $g(x) = 1/(2x)$, $x_0 = 1/4$

9. $h(x) = \sqrt{2x - 3}$, $x_0 = 2$ **10.** $F(x) = \sqrt{9 - x}$, $x_0 = 5$

11. A határérték egyértelműsége. Igazoljuk, hogy egy függvénynek nem lehet ugyanabban a pontban két különböző határértéke, vagyis ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ és $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$, akkor $L_1 = L_2$.

12. Igazoljuk, hogy tetszőleges k állandó esetén $\lim_{x \to x_0} kf(x) = k \lim_{x \to x_0} f(x)$.

13. Adjuk meg az alábbi határértékeket, ha tudjuk, hogy $\lim_{x \to 0^+} f(x) = A$ és $\lim_{x \to 0^-} f(x) = B$.

(a) $\lim_{x \to 0^+} f(x^3 - x)$ **(b)** $\lim_{x \to 0^-} f(x^3 - x)$

(c) $\lim_{x \to 0^+} f(x^2 - x^4)$ **(d)** $\lim_{x \to 0^-} f(x^2 - x^4)$

14. Határértékek és folytonosság. Melyik állítás igaz és melyik hamis az alábbiak közül? Amelyik igaz, mondjuk meg, miért igaz, amelyik hamis, arra adjunk ellenpéldát.

(a) Ha $\lim_{x\to a} f(x)$ létezik, $\lim_{x\to a} g(x)$ viszont nem létezik, akkor $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ nem létezik.

(b) Ha sem $\lim_{x\to a} f(x)$, sem $\lim_{x\to a} g(x)$ nem létezik, akkor $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ sem létezik.

(c) Ha f folytonos az x helyen, akkor ott $|f|$ is folytonos.

(d) Ha $|f|$ folytonos az a helyen, akkor ott f is folytonos.

A 15–16. feladatokban igazoljuk, hogy a függvénynek a megadott helyen létezik folytonos kiterjesztése.

15. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$, $x=-1$

16. $g(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{2x-6}$, $x=3$

17. Egyetlen pontban folytonos függvény. Legyen

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális,}\\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.}\end{cases}$$

(a) Igazoljuk, hogy f folytonos az $x=0$ helyen.

(b) Bizonyítsuk be, hogy f egyetlen nemnulla x helyen sem folytonos (használjuk fel, hogy minden nemüres intervallumban egyaránt van racionális és irracionális szám is).

18. A Dirichlet-féle „vonalzófüggvény". Minden x racionális szám felírható két egész szám olyan m/n hányadosaként, amelyben n pozitív, továbbá m-nek és n-nek 1-en kívül nincs közös osztója. Definiáljunk a $[0,1]$ intervallumon egy $f(x)$ függvényt a következőképpen:

$$f(x)=\begin{cases} 1/n, & \text{ha } x=m/n \text{ racionális szám és}\\ & \text{az } m/n \text{ tört nem egyszerűsíthető,}\\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.}\end{cases}$$

Például $f(0)=f(1)=1$, $f(1/2)=1/2$, $f(1/3)=f(2/3)=1/3$, $f(1/4)=f(3/4)=1/4$ stb.

(a) Igazoljuk, hogy f a $[0,1]$ intervallum egyetlen racionális pontjában sem folytonos.

(b) Igazoljuk, hogy f a $[0,1]$ intervallum minden irracionális pontjában folytonos. (*Útmutatás:* Bármely pozitív ε szám esetén csupán véges sok olyan $r\in[0,1]$ racionális szám van, amelyre $f(r)\geq\varepsilon$.)

(c) Vázoljuk f grafikonját. Mit gondolunk, miért nevezik ezt a függvényt „vonalzófüggvénynek"?

19. Az Egyenlítő átellenes pontjai. Igaz-e, hogy az Egyenlítőn egymással szemben elhelyezkedő pontpárok között mindig van olyan, amelynek tagjai egyenlő hőmérsékletűek? Indokoljuk válaszunkat.

20. Mennyi $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$, ha $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))=3$ és $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x))=-1$?

21. „Majdnem" lineáris másodfokú egyenletek megoldása. Ha $0\neq a>-1$, akkor az $ax^2+2x-1=0$ egyenletnek két megoldása van, egy pozitív és egy negatív:

$$r_+(a)=\frac{-1+\sqrt{1+a}}{a},\quad r_-(a)=\frac{-1-\sqrt{1+a}}{a}$$

(a) Mi történik az $r_+(a)$ megoldással, amint $a\to 0$? És amint $a\to -1^+$?

(b) Mi történik az $r_-(a)$ megoldással, amint $a\to 0$? És amint $a\to -1^+$?

(c) Illusztráljuk az (a) és (b) pontra adott válaszainkat az $r_+(a)$ és $r_-(a)$ függvények grafikonjával.

(d) Ábrázoljuk az $f(x)=ax^2+2x-0$ függvények grafikonját, az $a=1$, 0,5, 0,2, 0,1, 0,05 esetekben.

22. Igazoljuk, hogy az $x+2\cos x=0$ egyenletnek van legalább egy megoldása.

23. Korlátos függvények. Azt mondjuk, hogy a valós értékeket felvevő f függvény a D halmazon **felülről korlátos**, ha van olyan N szám, hogy minden $x\in D$ esetén $f(x)\leq N$. Az összes ilyen N számot az f függvény **felső korlátjának** nevezzük (a D halmazon). Hasonlóan: az f függvény a D halmazon **alulról korlátos**, ha van olyan M szám, hogy minden $x\in D$ esetén $f(x)\geq M$. Az ilyen tulajdonságú M számokat f **alsó korlátjának** nevezzük (a D halmazon). Azt mondjuk, hogy f a D halmazon **korlátos**, ha ott felülről és alulról is korlátos.

(a) Igazoljuk, hogy f pontosan akkor korlátos a D halmazon, ha van olyan B szám, hogy minden $x\in D$ esetén $|f(x)|\leq B$.

(b) Tegyük fel, hogy f felülről korlátos, N pedig egy felső korlátja. Igazoljuk, hogy ha $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$, akkor $L\leq N$.

(c) Tegyük fel, hogy f alulról korlátos, M pedig egy alsó korlátja. Igazoljuk, hogy ha $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$, akkor $L\geq M$.

24. $\max\{a,b\}$ **és** $\min\{a,b\}$

(a) Igazoljuk, hogy a

$$\max\{a,b\}=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}$$

kifejezés a-val egyenlő, ha $a\geq b$, és b-vel, ha $b\geq a$.

(b) Keressünk hasonló kifejezést $\min\{a,b\}$-re, amely a és b közül a nem nagyobbat választja ki.

A $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ összefüggés általánosítása

A $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ összefüggés általánosítható: ha valamely $f(x)$ függvényre $\lim_{x\to c} f(x)=0$, továbbá létezik egy olyan, c-t tartalmazó nyílt intervallum, amelynek minden x elemére (kivéve esetleg magát a c pontot) $f(x)\neq 0$, akkor

$$\lim_{x\to c}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1.$$

Lássunk néhány példát.

(a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}=1$

(b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=1\cdot 0=0$

(c) $\lim_{x\to -1}\dfrac{\sin(x^2-x-2)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\dfrac{\sin(x^2-x-2)}{x^2-x-2}\cdot$

$\cdot\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}=1\cdot\lim_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-2)}{x+1}=-3$

(d) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1-\sqrt{x}}{x-1}=$

$=1\cdot\lim_{x\to 0}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(x-1)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\dfrac{1-x}{(x-1)(1+\sqrt{x})}=-\dfrac{1}{2}$

Számítsuk ki a határértékeket (25–30. feladatok).

25. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(1-\cos x)}{x}$

26. $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{\sin\sqrt{x}}$

27. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$

28. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2+x)}{x}$

29. $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sin(x^2-4)}{x-2}$

30. $\lim_{x\to 9}\dfrac{\sin(\sqrt{x}-3)}{x-9}$

3. fejezet Differenciálás

ÁTTEKINTÉS A 2. fejezetben egy görbe adott pontbeli meredekségét a szelők meredeksége határértékeként definiáltuk. Ez a határérték a derivált, amely megadja, milyen gyorsan változik a függvény az adott pontban. A derivált az analízis egyik legfontosabb fogalma, a sebesség, a gyorsulás, a betegségek terjedése például egyaránt deriváltként határozható meg. A deriváltakra hivatkozunk a hatékonyság maximalizálásakor, a legkedvezőbb alakú hengeres konzervdoboz méretének vagy egy régészeti lelet korának megállapításakor és még számos más feladat megoldásában. Ebben a fejezetben a deriváltak kiszámítását meggyorsító szabályokról lesz szó, valamint arról, hogy miként használhatók a deriváltak bonyolult függvények közelítéséhez.

3.1. A deriváltfüggvény

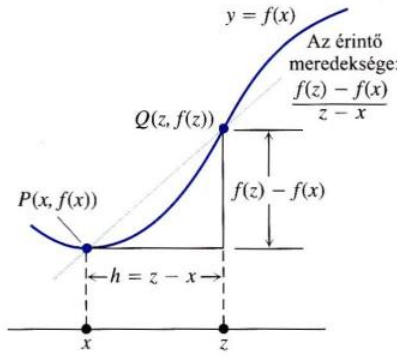
A 2. fejezet végén adtuk meg a következő definíciót: az $y = f(x)$ egyenletű görbe meredeksége az $x = x_0$ abszcisszájú pontban

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ezt a határértéket – amennyiben létezik – az f függvény x_0 pontbeli deriváltjának neveztük. A következőkben a deriváltról mint függvényről fogunk beszélni a fenti határértéket vizsgálva f értelmezési tartományának minden pontjában.

> DEFINÍCIÓ **Deriváltfüggvény.**
> Az $f(x)$ függvény $f'(x)$ **deriváltfüggvénye** az a függvény, amely minden x számhoz az
> $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$
> határértéket rendeli, amennyiben ez a határérték létezik.

Általában az $f'(x)$ jelölést alkalmazzuk. Az f' függvény értelmezési tartománya azoknak az x számoknak a halmaza, amelyekben a fenti határérték létezik; ez bizonyos esetekben megegyezik f értelmezési tartományával, máskor annak valódi részhalmaza. Ha az x helyen létezik az $f'(x)$ derivált, akkor azt mondjuk, hogy f **deriválható** (vagy **differenciálható**) az x helyen. Ha $f'(x)$ az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának minden pontjában létezik, akkor f-et **differenciálható függvénynek** (alkalmanként **mindenütt differenciálható függvénynek**) nevezzük.



A derivált az x helyen:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

3.1. ÁBRA: A derivált kifejezése attól függ, hogyan jelöljük a benne szereplő pontokat.

Ha $z = x+h$, akkor $h = z-x$, így $h \to 0$ pontosan akkor, ha $z \to x$. Az f függvény x pontbeli deriváltját ezek szerint a következő, ekvivalens formában is megadhatjuk (l. a 3.1. ábrát):

A derivált alternatív kifejezése

$$\lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

Deriváltak kiszámítása a definíció alapján

A derivált meghatározását **deriválásnak** (vagy differenciálásnak) nevezzük. Amikor hangsúlyozni akarjuk, hogy a deriválás az $y = f(x)$ függvényen végzett művelet, akkor az $f'(x)$ deriváltfüggvényre a

$$\frac{d}{dx} f(x)$$

jelölést alkalmazzuk. A 2.7. alfejezet 2. és 3. példáiban már meghatároztuk az $y = mx+b$ lineáris függvények és az $y = 1/x$ reciprokfüggvény deriváltját. A 2. példa szerint

$$\frac{d}{dx}(mx+b) = m;$$

így például

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}x+b\right) = \frac{3}{2}.$$

A 3. példa szerint

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Lássunk még két példát.

1. PÉLDA **A definíció alkalmazása.**
Deriváljuk az $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ függvényt.

Megoldás. Mivel $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ és $f(x+h) = \dfrac{x+h}{(x+h)-1}$, azért

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x+h}{x+h-1} - \dfrac{x}{x-1}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x+h-1)(x-1)} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

□

2. PÉLDA **A négyzetgyökfüggvény deriváltja.**

(a) Határozzuk meg a nemnegatív számokon értelmezett $y = \sqrt{x}$ függvény deriváltját.

(b) Írjuk fel az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonját a $(4,2)$ pontban érintő egyenes egyenletét.

Gyakran szükségünk lesz az

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

összefüggésre ($x > 0$).

Megoldás.

(a) Használjuk a derivált másik, ekvivalens alakját.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \\ &= \lim_{z\to x} \frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{z-x} = \\ &= \lim_{z\to x} \frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{(\sqrt{z}-\sqrt{x})(\sqrt{z}+\sqrt{x})} = \\ &= \lim_{z\to x} \frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(b) Az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonjának meredeksége az $x = 4$ helyen:

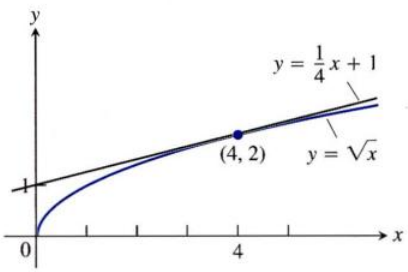
$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

A $(4,2)$ ponton átmenő, $1/4$ iránytangensű egyenes (vagyis a keresett érintő) egyenlete pedig (l. a 3.2. ábrát):

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x-4)$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$

Az $y = \sqrt{x}$ függvény $x = 0$ pontbeli deriváltjával a 6. Példában foglalkozunk. □



3.2. ÁBRA: Az $y = \sqrt{x}$ egyenletű görbe és a görbét a $(4,2)$ pontban érintő egyenes. Az érintő meredeksége az $x = 4$ pontbeli derivált értéke (2. példa).

Jelölések

Az $y = f(x)$ függvény deriváltjára sokféle jelölés használatos. (Mindvégig tartsuk szem előtt: x a független, y pedig a függő változó.) Gyakran találkozhatunk például az alábbiakkal:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D(f)(x) = D_x f(x)$$

A d/dx, illetve a D szimbólumokat *deriválás-operátornak* is nevezik. A dy/dx jelölés kiolvasása: „az y (mennyiség) x szerinti deriváltja", df/dx (illetve $(d/dx)f(x)$) kiolvasása pedig: „az f függvény x szerinti deriváltja". Az y' és az f' jelöléseket Newton, a d/dx alakúakat pedig Leibniz vezette be. A dy/dx kifejezést nem tekinthetjük törtnek (egészen addig, amíg – a 3.8. alfejezetben – be nem vezetjük a differenciál fogalmát).

Ügyeljünk arra, hogy $D(f)$ az f függvény értelmezési tartományát és deriváltját egyaránt jelölheti, a kontextusból mindig világosnak kell lennie, hogy melyikről van szó.

A derivált egy adott $x = a$ helyen felvett értékét a következőképpen jelölhetjük:

$$f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}$$

A 2. példa (b) részében kiszámított derivált jelölései:

$$f'(4) = \left.\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right|_{x=a} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

A jobb oldali | helyett alkalmanként a] zárójelet használjuk.

A derivált ábrázolása

Egy $y = f(x)$ függvény deriváltját gyakran f grafikonja meredekségének – több pontban elvégzett – becslése alapján ábrázoljuk. Ilyenkor az $(x, f'(x))$ pontokat folytonos vonallal kötjük össze, az így kapott görbe szerencsés esetben az $y = f'(x)$ deriváltfüggvény jó közelítésének tekinthető.

3. PÉLDA **A derivált ábrázolása.**

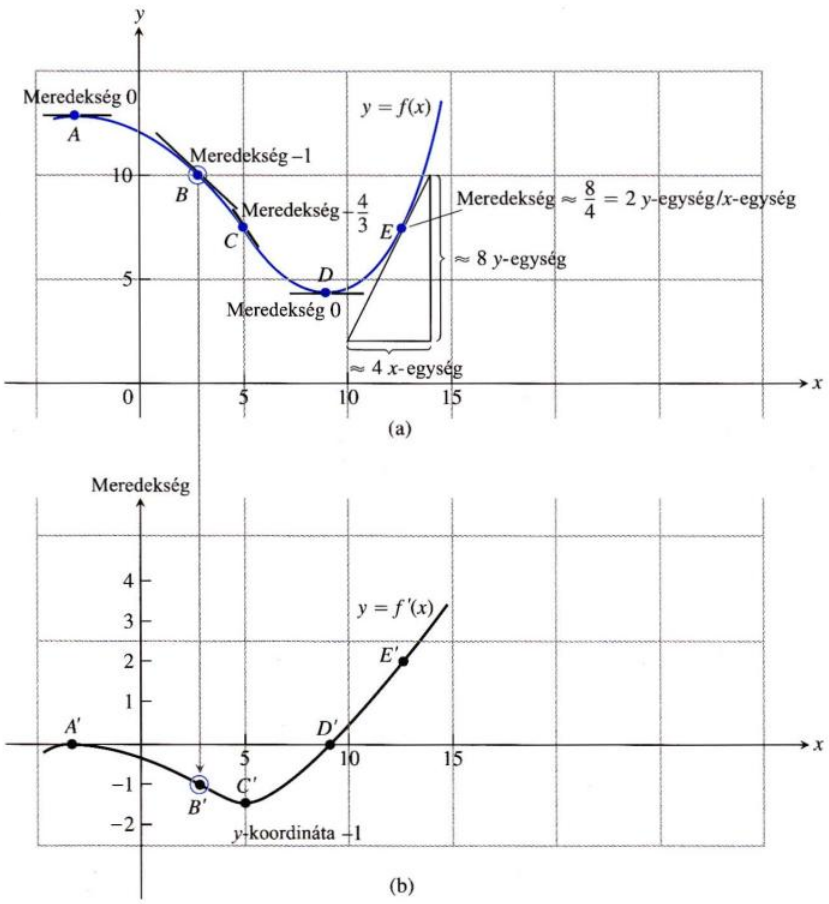
Vázoljuk a 3.3. ábra (a) részén ábrázolt $y = f(x)$ függvény deriváltfüggvényének grafikonját.

Megoldás. Az ábrán az f függvény néhány érintőjét tüntettük fel; az érintők meredeksége az adott pontbeli derivált értéke. Az $(x, f'(x))$ pontokat ezután folytonos vonallal kötjük össze; l. a 3.3. ábra (b) részét. □

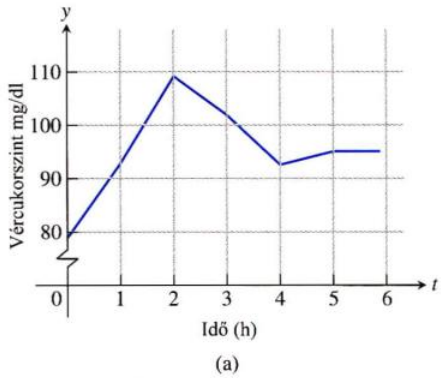
Milyen információkkal szolgál az $y = f'(x)$ deriváltfüggvény grafikonja? Első közelítésben a következőkkel:

1. jelzi, hogy az f változási sebessége mikor pozitív, negatív, illetve 0;
2. megadja a növekedés hozzávetőleges mértékét, és ennek a függvényértékekhez viszonyított arányát;
3. megmutatja, hogy a változási sebesség mikor növekszik és mikor csökken.

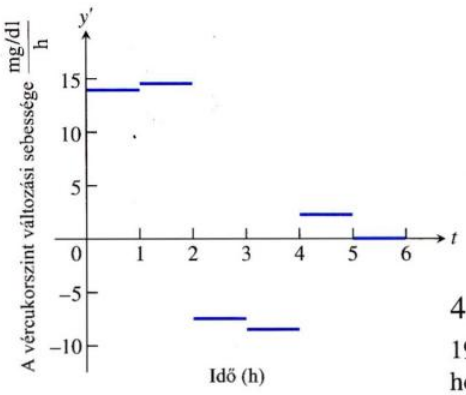
Lássunk még egy példát.



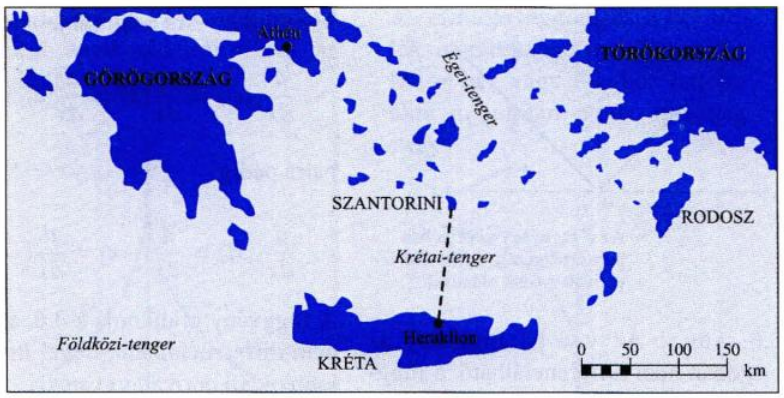
3.3. ÁBRA: Az $y = f'(x)$ deriváltfüggvény – az ábra (b) részén látható – grafikonját az $y = f(x)$ függvény garfikonja (l. az ábra (a) részét) érintőinek meredeksége alapján vázoltuk. A B' pont y-koordinátája tehát a B pontbeli érintő meredeksége, stb. Az f' függvény grafikonja azt szemlélteti, hogyan változik pontról pontra az f függvény grafikonjának meredeksége.



(a)



(b)



A *Daedalus* 1988. április 23-i útvonala.

◀ 3.4. ÁBRA: (a) A Daedalus egyik pilótájának vércukorszintje a 6 órás terheléses teszt alatt. (b) A derivált a vércukorszint változásának gyorsaságáról ad felvilágosítást.

4. PÉLDA **Vércukorszintmérés.**

1988. április 23-án az emberi erővel meghajtott Daedalus repülőgép rekordhosszúságú, 119 kilométeres utat tett meg Kréta és Santorini között az Égeitenger felett (3.4. ábra (a) része). A repülést megelőző 6 órás teszten a kutatók rendszeres időközönként megmérték a pilótajelöltek vércukorszintjét. A 3.4. ábra (b) részén az egyik sportember adatai láthatók; a vércukorszintet milligramm/deciliter egységben, óránként mérték.

A grafikon a mérési eredményeknek megfelelő pontokat összekötő szakaszokból áll. A meredekség minden szakaszon állandó, és arról ad felvilágosítást, hogy milyen ütemben változott a vércukor-koncentráció a mérési időpontok között. A derivált ennek megfelelően egy „lépcsős" függvény, amint a 3.4. ábra (b) részén látható. Az első órában a vércukorszint hozzávetőlegesen 79 mg/dl-ről 93 mg/dl-re nőtt, azaz $\Delta y = 93 - 79 = 14$ mg/dl; ezt a $\Delta t = 1$ órával elosztva a változás sebessége:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = 14 \text{ mg/dl óránként}$$

A $t = 1, 2, \ldots, 5$ időpontokban a vércukorszint változását nem tudjuk megbecsülni, mivel ezekben a pontokban a grafikonunknak nincs érintője. Ezen pontok ennek megfelelően nem elemei a deriváltfüggvény értelmezési tartományának.

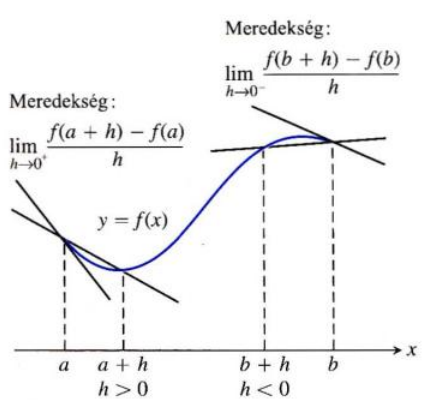
Differenciálható függvény. Jobb, illetve bal oldali deriváltak

Az $y = f(x)$ függvényt egy (véges vagy végtelen) nyílt intervallumon **differenciálhatónak** nevezzük, ha az intervallum minden pontjában van deriváltja. Az $y = f(x)$ függvény egy $[a,b]$ zárt intervallumon differenciálható, ha az intervallum (a,b) belsejének minden pontjában differenciálható, a végpontokban pedig léteznek a

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \textit{(jobb oldali derivált az a helyen)}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \textit{(bal oldali derivált az a helyen)}$$

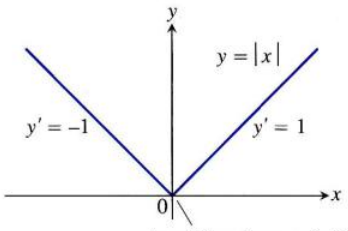
határértékek (l. a 3.5. ábrát).



3.5. ÁBRA: A végpontokban a derivált jobb, illetve bal oldali határérték.

5. PÉLDA **Az $y = |x|$ függvény az origóban nem differenciálható.**

Igazoljuk, hogy az $y = |x|$ függvény a $(-\infty, 0)$ és a $(0, \infty)$ intervallumon egyaránt differenciálható, az $x = 0$ helyen azonban nem.



Az y' függvény az origóban nem értelmezett, a jobb oldali derivált $\neq$ a bal oldalival.

3.6. ÁBRA: Az $y = |x|$ függvény az origóban nem differenciálható, a függvény grafikonja itt „megtörik".

Megoldás. Az origótól jobbra

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(1 \cdot x) = 1, \qquad \text{mivel } \tfrac{d}{dx}(mx+b) = m \text{ és itt } |x| = x,$$

balra pedig

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot x) = -1, \qquad \text{mivel itt } |x| = -x.$$

A függvény grafikonja a 3.6. ábrán tanulmányozható. Az origóban a függvény nem differenciálható, mivel itt a jobb és a bal oldali derivált nem egyenlő. A jobb oldali derivált ugyanis:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1,$$

a bal oldali viszont

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1. \qquad \square$$

6. PÉLDA **Az $y = \sqrt{x}$ függvény az $x = 0$ helyen nem differenciálható.**

A 2. példában kiszámítottuk, hogy minden $x > 0$ esetén

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ha a függvény az $x = 0$ helyen is differenciálható, akkor deriváltja a következő határérték:

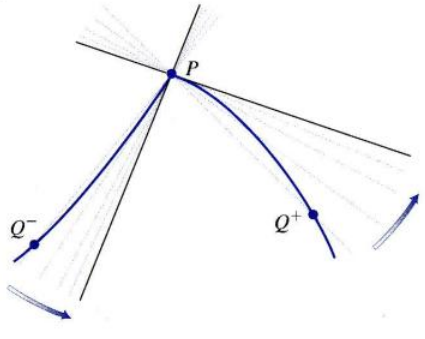
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty.$$

Mivel ez a határérték végtelen, a függvény az origóban nem differenciálható. Mivel a $(h, \sqrt{h})$ pontokat az origóval összekötő szelők meredeksége végtelenhez tart, amint $h \to 0^+$, a függvény origóbeli érintője függőleges.

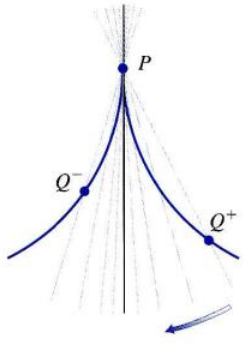
Mikor nem létezik egy függvény adott pontbeli deriváltja?

Egy $f(x)$ függvény az x_0 helyen akkor differenciálható, ha a $P(x_0, f(x_0))$ pontot és a P-hez közelítő Q pontokat összekötő szelők meredeksége egy meghatározott valós számhoz tart, amint Q a P-hez közelít. Amennyiben a szelőknek nincs határhelyzete, esetleg a függőlegeshez tartanak, akkor a függvény nem differenciálható az x_0 helyen. A differenciálhatóság tehát a függvénygrafikon *simaságát* követeli meg. Többféle oka is lehet tehát annak, ha egy függvény valamely pontban nem differenciálható. Előfordulhat, hogy a szóban forgó pontban a grafikon

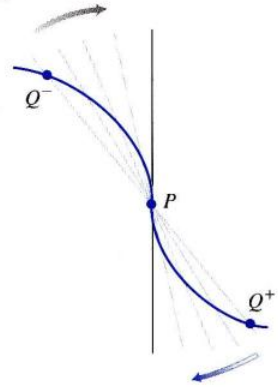
1. megtörik: a jobb és a bal oldali derivált nem egyenlő;



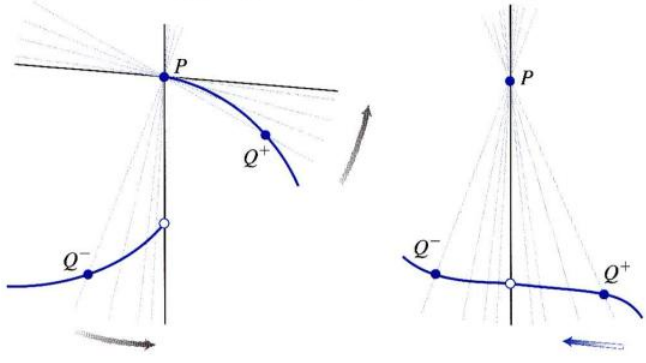
2. „csúcsos": a PQ szelők meredeksége egyik oldalról ∞-hez, a másikról $-\infty$-hez tart;



3. érintője függőleges: a PQ szelők meredeksége mindkét irányból ∞-hez vagy $-\infty$-hez tart (az ábra az utóbbi esetet mutatja); vagy



4. „megszakad": a függvény az adott pontban nem folytonos.



Minden differenciálható függvény folytonos

Egy függvény minden olyan pontban, ahol differenciálható, egyúttal folytonos is.

1. TÉTEL **Differenciálhatóság $\Rightarrow$ folytonosság.**
Ha az f függvény az $x = c$ helyen differenciálható, akkor ott folytonos is.

Bizonyítás. Annak alapján, hogy létezik $f'(c)$, belátjuk, hogy $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$, vagy ami ezzel ekvivalens, hogy $\lim\limits_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$. Ha $h \neq 0$, akkor

$$f(c+h) = f(c) + (f(c+h) - f(c)) = f(c) + \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \cdot h.$$

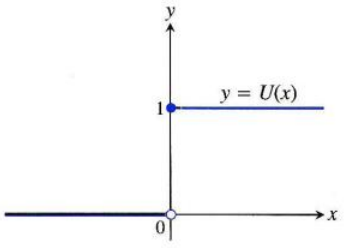
Ha pedig $h \to 0$, akkor a 2.2. alfejezetbeli 1. Tétel alapján

$$\lim_{h\to 0} f(c+h) = \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h =$$
$$= f(c) + f'(c) \cdot 0 = f(c) + 0 = f(c). \qquad \square$$

Hasonlóan belátható, hogy ha egy függvény valamely pontban balról (illetve jobbról) differenciálható, akkor ott balról (illetve jobbról) folytonos.

A tétel alapján tehát leszögezhetjük: ha egy függvény valamely pontban nem folytonos (például ugrás jellegű szakadása van), akkor ott nem lehet differenciálható. Az $y = \lfloor x \rfloor = \operatorname{int} x$ alsó egészrészfüggvény emiatt egyetlen olyan $x = n$ helyen sem differenciálható, ahol n egész szám (l. a 2.4 alfejezetbeli 4. példát).

Figyelem! Az 1. Tétel megfordítása nem igaz: abból, hogy egy függvény valamely pontban folytonos, nem következik, hogy ott differenciálható is (l. az 5. példát).



3.7. ÁBRA: Az $y = U(x)$ egységugrásfüggvényre a közbensőérték-tulajdonság nem áll, $U(x)$ ennélfogva nem lehet egyetlen olyan függvénynek sem a deriváltfüggvénye, amelynek értelmezési tartománya az összes valós szám halmaza.

A deriváltra vonatkozó Bolzano-tétel

A következő tétel tanulsága, hogy nem létezik minden f függvényhez olyan függvény, amelynek f a deriváltfüggvénye.

2. TÉTEL Darboux tétele.
Ha a és b olyan intervallum pontjai, amelyen az f függvény differenciálható, akkor az f' deriváltfüggvény $f'(a)$ és $f'(b)$ között minden értéket felvesz.

A tételt nem bizonyítjuk be; jegyezzük meg azonban a tanulságát: egy függvény valamely intervallumon csak akkor lehet deriváltja valamely függvénynek, ha ott rendelkezik a közbensőérték-tulajdonsággal. A 3.7. ábrán látható egységugrásfüggvény például egyetlen (minden valós számon értelmezett) függvénynek sem lehet deriváltja. Az 5. fejezetben be fogjuk bizonyítani, hogy minden folytonos f függvényhez található olyan függvény, amelynek f a deriváltfüggvénye.

A 2. Tételre a 4.4. alfejezetben hivatkozunk majd, amikor azt vizsgáljuk, mi történik egy kétszer differenciálható függvénnyel azokban a pontokban, amikor a függvény grafikonjának „görbülete" megváltozik.

3.1. Feladatok

A derivált kiszámítása

A definíció alapján határozzuk meg a függvény deriváltját; számítsuk ki a derivált értékét a megadott helyeken (1–6. feladatok).

1. $f(x) = 4 - x^2$, $f'(-3), f'(0), f'(1)$

2. $F(x) = (x-1)^2 + 1$, $F'(-1), F'(0), F'(2)$

3. $g(t) = \dfrac{1}{t^2}$, $g'(-1), g'(2), g'(\sqrt{3})$

4. $k(z) = \dfrac{1-z}{2z}$, $k'(-1), k'(1), k'(\sqrt{2})$.

5. $p(\theta) = \sqrt{3\theta}$, $p'(1), p'(3), p'(2/3)$

6. $r(s) = \sqrt{2s+1}$, $r'(0), r'(1), r'(1/2)$

Adjuk meg a deriváltfüggvényt (7–12. feladatok).

7. $\dfrac{dy}{dx} = ?$ $y = 2x^3$

8. $\dfrac{dr}{ds} = ?$ $r = \dfrac{s^3}{2} + 1$

9. $\dfrac{ds}{dt} = ?$ $s = \dfrac{t}{2t+1}$

10. $\dfrac{dv}{dt} = ?$ $v = t - \dfrac{1}{t}$

11. $\dfrac{dp}{dq} = ?$ $p = \dfrac{1}{\sqrt{q+1}}$

12. $\dfrac{dz}{dw} = ?$ $z = \dfrac{1}{\sqrt{3w-2}}$

Görbe meredeksége és érintője

Deriváljuk a függvényt; határozzuk meg annak az egyenesnek a meredekségét, amely a függvény grafikonját a megadott abszcisszájú pontban érinti (13–16. feladatok).

13. $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$, $x = -3$

14. $k(x) = \dfrac{1}{2+x}$, $x = 2$

15. $s = t^3 - t^2$, $t = -1$

16. $y = (x+1)^3$, $x = -2$

Deriváljuk a függvényt; írjuk fel a függvény grafikonját a megadott pontban érintő egyenes egyenletét (17–18. feladatok).

17. $y = f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x-2}}$, $(x,y) = (6,4)$

18. $w = g(z) = 1 + \sqrt{4-z}$, $(z,w) = (3,2)$

Számítsuk ki a deriváltfüggvény értékét a megadott helyen (19–22. feladatok).

19. $\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=-1}$ $s = 1 - 3t^2$

20. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\sqrt{3}}$ $y = 1 - \dfrac{1}{x}$

21. $\left.\dfrac{dr}{d\theta}\right|_{\theta=0}$ $r = \dfrac{2}{\sqrt{4-\theta}}$

22. $\left.\dfrac{dw}{dz}\right|_{z=4}$ $w = z + \sqrt{z}$

A derivált „alternatív" képletének alkalmazása

Határozzuk meg a függvények deriváltját a

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

formula alkalmazásával (23–26. feladatok).

23. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

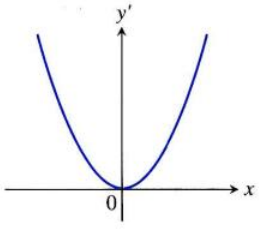
24. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

25. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

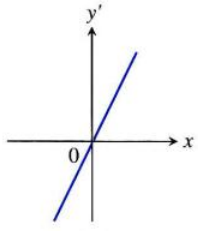
26. $f(x) = 1 + \sqrt{x}$

Grafikonok

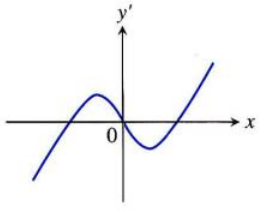
Állapítsuk meg, hogy az (a)–(d) ábrákon látható grafikonok közül melyik a megadott függvény deriváltjának grafikonja (27–30. feladatok).



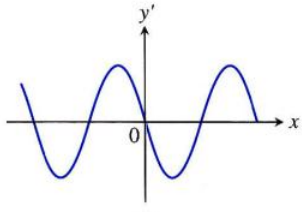
(a)



(b)

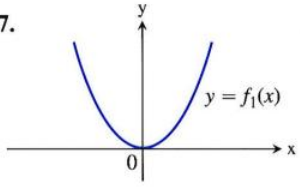


(c)

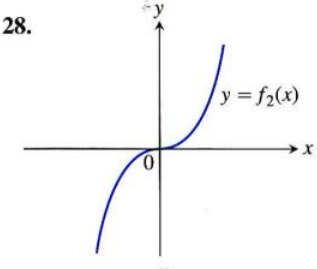


(d)

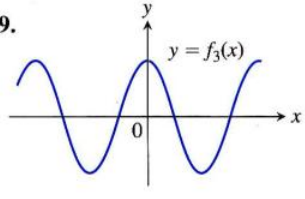
27.



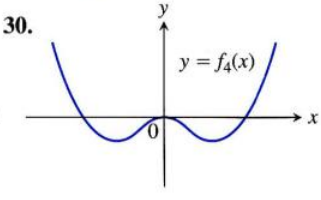
28.



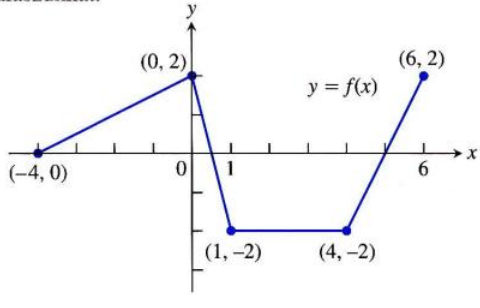
29.



30.



31. **(a)** Az ábrán az f függvény kizárólag egyenes szakaszokból álló grafikonja látható. A $[-4,6]$ intervallum mely pontjaiban nincs értelmezve az f' deriváltfüggvény? Indokoljuk válaszunkat.



(b) Ábrázoljuk a deriváltfüggvényt (lépcsős függvényt kell kapnunk).

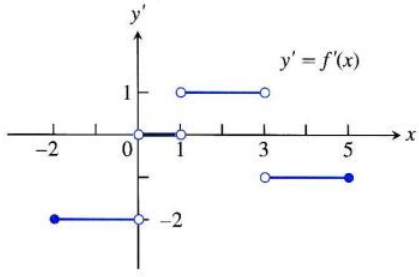
32. Függvény megadása a derivált alapján.

(a) Az alábbi információk alapján rajzoljuk meg a $[-2,5]$ intervallumon értelmezett f függvény grafikonját.

i. az f függvény grafikonja egymáshoz csatlakozó szakaszokból áll;

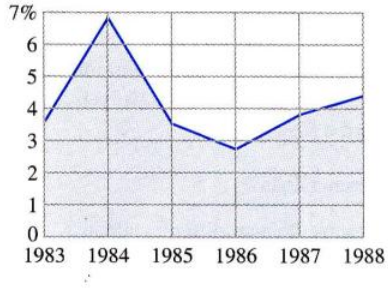
ii. az első szakasz kezdőpontja a $(-2,3)$ pont;

iii. f deriváltja az alábbi lépcsős függvény:



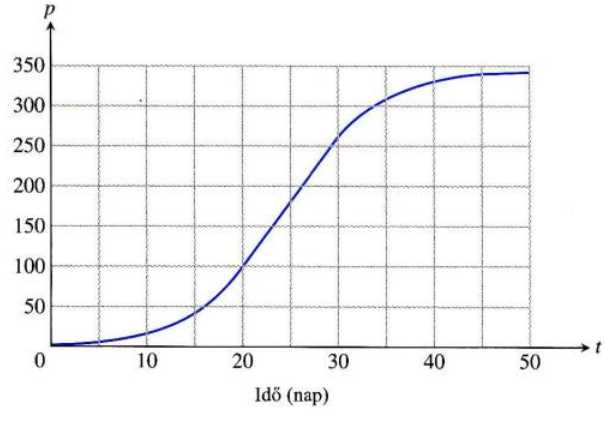
(b) Ugyanez a feladat, de f grafikonja első szakaszának kezdőpontja most a $(-2,0)$ pont.

33. Gazdasági növekedés. A grafikon az USA gazdaságának bővülését illusztrálja 1983–1988 között: az $y = f(t)$ függvény értékei azt mutatják, hogy az adott évben hány százalékkal nőtt a GDP. Vázoljuk a dy/dt deriváltfüggvény grafikonját (ügyeljünk arra, hogy f' és f értelmezési tartománya különbözik). [Forrás: *Statistical Abstracts of the United States*, 110th Edition, U.S. Department of Commerce, 427. o.]



34. Gyümölcslegyek. [*A 2.1. alfejezet 3. példájának folytatása.*] Zárt térben egy kezdetben kicsi populáció létszáma eleinte lassan növekszik, aztán gyorsabban, végül újra lelassul, ahogy közelít a környezet által eltartható nagysághoz.

(a) Az említett Példa módszerét követve vázoljuk a populáció növekedését szemléltető, az ábrán látható függvény deriváltját.

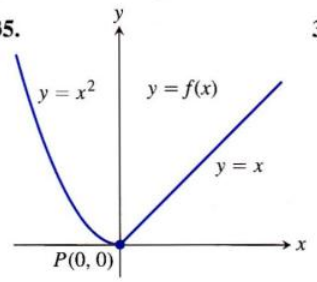


(b) Mely napokon volt a leggyorsabb, illetve a leglassabb a populáció növekedése?

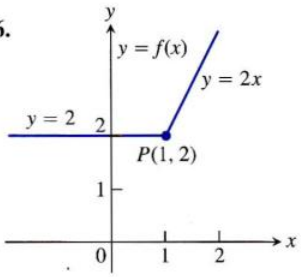
Féloldali deriváltak

A jobb és a bal oldali deriváltak kiszámításával igazoljuk, hogy az alábbi függvények a megadott P pontban nem deriválhatók (35–38. feladatok).

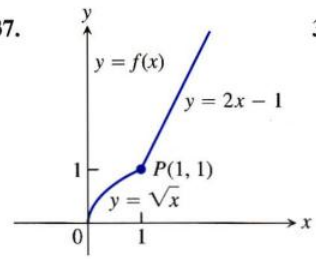
35.



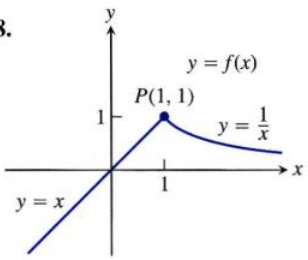
36.



37.



38.



Differenciálhatóság és folytonosság

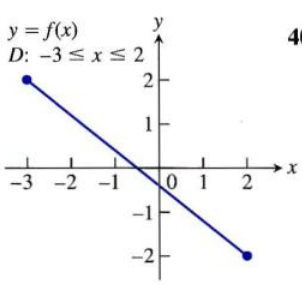
A 39–44. feladatok ábráin egy-egy D zárt intervallumon értelmezett függvény grafikonját láthatjuk. Melyek azok a D-beli pontok, amelyekben a függvény

(a) differenciálható?

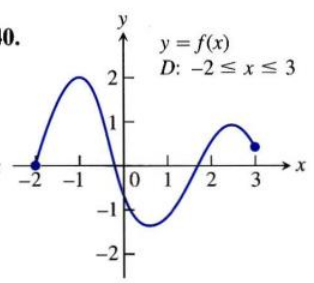
(b) folytonos, de nem differenciálható?

(c) nem differenciálható és nem is folytonos?

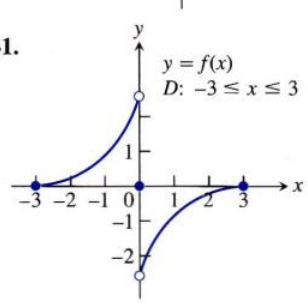
39.



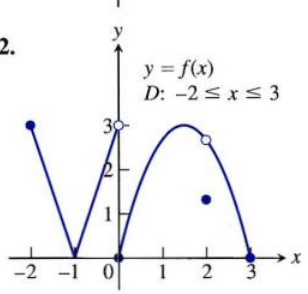
40.



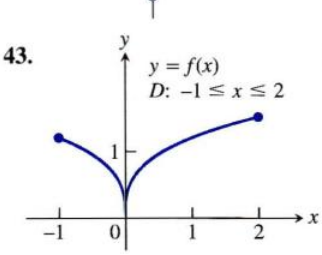
41.



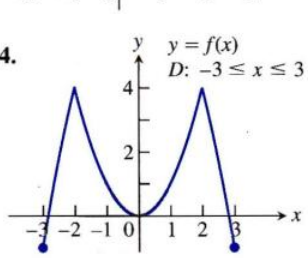
42.



43.



44.



További példák és feladatok

A 45–48. feladatokban

(a) Határozzuk meg a megadott $y = f(x)$ függvény deriváltját.

(b) Ábrázoljuk az $y = f(x)$ és az $y = f'(x)$ függvény grafikonját, és válaszoljunk a következő kérdésekre:

(c) Melyek azok az x-ek, amelyeknél f' értéke pozitív, negatív, illetve 0 (amennyiben vannak ilyenek)?

(d) Melyek azok az intervallumok, amelyeken az $f(x)$ függvény növekszik, illetve csökken? Milyen összefüggés van a (c) és a (d) kérdésre adott válaszaink között? (A témára a 4. fejezetben visszatérünk.)

45. $y = -x^2$ **46.** $y = -1/x$

47. $y = x^3/3$ **48.** $y = x^4/4$

49. Van-e olyan pont, amelyben az $y = x^3$ egyenletű görbe meredeksége negatív? Ha igen, melyik az? Indokoljuk válaszunkat.

50. Van-e vízszintes érintője az $y = 2\sqrt{x}$ egyenletű görbének? Ha igen, hol? Indokoljuk válaszunkat.

51. Parabola érintője. Van-e az $y = 2x^2 - 13x + 5$ egyenletű parabolának -1 meredekségű érintője? Ha van, határozzuk meg az érintési pontot és adjuk meg az egyenletét. Ha nincs, magyarázzuk meg, miért nincs.

52. Az $y = \sqrt{x}$ függvény érintője. Van-e az $y = \sqrt{x}$ egyenletű görbének olyan érintője, amely az x-tengelyt az $x = 1$ helyen metszi? Ha van, határozzuk meg az érintési pontot és adjuk meg az egyenletét. Ha nincs, magyarázzuk meg, miért nincs.

53. Az alsó egészrészfüggvény mint derivált? Létezik-e olyan, a $(-\infty, \infty)$ intervallumon értelmezett függvény, amelynek deriváltja az $y = \lfloor x \rfloor$ alsó egészrészfüggvény (l. a 2.55. ábrát)? Indokoljuk válaszunkat.

54. Az $y = |x|$ függvény deriváltja. Ábrázoljuk az $y = |x|$ függvény, majd az $y = (|x| - 0)/(x - 0) = |x|/x$ függvény grafikonját. Milyen következtetést vonhatunk le az ábrák alapján?

55. A $-f$ függvény deriváltja. Ha tudjuk, hogy az f függvény az $x = x_0$ helyen differenciálható, állíthatunk-e ennek alapján bármit is a $-f$ függvény $x = x_0$ pontbeli differenciálhatóságáról? Indokoljuk válaszunkat.

56. Konstansszoros deriváltja. Tegyük fel, hogy a $g(t)$ függvény a $t = 7$ pontban differenciálható. Állíthatunk ennek alapján valamit a $3g$ függvény $t = 7$ pontbeli differenciálhatóságáról? Indokoljuk válaszunkat.

57. Hányados határértéke. Tegyük fel, hogy a $g(t)$ és a $h(t)$ függvény minden valós számra értelmezett, továbbá hogy $g(0) = h(0) = 0$. Létezhet-ekkor a $\lim_{t \to 0} \dfrac{g(t)}{h(t)}$ határérték? Indokoljuk válaszunkat.

58. **(a)** Tegyük fel, hogy minden $-1 \le x \le 1$ esetén $|f(x)| \le x^2$. Igazoljuk, hogy ekkor f differenciálható az $x = 0$ helyen, és határozzuk meg az $f'(0)$ derivált értékét.

(b) Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

függvény differenciálható az $x = 0$ helyen, és adjuk meg az $f'(0)$ deriváltat.

59. Ábrázoljuk számítógép segítségével az $y = 1/(2\sqrt{x})$ függvény grafikonját a $0 \le x \le 2$ intervallumon. Ugyanebben az ablakban rajzoltassuk ki a $h = 1;\ 0,5;\ 0,1$ értékekre az

$$y = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

függvény grafikonját. Ezután tegyük ugyanezt a $h = -1;\ -0,5;\ -0,1$ értékekre. Értelmezzük a látványt.

60. Ábrázoljuk az $y = 3x^2$ függvényt a $[0,2] \times [0,3]$ ablakban. Ezután ugyanebben az ablakban ábrázoljuk az

$$y = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

függvény grafikonját a $h = \pm 2, \pm 1, \pm 0,2$ értékekkel. Magyarázzuk meg, amit látunk.

61. Weierstrass mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható függvénye.
A Weierstrass-féle $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2/3)^n \cos(9^n \pi x)$ függvény formulájában egy végtelen összeg szerepel, amelynek első nyolc tagja:

$$g(x) = \cos \pi x + (2/3)\cos(9\pi x) + (2/3)^2 \cos(9^2 \pi x) + \\ + (2/3)^3 \cos(9^3 \pi x) + \ldots + (2/3)^7 \cos(9^7 \pi x).$$

Ábrázoljuk az $y = g(x)$ függvény grafikonját, majd nagyítsuk és kicsinyítsük néhányszor. Állapítsuk meg, milyen ablakméretben „simul ki" az egyébként igencsak cakkos grafikon.

Számítógépes függvényvizsgálat

A 62–67. feladatokban számítógép segítségét igénybe véve hajtsuk végre a következőket:

(a) Ábrázoljuk az $y = f(x)$ függvény grafikonját, hogy lássuk, „nagy vonalakban" hogyan viselkedik.

(b) Definiáljuk az x független változó tetszőleges értékéhez tartozó h differenciahányadost.

(c) Képezzük a $h \to 0$ határértéket. Mit ad meg az így kapott formula?

(d) Helyettesítsük be x helyébe a megadott x_0 értéket, majd ábrázoljuk az $y = f(x)$ függvény grafikonját és az x_0-hoz tartozó érintőt közös ablakban.

(e) A (c) pontbeli formulában x helyébe írjunk néhány x_0-nál kisebb, illetve nagyobb értéket.

(f) Rajzoltassuk fel a (c) pontban felírt függvény grafikonját. Milyen következtetést vonhatunk le abból, hogy a kapott kifejezés értéke negatív, pozitív, illetve 0? Van-e összefüggés az (a)-beli és a (c)-beli formula által megadott függvény grafikonja között? Ha van, milyen? Válaszunkat indokoljuk.

62. $f(x) = x^3 + x^2 - x,\ x_0 = 1$ **63.** $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3},\ x_0 = 1$

64. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1},\ x_0 = 2$ **65.** $f(x) = \dfrac{x-1}{3x^2+1},\ x_0 = -1$

66. $f(x) = \sin 2x,\ x_0 = \pi/2$ **67.** $f(x) = x^2 \cos x,\ x_0 = \pi/4$

3.2. Deriválási szabályok

Ebben az alfejezetben kimondunk néhány szabályt, amelynek alapján számos függvény deriváltját ki lehet számítani. A szabályokat bebizonyítjuk, így nem kell minden alkalommal a derivált definíciójára hivatkoznunk.

Hatvány, szorzat, összeg, különbség

Első szabályunk szerint minden konstans függvény deriváltja nulla.

> 1. SZABÁLY **Konstans függvény deriváltja.**
> Ha minden x esetén $f(x) = c$ (ahol c egy állandó), akkor
>
> $$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0.$$

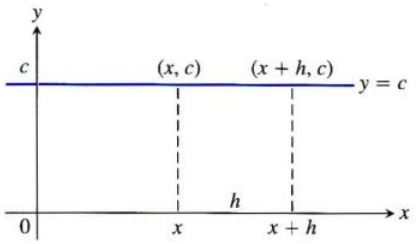
1. PÉLDA

Ha az x független változó bármely értéke esetén $f(x) = 8$, akkor

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(8) = 0.$$

Hasonlóan:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ és } \frac{d}{dx}\left(\sqrt{3}\right) = 0.$$



3.8. ÁBRA: Amikor azt mondjuk, $(d/dx)(c) = 0$, valójában nem állítunk mást, mint hogy egy konstans függvény sohasem változik: a vízszintes egyenesek meredeksége minden pontban 0.

Az 1. szabály bizonyítása. Alkalmazzuk a derivált definícióját az $f(x) = c$ konstans függvényre (l. a 3.8. ábrát). Az x független változó tetszőleges értéke esetén

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} = 0. \qquad \square$$

A második szabályunk az x^n alakú függvényekre vonatkozik, amennyiben n pozitív egész szám.

2. SZABÁLY Pozitív egész kitevőjű hatványfüggvények deriváltja.
Tetszőleges pozitív egész n esetén

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

Egy pozitív egész kitevőjű hatványfüggvény deriváltja tehát az eggyel alacsonyabb kitevőjű hatványfüggvénynek az eredeti kitevővel vett konstansszorosa.

2. PÉLDA **A 2. szabály alkalmazása.**

f	x	x^2	x^3	x^4	...
f'	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	...

$\square$

A 2. szabály első bizonyítása. A jobb oldalon álló szorzás elvégzésével könnyen igazolható a

$$z^n - x^n = (z-x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \ldots + zx^{n-2} + x^{n-1})$$

azonosság. Ekkor a derivált alternatív definíciója alapján a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim_{z\to x} \frac{z^n - x^n}{z-x} = \\ &= \lim_{z\to x}(z^{n-1} + z^{n-2}x + \ldots + zx^{n-2} + x^{n-1}) = \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned} \qquad \square$$

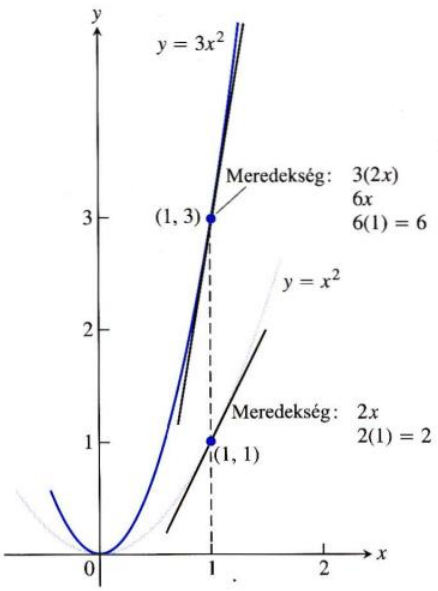
A 2. szabály második bizonyítása. Ha $f(x) = x^n$, akkor $f(x+h) = (x+h)^n$; tetszőleges n kitevő esetén $(x+h)^n$ a binomiális tétel alapján felírható, így a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] = \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned} \qquad \square$$

A harmadik szabály szerint egy függvény konstansszorosának deriváltja a függvény deriváltjának konstansszorosa.

3. SZABÁLY Függvény konstansszorosának deriváltja.
Ha u az x változó differenciálható függvénye, c pedig állandó, akkor

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}.$$



3.9. ÁBRA: Az $y = x^2$ és az $y = 3x^2$ egyenletű görbe grafikonja. Az y-koordináta háromszorosát véve az érintők meredeksége is háromszorosára nő (3. példa).

Jegyezzük meg a következő speciális esetet:

$$\frac{d}{dx}(cx^n) = cnx^{n-1},$$

ahol n pozitív egész szám.

3. PÉLDA

(a) A

$$\frac{d}{dx}(3x^2) = 3 \cdot 2x = 6x$$

formula szerint ha az $y = x^2$ egyenletű parabolát az y-tengely mentén háromszorosára nyújtjuk, akkor az új parabola érintőjének meredeksége minden pontban az eredeti parabola – ugyanazon abszcisszájú pontjához tartozó – érintője meredekségének háromszorosa lesz, l. a 3.9. ábrát.

(b) Egy fontos speciális eset.
Differenciálható függvény ellentettjének deriváltja a függvény deriváltjának ellentettje. Amennyiben ugyanis $c = -1$, úgy

$$\frac{d}{dx}(-u) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot u) = -1 \cdot \frac{d}{dx}(u) = -\frac{du}{dx}.$$ □

A 3. szabály bizonyítása.

$$\frac{d}{dx}cu = \lim_{h\to 0}\frac{cu(x+h) - cu(x)}{h} = \quad \text{a derivált definíciója alapján}$$

$$= c\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \quad \text{a határérték tulajdonsága}$$

$$= c\frac{du}{dx}. \quad \text{mivel } u \text{ deriválható}$$ □

A következő szabály szerint két differenciálható függvény összegének deriváltja a függvények deriváltjainak összege.

> 4. SZABÁLY **Összegfüggvény deriváltja**
> Ha u és v az x változó differenciálható függvényei, akkor az $u + v$ függvény minden olyan pontban differenciálható, ahol u és v is differenciálható, az ilyen pontokban pedig
>
> $$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

4. PÉLDA **Összegfüggvény deriváltjára.**
Ha $y = x^4 + 12x$, akkor

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(12x) = 4x^3 + 12.$$ □

A 4. szabály bizonyítása. A derivált definícióját az $f(x) = u(x) + v(x)$ függvényre alkalmazva:

$$\frac{d}{dx}[u(x)+v(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)+v(x+h)] - [u(x)+v(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} =$$

$$= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$ □

Az összegre és a konstansszorosra vonatkozó szabályok alapján igazolható a különbségfüggvény deriváltjának kiszámítására vonatkozó szabály: eszerint két differenciálható függvény különbségének deriváltja a deriváltfüggvények különbsége:

$$\frac{d}{dx}(u-v)=\frac{d}{dx}[u+(-1)v]=\frac{du}{dx}+(-1)\frac{dv}{dx}=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}.$$

Az összegre vonatkozó szabály kettőnél több (mindazonáltal véges sok) tagú összegre is általánosítható: ha $u_1, u_2, \ldots, u_n$ az x változó differenciálható függvényei, akkor az $u_1+u_2+\ldots+u_n$ függvény is differenciálható és

$$\frac{d}{dx}(u_1+u_2+\ldots+u_n)=\frac{d}{dx}u_1+\frac{d}{dx}u_2+\ldots+\frac{d}{dx}u_n.$$

5. PÉLDA **Polinomfüggvény deriváltja.**

$$\begin{aligned}
y&=x^3+\frac{4}{3}x^2-5x+1\\
\frac{dy}{dx}&=\frac{d}{dx}x^3+\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right)-\frac{d}{dx}(5x)+\frac{d}{dx}(1)=\\
&=3x^2+\frac{4}{3}\cdot 2x-5+0=\\
&=3x^2+\frac{8}{3}x-5.
\end{aligned}$$

A (mindenütt differenciálható) polinomfüggvények tehát tagonként deriválhatók.

Az összegszabály általánosításának bizonyítása. Teljes indukcióval (l. a függeléket) bebizonyítjuk, hogy minden $n\geq 2$ pozitív természetes számra

$$\frac{d}{dx}(u_1+u_2+\ldots+u_n)=\frac{du_1}{dx}+\frac{du_2}{dx}+\ldots+\frac{du_n}{dx}. \tag{1}$$

Az állítást az $n=2$ esetben már igazoltuk, ezt tekintjük az indukciós bizonyítás első lépésének.

Az indukciós lépésben abból, hogy az állítás az $n=k$ esetben igaz (ahol $k\geq n_0=2$ tetszőleges szám lehet), be kell látnunk, hogy igaz az $n=k+1$ esetben is. Tegyük fel tehát, hogy

$$\frac{d}{dx}(u_1+u_2+\ldots+u_k)=\frac{du_1}{dx}+\frac{du_2}{dx}+\ldots+\frac{du_k}{dx}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(\underbrace{u_1+u_2+\ldots+u_k}_{u}+\underbrace{u_{k+1}}_{v})=\\
&=\frac{d}{dx}(u_1+u_2+\ldots+u_k)+\frac{du_{k+1}}{dx}= && \text{a 4. szabály az } u+v \text{ függvényre}\\
&=\frac{du_1}{dx}+\frac{du_2}{dx}+\ldots+\frac{du_k}{dx}+\frac{du_{k+1}}{dx}. && \text{ez éppen az (1) egyenlőség}
\end{aligned}$$

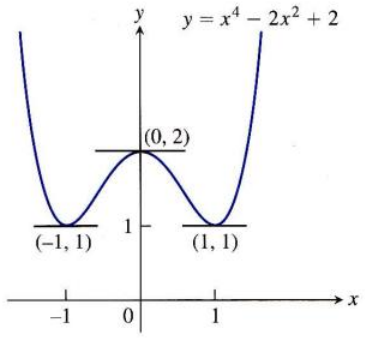
Az indukciós lépés igazolásával a bizonyítás teljessé vált: az állítás tehát minden $n\geq 2$ szám esetén igaz. □

6. PÉLDA **Vízszintes érintők megkeresése.**

Vannak-e vízszintes érintői az $y=x^4-2x^2+2$ egyenletű görbének? Ha igen, melyek azok?

Megoldás. Vízszintes érintő csak olyan pontokban lehet, amelyeknél a dy/dx meredekség 0. Először kiszámítjuk a deriváltat:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^4-2x^2+2)=4x^3-4x.$$



3.10. ÁBRA: Az $y = x^4 - 2x^2 + 2$ egyenletű görbe három vízszintes érintője (6. példa).

Eztuán megoldjuk a $\frac{dy}{dx} = 0$ egyenletet:

$$4x^3 - 4x = 0$$
$$4x(x^2 - 1) = 0$$
$$x = 0,\ 1,\ -1.$$

Az $y = x^4 - 2x^2 + 2$ egyenletű görbének tehát három vízszintes érintője van, amelyek az $x = 0,\ 1,\ -1$ abszcisszájú pontokban érintik a görbét. Az érintési pontok: $(0,2)$, $(1,1)$ és $(-1,1)$; l. a 3.10. ábrát. □

Szorzat és hányados

Bár összegfüggvény deriváltja a deriváltfüggvények összege, a szorzatfüggvények esetében ez nem áll: két függvény szorzatának deriváltja nem a deriváltak szorzata, amint azt az alábbi egyszerű példa is mutatja:

$$\frac{d}{dx}(x \cdot x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x, \text{ holott } \frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(x) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Két függvény szorzatának deriváltja két szorzatfüggvény összege:

5. SZABÁLY Szorzatfüggvény deriváltja

Ha u és v az x változó differenciálható függvényei, akkor az uv függvény minden olyan pontban differenciálható, ahol u és v is differenciálható, az ilyen pontokban pedig

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Az uv függvény deriváltja tehát az az összeg, amelynek egyik tagja u deriváltja és v szorzata, a másik pedig v deriváltjának és u-nak a szorzata. „Vesszős" jelölésben a szabály $(uv)' = uv' + vu'$ alakú, „függvényes" jelöléssel pedig így írható:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

7. PÉLDA A szorzatszabály alkalmazása.

Határozzuk meg az

$$y = \frac{1}{x^2}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$$

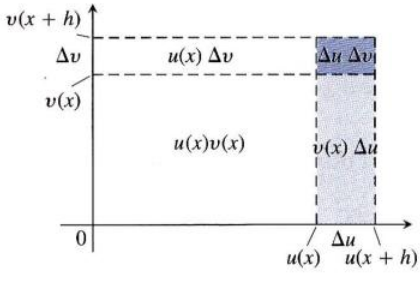
függvény deriváltját.

Megoldás. A szorzatszabályban legyen $u = 1/x$ és $v = x^2 + 1/x$. Ezzel a következőt kapjuk:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right] = \frac{1}{x}\left(2x - \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$
$$= 2 - \frac{1}{x^3} - 1 - \frac{1}{x^3} =$$
$$= 1 - \frac{2}{x^3}.$$
□

A szorzatszabály szemléltetése

Legyenek $u(x)$ és $v(x)$ pozitív értékeket fölvevő, növekedő függvények; legyen továbbá $h > 0$.



Az ábrán beszínezett terület nagysága:

$$u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) =$$
$$= u(x+h)\Delta v + v(x+h)\Delta u - \Delta u \Delta v$$

Mindkét oldalt h-val elosztva a következőt kapjuk:

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} =$$
$$= u(x+h)\frac{\Delta v}{h} + v(x+h)\frac{\Delta u}{h} - \Delta u\frac{\Delta v}{h}$$

Amennyiben $h \to h^+$, úgy

$$\Delta u\frac{\Delta v}{h} \to 0 \cdot \frac{dv}{dx},$$

minek következtében

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Az 5. szabály bizonyítása. Definíció szerint

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[u(x+h)\frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x)\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right] =$$
$$= \lim_{h\to 0} u(x+h) \cdot \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \cdot \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h}.$$

Amint $h \to 0$, az $u(x+h)$ függvényértékek $u(x)$-hez tartanak, mert u differenciálható és így folytonos is az x helyen. A két tört határértéke dv/dx, illetve du/dx, így valóban:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}. \qquad \square$$

A következő példában csupán a megfelelő számértékeket kell a képletbe helyettesítenünk.

8. PÉLDA **Behelyettesítés a szorzatszabályba.**

Legyen $y = uv$; határozzuk meg $y'(2)$ értékét, ha tudjuk, hogy $u(2) = 3$, $u'(2) = -4$, $v(2) = 1$ és $v'(2) = 2$.

Megoldás. Az

$$y' = (uv)' = uv' + vu',$$

szorzatszabályba behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$y'(2) = u(2)v'(2) + v(2)u'(2) = 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) = 6 - 4 = 2. \qquad \square$$

9. PÉLDA **A derivált kiszámítása kétféle módszerrel.**

Határozzuk meg az $u = (x^2+1)(x^3+3)$ függvény deriváltját.

Megoldás.

(a) Alkalmazzuk a szorzatszabályt az $u = x^2+1$ és $v = x^3+3$ függvényre:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[(x^2+1)(x^3+3)] &= (x^2+1)(3x^2) + (x^3+3)(2x) = \\ &= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 6x = \\ &= 5x^4 + 3x^2 + 6x.\end{aligned}$$

(b) Eljárhatunk úgy is (talán ez az egyszerűbb), hogy előbb elvégezzük a szorzásokat, és a kapott polinomfüggvényt deriváljuk:

$$\begin{aligned}y &= (x^2+1)(x^3+3) = x^5 + x^3 + 3x^2 + 3 \\ y' &= 5x^4 + 3x^2 + 6x.\end{aligned}$$

A két eredmény természetesen megegyezik. $\square$

Ahogy egy szorzatfüggvény deriváltja nem a deriváltak szorzata, úgy két függvény hányadosának deriváltja sem a megfelelő deriváltak hányadosa. A következő szabály tisztázza a helyzetet:

6. SZABÁLY **Hányados deriváltja.**

Ha u és v egyaránt az x differenciálható függvényei, akkor az u/v függvény minden olyan pontban differenciálható, ahol $v(x) \neq 0$ és u és v is differenciálható, az ilyen pontokban

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Függvényes jelölésben:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

10. PÉLDA **A hányadosszabály alkalmazása.**

Határozzuk meg az

$$y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

függvény deriváltját.

Megoldás. A hányadosszabályt alkalmazzuk az $u = t^2 - 1$ és $v = t^2 + 1$ függvényekre:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(t^2+1)\cdot 2t - (t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2} = \qquad \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}\right)$$

$$= \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2+1)^2} =$$

$$= \frac{4t}{(t^2+1)^2}. \qquad \square$$

A 6. szabály bizonyítása.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}.$$

Az utoljára kapott tört számlálójához (alkalmas helyen) hozzáadunk $v(x)u(x)$-et és ugyanezt a tagot ki is vonjuk. A tört értéke így nyilván nem változik:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{v(x)u(x+h) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{v(x)\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} - u(x)\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}.$$

A határértékeket véve éppen a bizonyítandó szabályt kapjuk. $\square$

Negatív egész kitevőjű hatványfüggvény deriváltja

Negatív egész kitevőjű hatványfüggvények deriváltjára ugyanaz a szabály érvényes, mint pozitív kitevők esetén.

7. SZABÁLY **Negatív egész kitevőjű hatványfüggvény deriváltja.**

Tetszőleges n negatív egész szám és $x \neq 0$ esetén

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

11. PÉLDA

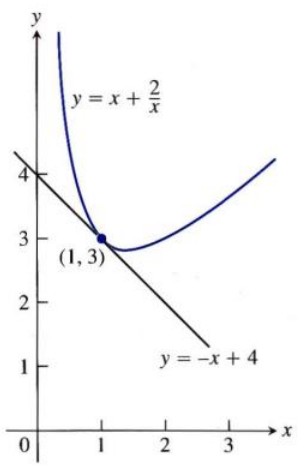
(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$ (L. a 2.7. alfejezet 3. példáját.)

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4}{x^3}\right) = 4\dfrac{d}{dx}(x^{-3}) = 4(-3)x^{-4} = -\dfrac{12}{x^4}.$

A 7. szabály bizonyítása. A bizonyítás a hányadosra vonatkozó szabályon alapul. Ha n negatív egész szám, akkor van olyan pozitív m egész szám, amellyel $n = -m$. Így $x^n = x^{-m} = 1/x^m$, és

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^n) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = \\
&= \frac{x^m \cdot \frac{d}{dx}(1) - 1 \cdot \frac{d}{dx}(x^m)}{(x^m)^2} = \\
&= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} = && \text{mivel } m > 0, \text{ így } \tfrac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1} \\
&= -mx^{-m-1} = && \text{azonos alapú hatványok hányadosa} \\
&= nx^{n-1}. && \text{elvégre } -m = n.
\end{aligned}$$

□



3.11. ÁBRA: Az $y = x + \frac{2}{x}$ egyenletű görbét az $(1,3)$ pontban érintő egyenes; l. a 12. példát. A görbe harmadik síknegyedbe eső része az ábrán nem látható. Az ilyen függvények grafikonjának ábrázolásával a 4. Fejezetben részletesen is foglalkozunk.

12. PÉLDA **Görbe érintője.**
Írjuk fel az

$$y = x + \frac{2}{x}$$

egyenletű görbét az $(1,3)$ pontban érintő egyenes egyenletét (l. a 3.11. ábrát).

Megoldás. A görbe meredeksége:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) + 2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{2}{x^2}.$$

□

Az $x = 1$ helyen a meredekség:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left[1 - \frac{2}{x^2}\right]_{x=1} = 1 - 2 = -1.$$

Az $(1,3)$ ponton átmenő, $m = -1$ meredekségű egyenes egyenlete:

$$\begin{aligned}
y - 2 &= (-1)(x - 1) \\
y &= -x + 1 + 3 \\
y &= -x + 4.
\end{aligned}$$

Sok fáradságtól megkímélhetjük magunkat, ha ügyesen választjuk ki, hogy melyik deriválási szabály(oka)t alkalmazzuk. Lássunk egy példát.

13. PÉLDA **A megfelelő szabály kiválasztása.**
Amikor az

$$y = \frac{(x-1)(x^2 - 2x)}{x^4}$$

függvény deriváltját akarjuk meghatározni, a hányadosszabály alkalmazása helyett célszerűbb, ha a számlálóban elvégezzük a szorzást és a kapott kifejezést elosztjuk x^4-nel:

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^4} = x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}.$$

Ezután már csak az összegre és a hatványozásra vonatkozó szabályainkat kell alkalmaznunk:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4} = \\
&= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}
\end{aligned}$$

□

Másod- és magasabbrendű deriváltak

Ha $y = f(x)$ differenciálható függvény, akkor az $f'(x)$ derivált szintén egy függvény. Ha az utóbbi függvény is differenciálható, akkor azt deriválva újra egy függvényt kapunk, amelyet f'' jelöl. Eszerint tehát $f'' = (f')'$. Az f'' függvényt az f függvény **második deriváltjának** nevezzük, ez az első derivált deriváltja. Jelölés:

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx} = y'' = D^2(f)(x) = D_x^2 f(x)$$

A D^2 operátor kitevője azt jelzi, hogy a deriválás műveletét kétszer kell végrehajtani.

Ha például $y = x^6$, akkor $y' = 6x^5$, így

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}(6x^5) = 30x^4,$$

eszerint tehát $D^2(x^6) = 30x^4$.

Ha y'' deriválható, akkor deriváltja – tehát az $y''' = dy''/dx = d^3y/dx^3$ függvény – az y harmadik deriváltja. A sor természetesen folytatható, az y függvény n-edik deriváltját $y^{(n)}$ jelöli:

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}y^{(n-1)} = \frac{d^n y}{dx^n} = D^n y$$

Az $y = f(x)$ függvény második deriváltja arról ad felvilágosítást, hogy milyen gyorsan változik f grafikonjának meredeksége. A következő alfejezetben kiderül, hogy egy függvény adott pontbeli második deriváltja arról ad felvilágosítást, hogy a függvény grafikonja az érintési ponttól távolodva az illető pontbeli érintő alá vagy fölé kerül.

14. PÉLDA **Függvény magasabb rendű deriváltjai.**
Az $y = x^3 - 3x^2 + 2$ függvény első négy deriváltja:

$$y' = 3x^2 - 6x,$$
$$y'' = 6x - 6,$$
$$y''' = 6,$$
$$y^{(4)} = 0.$$

Az y függvény akárhányszor deriválható, a negyediktől kezdve valamennyi deriváltfüggvény az azonosan nulla függvény.

3.2. Feladatok

Deriváltak kiszámítása

Határozzuk meg a függvények első és második deriváltját (1–12. feladatok).

1. $y = -x^2 + 3$ **2.** $y = x^2 + x + 8$

3. $s = 5t^3 - 3t^5$ **4.** $w = 3z^7 - 7z^3 + 21z^2$

5. $y = \frac{4x^3}{3} - x$ **6.** $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}$

7. $w = 3z^{-2} - \frac{1}{2}$ **8.** $s = -2t^{-1} + \frac{4}{t^2}$

9. $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$ **10.** $y = 4 - 2x - x^{-3}$

11. $r = \frac{1}{3s^2} - \frac{5}{2s}$ **12.** $r = \frac{12}{\theta} - \frac{4}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^4}$

A 13–16. feladatokban határozzuk meg a deriváltakat **(a)** a szorzatszabály alkalmazásával, **(b)** a szorzás elvégzése után tagonként deriválva.

13. $y = (3 - x^2)(x^3 - x + 1)$ **14.** $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

15. $y = (x^2 + 1)\left(x + 5 + \frac{1}{x}\right)$ **16.** $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x} + 1\right)$

Határozzuk meg a függvények első deriváltját (17–28. feladatok).

17. $y = \frac{2x+5}{3x-2}$ **18.** $z = \frac{2x+1}{x^2-1}$

19. $g(x) = \frac{x^2-4}{x+0{,}5}$ **20.** $f(t) = \frac{t^2-1}{t^2+t-1}$

21. $u = (1-t)(1+t^2)^{-1}$ **22.** $w = (2x-7)^{-1}(x+5)$

23. $f(s) = \frac{\sqrt{s}-1}{\sqrt{s}+1}$ **24.** $u = \frac{5x+1}{2\sqrt{x}}$

25. $v = \frac{1+x-4\sqrt{x}}{x}$ **26.** $3 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$

27. $y = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$ **28.** $y = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$

Határozzuk meg a függvények n-edik deriváltját, n tetszőleges pozitív egész szám (29–30. feladatok).

29. $y = \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{3}{2}x^2 - x$ **30.** $y = \dfrac{x^5}{120}$

Határozzuk meg a függvények első és második deriváltját (31–38. feladatok).

31. $y = \dfrac{x^3+7}{x}$ **32.** $s = \dfrac{t^2+5t-1}{t^2}$

33. $r = \dfrac{(\theta-1)(\theta^2+\theta+1)}{\theta^3}$ **34.** $u = \dfrac{(x^2+x)(x^2-x+1)}{x^4}$

35. $w = \left(\dfrac{1+3z}{3z}\right)(3-z)$ **36.** $y = (z+1)(z-1)(z^2+1)$

37. $p = \left(\dfrac{q^2+3}{12q}\right)\left(\dfrac{q^4-1}{q^3}\right)$ **38.** $p = \dfrac{q^2+3}{(q-1)^3+(q+1)^3}$

Derivált kiszámítása behelyettesítéssel

39. Tegyük fel, hogy u és v egyaránt differenciálható függvények, továbbá

$$u(0) = 5, \quad u'(0) = -3, \quad v(0) = -1, \quad v'(0) = 2.$$

Számítsuk ki az alábbi függvények értékét az $x = 0$ helyen.

(a) $\dfrac{d}{dx}(uv)$ **(b)** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)$

(c) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v}{u}\right)$ **(d)** $\dfrac{d}{dx}(7v-2u)$

40. Tegyük fel, hogy u és v egyaránt differenciálható függvények, továbbá, hogy

$$u(1) = 2, \quad u'(1) = 0, \quad v(1) = 5, \quad v'(1) = -1.$$

Számítsuk ki az alábbi függvények értékét az $x = 1$ helyen.

(a) $\dfrac{d}{dx}(uv)$ **(b)** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)$

(c) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v}{u}\right)$ **(d)** $\dfrac{d}{dx}(7v-2u)$

Görbe meredeksége és érintője

41. **(a) Görbe normálisa.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges az $y = x^3 - 4x + 1$ egyenletű görbét a $(2,1)$ pontban érintő egyenesre és az érintőt az érintési pontban metszi.

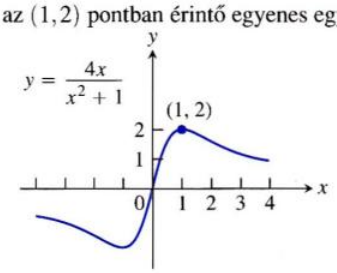
(b) A legkisebb meredekség. Melyik pontban a legkisebb a görbe meredeksége? Mekkora ez a minimális meredekség?

(c) Meghatározott meredekségű érintő. Írjuk fel a görbe 8 meredekségű érintőinek egyenletét.

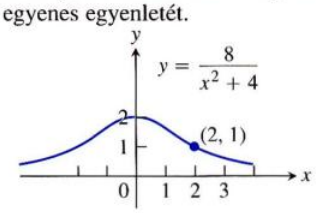
42. **(a) Vízszintes érintők.** Írjuk fel az $y = x^3 - 3x - 2$ egyenletű görbe vízszintes érintőinek egyenletét. Írjuk fel azoknak az egyenesnek az egyenletét is, amelyek a vízszintes érintőkre merőlegesek és átmennek az érintési pontjukon.

(b) A legkisebb meredekség. Melyik pontban a legkisebb a görbe meredeksége? Mekkora ez a minimális meredekség? Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét is, amely merőleges a minimális meredekségű érintőre és átmegy annak érintési pontján.

43. Határozzuk meg az ábrán látható Newton-szerpentint az origóban, illetve az $(1,2)$ pontban érintő egyenes egyenletét.



44. Határozzuk meg az ábrán látható Agnesi-görbét a $(2,1)$ pontban érintő egyenes egyenletét.



45. Függvény és érintő. Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű görbe átmegy az $(1,2)$ ponton, a görbét az $y = x$ egyenes az origóban érinti. Határozzuk meg a, b és c értékét.

46. Másodfokú függvények közös érintője. Az $y = x^2 + ax + b$ és az $y = cx - x^2$ egyenletű görbék $(-1,0)$ pontbeli érintője megegyezik. Határozzuk meg a, b és c értékét.

47. **(a)** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely az $y = x^3 - x$ egyenletű görbét az $(1,0)$ pontban érinti.

(b) Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a görbét és az érintőt; ezeknek az érintési ponton kívül még egy közös pontjuk van. Becsüljük meg ez utóbbi pont koordinátáit a TRACE AND ZOOM alkalmazásával.

(c) Ellenőrizzük becslésünket a megfelelő (harmadfokú) kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásával.

48. **(a)** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely az $y = x^3 - 6x^2 + 5x$ egyenletű görbét az $(1,0)$ pontban érinti.

(b) Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a görbét és az érintőt; ezeknek az érintési ponton kívül még egy közös pontjuk van. Becsüljük meg ez utóbbi pont koordinátáit a TRACE AND ZOOM alkalmazásával.

(c) Ellenőrizzük becslésünket a megfelelő (harmadfokú) kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásával.

További példák és feladatok

49. Határozzuk meg a

$$P(x) = a_x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

általános polinomfüggvény $P'(x)$ deriváltját.

50. Gyógyszerre való reakció. Egy gyógyszerre való reakció sok esetben egy

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right)$$

alakú egyenlettel írható le, ahol C pozitív állandó, M pedig a vérbe felszívódott hatóanyag mennyisége. Ha a szóban forgó reakció vérnyomásváltozás, akkor R mértékegysége (például) Hgmm, ha hőmérséklet-változás, akkor Fahrenheit- (vagy Celsius-) fok, stb.

Határozzuk meg a dR/dM deriváltat; ezt a test – adott gyógyszerre való – érzékenységének nevezzük. A 4.5. alfejezetben kiderül, hogyan határozható meg az a hatóanyag-mennyiség, amelyre a test maximálisan érzékeny.

51. Mit mond a szorzatfüggvény deriváltjára vonatkozó szabály, ha a szorzat egyik tényezője konstans függvény? Milyen összefüggésben áll ez a függvény konstansszorosának deriváltjára vonatkozó szabállyal?

52. A „reciprokszabály".

(a) A reciprokszabály szerint amennyiben egy v függvény deriválható és sehol sem 0, akkor

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}.$$

Igazoljuk, hogy a reciprokszabály a hányadosszabály speciális esete.

(b) Mutassuk meg, hogy a hányadosszabály levezethető a szorzat- és a reciprokszabály alapján.

53. A szorzatszabály általánosítása. Az alfejezetben bizonyított

$$\frac{d}{dx}(u\cdot v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

szabály *két* differenciálható függvény deriváltjának kiszámításához nyújt segítséget.

(a) Írjuk fel a három függvény uvw szorzatának deriváltjára vonatkozó analóg formulát.

(b) Írjuk fel a négy függvény $u_1u_2u_3u_4$ szorzatának deriváltfüggvényét megadó formulát.

(c) Írjuk fel az n-tényezős $u_1u_2u_3\ldots u_n$ szorzat deriváltfüggvényét megadó általános formulát.

54. Racionális kitevőjű hatványfüggvények.

(a) Határozzuk meg a $\frac{d}{dx}(x^{3/2})$ deriváltat az $x^{3/2} = x\cdot x^{1/2}$ azonosság és a szorzatszabály alkalmazásával. Írjuk fel a deriváltfüggvényt egy racionális kitevőjű hatványfüggvény (racionális) konstansszorosaként. A feladat (b) és (c) részében kövessünk hasonló módszert.

(b) Határozzuk meg a $\frac{d}{dx}(x^{5/2})$ deriváltfüggvényt.

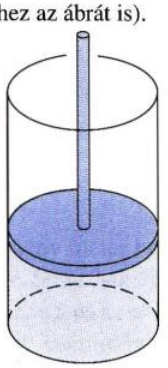
(c) Írjuk fel $\frac{d}{dx}(x^{7/2})$ deriváltfüggvényt.

(d) Milyen általános szabályra következtethetünk az (a), (b) és (c) feladat megoldásából? A témával általánosabban a 3.6. alfejezetben foglalkozunk.

55. Nyomás egy henger alakú tartály belsejében. Ha egy V térfogatú, henger alakú tartályban állandó a T hőmérséklet, akkor a gáz P nyomását a

$$P = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

képlet adja meg, ahol a, b, n és R állandók. Határozzuk meg a dP/dV deriváltat (l. ehhez az ábrát is).



56. A megfelelő rendelési mennyiség. A készletgazdálkodás elmélete szerint a megrendelés és a készleten tartás átlagos heti költségét a következő formula adja meg:

$$A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2},$$

ahol q az a mennyiség, amennyit a szóban forgó áruból (cipőből, rádióból, partvisból stb.) rendelünk, amikor kevés van belőle a raktáron, k a megrendelés költsége (független a megrendelés gyakoriságától), c egyetlen darab (állandó) beszerzési ára, m a hetente eladott darabok száma (szintén állandó), h pedig egyetlen darab raktáron tartásának egy heti költsége. Határozzuk meg a dA/dq, d^2A/dq^2 deriváltakat.

3.3. A derivált mint változási sebesség

Ebben az alfejezetben folytatjuk a pillanatnyi változási sebességgel kapcsolatos, a 2.1. alfejezetben megkezdett vizsgálódásainkat. Újra szóba kerülnek az egyenes vonalú mozgások, de szót ejtünk más folyamatokról is, amelyekben a változás fontos szerepet játszik.

Természetes gondolat, hogy a változást az idővel hozzuk kapcsolatba, de más változókat éppúgy vizsgálhatunk. Egy orvos például kíváncsi lehet, hogy a gyógyszer mennyiségének változása miként befolyásolja a hatást. Egy közgazdászt érdekelheti, hogy egyetlen acéllemez előállításának költsége hogyan változik annak függvényében, hogy az üzemben hány tonna lemezt gyártanak.

Pillanatnyi változási sebesség

Az $(f(x+h)-f(x))/h$ differenciahányadost az f függvény $[x,x+h]$ intervallumon vett átlagos változási sebességének neveztük. A $h\to 0$ esetben a tört határértéke azt mutatja, milyen ütemben változik f az x pontban.

DEFINÍCIÓ Pillanatnyi változási sebesség.

Az f függvény pillanatnyi változási sebességét az $x = x_0$ helyen az

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

derivált adja meg, amennyiben létezik.

A pillanatnyi változási sebesség tehát az átlagos változási sebesség határértéke.

Gyakran olyankor is „változási sebességről" beszélünk, amikor a független változó nem az idő. Amikor változási sebességet említünk, általában a pillanatnyi változási sebességre gondolunk.

1. PÉLDA A körterület változása az átmérő függvényében.

Egy kör A területét a D átmérő függvényében az

$$A = \frac{\pi}{4} D^2$$

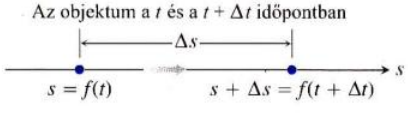
összefüggés adja meg. Mekkora a terület változási sebessége, amikor $D = 10\,\text{m}$?

Megoldás. Az átmérő függvényének tekintett terület változási sebességét a

$$\frac{dA}{dD} = \frac{\pi}{4} 2D = \frac{\pi D}{2}$$

deriváltfüggvény adja meg. Amikor $D = 10\,\text{m}$, akkor a változási sebesség $(\pi/2)10 = 5\pi\,\text{m}^2/\text{m}$. □

Mozgás egyenes mentén: elmozdulás, sebesség, gyorsulás



3.12. ÁBRA: Egyenes vonal mentén mozgó test helyzete a t és a későbbi $t + \Delta t$ időpontban.

Tegyük fel, hogy egy objektum egyenes (mondjuk az s-tengely) mentén mozog, helyzetét az idő függvényében az $s(t)$ függvény adja meg:

$$s = f(t).$$

A t és a $t + \Delta t$ pillanat között eltelt idő alatt az objektum **elmozdulása** (l. a 3.12. ábrát)

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t),$$

átlagsebessége pedig

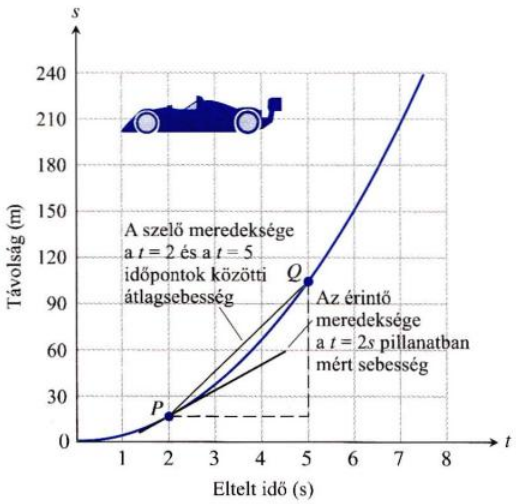
$$v_{\text{átl}} = \frac{\text{elmozdulás}}{\text{idő}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Amikor a test t időpontbeli pillanatnyi sebességére vagyunk kíváncsiak, a $[t, t + \Delta t]$ intervallumokbeli átlagsebességének határértékét képezzük, amint $\Delta t \to 0$. Ez a határérték éppan az f' deriváltfüggvény t helyen felvett értéke.

DEFINÍCIÓ Sebesség.

A (pillanatnyi) **sebesség** a test helyzetét megadó függvény idő szerinti deriváltja. Ha a test a t időpontban elfoglalt helyzetét az $s = f(t)$ függvény adja meg, akkor a t időpontban a test sebessége:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$



3.13. ÁBRA: A 2. példa idő–elmozdulás grafikonja. A P pontbeli érintő meredeksége a $t = 2$ s pillanatban mért sebesség.

2. PÉLDA **Versenyautó sebessége.**

A 3.13. ábrán azt tanulmányozhatjuk, hogy hány méter hosszúságú utat tett meg egy álló helyzetből induló 1996-os Riley & Scott Mk III-Olds WSC modell t másodperc alatt. A PQ szelő meredeksége a $t = 2$ és a $t = 5$ időpontok alatt eltelt 3 másodperc alatti átlagsebességet adja meg; esetünkben ez körülbelül 30 m/s vagy 108 km/h.

A P pontbeli érintő meredeksége a $t = 2$ s pillanatban mért sebesség, körülbelül 17,2 m/s vagy 62,4 km/h. A szóban forgó időtartam alatt a gyorsulás közelítőleg állandó 8,6 m/s^2 nagyságú, ami nagyjából $0,89g$-nek felel meg (ahol g a gravitációs gyorsulás: a szabadon eső testek gyorsulása a földfelszín közelében). A versenyautó végsebessége 304 km/h körül van. [Forrás: *Road and Track,* 1997. március.]

A sebesség nem csupán arról szolgál információval, hogy milyen gyorsan halad a test, hanem arról is, hogy milyen irányban. Ha a test „előre" halad, vagyis s növekvő függvény, akkor a sebesség pozitív, ha „hátrafelé" (ebben az esetben s csökkenő függvény), akkor a sebesség negatív (l. a 3.14. ábrát).

Tegyük fel, hogy barátunkhoz vezető úton 50 km/h sebességgel hajtunk. Visszafelé a kocsink kilométerórája nem -50 km/h sebességet fog mutatni, hanem éppúgy, mint odafelé, 50 km/h-t. A magyarázat egyszerű: a kilométeróra a sebesség abszolútértékét (a *gyorsaságot*) jelzi, amely nem függ attól, hogy éppen merre tartunk.

DEFINÍCIÓ **Gyorsaság.**

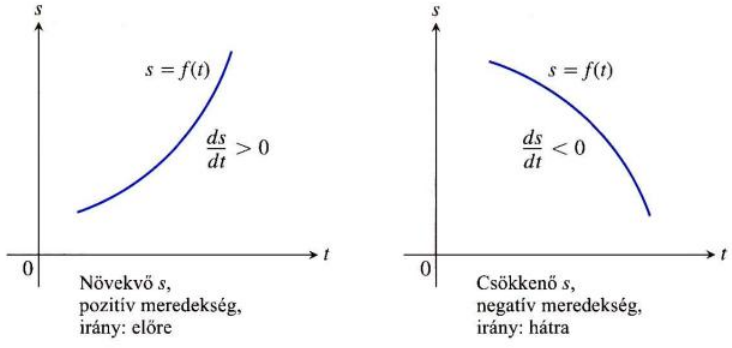
A **gyorsaság** a sebesség abszolútértéke:

$$\text{gyorsaság} = |v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right|.$$

3. PÉLDA **Egydimenziós mozgás sebessége.**

A 3.15. ábra egy egyenes mentén mozgó részecske $v = f'(t)$ sebességét mutatja az idő függvényében. A részecske az első három másodperc alatt előre, a következő két másodpecben visszafelé mozog, ezután egy másodpercre megáll, majd újra elindul előre. A gyorsaság (a sebesség abszolútértéke) a $t = 4$ s időpontban a legnagyobb (ekkor a részecske éppen visszafelé halad). □

A sebesség változásának sebessége a *gyorsulás,* amely tehát azt mutatja, milyen gyorsan nő vagy csökken a sebesség.



3.14. ÁBRA: Ha az egyenes mentén mozgó test t időpontbeli helyzetét az $s = f(t)$ függvény adja meg, akkor a $v = ds/dt$ sebesség pozitív, ha s növekvő, és negatív, ha s csökkenő.

A gyorsulás változását alkalmanként *lökésnek* nevezzük. Amikor egy buszon ezt érezzük, igazából nem a gyorsulás nagysága, hanem *hirtelensége* (vagyis a gyorsulás változási sebessége) a zavaró.

DEFINÍCIÓ Gyorsulás, lökés.

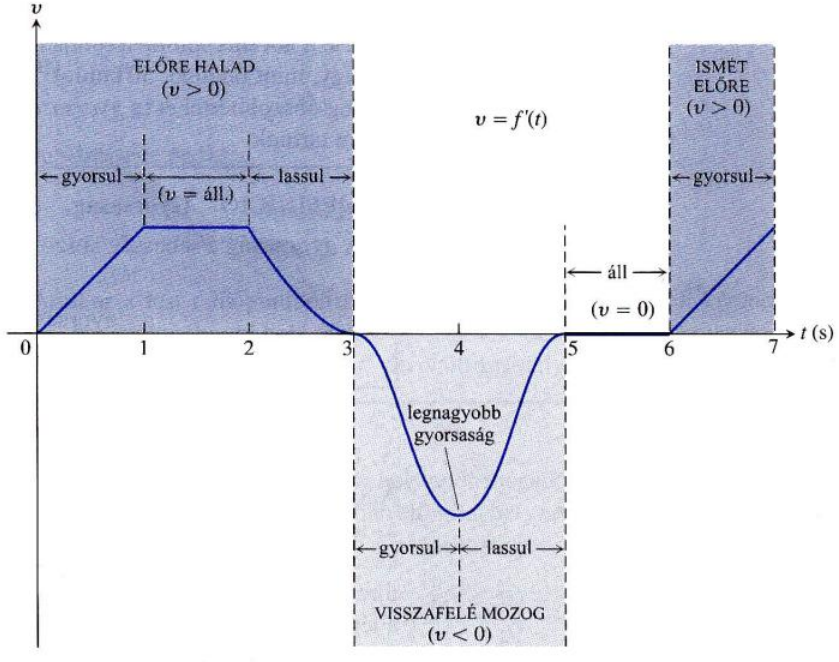
A **gyorsulás** a sebesség idő szerinti deriváltja. Ha egy test időbeli helyzetét az $s = f(t)$ függvény adja meg, akkor a test gyorsulása a t pillanatban:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2},$$

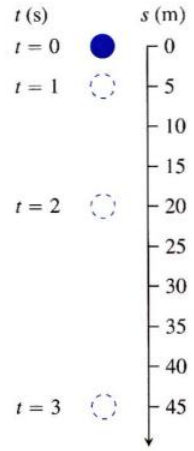
a „**lökés**" pedig a gyorsulás deriváltja:

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}.$$

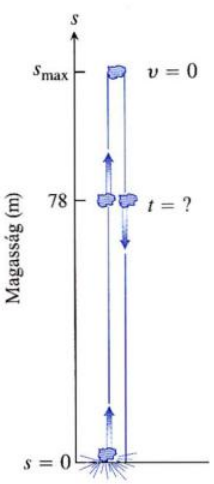
A földfelszín közelében minden szabadon eső test gyorsulása ugyanaz az állandó érték. Galilei törvénye szerint (ahogy a 2.1. alfejezet 1. Példájából emlék-



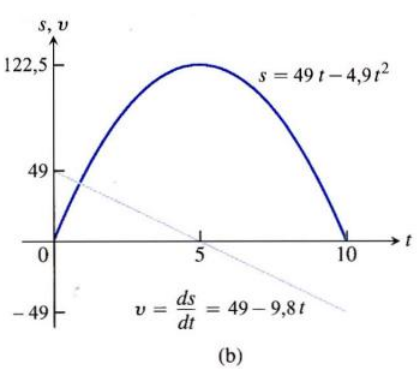
3.15. ÁBRA: A 3. példa idő–sebesség grafikonja.



3.16. ÁBRA: Szabadon eső golyó (4. példa).



(a)



(b)

3.17. ÁBRA: (a) Az 5. példában szereplő szikladarab. (b) Az s és a v függvény grafikonja; s abban a t időpontban a legnagyobb, amikor $v = ds/dt = 0$. Az s függvény grafikonja *nem* a szikla pályáját, hanem azt mutatja, hogy a t időpontban az éppen milyen magasan van. Az s-görbe meredeksége a sebesség, amelynek gafikonja esetünkben egy egyenes.

szünk rá) a szabadon eső test által t idő alatt megtett út:

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

ahol g a gravitációs gyorsulás. Az egyenlet „valójában" csak légellenállás nélküli esetekben, vákuumban érvényes, de nagy sűrűségű, nehéz testek szabadesését is leírja a mozgás első néhány másodpercében (a légellenállás előbb-utóbb csökkenti a gyorsulást).

A g állandó számértéke attól függ, hogy milyen egységben mérjük s-et, illetve t-t. Ha az időt másodpercben, a távolságot pedig méterben adjuk meg, akkor a földfelszín közelében hozzávetőleg $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$. (A konstans értéke függ a Föld tömegközéppontjától való távolságtól; értéke így a Mount Everest csúcsán valamivel kisebb, mint a tengerszinten.)

A gravitációs gyorsulás állandó, „lökése" emiatt nulla:

$$j = \frac{d}{dt}(g) = 0.$$

A szabadon eső test tehát rángatás nélkül zuhan.

4. PÉLDA **Szabadesés.**

A 3.16. ábra egy szabadon eső, a $t = 0$ pillanatban elengedett vasgolyó helyzetét mutatja.

(a) Hány métert tesz meg a golyó a zuhanás első két másodpercében?

(b) Mekkora a $t = 2$ s pillanatban a sebessége és a gyorsulása?

Megoldás.

(a) A szabadesés egyenlete: $s = 4{,}9t^2$. Az első két másodperc alatt megtett út ennélfogva:

$$s(2) = 4{,}9 \cdot 2^2 = 19{,}6\ \text{m}.$$

(b) A sebességet minden pillantban a helyet megadó függvény deriváltja adja meg:

$$v(t) = s'(t) = \frac{d}{dt}(4{,}9t^2) = 9{,}8t.$$

A $t = 2$ pillanatban tehát

$$v(2) = 19{,}6\,\text{m/s}.$$

A gyorsulást megadó függvény:

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 9{,}8\,\text{m/s}^2.$$

A gyorsulás így a $t = 2$ pillanatban (is) $9{,}8\ \text{m/s}^2$. □

5. PÉLDA **Összetett függőleges mozgás leírása.**

Egy robbanás egy nehéz szikladarabot 49 m/s sebességgel repít fel, pontosan függőleges irányban, ahogy a 3.17. ábra (a) részén látható. A kő t idő elteltével $s = 49t - 4{,}9t^2$ méter magasságba emelkedik.

(a) Milyen magasra emelkedik a szikladarab?

(b) Mekkora a sebesség 78,4 méter magasságban, amikor a szikla felfelé tart? És ugyanebben a magasságban lefelé?

(c) Mekkora a gyorsulás?

(d) A robbanás után hány másodperccel ér újra földet a szikla?

Megoldás.

(a) A koordináta-rendszerünkben az s értéke „fölfelé" növekszik, ennélfogva a sebesség fölfelé pozitív, lefelé pedig negatív. A szikladarab akkor van nyugalomban, amikor a sebessége 0, ez pedig pontosan a maximális magasság elérésének pillanata.
A sebesség bármely t időpontban

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(49t - 4{,}9t^2) = 49 - 9{,}8t \,\text{m/s}$$

A sebesség tehát 0, ha $49 - 9{,}8t = 0$, azaz a $t = 5$ s pillanatban. Ekkor a szikla

$$s_{\max} = s(5) = 49 \cdot 5 - 4{,}9 \cdot 5^2 = 122{,}5$$

méter magasan van a földfelszín felett (l. a 3.17. ábra (b) részét.

(b) A 78,4 méter magassághoz tartozó sebesség kiszámításához először meghatározzuk, melyek azok a t pillanatok, amikor a szikladarab éppen 78,4 m magasságban van, vagyis amikor

$$s(t) = 49t - 4{,}9t^2 = 78{,}4$$

Az egyenlet megoldása nem jelent problémát:

$$\begin{aligned} 4{,}9t^2 - 49t + 78{,}4 &= 0 \\ 4{,}9(t^2 - 10t + 16) &= 0 \\ (t-2)(t-8) &= 0 \\ t = 2, \quad t &= 8 \end{aligned}$$

A szikladarab tehát kétszer, a robbanás után 2, illetve 8 másodperccel van éppen 78,4 méter magasságban. A sebesség ezekben a pillanatokban:

$$\begin{aligned} v(2) &= 49 - 9{,}8 \cdot 2 = 49 - 19{,}6 = 29{,}4 \text{ m/s} \\ v(8) &= 49 - 9{,}8 \cdot 8 = 49 - 78{,}4 = -29{,}4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

A sebesség *nagysága* ezek szerint mindkét időpontban 29,4 m/s. Mivel $v(2) > 0$, a $t = 2$ s időpontban fölfelé, $v(8) < 0$ miatt a $t = 8$ s időpontban lefelé mozog.

(c) A gyorsulás a mozgás folyamán

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(49 - 9{,}8t) = -9{,}8 \,\text{m/s}^2$$

állandó. A gyorsulás mindvégig „lefelé" mutat: amikor a test emelkedik, ez lassulást jelent, amikor viszont lefelé zuhan, a gyorsasága növekszik.

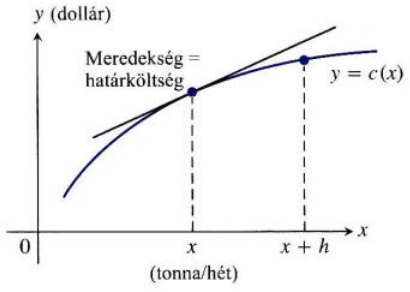
(d) A szikla abban a (pozitív) t időpontban ér földet, amikor $s = 0$. A $49t - 4{,}9t^2 = 0$ egyenlet két megoldása $t = 10$ és $t = 0$. A $t = 0$ pillanat a robbanás időpontja, a szikladarab tehát $t = 10$ s elteltével ér földet. □

Deriváltak a gazdaságtanban

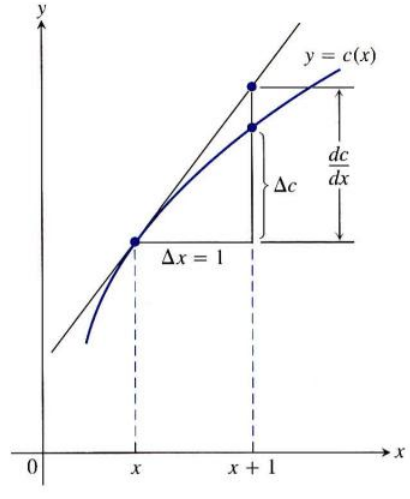
A mozgást leíró függvények első és második deriváltját a mérnökök sebességnek és gyorsulásnak nevezik. A változási sebességre a közgazdászok is kidolgozták a maguk terminológiáját, ők általában *marginális* (vagy *határ*-) függvényekről, illetve értékekről beszélnek.

A termelési költséget egy $c(x)$ függvény adja meg; $c(x)$ mutatja, hogy x darab termék előállítása mennyibe kerül. A **határköltség** a költségfüggvény x (vagyis az előállított termék mennyisége) szerinti deriváltja, tehát dc/dx.

Tegyük fel, hogy a $c(x)$ függvény értéke azt adja meg, hogy hány dollárért tudunk hetente x tonna acélt előállítani. Ha (x-hez képest) h tonnával többet gyártunk, akkor a fajlagos (1 tonnára eső) többletköltség:



3.18. ÁBRA: A $c(x)$ függvény értéke azt adja meg, hogy hány dollárért tudunk hetente x tonna acélt előállítani. Ha (x-hez képest) h tonnával többet gyártunk, akkor a többletköltség $c(x+h)-c(x)$.



3.19. ÁBRA: A dc/dx határköltség nagyjából azt adja meg, hogy mekkora Δc extraköltsége van $\Delta x = 1$ (további) egység előállításának.

$$\frac{c(x+h)-c(x)}{h}$$

A tört $h \to 0$ esetben vett határértéke azt mutatja, hogy fajlagosan mennyibe kerül több acélt gyártani a heti x tonnás mennyiségen felül (l. a 3.18. ábrát):

$$\lim_{h\to 0} \frac{c(x+h)-c(x)}{h} = \text{a termelés határköltsége.}$$

Alkalmanként a határköltséget kissé leegyszerűsítve azon többletköltségként határozzák meg, amennyibe 1 tonnával több acél előállítása kerül:

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x+1)-c(x)}{1},$$

ez annál pontosabban közelíti a dc/dx deriváltat, minél kisebb mértékben változik c meredeksége az x hely környékén, hiszen ilyenkor a $\Delta x = 1$ differenciához tartozó szelő meredeksége elég jól közelíti az érintő dc/dx meredekségét (l. a 3.19. ábrát). A közelítés nagy x-ek esetén jobb.

A közgazdászok a termelés költségét gyakran egy harmadfokú

$$c(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

polinomfüggvénnyel adják meg; a képletben δ reprezentálja a gyártás *fix költségeit* (bérleti, fűtési díjak, a menedzsment fizetése stb.), a többi tag a *változó,* vagyis az előállított mennyiségtől függő *költségeket* (alapanyag, munkabér, adó stb.) adja meg. A harmadfokú polinomfüggvények általában elegendően bonyolultak ahhoz hogy – egy adott intervallumban – elég pontosan reprezentálják a költség változását.

6. PÉLDA **Határköltség és határbevétel.**

Tegyük fel, hogy $8 \le x \le 30$ radiátor előállításának költségét a

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

függvény adja meg, az x radiátor eladásából származó árbevételt pedig az

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

függvény reprezentálja. Üzemünk naponta 10 radiátort állít elő. Mennyivel nő a költség, ha 1-gyel több radiátort állítunk el? Mennyi lesz a bevételünk, ha 10 helyett 11 radiátort értékesítünk?

Megoldás. Azt, hogy mennyivel nő a költség, ha heti 10 radiátor helyett 11-et gyártunk, a $c(x)$ költségfüggvény deriváltjával közelítjük:

$$c'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 15x) = 3x^2 - 12x + 15$$
$$c'(10) = 3 \cdot 100 - 12 \cdot 01 + 15 = 195.$$

A többletköltség tehát jó közelítéssel 195\$. A határbevétel:

$$r'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 12x) = 3x^2 - 6x + 12,$$

ami értelemszerűen azt adja meg, hogy hány dollárral kasszírozunk többet, ha x-hez képest eggyel több radiátort adunk el. Esetünkben $x = 10$, így a 11 radiátor eladása esetén várható többletbevétel:

$$r'(10) = 3 \cdot 100 - 6 \cdot 10 + 12 = 252\$. \qquad \square$$

7. PÉLDA **Marginális adó.**

A közgazdászok nem csupán a költség és a bevétel, de az adó esetében is beszélnek marginális értékről. Ha 28 százalékos marginális adót fizetünk, az azt jelenti,

hogy 1000 dolláros extrajövedelem után 280 dollár plusz adóteherre számíthatunk. Ez *nem* jelenti azt, hogy teljes jövedelmünk után 28 százalék adót fizetünk, csupán annyit, hogy ha az általunk fizetendő T adót I jövedelmünk függvényében a $T(I)$ függvény adja meg, akkor a dT/dI deriváltfüggvény értéke jelenlegi jövedelemszintünkön éppen 0,28. Ha 1 dollárral többet keresünk, akkor 28 centtel több adót kell fizetnünk. Ha jövedelmünk nagyobb mértékben nő, akkor átkerülhetünk a következő sávba, így adóterheink jóval nagyobb összeggel nőnek. □

Változásra való érzékenység

Ha az x független változó kicsiny megváltozása az $f(x)$ függvényértékben nagy változást idéz elő, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **érzékeny** az x megváltozására. Az $f'(x)$ deriváltat tehát az érzékenység mértékének is tekinthetjük.

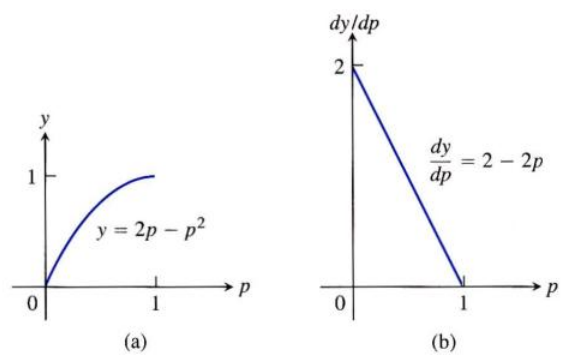
8. PÉLDA **Genetikai jellemzők érzékenysége.**

Gregor Johann Mendel (1822–1884) osztrák szerzetes borsóval kísérletezve alapozta meg a genetika tudományát.

Vizsgálatainak eredményét (a modern terminológia szerint) a következőképpen foglalhatjuk össze: ha egy adott borsógenerációban a $p \in (0,1)$ szám adja meg a domináns, sima héjú borsószemek arányát, $1-p$ pedig aráncos héjú szemet termő növényekét, akkor a következő generációban a sima héjú borsók aránya

$$y = 2p(1-p) + p^2 = 2p - p^2$$

lesz. Ha az y-értékekeket p függvényében ábrázoljuk (l. a 3.20. ábra (a) részét), akkor azt találjuk, hogy a y sokkal érzékenyebb p megváltozására, amikor p kicsi. Megállapításunkat az ábra (b) része támasztja alá, amelyből kiderül: a dy/dp derivált 0-hoz tartva 2-höz, 1-hez tartva pedig 0-hoz közelít.



3.20. ÁBRA: (a) Az $y = 2p - p^2$ függvény grafikonja a sima héjú borsók gyakoriságát szemlélteti. (b) A dy/dp deriváltfüggvény grafikonja (8 Példa).

A genetika nyelvén ezt a következőképpen fogalmazhatjuk meg: ha egy recesszív (többségében ráncos héjú szemeket termő) borsópopulációba néhány domináns növényt helyezünk, akkor a hatás sokkal drámaibb lesz, mintha egy többségében sima borsószemeket termő, domináns populációban tesszük ugyanezt. □

3.3. Feladatok

Mozgás egyenes mentén

Az 1–6. feladatokban a – valamelyik koordinátatengely mentén mozgó – test helyzetét az $s = f(t)$ függvény írja le; s-et méterben, t-t másodpercben mérjük.

(a) Határozzuk meg, mekkora volt az elmozdulás és az átlagsebesség a megadott intervallumon.

(b) Mekkora volt a sebesség és a gyorsulás az intervallum végpontjaiban?

(c) Váltott-e irányt a test az eltelt idő alatt, és ha igen, mikor?

1. $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \le t \le 2$
2. $s = 6t - t^2, \quad 0 \le t \le 6$
3. $s = -t^3 + 3t^2 - 3t, \quad 0 \le t \le 3$
4. $s = \dfrac{t^4}{4} - t^3 + t^2, \quad 0 \le t \le 3$
5. $s = \dfrac{25}{t^2} - \dfrac{5}{t}, \quad 1 \le t \le 5$
6. $s = \dfrac{25}{t+5}, \quad -4 \le t \le 0$

7. Részecske mozgása A t időpontban az s-tengely mentén mozgó részecske helyzetét az $s = t^3 - 6t^2 + 9$ függvény adja meg (s-et méterben, t-t másodpercben mérjük).

(a) Mekkora a test gyorsulása azokban a pillanatokban, amikor a sebessége 0?

(b) Mekkora a test sebessége azokban a pillanatokban, amikor a gyorsulása 0?

(c) Mekkora utat tett meg a test a $t = 0$ és $t = 2$ között eltelt idő alatt?

8. Részecske mozgása A t időpontban ($t \ge 0$) az s-tengely mentén mozgó részecske helyzetét az $s = t^2 - 4t + 3$ függvény adja meg.

(a) Mekkora a test gyorsulása azokban a pillanatokban, amikor a sebessége 0?

(b) Mikor halad a test előre, és mikor halad hátra?

(c) Mikor csökken, és mikor nő a test sebessége?

Szabadesés

9. Szabadesés a Mars és a Jupiter felszínén. Ha a távolságot méterben, az időt pedig másodpercben mérjük, akkor a Mars felszíne közelében szabadon eső test helyzetét az $s = 1,86t^2$, a Jupiter „felszíne" közelében pedig az $s = 11,44t^2$ függvény írja le. Mennyi idő alatt éri el egy nyugalmi helyzetből induló, szabadon eső test a 27,8 m/s (körülbelül 100 km/h) sebességet a Marson, illetve a Jupiteren?

10. Szabadesés a Holdon. A Hold felszínén pontosan függőleges irányban, 24 m/s kezdősebességgel feldobott kő magasságát az idő függvényében az $s = 24t - 0,8t^2$ függvény adja meg (s-t méterben, t-t másodpercben mérve).

(a) Adjuk meg a kő sebességét, illetve gyorsulását leíró függvényt.

(b) Mennyi idő alatt éri el a kő pályája legmagasabb pontját?

(c) Milyen magasra emelkedik a kő?

(d) Mennyi időbe telik, amíg a kő a maximális magasság feléig elér?

(e) Mennyi időbe telik, amíg a kő újra „holdat ér"?

11. A gravitációs gyorsulás meghatározása Egy kisbolygóra érkező felfedezők rugalmas szerkezet segítségével pontosan 15 m/s sebességgel függőlegesen fölfelé lőnek egy lövedéket. A bolygó felszíne közelében g_s gravitációs gyorsulást tételezve, a kutatók érvényesnek tekintik a következő összefüggést: t másodperc elteltével a lövedék $s = 15t - \frac{g_s}{2}t^2$ magasságban van. Mekkora a g_s állandó, ha a lövedék pontosan 20 másodperc alatt éri el a maximális magasságot?

12. Ég felé lőtt pisztolygolyó a Holdon és a Földön. Egy 24-es kaliberű pisztolyból függőlegesen fölfelé kilőtt golyó t másodperc alatt a Holdon $s = 250t - 0,8t^2$ méter, a Földön pedig $s = 250t - 4,9t^2$ méter magasságba emelkedik. Mennyi időbe telik, amíg a golyó földet, illetve „holdat" ér? Mekkora magasságba emelkedik a földfelszín, illetve a holdfelszín fölé?

13. Szabadesés a pisai ferde torony tetejéről. Amennyiben Galilei a pisai torony tetejéről, 54,5 méter magasságból dobott volna le egy golyót, akkor az t másodperc múltán $s = 54,5 - 4,9t^2$ méter magasságban lett volna a földfelszín felett.

(a) Adjuk meg a golyó sebességét és gyorsulását az idő függvényében.

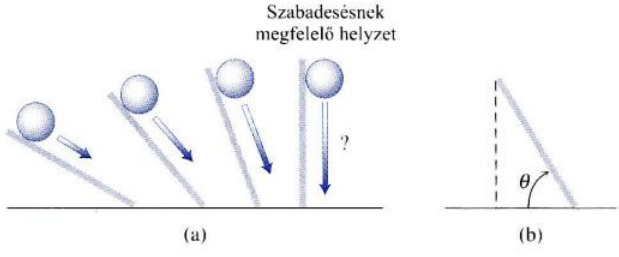
(b) Mennyi időbe telik, amíg a golyó földet ér?

(c) Mekkora a golyó sebessége a földet érés pillanatában?

14. A Galilei-féle szabadesési törvény. Galilei a szabadesési törvény vizsgálatakor egyre nagyobb hajlásszögű lejtőkön gurított le golyókat, a függőleges lejtőn való – vagyis szabadon zuhanó – mozgást a lejtőn való mozgás határértékének tekintette (l. az ábra (a) részét). Kísérletei alapján arra a következtetésre jutott, hogy a lejtőn guruló golyó sebessége egyenesen arányos az eltelt idővel, a sebességet tehát egy $v = kt$ alakú függvény adja meg. A k állandó értéke a lejtő hajlásszögének függvénye.

Modern jelölést használva a Galilei által felfedezett törvény a következő: egy θ hajlásszögű lejtőn álló helyzetből induló golyó sebessége t másodperc elteltével

$$v = 9,8t \sin\theta \text{ m/s}$$

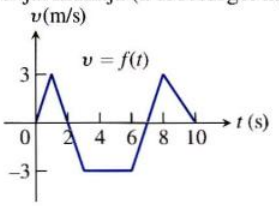


(a) Írjuk fel a szabadon eső test mozgását leíró egyenletet.

(b) Az (a) feladatra adott válaszunk alapján határozzuk meg a földfelszín közelében szabadon eső testek (állandó) gyorsulását.

A mozgás grafikonjának vizsgálata

15. Az ábra az egyik koordinátatengely mentén mozgó test sebességének grafikonját mutatja (a sebességet m/s-ban mérjük).



(a) Mikor változtat irányt a test?

(b) Adjuk meg (közelítőleg) azt az időintervallumot, amelyen a test sebessége állandó.

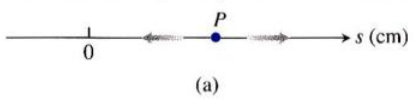
(c) Ábrázoljuk a sebesség *nagyságát* (a gyorsaságot) megadó függvény grafikonját.

(d) Ábrázoljuk a gyorsulást megadó függvény grafikonját.

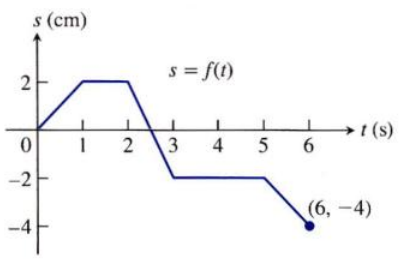
16. A P részecske az ábra (a) részén látható egyenes mentén mozog, helyzetét az ábra (b) részén látható grafikon adja meg.

(a) Mikor tart a részecske balra?

(b) Ábrázoljuk a részecske sebességét és gyorsaságát (abban az intervallumban, amelyben ezek értelmezve vannak).



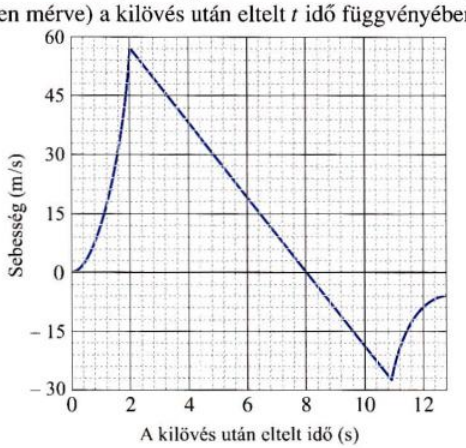
(a)



(b)

17. Rakétafellövés. Amikor egy modellrakétát fellövünk, az üzemanyag az első néhány másodperc alatt elég, de addig fölfelé gyorsítja a rakétát. Ezután a rakéta egy ideig még felfelé halad, majd visszazuhan a földre. Zuhanás közben egy kisebb robbanószerkezet kinyitja a rakéta ejtőernyőjét, amely lelassítja a zuhanást és megóvja a rakétát attól, hogy a földet érés pillanatában darabokra törjön.

Az ábra azt mutatja, hogy mekkora a rakéta sebessége (m/s egységben mérve) a kilövés után eltelt t idő függvényében.



(a) Mekkora volt a rakéta sebessége, amikor a hajtómű leállt?

(b) Hány másodpercig működött a motor?

(c) Mikor érte el a rakéta pályája legmagasabb pontját?

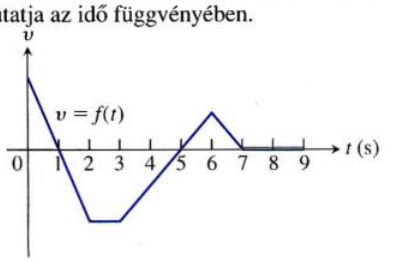
(d) Mikor nyílt ki az ejtőernyő? Mekkora sebességgel zuhant ekkor a rakéta?

(e) Mennyi ideig zuhant a rakéta ejtőernyő nélkül?

(f) Mikor volt a legnagyobb a rakéta gyorsulása?

(g) Mikor volt a rakéta gyorsulása állandó? Körülbelül mennyi volt ekkor a gyorsulás számértéke?

18. Az ábra egy egyenes mentén mozgó részecske $v = f(t)$ sebességét mutatja az idő függvényében.



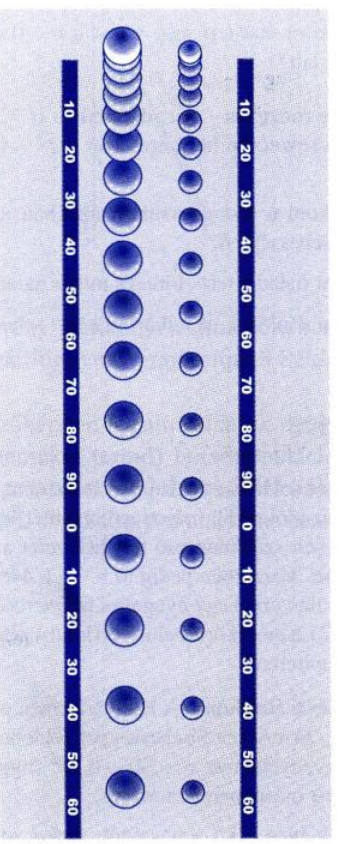
(a) Mikor halad a részecske előre, illetve hátra?

(b) Mikor pozitív, negatív, illetve 0 a gyorsulás?

(c) Melyik időpontban a legnagyobb a sebesség?

(d) Mikor van a részecske több mint egy másodpercig nyugalomban?

19. Szabadon eső labdák Az ábra két, nyugalmi helyzetből induló szabadon eső testről készült sorozatfelvételt mutat. A függőleges skálán centiméterben méri a távolságot. Az $s = 490t^2$ összefüggés alapján (ahol s a centiméterekben megadott távolság, t pedig a másodpercekben mért idő) válaszoljunk az alábbi kérésekre.

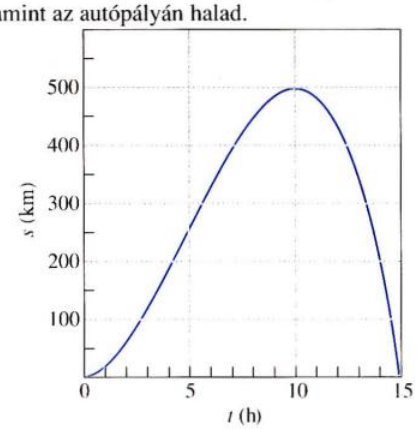


(a) Mennyi idő alatt teszik meg a golyók az első 160 cm-t? Mekkora ez idő alatt az átlagsebességük?

(b) Mekkora a sebességük és a gyorsulásuk abban a pillanatban, amikor a 160 cm-es jelzésnél haladnak át?

(c) Milyen időközönként készültek a fényképek?

20. Teherautó mozgása. A grafikon egy kamion helyzetét mutatja, amint az autópályán halad.



(a) A 3.1. alfejezet 3. Példájában bemutatott módszerrel ábrázoljuk a kamion $v = ds/dt$ sebességét a megadott, 15 óra hosszúságú intervallumon. Ezután a kapott grafikon alapján ugyanezzel a módszerrel vázoljuk a dv/dt gyorsulás grafikonját is.

(b) Határozzuk meg a sebesség- és gyorsulásfüggvényt, ha $s = 15t^2 - t^3$. Vessük össze az eredményt a feladat (a) részére adott válaszainkkal.

21. A 3.21. ábrán egy egyenes vonal mentén mozgó test s helyzetét, $v = ds/dt$ sebességét és $a = d^s/dt^2$ gyorsulását mutatja. Melyik melyik? Indokoljuk válaszunkat.

22. A 3.22. ábrán egy egyenes vonal mentén mozgó test s helyzetét, $v = ds/dt$ sebességét és $a = d^s/dt^2$ gyorsulását mutatja. Melyik melyik? Indokoljuk válaszunkat.

Gazdasági alkalmazások

23. Határköltség. Tegyük fel, hogy x darab mosógép előállításának költsége $c(x) = 200 + 100x - 0,1x^2$ dollár.

(a) Mekkora egy mosógép előállításának költsége, ha 100-at gyártunk?

(b) Mekkora a határköltség, ha 100 mosógépet gyártunk?

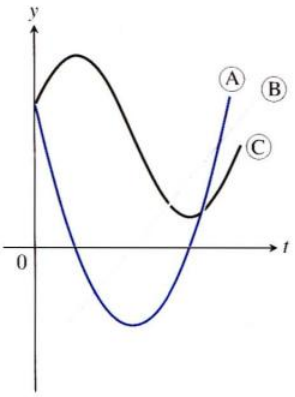
(c) Igazoljuk, hogy a (b)-ben kiszámított határköltség jó közelítéssel megfelel annak, amennyibe (az első 100-on felül) egy további mosógép előállítása kerül.

24. Határbevétel. Tegyük fel, hogy hetente x darab mosógép eladásából $r(x) = 20000\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ dollár bevételünk van.

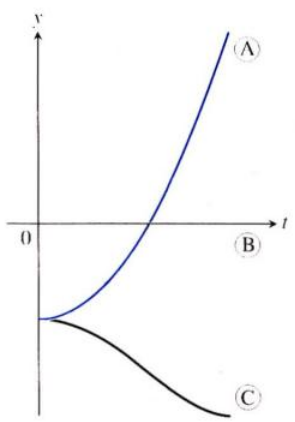
(a) Mekkora a határbevétel 100 mosógép eladása esetén?

(b) Az $r'(x)$ függvény alapján becsüljük meg, mennyivel nő a bevétel, ha hetente nem 100, hanem 101 mosógépet értékesítünk?

(c) Határozzuk meg az $r'(x)$ függvény határértékét, amint $x \to \infty$. Értelmezzük a kapott eredményt.



3.21. ÁBRA: A 21. feladatban szereplő grafikonok



3.22. ÁBRA: A 22. feladatban szereplő grafikonok

További alkalmazások

25. Baktériumtenyészet Ha egy baktériumpopulációhoz baktériumölőszert adunk, a populáció egy ideig még növekszik, aztán fogyatkozni kezd. A populáció nagyságát t óra elteltével (a baktériumok számát) a $b = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$ függvény írja le. Mekkora a növekedési sebesség

(a) $t = 0$ pillanatban,

(b) $t = 5$ óra, és

(c) $t = 10$ óra múltán?

26. Tartályból kifolyó víz. Egy tartályban a csap kinyitása után t perc elteltével $Q(t) = 200(30 - t^2)$ liter víz van. Milyen gyorsan folyik ki a víz 10 perc elteltével (liter/perc egységben)? Az első tíz percben percenként átlagosan hány liter víz folyik ki a tartályból?

27. Tartályból kifolyó víz. Egy víztartály a fenekén lévő csap kinyitása után 12 óra elteltével ürül ki. A víz szintje t óra elteltével

$$y = 6\left(1 - \frac{t}{12}\right)^2$$

méter magasan áll a tartályban.

(a) Határozzuk meg a dy/dt deriváltat.

(b) Mikor ürül a tartály a leggyorsabban, illetve a leglassabban?

(c) Ábrázoljuk az y és a dy/dt függvények grafikonját.

28. Léggömb feltöltése. A gömb térfogata a sugártól függ: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

(a) Mekkora a térfogat növekedésének sebessége, amikor a sugár éppen 2 méter (m^3/m egységben)?

(b) Mennyivel nő a térfogat, miközben a sugár 2 méterről 2,2 méterre növekszik?

29. Repülőgép-felszállás. A kifutópályán gyorsuló repülőgép az indulás után t másodperccel a kiindulóponttól $D = (10/9)t^2$ méter távolságra van. A repülőgép akkor hagyja el a talajt, amikor sebessége eléri a 200 km/h-t. Hány másodperc telik el a fékek kiengedésétől a felszállásig? Mekkora utat tesz meg eközben a repülőgép a kifutópályán?

30. Lávakitörés. Bár a Hawaii-szigeteki Kilauea Iki vulkán 1959-es kitörését több kisebb lávaömlés is megelőzte, manapság a kráterben már csupán egyetlen lávaforrás működik. Ebből – szemtanúk szerint – egy alkalommal 580 méter magasságba lövellt ki az izzó láva. Mekkora sebességgel tört ki a láva? [Útmutatás: Amennyiben a láva kezdősebessége v_0, úgy t másodperc elteltével $s = v_0 t - 4{,}9t^2$ méter magasságban van. Először határozzuk meg azt a pillanatot, amikor $ds/dt = 0$. A légellenállástól tekintsünk el.]

T A 31–34. feladatokban az $s = f(t)$ függvény adja meg egy test helyzetét az s-tengely mentén t idő elteltével. Ábrázoljuk az f függvényt a $v(t) = ds/dt = f'(t)$ sebesség- és az $a(t) = dv/dt = f''(t)$ gyorsulásfüggvénnyel együtt. Magyarázzuk meg, milyen összefüggés van a test mozgása és a $v(t)$, illetve $a(t)$ függvények előjele között. A következő kérdésekre adott válaszok mindenképpen szerepeljenek elemzésünkben.

(a) Melyik pillanatokban van nyugalomban a test?

(b) Mikor halad előre (jobbra, fölfelé), és mikor visszafelé (balra, lefelé)?

(c) Mikor változtat irányt a test?

(d) Mikor gyorsul, és mikor lassul?

(e) Mikor halad a legnagyobb, illetve a legkisebb sebességgel?

(f) Mikor van legtávolabb a kiindulóponttól?

31. $s = 200t - 16t^2, \quad 0 \le x \le 12{,}5$

32. $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \le x \le 5$

33. $s = t^3 - 6t^2 + 7t, \quad 0 \le x \le 4$

34. $s = 4 - 7t + 6t^2 - t^3, \quad 0 \le x \le 4$

35. Lóverseny. Egy versenyló 10 furlong hosszúságú pályán vágtat végig (1 furlong = 220 yard = 201,16 méter). Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy az egyes furlongpóznákhoz hány másodperc elteltével ért a ló.

F	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	0	20	33	46	59	73	86	100	112	124	135

(a) Mennyi ideig tart, amíg a ló a rajttól a célig ér?

(b) Mekkora az átlagsebesség az első 5 furlongon?

(c) Körülbelül mekkora sebességgel halad el a ló a 3 furlongos pózna mellett?

(d) A verseny melyik szakaszán halad a ló a legnagyobb sebességgel?

(e) A verseny melyik szakaszán a legnagyobb a versenyló gyorsulása?

3.4. A trigonometrikus függvények deriváltja

Periodikus (vagy jó közelítéssel periodikus) folyamatok, például az elektromágneses hullámok, a szívdobogás vagy az árapály leírásakor a szinusz és a koszinuszfüggvény nagy szolgálatot tesz. A változások leírásához így értelemszerűen ezeknek a függvényeknek a deriváltját is ismernünk kell. Ebben az alfejezetben mind a hat alapvető trigonometrikus függvény deriváltját meghatározzuk.

A szinuszfüggvény deriváltja

Az $f(x) = \sin x$ függvény deriváltjának meghatározásakor az 2.4. alfejezet 5. példájának (a) részében és a 7. Tételében szereplő határértékre, továbbá a

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

addíciós képletre hivatkozunk. A szöget – mint általában – most is radiánban mérjük.

Ha tehát $f(x) = \sin x$, akkor

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \quad \text{a derivált definíciója}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \quad \text{addíciós képlet}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\sin x \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h\to 0} \left(\cos x \frac{\sin h}{h} \right) =$$

$$= \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} =$$

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 =$$

a 2.4. alfejezetben igazolt határértékek

$$= \cos x$$

A szinuszfüggvény deriváltja a koszinuszfüggvény:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x.$$

1. PÉLDA **A szinuszfüggvényt tartalmazó deriváltak.**

(a) $y = x^2 - \sin x$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{d}{dx}(\sin x) =$$

különbség deriváltja

$$= 2x - \cos x$$

(b) $y = x^2 \sin x$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\sin x) + 2x \sin x =$$

szorzat deriváltja

$$= x^2 \cos x + 2x \sin x$$

(c) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \dfrac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \cdot 1}{x^2} =$$

hányados deriváltja

$$= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

□

A koszinuszfüggvény deriváltja

A koszinuszfüggvény

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

addíciós képlete és a már említett határértékek alapján:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} =$$

a derivált definíciója

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h} =$$

addíciós képlet

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} =$$

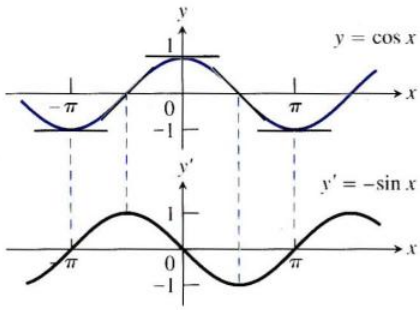
$$= \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h\to 0} \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} =$$

$$= \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$$

a 2.4. alfejezetben igazolt határértékek

$$= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 =$$

$$= -\sin x.$$



3.23. ÁBRA: Az $y' = -\sin x$ mint az $y = \cos x$ egyenletű görbe érintőinek meredekségét megadó függvény.

A koszinuszfüggvény deriváltja a szinuszfüggvény ellentettje:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x.$$

Az állítást a 3.23. ábra szemlélteti.

2. PÉLDA **A koszinuszfüggvényt tartalmazó deriváltak.**

(a) $y = 5x + \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(\cos x) = \qquad \text{összeg}$$
$$= 5 - \sin x$$

(b) $y = \sin x \cos x$

$$\frac{d}{dx} = \sin x \cdot \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) = \qquad \text{szorzat}$$
$$= \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x) =$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

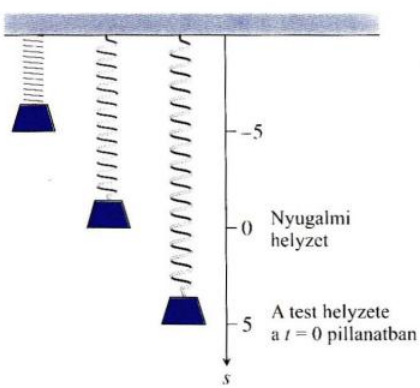
(c) $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-\sin x)\frac{dy}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{dy}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2} = \qquad \text{hányados}$$
$$= \frac{(1-\sin x)(-\sin x) - \cos x(0 - \cos x)}{(1-\sin x)^2} = \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$= \frac{1 - \sin x}{(1-\sin x)^2} =$$
$$= \frac{1}{1 - \sin x}.$$

□

Harmonikus rezgőmozgás

A rugóra vagy gumikötélre erősített test jó közelítéssel *harmonikus rezgőmozgást* végez. A következő példában feltételezzük, hogy a mozgást külső hatás, például súrlódás nem befolyásolja.



3.24. ÁBRA: A függőleges rugón függő, nyugalmi helyzetéből kimozdított test harmonikus rezgőmozgást végez. Mozgását trigonometrikus függvényekkel írhatjuk le (3. példa).

3. PÉLDA **Rugóra erősített test mozgása.**

Egy rugón függő testet 5 egységgel kimozdítunk nyugalmi helyzetéből, majd – a $t = 0$ időpontban – szabadon engedjük. A test helyzetét a t időpontban az

$$s = 5\cos t$$

függvény adja meg. Határozzuk meg a test sebességét és gyorsulását leíró függvényt.

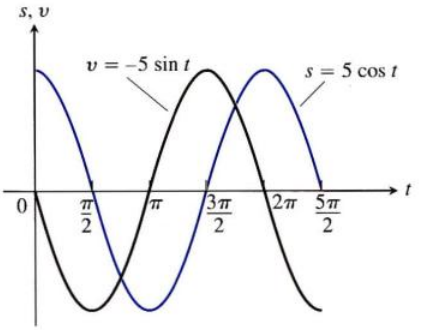
Megoldás.

Helyzet („elmozdulás"): $y = 5\cos x$.

Sebesség: $v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d}{dt}(5\cos x) = -5\sin t.$

Gyorsulás: $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(-5\sin x) = -5\cos t.$

A három egyszerű egyenletből több következtetést is levonhatunk.



3.25. ÁBRA: A 3. példában szereplő test helyzetének és sebességének grafikonja.

1. A súly föl-le mozog az $s = -5$ és az $s = 5$ helyzet között az s-tengely mentén. A mozgás amplitúdója 5, periódusa 2π.

2. A sebesség akkor a legnagyobb, amikor $\cos t = 0$, vagyis az $s = 0$ nyugalmi helyzetben, amint az a 3.25. ábrán is látható. A gyorsaság ekkor $|v| = 5|\sin t|$. A sebesség akkor 0, amikor $\sin t = 0$, vagyis az $s = \pm 5$ végpontokban.

3. A gyorsaság éppen az elmozdulás ellentettje: amikor a test a nyugalmi helyzet fölött van, akkor a gravitáció lefelé húzza, a nyugalmi helyzet alatt viszont a rugó tolja fölfelé.

4. Az $a = -5\cos t$ gyorsulás csak a nyugalmi helyzetben nulla: ekkor a gravitáció és a rugóerő éppen kioltja egymást. A két erő nagysága kizárólag ebben a pontban egyenlő. A gyorsulás a végpontokban a legnagyobb, amikor $\cos t = \pm 1$. □

4. PÉLDA **A gyorsulás változási sebessége.**

A 3. példában bemutatott harmonikus rezgőmozgás esetében a gyorsulás deriváltja (a „lökés"):

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}(-5\cos t) = 5\sin t.$$

A j nagysága akkor a legnagyobb, amikor a rezgő test áthalad az $s = 0$ nyugalmi helyzeten, vagyis amikor a gyorsulás előjelet (tehát „irányt") vált. □

A többi trigonometrikus alapfüggvény deriváltja

Mivel $\sin x$ és $\cos x$ differenciálható fügvények, azért a

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{csc} x = \frac{1}{\sin x}$$

függvények is egytől egyig differenciálhatók (értelmezési tartományuk minden pontjában). Deriváltjukat a hányadosszabály segítségével határozhatjuk meg.

A többi trigonometrikus függvény deriváltja:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x,$$
$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x,$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{ctg} x) = \operatorname{csc}^2 x,$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csc} x) = -\operatorname{csc} x \operatorname{ctg} x.$$

Az első állítást a következő példában bizonyítjuk, a többit az 50. feladatban az Olvasóra bízzuk.

5. PÉLDA

Határozzuk meg a $\operatorname{tg} x$ függvény deriváltját.

Megoldás.

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{tg} x) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{d}{dt}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dt}(\cos x)}{\cos^2} = \text{hányados deriváltja}$$
$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$ □

6. PÉLDA

Határozzuk meg az y'' függvényt, ha $y = \sec x$.

Megoldás.

$$\begin{aligned} y &= \sec x \\ y' &= \sec x \operatorname{tg} x \\ y'' &= \frac{d}{dt}(\sec x \operatorname{tg} x) = \\ &= \sec x \frac{d}{dt}(\operatorname{tg} x) + \operatorname{tg} x \frac{d}{dt}(\sec x) = \qquad \text{szorzat deriváltja} \\ &= \sec x(\sec^2 x) + \operatorname{tg} x(\sec x \operatorname{tg} x) = \\ &= \sec^3 x + \sec x \operatorname{tg}^2 x \end{aligned}$$ □

Mivel valamennyi alapvető trigonometrikus függvény az értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, így egy újabb bizonyítást kaptunk arra – a 3.1. alfejezet 1. Tétele értelmében – hogy ezek értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak. Trigonometrikus függvényekből algebrai műveletekkel és kompozícióval kapott függvények határértékeit ezek szerint egyszerű behelyettesítéssel is kiszámolhatjuk.

7. PÉLDA **Trigonometrikus határérték.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+\sec x}}{\cos(\pi - \operatorname{tg} x)} = \frac{\sqrt{2+\sec 0}}{\cos(\pi - \operatorname{tg} 0)} = \frac{\sqrt{2+1}}{\cos(\pi - 0)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$ □

3.4. Feladatok

Deriváltak

Határozzuk meg a dy/dx függvényt (1–12. feladatok).

1. $y = -10x + 3\cos x$ **2.** $y = \frac{3}{x} + 5\sin x$

3. $y = \csc x - 4\sqrt{x} + 7$ **4.** $y = x^2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x^2}$

5. $y = (\sec x + \operatorname{tg} x)(\sec x - \operatorname{tg} x)$

6. $y = (\sin x + \cos x)\sec x$

7. $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg} x}$ **8.** $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

9. $y = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ **10.** $y = \frac{\cos x}{x} + \frac{x}{\cos x}$

11. $y = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x$

12. $y = x^2 \cos x - 2x\sin x - 2\cos x$

Határozzuk meg a ds/dt függvényt (13–16. feladatok).

13. $s = \operatorname{tg} t - t$ **14.** $s = t^2 - \sec t + 1$

15. $s = \frac{1 + \csc t}{1 - \csc t}$ **16.** $s = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$

Határozzuk meg a $dr/d\theta$ függvényt (17–20. feladatok).

17. $r = 4 - \theta^2 \sin\theta$ **18.** $r = \theta \sin\theta + \cos\theta$

19. $r = \sec\theta \csc\theta$ **20.** $r = (1 + \sec\theta)\sin\theta$

Határozzuk meg a dp/dq függvényt (21–24. feladatok).

21. $p = 5 + \frac{1}{\operatorname{ctg} q}$ **22.** $p = (1 + \csc q)\cos q$

23. $p = \frac{\sin q + \cos q}{\cos q}$ **24.** $p = \frac{\operatorname{tg} q}{1 + \operatorname{tg} q}$

25. Adjuk meg az y'' függvényt, ha

(a) $y = \csc x$, illetve **(b)** $y = \sec x$

26. Adjuk meg az $y^{(4)} = d^4y/dx^4$ függvényt, ha

(a) $y = -2\sin x$, illetve, ha **(b)** $y = 9\cos x$

Érintők

Vázoljuk a függvények grafikonját a megadott intervallumon; tüntessük fel a görbéket a megadott abszcisszájú pontokban érintő egyeneseket is (27–30. feladatok).

27. $y = \sin x, \quad -3\pi/2 \le x \le 2\pi$
$x = -\pi,\ 0,\ 3\pi/2$

28. $y = \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
$x = -\pi/3,\ 0,\ \pi/3$

29. $y = \sec x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
$x = -\pi/3,\ \pi/4$

30. $y = 1 + \cos x, \quad -3\pi/2 \le x \le 2\pi$
$x = -\pi/3,\ 3\pi/2$

Van-e a megadott, $[0, 2\pi]$ intervallumon értelmezett függvények grafikonjának vízszintes érintője? Ha igen, melyik pontban érinti a grafikont? Ha nincs, miért nincs? Ha tehetjük, ellenőrizzük eredményünket számítógép segítségével.

31. $y = x + \sin x$ **32.** $y = 2x + \sin x$

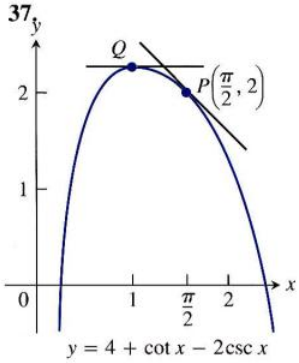
33. $y = x - \operatorname{ctg} x$ **34.** $y = x + 2\cos x$

35. Adjuk meg az $y = \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$ görbe összes olyan pontját, amelyre teljesül, hogy a ponton átmenő érintő párhuzamos az $y = 2x$ egyenletű egyenessel. Ábrázoljuk a görbét és az érintő(ke)t közös koordináta-rendszerben.

36. Adjuk meg az $y = \operatorname{ctg} x$, $0 < x < \pi$ görbe összes olyan pontját, amelyre teljesül, hogy a ponton átmenő érintő párhuzamos az $y = -x$ egyenletű egyenessel. Ábrázoljuk a görbét és az érintő(ke)t közös koordináta-rendszerben.

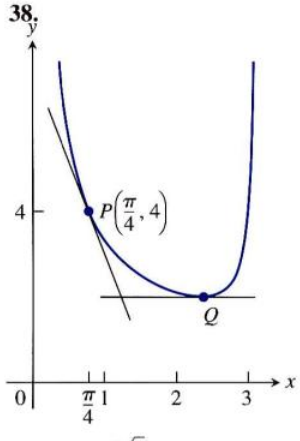
A 37. és 38. feladatokban írjuk fel (a) a megadott görbét a P pontban érintő egyenes, valamint (b) a Q pontbeli vízszintes érintő egyenletét.

37.



$y = 4 + \cot x - 2\csc x$

38.



$y = 1 + \sqrt{2}\csc x + \operatorname{ctg} x$

Trigonometrikus határértékek

Számítsuk ki a megadott határértékeket (39–44. feladatok).

39. $\lim_{x\to 2} \sin\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)$

40. $\lim_{x\to -\pi/6} \sqrt{1+\cos(\pi \csc x)}$

41. $\lim_{x\to 0} \sec\left[\cos x + \pi \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4\sec x}\right) - 1\right]$

42. $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{\pi + \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 2\sec x}\right)$

43. $\lim_{t\to 0} \operatorname{tg}\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)$

44. $\lim_{\theta\to 0} \cos\left(\frac{\pi\theta}{\sin\theta}\right)$

Harmonikus rezgőmozgás

A 45. és 46. feladatokban az $s = f(t)$ függvény egy s-tengely mentén mozgó test helyzetét adja meg az idő függvényében (t-t másodpercben, s-t méterben mérjük). Mekkora a test sebessége, sebességének nagysága, gyorsulása és gyorsulásának változási sebessége a $t = \pi/4$ s időpontban?

45. $s = 2 - 2\sin t$

46. $s = \sin t + \cos t$

További példák és feladatok

47. Meg lehet-e adni a c értékét úgy, hogy a

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 3x}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

függvény folytonos legyen az $x = 0$ helyen? Indokoljuk válaszunkat.

48. Van-e a b-nek olyan értéke, amellyel a

$$f(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$$

függvény folytonos az $x = 0$ helyen? Indokoljuk válaszunkat.

49. Határozzuk meg a $d^{999}/dx^{999}(\cos x)$ függvényt.

50. Igazoljuk (a) a $\sec x$, (b) a $\csc x$ és a (c) $\operatorname{ctg} x$ deriváltjára vonatkozó formulát.

51. Rajzoltassuk ki a képernyőre a $[-\pi, 2\pi]$ intervallum felett az $y = \cos x$ függvény grafikonját. Ugyanebben az ablakban jelenítsük meg az

$$y = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

függvények grafikonját is $h = 1$, $0{,}5$, $0{,}3$, $0{,}1$ esetben. Egy másik ablakban tegyük ugyanezt a $h = -1$; $-0{,}5$; $-0{,}3$; $-0{,}1$ értékekkel. Mi történik, amikor $h \to 0^+$, illetve amikor $h \to 0^-$? Mit illusztrálnak a példák?

52. Rajzoltassuk ki a képernyőre a $[-\pi, 2\pi]$ intervallum felett az $y = -\sin x$ függvény grafikonját. Ugyanebben az ablakban jelenítsük meg az

$$y = \frac{\cos(x+h) - \sin x}{h}$$

függvények grafikonját is $h = 1$; $0{,}5$; $0{,}3$; $0{,}1$ esetben. Egy másik ablakban tegyük ugyanezt a $h = -1$; $-0{,}5$; $-0{,}3$; $-0{,}1$ értékekkel. Mi történik $h \to 0^+$, illetve $h \to 0^-$ esetén? Mit illusztrálnak a példák?

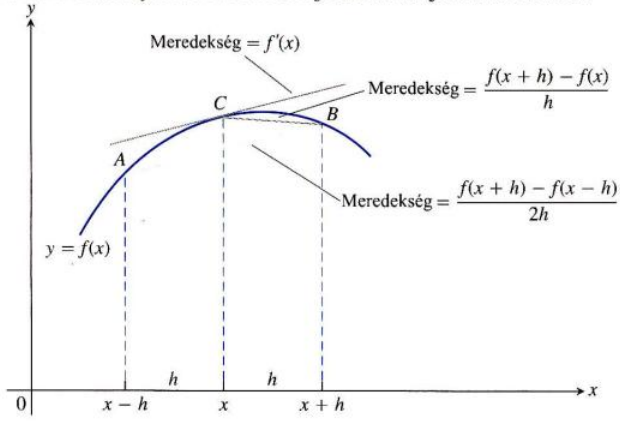
53. A centrált differenciahányados. Az

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

centrált differenciahányadost gyakran használjuk az $f'(x)$ deriváltközelítésére, mivel (i) amennyiben deriválható az x helyen, akkor a $h \to 0$ esetben határértéke megegyezik $f'(x)$-szel, és mivel (ii) egy adott h esetén általában jobb közelítést ad a deriváltra, mint a

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

differenciahányados. Az utóbbit jól illusztrálja az alábbi ábra.



(a) Vizsgáljuk meg, hogy az $f(x) = \sin x$ függvény centrált differenciahányadosa milyen gyorsan konvergál az $f'(x) = \cos x$ függvényhez. Ábrázoljuk ehhez a $[-\pi, 2\pi]$ intervallum fölött az $y = \cos x$ és az

$$y = \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{2h}$$

függvények grafikonját a $h = -1$, $-0{,}5$, $-0{,}3$ értékekkel. Vessük össze a grafikonokat azzal, amit az 51. feladatban ugyanezekre a h értékekre kaptunk.

(b) Annak vizsgálata céljából, hogy az $f(x) = \cos x$ függvény centrált differenciahányadosa milyen gyorsan konvergál az $f'(x) = -\sin x$ függvényhez, ábrázoljuk a $[-\pi, 2\pi]$ intervallum fölött az $y = -\sin x$ és az

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos(x-h)}{2h}$$

függvények grafikonját a $h = -1$, $-0{,}5$, $-0{,}3$ értékekkel. Vessük össze a grafikonokat azzal, amit az 52. feladatban ugyanezekre a h értékekre kaptunk.

54. Nem árt az óvatosság. Előfordul, hogy az

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

centrált differenciahányadosnak olyan f függvények esetén is van határértéke, amint $h \to 0$, amelyek nem differenciálhatók az x helyen. Igazoljuk ezt az állítást az $f(x) = |x|$ függvény $x = 0$ helyen való vizsgálatával: mutassuk meg, hogy

$$\lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x-h|}{2h}$$

határérték annak ellenére létezik, hogy az abszolútérték az $x = 0$ helyen nem differenciálható. A tanulság: ha a derivált értékét a centrált differenciahányadosokkal közelítjük, előbb mindig győződjünk meg arról, hogy függvényünk a szóban forgó helyen differenciálható.

55. A tangensfüggvény érintői. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallumon az $y = \operatorname{tg} x$ függvény és az y' deriváltfüggvény grafikonját. Van-e a tangensfüggvény grafikonjának érintői között mininimális meredekségű? És maximális meredekségű? Lehet-e egy érintő meredeksége negatív? Indokoljuk válaszunkat.

56. A kotangensfüggvény érintői. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a $(0, \pi)$ intervallumon az $y = \operatorname{ctg} x$ függvény és az y' deriváltfüggvény grafikonját. Van-e a kotangensfüggvény grafikonjának érintői között minimális meredekségű? És maximális meredekségű? Lehet-e egy érintő meredeksége pozitív? Indokoljuk válaszunkat.

57. A $(\sin kx)/x$ függvények vizsgálata. Ábrázoljuk számítógép segítségével az $y = (\sin x)/x$, az $y = (\sin 2x)/x$ és az $y = (\sin 4x)/x$ függvény grafikonját a $[-2, 2]$ intervallum felett. Mi az $y = (\sin 5x)/x$ és az $y = (\sin(-3x))/x$ függvények határértéke, amint $x \to 0$? Mit mondhatunk a $y = (\sin kx)/x$ függvények grafikonjáról más k értékek esetén? Indokoljuk válaszunkat.

58. Fokokban számított deriváltak. Mi történik, ha a szinusz- és a koszinuszfüggvény deriváltjának kiszámításakor x-et nem radiánban, hanem fokokban mérjük? Kövessük az alábbi utasításokat, és kiderül.

(a) Állítsuk a számítógépünket DEG módba, és rajzoltassuk ki az

$$f(h) = \frac{\sin h}{h}$$

függvény grafikonját. Becsüljük meg a $\lim_{h \to 0} f(h)$ határértéket. Vessük össze becslésünket a $\pi/180$ számmal. Van-e alapos okunk azt feltételezni, hogy a határérték *valóban* $\pi/180$?

(b) Továbbra is DEG módban, becsüljük meg

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

értékét is.

(c) Új ismereteink birtokában hajtsuk végre a szinuszfüggvény deriváltjának kiszámításakor követett lépéseket. Mire jutunk?

(d) Ugyanaz, mint a (c), de most a $\cos x$ függvény esetében.

(e) A DEG mód hátránya nyilvánvalóbbá válik a magasabb rendű deriváltak kiszámításakor. Próbáljuk ki: mi a szinusz-, illetve a koszinuszfüggvény második és harmadik deriváltja „DEG módban"?

3.5. A láncszabály. Paraméteres egyenletek

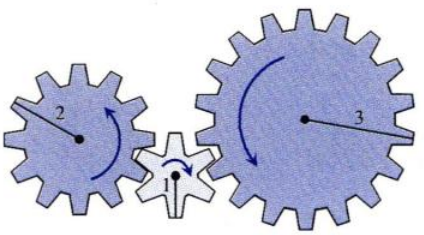
Már tudjuk, mi az $y = f(u) = \sin u$ és az $u = g(x) = x^2 - 4$ függvény deriváltja, de az olyan összetett függvények, mint amilyen például $F(x) = f(g(x)) = \sin(x^2 - 4)$ deriváltját az eddig megismert szabályok alapján egyelőre nem tudjuk meghatározni. Az $f \circ g$ alakú függvények deriváltját a *láncszabály* alapján számítjuk ki, amely szerint két differenciálható függvény kompozíciójának deriváltja a megfelelő helyen vett deriváltak szorzatával egyenlő. A láncszabály a differenciálszámítás egyik leggyakrabban alkalmazott módszere. Ebben az alfejezetben ezzel a szabállyal ismerkedünk meg, majd a síkbeli görbék és érintőik tanulmányozására használjuk fel.

Összetett függvények deriváltja

Kezdjük a vizsgálódást néhány példával.

1. PÉLDA

Az $y = \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}(3x)$ függvényt tekinthetjük az $y = \frac{1}{2}u$ és az $u = 3x$ függvény $y \circ u$ kompozíciójának. Mi az összefüggés a három függvény deriváltja között?



3.26. ÁBRA: Amikor az A fogaskerék elindul, megforgatja B-t, B pedig C-t. A kerekek kerületének összevetésével (például a fogak megszámolása alapján) láthatjuk, hogy $y = u/2$, vagyis amíg B kettőt, addig C egyet fordul, továbbá, hogy $y = 3x/2$, A egy fordulatával tehát B hármat fordul. Végeredményben tehát $y = 3x/2$, így $dy/dx = 3/2 = (1/2)\cdot 3 = (dy/du)(du/dx)$.

Megoldás. Mint az könnyen ellenőrizhető,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}, \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \frac{du}{dx} = 3.$$

Mivel $\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\cdot 3$, azt kapjuk, hogy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Vajon véletlenül? A szemlélet számára az eredmény nem tűnik véletlennek: amennyiben $y = f(u)$ fele olyan gyorsan változik, mint u, $u = g(x)$ pedig háromszor olyan gyorsan változik, mint x, akkor valóban azt várjuk, hogy y másfélszer gyorsabban változzon, mint x. A hatásmechanizmust egymáshoz kapcsolódó fogaskerekekkel szemléltethetjük (l. a 3.26. ábrát). □

2. PÉLDA

Az

$$y = 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2+1)^2$$

függvény az $y = u^2$ és az $u = 3x^2 + 1$ függvény kompozíciója. A két utóbbi függvény deriváltjainak szorzata:

$$\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 2u\cdot 6x = 2(3x^2+1)\cdot 6x = 36x^3 + 12x,$$

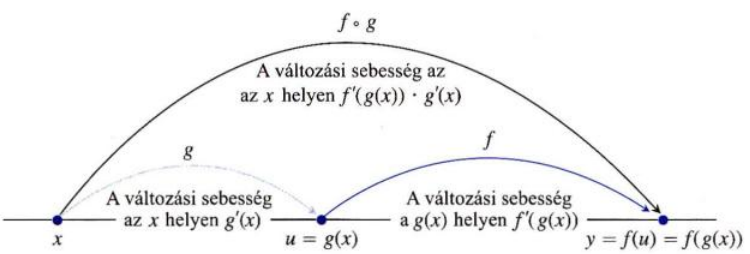
az y függvény deriváltja pedig:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(9x^4 + 6x^2 + 1) = 36x^3 + 12x$$

Újra azt kaptuk tehát, hogy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

A példáink szerint tehát az $f(g(x))$ összetett függvény deriváltjának értéke az x helyen az f függvény $g(x)$ helyen vett deriváltjának és az f függvény x helyen vett deriváltjának szorzata. Ez a 3.27. ábrán szemléltetett *láncszabály*. □



3.27. ÁBRA: A változási gyorsaságok összeszorzódnak: az $f(g(x))$ összetett függvény deriváltjának értéke az x helyen az f függvény $g(x)$ helyen vett deriváltjának és az f függvény x helyen vett deriváltjának szorzata.

3. TÉTEL **Láncszabály.**

Ha az $f(u)$ függvény differenciálható az $u = g(x)$ helyen, a $g(x)$ függvény pedig differenciálható az x helyen, akkor az $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ összetett függvény differenciálható az x helyen és

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Leibniz-féle jelölésben: ha $y = f(u)$ és $u = g(x)$, akkor

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},$$

ahol a dy/du deriváltat az $u = g(x)$ helyen kell kiszámítani.

A láncszabály szemléletes bizonyítása. Jelölje Δu a Δx-nek megfelelő változást:

$$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$$

Az y függvényérték megváltozása ekkor:

$$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u)$$

Késztetést érezhetünk arra, hogy a Δ-törtet kibővítsük:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{1}$$

Vegyük ezután a határértéket, amint $\Delta x \to 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = && \text{mivel } g \text{ folytonos, } \Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0 \\
&= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

A bizonyítás egyetlen hiányossága, hogy az (1) egyenletben előfordulhat, hogy $\Delta u = 0$ (még olyankor is, amikor $\Delta x \neq 0$), 0-val pedig nem lehet osztani. A 3.8. alfejezetben megadjuk a tétel precíz, a kellemetlen helyzetet is kezelni tudó bizonyítását. □

3. PÉLDA **A láncszabály alkalmazása.**

Egy x-tengely mentén mozgó objektum helyzetét az idő függvényében az $x(t) = \cos(t^2+1)$ függvény adja meg ($t \geq 0$). Adjuk meg az objektum sebességét t függvényében.

Megoldás. A sebesség a dx/dt derivált. Esetünkben x az $x = \cos u$ és az $u = t^2+1$ függvény kompozíciója. A két utóbbi függvény deriváltja:

$$\frac{dx}{du} = -\sin(u) \qquad x = \cos u$$

$$\frac{du}{dt} = 2t \qquad u = t^2+1$$

A láncszabály szerint ekkor:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \\
&= -\sin(u) \cdot 2t = && \text{a } dx/du \text{ deriváltat az } u \text{ helyen kell kiszámítani:} \\
&= -\sin(t^2+1) \cdot 2t = \\
&= -2t \sin(t^2+2t).
\end{aligned}$$

□

A Leibniz-féle jelölés hátránya, hogy nem derül ki belőle, melyik helyen kell a deriváltakat kiszámítani.

A „kívülről befelé" szabály

A láncszabályra a következőképpen is gondolhatunk: az $y = f(g(x))$ függvény

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

deriválásakor „kívülről befelé" haladunk: kiszámítjuk a „külső" f függvény deriváltját a $g(x)$ helyen, majd befelé haladva a g függvényt is deriváljuk, immár az x helyen.

4. PÉLDA **Deriválás „kívülről befelé".**

Deriváljuk a $\sin(x^2+x)$ függvényt.

Megoldás.

$$\frac{d}{dx}\sin\underbrace{(x^2+x)}_{\text{belső fv.}} = \cos\underbrace{(x^2+x)}_{\substack{\text{belső fv.}\\ \text{magában}}}\cdot\underbrace{(2x+1)}_{\substack{\text{belső fv.}\\ \text{deriváltja}}}. \qquad \square$$

A láncszabály ismételt alkalmazása

A derivált kiszámításához gyakran a kétszer vagy többször is alkalmaznunk kell a láncszabályt. Íme egy példa.

5. PÉLDA **„Háromszemű" lánc.**

Határozzuk meg a $g(t) = \operatorname{tg}(5-\sin 2t)$ függvény deriváltját.

Megoldás. A tangensfüggvény bemenete az $(5-\sin t)$ függvény kimenete, az utóbbiban szereplő szinuszfüggvény értéke a $2t$-től, $2t$-é pedig t-től függ. A láncszabályt ennélfogva többször is alkalmaznunk kell:

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{d}{dt}(\operatorname{tg}(5-\sin 2t)) = \\
&= \sec^2(5-\sin 2t)\cdot\frac{d}{dt}(5-\sin 2t) = && \text{a tg}\,u \text{ függvény deriváltja; } u = 5-\sin 2t\\
&= \sec^2(5-\sin 2t)\cdot(0-\cos 2t\cdot\frac{d}{dt}(2t)) = && \text{az } 5-\sin u \text{ függvény deriváltja; } u = 2t\\
&= \sec^2(5-\sin 2t)\cdot(-\cos 2t)\cdot 2 = \\
&= -2(\cos 2t)\sec^2(5-\sin 2t). && \square
\end{aligned}$$

Láncszabály és hatványozás

Ha f az u, u pedig az x változó differenciálható függvénye, akkor az $y = f(u)$ függvényre a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},$$

láncszabály alapján a következőt kapjuk:

$$\frac{d}{dx}f(u) = f'(u)\frac{du}{dx}.$$

Ha például $f(u) = u^n$, ahol n pozitív egész szám, akkor a hatványfüggvény deriváltjára vonatkozó szabályunk szerint $f'(u) = n\cdot u^n$. Ha u az x változó differenciálható függvénye, akkor a láncszabály speciális eseteként a következő „*hatványláncszabályt*" kapjuk:

$$\frac{d}{dx}f(u) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

6. PÉLDA **A hatványláncszabály alkalmazása.**

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(5x^3-x^4)^7 &= 7(5x^3-x^4)^6\frac{d}{dx}(5x^3-x^4) = && u = 5x^3-x^4,\ n=7\\
&= 7(5x^3-x^4)^6(5\cdot 3x^2-4x^3) =\\
&= 7(5x^3-x^4)^6(15x^2-4x^3)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3x-2}\right) = \frac{d}{dx}(3x-2)^{-1} =$$

$$= -1(3x-2)^{-2}\frac{d}{dx}(3x-2) = \qquad u = 3x-2,\ n = -1$$

$$= -1(3x-2)^{-2}\cdot 3 = -\frac{3}{(3x-2)^2}.$$

A második példában természetesen a hányados deriváltjára vonatkozó szabályt is alkalmazhattuk volna. □

7. PÉLDA **Érintő meredekségének meghatározása.**

(a) Határozzuk meg az $y = \sin^5 x$ függvény grafikonját az $x = \pi/3$ abszcisszájú pontban érintő egyenes meredekségét.

(b) Igazoljuk, hogy az $y = 1/(1-2x)^3$ egyenletű görbe minden érintője pozitív meredekségű egyenes.

Megoldás.

(a) A hatványláncszabályt az $u = \sin x$, $n = 5$ esetre alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{dy}{dx} = 5\sin^4 x \cdot \frac{d}{dx}\sin x = 5\sin^4 x \cos x.$$

A keresett érintő meredeksége eszerint:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\pi/3} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{45}{32}.$$

(b) A hatványláncszabályt most az $u = 1-2x$, $n = -3$ esetre alkalmazzuk:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(1-3x)^{-3} = -3(1-2x)^{-4}\frac{d}{dx}(1-2x) =$$

$$= -3(1-2x)^{-4}\cdot(-2) = \frac{6}{(1-2x)^4}.$$

A görbét valamely (x,y) pontjában (ahol $x \neq 1/2$) érintő egyenes meredeksége eszerint

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{(1-2x)^4},$$

és két pozitív szám hányadosa mindig pozitív. □

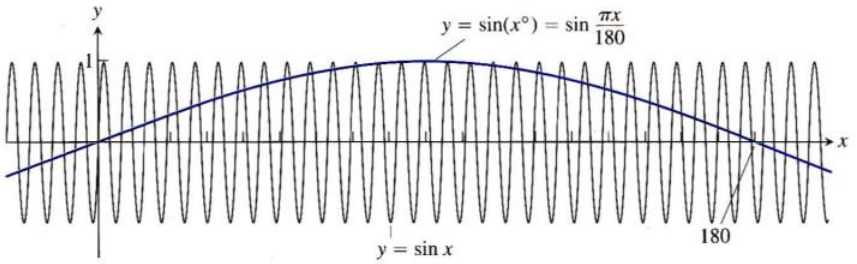
8. PÉLDA **Radián és fok.**

Tartsuk szem előtt, hogy a szinusz- és koszinuszfüggvény deriváltjának kiszámításakor x értékét mindig radiánban, nem pedig fokokban adtuk meg. A láncszabály alapján a kétféle mérték közötti különbséget új szempontból világíthatjuk meg. Mivel $180° = \pi$, így ha $x°$ jelöli x fokokban mért nagyságát, akkor $x° = \pi x/180$ (radián). A láncszabállyal ekkor a következőt kapjuk:

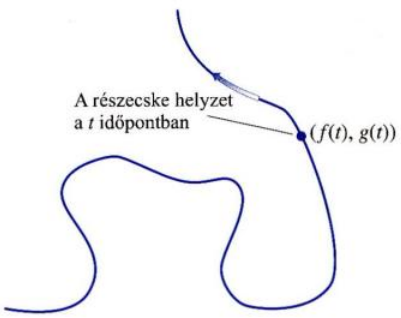
$$\frac{d}{dx}\sin(x°) = \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos(x°).$$

L. ehhez a 3.28. ábrát. Hasonlóan: $\cos(x°)$ deriváltja $-(\pi/180)\sin(x°)$.

A $\pi/180$ tényező a magasabb rendű deriváltak esetében „hatványozottan" zavaró, jó okunk van tehát arra, hogy az analízisben a szögeket radiánban mérjük. □



3.28. ÁBRA: A $\sin(x^\circ)$ függvény periódusa a $\sin x$ periódusának $\pi/180$-ad része; maximális meredeksége $\pi/180$, ekkora a meredekség például az $x = 0$ helyen.



3.29. ÁBRA: Egy xy-síkban mozgó részecske pályája gyakran nem tekinthető sem x, sem y valamely függvénye grafikonjának.

Paraméteres egyenletek

Amikor egy görbe pontjait egyenlettel adjuk meg, akkor gyakran megfelelőbb, ha nem a görbe $P(x,y)$ pontjainak y-koordinátáját fejezzük ki az x-koordináta segítségével, hanem az x- és y-koordinátát egyaránt egy harmadik – mondjuk t-vel jelölt – változó függvényeként írjuk fel. A 3.29. ábrán egy síkban mozgó test helyzetét koordinátánként az $x = f(t)$ és az $y = g(t)$ függvény határozza meg. Ha mozgásról van szó, akkor t általában az időt jelöli. Az ilyen egyenletek alapján a test helyzete sokkal könnyebben meghatározható, mint az alakzatok Descartes-féle egyenletei esetében: a t időpontban a részecske az $(x,y) = (f(t),g(t))$ pontban tartózkodik.

DEFINÍCIÓ **Paraméteresen megadott görbe.**

Ha az

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

függvények értelmezési tartománya ugyanaz a t-intervallum, akkor a szóban forgó t-értékekhez tartozó $(x,y) = (f(t),g(t))$ ponthalmazt **paraméteresen megadott görbének** (néha egyszerűen paraméteres görbének) nevezzük. A fenti egyenletek a görbe **paraméteres egyenletei**.

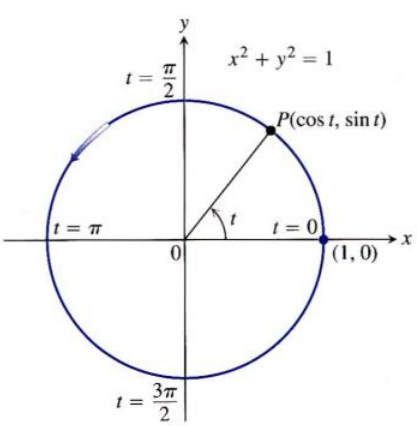
A t változót ilyenkor a görbe paraméterének, az f és a g függvény I értelmezési tartományát pedig a görbe paraméter-intervallumának nevezzük. Ha I egy $[a,b]$ zárt intervallum, akkor az $(f(a),g(a))$ pontot a görbe **kezdőpontjának**, az $(f(b),g(b))$ pontot a görbe **végpontjának** nevezzük. Ha megadjuk egy görbe paraméteres egyenleteit, akkor azt mondjuk, hogy **paramétereztük** a görbét. Az I intervallum és a két egyenlet együtt a görbe **paraméterezése**.

9. PÉLDA **Mozgás körvonal mentén.**

Ábrázoljuk az alábbi, paraméteresen megadott görbéket.

(a) $x = \cos t \quad y = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

(b) $x = a\cos t \quad y = a\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

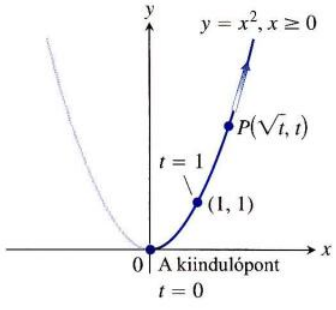


3.30. ÁBRA: Az $x = \cos t$, $y = \sin t$ paraméterezés az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű körvonalon való mozgást írja le; a mozgás irányát az ábrán nyíl jelzi.

Megoldás.

(a) Mivel $x^2 + y^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$, a paraméteresen megadott görbe minden pontja rajta van az origó középpontú, egységsugarú körön. Ahogy a t paraméter 0-tól 2π-ig növekszik, az $(x,y) = (\cos t, \sin t)$ pontok az $(1,0)$ ponttal kezdve az óramutató járásával ellentétes irányban a körvonal összes pontját befutják (l. a 3.30. ábrát).

(b) Most $x^2 + y^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t = a^2$. Ahogy a t paraméter 0-tól 2π-ig növekszik, az $(x,y) = (a\cos t, a\sin t)$ pontok az $(a,0)$ ponttal kezdve az óramutató járásával ellentétes irányban az $|a|$ sugarú, origó középpontú körvonalon haladnak végig, a $t = 0$ paraméterhez tartozó kezdőpont és a $t = 2\pi$-hez tartozó végpont egyaránt az $(a,0)$ pont. □



3.31. ÁBRA: Az $x = \sqrt{t}$ és az $y = t$ egyenlettel, valamint a $[0, \infty)$ intervallummal megadott paraméterezés az $y = x^2$ egyenletű parabola jobb oldali ágán haladó részecske pályáját írja le (10. példa).

10. PÉLDA **Mozgás parabola mentén.**

Az xy-síkban mozgó részecske t időpontban elfoglalt helyzetét az

$$x = \sqrt{t}, \quad y = t, \quad t \geq 0$$

paraméterezés adja meg. Milyen pályán mozog a részecske?

Megoldás. A mozgás pályáját úgy határozzuk meg, hogy a fenti egyenletrendszerből kiküszöböljük a t paramétert. Ha szerencsénk van, olyan egyenletet kapunk, amelynek alapján megmondhatjuk, milyen alakú a pálya. Esetünkben ez a helyzet:

$$y = t = (\sqrt{t})^2 = x^2,$$

ez pedig egy parabola egyenlete. A részecske tehát az $y = x^2$ parabola mentén mozog, de csupán a parabola egyik – a szimmetriatengelytől jobbra eső – felét járja be (l. a 3.31. ábrát). A mozgás kezdőpontja a $t = 0$ paraméterértékhez tartozó origó, végpontja pedig nincs. □

11. PÉLDA **Szakasz paraméterezése.**

Adjuk meg a $(2, -1)$ és $(3, 5)$ pontokat összekötő szakasz egy paraméterezését.

Megoldás. A $(-2, 1)$ kezdőpont koordinátáit felhasználva írjunk fel két egyenletet:

$$x = -2 + at \quad y = 1 + bt.$$

Az egyenletrendszer által reprezentált görbe egyenes szakasz, amit azonnal látunk, ha mindkét egyenletből kifejezzük t-t:

$$\frac{x+2}{a} = \frac{y-1}{b},$$

ez valóban egy egyenes egyenlete. Az egyenes átmegy a $(-2, 1)$ ponton (a $t = 0$ paraméterérték ezt a pontot adja meg); a és b értékét annak alapján határozzuk meg, hogy az egyenes a $(3, 5)$ pontra is illeszkedik:

$$\begin{aligned} 3 &= -2 + a \quad \Rightarrow \quad a = 5 \quad (x = 3 \text{ a pl. } t = 1 \text{ paraméterértéknél}) \\ 5 &= 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = 4 \quad (y = 5 \text{ a pl. } t = 1 \text{ paraméterértéknél}) \end{aligned}$$

A keresett paraméterezés tehát:

$$x = -2 + 5t, \quad y = 1 + 4t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

a kezdőpont a $(-2, 1)$, a végpont a $(3, 5)$ pont. □

Paraméteres görbék meredeksége

Az $x = f(t)$ és $y = g(t)$ függvényekkel paraméterezett görbét t szerint differenciálhatónak nevezzük, ha f és g egyaránt differenciálható függvények. Amennyiben valamely t helyen y az x differenciálható függvénye, akkor a dy/dx, dx/dt és dy/dt deriváltak között a láncszabály létesít kapcsolatot:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Ha $dx/dt \neq 0$, akkor oszthatunk vele, és így dy/dx is kifejezhető.

Paraméteres formula a dy/dx deriváltra.

Ha mindhárom derivált létezik és $dx/dt \neq 0$, akkor

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}. \tag{2}$$

12. PÉLDA **Paraméteres deriválás.**

Mennyi dy/dx értéke $t = 6$ esetén, ha $x = 2t + 3$ és $y = t^2 - 1$?

Megoldás. A (2) egyenlet alapján a dy/dx deriváltat t függvényeként fejezzük ki:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t}{2} = t = \frac{x-3}{2}.$$

Amikor $t = 6$, akkor $dy/dx = 6$. Vegyük észre, hogy a dy/dx deriváltat egyúttal x függvényében is kifejeztük. □

13. PÉLDA **Mozgás az $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ egyenletű ellipszis mentén.**

Milyen pályán mozog az a részecske, amely a t időpontban abban a $P(x,y)$ pontban van, amelynek koordinátáit az

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

függvények adják meg? Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely a görbét az $(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$, vagyis a $t = \pi/4$ paraméterértéknek megfelelő pontban érinti. (Mind az a, mind a b konstans pozitív.)

Megoldás. A keresett alakzat egyenletének felírásához a t paramétert kiküszöböljük:

$$\cos t = \frac{x}{a}, \quad \sin t = \frac{y}{b}.$$

A $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ egyenlet alapján így a következőt kapjuk:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{vagy} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ez pedig egy ellipszis egyenlete. Amikor $t = 0$, akkor

$$x = a\cos(0) = a, \quad y = b\sin(0) = 0,$$

a kezdőpont tehát az $(a,0)$ pont. Amint t növekszik, a részecske az óramutató járásával ellenkező irányban futja be az ellipszis pontjait. A kezdőpontba a $t = 2\pi$ paraméterértéknél érkezik vissza.

Az ellipszist a $t = \pi/4$ paraméterértéknek megfelelő pontban érintő egyenes meredeksége:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/4} = \left.\frac{dy/dt}{dx/dt}\right|_{t=\pi/4} = \left.\frac{b\cos t}{-a\sin t}\right|_{t=\pi/4} = \frac{b/\sqrt{2}}{-a/\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}.$$

Az érintő egyenlete így:

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y = \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

vagy

$$y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b. \quad \square$$

Amennyiben a paraméteres egyenletek alapján y az x kétszer differenciálható függvénye, akkor a (2) egyenletet a $dy/dx = y'$ deriváltfüggvényre alkalmazva a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$

egyenletet kapjuk.

A d^2y/dx^2 derivált paraméteres kifejezése

Ha az $x = f(t)$ és $y = g(t)$ paraméteres egyenletek alapján y az x kétszer differenciálható függvénye, akkor minden olyan t esetén, amelyre $dx/dt \neq 0$, fennáll, hogy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} \tag{3}$$

A d^2y/dx^2 második derivált felírása t függvényeként.

1. Fejezzük ki az $y' = dy/dx$ deriváltat t függvényeként.
2. Deriváljuk az y' függvényt t szerint.
3. Osszuk el a dy'/dt kifejezést dx/dt-vel.

14. PÉLDA

Írjuk fel a d^2y/dx^2 második deriváltat t függvényeként, amennyiben $x = t - t^2$ és $y = t - t^3$.

Megoldás.

1. Fejezzük ki az $y' = dy/dx$ deriváltat t függvényeként:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1-3t^2}{1-2t}.$$

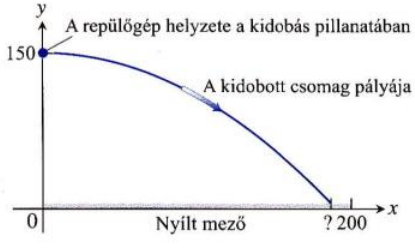
2. Deriváljuk az y' függvényt t szerint:

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1-3t^2}{1-2t}\right) = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^2}.$$

(A hányados deriváltjára vonatkozó szabályt alkalmaztuk.)

3. Osszuk el a dy'/dt kifejezést dx/dt-vel:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{(2-6t+6t^2)/(1-t^2)^2}{1-2t} = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^3}. \qquad \square$$



3.32. ÁBRA: A repülőgépről ledobott segélycsomag pályája (15. példa).

15. PÉLDA **Segélycsomag ledobása repülőgépről.**

A Vöröskereszt repülőgépe élelmiszert és gyógyszereket dob le a katasztrófa által sújtott területre. Egy 210 méter hosszú sík mező fölé érve azonnal kidobják a csomagot, amelynek pályáját a következő paraméterezéssel adhatjuk meg:

$$x = 36t, \quad y = -4{,}9t^2 + 150, \quad t \geq 0.$$

A mezőre esik-e segélycsomag? Az x és az y koordinátákat méterben, t-t pedig másodpercben adjuk meg. Írjuk fel a csomag pályájának egyenletét (l. a 3.32. ábrát), és határozzuk meg, hogyan aránylik a földet éréskor a csomag sebességének vízszintes irányú komponense a függőleges irányú komponenshez.

Megoldás. A csomag földet érésének pillanatában $y = 0$, az ennek megfelelő t időpont pedig:

$$-4{,}9t^2 + 150 = 0 \qquad y = 0$$

$$t = \sqrt{\frac{150}{4{,}9}} \approx 5{,}53\,\text{s}. \qquad \text{mivel } t \geq 0$$

A csomag kidobásának pillanatában $x = 0$. A földet érés pillanatában az x-koordináta:

$$x = 36t = 36 \cdot 5{,}53 \approx 199{,}1\,\text{m}.$$

Mivel $199{,}1 < 210$, a csomag a mezőre esik.

A csomag pályájának egyenletét a t paraméter kiküszöbölésével határozhatjuk meg:

$$y = -4{,}9t^2 + 500 = \qquad \text{az } y\text{-t megadó paraméteres egyenlet}$$

$$= -4{,}9\left(\frac{x}{36}\right)^2 + 500 = \qquad \text{az } x\text{-et megadó paraméteres egyenletből kifejeztük } t\text{-t}$$

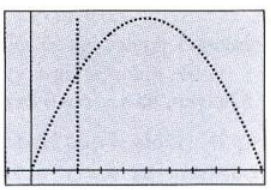
$$= -\frac{4{,}9}{1296}x^2 + 500 \qquad \text{parabola-egyenlet}$$

A sebesség függőleges és vízszintes sebességének aránya a földet érés pillanatában:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=5,53} = \left.\frac{dy/dt}{dx/dt}\right|_{t=5,53} = \left.\frac{-9,8t}{36}\right|_{t=5,53} \approx -1,505$$

A földet érés pillanatában eszerint a sebesség függőleges komponense a vízszintes komponens körülbelül másfélszerese. □

Számítógépes grafikai kísérlet: függőleges mozgás ábrázolása



$\begin{cases} x(t) = 2 \\ y(t) = 160t - 16t^2 \end{cases}$

$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 160t - 16t^2 \end{cases}$

Az

$$x(t) = c, \qquad y(t) = f(t)$$

paraméteres egyenletrendszer az $x = c$ függőleges egyenes mentén való mozgást ír le. Amennyiben $f(t)$ jelöli a mozgó test magasságát a t időpontban, az $(x(t), y(t)) = (c, f(t))$ pontok a valóságos mozgást közelítik. Próbáljuk ki a 3.3. alfejezet 5. példájának adataival: legyen mondjuk $x(t) = 2$ és $y(t) = 49t - 4,9t^2$; használjuk a DOT opciót 0,1-es lépésközzel. Miért változik a pontok távolsága? Miért tűnik úgy, mintha a pontsorozat megállna, mielőtt eléri az ablak tetejét? (Próbáljuk ki külön-külön a $0 \le t \le 5$ és az $5 \le t \le 10$ intervallumot.)

Második „kísérletünkben" rajzoltassuk ki – szintén a DOT opciót használva – az

$$x(t) = t, \qquad y(t) = 49t - 4,9t^2$$

paraméteresen megadott görbét. Vessük össze az ábrát az 5. példa számításaival!

Standard paraméterezés, a deriváltak kiszámítása

KÖR:	$x^2 + y^2 = a^2$	ELLIPSZIS:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
	$x = a\cos t$		$x = a\cos t$
	$y = a\sin t$		$y = b\sin t$
	$0 \le x \le 2\pi$		$0 \le x \le 2\pi$
FÜGGVÉNY:	$y = f(x)$	DERIVÁLTAK:	
	$x = t, y = f(t)$	$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$,	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$

3.5. Feladatok

Deriváltak kiszámítása

Határozzuk meg a megadott $y = f(u)$ és $u = g(x)$ függvények alapján a $dy/dx = f'(g(x))g'(x)$ deriváltat.

1. $y = 6u - 9$, $u = (1/2)x^4$ **2.** $y = 2u^3$, $u = 8x - 1$

3. $y = \sin u$, $u = 3x + 1$ **4.** $y = \cos u$, $u = -x/3$

5. $y = \cos u$, $u = \sin x$ **6.** $y = \sin u$, $u = x - \cos x$

7. $y = \operatorname{tg} u$, $u = 10x - 5$ **8.** $y = -\sec u$, $u = x^2 + 7x$

Alkalmasan választott $u = g(x)$ függvénnyel írjuk fel a megadott függvényt $y = f(u)$ alakban, majd határozzuk meg a dy/dx deriváltat (9–18. feladatok).

9. $y = (2x+1)^5$ **10.** $y = (4 - 3x)^9$

11. $y = \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{-7}$ **12.** $y = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^{-10}$

13. $y = \left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^4$ **14.** $y = \left(\frac{x}{5} + \frac{1}{5x}\right)^5$

15. $y = \sec(\operatorname{tg} x)$ **16.** $y = \operatorname{ctg}\left(\pi - \frac{1}{x}\right)$

17. $y = \sin^3 x$ **18.** $y = 5\cos^{-4} x$

Deriváljuk a függvényeket (19–38. feladatok).

19. $p = \sqrt{3 - t}$ **20.** $q = \sqrt{2r - r^2}$

21. $s = \frac{4}{3\pi}\sin 3t + \frac{4}{5\pi}\cos 5t$

22. $s = \sin\left(\frac{3\pi t}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$

23. $r = (\csc\theta + \operatorname{ctg}\theta)^{-1}$ **24.** $r = -(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)^{-1}$

25. $y = x^2\sin^4 x + x\cos^{-2} x$ **26.** $y = \frac{1}{x}\sin^{-5} x - \frac{x}{3}\cos^3 x$

27. $y = \frac{1}{21}(3x-2)^7 + \left(4 - \frac{1}{2x^2}\right)^{-1}$

28. $y=(5-2x)^{-3}+\frac{1}{8}\left(\frac{2}{x}+1\right)^4$

29. $y=(4x+3)^4(x+1)^{-3}$ **30.** $y=(2x-5)^{-1}(x^2-5x)^6$

31. $h(x)=x\,\mathrm{tg}\,(2\sqrt{x})+7$ **32.** $k(x)=x^2\sec\left(\frac{1}{x}\right)$

33. $f(\theta)=\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^2$ **34.** $g(t)=\left(\frac{1+\cos t}{\sin t}\right)^{-1}$

35. $r=\sin(\theta^2)\cos(2\theta)$ **36.** $r=\sec\sqrt{\theta}\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{\theta}\right)$

37. $q=\sin\left(\frac{t}{\sqrt{t+1}}\right)$ **38.** $q=\mathrm{ctg}\left(\frac{\sin t}{t}\right)$

Határozzuk meg a dy/dt deriváltat (39–48. feladatok).

39. $y=\sin^2(\pi t-2)$ **40.** $y=\sec^2\pi t$

41. $y=(1+\cos 2t)^{-4}$ **42.** $y=(1+\mathrm{ctg}\,(t/2))^{-2}$

43. $y=\sin(\cos(2t-5))$ **44.** $y=\cos\left(5\sin\left(\frac{t}{3}\right)\right)$

45. $y=\left(1+\mathrm{tg}^4\left(\frac{t}{12}\right)\right)^3$ **46.** $y=\frac{1}{6}\left(1+\cos^2(7t)\right)^3$

47. $y=\sqrt{1+\cos(t^2)}$ **48.** $y=4\sin\sqrt{1+\sqrt{t}}$

Második deriváltak

Határozzuk meg az y'' függvényt (49–52. feladatok).

49. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^3$ **50.** $y=(1-\sqrt{x})^{-1}$

51. $y=\frac{1}{9}\mathrm{ctg}\,(3x-1)$ **52.** $y=9\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{3}\right)^3$

Deriváltak számértékének meghatározása

Határozzuk meg a $(f\circ g)'$ deriváltfüggvény értékét a megadott x helyen (53–58. feladatok).

53. $f(u)=u^5+1,\ u=g(x)=\sqrt{x},\ x=1$

54. $f(u)=1-\frac{1}{u},\ u=g(x)=\frac{1}{1-x},\ x=-1$

55. $f(u)=\mathrm{ctg}\,\frac{\pi u}{10},\ u=g(x)=5\sqrt{x},\ x=1$

56. $f(u)=u+\frac{1}{\cos^2 u},\ u=g(x)=\pi x,\ x=1/4$

57. $f(u)=\frac{2u}{u^2+1},\ u=g(x)=10x^2+x+1,\ x=0$

58. $f(u)=\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^2,\ u=g(x)=\frac{1}{x^2}-1,\ x=-1$

59. A táblázat az f és g függvények, valamint a deriváltjaik értékét mutatja az $x=2$ és az $x=3$ helyen.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	1/3	−3
3	3	−4	2π	5

Számítsuk ki a megadott függvények deriváltját a kijelölt x helyen.

(a) $2f(x),\ x=2$ **(b)** $f(x)+g(x),\ x=3$

(c) $f(x)\cdot g(x),\ x=3$ **(d)** $f(x)/g(x),\ x=2$

(e) $f(g(x)),\ x=2$ **(f)** $\sqrt{f(x)},\ x=2$

(g) $1/g^2(x),\ x=3$ **(h)** $\sqrt{f^2(x)+g^2(x)},\ x=2$

60. A táblázat az f és g függvények, valamint a deriváltjaik értékét mutatja az $x=0$ és az $x=1$ helyen.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	1/3
1	3	−4	−1/3	−8/3

Számítsuk ki a megadott függvények deriváltját a kijelölt x helyen.

(a) $5f(x)-g(x),\ x=1$ **(b)** $f(x)\cdot g^3(x),\ x=0$

(c) $\frac{f(x)}{g(x)+1},\ x=1$ **(d)** $f(g(x)),\ x=0$

(e) $g(f(x)),\ x=0$ **(f)** $(x^{11}+f(x))^{-2},\ x=1$

(g) $f(x+g(x)),\ x=0$

61. Mennyi ds/dt a $\theta=3\pi/2$ helyen, ha $s=\cos\theta$ és $d\theta/dt=$ $=5$?

62. Mennyi dy/dt az $x=1$ helyen, ha $y=x^2+7x-5$ és $dx/dt=5$?

Többféleképpen megadható kompozíciók

Mi történik, ha egy függvényt többféleképpen is felírhatunk két függvény kompozíciójaként? A láncszabály szerint a függvény deriváltja nem függhet a felírás módjától. Próbáljuk ki (63–64. feladatok).

63. Legyen $y=x$, határozzuk meg a dy/dx értékét a láncszabály alapján, amennyiben y-t

(a) az $y=(u/5)+7$ és az $u=5x-35$; illetve

(b) az $y=1+(1/u)$ és az $u=1/(x-1)$ függvények kompozíciójának tekintjük.

64. Legyen $y=x^{3/2}$, határozzuk meg a dy/dx értékét a láncszabály alapján, amennyiben y-t

(a) az $y=u^3$ és az $u=\sqrt{x}$; illetve

(b) az $y=\sqrt{u}$ és az $u=x^3$ függvények kompozíciójának tekintjük.

Érintő, meredekség

65. **(a)** Írjuk fel az $y=2\mathrm{tg}\,(\pi x/4)$ egyenletű görbét az $x=1$ abszcisszájú pontban érintő egyenes egyenletét.

(b) Melyik pontban a legkisebb a görbe meredeksége (ha egyáltalán van ilyen pont) a $(-2,2)$ intervallum felett?

66. **A szinuszfüggvény meredeksége.**

(a) Írjuk fel az $y=\sin 2x$ és az $y=-\sin(x/2)$ egyenletű görbét az origóban érintő egyenesek egyenletét. Milyen viszonyban állnak egymással ezek az érintők? Indokoljuk válaszunkat.

(b) Van-e valamiyen kapcsolat az $y=\sin mx$ és az $y=$ $=-\sin(x/m)$ egyenletű görbét (ahol $m\neq 0$ állandó) az origóban érintő egyenesek között? Indokoljuk válaszunkat.

(c) Adott m esetén mi az $y=\sin mx$ és az $y=-\sin(x/m)$ egyenletű görbék legnagyobb meredeksége? Indokoljuk válaszunkat.

(d) A $[0,2\pi]$ intervallumon az $y=\sin x$ függvénynek egy, az $y=\sin 2x$ függvénynek két, a $\sin(x/2)$ függvénynek fél periódusa van. Fennáll-e valamilyen összefüggés az $y=\sin mx$ függvény által a $[0,2\pi]$ intervallumban befejezett periódusok száma és az $y=\sin mx$ egyenletű görbét az origóban érintő egyenes meredeksége között? Válaszunkat indokoljuk.

Paraméteresen megadott görbe Descartes-féle egyenletének felírása

A 67–78. feladatokban az xy-síkban mozgó részecske helyzetét megadó paraméteres egyenletek alapján határozzuk meg a pálya alakját és egyenletét Descartes-féle koordinátákban. Jelezzük, hogy a görbe mely részén, milyen irányban halad végig a részecske.

67. $x=\cos 2t,\quad y=\sin 2t,\quad 0\le t\le \pi$

68. $x=\cos(\pi-t),\quad y=\sin(\pi-t),\quad 0\le t\le \pi$

69. $x=4\cos t,\quad y=2\sin t,\quad 0\le t\le 2\pi$

70. $x=4\sin t,\quad y=5\cos t,\quad 0\le t\le 2\pi$

71. $x=3t,\quad y=9t^2,\quad -\infty<t<\infty$

72. $x=-\sqrt{t},\quad y=t,\quad t\ge 0$

73. $x=2t-5,\quad y=4t-7,\quad -\infty<t<\infty$

74. $x=3-3t,\quad y=2t,\quad 0\le t\le 1$

75. $x=t,\quad y=\sqrt{1-t^2},\quad -1\le t\le 0$

76. $x=\sqrt{t+1},\quad y=\sqrt{t},\quad t\ge 0$

77. $x=\sec^2 t-1,\quad y=\operatorname{tg} t,\quad -\pi/2<t<\pi/2$

78. $x=-\sec t,\quad y=\operatorname{tg} t,\quad -\pi/2<t<\pi/2$

A paraméterezés megkeresése

79. Adjunk meg olyan paraméteres egyenleteket és paraméterintervallumot, amely az $x^2+y^2=a^2$ egyenletű kört az $(a,0)$ pontból kiindulva

(a) egyszer, az óramutató járásával megegyező irányban,

(b) egyszer, az óramutató járásával ellentétes irányban,

(c) kétszer, az óramutató járásával megegyező irányban,

(d) kétszer, az óramutató járásával ellentétes irányban

bejáró részecske mozgását írja le. (Több megoldás is lehetséges.)

80. Adjunk meg olyan paraméteres egyenleteket és paraméterintervallumot, amely az $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ egyenletű ellipszist az $(a,0)$ pontból kiindulva

(a) egyszer, az óramutató járásával megegyező irányban,

(b) egyszer, az óramutató járásával ellentétes irányban,

(c) kétszer, az óramutató járásával megegyező irányban,

(d) kétszer, az óramutató járásával ellentétes irányban

bejáró részecske mozgását írja le. (Mint az előző feladatban, itt is több jó megoldás létezik.)

Adjuk meg a görbe egy paraméterezését (81–86. feladatok):

81. a $(-1,-3)$ és $(4,1)$ pontokat összekötő szakasz;

82. az $(-1,3)$ és $(3,-2)$ pontokat összekötő szakasz;

83. az $x-1=y^2$ egyenletű parabola alsó fele;

84. az $y=x^2+2x$ egyenletű parabola bal oldala;

85. a $(2,3)$ pontból kiinduló, a $(-1,-1)$ pontra illeszkedő félegyenes;

86. a $(-1,2)$ pontból kiinduló, az origón átmenő félegyenes.

Paraméteresen megadott görbe érintője

Írjuk fel a paraméteresen megadott görbéket a megadott paraméterértékhez tartozó pontjukban érintő egyenes egyenletét (87–94. feladatok). Adjuk meg ugyanebben a pontban a d^2y/dx^2 derivált értékét is.

87. $x=2\cos t,\quad y=2\sin t,\quad t=\pi/4$

88. $x=\cos t,\quad y=\sqrt{3}\cos t,\quad t=2\pi/3$

89. $x=t,\quad y=\sqrt{t},\quad t=1/4$

90. $x=-\sqrt{t+1},\quad y=\sqrt{3t},\quad t=3$

91. $x=2t^2+3,\quad y=t^4,\quad t=-1$

92. $x=t-\sin t,\quad y=1-\cos t,\quad t=\pi/3$

93. $x=\cos t,\quad y=1+\sin t,\quad t=\pi/2$

94. $x=\sec^2 t-1,\quad y=\operatorname{tg} t,\quad t=-\pi/4$

Példák, feladatok, alkalmazások

95. Mikor túl gyors a dugattyú? Egy fel-le mozgó dugattyú helyzetét a t (másodpercekben megadott) időpontban az

$$s=A\cos(2\pi bt)$$

függvény adja meg, ahol A és b pozitív állandók; az első a mozgás amplitúdója, a második a frekvenciája (amely azt mutatja, hogy a dugattyú másodpercenként hányszor teszi meg a föl-le utat). Hogyan változik a mozgás sebessége, gyorsulása és gyorsulásának változási sebessége (a „lökés"), ha a frekvencia kétszeresére nő? (Számításunk rámutat, miért megy tönkre a gép, ha túl nagy fordulatszámon járatjuk.)

96. Fairbanksi átlaghőmérsékletek A 3.33. ábra a napi átlaghőmérsékleteket mutatja Fairbanksben (Alaszka). Az év x-edik napjának Fahrenheit-fokban mért átlaghőmérsékletét jó közelítéssel az

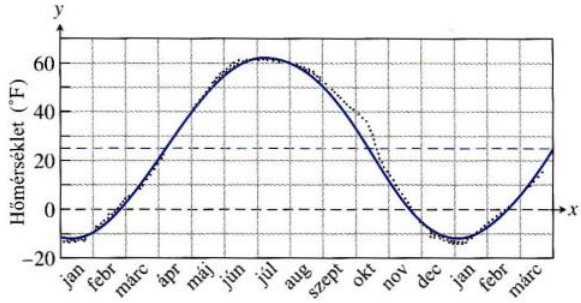
$$y=37\sin\left[\frac{2\pi}{365}(x-101)\right]+25$$

függvény adja meg.

(a) Melyik napon változik a hőmérséklet a leggyorsabban?

(b) Körülbelül hány Fahrenheit-fokkal változik a napi átlaghőmérséklet egy nap alatt akkor, amikor a leggyorsabban változik?

97. Részecske mozgása. Az s-tengely mentén mozgó részecske helyzetét az $s=\sqrt{1+4t}$ függvény adja meg; s-et méterben, t-t másodpercben mérjük. Határozzuk meg a részecske sebességét és gyorsulását a $t=6$ s pillanatban.



3.33. ÁBRA: A levegő átlaghőmérséklete Fairbanksben (Alaszka). A pontokkal jelzett mérési adatokra általános szinuszfüggvényt illesztettünk (96. feladat).

98. Állandó gyorsulás. Egy zuhanó test sebességének nagysága abban a pillanatban, amikor a kiindulóponttól s utat tett meg: $v = k\sqrt{s}$ m/s (ahol k állandó). Igazoljuk, hogy a test gyorsulása állandó.

99. Zuhanó meteor. A Föld légkörébe érő súlyos meteor sebessége fordítottan arányos a Föld középpontjától való s távolsága $\sqrt{s}$ négyzetgyökével. Igazoljuk, hogy a meteor gyorsulása fordítottan arányos s^2-tel.

100. Részecske gyorsulása. Az x-tengely mentén mozgó részecske sebességét a $dx/dt = f(x)$ függvény adja meg. Igazoljuk, hogy a részecske gyorsulása $f(x)f'(x)$.

101. Lengésidő és hőmérséklet. A „matematikai inga" lengésidejét a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

képlet adja meg, ahol L az inga hossza, g pedig a gravitációs gyorsulás. Ha az inga fémszálon függ, akkor annak hossza a hőmérséklettel együtt – közelítőleg L-lel arányosan – változik; ha a hőmérsékletet u jelöli, akkor

$$\frac{dL}{du} = kL,$$

a k állandó az arányossági tényező. Igazoljuk, hogy az inga periódusidejének megváltozása a hőmérsékletváltozás $kT/2$-szorosa.

102. Láncszabály. Legyen $f(x) = x^2$ és $g(x) = |x|$. Akkor az $(f \circ g)(x) = |x|^2 = x^2$ és a $(g \circ f)(x) = |x^2| = x^2$ függvény egyaránt differenciálható az $x = 0$ helyen, pedig ugyanitt a g függvény nem differenciálható. Ellentmond-e ez a láncszabálynak? Indokoljuk válaszunkat.

103. Érintők. Tegyük fel, hogy az $u = g(x)$ függvény az $x = 1$ helyen, az $y = f(u)$ függvény pedig az $u = g(1)$ helyen differenciálható, továbbá hogy az $y = f(g(x))$ függvény érintője az $x = 1$ abszcisszájú pontban vízszintes. Következtethetünk-e ebből valamire a g függvényt az $x = 1$ abszcisszájú pontban, vagy az f függvényt az $u = g(1)$ abszcisszájú pontban érintő egyenes meredekségére vonatkozóan?

104. Tegyük fel, hogy az $u = g(x)$ függvény az $x = -5$ helyen, az $y = f(u)$ függvény pedig az $u = g(-5)$ helyen differenciálható, tovább, hogy $(f \circ g)'(-5) < 0$. Mit mondhatunk (ha mondhatunk valamit egyáltalán) a $g'(-5)$ és az $f'(g(-5))$ függvényértékekről?

T **105. A $\sin 2x$ függvény deriváltja.** Ábrázoljuk számítógép segítségével az $y = 2\cos x$ függvényt a $-2 \le x \le 3{,}5$ intervallumon, majd ugyanebben az ablakban jelenítsük meg az

$$y = \frac{\sin 2(x+h) - \sin 2x}{h}$$

függvény grafikonját a $h = 1$, $h = 0{,}5$ és $h = 0{,}2$ értékekkel. Kísérletezzünk más, köztük negatív h értékekkel is. Mit látunk, amint $h \to 0$? Magyarázzuk meg a jelenséget.

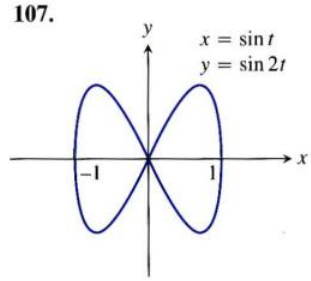
T **106. A $\cos(x^2)$ függvény deriváltja.** Ábrázoljuk számítógép segítségével az $y = -2x\sin(x^2)$ függvényt a $-2 \le x \le 3$ intervallumon, majd ugyanebben az ablakban jelenítsük meg az

$$y = \frac{\cos((x+h)^2) - \cos(x^2)}{h}$$

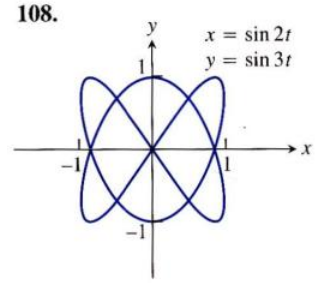
függvény grafikonját a $h = 1$, $h = 0{,}7$ és $h = 0{,}3$ értékekkel. Kísérletezzünk más h értékekkel, köztük néhány negatívval is. Mit tapasztalunk, amint $h \to 0$? Magyarázzuk meg.

T A 107. és 108. feladatokban két *Lissajous-görbét* vizsgálunk. Mindkettő esetében adjuk meg a görbének azt az első síknegyedbe eső pontját, amelyben az érintője vízszintes. Írjuk fel a görbéket az origóban érintő egyenesek egyenletét is.

107.



108.



Határozzuk meg a 109. és 110. feladatokban megadott racionális kitevőjű hatványfüggvények deriváltját, és ezzel igazoljuk, hogy az egész n kitevők esetén érvényes $(d/dx)x^n = nx^{n-1}$ szabály ezekben az esetekben is érvényben marad.

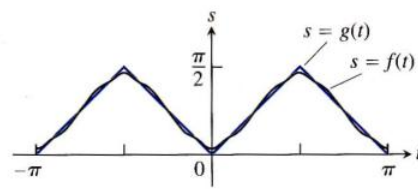
109. $x^{1/4} = \sqrt{\sqrt{x}}$ **110.** $x^{3/4} = \sqrt{x\sqrt{x}}$

Számítógépes vizsgálatok

111. Trigonometrikus polinomok I. Ahogy a 3.34. ábra is mutatja, az

$$s = f(t) = 0{,}78540 - 0{,}63662\cos 2t - 0{,}07074\cos 6t - \\ - 0{,}02546\cos 10t - 0{,}01299\cos 14t$$

„trigonometrikus polinom" az $s = g(t)$ fűrészfogfüggvény jó közelítését adja a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Jól közelíti-e az f függvény deriváltja g deriváltját (azokon a helyeken, ahol az utóbbi létezik)? Kövessük az alábbi lépéseket.



3.34. ÁBRA: A fűrészfogfüggvény közelítése „trigonometrikus polinommal" (111. feladat).

(a) Ábrázoljuk a dg/dt függvényt a $[-\pi, \pi]$ intervallumon (azokban a pontokban, amelyekben értelmezve van).

(b) Határozzuk meg a df/dt függvényt.

(c) Ábrázoljuk a df/dt függvény grafikonját. Hol illeszkedik a legjobban, illetve a legrosszabbul a dg/dt deriválthoz? A trigonometrikus polinomokkal való közelítést a hővezetés és a rezgőmozgás elméletében gyakran alkalmazzuk, nem árt azonban, ha vannak bizonyos fenntartásaink (l. a következő feladatot).

112. Trigonometrikus polinomok II. A 111. feladatban láttuk, hogy a fűrészfogfüggvény trigonometrikus polinommal való közelítésének deriváltja jól közelíti a függvény deriváltját a $[-\pi,\pi]$ intervallumon. Előfordul azonban az is, hogy függvényt meglehetősen jól közelítő trigonometrikus polinom deriváltja a függvény deriváltját csak igen gyengén közelíti. A 3.35. ábrán látható

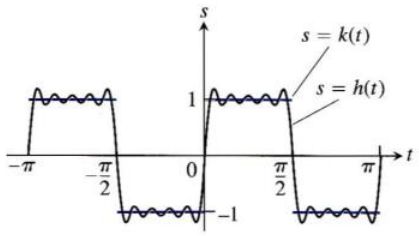
$$s = h(t) = 1{,}2732\sin 2t + 0{,}4244\sin 6t + 0{,}25465\sin 10t + \\ + 0{,}18189\sin 14t + 0{,}14147\sin 18t$$

„polinom" például egészen jól közelíti az ábrán szintén feltüntetett k lépcsős függvényt. A h függvény deriváltjának azonban, mint arról magunk is meggyőződhetünk, nem sok köze van a k függvény deriváltjához.

(a) Ábrázoljuk a dk/dt függvényt a $[-\pi,\pi]$ intervallumon (azokban a pontokban, amelyekben értelmezve van).

(b) Határozzuk meg a dh/dt függvényt.

(c) Ábrázoljuk a dh/dt függvény grafikonját. Láthatjuk, hogy a grafikon erősen különbözik a dk/dt függvény grafikonjától.



3.35. ÁBRA: Lépcsős függvény közelítése „trigonometrikus polinommal" (112. feladat).

Paraméteres görbék.

Számítógép segítségével hajtsuk végre a következő lépéseket (113–116. feladatok).

(a) Ábrázoljuk a megadott paraméterezésű görbét.

(b) Határozzuk meg a dy/dx és a d^2y/dx^2 deriváltakat a t_0 pontban.

(c) Írjuk fel a görbét a t_0 paraméterértékhez tartozó pontban érintő egyenes egyenletét.

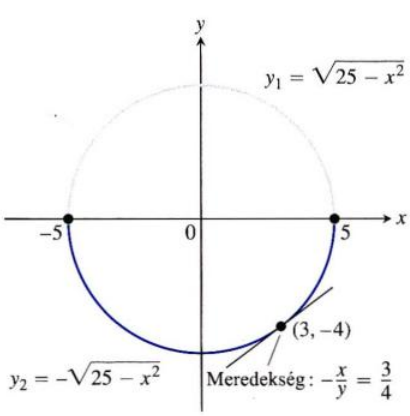
113. $x = \frac{1}{3}t^3$, $y = \frac{1}{2}t^2$, $0 \le t \le 1$, $t_0 = 1/2$

114. $x = 2t^3 - 16t^2 + 25t + 5$, $y = t^2 + t - 3$, $0 \le t \le 6$, $t_0 = 3/2$

115. $x = t - \cos t$, $y = 1 + \sin t$, $-\pi \le t \le \pi$, $t_0 = \pi/4$

116. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $0 \le t \le \pi$, $t_0 = \pi/2$

3.6. Implicit függvény deriváltja

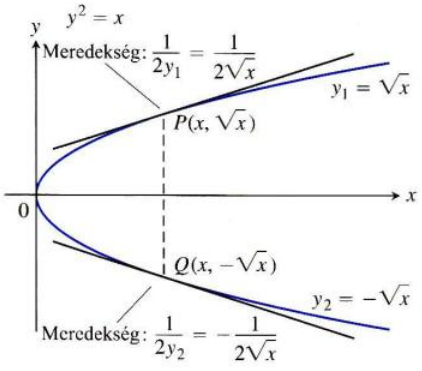


3.36. ÁBRA: Egy teljes körvonal két függvény grafikonjából áll össze. A $(3,-4)$ ponton áthaladó alsó félkör az y_2 függvény grafikonja.

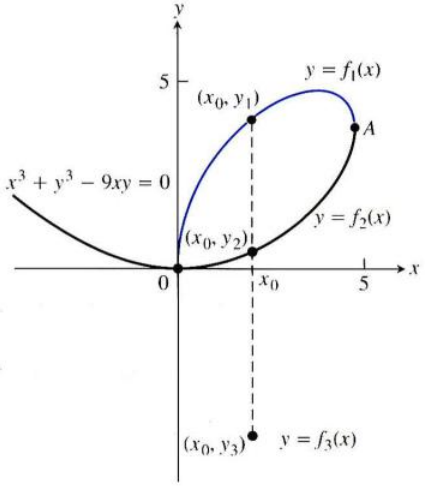
Az eddig vizsgált függvények többségének hozzárendelési szabályát egy $y = f(x)$ alakú egyenlettel határoztuk meg, az y függvényértékeket tehát explicite az x értékek alapján definiáltuk. Az így megadott függvények deriváltjának kiszámítására vonatkozóan számos szabályt felállítottunk. Az előző alfejezetben azt is megtanultuk, hogyan lehet a dy/dx deriváltat kiszámítani az $x = x(t)$ és $y = y(t)$ paraméteres egyenletek alapján. Egy harmadik típusú szituációval találkozunk az

$$x^2 + y^2 - 25 = 0, \quad y^2 - x = 0 \quad \text{vagy} \quad x^3 + x^3 - 9xy = 0$$

alakú egyenletek esetében (l. a 3.36., a 3.37. és a 3.38. ábrát). Ezek az egyenletek az x és az y között implicit összefüggést teremtenek. Előfordul, hogy az ilyen egyenletek alapján y-t „explicite" is ki tudjuk fejezni x segítségével, de a dy/dx deriváltat alkalmanként – az *implicit deriválás* módszerével – még olyan esetekben is meg tudjuk határozni, amikor az $F(x,y) = 0$ egyenlet nem hozható $y = f(x)$ alakra. A módszer lényege, hogy az egyenlet mindkét oldalát deriváljuk x szerint, az így kapott egyenlőséget pedig megoldjuk y'-re. Ebben az alfejezetben ezt a módszert tárgyaljuk; segítségével az egész kitevőjű hatványfüggvények deriváltjára vonatkozó szabályt racionális kitevőkre is kiterjesztjük. A tárgyalás során mindvégig feltételezzük, hogy a szóban forgó egyenletek által implicite meghatározott y az x változó differenciálható függvénye.



3.37. ÁBRA: Az $y^2 - x = 0$ (vagy ahogy gyakran írjuk: $y^2 = x$) egyenlet implicite két, az $x \geq 0$ intervallumon értelmezett differenciálható függvényt határoz meg. Az 1. példából kiderül, hogyan határozható meg ezen függvények (x szerinti) deriváltja anélkül, hogy az $y^2 = x$ egyenletből kifejeznénk az y-t.



3.38. ÁBRA: Nincs olyan függvény, amelynek az $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ egyenletű görbe lenne a grafikonja. A görbe egyes szakaszai azonban minden további nélkül tekinthetők egy x szabad változójú függvény grafikonjának. Az ábrán látható görbe a Descartes-féle *levél*.

Implicit függvények

Kezdjük egy példával.

1. PÉLDA **Implicit deriválás.**

Határozzuk meg a dy/dx deriváltat, ha $x = y^2$.

Megoldás. Az $y^2 = x$ egyenlet két differenciálható függvényt határoz meg: az $y_1 = \sqrt{x}$ és az $y_2 = -\sqrt{x}$ függvényeket (l. a 3.37. ábrát. Ezeknek a függvényeknek a deriváltját – tetszőleges $x > 0$ esetén – már ismerjük:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{és} \quad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Felmerülhet azonban a kérdés: akkor is meg tudnánk-e határozni ezeket a deriváltakat, ha y-ról mindössze annyi információ áll rendelkezésünkre, hogy az x változónak az $y^2 = x$ egyenlet által meghatározott differenciálható függvénye? A válasz: igen. Deriváljuk az $y^2 = x$ egyenlet mindkét oldalát x szerint (y-t az x differenciálható $f(x)$ függvényének tekintve):

$$\begin{aligned} y^2 &= x \\ 2y\frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2y} \end{aligned}$$

Láncszabály: $\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}[f(x)]^2 = 2f(x)f'(x) = 2y\frac{dy}{dx}$

A kapott formula mind az $y_1 = \sqrt{x}$, mind az $y_2 = -\sqrt{x}$ függvény deriváltját megadja:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{és} \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = \frac{1}{2(-\sqrt{x})} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}. \qquad \square$$

2. PÉLDA **Körvonal adott pontbeli meredeksége.**

Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű körvonal meredekségét a $(3, -4)$ pontban.

Megoldás. Nincs olyan függvény, amelynek a teljes kör lenne a grafikonja; a felső és az alsó félkör azonban egyaránt tekinthető függvénygrafikonnak: az előbbi az $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$, az utóbbi pedig az $y = -\sqrt{25 - x^2}$ függvényé (l. a 3.36. ábrát). A $(3, -4)$ pont az y_2 függvény grafikonjára illeszkedik; a keresett meredekség így a derivált kiszámításával határozható meg:

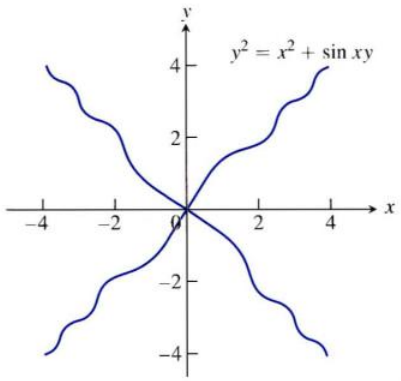
$$\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=3} = \left.-\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}\right|_{x=3} = -\frac{-6}{2\sqrt{25-9}} = \frac{3}{4}.$$

A feladat az implicit deriválás módszerével könnyebben megoldható:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(25) \\ 2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

A $(3, -4)$ pontban a meredekség: $\left.-\frac{x}{y}\right|_{(3,-4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$.

Vegyük észre, hogy a dy_2/dx deriváltfüggvénnyel ellentétben a dy/dx formula nem csupán az egyik félkör pontjaira, hanem a körvonal valamennyi pontjára alkalmazható. Figyeljünk fel arra is, hogy a képletben x mellett y is szerepel. $\square$



3.39. ÁBRA: A 3. példában szereplő $y^2 = x^2 + \sin(xy)$ egyenletnek megfelelő görbe. A példából kiderül, miként lehet meghatározni a görbe tetszőleges pontjának meredekségét.

A példákban alkalmazott módszer bármely implicit módon megadott függvényre alkalmazható. Az x és az y közötti összefüggést megadó egyenlet mindkét oldalát a már megismert szabályok alkalmazásával, y-t az x változó függvényének tekintve deriváljuk. Lássunk még egy példát.

3. PÉLDA **Implicit függvény deriváltja.**

Adjuk meg a dy/dx deriváltat, ha tudjuk, hogy $y^2 = x^2 + \sin(xy)$.

Megoldás.

$$y^2 = x^2 + \sin(xy)$$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin(xy)) \qquad \text{Az egyenlet mindkét oldalát deriváljuk } x \text{ szerint,}$$

$$2y\frac{dy}{dx}(y) = 2x + \cos(xy)\frac{d}{dx}(xy) \qquad y\text{-t az } x \text{ függvényének tekintve, a láncszabály alkalmazásával,}$$

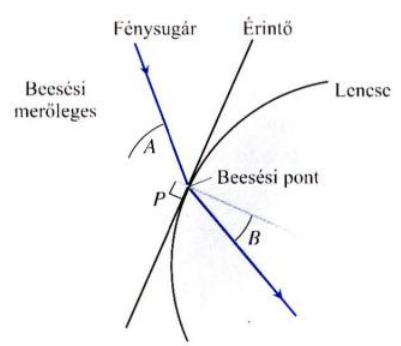
$$2y\frac{dy}{dx}(y) = 2x + \cos(xy)\frac{d}{dx}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) \qquad xy \text{ mint szorzatfüggvény}$$

$$2y\frac{dy}{dx}(y) - \cos(xy)\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) = 2x + \cos(xy)y \qquad \text{Rendezzük egy oldalra a } dy/dx\text{-et tartalmazó tagokat,}$$

$$(2y - x\cos(xy))\frac{dy}{dx} = 2x + y\cos(xy) \qquad \text{Emeljük ki } dy/dx\text{-et.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\cos(xy)}{2y - x\cos(xy)} \qquad \text{Fejezzük ki } dy/dx\text{-et.}$$

A dxy/dx-re kapott formula a görbe minden olyan pontjára alkalmazható, amelynek a meredeksége értelmezhető. A formulában – mint az előző példában – most is szerepel mindkét változó. □



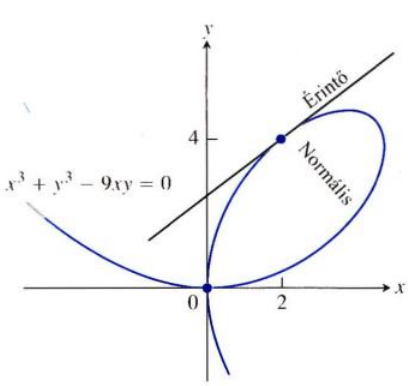
3.40. ÁBRA: A lencsére érkező fénysugár megtörése.

Implicit deriválás

1. Az egyenlet mindkét oldalát deriváljuk x szerint, y-t az x diffenciálható függvényének tekintve.
2. Rendezzük a dy/dx kifejezést tartalmazó tagokat az egyenlet egyik oldalára.
3. Oldjuk meg az egyenletet dy/dx-re.

Lencse, érintő, beesési merőleges

A fénytörés törvényében azok a szögek szerepelnek, amelyeket a lencsére érkező, illetve a lencsén megtörő fénysugarak a beesési pontban a lencse felületére merőleges egyenessel (a *beesési merőlegessel* vagy *normálissal*) zárnak be (l. a 3.40. ábrán A-val, illetve B-vel jelölt szöget). A lencse keresztmetszetét mutató 3.40. ábra alapján nyilvánvaló, hogy a beesési merőleges a metszésvonalat a fénysugár beesési pontjában érintő egyenessel 90°-os szöget zár be.



3.41. ÁBRA: A Descartes-féle levél (2,4) pontbeli érintője és normálisa.

4. PÉLDA **A Descartes-féle levél érintője és normálisa.**

Igazoljuk, hogy a (2,4) pont rajta van az $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ egyenletű görbén; határozzuk meg a görbe adott pontbeli érintőjének és normálisának egyenletét (l. a 3.41. ábrát.)

Megoldás. Helyettesítsük be a görbe egyenletébe a (2,4) pont koordinátáit: $2^3 + 4^2 - 9 \cdot 2 \cdot 4 = 8 + 64 - 72 = 0$, a pont tehát valóban illeszkedik a görbére. A görbe (2,4) pontbeli meredekségének meghatározásához az implicit deriválás módszerével először meghatározzuk a dy/dx deriváltat:

$$
\begin{aligned}
x^3+y^3-9xy&=0\\
\frac{d}{dx}(x^3)+\frac{d}{dx}(y^3)-\frac{d}{dx}(9xy)&=\frac{d}{dx}(0) && \text{mindkét oldalt deriváljuk}\\
3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-9\left(x\frac{dy}{dx}+y\frac{dx}{dx}\right)&=0 && xy \text{ mint szorzatfüggvény}\\
(3y^2-9x)\frac{dy}{dx}+3x^2-9y&=0\\
(3y^2-9x)\frac{dy}{dx}&=9y-3x^2\\
\frac{dy}{dx}&=\frac{3y-x^2}{y^2-3x} && \text{kifejezzük } dy/dx\text{-et}
\end{aligned}
$$

Ezután meghatározzuk dy/dx értékét a $(2,4)$ pontban:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,4)}=\left.\frac{3y-x^2}{y^2-3x}\right|_{(2,4)}=\frac{3\cdot 4-2^2}{4^2-3\cdot 2}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

A $(2,4)$ ponton átmenő, $4/5$ meredekségű egyenes (a keresett érintő) egyenlete:

$$
\begin{aligned}
y&=4+\frac{4}{5}(x-2)\\
y&=\frac{4}{5}x+\frac{12}{5}
\end{aligned}
$$

A görbe $(2,4)$ pontbeli normálisa merőleges az érintőre, meredeksége ennélfogva $-5/4$, egyenlete pedig:

$$
\begin{aligned}
y&=4-\frac{5}{4}(x-2)\\
y&=-\frac{5}{4}x+\frac{13}{2}.
\end{aligned}
$$

□

A másodfokú egyenletek jól ismert megoldóképlete alapján az olyan egyenletekből, amilyen például $y^2-2xy+3x^2=0$, az y könnyen kifejezhető. Létezik megoldóképlet a harmadfokú egyenletekre is, ez azonban kissé bonyolult. Az $y^3+x^3=9xy$ egyenletből például y a következőképpen fejezhető ki x segítségével (három „explicit" függvényt kapunk):

$$y=f(x)=\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2}+\sqrt{\frac{x^6}{4}-27x^3}}+\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2}-\sqrt{\frac{x^6}{4}-27x^3}},$$

és a következő kettő:

$$y=\frac{1}{2}\left[-f(x)\pm\sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2}+\sqrt{\frac{x^6}{4}-27x^3}}+\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2}-\sqrt{\frac{x^6}{4}-27x^3}}\right)\right]$$

[Az utóbbi két függvényben szereplő $\sqrt{-3}$ kifejezésnek a komplex számok elmélete ad értelmet, l. az F.3. függeléket.] Az implicit deriválás módszerével dy/dx sokkal könnyebben meghatározható, mint akármelyik fenti formula alapján. A magasabb rendű görbék meredekségének kiszámításakor általában az implicit deriválás módszere a célravezető.

Magasabb rendű deriváltak

Az implicit deriválás módszerével magasabb rendű deriváltak is kiszámíthatók, mint azt a következő példa mutatja.

5. PÉLDA **A második derivált meghatározása implicit deriválással.** Határozzuk meg a d^2y/dx^2 második deriváltat, ha $2x^3-3y^2=8$.

Megoldás. Először meghatározzuk az $y' = dy/dx$ első deriváltat.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) &= \frac{d}{dx}(8) \\ 6x^2 - 6yy' &= 0 \\ x^2 - yy' &= 0 && y\text{-t } x \text{ függvényének tekintve} \\ y' &= \frac{x^2}{y} && \text{amennyiben } y \neq 0. \end{aligned}$$

Ezután a hányadosfüggvény deriváltjára vonatkozó szabály alapján meghatározzuk az y'' második deriváltat:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2xy - x^2y'}{y^2} = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2} \cdot y'.$$

Az így kapott képletben y' helyébe behelyettesítjük az x^2/y kifejezést:

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2} \cdot \left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3}, \text{ amennyiben } y \neq 0. \qquad \square$$

Differenciálható függvény racionális kitevőjű hatványa

Már tudjuk, hogy a

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

szabály minden n egész számra igaz. Az implicit deriválás módszerével a szabályt most tetszőleges racionális kitevőre kiterjesztjük.

4. TÉTEL **Az általános hatványszabály.**
Az $x^{p/q}$ függvény tetszőleges p/q racionális szám esetén az $x^{(p/q)-1}$ függvény értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, és

$$\frac{d}{dx}x^{p/q} = \frac{p}{q}x^{(p/q)-1}.$$

6. PÉLDA **A szabály alkalmazása.**

(a) $\frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, ha $x > 0$

(b) $\frac{d}{dx}\left(x^{2/3}\right) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$, ha $x \neq 0$

(c) $\frac{d}{dx}\left(x^{-4/3}\right) = -\frac{4}{3}x^{-7/3}$, ha $x \neq 0$

Bizonyítás. Legyenek p és q egész számok, $q > 0$, és tegyük fel, hogy $y = \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}$. Ekkor

$$y^q = x^p.$$

Deriváljuk az egyenlet mindkét oldalát; tekintsük y-t az x differenciálható függvényének és alkalmazzuk az egész kitevőjű hatványfüggvények deriváltjára vonatkozó szabályt:

$$qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1}.$$

Amennyiben $y \neq 0$, az egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk qy^{q-1}-nel:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \\
&= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} = && y = x^{p/q} \\
&= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}} = && \frac{p}{q}(q-1) = p - \frac{p}{q} \\
&= \frac{p}{q} \cdot x^{(p-1)-(p-p/q)} = && \text{azonos alapú hatványok hányadosa} \\
&= \frac{p}{q} \cdot x^{(p/q)-1},
\end{aligned}$$

ezzel a bizonyítást be is fejeztük. □

A 7.3. alfejezetben a hatványszabályt tetszőleges nemnulla valós kitevőre be fogjuk bizonyítani.

A 4. Tételt a láncszabállyal kombinálva a hatványláncszabály kiterjesztését kapjuk: ha p/q tetszőleges racionális szám, u pedig az x differenciálható függvénye, akkor $u^{p/q}$ az x differenciálható függvénye és

$$\frac{d}{dx}u^{p/q} = \frac{p}{q}u^{(p/q)-1}\frac{du}{dx},$$

feltéve, hogy $p/q < 1$ esetén $u \neq 0$. Az utóbbi feltétel valóban szükséges, mivel előfordulhat, hogy 0 eleme $u^{p/q}$ értelmezési tartományának, $u^{(p/q)-1}$ értelmezési tartományának viszont nem – ahogy ezt a következő példa mutatja.

7. PÉLDA

(a) $\dfrac{d}{dx}(1-x^2)^{1/4} = \dfrac{1}{4}(1-x^2)^{-3/4}(-2x) = \dfrac{-x}{2(1-x^2)^{3/4}}$; a kiinduló függvény a $[-1,1]$ intervallumon, a derivált már csak a $(-1,1)$ intervallumon értelmezett.

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\cos x)^{-1/5} &= -\frac{1}{5}(\cos x)^{-6/5}\frac{d}{dx}(\cos x) = -\frac{1}{5}(\cos x)^{-6/5}(-\sin x) = \\
&= -\frac{1}{5}(\cos x)^{-6/5}\frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{1}{5}(\sin x)(\cos x)^{-6/5}.
\end{aligned}$$ □

3.6. Feladatok

Racionális hatványfüggvények

Határozzuk meg a dy/dx deriváltat (1–10. feladatok).

1. $y = x^{9/4}$ **2.** $y = x^{-3/5}$

3. $y = \sqrt[3]{2x}$ **4.** $y = \sqrt[4]{5x}$

5. $y = 7\sqrt{x+6}$ **6.** $y = -2\sqrt{x-1}$

7. $y = (2x+5)^{-1/2}$ **8.** $y = (1-6x)^{2/3}$

9. $y = x(x^2+1)^{1/2}$ **10.** $y = x(x^2+1)^{-1/2}$

Határozzuk meg a függvények első deriváltját (11–18. feladatok).

11. $s = \sqrt[7]{t^2}$ **12.** $r = \sqrt[4]{\theta^{-3}}$

13. $y = \sin[(2t+5)^{-2/3}]$ **14.** $z = \cos[(1-6t)^{2/3}]$

15. $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$ **16.** $g(x) = 2(2x^{-1/2}+1)^{-1/3}$

17. $h(\theta) = \sqrt[3]{1+\cos(2\theta)}$ **18.** $k(\theta) = (\sin(\theta+5))^{5/4}$

Implicit deriválás

Határozzuk meg az implicit deriválás módszerével a dy/dx deriváltat (19–32. feladatok).

19. $x^2y + xy^2 = 6$ **20.** $x^3 + y^3 = 18xy$

21. $2xy + y^2 = x + y$ **22.** $x^3 - xy + y^3 = 1$

23. $x^2(x-y)^2 = x^2 - y^2$ **24.** $(3xy+7)^2 = 6y$

25. $y^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$ **26.** $x^2 = \dfrac{x-y}{x+y}$

27. $x = \operatorname{tg} y$ **28.** $xy = \operatorname{ctg}(xy)$

29. $x + \operatorname{tg}(xy) = 0$ **30.** $x + \sin y = xy$

31. $y\sin\left(\dfrac{1}{y}\right) = 1 - xy$ **32.** $y^2\cos\left(\dfrac{1}{y}\right) = 2x + 2y$

Határozzuk meg a $dr/d\theta$ deriváltat (33–36. feladatok).

33. $\theta^{1/2} + r^{1/2} = 1$

34. $r-2\sqrt{\theta}=\frac{3}{2}\theta^{2/3}+\frac{4}{3}\theta^{3/4}$

35. $\sin(r\theta)=\frac{1}{2}$

36. $\cos r+\operatorname{ctg}\theta=r\theta$

Második deriváltak

Az implicit deriválás módszerével határozzuk meg a dy/dx, majd a d^2y/dx^2 deriváltat.

37. $x^2+y^2=1$

38. $x^{2/3}+y^{2/3}=1$

39. $y^2=x^2+2x$

40. $y^2-2x=1-2y$

41. $2\sqrt{y}=x-y$

42. $xy+y^2=1$

43. Mennyi a d^2y/dx^2 második derivált értéke a $(2,2)$ pontban, ha $x^3+y^3=16$?

44. Mennyi a d^2y/dx^2 második derivált értéke a $(0,-1)$ pontban, ha $xy+y^2=1$?

Meredekség, érintő, normális

Határozzuk meg a görbék meredekségét a megadott pontokban (45–46. feladatok).

45. $y^2+x^2=y^4-2x;\ \ (-2,1),\ \ (-2,-1)$

46. $(y^2+x^2)^2=(x-y)^2;\ \ (1,0),\ \ (1,-1)$

Ellenőrizzük, hogy a megadott pont illeszkedik a görbére, majd írjuk fel az adott pontbeli (a) érintő és (b) normális egyenletét (47–56. feladatok).

47. $x^2+xy-y^2=1,\ \ (2,3)$

48. $x^2+y^2=25,\ \ (3,-4)$

49. $x^2y^2=9,\ \ (-1,3)$

50. $y^2-2x-4y-1=0,\ \ (-2,1)$

51. $6x^2+3xy+2y^2+17y-6=0,\ \ (-1,0)$

52. $x^2-\sqrt{3}xy+2y^2=5,\ \ (\sqrt{3},2)$

53. $2xy+\pi\sin y=2\pi,\ \ (1,\pi/2)$

54. $x\sin 2y=y\cos 2x,\ \ (\pi/4,\pi/2)$

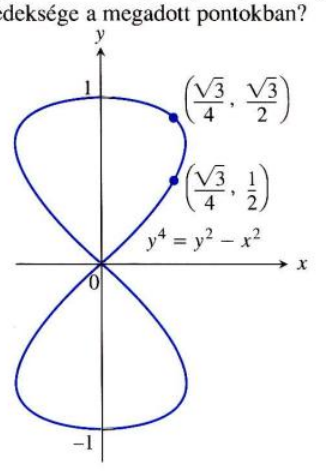
55. $y=2\sin(\pi x-y),\ \ (1,0)$

56. $x^2\cos^2 y-\sin y=0,\ \ (0,\pi)$

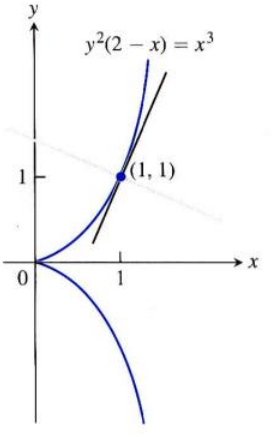
57. Párhuzamos érintők. Keressük meg az $x^2+xy+y^2=7$ egyenletű görbe és az x-tengely két metszéspontját. Igazoljuk, hogy a görbét ezekben a pontokban érintő egyenesek párhuzamosak. Adjuk meg ezeknek az érintőknek a meredekségét.

58. A koordinátaengelyekkel párhuzamos érintők. Keressük meg az $x^2+xy+y^2=7$ egyenletű görbének azokat a pontjait, amelyekben a görbe érintője párhuzamos **(a)** az x-tengellyel, **(b)** az y-tengellyel. Az (b) esetben a dy/dx derivált nem definiálható, dx/dy viszont igen; határozzuk meg az utóbbi derivált értékét az érintési pontokban.

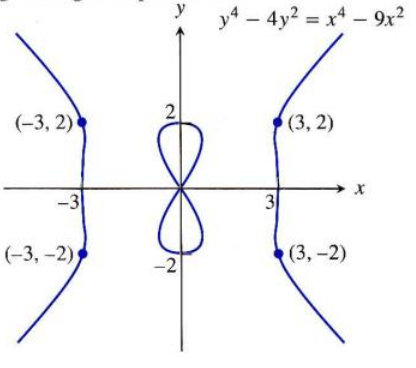
59. A nyolcasgörbe. Mennyi az $y^4=y^2-x^2$ egyenletű „nyolcasgörbe" meredeksége a megadott pontokban?



60. A Dioklész-féle cisszois. Írjuk fel az $y^2(2-x)=x^3$ egyenletű cisszois $(1,1)$ pontbeli érintőjének és normálisának egyenletét.



61. Cramer ördöggörbéje. Gabriel Cramer (akinek nevét a Cramer-szabályból ismerjük) 1750 körül „fedezte fel" az ábrán is látható, $y^4-4y^2=x^4-9x^2$ egyenletű görbét. Mekkora a görbe meredeksége a megadott pontokban?



62. A Descartes-féle levél. A Descartes-féle levél (az $x^3+y^3-9xy=0$ egyenletű görbe grafikonja) a 3.38. ábrán tanulmányozható.

(a) Adjuk meg a görbe meredekségét a $(4,2)$ és a $(2,4)$ pontban.

(b) Az origón kívül melyik pontban van a görbének vízszintes érintője?

(c) A 3.38. ábrán A-val jelzett pontban a görbe érintője függőleges; adjuk meg az A pont koordinátáit.

Implicite definiált paraméterezés

A 63–66. feladatokban az $x = f(t)$ és $y = g(t)$ implicite definiált. Adjuk meg az $x = f(t), y = g(t)$ görbe meredekségét a t paraméter megadott értékének megfelelő pontokban.

63. $x^2 - 2tx + 2t^2 = 4, \quad 2y^3 - 3t^2 = 4, \quad t = 2$

64. $x = \sqrt{5 - \sqrt{t}}, \quad y(t-1) = \sqrt{t}, \quad t = 4$

65. $x + 2x^{3/2} = t^2 + 1, \quad y\sqrt{t+1} + 2t\sqrt{y} = 4, \quad t = 0$

66. $x \sin t + 2x = t, \quad t \sin t - 2t = y, \quad t = \pi$

További példák és feladatok

67. Melyik lehet igaz, ha $f''(x) = x^{-1/3}$?

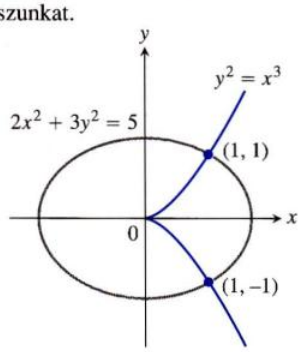
(a) $f(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} - 3$

(b) $f(x) = \frac{9}{10}x^{5/3} - 7$

(c) $f'''(x) = -\frac{1}{3}x^{-4/3}$

(d) $f(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} + 6$

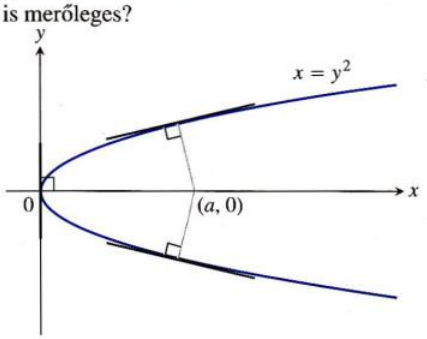
68. Milyen viszonyban vannak az $y^2 = x^3$ és a $2x^2 + 3y^2 = 5$ egyenletű görbéket a közös $(1, \pm 1)$ pontokban érintő egyenesek? Indokoljuk válaszunkat.



69. „Normális" metszéspontok. Melyik pontokban metszi még az $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ egyenletű görbét az $(1,1)$ pontbeli normális?

70. Adott egyenessel párhuzamos normálisok. Határozzuk meg az $xy + 2x - y = 0$ egyenletű görbe azon normálisait, amelyek párhuzamosak a $2x + y = 0$ egyenessel.

71. Parabola normálisai. Igazoljuk, hogy ha az $x = y^2$ egyenletű parabolának három olyan normálisa is van, amely átmegy az $(a, 0)$ ponton, akkor $a > 1/2$. A három normális egyike az x-tengely. Az a mely értéke mellett lesz a másik két normális egymásra is merőleges?



72. Mi a geometriai alapja a deriváltak értelmezési tartománya 6. (b) és a 7. (a) példabeli megszorításának?

T A 73. és a 74. feladatban határozzuk meg a dy/dx és a dx/dy deriváltakat (az első esetben y-t az x implicite megadott, differenciálható függvényének, a másodikban x-et az y differenciálható függvényének tekintve). Hogyan viszonyul egymáshoz a két derivált? Mi ennek a geometriai magyarázata?

73. $xy^3 + x^2y = 6$ **74.** $x^3 + x^2 = \sin^2 y$

Számítógépes vizsgálatok

75. **(a)** Legyen $x^4 + 4y^2 = 1$; határozzuk meg a dy/dx deriváltat kétféleképpen: (1) fejezzük ki az egyenletből y-t és deriváljuk az így kapott „explicit" függvényt; (2) az implicit deriválás módszerével. Ugyanazt az eredményt kapjuk-e a két esetben?

(b) Oldjuk meg az $x^4 + 4y^2 = 1$ egyenletet (ismeretlennek az y-t tekintve), a kapott függvények grafikonját rajzoltassuk ki ugyanabban a képernyőben. Ábrázoljuk ugyanitt a kapott függvények deriváltját is. Előrejelezhető lett volna-e a deriváltfüggvények grafikonjának alakja az $x^4 + 4y^2 = 1$ egyenletű görbe alapján? És fordítva? Indokoljuk válaszunkat.

76. **(a)** Legyen $(x-2)^2 + y^2 = 4$; határozzuk meg a dy/dx deriváltat kétféleképpen: (1) fejezzük ki az egyenletből y-t és deriváljuk az így kapott „explicit" függvényt; (2) az implicit deriválás módszerével. Ugyanazt az eredményt kapjuk-e a két esetben?

(b) Oldjuk meg az $(x-2)^2 + y^2 = 4$ egyenletet (ismeretlennek az y-t tekintve), a kapott függvények grafikonját rajzoltassuk ki ugyanabban a képernyőben. Ábrázoljuk ugyanitt a kapott függvények deriváltját is. Előrejelezhető lett volna-e a deriváltfüggvények grafikonjának alakja az $(x-2)^2 + y^2 = 4$ egyenletű görbe alapján? És fordítva? Indokoljuk válaszunkat.

Számítógép segítségével kövessük a következő lépéseket (77–84. feladatok).

(a) Ábrázoljuk a megadott egyenletű görbét. Állapítsuk meg, hogy a P pont rajta van-e a görbén.

(b) Az implicit deriválás módszerével határozzuk meg a dy/dx deriváltat; számítsuk ki dy/dx értékét a P pontban.

(c) A (b) részben kiszámított meredekség alapján írjuk fel a görbét a P pontban érintő egyenes egyenletét. Rajzoljuk ki a görbét és az érintőt.

77. $x^3 - xy + y^3 = 7, \quad P(2,1)$

78. $x^5 + y^3x + yx^2 = 4, \quad P(1,1)$

79. $y^2 + y = \frac{2+x}{1-x}, \quad P(0,1)$

80. $y^3 + \cos xy = x^2, \quad P(1,0)$

81. $x + \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) = 2, \quad P(1, \frac{\pi}{4})$

82. $xy^3 + \operatorname{tg}(x+y) = 1, \quad P(\frac{\pi}{4}, 0)$

83. $2y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 2, \quad P(1,1)$

84. $x\sqrt{1+2y} + y = x^2, \quad P(1,0)$

3.7. Kapcsolt deriváltak

Ebben az alfejezetben azt vizsgáljuk, milyen gyorsan változnak bizonyos mennyiségek. A változás mértékét minden esetben egy adott változó szerinti derivált adja meg, amelyet egy másik mennyiség (vagy mennyiségek) változásának alapján kell meghatároznunk. Módszerünk a következő lesz: felírunk egy egyenletet, amelyben valamennyi változó szerepel, az egyenlet deriválásával pedig összefüggést állítunk fel a keresett és a már ismert változási sebességek között. Az ilyen típusú feladatokat – amelyekben tehát közvetlenül csak nehezen mérhető mennyiségek változási sebességét más mennyiségek változási sebessége alapján határozzuk meg – a *kapcsolt változási sebességek* problémakörébe soroljuk.

Kapcsolt deriváltak

Miközben egy gömb alakú léggömböt levegővel töltünk fel, mind a léggömb térfogata, mind a sugara változik. A két mennyiség között minden pillanatban fennáll a

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

összefüggés. A deriváltak közötti kapcsolatot a láncszabály alapján kapjuk meg:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Ha tehát egy adott időpontban a léggömb sugarát és térfogatának változási sebességét egyaránt ismerjük, akkor az utolsó egyenletből meghatározhatjuk a sugár változási sebességét az adott időpontban. Érdemes megjegyezni, hogy a térfogatváltozás sokkal könnyebben mérhető, mint a sugár megváltozása.

Gyakran előfordul, hogy a deriváltakat összekapcsoló egyenletet egy alkalmas, a közöttük fennálló geometriai viszonyokat mutató ábra felrajzolása könnyíti meg. Ez a helyzet a következő példában is.

1. PÉLDA **Tartály leengedése.**

Milyen gyorsan csökken a folyadékszint abban a henger alakú tartályban, amelyből percenként 3000 liter folyadékot engedünk le?

Megoldás. Rajzot készítünk (3.42. ábra), a henger sugarát r, a vizsgált pillanatbeli szintmagasságot h, a tartályban lévő folyadékmennyiséget V jelöli.

Ahogy az idő telik, az r sugár nem változik, a V térfogat és a h szintmagasság azonban folyamatosan csökken. A megadott információk szerint:

$$\frac{dV}{t} = -3000,$$

hiszen a tartályból percenként 3000 liter folyadék távozik. (A derivált negatív, mert a V mennyiség csökken; az időt percben, a térfogatot literben mérjük).

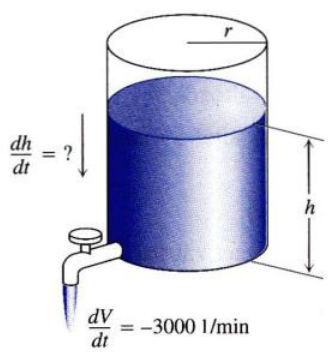
Mindezek alapján a

$$\frac{dh}{dt}$$

deriváltat kell meghatároznunk, amely megmutatja, hogy milyen gyorsan csökken a tartályban lévő folyadékszint. Ehhez először a h-t és V-t összekapcsoló egyenletet kell felírnunk. Az egyenlet természetesen attól is függ, hogy r-t és h-t milyen egységben mérjük; ha mindkettőt méterben adjuk meg, akkor a keresett egyenlet:

$$V = 1000\pi r^2 h,$$

elvégre egy köbméter pontosan 1000 liter.



3.42. ÁBRA: A tartályban lévő folyadék mennyiségének változása a folyadékszint változási sebességétől függ (1. példa).

A V térfogat és a h szintmagasság egyaránt a t idő differenciálható függvénye, így az egyenlet mindkét oldalát deriválva megkapjuk a dh/dt és dV/dt deriváltakat összekapcsoló egyenletet:

$$\frac{dV}{dt} = 1000\pi r^2 \frac{dh}{dt},$$

ahol r ismertnek tekintett állandó.

A $dV/dt = 3000$ adatot behelyettesítve és dh/dt-t kifejezve:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-3000}{1000\pi r^2} = -\frac{3}{\pi r^2}.$$

A folyadékszint tehát percenként $3/(\pi r^2)$ méterrel csökken.

A $dh/dt = -3/(\pi r^2)$ egyenlet szerint a folyadékszint csökkenésének sebessége a tartály alapja sugarának függvénye. Ha r kicsi, dh/dt nagy, ha r nagy, dh/dt kicsi.

Ha $r = 1$ m, akkor $\dfrac{dh}{dt} - \dfrac{3}{\pi} \approx -0,95$ m/min.

Ha $r = 10$ m, akkor $\dfrac{dh}{dt} - \dfrac{3}{100\pi} \approx -0,0095$ m/min. □

A kapcsolt deriváltakra vonatkozó feladatok megoldása:

1. Rajzoljunk ábrát, vezessünk be jelöléseket a problémában szereplő változókra és állandókra. Az időt jelöljük t-vel; tekintsük a többi változót t differenciálható függvényének.
2. Írjuk fel a numerikus információknak megfelelő egyenleteket.
3. Rögzítsük azt a mennyiséget, amelyet meg kell határoznunk (ez általában egy derivált).
4. Állítsunk fel egy egyenletet a problémában szereplő változók között. Előfordulhat, hogy ehhez két vagy több egyenletet is figyelembe kell vennünk.
5. Deriváljuk az egyenletet t szerint. Fejezzük ki az egyenletből a keresett deriváltat a többi – ismertnek tekintett – változó, illetve derivált segítségével.
6. Az ismert adatok alapján határozzuk meg a keresett derivált számértékét.

2. PÉLDA **Emelkedő léggömb.**

Egy hőlégballon függőleges emelkedését a kiidulóponttól 500 méterre elhelyezett szextánssal követjük nyomon. Abban a pillanatban, amikor a műszer éppen $\pi/4$-et mutat, a szög növekedése 0, 14 rad/min. Milyen gyorsan emelkedik ebben a pillanatban a léggömb?

Megoldás. A választ hat lépésben adjuk meg.

1. Rajzoljunk ábrát, nevezzük el a problémában szereplő változókat és állandókat (l. a 3.43. ábrát). Az ábrában szereplő változók:

θ: a szögmérőtől a léggömbhöz húzott egyenes által a vízszintessel bezárt szög (radiánban);

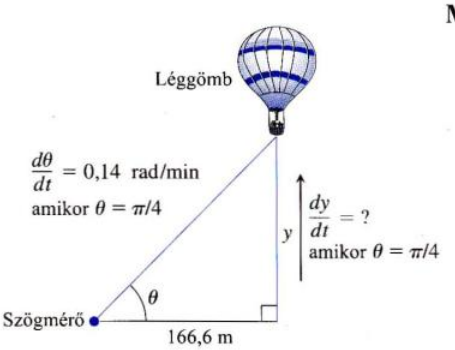
y: a léggömb talajszint feletti magassága (méter).

A percekben mért időt t jelöli, mind h-t, mind θ-t a t változó differenciálható függvényének tekintjük.

2. Felírjuk a numerikus információknak megfelelő egyenleteket:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0,14 \text{ rad/min}, \quad \text{amikor } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

3. Rögzítjük, hogy mit kell meghatároznunk: a dy/dt deriváltat a $\theta = \pi/4$ helyen.



3.43. ÁBRA: A léggömb emelkedésének változási sebessége összefügg a földfelszínről mért θ szög változási sebességével (2. példa).

4. Felállítunk egy egyenletet θ és y között:

$$\frac{y}{500} = \operatorname{tg}\theta \quad \text{vagy} \quad y = 500\operatorname{tg}\theta.$$

5. A kapott egyenletet t szerint deriváljuk a láncszabály segítségével. A kapott egyenlet összefüggést teremt az ismert $d\theta/dt$ és a meghatározandó dy/dt derivált között:

$$\frac{dy}{dt} = 500(\sec^2\theta)\frac{d\theta}{dt}.$$

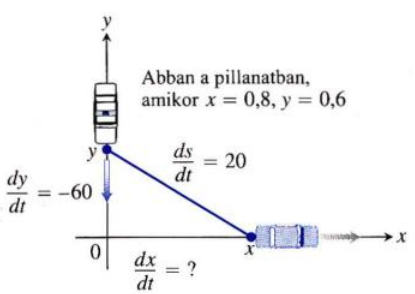
6. A kapott összefüggésbe behelyettesítjük a $\theta = \pi/4$ és a $d\theta/dt = 0,14$ értékeket:

$$\frac{dy}{dt} = 500(\sqrt{2})^2 \cdot 0.14 = 140,$$

figyelembe véve, hogy $\sec\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$. A kérdéses pillanatban tehát a léggömb 140 méter/min sebességgel emelkedik. □

3. PÉLDA **Autós üldözés.**

A rendőrségi járőr észak felől közelít a derékszögű útkereszteződéshez, amelyben az üldözött autó balra fordult és kelet felé tart. Amikor a járőr (északi irányban) 0,6 kilométerre van a kereszteződéstől, az üldözött autó 0,8 kilométerre van keletre. A járőr radarja ekkor azt mutatja, hogy a gépkocsi 20 km/h sebességgel távolodik a rendőrautótól. Mekkora az üldözött autó sebessége, ha a rendőrautó éppen 60 km/h sebességgel halad?



3.44. ÁBRA: Az üldözött autó sebessége mint a járőrtől való távolsága változási sebességének és a járőr sebességének függvénye (3. példa).

Megoldás. A két autót közös koordináta-rendszerbe helyezzük; a kereszteződés az origó, az x tengely pozitív iránya mutat észak felé (innen érkezik a járőr), az y tengely pozitív iránya pedig kelet felé (erre menekül az üldözött jármű), l. a 3.44. ábrát. Az időt jelölje t; a további jelölések:

$x =$ az üldözött autó helyzete a t időpontban
$y =$ a járőr helyzete a t időpontban
$s =$ az üldözött és az üldöző távolsága a t időpontban

Feltesszük, hogy x, y és s egyaránt t differenciálható függvényei.

A dx/dt deriváltat kell meghatároznunk abban a pillanatban, amikor

$$x = 0,8\text{ km}, \quad y = 0,6\text{ km}, \quad \frac{dy}{dt} = -60\text{ km/h}, \quad \frac{ds}{dt} = 20\text{ km/h}.$$

A dy/dt sebesség negatív, mivel y csökken.

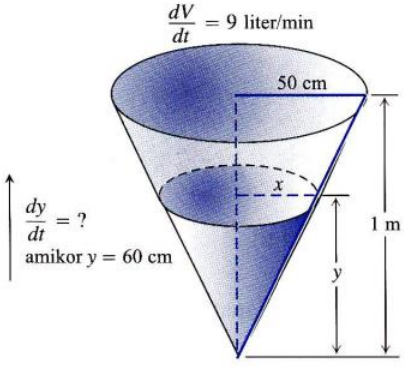
A távolságok között fennáll az $s^2 = x^2 + y^2$ összefüggés (kiindulhatnánk az $s = \sqrt{x^2+y^2}$ egyenletből is); ezt t szerint deriválva a következőt kapjuk:

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{s}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

Helyettesítsük be az $x = 0,8$, az $y = 0,6$, az $dy/dt = -60$ és a $ds/dt = 20$ értéket, a kapott egyenletből pedig fejezzük ki dx/dt-t:

$$20 = \frac{1}{\sqrt{0,8^2+0,6^2}}\left(0,8\frac{dx}{dt} + 0,6\cdot(-60)\right)$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{20\cdot\sqrt{0,8^2+0,6^2} + 0,6\cdot 60}{0,8} = 70$$

Az üldözött autó sebessége tehát 70 km/h. □



3.45. ÁBRA: A kúp alakú tartály geometriai viszonyai; a vízszint emelkedésének sebessége a feltöltés sebességétől függ (4. példa).

4. PÉLDA

Kúp alakú tartályba percenként 9 liter vizet engedünk. A kúp csúcsával lefelé áll, magassága 1 méter, alapkörének sugara pedig 50 cm. Milyen gyorsan emelkedik a vízszint abban a pillanatban, amikor a tartály 60 cm magasságig telt meg?

Megoldás. A 3.45. ábrán a félig telt tartályt mutatja. A probléma változói a következők:

$V =$ a tartályban lévő víz mennyisége (literben) a t időpontban

$x =$ a tartályban lévő víz felszínének sugara (centiméterben) t időpontban

$y =$ a vízszint magassága (centiméterben) a t időpontban

Most is feltesszük, hogy V, x és y a t idő differenciálható függvénye. Azt kell meghatároznunk, hogy mennyi dy/dt, amikor

$$y = 0{,}6\,\text{m} \quad \text{és} \quad \frac{dV}{dt} = 9000\,\text{cm}^3/\text{min}.$$

A tartályban lévő víz felveszi a kúp alakját, térfogata ennélfogva: $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$. Az egyenletben V mellett x és y is szerepel. Mivel sem x-ről, sem dx/dt-ről nincs információnk, ki kell küszöbölnünk x-et. A 3.45. ábrán látható hasonló háromszögekből:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10}, \text{ így } x = \frac{y}{2}.$$

Ezt a V egyenletébe behelyettesítve a következőt kapjuk:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 y = \frac{\pi}{12}y^3,$$

az egyenletet deriválva pedig:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12}\cdot 3y^2\frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}y^2\frac{dy}{dt}.$$

Helyettesítsük be végül az $y = 60$ és a $dV/dt = 9000$ számértékeket és fejezzük ki dy/dt-t.

$$9000 = \frac{\pi}{4}\cdot 60^2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{10}{\pi} \approx 3{,}2.$$

A megadott pillanatban tehát a vízszint 3,2 cm/min sebességgel emelkedik. □

3.7. Feladatok

1. Kör területe. Tekintsük egy kör A területét és r sugarát egyaránt a t változó differenciálható függvényének. Írjuk fel a dA/dt és a dr/dt deriváltakat összekapcsoló egyenletet.

2. Gömbfelület. Tekintsük egy gömb S felületét és r sugarát egyaránt a t változó differenciálható függvényének. Írjunk fel a dS/dt és a dr/dt deriváltakat összekapcsoló egyenletet.

3. Térfogat. Ha egy henger alapja r sugarú kör, magassága pedig h, akkor térfogata $V = \pi r^2 h$.

(a) Milyen kapcsolat áll fenn a dV/dt és a dh/dt derivált között, ha r konstans?

(b) Milyen kapcsolat áll fenn dV/dt és dr/dt deriváltak között, ha h konstans?

(c) Milyen kapcsolat áll fenn a dV/dt, a dr/dt és a dh/dt derivált között, ha sem r, sem h nem konstans?

4. Térfogat. Ha egy kúp alapja r sugarú kör, magassága pedig h, akkor térfogata $V = (1/3)\pi r^2 h$.

(a) Milyen kapcsolat áll fenn a dV/dt és a dh/dt derivált között, ha r konstans?

(b) Milyen kapcsolat áll fenn a dV/dt és a dr/dt derivált között, ha h konstans?

(c) Milyen kapcsolat áll fenn a dV/dt, a dr/dt és a dh/dt derivált között, ha sem r, sem h nem konstans?

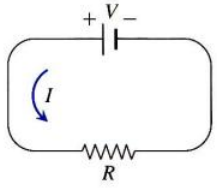
5. Feszültségváltozás. Ohm törvénye szerint az U feszültség, az I áramerősség és az R ellenállás között fennáll a $V = IR$ összefüggés.
Tegyük fel, hogy a feszültség 1 V/s ütemben növekszik, az áramerősség pedig 1/3 A/s ütemben csökken; az időt (t) másodpercben adjuk meg.

(a) Mennyi dV/dt?

(b) Mennyi dI/dt?

(c) Adjuk meg a dR/dt, a dU/dt és a dI/dt deriváltak viszonyát leíró egyenletet.

(d) Milyen ütemben változik az R ellenállás, amikor $V = 12$ V, az áramerősség $I = 2$ A? Csökken vagy nő az ellenállás?



6. Elektromos teljesítmény. Egy áramkörben leadott P teljesítmény az áramkör R ellenállásának és a benne folyó áram I erősségének függvénye: $P = RI^2$.

(a) Milyen kapcsolat áll fenn a dP/dt, a dR/dt és a dI/dt deriváltak között, ha egyik mennyiség sem állandó?

(b) Milyen kapcsolat áll fenn a dR/dt és a dI/dt derivált között, ha P konstans?

7. Távolság. Tegyük fel, hogy x és y egyaránt a t változó differenciálható függvénye. Az xy-sík $(x,0)$ és $(0,y)$ pontjainak távolsága $s = \sqrt{x^2+y^2}$.

(a) Milyen kapcsolat áll fenn a ds/dt és a dx/dt derivált között, ha y konstans?

(b) Milyen kapcsolat áll fenn a ds/dt, a dx/dt és a dy/dt derivált között, ha egyik mennyiség sem állandó?

(c) Milyen kapcsolat áll fenn a dx/dt és dy/dt deriváltak között, ha s állandó?

8. Téglatest testátlói. Ha egy téglatest oldalai x, y és z, akkor a testátlója $s = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(a) Amennyiben x, y és z egyaránt a t változó differenciálható függvénye, akkor milyen összefüggés áll fenn a ds/dt, valamint a dx/dt, dy/dt és dz/dt deriváltak között?

(b) Milyen kapcsolat áll fenn a ds/dt, valamint a dy/dt és dz/dt deriváltak között, ha x állandó?

(c) Milyen kapcsolat áll fenn a dx/dt, dy/dt és dz/dt deriváltak között, ha s állandó?

9. Háromszög területe. Ha egy háromszög a és b oldalai által közbezárt szög θ, akkor a háromszög területe:

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\theta.$$

(a) Milyen összefüggés áll fenn a dA/dt és a $d\theta/dt$ deriváltak között, ha a és b is állandó?

(b) Milyen összefüggés áll fenn a dA/dt, valamint a $d\theta/dt$ és da/dt deriváltak között, ha csupán b állandó?

(c) Milyen összefüggés áll fenn a dA/dt, a $d\theta/dt$, a da/dt és a db/dt derivált között, ha a, b, és θ egyike sem állandó?

10. Táguló fémlap. Egy kályhában forrósított kör alakú fémlap sugara 0,01 cm/min sebességgel nő. Milyen ütemben nő a lap felszíne, amikor a sugara éppen 50 cm?

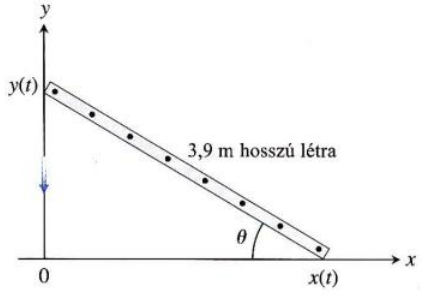
11. Változó téglalapoldalak. Egy téglalap l hosszúsága 2 cm/s ütemben csökken, a szélessége 2 cm/s ütemben növekszik. Határozzuk meg a téglalap (a) területének, (b) kerületének és (c) átlójának változási sebességét, amikor $l = 12$ cm és $w = 5$ cm. Melyik mennyiség növekszik, és melyik csökken?

12. Téglatest oldalainak változása. Tegyük fel, hogy egy téglatest x, y és z oldalainak változási sebessége:

$$\frac{dx}{dt} = 11\,\text{m/s}, \quad \frac{dy}{dt} = -2\,\text{m/s}, \quad \frac{dx}{dt} = 1\,\text{m/s}.$$

Mekkora a téglatest (a) térfogatának, (b) felületének és (c) $s = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ testátlójának változási sebessége, amikor $x = 4$, $y = 3$ és $z = 2$?

13. Eldőlő létra. Egy 3,9 m hosszúságú, a házfalnak támasztott létra alja megcsúszik. Amikor a létra alja 3,6 m távolságra van a faltól, a faltól való távolságának változási sebessége 1,5 m/s



(a) Milyen gyorsan csúszik lefelé ebben a pillanatban a létra teteje?

(b) Mekkora ugyanekkor a létra, a fal és a talaj által határolt háromszög területének, illetve

(c) a létra és a talaj által bezárt θ szögnek a változási sebessége?

14. Légiszállítás. Két szállító-repülőgép 12 km magasságban repül; egyenes vonalú pályájuk derékszögben metszi egymást. Az A repülőgép 820 km/h, a B repülőgép 890 km/h sebességgel közeledik a metszésponthoz. Mekkora a repülőgépek közötti távolság változási sebessége, amikor az A gép 9, a B gép pedig 20 kilométerre van a metszésponttól?

15. Sárkányeregetés. A 60 méter magasságban lebegő papírsárkányt a szél vízszintes irányban 5 m/s sebességgel sodorja magával. Milyen gyorsan kell a gyermeknek a zsinórt engednie abban a pillanatban, amikor a sárkány éppen 100 méterre van tőle?

16. Hengerfurat. A Lincoln Automotive mérnökei újrafúrnak egy 25 cm magasságú hengert, hogy az új dugattyú beleférjen. A gép, amelyet használnak, 3 percenként 0,01 centiméterrel növeli a henger sugarának méretét. Mekkora a henger térfogatának változási sebessége akkor, amikor a henger átmérője éppen 6,00 cm?

17. Növekvő homokdomb. Egy konténerből percenként $10\,\text{m}^3$ homokot szórnak ki egy kúp alakú homokdomb tetejére. A kúp magassága mindvégig az alapkör átmérőjének egyharmada. Mekkora a domb **(a)** magasságának és **(b)** alapköre sugarának változási sebessége (cm/min egységben), amikor a homokdomb éppen 4 m magas?

18. Kúp alakú tartály leengedése. Egy csúcsával lefelé álló kúp alakú betonmedencéből percenként $50\,\text{m}^3$ víz folyik ki. A medence alapkörének sugara 45 m, magassága pedig 6 m.

(a) Milyen gyorsan csökken a vízszint (cm/min egységben), amikor éppen 5 m?

(b) Mekkora ugyanebben a pillanatban (és ugyanebben az egységben) a vízfelszín sugarának változási sebessége?

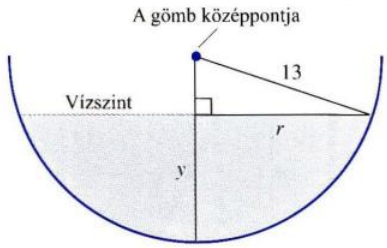
19. Félgömb alakú tartály leengedése. Egy félgömb alakú tartályból percenként $6\,\text{m}^3$ vizet engednek le; a félgömb sugara $R = 13$ m (az ábrán a tartály keresztmetszete látható). Amikora

víz szintje y m magasan áll (l. az ábrát), a tartályban lévő víz térfogata $V = (\pi/3)y^2(3R - y)$.

(a) Milyen gyorsan csökken a vízszint magassága, amikor $y = 8$ m?

(b) Mekkora a vízfelszín r sugara, amikor a víz 8 m mély?

(c) Milyen gyorsan változik az r, amikor $y = 9$ m?



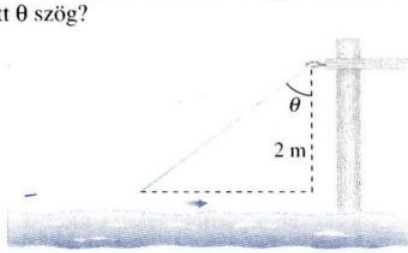
20. Növekvő vízcsepp. Egy szabályos gömb alakúnak tekinthető esőcsepp térfogata a felszínével arányos ütemben növekszik. Igazoljuk, hogy az esőcsepp sugarának változási sebessége állandó.

21. Léggömb felfújása. Egy léggömbbe percenként $12,5\pi\,\text{m}^3$ levegőt fújunk. Mekkora a léggömb sugarának változási sebessége, amikor éppen 2,5 m hosszú? Milyen gyorsan változik ekkor a léggömb felszíne?

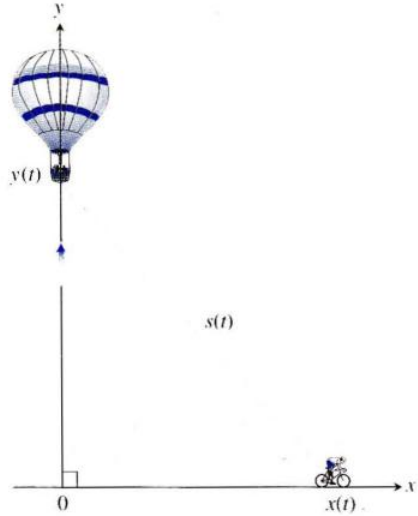
22. Kikötött csónak. Egy csónakot – amint az ábrán látható – 2 m magas cölöp tetejére erősített gyűrűhöz kötöttek ki. A zsinórt másodpercenként 0,5 m/s sebességgel húzzák.

(a) Mekkora sebességgel közelít a csónak a cölöphöz, amikor a kötél hossza éppen 3 m?

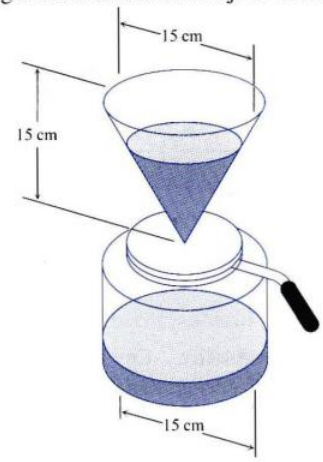
(b) Milyen gyorsan változik ugyanekkor az ábrán feltüntetett θ szög?



23. Léggömb és kerékpár. A sík terepen futó, egyenes út fölött egy léggömb 0,2 m/s sebességgel emelkedik. A léggömb éppen 13 m magasságban van, amikor a 3,4 m/s állandó sebességgel haladó kerékpáros elhalad alatta. Milyen gyorsan változik a léggömb és a kerékpáros közötti $s(t)$ távolság 3 másodperccel később?



24. Kávéfőzés. A kúp alakú filtertartályból percenként 1 dl kávé folyik ki. A filtertartály alapkörének átmérője, magassága, valamint a henger alakú kiöntő átmérője is 15 cm.



(a) Milyen gyorsan emelkedik a kiöntőben a kávé szintje?

(b) Milyen gyorsan csökken a filterbeli szint, amikor a kávé a filterben 5 cm magasan áll?

25. Dolgozik a szív. Az 1860-as években Adolf Fick, a würzbergi egyetem fiziológiaprofesszora fejlesztette ki azt a módszert, amelynek segítségével meghatározható, hogy az emberi szív percenként hány liter vért pumpál az erekbe. Miközben ezt a feladatot értelmezi, az Olvasó szíve körülbelül 7 litert vért pumpál percenként; nyugalmi állapotban ez az adat átlagosan 6 liter, hosszútávfutók esetében alkalmanként a 30 litert is elérheti.

A szívünk által percenként pumpált vér mennyiségét az $y = Q/D$ képlettel adhatjuk meg, amelyben Q az egy perc alatt kilélegzett széndioxid mennyisége (milliliterben), D pedig a tüdőből a szív felé haladó vér és a szívből a tüdő felé pumpált vér (ml/l-ben megadott) CO_2-koncentrációjának különbsége. Ha például $Q = 233$ ml és $D = 97 - 56 = 41$, akkor

$$y = \frac{233\,\text{ml/min}}{41\,\text{ml/l}} \approx 5,68\,\text{l/min}$$

[Az adatokat J. Kenneth Herd, az East Tennessee State University munkatársa bocsátotta rendelkezésünkre.]

Mi történik az y mennyiséggel, amikor $Q = 233$, $D = 41$, és tudjuk, hogy a D mennyisége percenként 2 egységgel csökken, Q viszont nem változik?

26. Költség, bevétel, nyereség. Egy cég a $c(x)$ ezer dollár költséggel előállított x darab termék eladásából $r(x)$ dollár árbevételt könyvel el, nyeresége ennek megfelelően $p(x) = r(x) - c(x)$. Határozzuk meg a dc/dt, dr/dt és dp/dt deriváltak értékét, amikor

(a) $r(x) = 9x$, $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, $dx/dt = 0,1$ és $x = 2$, illetve amikor

(b) $r(x) = 70x$, $c(x) = x^3 - 6x^2 + 45/x$, $dx/dt = 0,05$ és $x = 1,5$.

27. Mozgás parabola mentén. Miközben egy részecske az $y = x^2$ egyenletű parabola jobb oldali ága mentén mozog az xy-síkban, x-koordinátája állandó ütemben, másodpercenként 10 méterrel növekszik. Milyen gyorsan változik az origót a részecskével összekötő szakasznak az x-tengely pozitív irányával bezárt θ szöge, amikor $x = 3$ m?

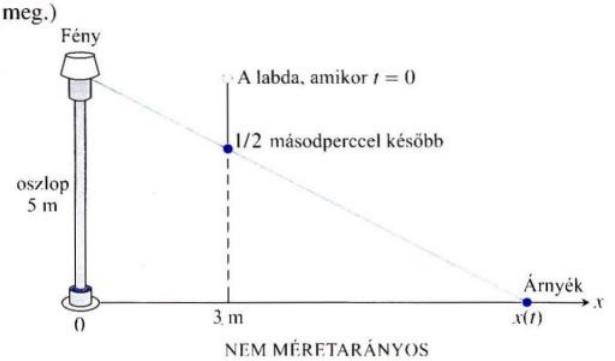
28. Mozgás parabola mentén. Miközben egy részecske az $y = \sqrt{-x}$ egyenletű görbe mentén mozog az xy-síkban, x-koordinátája állandó ütemben, másodpercenként 8 méterrel

csökken. Milyen gyorsan változik az origót a részecskével összekötő szakasznak az x-tengely pozitív irányával bezárt θ szöge, amikor $x = -4$ m?

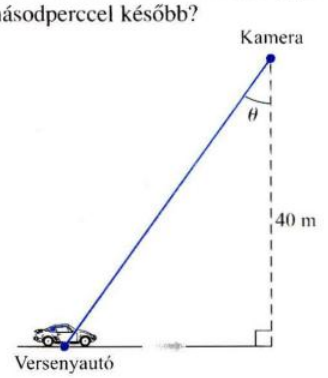
29. Síkbeli mozgás. Az xy-síkban mozgó test x- és y-koordinátája egyaránt a t idő differenciálható függvénye; $dx/dt = -1$ m/s, $dy/dt = -5$ m/s. Milyen sebességgel távolodik a részecske az origótól, amikor áthalad az $(5, 12)$ ponton?

30. Mozgó árnyék. Egy 1,8 m magas férfi 1,5 m/s sebességgel közelít az 5 m magasságból világító utcai lámpa felé. Milyen gyorsan mozog a férfi árnyékának a lámpától legtávolabbi pontja? Milyen gyorsan változik az árnyék hossza abban a pillanatban, amikor a férfi 3 m távolságra van a lámpaoszloptól?

31. Még egy mozgó árnyék. Egy 5 méter magas lámpaoszloptól 3 méter távolságra 5 méter magasságból leejtünk egy labdát (l. az ábrát). Milyen gyorsan mozog a labda árnyéka a talajon az elejtéstől számított 1/2 másodperc elteltével? (Tegyük fel, hogy a labda t másodperc alatt $4,9t^2$ méter hosszúságú utat tesz meg.)



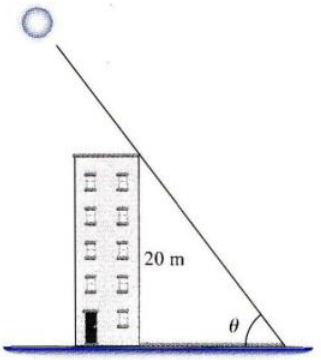
32. Mozgó autóról készült videofelvétel. A pályától 40 méter távolságból készítünk videolfelvételt egy 200 km/h sebességgel száguldó versenyautóról. Milyen gyorsan mozog a θ kameraszög abban a pillanatban, amikor az autó éppen előttünk halad el, illetve fél másodperccel később?



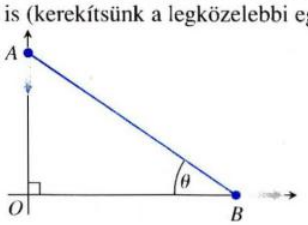
33. Olvadó jégréteg. Egy 8 cm átmérőjű vasgolyó körül állandó vastagságú jégréteg képződött. Amikor a jég olvadni kezd, térfogata percenként 10 cm^3-rel csökken. Milyen gyorsan változik a jégréteg vastagsága, amikor éppen 2 cm nagyságú? Milyen ütemben csökken ekkor a jégréteg külső felszíne?

34. Autópálya-rendőrség. A rendőrségi repülőgép állandó, 200 km/h sebességgel, 5000 m magasságban repül a sík terepen haladó egyenes út felett. A pilóta a radar monitorján azt látja, hogy egy, a repülőgéptől éppen 8 kilométer távolságra lévő gépkocsi és a repülőgép távolságának változási sebessége 250 km/h. Mekkora sebességgel halad a szóban forgó autó?

35. Épület árnyéka. Egy 24,4 méter magas épület árnyéka egy adott pillanatban éppen 18,3 méter hosszú. A napsugaraknak a sík földfelszínnel bezárt θ szöge ekkor éppen $0,27°$/min sebességgel változik. Milyen gyorsan csökken ebben a pillanatban az árnyék hossza?



36. Gyalogosok. Az A és a B gyalogos egymást derékszögben metsző utakon halad. Az A gyalogos 2 m/s sebességgel közelít az útkereszteződés felé, a B gyalogos ettől a ponttól 1 m/s sebességgel távolodik. Mekkora az ábrán θ-val jelölt szög változási sebessége, amikor az A gyalogos 10, a B pedig 20 méterre van a útkereszteződéstől? Fejezzük ki ezt a változási sebességet fok/s egységben is (kerekítsünk a legközelebbi egész fokra).

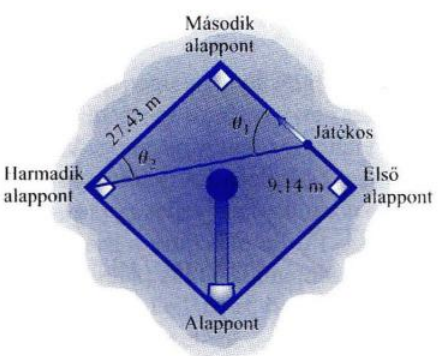


37. Baseball-játékosok. A baseball-pálya 27,43 méter (90 láb) oldalhosszúságú négyzet. Egy játékos 4,88 m/s sebességgel szalad az első alapponttól a második felé.

(a) Milyen gyorsan változik a játékos harmadik alapponttól való távolsága, amikor az első alapponttól 9,14 méter távolságra van?

(b) Milyen ütemben változnak ekkor az ábrán θ_1-gyel, illetve θ_2-vel jelölt szögek?

(c) A játékos 4,57 m/s sebességgel csúszik be a második alappontba. Mekkora a θ_1 és a θ_2 szög változási sebessége a beérkezés pillanatában?



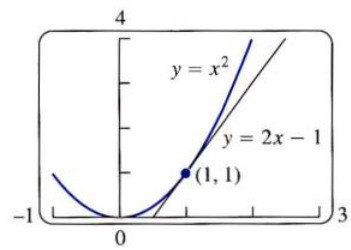
38. Hajók. Két hajó távolodik az O ponttól, a pályáik $120°$-os szöget zárnak be. Az A hajó 14, a B hajó 30 km/h sebességgel halad. Milyen gyorsan növekszik a két hajó közötti távolság, amikor $OA = 9$ és $OB = 5$ kilométer?

3.8. Linearizáció és differenciálok

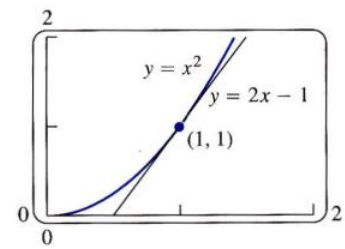
Bonyolult függvényeket olykor approximálni tudunk olyan egyszerűbb függvényekkel, amelyek speciális alkalmazások céljára megfelelő pontossággal közelítik az eredeti függvényt és könnyebb dolgozni velük. Ebben a fejezetben olyan közelítő függvényeket vizsgálunk, amelyek a görbe érintőire vezethetők vissza, és *linearizációnak* nevezzük őket. Más közelítő függvényeket, például polinomokat a 11. fejezetben fogunk tanulmányozni.

Új, dx-szel és dy-nal jelölt változókat vezetünk be; *differenciáloknak* nevezzük és oly módon definiáljuk őket, hogy a derivált Leibniz-féle jelölése, a dy/dx valódi hányados legyen. A dy mennyiséggel a mérés hibáját vagy a függvény változásra való hajlamát becsüljük. E fogalmak alkalmazásával pontos bizonyítást adhatunk a 3.5. alfejezetben csupán szemléletesen igazolt láncszabályra.

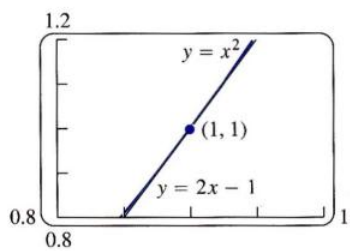
Linearizáció



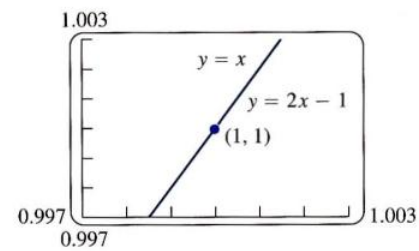
Az $y = x^2$ görbe és (1,1) pontbeli $y = 2x-1$ érintője.



A görbe és érintője (1,1) közelében.



A görbe és érintője az intervallum egészén nagyon közel van egymáshoz.



A görbe és érintője egyre közelebb van egymáshoz. Ebben az intervallumban a számítógép képernyője már nem képes különbséget tenni közöttük.

3.46. ÁBRA: Ha a függvény grafikonját egyre jobban kinagyítjuk egy olyan pontjának környezetében, amelyben a függvény differenciálható, azt látjuk, hogy a görbe egyre inkább kisimul, egyre jobban közelít érintőjéhez.

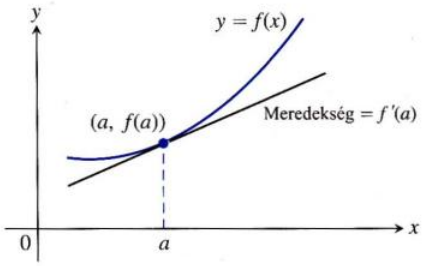
Amint a 3.46. ábrán látható, az $y = x^2$ görbéhez húzott érintő az érintési pont közelében a görbéhez közel halad. Az érintési ponttól akár jobbra, akár balra választunk ki egy pici intervallumot, az érintő pontjainak y-koordinátái jól közelítik a görbe y-értékeit. Ezt a jelenséget jól megfigyelhetjük, ha az érintési pont környezetében kinagyítjuk a két grafikont, vagy ha tanulmányozzuk az $f(x)$ és érintője közötti eltérést mutató táblázatot. Lokálisan minden differenciálható görbéhez található ilyen jól közelítő egyenes.

Általában is igaz, hogy ha f differenciálható az $x = a$ pontban, akkor a görbe e pontbeli érintője átmegy az $(a, f(a))$ ponton (l. a 3.47. ábrát) , azaz egyenlete a meredekséggel kifejezve

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Az érintő tehát az

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$



3.47. ÁBRA: Az $y = f(x)$ görbe érintője az $x = a$ abszcisszájú pontban az $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ egyenes.

lineáris függvény grafikonja. Amíg ez az egyenes f grafikonjának közelében marad, $L(x)$ jól közelíti $f(x)$-et.

DEFINÍCIÓK Linearizáció, lineáris közelítés.

Ha f differenciálható az $x = a$ pontban, akkor az

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

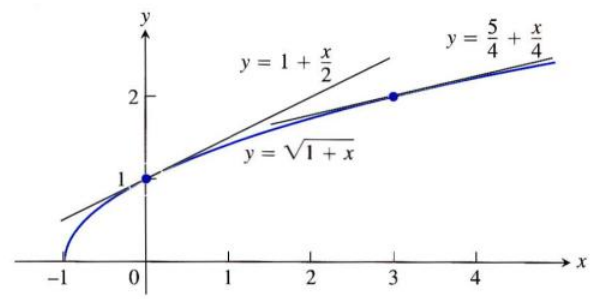
közelítő függvényt az f függvény a-beli **linearizációjának** nevezzük. Az f függvény L-lel való

$$f(x) \approx L(x)$$

közelítését az f függvény a-beli **lineáris approximációjának vagy lineáris közelítésének** nevezzük. Az $x = a$ pont az approximáció **középpontja**.

1. PÉLDA A lineárisan közelítő függvény megkeresése.

Keressük meg az $f(x) = \sqrt{1+x}$ függvény $x = 0$ pontbeli linearizációját (3.48. ábra).



3.48. ÁBRA: Az $y = \sqrt{1+x}$ grafikonja és linearizációja az $x = 0$ és $x = 3$ pontokban. A 3.49. ábra kinagyítva mutatja a görbéket a $(0, 1)$ pont környezetében.

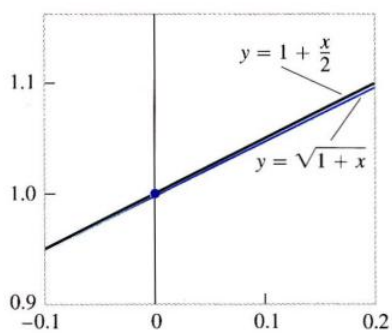
Megoldás. Mivel

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2},$$

ezért $f(0) = 1$ és $f'(0) = 1/2$, s így az

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}(x - 0) = 1 + \frac{x}{2}$$

linearizációt kapjuk (l. a 3.49. ábrát). □



3.49. ÁBRA: A 3.48. ábra kinagyított részlete

Az 1. példában a nullához közeli x értékekre a $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ közelítés meglehetősen pontos.

Az $x = 0$ helytől távolodva veszítünk a pontosságból. Például $x = 2$-re a linearizáció 2-t ad $\sqrt{3}$ közelítéseként, ami még egy tizedesjegyre sem pontos.

Természetesen, a gyakorlatban egy szám négyzetgyökét sohasem fogjuk kalkulátor helyett lineáris közelítéssel kiszámolni. A linearizáció haszna abban áll, hogy segítségével bonyolult formulákat egy teljes intervallumon egyszerűbbekkel helyettesíthetünk. Ha nullához közeli x értékekre az $\sqrt{1+x}$-szel kell dolgoznunk, és egy kis hibát megengedhetünk, akkor számolhatunk az $1 + (x/2)$ képlettel is. Ilyenkor természetesen tudnunk kell azt is, hogy mekkora a hiba. A hibabecslésről részletesen is szó lesz a 11. fejezetben.

közelítő érték	valódi érték	|valódi érték − közelítő érték|
$\sqrt{1,2} \approx 1 + \frac{0,2}{2} = 1,10$	1,095445	$\leq 10^{-2}$
$\sqrt{1,05} \approx 1 + \frac{0,05}{2} = 1,025$	1,024695	$\leq 10^{-3}$
$\sqrt{1,005} \approx 1 + \frac{0,005}{2} = 1,00250$	1,002497	$\leq 10^{-5}$

A linearizáció a középponttól távolodva általában veszít pontosságából. Ahogy azt a 3.48. ábra is mutatja, $x = 3$ közelében a $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ közelítés már túl durva ahhoz, hogy használható legyen. Szükségünk van tehát az $x = 3$-beli linearizációra.

2. PÉLDA **A lineárisan közelítő függvény megkeresése egy másik pontban.**

Keressük meg az $f(x) = \sqrt{1+x}$ függvény linearizációját az $x = 3$ helyen.

Megoldás. Írjuk az $L(x)$ linearizációt $a = 3$-ra. Az

$$f(3) = 2, \quad f'(3) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}\Big|_{x=3} = \frac{1}{4}$$

összefüggésekből azt kapjuk, hogy

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}. \qquad \square$$

A 2. példában az $x = 3.2$ helyen vett linearizáció a

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3,2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3.2}{4} = 1,250 + 0,800 = 2,050$$

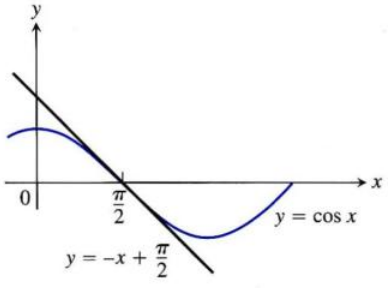
közelítést adja, ami a helyes $\sqrt{4,2} \approx 2,04939$ értéktől kevesebb mint 1 ezreddel tér el. Az 1. példabeli linearizáció hibája ellenben

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3,2} \approx 1 + \frac{3,2}{2} = 1 + 1,6 = 2,6,$$

több mint 25 százalékos hibát ad.

3. PÉLDA **A koszinuszfüggvény linearizációja.**

Keressük meg az $f(x) = \cos x$ függvény linearizációját az $x = \pi/2$ pontban (3.50. ábra).



3.50. ÁBRA: Az $f(x) = \cos x$ függvény grafikonja és annak linearizációja az $x = \pi/2$ helyen; $x = \pi/2$ közelében $\cos x \approx -x + (\pi/2)$ (3. példa).

Megoldás. Mivel $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, $f'(x) = -\sin x$ és $f'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$, ezért

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) = \\ &= 0 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -x + \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \qquad \square$$

Gyökök és hatványok fontos lineáris approximációja az

$$(1+x)^k \approx 1 + kx \qquad (x \text{ nullához közeli, } k \text{ pedig tetszőleges szám})$$

közelítés (15. feladat). Ez az approximáció nullához közeli x értékekre ad jó eredményt és széleskörűen használható. Ha például x kicsi, akkor

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \qquad k = 1/2$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1 + x \qquad k = -1,\ x \text{ helyében } -x$$

$$\sqrt[3]{1+5x^4} = (1+5x^4)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}(5x^4) = 1 + \frac{5}{3}x^4 \qquad k = 1/3,\ x \text{ helyében } 5x^4$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 \qquad k = -1/2,\ x \text{ helyében } -x^2$$

Differenciálok

Az y függvény x szerinti deriváltjára szokás néha a Leibniz-féle dy/dx jelölést is használni. A látszattal ellenétben dy/dx nem igazi tört. Most bevezetünk két új változót, dx-et és dy-t, azzal a tulajdonsággal, hogy létezik a hányadosuk és egyenlő y deriváltjával.

> DEFINÍCIÓ
> Legyen $y = f(x)$ egy differenciálható függvény. A dx **differenciál** egy független változó, a dy **differenciál** pedig
>
> $$dy = f'(x)dx.$$

A dx független változóval ellentétben dy mindig függő változó: x-től és dx-től is függ. Ha dx-nek specifikus értéket adunk, x pedig az f függvény értelmezési tartományának egy eleme, akkor dy-hoz is számszerű értéket rendelhetünk.

4. PÉLDA **A dy differenciál kiszámítása.**

(a) Keressük meg dy-t, ha $y = x^5 + 37x$.

(b) Keressük meg dy értékét, ha $x = 1$ és $dx = 0,2$.

Megoldás.

(a) $dy = (5x^4 + 37)dx$

(b) A dy differenciálra kapott kifejezésbe helyettesítsük be $x = 1$-et és $dx = 0,2$-t. Azt kapjuk, hogy

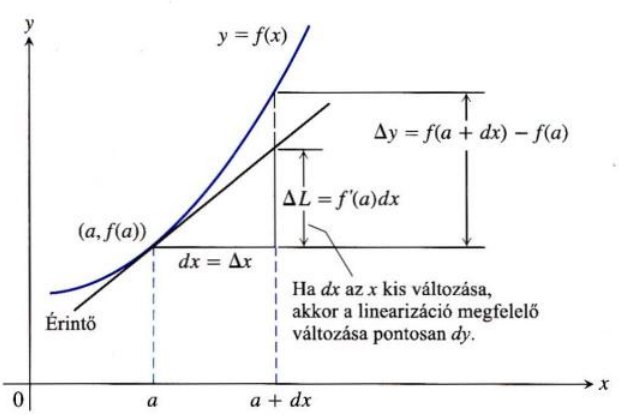
$$dy = (5 \cdot 1^4 + 37) \cdot 0,2 = 8,4. \qquad \square$$

A differenciálok geometriai jelentését mutatja a 3.51. ábra. Legyen $x = a$ és $dx = \Delta x$. Az $y = f(x)$ függvény megfelelő változása:

$$\Delta y = f(a + dx) - f(a).$$

Az L érintő mentén a megfelelő változás:

$$\begin{aligned} \Delta L &= L(a + dx) - L(a) = \\ &= \underbrace{f(a) + f'(a)[(a + dx) - a]}_{L(a+dx)} - \underbrace{f(a)}_{L(a)} = \\ &= f'(a)dx \end{aligned}$$



3.51. ÁBRA: A dy differenciál geometriailag az f függvény linearizációjának ΔL megváltozása, amikor az $x = a$ mennyiség $dx = \Delta x$-szel megváltozik.

Azaz ha $x = a$ és $dx = \Delta x$, akkor f linearizációjának változása pontosan egyenlő a dy differenciállal. Ezért dy azt mutatja, hogy az érintő mennyit csökken vagy nő, ha x változása $dx = \Delta x$.

Ha $dx \neq 0$, akkor a dy és dx differenciálok hányadosa egyenlő az $f'(x)$ deriválttal, hiszen

$$dy/dx = \frac{f'(x)dx}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

A $dy = f'(x)dx$ differenciál helyett olykor a

$$df = f'(x)dx$$

jelölést használjuk; df-et az f **függvény differenciáljának** nevezzük. Például ha $f(x) = 3x^2 - 6$, akkor

$$df = d(3x^2 - 6) = 6xdx.$$

Bármely differenciálhányados-formulának, mint amilyen például a

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \text{vagy a} \quad \frac{d(\sin u)}{dx} = \cos u \frac{du}{dx},$$

van egy megfelelő differenciális alakja:

$$d(u+v) = du + dv \quad \text{vagy} \quad d(\sin u) = \cos u du.$$

5. PÉLDA **Függvények differenciáljának meghatározása.**

(a) $d(\operatorname{tg} 2x) = \sec^2(2x)d(2x) = 2\sec^2 2xdx$

(b) $d\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{(x+1)dx - xd(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{xdx + dx - xdx}{(x+1)^2} = \frac{dx}{(x+1)^2}.$ □

Becslés differenciálokkal

Tegyük fel, hogy ismerjük a differenciálható $f(x)$ függvény értékét az a pontban, és tudni szeretnénk, hogy ez az érték mennyit változik, ha a független változó értéke az a-hoz közeli $a + dx$ értékét veszi fel. A 3.51. ábrán láthatjuk, hogy ha dx kicsi, akkor Δy közelítőleg egyenlő a dy differenciállal. Mivel

$$f(a + dx) = f(a) + \Delta y,$$

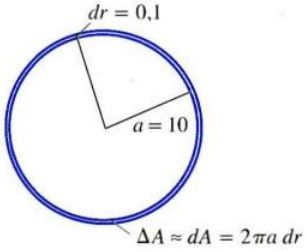
a differenciális közelítés azt adja, hogy

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy,$$

ahol $dx = \Delta x$. Tehát a $\Delta y \approx dy$ közelítést felhasználhatjuk $f(a + dx)$ értékének kiszámítására, ha ismerjük $f(a)$-t és dx kicsi.

6. PÉLDA **Becslés differenciálokkal.**

Egy kör r sugarát $a = 10$ m-ről 10,1 m-re növeljük (3.52. ábra). A dA differenciál segítségével becsüljük meg a kör A területének növekedését! Becsüljük meg a megnövelt kör területét és hasonlítsuk össze a valódi értékével!



3.52. ÁBRA: Ha a dr differenciál a-hoz képest kicsi (ez a helyzet például, ha $dr = 0,1$ és $a = 10$), akkor a $dA = 2\pi a dr$ differenciállal jó becslést adhatunk az $r = a + dr$ sugarú kör területére (6. példa).

Megoldás. Mivel $A = r^2\pi$, a becsült növekedés

$$dA = A'(a)dr = 2\pi a dr = 2\pi(10)(0,1) = 2\pi \text{ m}^2$$

lesz. Ezért

$$A(10 + 0,1) \approx A(10) + 2\pi =$$
$$= \pi(10)^2 + 2\pi = 102\pi.$$

A 10,1 m sugarú kör területe közelítőleg 102π m^2.

A valódi terület:

$$A(10,1) = \pi(10,1)^2 = 102,01\pi \text{ x}^2.$$

Becslésünk hibája $0,01\pi$ m^2, ami a $\Delta A - dA$ eltérésből adódik. □

A differenciállal való közelítés hibája

Legyen $f(x)$ differenciálható az $x=a$ helyen és tegyük fel, hogy $dx=\Delta x$ az x növekménye. Az f függvény változását kétféle módon írhatjuk le, amikor az x változó a-ról $a+\Delta x$-re változik.

$$\begin{aligned} &\text{A valódi változás:} && \Delta f = f(a+\Delta x)-f(a),\\ &\text{a „differenciális” becslés:} && df = f'(a)\Delta x. \end{aligned}$$

Mennyire jól közelíti a df differenciál Δf-et? A közelítés hibáját úgy mérjük, hogy df-ből kivonjuk Δf-et.

$$\begin{aligned} \text{Az approximációs hiba} &= \Delta f - df = \\ &= \Delta f - f'(a)\Delta x = \\ &= \underbrace{f(a+\Delta x)-f(a)}_{\Delta f} - f'(a)\Delta x = \\ &= \underbrace{\left(\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} - f'(a)\right)}_{\text{ezt elnevezzük } \varepsilon\text{-nak}} \cdot \Delta x = \\ &= \varepsilon \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

Ha $\Delta x \to 0$, az

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

differenciahányados $f'(a)$-hoz tart (idézzük fel, hogyan definiáltuk $f'(a)$-t), így a nagy zárójelek között álló kifejezés egy nagyon kicsi szám lesz (ezért is hívjuk ε-nak). Valóban így van, $\varepsilon \to 0$, ha $\Delta x \to 0$. Ha Δx kicsi, az $\varepsilon\Delta x$ approximációs hiba még nála is kisebb lesz.

$$\underbrace{\Delta f}_{\text{valódi változás}} = \underbrace{f'(a)\Delta x}_{\text{becsült változás}} + \underbrace{\varepsilon\Delta x}_{\text{hiba}}$$

Bár a hiba nagyságát nem ismerjük pontosan, és egészen a 11. fejezetig nem is jutunk előbbre ebben a kérdésben, valamit mégis tudunk: ismerjük az approximációs hibát megadó egyenlet *alakját*.

$y=f(x)$ változása $x=a$ környezetében

Ha $y=f(x)$ differenciálható $x=a$-ban és x értéke a-ról $a+\Delta x$-re változik, akkor az f függvény Δy változását a

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon\Delta x \tag{3.1}$$

egyenlőség adja meg, ahol $\varepsilon \to 0$, ha $\Delta x \to 0$.

A 6. példában

$$\Delta A = \pi(10{,}1)^2 - \pi(10)^2 = (102{,}01-100)\pi = (\underbrace{2\pi}_{dA} + \underbrace{0{,}01\pi}_{\text{a hiba}})\,\text{m}^2,$$

tehát az approximációs hiba:

$$\Delta A - dA = \varepsilon\Delta r = 0{,}01\pi \quad \text{és} \quad \varepsilon = 0{,}01\pi/\Delta r = 0{,}01\pi/0{,}1 = 0{,}1\pi\text{m}.$$

A 3.1. egyenlőség segítségével most már be tudjuk bizonyítani a láncszabályt.

A láncszabály bizonyítása. Azt kell megmutatnunk, hogy ha $f(u)$ az u változó differenciálható függvénye, és $u=g(x)$ az x változó differenciálható függvénye, akkor az $y=f(g(x))$ összetett függvény x differenciálható függvénye.

Pontosabban, ha g differenciálható x_0-ban, és f differenciálható $g(x_0)$-ban, akkor az összetett függvény differenciálható x_0-ban és

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Legyen Δx az x növekménye, Δu és Δy pedig az u és az y megfelelő növekménye. A 3.1 egyenlőséget felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\Delta u = g'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x = (g'(x_0) + \varepsilon_1)\Delta x,$$

ahol $\varepsilon_1 \to 0$, ha $\Delta x \to 0$. Hasonlóan:

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \varepsilon \Delta u = (f'(u_0) + \varepsilon_2)\Delta u,$$

ahol $\varepsilon_2 \to 0$, ha $\Delta u \to 0$. Megjegyezzük, hogy $\Delta u \to 0$ akkor is, ha $\Delta x \to 0$. A Δu-ra és Δy-ra fölállított egyenlőségek összevetéséből azt kapjuk, hogy

$$\Delta y = (f'(u_0) + \varepsilon_2)(g'(x_0) + \varepsilon_1)\Delta x,$$

és így

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) + \varepsilon_2 g'(x_0) + f'(u_0)\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \varepsilon_1.$$

Mivel ε_1 és ε_2 nullához tart, amint Δx tart nullához, a jobb oldalon álló négy tag közül határértékben három eltűnik, s marad az, hogy

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük. □

A változásra való érzékenység

A $df = f'(x)dx$ egyenlőség megmutatja, hogy f értéke mennyire *érzékeny* x értékének változására. Adott dx változás mellett nagyobb f' érték nagyobb változást okoz. Ha az a pontból egy hozzá közeli $a + dx$ pontba jutunk el, az f értékében beálló változást háromféle módon is leírhatjuk:

	valódi	becsült
abszolút változás	$\Delta f = f(a+dx) - f(a)$	$df = f'(a)dx$
relatív változás	$\dfrac{\Delta f}{f(a)}$	$\dfrac{df}{f(a)}$
százalékos változás	$\dfrac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\dfrac{df}{f(a)} \times 100$

7. PÉLDA **Kút mélységének meghatározása.**

Egy kút mélységét az $s = 4,9t^2$ egyenlet alapján szeretnénk meghatározni úgy, hogy megmérjük, mennyi idő elteltével csobban a vízben a felülről beleejtett kő. Mennyire érzékeny a számításunk az időmérés 0,1 s-os hibájára?

Megoldás. A

$$ds = 9,8t\,dt$$

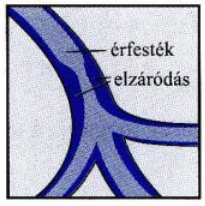
mennyiség nagysága függ t nagyságától. Ha $t = 2$ s, a $dt = 0,1$ által okozott változás:

$$ds = 9,8 \cdot 2 \cdot 0,1 = 1,96 \text{ m}.$$

Három másodperccel később, amikor $t = 5$, ugyanez a dt

$$ds = 9,8 \cdot 5 \cdot 0,1 = 4,9 \text{ m}$$

változást okoz s értékében. Az időmérés adott hibája mellett a kút becsült mélységének és valódi mélységének eltérése függ attól, hogy milyen hosszú idő alatt éri el a beleejtett kő a kút vizét. □



Angiográfia

A részlegesen elzáródott artériába érfestéket fecskendeznek, amely röngenfényben láthatóvá teszi az artériát. Így ki lehet deríteni, hol van és mennyire súlyos az elzáródás.



Angioplasztika

Az artériába egy ballonnal felszerelt katétert vezetnek, s a ballont felfújva az elzáródás helyén kitágítják az artériát.

8. PÉLDA **Artériaelzáródás.**

Az 1830-as évek végén fedezte fel Jean Poiseulle francia fiziológus azt a képletet, amelyet ma is használunk, ha meg akarjuk tudni, mennyire kell kitágítanunk egy részlegesen elzáródott artériát ahhoz, hogy a normális vérátfolyást biztosítani tudjuk. Eszerint egy vékony csövön – adott nyomás esetén, egységnyi idő alatt – átáramló V térfogatmennyiség a cső r sugara negyedik hatványának konstansszorosával egyenlő:

$$V = kr^4.$$

Hogyan hat V-re r 10%-os növekedése?

Megoldás. r és V differenciáljai között a következő egyenlőség áll fenn:

$$dV = \frac{dV}{dr}dr = 4kr^3dr.$$

V relatív változása:

$$\frac{dV}{V} = \frac{4kr^3dr}{kr^4} = 4\frac{dr}{r}.$$

V relatív változása r relatív változásának négyszerese, így r 10%-os növekedése az átáramló vér mennyiségét 40%-kal növeli. □

9. PÉLDA **Az anyag átalakulása energiává.**

Newton második törvénye, az

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} = ma$$

összefüggés állandó tömeggel számol, de mi tudjuk, hogy ez nem teljesen igaz, mert a test tömege nő a sebességgel. Einstein szerint a tömeg:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

ahol m_0 a mozdulatlan test tömege, c pedig a fénysebesség, amely körülbelül 300 000 km/s. A

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 \tag{3.2}$$

közelítést alkalmazva becsüljük meg, hogy a sebesség változásával mennyit változik a test tömege.

Megoldás. Ha v nagyon kicsi c-hez képest, akkor v^2/c^2 közel nulla; ilyenkor nagy biztonsággal használhatjuk a

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad \text{a (3.2) egyenlet az } x = \frac{v}{c} \text{ helyettesítéssel}$$

közelítést, és azt kapjuk, hogy

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx m_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

vagy hogy

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \left(\frac{1}{c^2}\right). \tag{3.3}$$

A (3.3) egyenlőség megadja a tömegnövekedés mértékét, mely a test v sebességétől függ.

A relativisztikus energia

A newtoni fizikában $(1/2)m_0v^2$ a test kinetikus vagy mozgási energiája (E_m), és ha a (3.3) egyenletet átírjuk

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$$

alakba, akkor azt látjuk, hogy

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 - \frac{1}{2} m_0 (0)^2 = \Delta E_m,$$

vagy

$$(\Delta m)c^2 \approx \Delta(E_m).$$

Így a 0-ról v sebességre gyorsuló test kinetikus energiájának megváltozása, ΔE_m közelítőleg $(\Delta m)c^2$-tel egyenlő, vagyis a tömegváltozás mértékének és a fénysebesség négyzetének a szorzata. A $c \approx 3 \times 10^8$m/s értéket behelyettesítve láthatjuk, hogy pici tömegváltozás is jelentős energiaváltozást okozhat. □

3.8. Feladatok

A lineárisan közelítő függvény megkeresése

Az 1–4. gyakorlatokban keressük meg az $f(x)$ függvény $L(x)$ linearizációját az $x = a$ helyen.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad a = 2$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}, \quad a = -4$

3. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad a = 1$

4. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = -8$

Linearizáció és approximáció

Az 5–10. feladatokban adjunk meg olyan linearizációt, amellyel a megadott függvényt helyettesíteni lehet az x_0 pontot tartalmazó intervallumokban. Hogy a későbbi munkát megkönnyítsük, ne az x_0 pontot válasszuk a linearizáció középpontjául, hanem egy hozzá közeli $x = a$ egész számot, amelyben könnyű kiszámítani az adott függvény és a deriváltja értékét.

5. $f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 0,1$

6. $f(x) = x^{-1}, \quad x_0 = 0,9$

7. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -0,9$

8. $f(x) = 1 + x, \quad x_0 = 8,1$

9. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 8,5$

10. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}, \quad x_0 = 1,3$

Trigonometrikus függvények lineáris közelítése

A 11–14. gyakorlatokban keressük meg az f függvény linearizációját az $x = a$ pontban. Azután ábrázoljuk közös koordinátarendszerben f-et és linearizációját.

11. $f(x) = \sin x$; **(a)** az $x = 0$, **(b)** az $x = \pi$ pontban.

12. $f(x) = \cos x$; **(a)** az $x = 0$, **(b)** az $x = -\pi/2$ pontban.

13. $f(x) = \sec x$; **(a)** az $x = 0$, **(b)** az $x = -\pi/3$ pontban.

14. $f(x) = \operatorname{tg} x$; **(a)** az $x = 0$, **(b)** az $x = \pi/4$ pontban.

Az $(1+x)^k \approx 1 + kx$ közelítés

15. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = (1+x)^k$ függvény linearizációja az $x = 0$ helyen $L(x) = 1 + kx$.

16. Közelítsük az $f(x)$ függvényt az $(1+x)^k \approx 1 + kx$ függvénnyel.

(a) $f(x) = (1-x)^6$ **(b)** $f(x) = \dfrac{2}{1-x}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ **(d)** $f(x) = \sqrt{2+x^2}$

(e) $f(x) = (4+3x)^{1/3}$ **(f)** $f(x) = \sqrt[3]{\left(1 - \dfrac{1}{2+x}\right)^2}$

17. Gyorsabban a kalkulátornál. Az $(1+x)^k \approx 1 + kx$ approximáció segítségével számoljuk ki a következő hatványt, illetve gyököt.

(a) $(1,002)^{50}$ **(b)** $\sqrt[3]{1,009}$

18. Keressük meg az $f(x) = \sqrt{x+1} + \sin x$ függvény linearizációját az $x = 0$ pontban. Hogyan viszonyul ez a lineáris közelítés a $\sqrt{x+1}$ és a $\sin x$ függvény $x = 0$ pontbeli linearizációihoz?

Deriváltak differenciális alakja

A 19–30. gyakorlatokban írjuk fel a dy differenciált.

19. $y = x^3 - 3\sqrt{x}$

20. $y = x\sqrt{1-x^2}$

21. $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$

22. $y = \dfrac{2\sqrt{x}}{3(1+\sqrt{x})}$

23. $2y^{3/2} + xy - x = 0$

24. $xy^2 - 4x^{3/2} - y = 0$

25. $y = \sin(5\sqrt{x})$

26. $y = \cos(x^2)$

27. $y = 4\operatorname{tg}(x^3/3)$

28. $y = \sec(x^2 - 1)$

29. $y = 3\csc(1 - 2\sqrt{x})$

30. $y = 2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

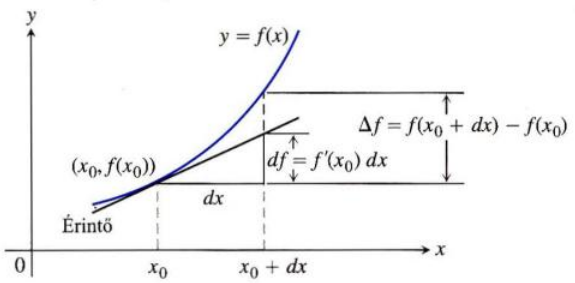
A közelítés hibája

A 31–36. gyakorlatokban az $f(x)$ függvénynek megváltozik az értéke, amikor x értéke x_0-ról $x_0 + dx$-re változik. Keressük meg

(a) a $\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$ változást,

(b) a $df = f'(x_0)dx$ közelítés értékét, és

(c) a $|\Delta - df|$ approximációs hibát.



31. $f(x) = x^2 + 2x$; $x_0 = 1$, $dx = 0,1$

32. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$; $x_0 = -1$, $dx = 0,1$

33. $f(x) = x^3 - x$; $x_0 = 1$, $dx = 0,1$

34. $f(x) = x^4$; $x_0 = 1$, $dx = 0,1$

35. $f(x) = x^{-1}$; $x_0 = 0,5$, $dx = 0,1$

36. $f(x) = x^3 - 2x + 3$; $x_0 = 2$, $dx = 0,1$

A változás differenciális becslése

A 37–42. gyakorlatokban írjunk fel egy olyan differenciális formulát, amely a térfogat vagy felszín adott megváltozását becsli.

37. Mennyivel változik a gömb $V = (4/3)\pi r^3$ térfogata, ha a sugara r_0-ról $r_0 + dr$-re változik?

38. Mennyivel változik a kocka $V = x^3$ térfogata, ha éle x_0-ról $x_0 + dx$-re változik?

39. Mennyivel változik a kocka $S = 6x^2$ felszíne, ha éle x_0-ról $x_0 + dx$-re változik?

40. Mennyivel változik az egyenes körkúp palástjának $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ felszíne, ha sugara r_0-ról $r_0 + dr$-re változik, magassága pedig változatlan marad?

41. Mennyivel változik az egyenes körhenger $V = \pi r^2 h$ térfogata, ha a sugara r_0-ról $r_0 + dr$-re változik, miközben a magassága változatlan?

42. Mennyivel változik az egyenes körhenger palástjának $S = 2\pi rh$ felszíne, ha magassága h_0-ról $h_0 + dh$-re változik, sugara pedig változatlan?

Alkalmazások

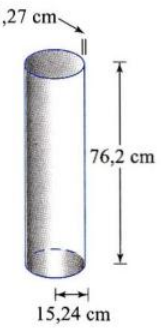
43. Egy kör sugarát 2 m-ről 2,02 m-re növeljük.

(a) Becsüljük meg, mekkora változást okoz ez a kör területében.

(b) Becslésünket fejezzük ki a kör eredeti területének százalékában.

44. Egy fa törzsének átmérője egyik évben 25 cm volt. A következő évben kerülete 5 cm-rel nőtt. Mennyivel nőtt a fa átmérője? És keresztmetszetének területe?

45. Térfogatbecslés. Becsüljük meg, mennyi anyag van egy 76,2 cm magas, 15,24 cm sugarú és 1,27 cm falvastagságú, hengeralakú kazánban.



46. Épület magasságának becslése. A geodéta, aki az épülettől 10 méter távolságra áll, az épület tetejét 75°-os szög alatt látja. Milyen pontosan kell mérnie a szöget, hogy az épület magasságának százalékban kifejezett hibája 4%-nál kisebb legyen?

47. Tűréshatár. Egy egyenes körhengernek a magassága egyenlő a sugarával, tehát térfogata $V = \pi h^3$. A térfogatot a helyes érték 1%-ánál kisebb hibával kell kiszámítanunk. Határozzuk meg közelítőleg azt a legnagyobb hibát, amit h mérésekor elkövethetünk, és fejezzük ki h százalékában.

48. Tűréshatár.

(a) Milyen pontosan kell megmérnünk egy 10 m magas henger alakú tartály belső átmérőjét, ha térfogatát 1%-nál kisebb hibával akarjuk kiszámítani?

(b) Milyen pontosan kell megmérnünk a tartály külső átmérőjét, ha 5%-nál kisebb hibával akarjuk kiszámolni a tartály oldalának lefestéséhez szükséges festékmennyiséget?

49. A pénzverde szerződést köt a szövetségi kormánnyal új érmék előállítására. Mekkora dr eltérés lehet az érmék sugarában, ha súlyuk az ideálistól legfeljebb 1/1000-del térhet el? Tekintsük az érmék vastagságát állandónak.

50. Kocka térfogatváltozásának ábrázolása Az x élhosszúságú kocka $V = x^3$ térfogata ΔV-vel nő, ha az x él Δx-szel nő. Készítsünk rajzot, mely megmutatja, hogy ΔV előállítható három darab x, x, δx méretű téglatest, három darab x, Δx, Δx méretű téglatest és egy Δx élhosszúságú kocka térfogatának összegeként. A $dV = 3x^2 dx$ differenciális formula csak a $x \times x \times \Delta x$-es téglatestekkel számol.

51. A repülési manőverek hatása a szívműködésre. A szív munkájának java részét a balkamra végzi, amely a vért az artériákba pumpálja. Ezt a munkát a

$$W = PV + \frac{V\delta v^2}{2g}$$

képlet adja meg, ahol W az egységnyi idő alatt végzett munka, P az átlagos vérnyomás, V az egységnyi idő alatt kipréselt vér mennyisége, δ („delta") a vér fajsúlya, v a kilépő vér átlagsebessége és g a nehézségi gyorsulás.

Ha P-t, V-t, δ-t és v-t állandónak tekintjük, akkor W csupán g függvénye lesz, és az egyenlőség az egyszerűbb

$$W = a + \frac{b}{g} \quad (a,\ b \text{ konstans})$$

alakot ölti. Mint a NASA orvoscsoportjának tagjai, tudni szeretnénk, mennyire érzékeny W a g-nek a repülési manőverek által okozott látszólagos változásaira. Kutatásunk részeként össze szeretnénk hasonlítani, hogy adott dg változás milyen hatással lesz W értékére a Holdon, ahol $g = 1{,}6\,\text{m/s}^2$, illetve a Földön, ahol $g = 9{,}8\,\text{m/s}^2$. A $dW_{\text{Hold}}/dW_{\text{Föld}}$ arány meghatározásához használjuk az egyszerűbb képletet.

52. A nehézségi gyorsulás mérése. Mivel állandó hőmérséklet mellett az órainga hossza állandó, ezért az inga T periódusideje csak a g gravitációs gyorsulástól függ. A periódusidő ezért g függvényében lassan változni fog, ha az órát a Föld felszínén utaztatjuk. ΔT változása nyomán a T, g, L kapcsolatát leíró $T = 2\pi(Lg)^{1/2}$ képlet alapján g változását is megbecsülhetjük.

(a) L-et állandónak, g-t pedig független változónak tekintve becsüljük meg dT-t, és az eredményt használjuk fel a feladat (b) és (c) részének megoldásához.

(b) Ha g nő, akkor T megváltozik. Sietni vagy késni fog ekkor az ingaóra? Magyarázzuk.

(c) Egy 100 cm ingahosszúságú ingaóra eredeti helyén $g = 9{,}80\,\text{m/s}^2$. Egy új helyre szállítva periódusideje $dT = 0{,}001$ s-mal megnő. Keressük meg dg-t, és becsüljük meg g értékét az óra új helyén.

53. Egy kocka élét 1%-os hibával 10 cm-nek mérjük. E mérés alapján ki kell számítanunk a kocka térfogatát. Becsüljük meg a térfogatszámítás százalékos hibáját.

54. Milyen pontosan kell megmérnünk a négyzet élhosszúságát, ha biztosak akarunk lenni benne, hogy a számított térfogatérték legfeljebb 2%-kal tér el a valódi értékétől?

55. Egy gömb átmérője 100 ± 1 cm. Térfogatát e mérés alapján számítjuk ki. Becsüljük meg a térfogatszámítás százalékos hibáját.

56. Becsüljük meg, hogy egy gömb D átmérőjének mérésekor hány százalékos hibát engedhetünk meg, ha a térfogatát 3%-os pontossággal szeretnénk kiszámítani?

57. (*A 7. feladat folytatása.*) Mutassuk meg, hogy t mérésének 5%-os hibája körülbelül 10%-os hibát okoz s értékében, amit az $s = 4{,}9t^2$ képlettel számolunk ki.

58. (*A 8. feladat folytatása.*) Hány százalékkal kell növelni r értékét, ha V-t 50%-kal akarjuk növelni?

További példák és feladatok.

59. Mutassuk meg, hogy az $\sqrt{1+x}$ origóbeli lineáris approximációja az origóhoz közelítve egyre pontosabb; ehhez elég azt igazolni, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{1+(x/2)} = 1.$$

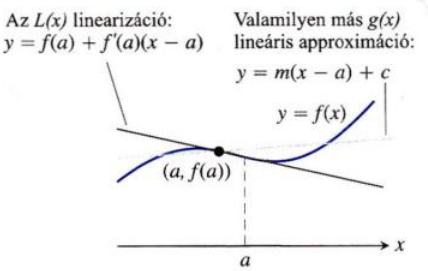
60. Mutassuk meg, hogy a $\operatorname{tg} x$ origóbeli lineáris approximációja az origóhoz közelítve egyre pontosabb; ehhez elég azt igazolni, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

61. A linearizáció a legjobb lineáris közelítés. (Ezért használjuk a linearizációt.) Tegyük fel, hogy $y = f(x)$ differenciálható $x = a$-ban és legyen $g(x) = m(x-a) + c$ egy lineáris függvény, ahol m és c állandók. Ha az $E(x) = f(x) - g(x)$ hiba elég kicsi $x = a$ közelében, akkor arra gondolhatunk, hogy g-t f lineáris approximációjaként használhatjuk az $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ linearizáció helyett. Mutassuk meg, hogy ha g-re kiszabjuk az

1. $E(a) = 0$,
2. $\lim_{x\to a} \dfrac{E(x)}{x-a} = 0$

feltételeket, akkor $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$. Az $L(x)$ linearizáció tehát az egyetlen olyan lineáris approximáció, amelynek hibája nulla $x = a$-ban, és elhanyagolható $(x-a)$-hoz képest az a környezetében.



62. Kvadratikus approximáció.

(a) Legyen $Q(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2$ az $f(x)$ függvény olyan kvadratikus approximációja (vagy négyzetes közelítse) az $x = a$ pontban, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

i. $Q(a) = f(a)$,
ii. $Q'(a) = f'(a)$,
iii. $Q''(a) = f''(a)$.

Határozzuk meg a b_0, b_1 és b_2 együtthatók értékét.

(b) Keressünk négyzetes közelítést az $f(x) = 1/(1-x)$ függvényhez az $x = 0$ pontban.

(c) Ábrázoljuk az $f(x) = 1/(1-x)$ függvényt és $x = 0$ ponthoz tartozó négyzetes közelítését. Nagyítsuk ki a két grafikon $(0, 1)$ körüli részletét. Kommentáljuk a látottakat.

(d) Keressük meg az $g(x) = 1/x$ függvény $x = 1$ ponthoz tartozó négyzetes közelítését. Ábrázoljuk a két grafikont közös koordináta-rendszerben. Kommentáljuk a látottakat.

(e) Keressük meg a $h(x) = \sqrt{1+x}$ függvény $x = 0$ ponthoz tartozó négyzetes közelítését. Ábrázoljuk együtt h-t és kvadratikus approximációját. Kommentáljuk a látottakat.

(f) Mi a (b), (c), (d) és (e) feladatokban szereplő f, g és h függvények linearizációja az adott pontokban?

63. A derivált leolvasása a függvény grafikonjáról. Ha egy differenciálható görbét kinagyítva vizsgálunk, akkor meg tudjuk becsülni a függvény deriváltjának értékét egy adott pontban. Olyan mértékben nagyítjuk fel a görbét, hogy a kérdéses ponton áthaladva már egyenesnek lássuk; ekkor a képernyő koordinátabeosztása alapján már le tudjuk olvasni a görbe meredekségét az őt közelítő egyenes meredekségeként.

(a) Tekintsük először az $y = x^2$ függvényt az $x = 1$ pontban. A leolvasott meredekségnek 2-nek kell lennie.

(b) Most próbálkozzunk az $y = e^x$ görbével $x = 1$-ben, $x = 0$-ban és $x = -1$-ben. Minden esetben hasonlítsuk össze a deriváltra kapott becslésünket a függvény adott pontbeli értékével. Mit tapasztalunk? Teszteljük eredményünket más x értékekkel is. A magyarázatot a 7. fejezetben fogjuk megtalálni.

64. Tegyük fel, hogy az $f(x)$ differenciálható függvénynek $x = a$-ban vízszintes érintője van. Mondhatunk-e valamit ennek alapján az f függvény $x = a$-beli linearizációjáról? Válaszunkat indokoljuk.

65. Mekkora sebességre kell felgyorsítani egy testet ahhoz, hogy tömege 1%-kal nőjön?

T **66. Ismételt gyökvonás.**

(a) Írjuk be kalkulátorunkba a 2 értéket, majd a négyzetgyökgomb többszöri lenyomásával végezzünk ismételt gyökvonásokat (vagy a kijelzőn megjelenő számot emeljük 0,5-ik hatványra). Mit tapasztalunk? Értelmezzük. Mi történik, ha tíz gyökvonást végzünk el egymás után?

(b) Ismételjük meg az eljárást 2 helyett 5 kezdeti értékkel. Mi történik most? Használhatunk-e a 2 helyett bármely pozitív x számot? Értelmezzük az eredményt.

Számítógépes vizsgálatok: függvények egybevetése linearizációjukkal

A 67–70. gyakorlatokban számítógép segítségével becsüljük meg a függvény linearizációja hibájának nagyságrendjét. Járjunk el az alábbi lépések szerint:

(a) rajzoljuk meg f-et az I intervallumban,

(b) keressük meg a függvény a pontbeli linearizációját,

(c) rajzoljuk fel együtt f-et és L-et,

(d) szerkesszük meg az $|f(x) - L(x)|$ abszolút hibát az I intervallumon és keressük meg maximális értékét,

(e) a (d) feladatrész grafikonja alapján adjunk meg olyan $\delta > 0$ értéket, amellyel teljesül, hogy

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L(x)| < \varepsilon$$

az $\varepsilon = 0{,}5$, 0,1 és 0,001 értékekre. A δ-becslésünk helyességét ellenőrizzük grafikusan.

67. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$, $[-1, 2]$, $a = 1$

68. $f(x) = \dfrac{x-1}{4x^2+1}$, $\left[-\dfrac{3}{4}, 1\right]$, $a = \frac{1}{2}$

69. $f(x) = x^{2/3}(x-2)$, $[-2, 3]$, $a = 2$

70. $f(x) = \sqrt{x} - \sin x$, $[0, 2\pi]$, $a = 2$

3. fejezet Áttekintő kérdések

1. Mit nevezünk egy f függvény deriváltjának? Hogyan viszonyul f deriváltfüggvényének értelmezési tartománya f értelmezési tartományához?

2. Milyen kapcsolatban áll a derivált a görbék meredekségével, az érintőkkel és a változási sebességgel?

3. Hogyan vázolhatjuk egy függvény deriváltjának grafikonját, ha csupán a függvényértékek táblázata áll rendelkezésünkre?

4. Mikor nevezünk egy nyílt, illetve zárt intervallumon értelmezett függvényt differenciálhatónak?

5. Milyen kapcsolat áll fenn a derivált, valamint a jobb, illetve bal oldali derivált között?

6. Mit jelent geometriai szempontból az, ha egy függvény valamely pontban nem differenciálható?

7. Milyen kapcsolat áll fenn egy függvény valamely pontbeli folytonossága, illetve differenciálhatósága között?

8. Létezik olyan, a $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett függvény, amelynek deriváltja az

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

egységugrásfüggvény?

9. Milyen szabályok könnyítik meg a deriváltak kiszámítását? Adjunk példákat.

10. Igazoljuk, hogy az

(a) $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

(b) $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$

(c) $\dfrac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = \dfrac{du_1}{dx} + \dfrac{du_2}{dx} + \ldots + \dfrac{du_n}{dx}$

szabályok alapján tetszőleges polinomfüggvény deriváltja meghatározható.

11. Az előző feladatban felsoroltakon túl milyen szabály(oka)t kell még csatasorba állítanunk a racionális törtfüggvények deriválásához?

12. Mit nevezünk egy függvény második, harmadik deriváltjának? Hány deriváltja lehet egy függvénynek? Adjunk példákat.

13. Milyen összefüggés áll fenn egy függvény átlagos, illetve pillanatnyi változási sebessége között?

14. Hogyan jelennek meg a deriváltak a mozgás leírásában? Milyen következtetéseket vonhatunk le egy részecske helyzetét megadó függvény deriváltja alapján?

15. Hogyan jelennek meg a deriváltak a gazdaságban?

16. Adjunk példát a deriváltak néhány további alkalmazására.

17. Milyen szerepet játszanak a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h}$ és $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h}$ határértékek a szinusz- és a koszinuszfüggvény deriváltjának meghatározásában? Mi a szinusz- és a koszinuszfüggvény deriváltja?

18. Hogyan határozható meg a szinusz- és a koszinuszfüggvény deriváltjának ismeretében a tangens-, a kotangens-, a szekáns- és a koszekánsfüggvény deriváltja? Melyek ezek a deriváltak?

19. Mely pontokban folytonosak az alapvető trigonometrikus függvények? Honnan tudjuk ezt?

20. Milyen szabály alapján határozhatjuk meg két differenciálható függvény kompozíciójának deriváltját? Adjunk példákat a szabály alkalmazására.

21. Hogyan határozzuk meg egy $x = f(t)$, $y = g(t)$ paraméteres görbe dy/dx meredekségét? Mikor használható a szóban forgó formula? Mikor határozható meg hasonló módon a d^2y/dx^2 második derivált? Adjunk példákat.

22. Hogyan határozható meg a $(d/dx)(u^n)$ derivált, ha n egész szám, u pedig az x változó differenciálható függvénye? Adjunk példákat.

23. Mi az implicit deriválás? Mikor kell ehhez a módszerhez folyamodnunk? Adjunk példákat.

24. Hogyan merül fel a kapcsolt deriváltak problémája?

25. Vázoljuk a kapcsolt deriváltakról szóló feladatok általános megoldási módszerét.

26. Mit nevezünk az $f(x)$ függvény $x = a$ pontbeli $L(x)$ linearizációjának? Milyennek kell lennie az f függvénynek az a helyen ahhoz, hogy a linearizáció létezzen? Hogyan használjuk a linearizációt? Adjunk példákat.

27. Hogyan becsülhetjük meg egy differenciálható f függvény értékének megváltozását, miközben az x független változó a-tól a közeli $a + dx$-ig változik? Hogyan becsülhetjük meg a relatív, illetve a százalékos változást? Adjunk példákat.

3. fejezet Gyakorló feladatok

Deriváltfüggvények meghatározása

Határozzuk meg a megadott függvények deriváltját (1–40. feladatok).

1. $y = x^5 - 0,125x^2 + 0,25x$

2. $y = 3 - 0,7x^3 + 0,3x^7$

3. $y = x^3 - 3(x^2 + \pi^2)$

4. $y = x^7 + \sqrt{7}x - \dfrac{1}{\pi + 1}$

5. $y = (x+1)^2(x^2+2x)$

6. $y = (2x-5)(4-x)^{-1}$

7. $y = (\theta^2 + \sec\theta + 1)^3$

8. $y = \left(-1 - \dfrac{\csc\theta}{2} - \dfrac{\theta^2}{4}\right)^2$

9. $s = \dfrac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$

10. $s = \dfrac{1}{\sqrt{t}-1}$

11. $y = 2\mathrm{tg}^2 x - \sec^2 x$

12. $y = \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{2}{\sin x}$

13. $s = \cos^4(1-2t)$

14. $s = \mathrm{ctg}^3\left(\dfrac{2}{t}\right)$

15. $s = (\sec t + \mathrm{tg}\, t)^5$

16. $s = \csc^5(1 - t + 3t^2)$

17. $r = \sqrt{2\theta \sin\theta}$

18. $r = 2\theta\sqrt{\cos\theta}$

19. $r = \sin\sqrt{2\theta}$

20. $r = \sin(\theta + \sqrt{\theta+1})$

21. $y = \dfrac{1}{2}x^2 \csc\dfrac{2}{x}$

22. $y = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$

23. $y = x^{-1/2}\sec(2x)^2$

24. $y = \sqrt{x}\csc(x+1)^3$

25. $y = 5\mathrm{ctg}\, x^2$

26. $y = x^2\mathrm{ctg}\, 5x$

27. $y = x^2\sin^2(2x^2)$

28. $y = x^{-2}\sin^2(x^3)$

29. $s = \left(\dfrac{4t}{t+1}\right)^{-2}$

30. $s = \dfrac{-1}{15(15t-1)^3}$

31. $y = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$

32. $y = \left(\dfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\right)^2$

33. $y = \sqrt{\dfrac{x^2+x}{x^2}}$

34. $y = 4x\sqrt{x+\sqrt{x}}$

35. $r = \left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta - 1}\right)^2$

36. $r = \left(\dfrac{1+\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)^2$

37. $y = (2x+1)\sqrt{2x+1}$

38. $y = 20(3x-4)^{1/4}(3x-4)^{-1/5}$

39. $y = \dfrac{3}{(5x^2 + \sin^2 x)^{3/2}}$

40. $y = (3 + \cos^3 3x)^{-1/3}$

Implicit deriválás

Határozzuk meg a dy/dx deriváltat (41–48. feladatok).

41. $xy + 2x + 3y = 1$

42. $x^2 + xy + y^2 - 5x = 2$

43. $x^3 + 4xy + y^{4/3} = 2x$

44. $5x^{4/5} + 10y^{6/5} = 15$

45. $\sqrt{xy} = 1$

46. $x^2y^2 = 1$

47. $y^2 = \dfrac{x}{x+1}$

48. $y^2 = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

Határozzuk meg a dp/dq deriváltat (49–50. feladatok).

49. $p^3 + 4pq - 3q^2 = 2$

50. $q = (5p^2 + 2p)^{-3/2}$

Határozzuk meg a dr/ds deriváltat (51–52. feladatok).

51. $r\cos 2s + \sin^2 s = \pi$

52. $2rs - r - s + s^2 = -3$

53. Az implicit deriválás módszerével adjuk meg a d^2y/dx^2 második deriváltat:

(a) $x^3 + y^3 = 1$ **(b)** $y^2 = 1 - \frac{2}{x}$

54. Legyen $x^2 - y^2 = 1$. Igazoljuk, hogy

(a) $dy/dx = x/y$, és hogy

(b) $d^2y/dx^2 = -1/y^3$.

Deriváltak meghatározása a megfelelő numerikus adatok alapján

55. A táblázatban az f és a g függvény $x = 0$ és $x = 1$ helyen felvett értékeit és deriváltjait tüntettük fel.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	−3	1/2
1	3	5	1/2	−4

Határozzuk meg az alábbi függvények első deriváltjának értékét a megadott helyen:

(a) $6f(x) - g(x), x = 1$

(b) $f(x)g^2(x), \quad x = 0$

(c) $\dfrac{f(x)}{g(x)+1}, \quad x = 1$

(d) $f(g(x)), \quad x = 0$

(e) $g(f(x)), \quad x = 0$

(f) $(x + f(x))^{3/2}, \quad x = 1$

(g) $f(x + g(x)), \quad x = 0$

56. A táblázatban az f és az f' függvény értékeit tüntettük fel, az $x=0$ és az $x=1$ helyen.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	9	-2
1	-3	$1/5$

Határozzuk meg az alábbi függvények első deriváltjának értékét a megadott helyen.

(a) $\sqrt{x}f(x)$, $x=1$ **(b)** $\sqrt{f(x)}$, $x=0$

(c) $f(\sqrt{x})$, $x=1$ **(d)** $f(1-5\operatorname{tg}x)$, $x=0$

(e) $\dfrac{f(x)}{2+\cos x}$, $x=0$ **(f)** $10\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)f^2(x)$, $x=1$

57. Határozzuk meg a dy/dt derivált értékét a $t=0$ helyen, ha $y=3\sin x$ és $x=t^2+\pi$.

58. Határozzuk meg a ds/du derivált értékét az $u=2$ helyen, ha $s=t^2+5t$ és $t=(u^2+2u)^{1/3}$.

59. Határozzuk meg a dw/ds derivált értékét az $s=0$ helyen, ha $w=\sin(\sqrt{r}-2)$ és $r=8\sin(s+\pi/6)$.

60. Határozzuk meg a dr/dt derivált értékét a $t=0$ helyen, ha $r=(\theta^2+7)^{1/3}$ és $\theta^2 t+\theta=1$.

61. Adjuk meg d^2y/dx^2 értékét a $(0,1)$ pontban, ha $y^3+y=2\cos x$.

62. Adjuk meg a d^2y/dx^2 második derivált értékét a $(8,8)$ pontban, ha $x^{1/3}+y^{1/3}=4$.

A derivált definíciója

A derivált definíciója alapján határozzuk meg a megadott függvény deriváltját (63–64. feladatok).

63. $f(t)=\dfrac{1}{2t+1}$ **64.** $g(x)=2x^2+1$

65. **(a)** Ábrázoljuk az

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\le x<0\\ -x^2, & 0\le x\le 1\end{cases}$$

függvény grafikonját.

(b) Folytonos-e f az $x=0$ helyen?

(c) Differenciálható-e f az $x=0$ helyen?

Indokoljuk válaszunkat.

66. **(a)** Ábrázoljuk az

$$f(x)=\begin{cases}x, & -1\le x<0\\ \operatorname{tg}x, & 0\le x\le \pi/4\end{cases}$$

függvény grafikonját.

(b) Folytonos-e f az $x=0$ helyen?

(c) Differenciálható-e f az $x=0$ helyen?

Indokoljuk válaszunkat.

67. **(a)** Ábrázoljuk az

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\end{cases}$$

függvény grafikonját.

(b) Folytonos-e f az $x=1$ helyen?

(c) Differenciálható-e f az $x=1$ helyen?

Indokoljuk válaszunkat.

68. **(a)** Vannak-e az m konstansnak olyan értékei (és ha igen, melyek azok), amelyekkel az

$$f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\le 0\\ mx, & x>0\end{cases}$$

függvény

(b) folytonos az $x=0$ helyen?

(c) differenciálható az $x=0$ helyen?

Indokoljuk válaszunkat.

Meredekség, érintő, normális

69. Adott meredekségű érintő. Van-e olyan pontja az $y=x/2+1/(2x-4)$ egyenletű görbének, amelyben a görbe meredeksége $-3/2$? Ha van, adjuk meg valamennyit.

70. Adott meredekségű érintő. Van-e olyan pontja az $y=x+1/(2x)$ egyenletű görbének, amelyben a görbe meredeksége 3? Ha van, adjuk meg valamennyit.

71. Vízszintes érintő. Adjuk meg az $y=2x^3-3x^2-12x+20$ egyenletű görbének azokat a pontjait, amelyekben a görbe érintője párhuzamos az x-tengellyel.

72. Az érintő tengelymetszetei. Hol metszi az x-, illetve az y-tengelyt az $y=x^3$ egyenletű görbét a $(-2,8)$ pontban érintő egyenes?

73. Adott egyenessel párhuzamos, illetve rá merőleges érintők. Határozzuk meg az $y=2x^3-3x^2-12x+20$ egyenletű görbe azon pontjait, amelyekben a görbe érintője

(a) merőleges az $y=1-(x/24)$ egyenletű egyenesre;

(b) párhuzamos az $y=\sqrt{2}-12x$ egyenletű egyenessel.

74. Merőleges érintők. Igazoljuk, hogy az $y=(\pi\sin x)/x$ egyenletű görbét az $x=\pi$, illetve az $x=-\pi$ abszcisszájú pontokban érintő egyenesek egymásra merőlegesek.

75. Adott egyenessel párhuzamos normális. Keressük meg az $y=\operatorname{tg}x$ egyenletű görbe azon, a $(-\pi/2,\pi/2)$ intervallumba eső abszcisszájú pontjait, amelyekben a görbe normálisa párhuzamos az $y=-x/2$ egyenletű egyenessel. Vázoljuk közös koordináta-rendszerben a görbét és a normálist.

76. Érintő és normális. Írjuk fel az $y=1+\cos x$ egyenletű görbe $(\pi/2,1)$ pontbeli érintőjének és normálisának egyenletét. Vázoljuk a görbét és a két egyenest közös koordinátarendszerben.

77. Egyenest érintő parabola. Határozzuk meg a C állandó értékét, ha az $y=x^2+C$ egyenletű parabola és az $y=x$ egyenletű egyenes érintik egymást.

78. Érintő meredeksége. Igazoljuk, hogy az $y=x^3$ egyenletű görbe (a,a^3) pontbeli érintője a görbét még egyszer metszi, méghozzá egy olyan pontban, ahol a görbe meredeksége négyszer akkora, mint az (a,a^3) pontban.

79. Érintő. A c paraméter mely értéke mellett érinti az $y=c/(x+1)$ görbét a $(0,3)$ és az $(5,-2)$ pontokra illeszkedő egyenes?

80. Kör normálisa. Igazoljuk, hogy az $x^2+y^2=a$ egyenletű kör minden normálisa átmegy az origón.

Implicit függvény érintője és normálisa

Határozzuk meg a görbék adott pontbeli érintőjét, illetve normálisát (81–86. feladatok).

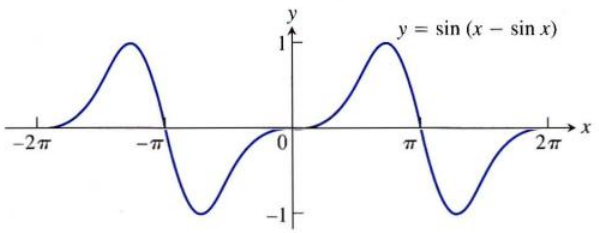
81. $x^2+2y^2=9,\ (1,2)$ **82.** $x^3+y^2=2,\ (1,1)$

83. $xy+2x-5y=2,\ (3,2)$ **84.** $(y-x)^2=2x+4,\ (6,2)$

85. $x+\sqrt{xy}=6,\ (4,1)$ **86.** $x^{3/2}+2y^{3/2}=17,\ (1,4)$

87. Határozzuk meg az $x^3y^3+y^2=x+y$ egyenletű görbe meredekségét az $(1,1)$ és az $(1,-1)$ pontban.

88. Az ábra szerint elképzelhető, hogy az $y=\sin(x-\sin x)$ egyenletű görbének az x-tengely valamely pontjában vízszintes az érintője. Csal-e a látszat? Indokoljuk válaszunkat.



Paraméteres görbék érintője

Írjuk fel a görbéket a t paraméter megadott értékéhez tartozó pontban érintő egyenes egyenletét. Határozzuk meg ebben a pontban a d^2y/dx^2 második derivált értékét is (89–90. feladatok).

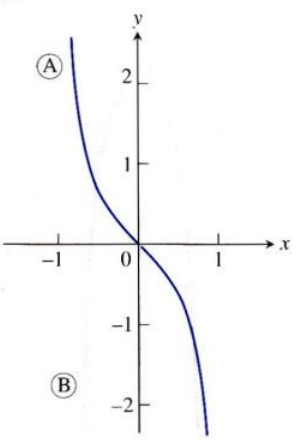
89. $x=(1/2)\operatorname{tg}t,\ y=(1/2)\sec t;\ \ t=\pi/3$

90. $x=1+1/t^2,\ y=1-3/t;\ \ t=2$

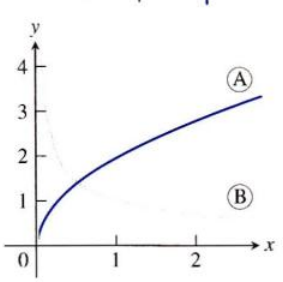
Grafikonok vizsgálata

A 91. és a 92. feladatban két függvény grafikonját tanulmányozhatjuk; a függvények közül az egyik a másik deriváltja. Melyik melyik?

91.



92.

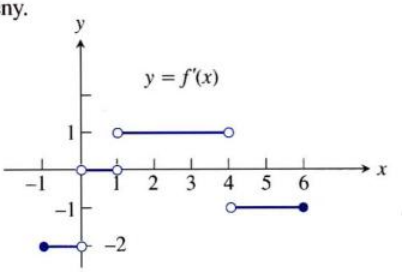


93. Vázoljuk a $[-1,6]$ zárt intervallumon értelmezett $y=f(x)$ függvény grafikonját az alábbi információk alapján.

i. Az f függvény grafikonja egymáshoz kapcsolódó egyenes szakaszokból áll.

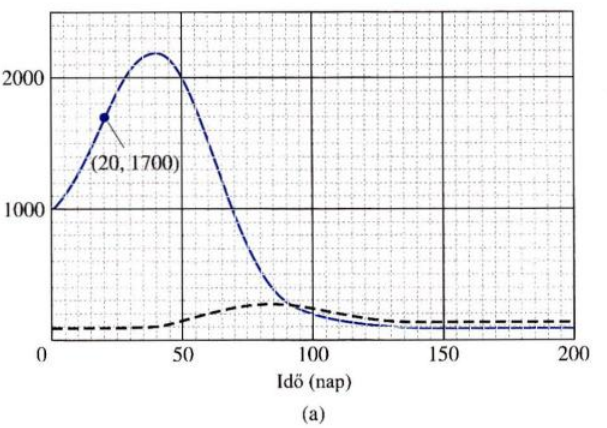
ii. A grafikon kezdőpontja a $(-1,2)$ pont.

iii. A függvény deriváltfüggvénye az ábrán látható lépcsős függvény.

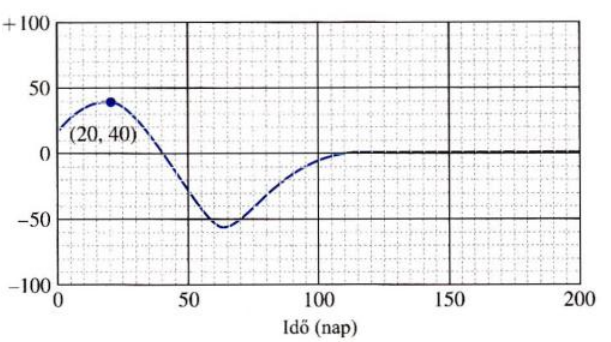


94. Ugyanaz, mint az előző feladat, de f grafikonjának kezdőpontja most nem a $(-1,2)$, hanem a $(-1,0)$ pont.

A 95. és a 96. feladatban egy sarkvidéki élőhely nyúl- és rókapopulációjának alakulását vizsgáljuk. Az adatok 200 napos időtartamot ölelnek fel. Kezdetben a nyulak száma 1000, a rókáké pedig 40; a nyulak száma eleinte növekszik, a rókák azonban hamar rákapnak a nyúlhúsra, így a nyúlpopuláció zsugorodni kezd. A (b) ábra a nyulak számának (idő szerinti) deriváltját mutatja.



(a)



A nyulak számának deriváltja

(b)

3.53. ÁBRA: Sarkvidéki nyúl- és rókapopuláció létszámának alakulása.

95. **(a)** Mennyi a nyúlpopuláció létszámát megadó függvény deriváltjának értéke, amikor a populáció a legnagyobb? És amikor a legkisebb?

(b) Hány tagú a nyúlpopuláció, amikor a szóban forgó derivált a legnagyobb? És amikor a legkisebb?

96. Milyen egységekben célszerű megadnunk a nyúl-, illetve rókapopuláció létszámának időbeli alakulását mutató függvény meredekségét?

Trigonometrikus határértékek

97. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x^2 - x}$

98. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x - \operatorname{tg} 7x}{2x}$

99. $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\sin r}{\operatorname{tg} 2r}$

100. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin(\sin\theta)}{\theta}$

101. $\lim\limits_{\theta\to(\pi/2)^-} \dfrac{4\operatorname{tg}^2\theta + \operatorname{tg}\theta + 1}{\operatorname{tg}^2\theta + 5}$

102. $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{1 - 2\operatorname{ctg}^2\theta}{5\operatorname{ctg}^2\theta - 7\operatorname{ctg}\theta - 8}$

103. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{2 - 2\cos x}$

104. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{1 - \cos\theta}{\theta^2}$

Hogyan kell kiterjeszteni a függvényeket, hogy az $x = 0$ helyen folytonosak legyenek (105–106. feladatok)?

105. $g(x) = \dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}$

106. $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)}{\sin(\sin x)}$

Kapcsolt deriváltak

107. Henger felszíne. Ha egy henger alapkörének sugara r, magassága pedig h, akkor felszíne: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

(a) Milyen összefüggés áll fenn a dS/dt és a dr/dt deriváltak között, amennyiben h állandó?

(b) Milyen összefüggés áll fenn a dS/dt és a dh/dt deriváltak között, amennyiben r állandó?

(c) Milyen összefüggés áll fenn a dS/dt, valamint a dh/dt és dr/dt deriváltak között, amennyiben sem h, sem r nem állandó?

(d) Milyen összefüggés áll fenn a dr/dt és a dh/dt deriváltak között, amennyiben S állandó?

108. Kúppalást felszíne. Ha egy egyenes körkúp alapkörének sugara r, magassága pedig h, akkor felszíne: $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$.

(a) Milyen összefüggés áll fenn a dS/dt és a dr/dt deriváltak között, amennyiben h állandó?

(b) Milyen összefüggés áll fenn a dS/dt és a dh/dt deriváltak között, amennyiben r állandó?

(c) Milyen összefüggés áll fenn a dS/dt, valamint a dh/dt és dr/dt deriváltak között, amennyiben sem h, sem r nem állandó?

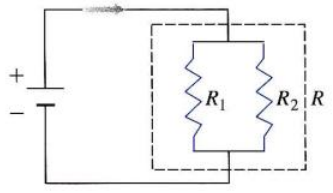
109. Körterület változása. Egy kör sugarának változási sebessége $-2/\pi$ m/s. Mekkora a kör területének változási sebessége abban a pillanatban, amikor $r = 10$ m?

110. Kocka élhossza. Amikor az éle 20 cm hosszú, egy kocka térfogatának változási sebessége 1200 cm^3/s. Mekkora ebben a pillanatban az él változási sebessége?

111. Párhuzamos ellenállás. A párhuzamosan kapcsolt R_1 és R_2 ellenállások R eredője a

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

képlet alapján határozható meg.



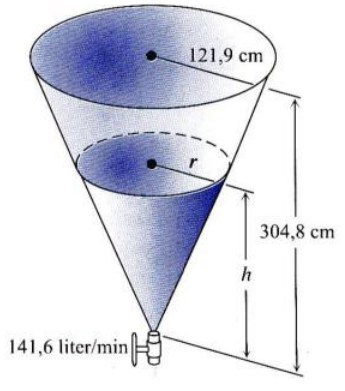
Tegyük fel, hogy az R_1 ellenállás 1Ω/s ütemben csökken, R_2 pedig 0,5Ω/s ütemben növekszik. Mekkora az R eredő ellenállás változási sebessége, amikor $R_1 = 75\Omega$ és $R_2 = 50\Omega$?

112. Impedancia soros kapcsolás esetén. Egy áramkör Z impedanciája, R ellenállása és X reaktanciája között fennáll a $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ összefüggés. Az R ellenállás 3Ω/s ütemben növekszik, az X reaktancia pedig 2Ω/s ütemben csökken. Mekkora a Z impedancia változási sebessége, amikor $R = 10\Omega$ és $X = 20\Omega$?

113. Mozgó részecske sebessége. Az xy-síkban mozgó test x- és y-koordinátája egyaránt a t idő differenciálható függvénye; $dx/dt = 10$ m/s, $dy/dt = 5$ m/s. Milyen sebességgel távolodik a részecske az origótól, amikor áthalad az $(3, -4)$ ponton?

114. Részecske mozgása. Az $y = x^{3/2}$ egyenletű görbe mentén – az első síknegyedben – mozgó részecske másodpercenként 11 egységgel távolodik az origótól. Határozzuk meg a dx/dt derivált értékét abban a pillanatban, amikor $x = 3$.

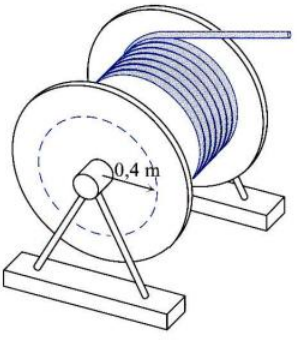
115. Tartály leengedése. Az ábrán látható kúp alakú tartályból percenként 141,6 liter víz folyik ki.



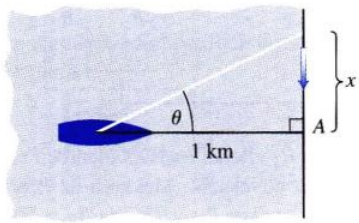
(a) Milyen összefüggés áll fenn a h és r változók között?

(b) Milyen gyorsan csökken a tartályban lévő víz szintje, amikor $h = 182,3$ cm?

116. Kábelfektetés. Az ábrán látható, 1,2 láb sugarú orsóról tekeredik le a traktor által húzott televíziókábel. Mekkora az orsó szögsebessége, ha a traktor 6 láb/s sebességgel halad? [Útmutatás: miközben az orsó θ szöggel elfordul, $s = r\theta$ hosszúságú kábel tekeredik le róla (amennyiben θ-t radiánban mérjük).]



117. Hajóreflektor. A parttól 1 kilométerre lévő hajó fényszórója $d\theta/dt = -0,6$ rad/s sebességgel forog.



(a) Milyen gyorsan mozog a fénykéve a parton abban a pillanatban, amikor keresztülhalad az ábrán feltüntetett A ponton?

(b) Hányat fordul percenként a keresőfény?

118. Mozgó pontok a koordináta-rendszerben. Az A pont az x-, a B pont az y-tengely mentén mozog úgy, hogy az AB szakasz origótól való távolsága állandó marad. Mekkora az OA távolság (előjeles!) változási sebessége, amikor $OB = r$, a B pont pedig $0,3r$ m/s sebességgel halad az origó felé?

Linearizáció

119. Határozzuk meg

(a) a tangensfüggvény;

(b) a szekánsfüggvény

linearizációját az $x = -\pi/4$ helyen.

120. Az $f(x) = 1/(1+\operatorname{tg} x)$ függvényhez az

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} x \approx 1-x$$

közelítések alapján a jól használható

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg} x} \approx 1-x$$

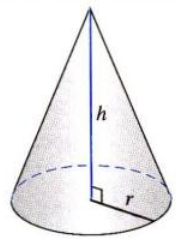
lineáris approximációt kapjuk. Igazoljuk, hogy a kapott formula megegyezik az $f(x)$ függvény $x = 0$ helyen vett lineáris approximációjával.

121. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{1+x} + \sin x - 0,5$ függvény $x = 0$ helyen vett linearizációját.

122. Határozzuk meg az $f(x) = 2/(1-x) + \sqrt{1+x} - 3,1$ függvény $x = 0$ helyen vett linearizációját.

Változás becslése differenciálokkal

123. Kúppalást felszíne. Írjunk fel olyan formulát, amely megadja, hogy mennyivel változik a kúp V térfogata, illetve palástjának S felszíne, ha a kúp magassága h_0-ról $h_0 + \Delta h$-ra változik, az alapkör r sugara viszont állandó marad?



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

(palástfelszín)

124. Az ellenőrzés hibája.

(a) Milyen pontossággal kell megmérnünk egy kocka élének hosszát, hogy a kocka felszínét 2 százaléknál kisebb hibával adhassuk meg?

(b) Tegyük fel, hogy a kocka élét sikerült az (a) feladatban megkövetelt pontossággal megmérnünk. Hány százalékos pontossággal adhatjuk meg ennek alapján a kocka térfogatát?

125. Hibaterjedés. Egy gömbi főkör hosszát 10 cm-nek mértük, a mérés hibája nem haladja meg a 0,4 cm-t. A mérési eredmény alapján kiszámítjuk a gömb sugarát, a sugár alapján pedig meghatározzuk a gömb felszínét és térfogatát. Mekkora lesz

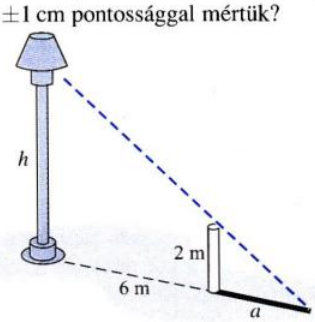
(a) a sugár,

(b) a felszín és

(c) a térfogat

százalékos hibája?

126. Lámpaoszlop magassága. Az ábrán látható lámpaoszlop magasságát az oszloptól 6 méter távolságra álló 2 méter hosszúságú rúd a hosszúságú árnyéka alapján határozzuk meg. Mennyi és milyen (százalékos) hibahatáron belül mozog a lámpaoszlop hossza, ha a-t ± 1 cm pontossággal mértük?



3. fejezet Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. A $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ egyenlőséget azonosságnak nevezzük, mivel tetszőleges θ szög esetén igaz. A $\sin\theta=0,5$ egyenlet ezzel szemben csak meghatározott θ-k esetén igaz. Egy trigonometrikus azonosság deriválásával kapott egyenlőség szintén azonosság.

Deriváljuk az alábbi azonosságokat, és ellenőrizzük, valóban azonosságokat kapunk-e.

(a) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

(b) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

2. Azonosságot kapunk-e, ha a $\sin(x+a) = \sin x\cos a + \cos x\sin a$ azonosságot x szerint deriváljuk? Alkalmazható-e az elv az $x^2-2x-8=0$ egyenletre? Indokoljuk válaszunkat.

3. **(a)** Adjuk meg a, b és c értékét úgy, hogy az $f(x)=\cos x$ és a $g(x)=a+bx+cx^2$ függvényekre teljesüljenek az

$$f(0)=g(0), \quad f'(0)=g'(0) \quad \text{és} \quad f''(0)=g''(0)$$

egyenletek.

(b) Adjuk meg b és c értékét, hogy az $f(x)=\sin(x+a)$ és a $g(x)=b\sin x+c\cos x$ függvényekre teljesüljenek az

$$f(0)=g(0) \quad \text{és} \quad f'(0)=g'(0)$$

egyenletek.

(c) Mi a helyzet a harmadik és negyedik deriváltakkal? Teljesülnek-e rájuk is az egyenlőségek?

4. **Differenciálegyenletek megoldása.**

(a) Igazoljuk, hogy az $y=\sin x$, az $y=\cos x$ és $y=\sin x+\cos x$ függvények egyaránt kielégítik az

$$y''+y=0$$

egyenletet.

(b) Hogyan kellene módosítani az (a) pontban megadott függvényeket, hogy az

$$y''+4y=0$$

egyenlet megoldásait kapjuk? Általánosítsuk az eredményt.

5. **Simulókör.** Adjuk meg h, k és a értékét úgy, hogy az $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ egyenletű kör úgy érintse az $y=x^2+1$ egyenletű parabolát az $(1,2)$ pontban, hogy ebben a pontban a két görbe d^2y/dx^2 második deriváltjai is megegyezzenek. Az ilyen tulajdonságú kört *simulókörnek* nevezzük.

6. **Határbevétel.** Egy 60 férőhelyes busszal utazók x száma és a p jegyár között fennáll a $p=[3-(x/4)]^2$ összefüggés. Mennyi az utazási iroda teljes $r(x)$ bevétele? Hány utas esetén válik a dr/dx határbevétel nullává? Mennyi az ennek megfelelő jegyár? (Ez a maximális bevételt adó jegyár. Elképzelhető tehát, hogy a társaságnak változtatnia kell az árképzési módszerén.)

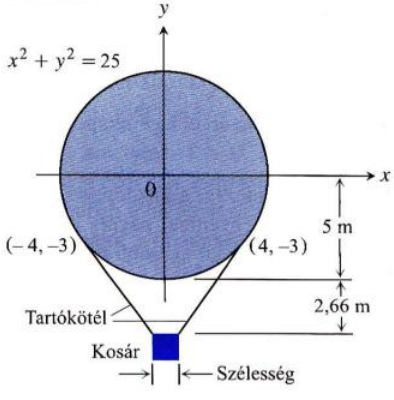
7. **Ipari termelés.**

(a) A közgazdászok a *növekedési sebességről* gyakran nem abszolút, hanem relatív értelemben beszélnek. Legyen például egy iparágban foglalkoztatott munkások száma a t időpontban $u=f(t)$. (Az f függvényt differenciálható függvénynek tekintjük annak ellenére, hogy valójában egész számokon értelmezett lépcsős függvény.)

Legyen $v=g(t)$ egy dolgozó átlagos teljesítménye (a termelékenység) a t időpontban. A teljes termelés ekkor $y=uv$. Határozzuk meg y éves változási sebességét, ha a foglalkoztatottak száma 4 százalékkal ($du/dt=0,04u$), az egy főre jutó teljesítmény pedig 5 százalékkal ($dv/dt=0,04v$) növekszik.

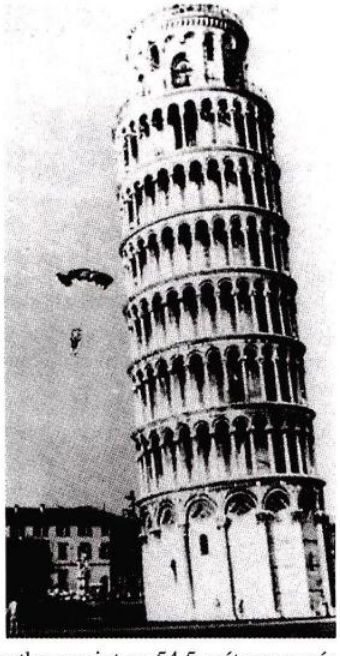
(b) Hogyan változik y abban az évben, amelyben a foglalkoztatottak száma 2 százalékkal csökken, a termelékenység viszont 3 százalékkal növekszik?

8. **Léggömbkosár tervezése.** A tervező azt szeretné, hogy a 10 méter átmérőjű léggömb kosarának teteje 2,67 méter távolságra legyen a léggömb aljától (l. az ábrát). Az ábrán két tartókötél látható; az érintési pontok: $(-4,-3)$ és $(4,-3)$. Milyen széles legyen a kosár?



NEM MÉRETARÁNYOS

9. **Ejtőernyős ugrás a pisai ferde toronyból.** A fényképen Mike McCarthy látható, amint 1988. augusztus 5-én ejtőernyővel leugrik a pisai ferde torony tetejéről. Készítsük el az ugrás közbeni sebességének vázlatos grafikonját. (A pisai ferde torony 54,5 méter magas.)



A londoni McCarthy szerint az 54,5 méteres ugrás akkor világrekordnak számított az alacsony magasságú ejtőernyős ugrások között. [Forrás: *Boston Globe*, 1988. aug. 6.]

10. Mozgó részecske. Egy részecske az x-tengely mentén mozog, helyzetét a $t \geq 0$ időpontban az

$$s = 10\cos(t+\pi/4)$$

függvény adja meg.

(a) Hol van a részecske a $t = 0$ időpontban?

(b) Melyek azok a negatív, illetve pozitív koordinátájú pontok, amelyekben a részecske origótól való távolsága a legnagyobb?

(c) Mekkora a részecske sebessége, illetve gyorsulása ezekben a pontokban?

(d) Melyik pillanatban érkezik meg a részecske először az origóba?

11. Gémkapocs fellövése.

(a) Egy gémkapcsot – például egy befőttesgumi segítségével – a Földön akár 20 m/s sebességgel is fellőhetünk. A „kilövés" után t másodperccel a gémkapocs $s = 20t - 4,9t^2$ méter magasságban van a kezünk felett.

(b) Mennyi idő múlva éri el a gémkapocs a maximális magasságot?

(c) A Holdon ugyanezzel a kezdősebességgel a gémkapcsot $s = 20t - 0,8t^2$ egyenletű pályára küldhetjük. Mennyi idő alatt éri el pályája legmagasabb pontját, és milyen magasra emelkedik itt a gémkapocs?

12. Két részecske. Az ugyanazon koordinátatengely mentén mozgó két részecske helyzetét az $s_1 = 3t^3 - 12t^2 + 18t + 5$ és az $s_2 = -t^3 + 9t^2 - 12t$ függvény adja meg (az időt mindkét esetben másodpercben, a távolságot pedig méterben mérjük). Mikor lesz a két részecske sebessége egyenlő?

13. Részecske sebessége. Az m tömegű részecske az x-tengely mentén mozog. A részecske v sebessége és x helyzete között fennáll a

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}k(x_0^2 - x^2)$$

összefüggés, amelyben k, v_0 és x_0 állandók. Mutassuk meg, hogy minden olyan pontban, ahol $v \neq 0$,

$$m\frac{dv}{dt} = -kx.$$

14. Átlagos és pillanatnyi sebesség.

(a) Tegyük fel, hogy egy részecske helyzetét a t időpontban az $x = At^2 + Bt + C$ másodfokú függvény adja meg. Igazoljuk, hogy a részecske átlagsebessége tetszőleges $[t_1, t_2]$ intervallumon megegyezik az intervallum felezőpontjabeli pillanatnyi sebességével.

(b) Mi az (a)-ban bizonyított tény geometriai jelentése?

15. Az m és a b paraméterek mely értéke mellett lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < \pi \\ mx + b, & x \geq \pi \end{cases}$$

függvény az $x = \pi$ helyen

(a) folytonos;

(b) differenciálható?

16. Differenciálható-e az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

függvény az $x = 0$ helyen? Válaszunkat indokoljuk.

17. (a) Az a és a b paraméterek mely értéke mellett lesz az

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

függvény mindenütt differenciálható?

(b) Mit jelent ez az f függvény grafikonjára nézve?

18. (a) Az a és a b paraméterek mely értéke mellett lesz a

$$g(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq -1 \\ ax^3 + x + 2b, & x > -1 \end{cases}$$

függvény mindenütt differenciálható?

(b) Mit jelent ez a g függvény grafikonjára nézve?

19. Páratlan differenciálható függvény. Mit mondhatunk egy páratlan differenciálható függvény deriváltfüggvényéről? Indokoljuk válaszunkat.

20. Páros differenciálható függvény. Mit mondhatunk egy páros differenciálható függvény deriváltfüggvényéről? Indokoljuk válaszunkat.

21. Tegyük fel, hogy az f és a g függvény mindenütt értelmezett egy az x_0 pontot tartalmazó nyílt intervallumon, f az x_0 pontban differenciálható, $f(x_0) = 0$, a g függvény pedig folytonos az x_0 helyen. Igazoljuk, hogy ekkor az fg függvény differenciálható az x_0 helyen. Eszerint tehát az $x|x|$ szorzatfüggvény a 0 helyen annak ellenére differenciálható, hogy $|x|$ nem ilyen .

22. (*Az előző feladat folytatása.*) Igazoljuk, hogy az alábbi függvények mind differenciálhatók az $x = 0$ helyen.

(a) $|x|\sin x$

(b) $x^{2/3}\sin x$

(c) $\sqrt[3]{x}(1-\cos x)$

(d) $h(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

23. Folytonos-e a

$$h(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

függvény deriváltja az $x = 0$ helyen? És a $k(x) = xh(x)$ függvény deriváltja? Indokoljuk válaszunkat.

24. Tegyük fel, hogy az f függvényre minden x és y valós számra teljesülnek a következők:

i. $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$;

ii. $f(x) = 1 + xg(x)$, ahol $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$.

Igazoljuk, hogy az f függvény a teljes valós számegyenesen differenciálható, és minden x-re $f'(x) = f(x)$.

25. A szorzatszabály általánosítása. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy ha az u_k függvény minden $1 \le k \le n$ esetén differenciálható, akkor az $y = u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n$ szorzatfüggvény (ahol csak értelmezett, mindenütt) differenciálható és

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du_1}{dx} u_2 \cdot \ldots \cdot u_n + u_1 \frac{du_2}{dx} \cdot \ldots \cdot u_n + \ldots + u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_{n-1} \frac{du_n}{dx}.$$

26. A Leibniz-szabály magasabb rendű deriváltakkal. Két differenciálható függvény szorzatának magasabb rendű deriváltjait a Leinbniz-szabály szerint határozhatjuk meg:

(a) $$\frac{d^2(uv)}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2}v + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + u\frac{d^2v}{dx^2},$$

(b) $$\frac{d^3(uv)}{dx^3} = \frac{d^3u}{dx^3}v + 3\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dv}{dx} + 3\frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} + u\frac{d^3v}{dx^3},$$

(c) $$\frac{d^n(uv)}{dx^n} = \frac{d^nu}{dx^n}v + n\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{dv}{dx} + \ldots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}}\frac{d^kv}{dx^k} + \ldots + u\frac{d^nv}{dx^n}.$$

Az (a) és (b) pontbeli képletek a (c) általános tétel speciális esetei. Igazoljuk a (c) állítást teljes indukcióval; használjuk fel a

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \frac{m!}{k!(m-k)!} + \frac{m!}{(k+1)!(m-k-1)!}$$

összefüggést.

27. Órainga lengésideje. Egy órainga T lengésidejét (másodpercekben) a $T^2 = 4\pi^2 L/g$ összefüggés adja meg, amelyben $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, L pedig az inga hossza méterben. Határozzuk meg közelítőleg

(a) az egy másodperc lengésidejű inga hosszát,

(b) a T lengésidő dT megváltozását, amennyiben ezt az ingát 0,1 cm-rel meghosszabbítjuk, és

(c) a (b) részbeli periódusidő-változás által egy nap alatt okozott késést.

28. Jégkocka olvadása. Tegyük fel, hogy egy olvadó jégkocka mindvégig megőrzi kockaalakját. Ha a kocka éle s hosszúságú, akkor térfogata $V = s^3$, felszíne pedig $A = 6s^2$. Tegyük fel továbbá, hogy V és s egyaránt az idő differenciálható függvénye, valamint hogy a kocka térfogata minden pillanatban a felületével arányos ütemben csökken. (Az utóbbi feltevés ésszerűnek tűnik, elvégre az olvadás a kocka felszínén megy végbe, így minél nagyobb a felület, annál több jég olvad fel egységnyi idő alatt.) Matematikailag az összefüggést a

$$\frac{dV}{dt} = -k \cdot (6s^2)$$

egyenlet fejezi ki, amelyben $k > 0$, a mínusz előjel pedig azt jelzi, hogy a térfogat csökken. Feltesszük, hogy k az olvadás során állandó. (Valójában több tényezőtől is függ: többek között a a levegő páratartalmától, a hőmérséklettől, a napsugárzástól stb.) Mennyi idő alatt olvad el a jégkocka, ha az első órában V_0 kezdeti térfogata 1/4-ed részét veszítette el?

4. fejezet
A derivált alkalmazásai

ÁTTEKINTÉS Ebben a fejezetben a derivált néhány fontos alkalmazását mutatjuk be. Megtanuljuk, hogyan használhatjuk a deriváltat függvények szélsőértékének megkeresésére, a függvénygrafikon alakjának meghatározására és elemzésére, olyan törtek határértékének kiszámítására, amelyeknek mind a számlálója, mind a nevezője nullához vagy végtelenhez tart, továbbá függvények zérushelyének számszerű meghatározására. Azt is látni fogjuk, hogy a deriváltjából hogyan lehet magát a függvényt rekonstruálni. Ezekhez az eredményekhez javarészt a Lagrange-féle középértéktétel adja a kulcsot, egy olyan tétel, amelynek következményei az integrálszámítás kapujához vezetnek el. Az integrálszámítás az 5. fejezet témája lesz.

4.1. Függvény szélsőértékei

Ebben az alfejezetben megmutatjuk, hogy deriváltjából hogyan lehet felismerni és meghatározni egy folytonos függvény szélsőértékeit. Ennek ismeretében már különféle *optimalizálási feladatokat* is meg tudunk oldani, azaz adott szituációban ki tudjuk választani a megoldás optimális (legjobb) módját.

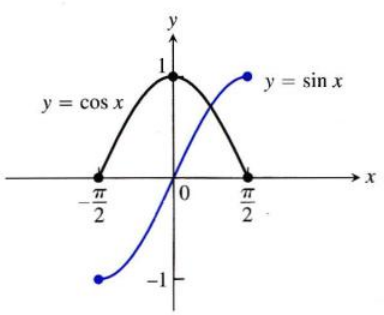
DEFINÍCIÓK **Abszolút maximum, abszolút minimum.**

Legyen f a D halmazon értelmezett függvény. Az f függvénynek a D halmaz valamely c pontjában **abszolút maximuma** van, ha

$$f(x) \leq f(c) \quad \text{minden } x \in D \text{ esetén;}$$

a D halmaz valamely c pontjában **abszolút minimuma** van, ha

$$f(x) \geq f(c) \quad \text{minden } x \in D \text{ esetén.}$$



4.1. ÁBRA: A szinusz- és a koszinuszfüggvény abszolút szélsőértékei a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumon. Ezek az értékek függenek a függvény értelmezési tartományától.

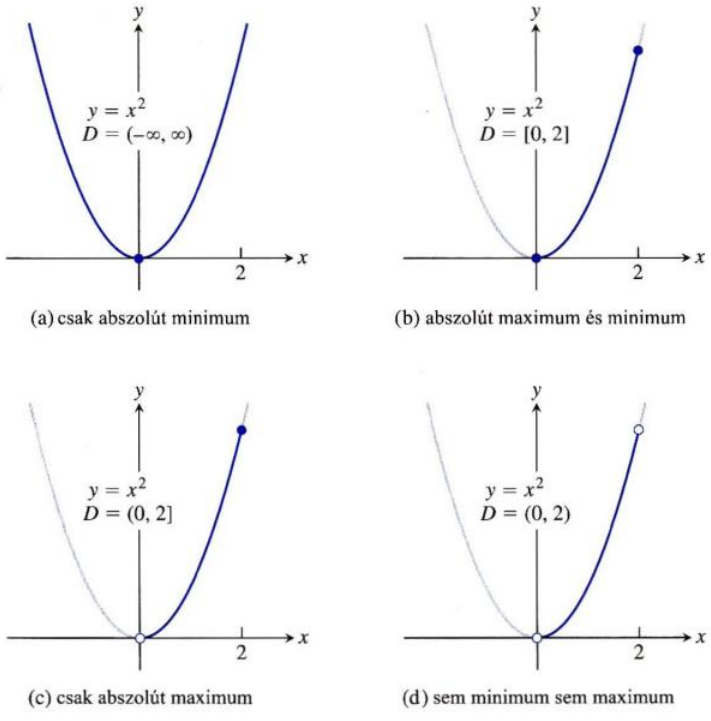
Az abszolút maximumot és minimumot abszolút **szélsőértéknek** (alkalmanként **extrémumnak**) nevezik. Az abszolút szélsőértéket **globális** szélsőértéknek is mondják, megkülönböztetésül a később értelmezendő *lokális szélsőértéktől*.

Például a $[-\pi/2, \pi/2]$ zárt intervallumon az $f(x) = \cos(x)$ függvény abszolút maximuma 1 (azt egyszer veszi fel), abszolút minimuma 0 (és azt kétszer veszi fel). Ugyanezen az intervallumon a $g(x) = \sin(x)$ függvény abszolút maximuma 1, abszolút minimuma pedig -1 (4.1. ábra).

Ugyanazzal a hozzárendelési utasítással megadott függvénynek az értelmezési tartománytól függően más és más lehet az abszolút szélsőértéke.

1. PÉLDA **Az abszolút szélsőérték meghatározása.**

A 4.2. ábrán néhány függvény abszolút szélsőértéke látható.



(a) csak abszolút minimum

(b) abszolút maximum és minimum

(c) csak abszolút maximum

(d) sem minimum sem maximum

4.2. ÁBRA: Az 1. példa grafikonjai.

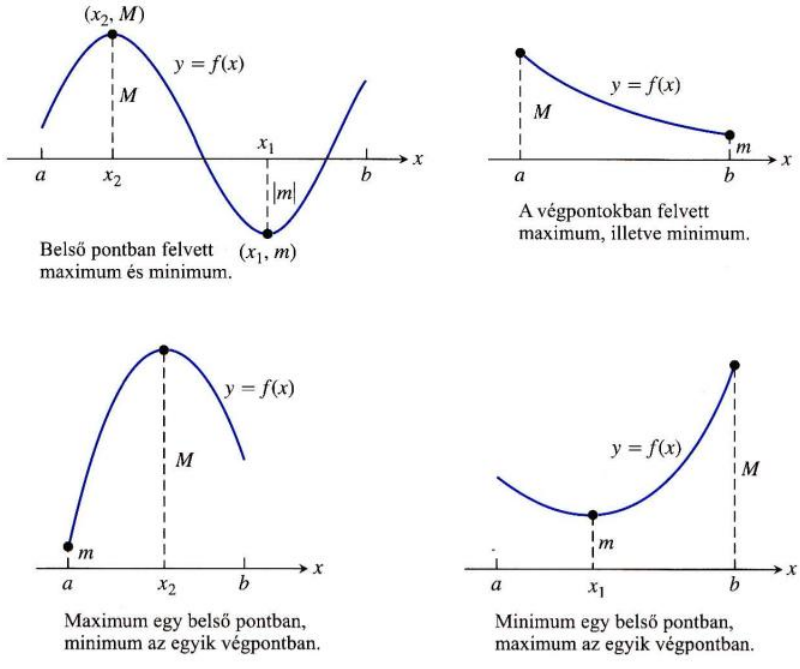
Hozzárendelési szabály	**Értelmezési tartomány (D)**	**Abszolút szélsőérték a D-n**
(a) $y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	Nincs abszolút maximum. Az abszolút minimum 0 az $x = 0$ helyen.
(b) $y = x^2$	$[0, 2]$	Az abszolút maximum 4 az $x = 2$ helyen. Az abszolút minimum 0 az $x = 0$ helyen.
(c) $y = x^2$	$(0, 2]$	Az abszolút maximum 4 az $x = 2$ helyen. Nincs abszolút minimum.
(d) $y = x^2$	$(0, 2)$	Nincs abszolút szélsőérték.

A következő tétel azt mondja ki, hogy egy $[a, b]$ zárt intervallum minden pontjában folytonos függvénynek ezen az intervallumon abszolút maximuma és abszolút minimuma is van. Ezeket az értékeket mindig meg kell keresnünk, amikor egy függvényt ábrázolunk.

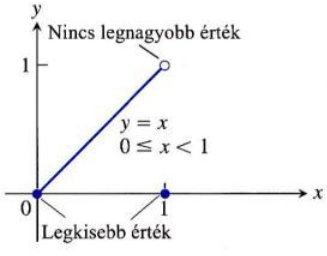
1. TÉTEL **Szélsőértéktétel.**

Ha f folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, akkor itt felveszi M abszolút maximumát és m abszolút minimumát is, van tehát az $[a, b]$ intervallumban olyan x_1 és x_2 szám, amelyekre $f(x_1) = m$ és $f(x_2) = M$, továbbá teljesül, hogy $m \leq f(x) \leq M$ minden más, az $[a, b]$ intervallumhoz tartozó x értékre (4.3. ábra).

A szélsőértéktétel bizonyításához a valós számok struktúrájának (l. a függeléket) alapos ismeretére van szükség, a bizonyítást így célszerűbb, ha a felsőbb analíziskurzusokra hagyjuk. A 4.3. ábra az abszolút szélsőértékek lehetséges elhelyezkedését mutatja az $[a, b]$ zárt intervallumon folytonos függvény esetében. Az $y = \cos x$ függvénynél már megfigyelhettük, hogy az abszolút minimumot (vagy abszolút maximumot) a függvény az intervallum két vagy több különböző pontján is felveheti.



4.3. ÁBRA: Néhány példa az $[a,b]$ zárt intervallumon folytonos függvények maximumára és minimumára.



4.4. ÁBRA: Ha a függvény az intervallumnak akár csak egyetlen pontjában nem folytonos, lehetséges, hogy a függvénynek nem lesz abszolút maximuma vagy abszolút minimuma. Az

$$y = \begin{cases} x, & 0 \le x < 0 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

függvény az $x = 1$ pont kivételével a $[0,1]$ intervallum minden pontjában folytonos, grafikonjának mégsincs legmagasabb pontja a $[0,1]$ intervallum fölött.

Lokális szélsőértékek

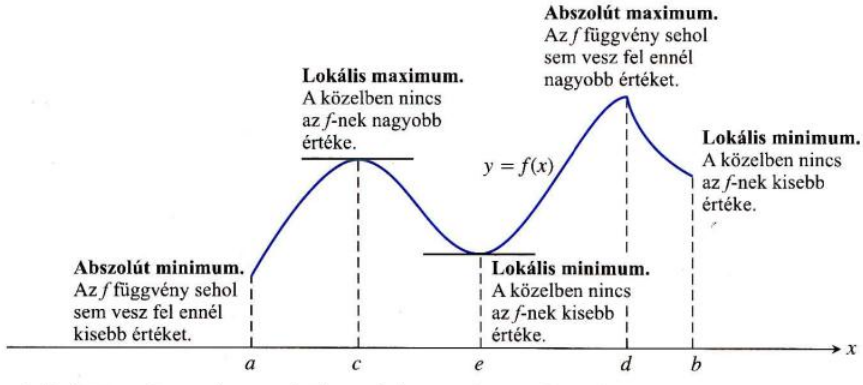
A 4.5. ábra olyan függvény grafikonját mutatja, amelynek az $[a,b]$ intervallumon öt pontban is szélsőértéke van. A függvény abszolút minimuma az a pontban van, bár az e pontnak is van olyan *környezete*, amelyben teljesül, hogy az e helyen vett függvényérték valamennyi között a legkisebb. Hasonlóan: a c ponttól balra a függvény nő, tőle jobbra pedig (eleinte legalábbis) csökken, emiatt a c pont lokális maximum. Abszolút maximumát a függvény a d pontban éri el.

DEFINÍCIÓK Lokális maximum, lokális minimum.

Az f függvénynek értelmezési tartománya valamely c belső pontjában **lokális maximuma** van, ha van olyan, c-t is tartalmazó nyílt intervallum, hogy annak minden x elemére teljesül $f(x) \le f(c)$.

Az f függvénynek értelmezési tartománya valamely c belső pontjában **lokális minimuma** van, ha van olyan, c-t is tartalmazó nyílt intervallum, hogy annak minden x elemére teljesül $f(x) \ge f(c)$.

Az f függvénynek **lokális maximuma** vagy **lokális minimuma** van *az intervallum c végpontjában*, ha a megfelelő egyenlőtlenség fennáll minden olyan x-re, amely az értelmezési tartomány valamely, a c-t is tartalmazó félig nyitott intervallumába esik.



4.5. ÁBRA: A maximumok és a minimumok osztályozása

A 4.5. ábrán látható f függvénynek a c és a d pontokban lokális maximuma, az a, e és b pontokban pedig lokális minimuma van. A lokális szélsőértéket néha *relatív szélsőértéknek* is nevezzük.

Az abszolút maximum egyben lokális maximum is. A legnagyobb függvényértéknél semmilyen környezetben nem vesz fel nagyobb értéket a függvény. Ezért *a lokális maximumok összessége az abszolút maximumot is tartalmazza, amennyiben az létezik.* Hasonlóan: *a lokális minimumok halmazának az abszolút minimum is eleme, amennyiben az utóbbi létezik.*

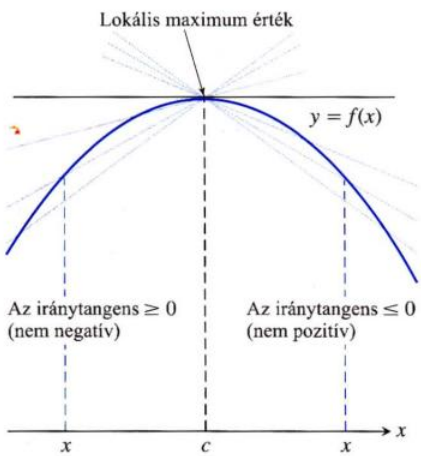
A szélsőértékek megkeresése

A következő tétel érthetővé teszi, miért elegendő általában csak néhány függvényértéket megvizsgálnunk, amikor a függvény szélsőértékeit keressük.

2. TÉTEL Az első derivált és a lokális szélsőérték I.

Ha az f függvénynek lokális maximuma vagy lokális minimuma van értelmezési tartományának valamely c belső pontjában, és f' értelmezve van a c pontban, akkor

$$f'(c) = 0.$$



4.6. ÁBRA: Lokális maximummal rendelkező görbe. A görbe c pontbeli meredeksége – amely egyidejűleg nempozitív és nemnegatív számok határértéke – nulla.

Bizonyítás. Azt, hogy a lokális szélsőértékhelyen $f'(c) = 0$, úgy fogjuk bebizonyítani, hogy belátjuk: $f'(c)$ nem lehet sem pozitív, sem negatív. Eszerint $f'(c)$ olyan szám, amely nem pozitív és nem is negatív: ilyen szám pedig csak egy van, a nulla.

Először tegyük fel, hogy az f függvénynek az $x = c$ pontban lokális maximuma van (4.6. ábra), azaz $f(x) - f(c) \leq 0$ minden olyan x értékre, amely elég közel van c-hez. Mivel c az f értelmezési tartományának belső pontja, $f'(c)$ a

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

kétoldali határértékkel van értelmezve. Ez azt jelenti, hogy jobb oldali és bal oldali határértéke is létezik az $x = c$ helyen, és egyenlő $f'(c)$-vel. Ha külön megvizsgáljuk ezeket a határértékeket, azt találjuk, hogy

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0, \qquad \text{mert } (x - c) > 0 \text{ és } f(x) \leq f(c), \qquad (4.1)$$

illetve hogy

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \qquad \text{mert } (x - c) < 0 \text{ és } f(x) \leq f(c). \qquad (4.2)$$

A 4.1 és a 4.2 egyenlőségekből együttesen következik, hogy $f'(c) = 0$.

Ezzel bebizonyítottuk a tételt lokális maximumra. Lokális minimum esetén egyszerűen csak azt kell figyelembe venni, hogy $f(x) \geq f(c)$, ami megfordítja az (1) és (2) egyenlőtlenségeket. □

A 2. Tétel szerint egy függvény első deriváltja mindig nulla azokban a belső pontokban, amelyekben a függvénynek lokális szélsőértéke van, és differenciálható. Ezért az f függvénynek csak olyan helyeken lehet szélsőértéke (lokális vagy abszolút),

1. amely belső pont, és ahol $f' = 0$,
2. amely belső pont, és ahol f' nincs értelmezve,
3. amely f értelmezési tartományának végpontja.

A következő definíció segítségével az első két esetet együtt tárgyalhatjuk.

DEFINÍCIÓ Kritikus pont.

Az f függvény kritikus pontjának nevezzük f értelmezési tartományának minden olyan pontját, amelyben az f' deriváltfüggvény értéke nulla, vagy nincs értelmezve.

A függvénynek tehát csak olyan pontban lehet szélsőértéke, amely az értelmezési tartományának vagy kritikus pontja, vagy végpontja.

Figyeljünk a 2. Tétel pontos tartalmára, a tétel megfordítása ugyanis hamis. Valamely differenciálható függvénynek az $x = c$ pont lehet kritikus pontja anélkül is, hogy ott a függvénynek szélsőértéke lenne. Például az $f(x) = x^3$ függvénynek az origóban kritikus pontja van – elvégre itt a deriváltfüggvény értéke 0 –, viszont az origótól jobbra pozitív, attól balra pedig negatív. Így az origóban nem lehet szélsőértéke. Valóban, a függvénynek itt *inflexiós pontja* van. Az inflexiós pont fogalmát később, a 4.4. alfejezetben értelmezzük és elemezzük.

A szélsőértékek keresésénél leggyakrabban egy zárt és véges intervallumon folytonos függvény abszolút szélsőértékeit kell meghatározni. A szélsőérték létezését az 1. Tétel biztosítja, a 2. Tétel pedig kimondja, hogy ha létezik, akkor csak kritikus pontokban vagy végpontokban kell keresnünk. Gyakran elegendő, ha egyszerűen sorra vesszük ezeket a pontokat, kiszámoljuk a függvényértékeket, és megkeressük közülük a legkisebbet és a legnagyobbat.

Hogyan keressük meg egy véges zárt intervallumon folytonos f függvény abszolút szélsőértékét?

1. Számítsuk ki f értékét a kritikus pontokban és a végpontokban.
2. Állapítsuk meg, hogy ezek közül melyik a legkisebb, és melyik a legnagyobb.

2. PÉLDA **Az abszolút szélsőérték megkeresése.**

Keressük meg az $f(x) = x^2$ függvény abszolút minimumát és maximumát a $[-2, 1]$ intervallumon.

Megoldás. A függvény értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, így egyetlen kritikus pontja van, amelyre $f'(x) = 2x = 0$, nevezetesen az $x = 0$ pont. Meg kell vizsgálnunk a függvény értékét az $x = 0$ pontban valamint az $x = -2$ és $x = 1$ végpontokban.

A függvényérték a kritikus pontban: $f(0) = 0$.

A függvényérték az intervallum végpontjaiban: $f(-2) = 4$,

$f(1) = 1$.

A függvénynek abszolút maximuma van az $x = -2$ pontban, és az abszolút maximum értéke 4, abszolút minimuma van az $x = 0$ pontban, és az abszolút minimum értéke 0. □

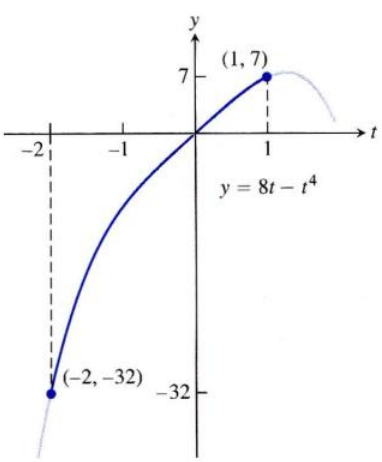
3. PÉLDA **Abszolút szélsőérték a végpontokban.**

Keressük meg a $g(t) = 8t - t^4$ függvény abszolút szélsőértékeit a $[-2, 1]$ intervallumon.

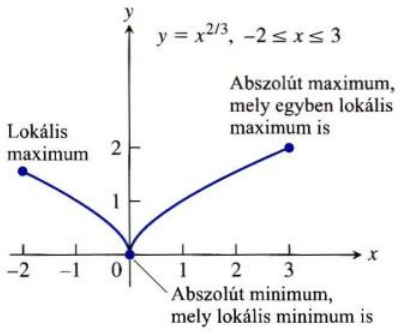
Megoldás. A függvény a teljes tartományon differenciálható, így egyetlen kritikus pontja ott van, ahol $g'(t) = 0$. A

$$8 - 4t^3 = 0$$

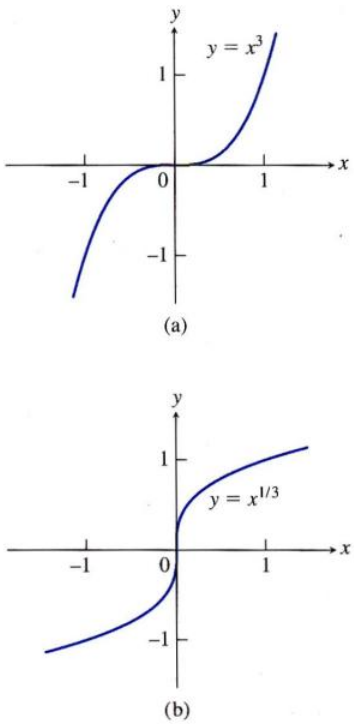
egyenlet megoldása: $t = \sqrt[3]{2}$, ez azonban – lévén nagyobb, mint 1 – nem eleme az adott intervallumnak. A függvénynek ezért csak az intervallum végpontjaiban lehet abszolút szélsőértéke, $g(-2) = -32$ (abszolút minimum) és $g(1) = 7$ (abszolút maximum). Lásd a 4.7. ábrát. □



4.7. ÁBRA: A $g(t) = 8t - t^4$ függvény abszolút szélsőértékei a $[-2, 1]$ intervallumon (3. példa).



4.8. ÁBRA: Az $f(x) = x^{2/3}$ függvény $[-2,3]$ intervallumbeli szélsőértékei az $x = 3$ és $x = 0$ pontokban (4. példa).



4.9. ÁBRA: Olyan kritikus pont, amelyben nincs a függvénynek szélsőértéke. (a) $y' = 3x^2$ az $x = 0$ helyen 0, de az $y = x^3$ függvénynek itt nincs szélsőértéke. (b) $y' = (1/3)x^{-2/3}$ nincs értelmezve az $x = 0$ helyen, az $y = x^{1/3}$ függvénynek mégsincs itt szélsőértéke.

4. PÉLDA **Abszolút szélsőérték egy zárt intervallumban.**

Keressük meg az $f(x) = x^{2/3}$ függvény legkisebb és legnagyobb értékét a $[-2,3]$ intervallumon.

Megoldás. Kiszámítjuk a függvényértéket a kritikus pontokban és a végpontokban, majd kiválasztjuk a kapott értékek legkisebbikét és legnagyobbikát. Az első derivált

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

sehol nem nulla, de nincs értelmezve az $x = 0$ belső pontban. Az f függvény helyettesítési értékei az egyetlen kritikus pontban, illetve a végpontokban:

a kritikus pontbeli érték: $f(0) = 0$,

a végpontokbeli értékek: $f(-2) = -2^{2/3} = \sqrt[3]{4}$, $\quad f(3) = 3^{2/3} = \sqrt[3]{9}$.

A fenti lista alapján a függvény abszolút maximuma $\sqrt[3]{9} \approx 2{,}08$, és azt a jobb oldali végpontban, az $x = 3$ helyen veszi fel. Az abszolút minimum értéke 0, ezt a függvény az $x = 0$ belső pontban veszi fel (4.8. ábra). □

Bár szélsőérték csak kritikus pontban vagy végpontban fordulhat elő, nem minden kritikus pontban vagy végpontban van szélsőérték. Ezt mutatja a 4.9. ábra egy belső pontra.

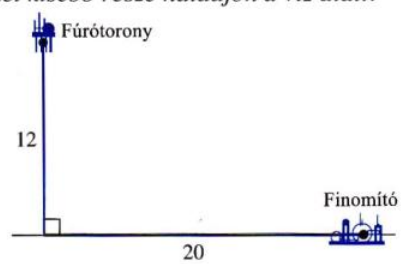
A szakaszt egy olyan példával zárjuk, amely megmutatja, hogyan lehet használni a tanult módszert egy valóságos optimalizálási feladat megoldására.

5. PÉLDA **Olajvezeték a fúrótoronytól a finomítóhoz.**

Csővezetéket kell lefektetni a tengeri fúrótorony és a parti finomító között. A torony 12 kilométerre van a parttól, a finomító a part mentén 20 kilométerre, délre. A víz alatt futó vezeték költsége 500 000 dollár/kilométer, míg a szárazföldön futó vezetéké 300 000 dollár/kilométer. Mi a legkevésbé költséges megoldás?

Megoldás. Próbáljunk ki néhány lehetőséget, hogy ráérezzünk a problémára.

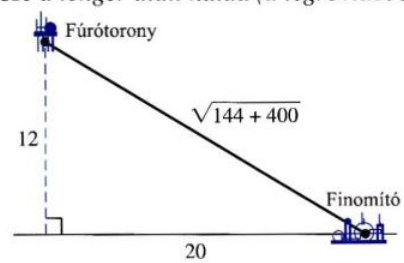
(a) *A vezeték minél kisebb része haladjon a víz alatt.*



A víz alatti vezeték a drágább, ezért a lehető legkevesebbet építtetjük belőle. Egyenesen a partnak visszük a vezetéket (12 mérföld), és onnan már szárazföldön futó csővezetéket építünk (20 mérföld).

A költség: $12 \cdot 500\,000 + 20 \cdot 300\,000 = 12\,000\,000$ (dollár).

(b) *A vezeték egésze a tenger alatt halad (a legrövidebb út).*

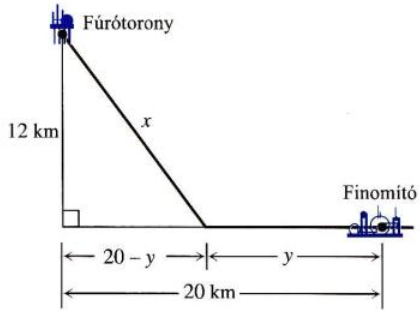


Egyenes vonalban, a víz alatt építjük meg a vezetéket a finomítóhoz.

A költség: $\sqrt{544} \cdot 500\,000 \approx 11\,661\,900$ (dollár).

Ez olcsóbb az (a) tervnél.

(c) *Valahol a kettő között*



Legyen a víz alatti vezetékszakasz hossza x, a szárazföldön futóé pedig y. Az x és az y közötti kapcsolathoz a fúrótoronnyal szemközti derékszög adja a kulcsot. Pitagorasz tétele szerint:

$$x^2 = 12^2 + (20-y)^2,$$
$$x = \sqrt{144 + (20-y)^2}. \tag{4.3}$$

Ebben a modellben csak a pozitív gyöknek van értelme.

A csővezeték költsége dollárban számítva most:

$$c = 500\,000x + 300\,000y.$$

Hogy a c költséget egyetlen változó függvényeként kifejezhessük, a (4.3) egyenlőségből helyettesítsük be x-et

$$c(y) = 500\,000\sqrt{144 + (20-y)^2} + 300\,000y.$$

Most az a feladatunk, hogy a $0 \le y \le 20$ intervallumon meghatározzuk $c(y)$ minimumát. $c(y)$ függvény y szerinti deriváltja a láncszabály szerint:

$$c'(y) = 500\,000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2(20-y)(-1)}{\sqrt{144 + (20-y)^2}} + 300\,000 =$$
$$= -500\,000 \frac{20-y}{\sqrt{144 + (20-y)^2}} + 300\,000.$$

A c' derivált akkor 0, ha

$$500\,000(20-y) = 300\,000\sqrt{144 + (20-y)^2}$$
$$\frac{5}{3}(20-y) = \sqrt{144 + (20-y)^2}$$
$$\frac{25}{9}(20-y)^2 = 144 + (20-y)^2$$
$$\frac{16}{9}(20-y)^2 = 144$$
$$(20-y) = \pm\frac{3}{4} \cdot 12 = \pm 9$$
$$y = 11 \text{ vagy } y = 29$$

Csak az $y = 11$ megoldás esik a nekünk megfelelő intervallumba; c értéke ebben a (kritikus) pontban, illetve a végpontokban:

$$c(11) = 10\,800\,000,$$
$$c(0) = 11\,661\,900,$$
$$c(20) = 12\,000\,000.$$

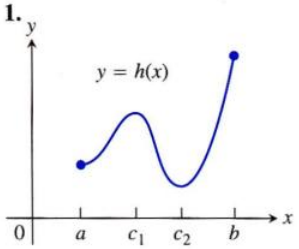
A legolcsóbb megoldás költsége 10 800 000 dollár, s ezt úgy érjük el, hogy a vezeték a finomítótól 11 kilométerre ér partot. □

4.1. Feladatok

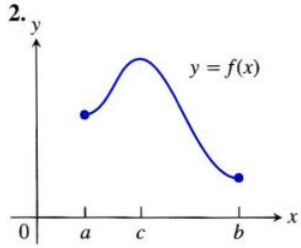
Szélsőérték-keresés a függvénygrafikon alapján

Az 1–6. feladatokban a grafikonok alapján határozzuk meg, hogy mely függvénynek van abszolút szélsőértéke az $[a,b]$ intervallumon. Azután ellenőrizzük, hogy válaszaink összhangban vannak-e az 1. Tétellel.

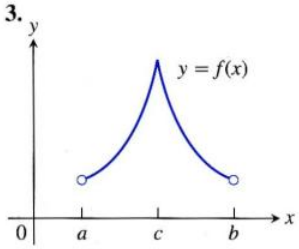
1.



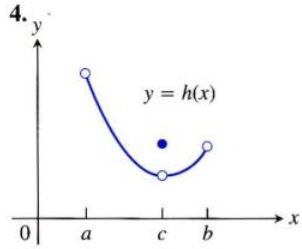
2.



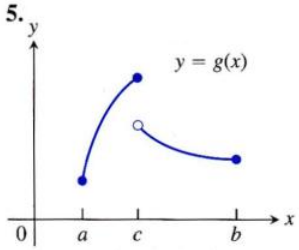
3.



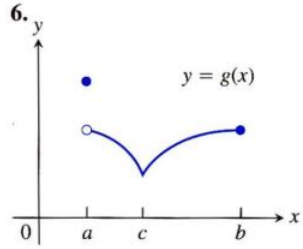
4.



5.

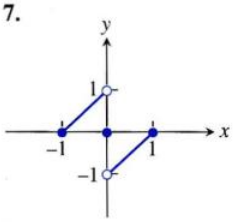


6.

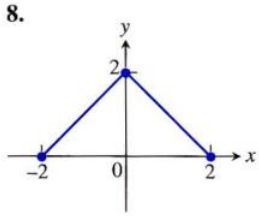


A 7–10. feladatokban keressük meg a szélsőértékeket és azt a helyet, ahol a függvény felveszi szélsőértékét.

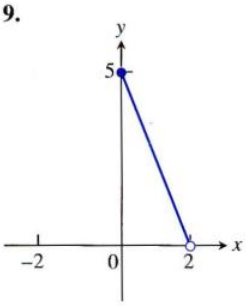
7.



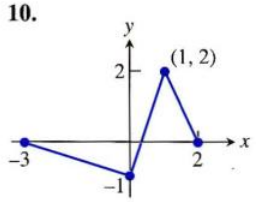
8.



9.



10.



A 11–14. feladatokban párosítsuk össze a táblázatokat a megfelelő grafikonokkal.

11.

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	5

12.

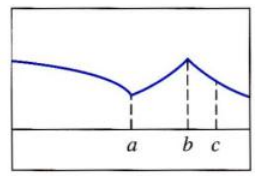
x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	−5

13.

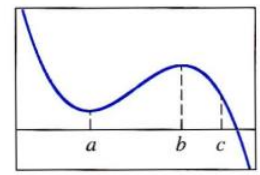
x	$f'(x)$
a	nincs értelmezve
b	0
c	−2

14.

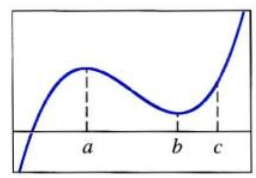
x	$f'(x)$
a	nincs értelmezve
b	nincs értelemezve
c	−1,7



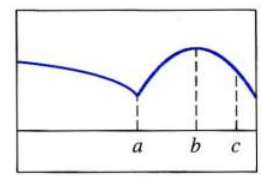
(a)



(b)



(c)



(d)

Abszolút szélsőértékek véges, zárt intervallumokon

A 15–30. feladatokban keressük meg a függvények abszolút maximumát és minimumát a megadott intervallumon. Ezután rajzoljuk fel a függvények grafikonját. Keressük meg a grafikonon az abszolút szélsőértékeknek megfelelő pontokat, és számítsuk ki e pontok koordinátáit.

15. $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, \quad -2 \le x \le 3$

16. $f(x) = -x - 4, \quad -4 \le x \le 1$

17. $f(x) = x^2 - 1, \quad -1 \le x \le 2$

18. $f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \le x \le 1$

19. $F(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad 0{,}5 \le x \le 2$

20. $F(x) = -\frac{1}{x}, \quad -2 \le x \le -1$

21. $h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad -1 \le x \le 8$

22. $h(x) = -3x^{2/3}, \quad -1 \le x \le 1$

23. $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \le x \le 1$

24. $g(x) = -\sqrt{5 - x^2}, \quad -\sqrt{5} \le x \le 0$

25. $f(\theta) = \sin\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{6}$

26. $f(\theta) = \operatorname{tg}\theta, \quad -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{4}$

27. $g(x) = \csc x, \quad \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$

28. $g(x) = \sec x, \quad -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{6}$

29. $f(t) = 2 - |t|, \quad -1 \le x \le 3$

30. $f(t) = |t - 5|, \quad 4 \le x \le 7$

A 31–34. feladatokban keressük meg a függvények abszolút maximum és minimum értékeit, és mondjuk meg azt is, hogy hol veszik fel szélsőértéküket.

31. $f(x) = x^{4/3}$, $-1 \le x \le 8$ **32.** $f(x) = x^{5/3}$, $-1 \le x \le 8$

33. $g(\theta) = \theta^{3/5}$, $-32 \le \theta \le 1$

34. $h(\theta) = 3\theta^{2/3}$, $-27 \le \theta \le 8$

A 35–44. feladatokban keressük meg a függvények szélsőértékeit és szélsőértékhelyeit.

35. $y = 2x^2 - 8x + 9$ **36.** $y = x^3 - 2x + 4$

37. $y = x^3 + x^2 - 8x + 5$ **38.** $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

39. $y = \sqrt{x^2 - 1}$ **40.** $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

41. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$ **42.** $y = \sqrt{3 + 2x - x^2}$

43. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ **44.** $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}$

A 45–52. feladatokban keressük meg a differenciálhányadost, az összes kritikus pontot, és határozzuk meg a függvények lokális szélsőértékeit.

45. $y = x^{2/3}(x + 2)$ **46.** $y = x^{2/3}(x^2 - 4)$

47. $y = x\sqrt{4 - x^2}$ **48.** $y = x^2\sqrt{3 - x}$

49. $y = \begin{cases} 4 - x, & x \le 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$ **50.** $y = \begin{cases} 3 - x, & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2, & x \ge 0 \end{cases}$

51. $y = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & x \le 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & x > 1 \end{cases}$

52. $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{15}{4}, & x \le 1 \\ x^3 - 6x^2 + 8x, & x > 1 \end{cases}$

Az 53. és 54. feladatban indokoljuk is meg a kérdésekre adott válaszunkat.

53. Legyen $f(x) = (x - 2)^{2/3}$.

(a) Létezik-e $f'(2)$?

(b) Mutassuk meg, hogy f egyetlen lokális szélsőértékhelye az $x = 2$ pontban van.

(c) Ellentmondásban van-e a (b) kérdésre adott válasz a szélsőértéktétellel?

(d) Válaszoljuk meg az (a) és a (b) kérdést az $f(x) = (x - a)^{2/3}$ függvényre vonatkozóan, vagyis amikor az eredeti függvényben 2-t a-val helyettesítjük.

54. Legyen $f(x) = |x^3 - 9x|$.

(a) Létezik-e $f'(0)$?

(b) Létezik-e $f'(3)$?

(c) Létezik-e $f'(-3)$?

(d) Határozzuk meg f összes szélsőértékét.

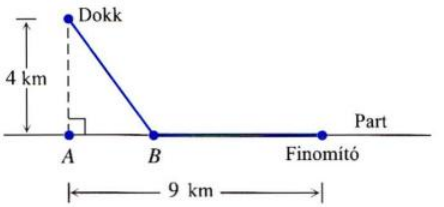
Optimalizációs alkalmazások

Arra biztatjuk az olvasót, hogy valamely egyváltozós függvény maximalizálásakor vagy minimalizálásakor először mindig ábrázolja a függvényt a feladat megoldása által megkívánt értelmezési tartományban. Az ábra szemléletes képet ad a problémáról, és feltárja a megoldáshoz szükséges vizuális összefüggéseket.

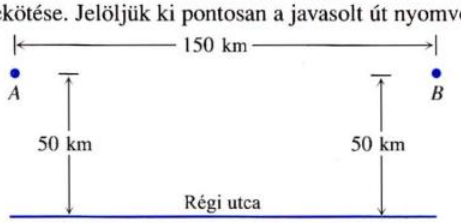
55. Csővezeték-építés Az óriástankerek a parttól négy kilométerre lévő dokkban rakják ki az olajat. A legközelebbi finomító a szárazföldnek a dokkhoz legközelebb eső pontjához 9 kilométerre keletre van. Csővezetéket kell építeni a dokk és a finomító között. A csővezeték mérföldje 300 000 dollárba kerül, ha a víz alatt halad, és 200 000 dollárba, ha a szárazföldön.

(a) Jelöljük ki a B pont helyét úgy, hogy az építési költségek a lehető legkisebbek legyenek.

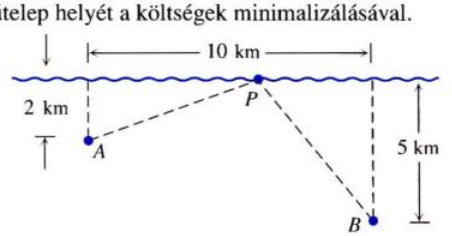
(b) A víz alatt futó csővezeték 1 kilométerre eső költsége a vezeték hosszával arányosan emelkedik, míg a szárazföldi vezeték költsége állandó. Milyen víz alatti építési költség mellett éri meg a vezetéket a legrövidebb úton kivinni a parta, vagyis az A ponton keresztül megépíteni?



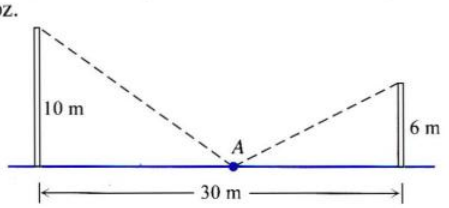
56. Útjavítás. Az egymástól 150 kilométerre lévő A és B településeket országúttal kell összekötni. A településektől 50 kilométerre délre már vezet egy kezdetleges út. A már meglévő út felújítása 300 000 dollárba kerül kilométerenként, új útszakasz építési költsége pedig 500 000 dollár kilométerenként. Keressük meg a felújításnak és az új út építésének azt a kombinációját, amelynek révén a legkisebb költséggel megoldható a két település összekötése. Jelöljük ki pontosan a javasolt út nyomvonalát.



57. Szivattyúház helyének kijelölése Két város fekszik a folyó déli partján. Szivattyútelepet akarunk építeni úgy, hogy az egyidejűleg mindkét várost kiszolgálja. A szivattyúháztól mindkét városba egyenesen futó csővezetéket építenek. Jelöljük ki a szivattyútelep helyét a költségek minimalizálásával.



58. A drótkötél hossza. Van egy 10 és egy 6 méter magas tartóoszlopunk. Az oszlopok egymástól 30 méter távolságra vannak. Az A pontból drótkötelet kell kifeszíteni a tartóoszlopok csúcsához.



(a) Határozzuk meg az A pont helyét úgy, hogy a drótkötélszükséglet minimális legyen.

(b) Mutassuk meg általánosan, hogy a drótkötél hossza az oszlopok magasságától függetlenül akkor lesz minimális, ha az A-nál lévő szögek egyenlők.

59. Egy doboz térfogatát a

$$V(x) = x(10-2x)(16-2x), \qquad 0 < x < 5$$

függvény adja meg.

(a) Keressük meg V szélsőértékeit.

(b) Mit jelentenek az (a) részben megoldásul kapott számok a doboz térfogatára nézve?

60. Egy x, illetve $\frac{100}{x}$ oldalhosszúságú téglalap kerülete

$$P(x) = 2x + \frac{200}{x}, \qquad 0 < x < \infty.$$

(a) Keressük meg P szélsőértékeit.

(b) Az (a) részben kapott megoldásokat értelmezzük a kerület vonatkozásában.

61. A derékszögű háromszög területe. Mennyi a maximális területe annak a derékszögű háromszögnek, amelynek átfogója 5 cm?

62. Atlétikapálya Egy épülő atlétikapálya egyenes szakasza x egység hosszú, félkör alakú süvegeinek sugara r egység hosszú. A futópálya 400 m hosszú kell legyen.

(a) Fejezzük ki a stadion téglalap alakú részének területét egyedül x vagy r függvényeként.

(b) Milyen x és r értékek mellett lesz a téglalap alakú rész területe maximális?

63. Függőlegesen mozgó test maximális magassága. A függőlegesen mozgó test földfelszíntől való távolságát általánosan az

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0, \qquad g > 0$$

összefüggés adja meg, s-t méterben, t-t másodpercben mérjük. Keressük meg a test földfelszíntől mért távolságának maximális értékét.

64. Váltakozó áram csúcsértéke. Tegyük fel, hogy egy adott t időpontban a váltakozó áramú áramkörben az áramerősség értéke $i = 2\cos t + 2\sin t$. Mekkora az áramerősség csúcsértéke?

További példák és feladatok

65. Minimum derivált nélkül. Az $f(x) = |x|$ függvénynek az $x = 0$ helyen abszolút minimuma van annak ellenére, hogy f az $x = 0$ helyen nem differenciálható. Összhangban áll-e ez a tény a 2. Tétellel? Válaszunkat indokoljuk is.

66. Páros függvények. Ha az $f(x)$ páros függvénynek lokális maximuma van az $x = c$ pontban, mondhatunk-e valamit f-nek az $x = -c$ helyen felvett értékéről? Válaszunkat indokoljuk.

67. Páratlan függvények. Ha a $g(x)$ páratlan függvénynek lokális minimuma van az $x = c$ pontban, mondhatunk-e valamit g-nek az $x = -c$ helyen felvett értékéről? Válaszunkat indokoljuk.

68. Már tudjuk, hogyan keressük meg egy folytonos $f(x)$ függvény szélsőértékeit kritikus és végpontjaiban felvett értékeinek vizsgálatával. Mi van azonban akkor, ha a függvénynek *nincsenek* kritikus pontjai és végpontjai? Mi történjék ilyenkor? Egyáltalán léteznek ilyen függvények? Válaszunkat indokoljuk.

69. Harmadfokú függvények. Tekintsük az

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

harmadfokú függvényt.

(a) Mutassuk meg, hogy f-nek 0, 1 vagy 2 kritikus pontja van. Érvelésünk indoklására ábrázoljuk a függvényt és mutassunk példákat.

(b) Hány lokális szélsőértéke lehet f-nek?

70. Függvények, amelyeknek nincs szélsőértékük a végpontjaikban.

(a) Ábrázoljuk egy számítógépes program segítségével az

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

függvényt. Indokoljuk, miért nincs a függvénynek lokális szélsőértéke az $x = 0$ helyen.

(b) Konstruáljunk olyan függvényt, amelynek nincs szélsőértéke értelmezési tartományának végpontjaiban.

Ábrázoljuk a 71–74. feladatokban megadott függvényeket (ha szükséges, vegyük igénybe számítógépünk segítségét). Keressük meg a függvények szélsőértékeit a megadott intervallumon, állapítsuk meg a szélsőértékek helyét is.

71. $f(x) = |x-2| + |x+3|, \quad -5 \le x \le 5$

72. $g(x) = |x-1| - |x-5|, \quad -2 \le x \le 7$

73. $h(x) = |x+2| - |x-3|, \quad -\infty \le x \le \infty$

74. $k(x) = |x+1| + |x-3|, \quad -\infty \le x \le \infty$

Extrapoláció számítógéppel

A 75–80. feladatokhoz használjunk számítógépes programot (Maple, Mathematica stb.) a függvények – adott zárt intervallumon felvett – szélsőértékeinek meghatározására. Hajtsuk végre a következő lépéseket:

(a) Rajzoljuk meg a függvényt az adott intervallumban, hogy megismerjük általános viselkedését.

(b) Keressük meg azt a belső pontot, ahol $f' = 0$. (Néhány feladatban az egyenletmegoldó program segítségével kell közelíteni a megoldást.)

(c) Keressük meg azt a belső pontot, ahol f' nincs értelmezve.

(d) Számítsuk ki a függvényértékeket a (b) és (c) részfeladatokban megtalált pontokban, valamint az intervallumvégpontokban.

(e) Keressük meg a függvények abszolút szélsőértékeit és szélsőértékhelyeit az adott intervallumon.

75. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4x + 2, \quad [-20/25, 64/25]$

76. $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1, \quad [-3/4, 3]$

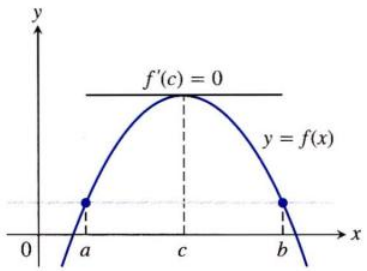
77. $f(x) = x^{2/3}(3-x), \quad [-2, 2]$

78. $f(x) = 2 + 2x - 3x^{2/3}, \quad [-1, 10/3]$

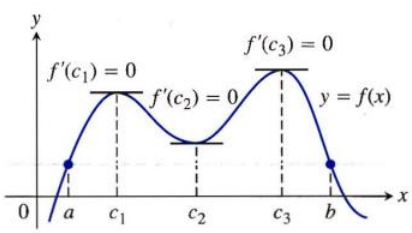
79. $f(x) = \sqrt{x} + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

80. $f(x) = x^{3/4} - \sin x + \frac{1}{2}, \quad [0, 2\pi]$

4.2. A Lagrange-féle középértéktétel



(a)



(b)

4.10. ÁBRA: A Rolle-tétel szerint egy differenciálható görbének legalább egy helyen vízszintes az érintője bármely két olyan pont között, amelyek a görbének egy vízszintes egyenessel való metszéspontjai. Lehet, hogy egy ilyen pont van (a), de lehet több is (b).

Tudjuk, hogy a konstans függvények deriváltja nulla, de vajon elképzelhetők-e olyan másféle, bonyolult függvények, amelyeknek szintén nulla a deriváltja? Mi a kapcsolat két olyan függvény között, amelyeknek egy adott intervallumon azonos a deriváltjuk? Valójában azt kérdezzük itt, hogy melyek azok a függények, amelyek *bizonyos típusú* deriválttal rendelkeznek. Ebben az alfejezetben efféle kérdéseket teszünk fel, a válaszokat a középértéktétel alkalmazásával kapjuk meg. A középértéktételhez a Rolle-tételen keresztül jutunk el.

A Rolle-tétel

A függvény grafikonját fölrajzolva geometriai szemszögből nyilvánvaló, hogy ha egy differenciálható függvényt egy vízszintes egyenes két pontban metsz, akkor a függvény érintője e két metszéspont között legalább egy helyen szintén vízszintes lesz (4.10. ábra). Pontosabb megfogalmazásban a következő tételt kapjuk:

3. TÉTEL **Rolle tétele.**

Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény folytonos az $[a,b]$ zárt intervallum minden pontjában és differenciálható $[a,b]$ minden belső pontjában, azaz az (a,b) intervallumon. Ha

$$f(a) = f(b),$$

akkor létezik legalább egy olyan $c \in (a,b)$ pont, amelyre teljesül, hogy

$$f'(c) = 0.$$

Bizonyítás. Mivel f folytonos az $[a,b]$ intervallumon, ezért ebben az intervallumban van abszolút maximuma és abszolút minimuma. Ezeket csak olyan pontban veheti fel,

1. amely belső pont és ahol f' nulla, vagy

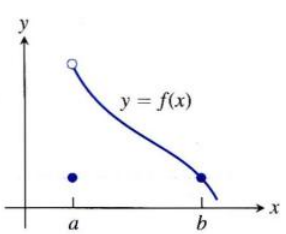
2. belső pont, de ott f' nincs értelmezve, vagy

3. a függvény értelmezési tartományának végpontja, esetünkben a vagy b.

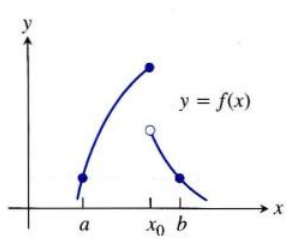
Feltevésünk szerint f minden belső pontban differenciálható. Ez kizárja a 2. lehetőséget, marad tehát az $f' = 0$ lehetőség, valamint a két végpont.

Ha a minimum- vagy maximumhely az a és a b közötti c pont, akkor a 4.1. alfejezet 2. Tétele szerint $f'(c) = 0$, és ezzel meg is találtuk a Rolle-tételnek megfelelő pontot.

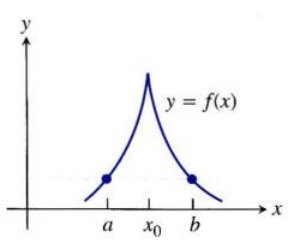
Ha az abszolút minimum is és az abszolút maximum is az intervallum valamely végpontjára esik, akkor – mivel $f(a) = f(b)$ –, f konstans függvény, és



(a) Az $[a,b]$ intervallum egyik végpontján a görbe nem folytonos.

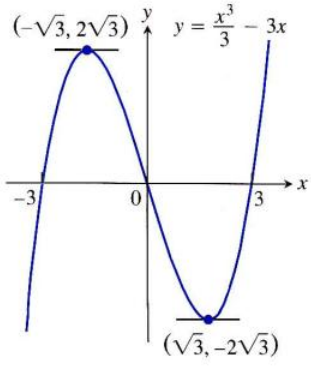


(b) Az $[a,b]$ intervallum valamelyik belső pontjában a görbe nem folytonos.

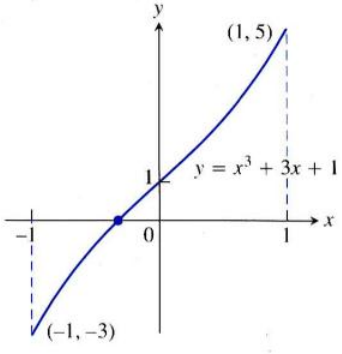


(c) A görbe folytonos az $[a,b]$ intervallumon, de valamely belső pontban nem differenciálható.

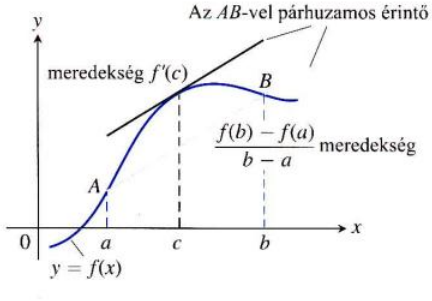
4.11. ÁBRA: Ha a Rolle-tétel feltételei nem teljesülnek, akkor lehetséges, hogy a görbének nincs vízszintes érintője.



4.12. ÁBRA: Ahogy az a Rolle-tétel alapján várható, ennek a görbének van vízszintes érintője az x-tengelynek a görbével alkotott metszéspontjai között.



4.13. ÁBRA: Az $y = x^3 + 3x + 1$ polinom egyetlen valós gyöke ott van, ahol a grafikonja -1 és 0 között metszi az x-tengelyt.



4.14. ÁBRA: A középértéktétel geometriai jelentése az, hogy valahol az A és a B között a görbének van az AB szelővel párhuzamos érintője.

$f(x) = f(a) = f(b)$ minden $x \in [a,b]$ esetén. Ekkor $f'(x) = 0$, és c-nek az (a,b) intervallum bármelyik pontját választhatjuk. □

A 3. Tétel kikötései fontosak. Ha akárcsak egyetlen pontban nem teljesülnek, máris elképzelhető, hogy a görbének nincs vízszintes érintője (4.11. ábra).

1. PÉLDA **Harmadfokú polinom vízszintes érintői.**

A 4.12. ábrán látható

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$$

harmadfokú polinomfüggvény a $[-3,3]$ intervallum minden pontjában folytonos és $(-3,3)$ minden pontjában differenciálható. Mivel $f(-3) = f(3) = 0$, a Rolle-tétel értelmében f'-nek az $a = -3$ és $b = -3$ által határolt nyílt intervallumon legalább egyszer nullának kell lennie. Valójában $f'(x) = x^2 - 3$ kétszer is nulla ezen az intervallumon, egyszer az $x = -\sqrt{3}$, másodszor pedig az $x = \sqrt{3}$ helyen. □

2. PÉLDA **Az $f(x) = 0$ egyenlet megoldása.**

Mutassuk meg, hogy az

$$x^3 + 3x + 1 = 0$$

egyenletnek pontosan egy valós megoldása van.

Megoldás. Legyen

$$y = f(x) = x^3 + 3x + 1.$$

Az

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

derivált sehol nem nulla (mert mindenütt pozitív). Ha lenne két olyan pont, $x = a$ és $x = b$, ahol $f(x) = 0$, akkor a Rolle-tétel garantálná egy olyan a és b közé eső c pont létezését, amelyre $f'(c) = 0$. Így hát f-nek nem lehet egynél több zérushelye. Egy zérushelye tényleg van, mert a Bolzano-tétel szerint az $y = f(x)$ függvény grafikonja az $x = -1$ (ahol $y = -3$) és az $x = 0$ (ahol $y = 1$) között valahol metszi az x-tengelyt. (Lásd a 4.13. ábrát.) □

A Rolle-tétel legfontosabb alkalmazása a középértéktétel bizonyítása.

4. TÉTEL **Lagrange-féle középértéktétel.**

Legyen az $y = f(x)$ függvény folytonos az $[a,b]$ zárt intervallumon, és differenciálható annak belsejében, azaz az (a,b) nyílt intervallumon. Akkor létezik legalább egy olyan $c \in (a,b)$, amelyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{4.4}$$

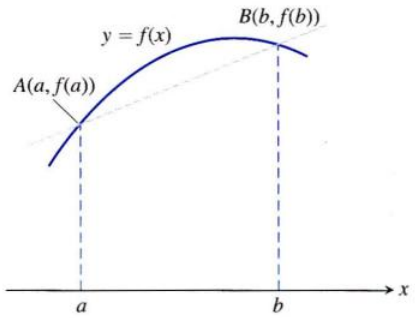
Bizonyítás. Az f függvény grafikonját síkgörbeként ábrázoltuk, és húztunk egy egyenest az $A(a, f(a))$ és $B(b, f(b))$ pontokon keresztül (l. a 4.15. ábrát). Ez az egyenes a

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{4.5}$$

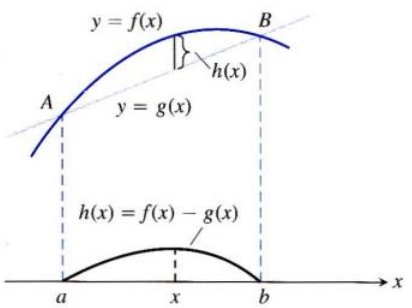
függvény grafikonja. Az f és a g függvények grafikonjának függőleges eltérése az x pontban:

$$h(x) = f(x) - g(x) = \\ = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{4.6}$$

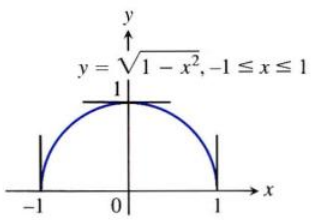
A 4.16. ábra együtt mutatja f, g és h grafikonját.



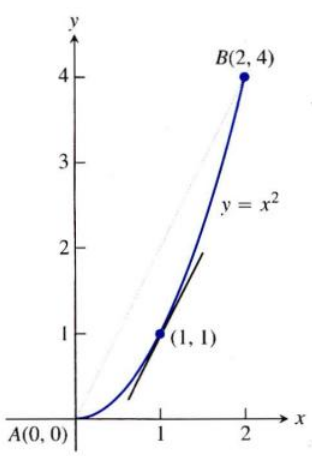
4.15. ÁBRA: Az f grafikonja az $[a,b]$ intervallum fölött, valamint az AB szelő.



4.16. ÁBRA: Az AB szelő a $g(x)$ függvény grafikonja. A $h(x) = f(x) - g(x)$ függvény x helyen felvett értéke az f és g grafikonjainak az x pontbeli függőleges eltérését adja.



4.17. ÁBRA: Az $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ függvény az $[-1,1]$ intervallumon teljesíti a középértéktétel feltételeit (és állítását), bár f nem differenciálható sem a -1, sem az 1 helyen.



4.18. ÁBRA: Ahogy azt a 3. példában megmutattuk, $c = 1$ az a pont, amelyben a görbéhez húzott érintő párhuzamos a szelővel.

A h függvény az $[a,b]$ intervallumon kielégíti a Rolle-tétel feltételeit. Folytonos az $[a,b]$ intervallumon és differenciálható annak (a,b) belsejében, mert f és g is ilyenek. Továbbá $h(a) = h(b) = 0$, elvégre f és g grafikonja is áthalad az A és a B ponton. A Rolle-tétel szerint tehát van olyan $c \in (a,b)$ pont, amelyben $h'(c) = 0$. Ezt a c-t használjuk fel az (4.4) egyenlőségben.

A (4.4) egyenlet igazolása végett deriváljuk a (4.6) egyenlet mindkét oldalát x szerint, majd helyettesítsük be x helyébe c-t:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \text{(a (4.6) egyenlet deriváltja)}$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \text{(az } x = c \text{ helyettesítéssel)}$$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \text{(} h'(c) = 0\text{)}$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \text{(átrendezéssel)}$$

ahogy azt a tétel állítja. □

A középértéktétel kikötései közt nem szerepel az, hogy f differenciálható legyen az a vagy a b pontban. Elegendő az a és b-beli folytonosság (l. a 4.17. ábrát).

3. PÉLDA

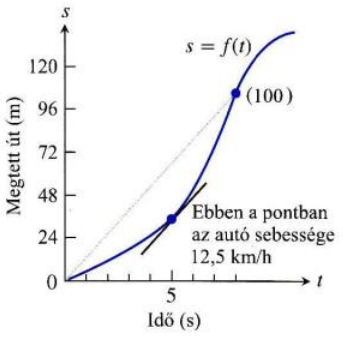
Az $f(x) = x^2$ függvény folytonos minden $0 \le x \le 2$ esetén, és differenciálható, amennyiben $0 < x < 2$. Mivel $f(0) = 0$ és $f(2) = 4$, a középértéktétel szerint az intervallum valamely c pontjában az $f'(x) = 2x$ deriváltnak fel kell vennie a $(4-0)/(2-0) = 2$ értéket (l. a 4.18. ábrát). Ebben a (kivételes) esetben a c pontot a $2c = 2$ egyenlet megoldásával meg tudjuk határozni (és c-re a $c = 1$ értéket kapjuk). □

Fizikai értelmezés

Ha az $(f(b)-f(a))/(b-a)$ számot f átlagos változási sebességeként értelmezzük az $[a,b]$ intervallumon, $f'(c)$-t pedig a c-beli pillanatnyi változási sebességként, akkor a középértéktétel azt mondja ki, hogy tetszőleges intervallum esetén lennie kell egy belső pontnak, amelyben a pillanatnyi változási sebesség egyenlő a teljes intervallumon vett átlagos változási sebességgel.

4. PÉLDA

Ha egy gyorsuló autó 8 másodperc alatt 100 méter utat tesz meg, akkor ebben a 8 másodpercnyi időintervallumban az átlagsebessége $100/8 = 12{,}5$ (m/s). A középértéktétel szerint az autó gyorsulása közben a sebességmérőnek egyszer pontosan 12,5 m/s-ot (tehát 45 km/h-t) kellett mutatnia (l. a 4.19. ábrát). □



4.19. ÁBRA: A megtett út és az idő összefüggése a 4. példában szereplő autóra.

Matematikai következmények

Az alfejezet elején arra voltunk kíváncsiak, hogy egy intervallumon milyen típusú függvényeknek lehet nulla a deriváltja. A középértéktétel első következménye megadja a választ erre a kérdésre.

1. KÖVETKEZMÉNY **Csak a konstans függvények deriváltja nulla.**
Ha az (a,b) nyílt intervallum minden x pontjában $f'(x) = 0$, akkor van olyan C szám, hogy $f(x) = C$ minden $x \in (a,b)$ esetén.

Bizonyítás. Azt, hogy f konstans az (a,b) intervallumon, úgy mutatjuk meg, hogy belátjuk: az (a,b) intervallum tetszőleges x_1 és x_2 pontjai esetén $f(x_1) = f(x_2)$. Feltehetjük, hogy $x_1 < x_2$. Ekkor az $[x_1,x_2]$ intervallumon f kielégíti a középértéktétel feltételeit, elvégre $[x_1,x_2]$ minden pontjában differenciálható (így tehát folytonos is). Ezért

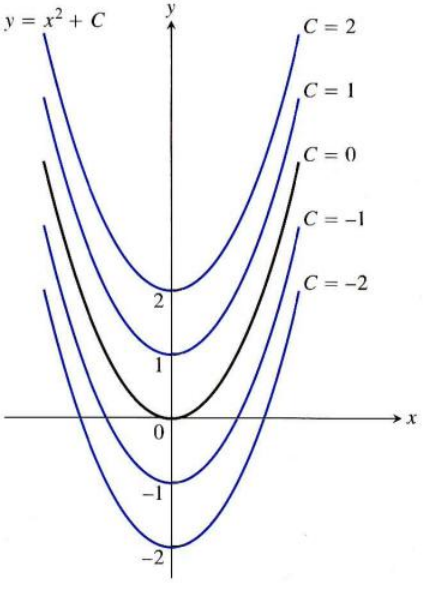
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

valamely x_1 és x_2 közé eső c pontra. Mivel az (a,b) intervallumon f' mindenütt nulla, egyenlőségünkből a következőket kapjuk:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0, \quad f(x_2) - f(x_1) = 0, \quad f(x_2) = f(x_1). \qquad \square$$

Az alfejezet elején azt a kérdést is felvetettük, hogy milyen kapcsolatban áll egymással két olyan függvény, amelyeknek valamely intervallumon megegyezik a deriváltjuk. Az alábbi következmény azt állítja, hogy az ilyen függvények az adott intervallumon csak egy konstansban különbözhetnek egymástól.

2. KÖVETKEZMÉNY **Azok a függvények, amelyeknek a deriváltja megegyezik, csak egy konstansban térnek el egymástól.**
Ha az (a,b) nyílt intervallum bármely x pontjában $f'(x) = g'(x)$, akkor létezik olyan C szám, hogy $f(x) = g(x) + C$ minden $x \in (a,b)$ esetén. Az $f - g$ függvény tehát konstans az (a,b) intervallumon.



4.20. ÁBRA: A középértéktétel 2. Következményének geometriai interpretációja a következő: az (a,b) intervallumon azonos deriválttal rendelkező függvények grafikonjai függőleges irányú eltolással fedésbe hozhatók. Azok a függvények, amelyeknek a deriváltja $2x$, az $y = x^2 + C$ parabolák. Ezeket mutatja különféle C értékekre az ábra.

Bizonyítás. Bármely $x \in (a,b)$ esetén a $h = f - g$ különbségfüggvény deriváltja

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Az 1. Következmény szerint van olyan C szám, hogy az (a,b) intervallum minden x elemére $h(x) = C$. Tehát $f(x) - g(x) = C$ az (a,b) intervallumon, másképpen $f(x) = g(x) + C$. $\square$

Az 1. és a 2. Következmény akkor is igaz, ha az (a,b) intervallum végtelen, azaz (a,∞) (∞,b) vagy (∞,∞) alakú.

A 2. Következménynek fontos szerepe lesz, amikor a 4.8. alfejezetben a primitív függvényeket tárgyaljuk. Például: mivel az $f(x) = x^2$ függvény deriváltja $2x$ a (∞,∞) intervallumban, e következmény szerint bármely olyan függvény, amelynek $2x$ a deriváltja a (∞,∞) intervallumon, szükségképpen $x^2 + C$ alakú (l. 4.20. ábrát).

5. PÉLDA

Adjuk meg azt az $f(x)$ függvényt, amelynek deriváltja $\sin x$, és grafikonja átmegy a $(0,2)$ ponton.

Megoldás. Mivel az $f(x)$ függvénynek ugyanaz a deriváltja, mint a $g(x) = -\cos x$ függvénynek, ezért $f(x) = g(x) + C$ valamilyen C állandóval. C értékét az $f(0) = 2$ feltételből határozhatjuk meg (a függvény grafikonja ugyanis keresztülmegy a $(0,2)$ ponton):

$$f(0) = -\cos(0) + C = 2, \text{ így } C = 3.$$

A keresett függvény: $f(x) = -\cos x + 3$. □

A sebesség és a helyzet meghatározása a gyorsulásból

Hogyan határozhatjuk meg egy nyugalmi helyzetből 9,8 m/s^2 gyorsulással szabadon eső test sebesség- és elmozdulásfüggvényét?

Tudjuk, hogy a sebesség olyan függvény, amelynek a deriváltja 9,8. Azt is tudjuk, hogy a $g(t) = 9{,}8t$ függvény deriváltja 9,8. A 2. Következmény értelmében

$$v(t) = 9{,}8t + C$$

valamilyen C állandóval. Mivel a test nyugalmi helyzetből kezd szabadon esni, $v(0) = 0$. Így

$$9{,}8 \cdot 0 + C = 0, \quad \text{azaz } C = 0.$$

A sebességfügvény ezért: $v(t) = 9{,}8t$. Milyen az $s(t)$ elmozdulásfüggvény?

Tudjuk, hogy $s(t)$ olyan függvény, amelynek a deriváltja $9{,}8t$. Az is világos, hogy az $f(t) = 4{,}9t^2$ függvény deriváltja $9{,}8t$. A 2. Következmény szerint tehát

$$s(t) = 4{,}9t^2 + C$$

valamilyen C állandóval. Ha az eredeti magasság $s(0) = h$, és a lefelé mutató irányt tekintjük pozitívnak, akkor

$$4{,}9 \cdot 0^2 + C = h, \quad \text{azaz } C = h.$$

Az elmozdulásfüggvény: $s(t) = 4{,}9t^2 + h$.

Az analízis nagyon hatékony eszköze, hogy a függvény megváltozásából következtetni lehet magára a függvényre. Az 5. fejezetben ez a gondolat központi szerepet fog játszani.

4.2. Feladatok

A középértéktételbeli c állandó meghatározása

Határozzuk meg a középértéktételben szereplő $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ egyenlőséget kielégítő c értéket vagy értékeket az 1–4. feladatokban megadott függvényekre és intervallumokra.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 2, \quad [0,1]$

2. $f(x) = x^{2/3}, \quad [0,1]$

3. $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad [\frac{1}{2}, 2]$

4. $f(x) = \sqrt{x-1}, \quad [1,3]$

A feltételek ellenőrzése és alkalmazása

Az 5–8. feladatokban szereplő függvények közül a megadott intervallumon melyek teljesítik a Lagrange-féle középértéktétel feltételeit, és melyek nem? Válaszunkat indokoljuk.

5. $f(x) = x^{2/3}, [-1,8]$

6. $f(x) = x^{4/5}, [0,1]$

7. $f(x) = \sqrt{x(1-x)}, [0,1]$

8.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

9. Az

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

függvény 0 az $x = 0$ és $x = 1$ pontokban, és differenciálható a $(0,1)$ intervallumon, de ezen az intervallumon a deriváltja soha nem nulla. Nincs ez ellentétben a Rolle-tétellel, amely szerint a $(0,1)$, intervallum valamely pontjában a derviáltnak nullának kellene lennie? Válaszunkat indokoljuk.

10. a, m és b mely értékeire teljesíti az

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1 \\ mx + b, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

függvény a $[0,2]$ intervallumon a középértéktétel feltételeit?

Gyökök (zérushelyek)

11. **(a)** Ábrázoljuk közös számegyenesen a következő polinomok és deriváltjaik zérushelyeit.

i $y = x^2 - 4$

ii $y = x^2 + 8x + 15$

iii $y = x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2$

iv $y = x^3 - 33x^2 + 216x = x(x-9)(x-24)$

(b) Bizonyítsuk be a Rolle-tétel segítségével, hogy az $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x + a_0$ polinom bármely két zérushelye között az $nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$ polinomnak is van zérushelye.

12. Tegyük fel, hogy f'' folytonos az $[a,b]$ intervallumon, és ezen az intervallumon f-nek három zérushelye van. Mutassuk meg, hogy az (a,b) intervallumon az f'' második deriváltnak van legalább egy zérushelye. Általánosítsuk ezt az eredményt.

13. Mutassuk meg, hogy ha az $[a,b]$ intervallumon mindenütt $f'' > 0$, akkor f'-nek legfeljebb egy zérushelye van az $[a,b]$ intervallumon. Mit mondhatunk abban az esetben, ha az $[a,b]$ intervallumon $f'' < 0$?

14. Mutassuk meg, hogy egy harmadfokú polinomnak legfeljebb három valós gyöke lehet.

Mutassuk meg, hogy a 15–22. feladatokban szereplő függvényeknek a megadott intervallumokon pontosan egy zérushelyük van.

15. $f(x) = x^4 + 3x + 1, [-2,1]$

16. $f(x) = x^3 + \frac{4}{x^2} + 7, (-\infty, 0)$

17. $g(t) = \sqrt{t} + t\sqrt{1+t} - 4, (0,\infty)$

18. $g(t) = \frac{1}{1-t} + \sqrt{1+t} - 3, 1, (-1,1)$

19. $r(\theta) = \theta + \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right) - 8, (-\infty,\infty)$

20. $r(\theta) = 2\theta - \cos^2\theta + \sqrt{2}, (-\infty,\infty)$

21. $r(\theta) = \sec\theta - \frac{1}{\theta^3} + 5, (0,\pi/2)$

22. $r(\theta) = \operatorname{tg}\theta - \operatorname{ctg}\theta - \theta, (0,\pi/2)$

A függvény meghatározása a deriváltja alapján

23. Tegyük fel, hogy $f(-1) = 3$ és $f'(x) = 0$ minden x-re. Szükségképpen igaz-e ekkor, hogy $f(x) = 3$ minden x-re? Válaszunkat indokoljuk.

24. Tegyük fel, hogy $f(0) = 5$ és $f'(x) = 2$ minden x-re. Szükségképpen igaz-e ekkor, hogy $f(x) = 2x + 5$ minden x-re? Válaszunkat indokoljuk.

25. Tegyük fel, hogy $f'(x) = 2x$ minden x-re. Keressük $f(2)$ értékét, ha

(a) $f(0) = 0$ **(b)** $f(1) = 0$

(c) $f(-2) = 3$

26. Mit mondhatunk azokról a függvényekről, amelyeknek a deriváltja konstans? Válaszunkat indokoljuk meg.

A 27–32. feladatokban keressük meg az összes olyan függvényt, amelyeknek a deriváltja a megadott függvény.

27. **(a)** $y' = x$ **(b)** $y' = x^2$

(c) $y' = x^3$

28. **(a)** $y' = 2x$ **(b)** $y' = 2x - 1$

(c) $y' = 3x^2 + 2x - 1$

29. **(a)** $y' = -\frac{1}{x^2}$ **(b)** $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$

(c) $y' = 5 + \frac{1}{x^2}$

30. **(a)** $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **(b)** $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(c) $y' = 4x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

31. **(a)** $y' = \sin 2t$ **(b)** $y' = \cos\frac{t}{2}$

(c) $y' = \sin 2t + \cos\frac{t}{2}$

32. **(a)** $y' = \sec^2\theta$ **(b)** $y' = \sqrt{\theta}$

(c) $y' = \sqrt{\theta} - \sec^2\theta$

A 33–36. feladatokban határozzuk meg azt a függvényt, amelynek a deriváltja az adott függvény, grafikonja pedig áthalad a P ponton.

33. $f'(x) = 2x - 1, \quad P(0,0)$

34. $g'(x) = \frac{1}{x^2} + 2x, \quad P(-1,1)$

35. $r'(\theta) = 8 - \csc^2\theta, \quad P(\frac{\pi}{4}, 0)$

36. $r'(t) = \sec t \operatorname{tg} t - 1, \quad P(0,0)$

Határozzuk meg a sebesség alapján a test helyzetét

A 37–40. feladatokban megadjuk az egyik koordinátatengely mentén mozgó test a $v = ds/dt$ sebességét és kiindulási helyzetét. Határozza meg a test helyét t idő elteltével.

37. $v = 9,8t + 5, \quad s(0) = 10$

38. $v = 32t - 2, \quad s(0,5) = 4$

39. $v = \sin \pi t, \quad s(0) = 0$

40. $v = \frac{2}{\pi}\cos\frac{2t}{\pi}, \quad s(\pi^2) = 1$

Az elmozdulás meghatározása a gyorsulásból

A 41–44. feladatokban megadjuk a koordinátatengely mentén mozgó test $\frac{d^2s}{dt^2}$ gyorsulását, kezdősebességét és kezdeti pozícióját. Határozzuk meg a test helyzetét a t időpontban.

41. $a = 32, \quad v(0) = 20, \quad s(0) = 5$

42. $a = 9,8, \quad v(0) = -3, \quad s(0) = 0$

43. $a = -4\sin 2t, \quad v(0) = 2, \quad s(0) = -3$

44. $a = \frac{9}{\pi^2} \cdot \frac{3t}{\pi}, \quad v(0) = 0, \quad s(0) = -1$

Alkalmazások

45. Hőmérsékletváltozás. Ha a higanyhőmérőt kivesszük a mélyhűtőből, és forró vízbe tesszük, 14 másodperc alatt melegszik fel $-19°$C-ról $100°$C-ra. Igazolja, hogy eközben valamikor a higany $8,5°$C/sec sebességgel melegedett.

46. Fizetős útszakaszon az egyik ellenőrzőkapunál egy tehergépkocsi-vezetőnek büntetőcédulát nyújtottak át, amely szerint egy 250 kilométeres útszakaszt 2 óra alatt tett meg, miközben az útszakaszon 120 kilométer/óra a megengedett maximális sebesség. A sofőrt sebességtúllépés miatt feljelentették. Miért?

47. Kortárs beszámolók szerint egy 170 evezős gálya (ókori görög vagy római hadihajó) egy alkalommal 24 óra alatt 340 kilométert tett meg. Magyarázzuk meg, hogy e hőstett közben miért kellett a gálya sebességének egy alkalommal szükségképpen meghaladnia a 14 km/h-t.

48. Egy futó a 42,2 kilométeres New York-i maratont 2,2 óra alatt teljesítette. Mutassuk meg, hogy a futó legalább kétszer pontosan 17 kilométer/óra sebességgel futott.

49. Bizonyítsuk be, hogy egy két órás autóverseny során a versenyautó sebességmérője valamely pillanatban pontosan a verseny teljes tartamára vonatkozó átlagsebességet mutatja.

50. Szabadesés a Holdon. Holdunkon $1{,}6\,\text{m/s}^2$ a gravitációs gyorsulás. Mekkora lesz egy mélybe hulló szikladarab sebessége a becsapódás előtt, ha pontosan 30 másodpercig zuhan?

További példák és feladatok

51. Mértani közép. Az a és b számok *mértani közepe* a $\sqrt{ab}$ szám. Mutassuk meg, hogy ha a és b pozitív számok, akkor az $[a,b]$ intervallumon az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény esetében a középértéktételben szereplő c mennyiségre igaz, hogy $c = \sqrt{ab}$.

52. Számtani közép. Az a és b számok *számtani közepe* $(a+b)/2$. Mutassuk meg, hogy bármely $[a,b]$ intervallumon az $f(x) = x^2$ függvény esetében a középértéktételben szereplő c mennyiségre igaz, hogy $c = (a+b)/2$.

53. Ábrázoljuk az

$$f(x) = \sin x \sin(x+2) - \sin^2(x+1)$$

függvényt. Milyen a függvénygrafikon alakja? Miért ilyen? Válaszunkat indokoljuk.

54. Rolle-tétel.

(a) Adjunk meg olyan $f(x)$ polinomfüggvényt, amelynek zérushelyei $x = -2, -1, 0, 1, 2$.

(b) Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben f-et és az f' deriváltat. Milyen összefüggés van ábránk és a Rolle-tétel között?

(c) A $g(x) = \sin x$ függvény és deriváltja ugyanezt a jelenséget tükrözik?

55. Egyértelmű megoldás. Tegyük fel, hogy f folytonos az $[a,b]$ és differenciálható az (a,b) intervallumon. Tegyük fel továbbá, hogy $f(a)$ és $f(b)$ ellenkező előjelűek, és hogy a és b között $f' \neq 0$. Mutassuk meg, hogy a és b között pontosan egyszer lesz $f(x) = 0$.

56. Tegyük fel, hogy f és g differenciálható az $[a,b]$ intervallumon, továbbá hogy $f(a) = g(a)$ és $f(b) = g(b)$. Mutassuk meg, hogy a és b között létezik legalább egy olyan pont, ahol f és g grafikonjainak érintői párhuzamosak vagy egybeesnek. Készítsünk vázlatot.

57. Ha az f és g differenciálható függvények grafikonja a síknak ugyanabból a pontjából indul, és a két függvény megváltozása minden pontban ugyanaz, következik-e ebből, hogy a grafikonok mindenütt azonosak? Válaszunkat indokoljuk.

58. Mutassuk meg, hogy bármely a és b számra igaz a

$$|\sin b - \sin a| \leq |b-a|$$

egyenlőtlenség.

59. Tegyük fel, hogy f differenciálható, ha $a \leq x \leq b$, és hogy $f(b) < f(a)$. Mutassuk meg, hogy van olyan a és b közé eső pont, ahol f' negatív.

60. Legyen f az $[a,b]$ intervallumon értelmezett függvény. Milyen kikötéseket kell tennünk f-re, ha garantálni akarjuk az

$$\min f' \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \max f'$$

egyenlőtlenség fennállását, ahol $\min f'$, illetve $\max f'$ az f' minimumát, illetve maximumát jelöli? Válaszunkat indokoljuk.

61. A 60. feladatban szereplő egyenlőtlenség alapján becsüljük meg $f(0,1)$ értékét, ha $f'(x) = 1/(1+x^4\cos x)$, $0 \leq x \leq 0,1$ és $f(0) = 1$.

62. A 60. feladatban szereplő egyenlőtlenség alapján becsüljük meg $f(0,1)$ értékét, ha $f'(x) = 1/(1-x^4)$, $0 \leq x \leq 0,1$ és $f(0) = 2$.

63. Legyen f mindenütt differenciálható függvény; tegyük fel, hogy $f(1) = 1$, $f' < 0$ a $(-\infty, 1)$ intervallumon, és $f' > 0$ az $(1,\infty)$ intervallumon.

(a) Mutassuk meg, hogy $f(x) \geq 0$ bármely x-re.

(b) Igaz-e szükségképpen, hogy $f'(1) = 0$? Adjunk magyarázatot.

64. Legyen $f(x) = px^2 + qx + r$ az $[a,b]$ intervallumon értelmezett másodfokú függvény. Mutassuk meg, hogy pontosan egy olyan $c \in (a,b)$ létezik, amely eleget tesz a középértéktétel konklúziójának.

4.3. Monoton függvények és az első derivált teszt

Egy differenciálható függvény grafikonjának felrajzolásakor hasznos, ha tudjuk, hogy egy adott intervallumon hol növekszik (balról jobbra haladva) és hol csökken a függvény. Ebben az alfejezetben pontosan definiáljuk, mit jelent a függvény növekedése és csökkenése egy adott intervallumon. Azt is megmutatjuk, hogyan kell tesztelni a függvény kritikus pontjait, amikor lokális szélsőértékeket keresünk.

Növekvő és csökkenő függvények

Milyen függvénytípusnak pozitív, illetve negatív a deriváltja? A középértéktétel harmadik következménye a következő választ adja erre a kérdésre: Ha a derivált pozitív, a függvény növekvő, ha negatív, a függvény csökken.

DEFINÍCIÓK Növekvő, csökkenő függvény.

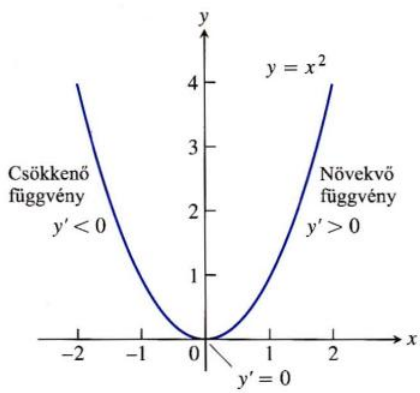
Legyen f az I intervallumon értelmezett függvény.

1. Ha $f(x_1) < f(x_2)$ az I bármely olyan x_1 és x_2 pontjára, amelyre $x_1 < x_2$, akkor f *növekvő* az I intervallumon.
2. Ha $f(x_1) > f(x_2)$ az I bármely olyan x_1 és x_2 pontjára, amelyre $x_1 < x_2$, akkor f *csökkenő* az I intervallumon.

Az olyan függvényt, amely az I-n növekvő vagy csökkenő, *monotonnak* nevezzük I-n.

Hangsúlyozzuk, hogy a növekvő és csökkenő függvény definíciójában az egyenlőtlenségnek *minden* $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ esetén fenn kell állnia. Mivel a függvényértékeket összehasonlító egyenlőtlenségekben itt a $<$ és nem a $\leq$ jel szerepel, egyes szakkönyvek a fenti feltételeket teljesítő függvényekre a *szigorúan* monoton növekvő, illetve csökkenő megnevezést használják. Az I intervallum véges és végtelen is lehet.

Az $f(x) = x^2$ függvény csökkenő a $(-\infty, 0]$, és növekvő a $[0, -\infty)$ intervallumon, amint az a függvénygrafikonon is jól látszik (l. a 4.21. ábrát). A függvény monoton a $(-\infty, 0]$ és a $[0, -\infty)$ intervallumokon, de nem monoton a $(-\infty, \infty)$ intervallumon. A $(-\infty, 0)$ intervallumon minden érintőjének negatív a meredeksége, így a derivált ezen az intervallumon mindenütt negatív; a $(0, -\infty)$ intervallumon az érintők meredeksége és az első derivált is pozitív. A következő eredmény alátámasztja ezeket a megfigyeléseket.



4.21. ÁBRA: Az $f(x) = x^2$ függvény monoton a $(-\infty, 0]$ és a $[0, -\infty)$ intervallumon, de nem monoton a $(-\infty, \infty)$ intervallumon.

3. KÖVETKEZMÉNY Első derivált teszt monoton függvényekre

Tegyük fel, hogy f folytonos $[a,b]$-n és differenciálható (a,b)-n.

Ha $f'(x) > 0$ minden $x \in (a,b)$ esetén, akkor f növekvő az $[a,b]$ intervallomon.

Ha $f'(x) < 0$ minden $x \in (a,b)$-re, akkor f csökkenő az $[a,b]$ intervallumon.

Bizonyítás. Legyen x_1 és x_2 $[a,b]$ két tetszőleges pontja, amelyekre fennáll, hogy $x_1 < x_2$. Ha a középértéktételt az $[x_1, x_2]$ intervallumon alkalmazzuk f-re, akkor azt kapjuk, hogy

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

valamilyen x_1 és x_2 közé eső c-re. Az egyenlőség jobb oldalának előjele megegyezik $f'(c)$ előjelével, ugyanis $x_2 - x_1$ pozitív. Ezért $f(x_2) > f(x_1)$, ha f' pozitív az (a,b) intervallumon, és $f(x_2) < f(x_1)$, ha f' negatív az (a,b) intervallumon. □

Most lássuk, hogyan használhatjuk az első derivált tesztet annak megállapítására, hogy egy adott függvény hol növekvő, illetve csökkenő. Ha a és b (ahol $a < b$) az f két kritikus pontja, továbbá ha f' létezik, de sehol nem nulla az (a,b) intervallumon, akkor f'-nek pozitívnak (negatívnak) kell lennie az (a,b) intervallum egészén (l. a 3.1. alfejezet 2. Tételét). Az f' deriváltfüggvény előjelének meghatározására az egyik lehetőség, hogy egyszerűen behelyettesítünk néhány $x \in (a,b)$ értéket. Azután alkalmazzuk a 3. Következményt.

1. PÉLDA **Az első derivált vizsgálata a függvény monotonitásának meghatározására.**

Keressük meg az $f(x) = x^3 - 12x - 5$ függvény kritikus pontjait, és adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken a függvény növekvő, illetve csökkenő.

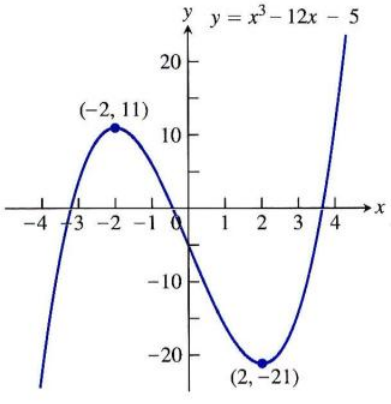
Megoldás. Az f függvény mindenütt folytonos és differenciálható. Első deriváltja az

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$$
$$= 3(x+2)(x-2)$$

függvény, amelynek $x = -2$ és $x = 2$ a két zérushelye. Ezek a kritikus pontok f értelmezési tartományát a $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$ és $(2,\infty)$ intervallumokra osztják fel, amelyeken f' vagy pozitív, vagy negatív. A szóban forgó előjeleket úgy határozzuk meg az egyes részintervallumokon, hogy alkalmas x értékeket behelyettesítünk. Az f viselkedése a három részintervallumon ekkor a 3. Következmény alapján tisztázható. Az eredményeket az alábbi táblázatban foglaltuk össze, a függvény grafikonját pedig a 4.22. ábra mutatja.

intervallumok	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
f' értéke	$f'(-3) = 15$	$f'(0) = -12$	$f'(3) = 15$
f' előjele	+	−	+
f viselkedése	növekvő	csökkenő	növekvő

□



4.22. ÁBRA: Az $f(x) = x^3 - 12x - 5$ függvény a három, egymástól elválasztott részintervallumon monoton (1. példa).

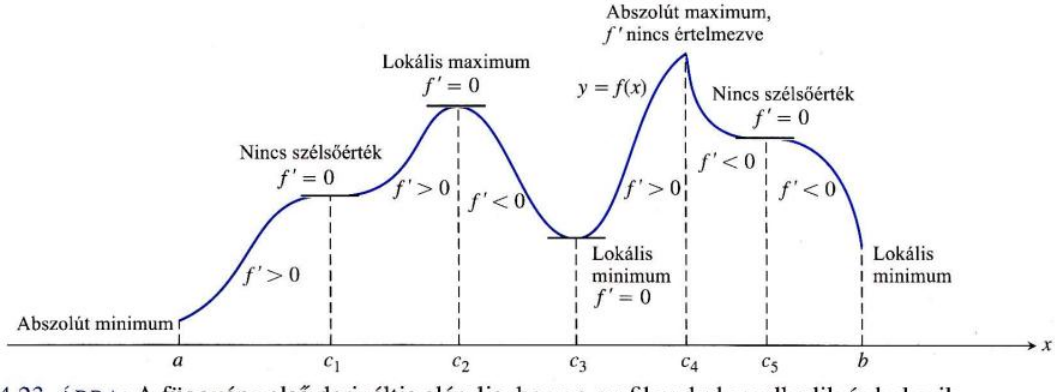
A 3. Következmény véges és végtelen intervallumokra is fennáll, az 1. példában ezt ki is használtuk.

A függvény menetének ismerete azt is elárulja, hogy egy lokális szélsőérték minimum vagy maximum-e.

Az első derivált és a lokális szélsőérték

A 4.23. ábrán látható, hogy ha f folytonos és egy ponttól közvetlenül balra $f' < 0$, közvetlenül jobbra viszont $f' > 0$, akkor a függvénynek ebben a pontban minimuma van. (Ha a vizsgált pont végpont, akkor csak az egyik oldalt kell figyelembe venni.) Azaz, ha a függvény a ponttól balra csökken, jobbra pedig nő, és a pontban folytonos, akkor ott minimuma van. Hasonlóan, ha egy ponttól balra $f' > 0$ és a ponttól jobbra $f' < 0$, és a függvény folytonos, akkor ott maximuma van.

Ezek a megfigyelések vezetnek el a differenciálható függvények lokális szélsőértéke létezésének, illetve e szélsőérték típusának megállapítására alkalmas módszerhez.



4.23. ÁBRA: A függvény első deriváltja elárulja, hogy a grafikon hol emelkedik és hol esik.

Az első derivált és a lokális szélsőérték II.

Tegyük fel, hogy c az f folytonos függvény egy kritikus pontja, és f differenciálható valamely c-t tartalmazó intervallum minden pontjában, kivéve esetleg magát a c pontot. Balról jobbra haladva:

1. ha f' a c helyen negatívról pozitívra vált, akkor f-nek lokális minimuma van a c pontban,
2. ha f' a c helyen pozitívról negatívra vált, akkor f-nek lokális maximuma van a c pontban,
3. ha f' a c helyen nem vált előjelet (f' a c-től jobbra és balra egyaránt pozitív, vagy egyaránt negatív), akkor f-nek nincs lokális szélsőértéke a c helyen.

Az intervallum-végpontokban a vizsgálatot hasonlóképpen végezzük, csupán annyi a különbség, hogy f' értékét c-nek csak egyik oldalán vesszük figyelembe.

Bizonyítás. 1. rész: Mivel f' értéke c-ben negatívról pozitívra vált, vannak olyan a és b számok, hogy $f' < 0$ az (a,c) intervallumon, és $f' > 0$ a (c,b) intervallumon. Ha $x \in (a,c)$, akkor $f(c) < f(x)$, mert $f' < 0$-ból következik, hogy f csökkenő az $[a,c]$ intervallumon. Ha $x \in (c,b)$, akkor $f(c) < f(x)$, mert $f' > 0$-ból következik, hogy f növekvő a $[c,b]$ intervallumon. Ezért $f(x) \geq f(c)$ minden $x \in (a,b)$-re. Így a definíció szerint f-nek lokális minimuma van c-ben.

A 2. és 3. állítás hasonlóan bizonyítható. □

2. PÉLDA **Szélsőérték meghatározása.**

Keressük meg az

$$f(x) = x^{1/3}(x-4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$$

függvény kritikus pontjait. Határozzuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken f növekvő, illetve csökkenő.

Megoldás. Az

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{4/3} - 4x^{1/3}\right) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} =$$
$$= \frac{4}{3}x^{-2/3}(x-1) = \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}}$$

első deriváltnak zérushelye van az $x = 1$ pontban, és nincsen értelmezve az $x = 0$ pontban. Értelmezési tartományának nincsenek végpontjai, így szélsőértéke csak az $x = 0$ és $x = 1$ pontokban lehet.

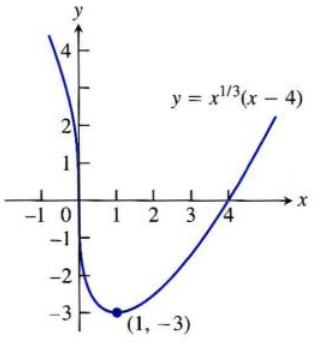
A kritikus pontok olyan intervallumokra osztják fel az x-tengelyt, amelyeken f' előjele állandó. Az f' deriváltfüggvény előjelének változása f menetének változására utal. Az információkat az alábbihoz hasonló táblázatban összegezhetjük:

Intervallum	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
f' előjele	−	−	+
f menete	csökkenő	csökkenő	növekvő

A középértéktétel 3. Következménye szerint f csökken a $(-\infty, 0)$ és a $(0,1)$ intervallumokon, és növekszik az $(1,\infty)$ intervallumon. Az első derivált vizsgálata alapján f-nek nem lehet szélsőértéke az $x = 0$ pontban (mert f' nem vált előjelet), és lokális minimuma van az $x = 1$ pontban (mivel itt f' negatívról pozitívra vált).

A lokális minimum értéke: $f(1) = 1^{1/3}(1-4) = -3$. Ez egyben abszolút minimum is, mivel balról az 1 pont felé közeledve a függvény értéke csökken, tőle jobbra távolodva pedig nő. A 4.24. ábra a függvény grafikonját és szélsőértékét mutatja.

Megjegyezzük, hogy mivel $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$, a függvény grafikonjának érintője az $x = 0$ pontban függőleges egyenes. □



4.24. ÁBRA: Az $f(x) = x^{1/3}(x-4)$ függvény csökken, ha $x < 1$, és nő, ha $x > 1$ (2. példa).

4.3. Feladatok

f' ismeretében vizsgáljuk f-et

Válaszoljunk a következő kérdésekre az 1–8. feladatokban megadott deriváltak alapján.

(a) Melyek f kritikus pontjai?

(b) Mely intervallumokon növekszik, illetve csökken f?

(c) Mely pontokban lehet f-nek lokális maximuma vagy minimuma?

1. $f'(x) = x(x-1)$
2. $f'(x) = (x-1)(x+2)$
3. $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$
4. $f'(x) = (x-1)^2(x+2)^2$
5. $f'(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$
6. $f'(x) = (x-7)(x+1)(x+5)$
7. $f'(x) = x^{1/3}(x+2)$
8. $f'(x) = x^{-1/2}(x-3)$

Szélsőértékek

A 9–28. feladatokban

(a) keressük meg azokat az intervallumokat, amelyeken a függvény csökken illetve nő;

(b) amennyiben léteznek, határozzuk meg a függvények szélsőértékeit és szélsőértékhelyeit; majd állapítsuk meg, hogy

(c) mely szélsőértékek abszolút szélsőértékek; végül

(d) eredményeinket támasszuk alá számítógépes grafikai program segítségével.

9. $g(t) = -t^2 - 3t + 3$
10. $g(t) = -3t^2 + 9t + 5$
11. $h(x) = -x^3 + 2x^2$
12. $h(x) = 2x^3 - 18x$
13. $f(\theta) = 3\theta^3 - 4\theta^3$
14. $f(\theta) = 6\theta - \theta^3$
15. $f(r) = 3r^3 + 16r$
16. $h(r) = (r+7)^3$
17. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$
18. $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$
19. $H(t) = \frac{3}{2}t^4 - t^6$
20. $K(t) = 15t^3 - t^5$
21. $g(x) = x\sqrt{8-x^2}$
22. $g(x) = x^2\sqrt{5-x}$
23. $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}, \quad x \neq 2$
24. $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2+1}$
25. $f(x) = x^{1/3}(x+8)$
26. $g(x) = x^{2/3}(x+5)$
27. $h(x) = x^{1/3}(x^2-4)$
28. $k(x) = x^{2/3}(x^2-4)$

Szélsőérték félig nyílt intervallumon

A 29–36. feladatokban a teendőink a következők.

(a) Határozzuk meg a függvény lokális szélsőértékeit és szélsőértékhelyeit az adott tartományon.

(b) Közülük mely szélsőértékek abszolút szélsőértékek?

(c) Eredményeinket támasszuk alá számítógépes grafikai program segítségével.

29. $f(x) = 2x - x^2, \quad -\infty < x \leq 2$
30. $f(x) = (x+1)^2, \quad -\infty < x \leq 0$
31. $g(x) = x^2 - 4x + 4, \quad 1 \leq x < -\infty$
32. $g(x) = -x^2 - 6x - 9, \quad -4 \leq x < \infty$
33. $f(t) = 12t - t^3, \quad -3 \leq t < \infty$
34. $f(t) = t^3 - 3t^2, \quad -\infty < t \leq 3$
35. $h(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, \quad 0 \leq x < \infty$
36. $k(x) = x^3 + 3x^3 + 3x + 1, \quad -\infty < x \leq 0$

A függvény grafikonjának megrajzolása számítógépes grafikai programmal

A 37–40. feladatokban

(a) keressük meg a függvény lokális szélsőértékeit és szélsőértékhelyeit, majd

(b) rajzoljuk fel közös koordináta-rendszerben a függvénynek és deriváltjának grafikonját. Milyen összefüggés áll fenn f grafikonjának viselkedése és az f' függvény előjele között?

37. $f(x) = \frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
38. $f(x) = -2\cos x - \cos^2 x, \quad -\pi \leq x \leq \pi$
39. $f(x) = \csc^2 x - 2\operatorname{ctg} x, \quad 0 < x < \pi$
40. $f(x) = \sec^2 - 2\operatorname{tg} x, \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

További példák és feladatok

Mutassuk meg, hogy a 41., 42. feladatokban szereplő függvényeknek a megadott θ értékre lokális szélsőértékük van, és állapítsuk meg a lokális szélsőérték típusát is.

41. $h(\theta) = 3\cos\dfrac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \theta = 0$ és $\theta = 2\pi$
42. $h(\theta) = 5\sin\dfrac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad \theta = 0$ és $\theta = \pi$

43. Vázoljuk fel olyan, az $(1,1)$ ponton áthaladó, differenciálható $y = f(x)$ függvény grafikonját, amelyre $f'(1) = 0$ és

(a) $f(x) > 0$, ha $x < 1$ és $f'(x) < 0$, ha $x > 1$;

(b) $f(x) < 0$, ha $x < 1$ és $f'(x) > 0$, ha $x > 1$;

(c) $f(x) > 0$, ha $x \neq 1$;

(d) $f(x) < 0$, ha $x \neq 1$.

44. Vázoljuk fel egy olyan $y = f(x)$ differenciálható függvény grafikonját, amelynek

(a) lokális minimuma van az $(1,1)$, és lokális maximuma a $(3,3)$ pontban;

(b) lokális maximuma van az $(1,1)$, és lokális minimuma a $(3,3)$ pontban;

(c) lokális maximuma van az $(1,1)$ és a $(3,3)$ pontban;

(d) lokális minimuma van az $(1,1)$ és a $(3,3)$ pontban.

45. Vázoljuk fel egy olyan folytonos $y = f(x)$ függvény grafikonját, amelyre

(a) $g(2) = 2$, $0 < g' < 1$, ha $x < 2$, $g'(x) \to 1^-$, ha $x \to 2^-$, $-1 < g' < 0$, ha $x > 2$ és $g'(x) \to -1^+$, ha $x \to 2^+$;

(b) $g(2) = 2$, $g' < 0$, ha $x < 2$, $g'(x) \to -\infty$, ha $x \to 2^-$, $g' > 0$, ha $x > 2$ és $g'(x) \to \infty$, ha $x \to 2^+$.

46. Vázoljuk fel egy olyan folytonos $y = h(x)$ függvény grafikonját, amelyre

(a) $h(0) = 0$, $-2 \le h(x) \le 2$ minden x-re, $h'(x) \to \infty$, ha $x \to 0^-$ és $h'(x) \to \infty$, ha $x \to 0^+$;

(b) $h(0) = 0$, $-2 \le h(x) \le 2$ minden x-re, $h'(x) \to \infty$, ha $x \to 0^-$ és $h'(x) \to -\infty$, ha $x \to 0^+$.

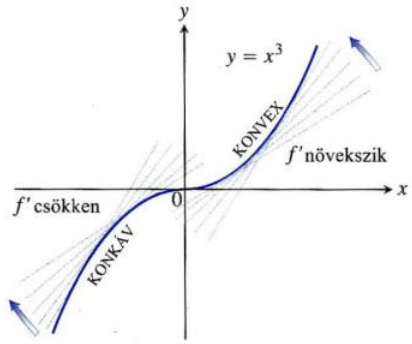
47. A $c = 2$ pont környezetében az x tengely mentén balról jobbra haladva az $f(x) = x^3 - 3x + 2$ függvény grafikonja emelkedik vagy esik? Válaszunkat indokoljuk.

48. Határozzuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken az $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ függvény csökken, illetve nő. Ismertessük válaszunk hátterét.

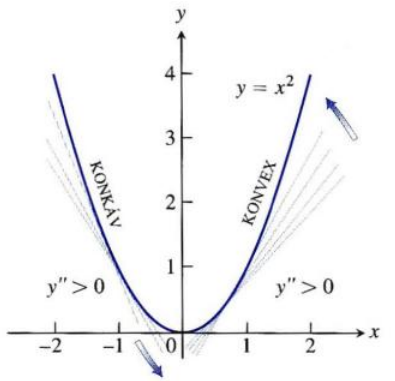
4.4. Konvexitás és a függvénygörbe felrajzolása

A 4.3. alfejezetben kiderült: az első derivált elárulja, hogy hol növekszik, illetve hol csökken a függvény. Az első derivált segítségével az is megállapítható, hogy valamely differenciálható függvény kritikus pontjában a függvénynek lokális maximuma vagy minimuma van, esetleg grafikonja változatlanul emelkedik vagy süllyed.

Ebben az alfejezetben azt fogjuk megvizsgálni, hogy a második derivált milyen információkkal szolgál egy differenciálható függvény grafikonjának alakjáról. Ezekkel a kiegészítő információkkal felvértezve már képesek leszünk megragadni a függvény és grafikonja viselkedésének legfontosabb jellemzőit, és ezeket egy ábrán megjeleníteni.



4.25. ÁBRA: Az $f(x) = x^3$ függvény grafikonja konkáv a $(-\infty, 0)$ intervallumon és konvex a $(0, \infty)$ intervallumon (1. példa).



4.26. ÁBRA: Az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja bármely intervallumon konvex (1. példa (b) része).

Konvexitás

Ahogy az a 4.25. ábrán is látható, az $y = x^3$ görbe x növekedtével emelkedik, de a $(-\infty, 0)$ és a $(0, \infty)$ intervallumokra eső szakaszai másként görbülnek. Amint a görbe mentén balról jobbra haladunk az origó felé, a görbe jobbra hajlik, és az érintője alá esik. A $(-\infty, 0)$ intervallumon iránytangensének meredeksége csökken. Ez a fajta görbület a *konkáv* görbére jellemző.

DEFINÍCIÓ **Konvex, konkáv.**

A differenciálható $y = f(x)$ függvény grafikonja

(a) *konvex* a nyílt I intervallumon, ha f' növekvő az I-n;

(b) *konkáv* a nyílt I intervallumon, ha f' csökkenő az I-n.

Ha az $f(x)$ függvénynek létezik a második deriváltja, akkor a középértéktétel 3. Következménye alapján f' az I intervallumon növekvő, ha $f'' > 0$, illetve csökkenő, ha $f'' < 0$.

A második derivált teszt a függvény konvexitására.

Legyen $f(x)$ az I intervallumon kétszeresen deriválható függvény.

1. Ha $f'' > 0$ az I-n, akkor f grafikonja konvex az I intervallumon.

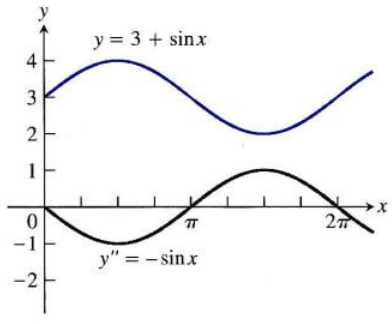
2. Ha $f'' < 0$ az I-n, akkor f grafikonja konkáv az I intervallumon.

Ha az $y = f(x)$ kétszeresen differenciálható függvény, akkor y'' és f'' egyformán használható a második derivált jelölésére.

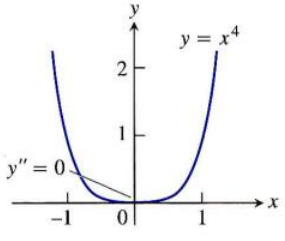
1. PÉLDA **A második derivált teszt alkalmazása.**

(a) Az $y = x^3$ görbe (4.25. ábra) konkáv a $(-\infty, 0)$ intervallumon, ahol $y'' = 6x < 0$, és konvex a $(0, \infty)$ intervallumon, ahol $y'' = 6x > 0$.

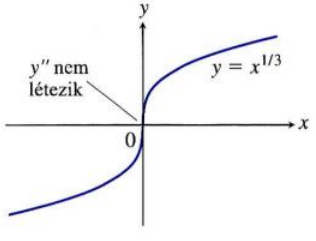
(b) Az $y = x^2$ görbe (4.26. ábra) konvex a $(-\infty, \infty)$ intervallumon, mert $y'' = 2$ mindig pozitív. □



4.27. ÁBRA: Így használhatjuk az y'' grafikont y konvexitásának meghatározására (2. példa)



4.28. ÁBRA: Az $y = x^4$ grafikonnak nincs inflexiós pontja az origóban annak ellenére, hogy ott $y'' = 0$ (3. példa).



4.29. ÁBRA: Olyan pontban, ahol y'' nem létezik, még lehet inflexiós pont (4. példa).

2. PÉLDA **A konvexitás meghatározása.**

Vizsgáljuk meg konvexitás szempontjából az $y = 3 + \sin x$ görbét a $(0, 2\pi)$ intervallumon.

Megoldás. Az $y = 3 + \sin x$ konkáv a $(0, \pi)$ intervallumon, ahol $y'' = -\sin x$ negatív. Konvex a $(\pi, 2\pi)$ intervallumon, ahol $y'' = -\sin x$ pozitív (l. a 4.27. ábrát). □

Inflexiós pontok

A 2. példában szereplő $y = 3 + \sin x$ görbe konvexitása a $(\pi, 3)$ pontban megváltozik. A $(\pi, 3)$ pontot a görbe *inflexiós pontjának* nevezzük.

DEFINÍCIÓ **Inflexiós pont.**

Az olyan pontot, ahol a függvény grafikonjának van érintője és ahol a görbe konvexitása megváltozik, *inflexiós pontnak* nevezzük.

A görbének az a pontja, amelynek egyik oldalán y'' pozitív, másik oldalán pedig negatív, inflexiós pont. Egy ilyen pontban y'' vagy nulla (mert y' deriváltjának fel kell vennie ezt a köztes értéket) vagy nincsen értelmezve. Ha y kétszeresen differenciálható függvény, akkor az inflexiós pontban $y'' = 0$, és y'-nek lokális maximuma vagy minimuma van.

3. PÉLDA **Nincs mindenütt inflexiós pont, ahol $y'' = 0$.**

Az $y = x^4$ görbének nincs inflexiós pontja az $x = 0$ helyen (4.28. ábra). Bár $y'' = 12x^2$ értéke itt nulla, y'' itt nem vált előjelet. □

4. PÉLDA **Inflexiós pont ott is lehet, ahol y'' nem értelmezett.**

Az $y = x^{1/3}$ görbének inflexiós pontja van az $x = 0$ helyen (4.29. ábra), holott y'' nincs értelmezve ebben a pontban:

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2}(x^{1/3}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}. \qquad \square$$

A 3. példából láthatjuk, hogy a második derivált nulla volta még nem garantálja az inflexiós pont létezését. A 4. példa pedig azt mutatja, hogy olyan pont is lehet inflexiós pont, ahol a második derivált *nincs* értelmezve.

Amikor egy egyenes vonalú mozgást végző test mozgását mint az idő függvényét vizsgáljuk, fontos lehet, hogy a test gyorsulása, azaz a második derivált pozitív vagy negatív-e. A test elmozdulásfüggvényének grafikonján egy inflexiós pont megmutatja, hogy hol vált a gyorsulás előjelet.

5. PÉLDA **Egyenes vonalú mozgás vizsgálata.**

Mozogjon egy részecske vízszintes egyenes mentén az

$$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5, \quad t \geq 0$$

függvény szerint. Határozzuk meg a sebességét és gyorsulását, és írjuk le a részecske mozgását.

Megoldás. A sebesség

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 28t + 22 = 2(t-1)(3t-11),$$

a gyorsulás pedig

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 12t - 28 = 4(3t-7).$$

Amikor $s(t)$ nő, akkor a részecske jobbra mozog, amikor csökken, balra.

Vegyük észre, hogy az első derivált ($v = s'$) a $t = 0$ és a $t = 11/3$ időpontokban lesz nulla.

Intervallum	$0 < t < 1$	$1 < t < 11/3$	$11/3 < t$
$v = s'$ előjele	+	−	+
s menete	növekvő	csökkenő	növekvő
A mozgás iránya	jobbra	balra	jobbra

A $[0,1)$ és $(11/3,\infty)$ időintervallumokban a részecske jobbra, az $(1,11/3)$ időintervallumban pedig balra halad. A fennmaradó $t = 1$ és $t = 11/3$ időpontokban a sebsség 0.

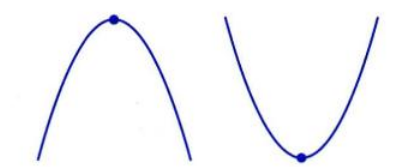
Az $a(t) = s''(t) = 4(3t - 7)$ gyorsulás a $t = 7/3$ időpillanatban lesz nulla.

Intervallum	$0 < t < 7/3$	$7/3 < t$
$a = v'$ előjele	−	+
s grafikonja	konkáv	konvex

A gyorsító erő a $[0,7/3]$ intervallumon balra mutat, átmenetileg nulla a $t = 1/7$ időpontban, minden más esetben pedig jobbra mutat. □

A második derivált és a lokális szélsőértékek

Ahelyett, hogy f' előjelváltását vizsgálnánk a kritikus pontokban, a lokális szélsőérték létezését és típusát néha a következő módon is megállapíthatjuk:



$f' = 0, f'' < 0$ ⇒ lokális maximum

$f' = 0, f'' > 0$ ⇒ lokális minimum

5. TÉTEL **A második derivált és a lokális szélsőértékek.**

Tegyük fel, hogy f'' folytonos az $x = c$ pontot tartalmazó nyílt intervallumon.

1. Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) < 0$, akkor f-nek lokális maximuma van az $x = c$ pontban.
2. Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) > 0$, akkor f-nek lokális minimuma van az $x = c$ pontban.
3. Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) = 0$, akkor nem állíthatunk semmi biztosat. A függvénynek lehet lokális maximuma, lokális minimuma, de lehet, hogy sem ez, sem az nincs.

Bizonyítás. 1. rész: Ha $f''(c) < 0$, akkor f'' folytonossága miatt $f''(x) < 0$ valamely, a c pontot tartalmazó nyílt I intervallumon. Ezért f' csökkenő ezen az intervallumon. Mivel $f'(c) = 0$, a c helyen f' előjele pozitívról negatívra vált, így az első derivált teszt alapján f-nek c-ben lokális maximuma van.

A 2. rész bizonyítása hasonlóképpen történik.

A 3. rész bizonyítása végett tekintsük az $y = x^4$, $y = -x^4$ és $y = x^3$ függvényeket. Mindhárom függvény első és második deriváltja egyaránt nulla az $x = 0$ pontban. Míg az $y = x^4$ függvénynek lokális minimuma van ebben a pontban, az $y = -x^4$ függvénynek lokális maximuma, $y = x^3$ viszont bármely, az $x = 0$ pontot tartalmazó nyílt intervallumon növekvő (itt sem maximuma, sem minimuma nincsen). Ezért a második derivált vizsgálata ilyenkor nem hoz eredményt. □

A tétel alkalmazása csupán azt kívánja meg, hogy f'' *értékét a* c *pontban*, nem pedig egy a c-t tartalmazó intervallumon ismerjük. Emiatt a tétel egyszerűen alkalmazható. Ez volt a jó hír. A rossz hír viszont az, hogy a tételből nem vonhatunk le semmiféle következtetést, amennyiben $f''(c) = 0$, vagy f'' nincs értelmezve az $x = c$ helyen. Ha ez a helyzet, akkor a lokális szélsőértékek meghatározására az első derivált tesztet vagy egyéb módszert kell használnunk.

Az f' és az f'' deriváltfüggvény együttesen felvilágosítást ad számunkra a függvény grafikonjának alakjáról, azaz arról, hogy hol vannak a függvény kritikus pontjai, hogyan viselkedik a kritikus pontokban, hol növekvő és hol csökkenő, valamint hogy hogyan hajlik a görbe, azaz milyen a konvexitása. Ezen információk birtokában vázlatosan fölrajzolhatjuk a függvény grafikonját.

6. PÉLDA **f grafikonjának megrajzolása f' és f'' segítségével.**
Rajzoljuk meg az

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$$

függvény grafikonját. Kövessük az alábbi lépéseket.

(a) Határozzuk meg f szélsőértékhelyeit.

(b) Keressük meg azokat az intervallumokat, amelyeken f növekvő illetve csökkenő.

(c) Keressük meg, hol lesz f grafikonja konvex, illetve konkáv.

(d) Vázoljuk fel nagy vonalakban f grafikonját.

(e) Ábrázoljuk a jellegzetes pontokat: a lokális minimum- és maximumhelyeket, az inflexiós pontokat és a szakadási helyeket. Végül rajzoljuk meg a görbét.

Megoldás. Az f függvény folytonos, mivel deriválható; a deriváltja: $f'(x) = = 4x^3 - 12x^2$. A függvény értelmezési tartománya (∞, ∞), ugyanez a halmaz f' értelmezési tartománya is. Ezért f-nek csak ott lehet kritikus pontja, ahol $f' = 0$. Mivel

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3),$$

az első derivált az $x = 0$ és $x = 3$ helyeken lesz zérus.

Intervallum	$x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
f' előjele	–	–	+
f menete	csökkenő	csökkenő	növekvő

(a) Az első derivált teszt és a fenti táblázat alapján látható, hogy az $x = 0$ helyen nincs szélsőérték, az $x = 3$ helyen pedig lokális minimuma van a függvénynek.

(b) A táblázatból látható, hogy f csökkenő a $(\infty, 0]$ és $[0, 3]$ intervallumokon, növekvő a $[3, \infty)$ intervallumon.

(c) Az $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$ második derivált az $x = 0$ és az $x = 2$ helyen 0.

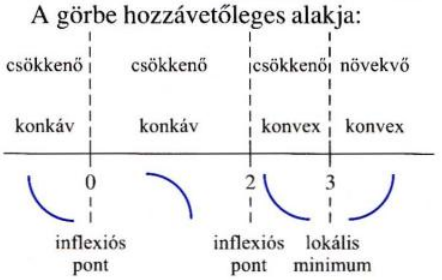
Intervallum	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
f'' előjele	–	–	+
f alakja	konvex	konkáv	konvex

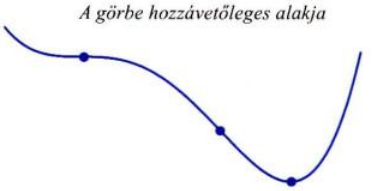
Látható, hogy f konvex a $(-\infty, 0)$, és $(2, \infty)$ intervallumokon és konkáv a $(0, 2)$ intervallumon.

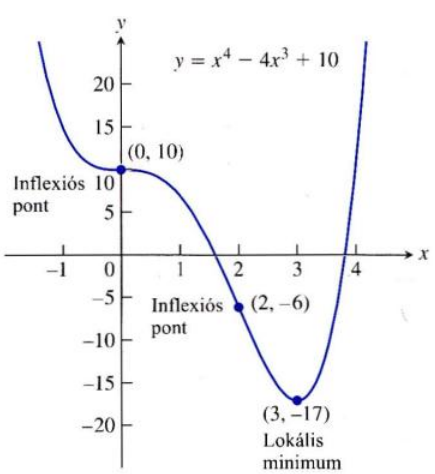
d) A fenti két táblázat eredményeit a következőképpen összegezhetjük:

$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x$
csökkenő	csökkenő	csökkenő	növekvő
konvex	konkáv	konvex	konvex

A görbe hozzávetőleges alakja:







4.30. ÁBRA: Az $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ függvény grafikonja (6 példa)

e) Rajzoljuk fel a görbe tengelyekkel való metszéspontjait (ha vannak ilyenek) és azokat a pontokat is, ahol y' vagy y'' nulla. Tüntessük fel valamennyi lokális szélsőértéket és inflexiós pontot. A görbe felrajzolásához használjuk a görbe hozzávetőleges alakjának rajzát. (Ha szükséges, vegyünk fel további segédpontokat is.) A függvény grafikonját a 4.30. ábrán tanulmányozhatjuk. □

A 6. példában szereplő lépések általános módszert adnak a függvény és grafikonja főbb jellegzetességeinek felderítéséhez.

$y = f(x)$ felrajzolásának stratégiája

1. Határozzuk meg f értelmezési tartományát és a görbe szimmetriáit.

2. Keressük meg y'-t és y''-t.

3. Keressük meg a függvény kritikus pontjait, és állapítsuk meg, hogyan viselkedik a függvény ezekben a pontokban.

4. Állapítsuk meg, mely tartományokban növekvő, illetve csökkenő a függvény.

5. Keressük meg az inflexiós pontokat (amennyiben vannak ilyenek), és határozzuk meg a görbe konvexitását.

6. Határozzuk meg a görbe valamennyi aszimptotáját.

7. Vegyük fel a görbe fontos pontjait, azaz a tengelyekkel való metszéspontjait és a 3–5. lépésekben meghatározott pontokat, azután pedig rajzoljuk meg a görbét.

7. PÉLDA **A stratégia alkalmazása.**

Rajzoljuk meg az $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$ függvény grafikonját.

Megoldás.

1. Az f függvény értelmezési tartománya $(-\infty, \infty)$; a függvény sem a koordinátatengelyekre, sem az origóra nézve nem szimmetrikus (l. az 1.4 alfejezetet).

2. *Határozzuk meg f'-t és f''-t.*

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$$ (az x tengelyt a $(-1,0)$, az y tengelyt a $(0,1)$ pontban metszi)

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)\cdot 2(x+1) - (x+1)^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$ (kritikus pontok: $x = -1$, $x = 1$)

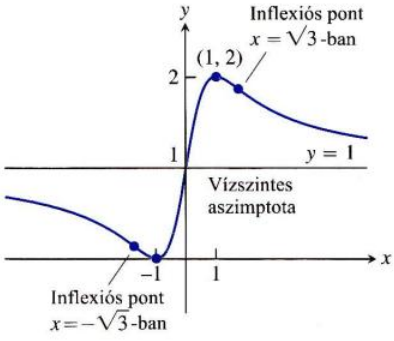
$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2 \cdot 2(-2x) - 2(1-x^2)[2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$ (algebrai átalakításokkal)

3. *Viselkedése a kritikus pontokban.* Csak az $x = \pm 1$ kritikus pont, ahol $f'(x) = 0$ (2. lépés), mivel f' f értelmezési tartományának minden pontjában értelmezve van. Az $x = -1$ pontban $f''(-1) = 1 > 0$, ami a második derivált teszt szerint lokális minimumot szolgáltat. Az $x = 1$ pontban $f''(1) = -1 < 0$, ami a második derivált teszt szerint lokális maximumot ad. A 6. lépésben látni fogjuk, hogy ezek egyben abszolút szélsőértékhelyek is.

4. *Növekedés és csökkenés.* A $(-\infty, -1)$ intervallumon $f'(x) < 0$ és így a függvény csökkenő. A $(-1, 1)$ intervallumon $f'(x) > 0$, és a görbe növekvő. Az $(1, \infty)$ intervallumon csökkenő, mert ott újra $f'(x) < 0$.

5. *Inflexiós pontok.* Megjegyezzük, hogy a második derivált nevezője (2. lépés) mindenütt pozitív. Az f'' második derivált akkor lesz nulla, ha $x = -\sqrt{3}, 0$ és $\sqrt{3}$. A második derivált mindhárom pontban előjelet vált: negatív a $(-\infty, -\sqrt{3})$ intervallumban, pozitív a $(-\sqrt{3}, 0)$, negatív a $(0, \sqrt{3})$, és



4.31. ÁBRA: Az $f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$ függvény grafikonja (7. példa)

újra pozitív a $(\sqrt{3}, \infty)$ intervallumban. Ezért mindegyik pont inflexiós pont. A görbe konkáv a $(-\infty, -\sqrt{3})$, konvex a $(-\sqrt{3}, 0)$, konkáv a $(0, \sqrt{3})$ és megint csak konvex a $(\sqrt{3}, \infty)$ intervallumon.

6. *Aszimptoták.* $f(x)$ számlálójában elvégezve a négyzetre emelést, majd a számlálót és a nevezőt is x^2-tel osztva a következőt kapjuk:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2} = \frac{x^2+2x+1}{1+x^2} = \quad \text{(a számlálót négyzetre emeltük)}$$

$$= \frac{1+(2/x)+(1/x^2)}{(1/x^2)+1} \quad (x^2\text{-tel osztottunk})$$

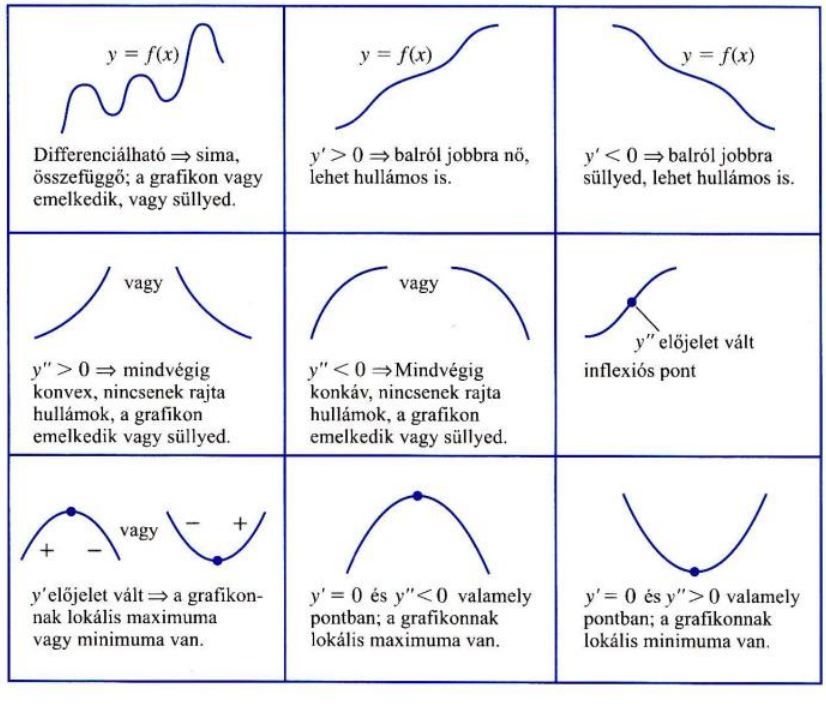
Látjuk, hogy $f(x) \to 1^+$, ha $x \to \infty$, és $f(x) \to 1^-$, ha $x \to -\infty$. Az $y = 1$ egyenes tehát vízszintes aszimptota.

Mivel f csökken a $(-\infty, -1)$ intervallumon és növekszik a $(-1, 1)$ intervallumon, ezért $f(-1) = 0$ lokális minimum. Bár f csökken az $(1, \infty)$ intervallumon, ezen az intervallumon soha nem metszi az $y = 1$ aszimptotát. Mivel grafikonja soha nem süllyed az x-tengely alá, $f(-1) = 0$ egyben abszolút minimum is. Hasonlóképp $f(1) = 2$ abszolút maximum, mert a grafikon a $(-\infty, -1)$ intervallumon sehol nem metszi az $y = 1$ aszimptotát, mindig alatta marad. Emiatt a függvénynek nincs függőleges aszimptotája ($0 \le y \le 2$).

7. Az f függvény grafikonját a 4.31. ábrán vázoltuk fel. Figyeljük meg, hogy a grafikon konkáv, amint $x \to -\infty$ esetén az $y = 1$ aszimptotához közelít, és konvex, amint $x \to \infty$ esetén tart felé. □

Mit tudhatunk meg a függvényről a deriváltjai alapján?

Amint azt a 6. és a 7. példában láthattuk, egy kétszer deriválható $y = f(x)$ függvény első deriváltja szinte minden szükséges dolgot elárul a függvényről. Megtudhatjuk, hol emelkedik, illetve süllyed a függvény grafikonja, és hogy hol lehetnek lokális szélsőértékei. Differenciálhatjuk y'-t annak érdekében, hogy megtudjuk, hogyan hajlik a grafikon azokon a szakaszokon, ahol emelkedik vagy süllyed. A deriváltakból nem nyerhetünk információt arra nézve, hogy hogyan helyezkedik el a függvény grafikonja az xy-síkon. De – mint ahogyan azt a 4.2 alfejezetben megmutattuk – a grafikon pozicionálásához elegendő egyetlen kiegészítő információ: f értékének ismerete egyetlen pontban. A deriváltak nem adnak felvilágosítást a függvény aszimptotáiról sem, ehhez a függvény határértékeit kell megvizsgálni (l. a 2.4. és a 2.5. alfejezeteket).

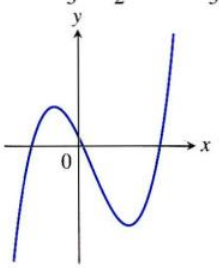


4.4. Feladatok

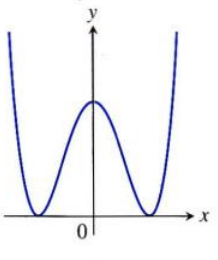
Függvények grafikonjának vizsgálata

Az 1–8. feladatokban keressük meg az ábrázolt fügvények inflexiós pontjait, lokális maximumát és minimumát. Állapítsuk meg, hogy mely intervallumokon konvex, illetve konkáv a függvény.

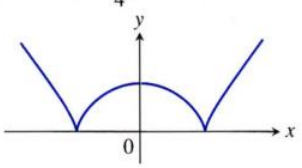
1. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$



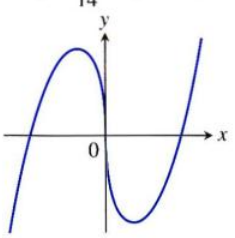
2. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$



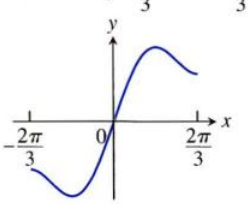
3. $y = \frac{3}{4}(x^2 - 1)^{2/3}$



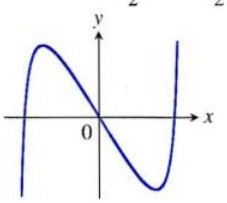
4. $y = \frac{9}{14}x^{1/3}(x^2 - 7)$



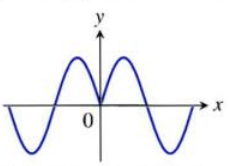
5. $y = x + \sin 2x, -\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$



6. $y = \tan x - 4x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

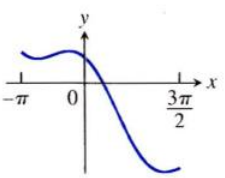


7. $y = \sin|x|, -2\pi \le x \le 2\pi$



NEM MÉRETARÁNYOS

8. $y = 2\cos x - \sqrt{2}x, -\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$



Egyenletek grafikus ábrázolása

Ábrázoljuk a megadott függvények grafikonját; adjuk meg a szélsőértékek és az inflexiós pontok koordinátáit (9–40. feladatok).

9. $y = x^2 - 4x + 3$

10. $y = 6 - 2x - x^2$

11. $y = x^3 - 3x + 3$

12. $y = x(6 - 2x)^2$

13. $y = -3x^2 + 6x^2 - 3$

14. $y = 1 - 9x - 6x^2 - x^3$

15. $y = (x-2)^3 + 1$

16. $y = 1 - (x+1)^3$

17. $y = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$

18. $y = -x^4 + 6x^2 - 4 = x^2(6 - x^2) - 4$

19. $y = 4x^3 - x^4 = x^3(4 - x)$

20. $y = x^4 + 2x^3 = x^3(x + 2)$

21. $y = x^5 - 5x^4 = x^4(x - 5)$

22. $y = x\left(\frac{x}{2} - 5\right)^4$

23. $y = x + \sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

24. $y = x - \sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

25. $y = x^{1/5}$

26. $y = x^{3/5}$

27. $y = x^{2/5}$

28. $y = x^{4/5}$

29. $y = 2x - 3x^{2/3}$

30. $y = 5x^{2/5} - 2x$

31. $y = x^{2/3}\left(\frac{5}{2} - x\right)$

32. $y = x^{2/3}(x - 5)$

33. $y = x\sqrt{8 - x^2}$

34. $y = (2 - x^2)^{3/2}$

35. $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}, \quad x \ne 2$

36. $y = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$

37. $y = |x^2 - 1|$

38. $y = |x^2 - 2x|$

39. $y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{-x} & x \le 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases}$

40. $y = \sqrt{|x - 4|}$

Az általános alak fölvázolása y' ismeretében

A 41–62. feladatokban megadjuk egy folytonos $y = f(x)$ függvény első deriváltját. Határozzuk meg y''-t, aztán a 254. oldalon vázolt eljárás 2–4. lépése alapján vázoljuk fel f grafikonjának általános alakját.

41. $y' = 2 + x - x^2$

42. $y' = x^2 - x - 6$

43. $y' = x(x-3)^2$

44. $y' = x^2(2 - x)$

45. $y' = x(x^2 - 12)$

46. $y' = (x-1)^2(2x+3)$

47. $y' = (8x - 5x^2)(4 - x)^2$

48. $y' = (x^2 - 2x)(x - 5)^2$

49. $y' = \sec^2 x,, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

50. $y' = \mathrm{tg}^2 x,, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

51. $y' = \mathrm{ctg}\,\frac{\theta}{2}, 0 < \theta < \pi$

52. $y' = \mathrm{csc}\,\frac{\theta}{2}, 0 < \theta < \pi$

53. $y' = \mathrm{tg}^2\theta - 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

54. $y' = 1 - \mathrm{ctg}^2\theta, 0 < \theta\pi$

55. $y' = \cos t, 0 \le t \le 2\pi$

56. $y' = \sin t, 0 \le t \le 2\pi$

57. $y' = (x+1)^{-2/3}$

58. $y' = (x-2)^{-1/3}$

59. $y' = x^{-2/3}(x - 1)$

60. $y' = x^{-4/5}(x + 1)$

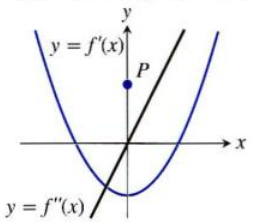
61. $y' = 2|x| = \begin{cases} -2x & x \le 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$

62. $y' = \begin{cases} -x^2 & x \le 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$

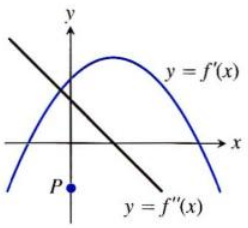
Az y' és y'' grafikonok alapján rajzoljuk fel az y grafikont

A 63–66. feladatokban valamely $y = f(x)$ függvény első és második deriváltjainak grafikonja látható az ábrán. Másoljuk le az ábrát, majd rajzoljuk bele f grafikonjának hozzávetőleges képét úgy, hogy az áthaladjon a P ponton.

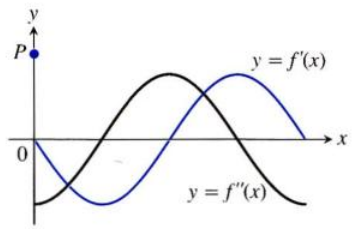
63.



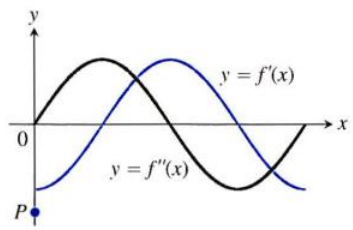
64.



65.

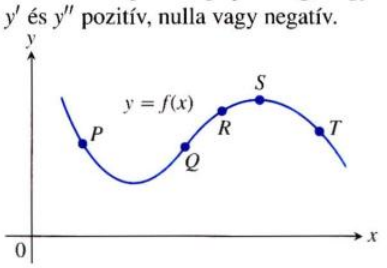


66.



További példák és feladatok

67. Az ábra egy kétszer differenciálható $y = f(x)$ függvény grafikonjának részletét mutatja. Vizsgáljuk meg, hogy az öt megjelölt pontban y' és y'' pozitív, nulla vagy negatív.



68. Vázoljunk fel olyan sima és összefüggő $y = f(x)$ görbét, amelyre teljesülnek az alábbiak:

$f(-2) = 8$, $f'(2) = f'(-2) = 0$,
$f(0) = 4$, $f'(x) < 0$, ha $|x| < 2$,
$f(2) = 0$, $f''(x) < 0$, ha $x < 0$,
$f'(x) > 0$, ha $|x| > 2$, $f''(x) > 0$, ha $x > 0$.

69. Vázoljuk fel egy $y = f(x)$ függvénynek a grafikonját, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

x	y	a deriváltak	
$x < 2$		$y' < 0$	$y'' > 0$
2	1	$y' = 0$	$y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0$	$y'' > 0$
4	4	$y' < 0$	$y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0$	$y'' < 0$
6	7	$y' = 0$	$y'' > 0$
$x > 6$		$y' < 0$	$y'' > 0$

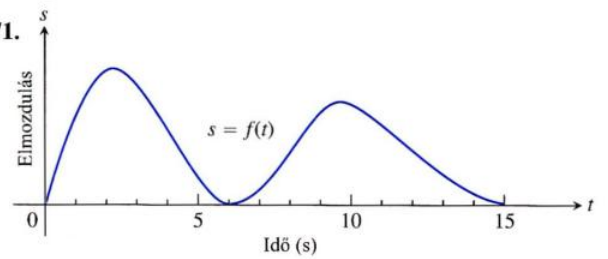
70. Vázoljuk fel egy olyan, kétszer differenciálható $y = f(x)$ függvénynek a grafikonját, amely átmegy a $(-2,2)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$ és $(2,2)$ pontokon és első két deriváltja a következő előjelmintát követi:

$$y': \quad \begin{array}{ccccccc} & + & & - & & + & & - \\ \hline & & -2 & & 0 & & 2 & \end{array}$$

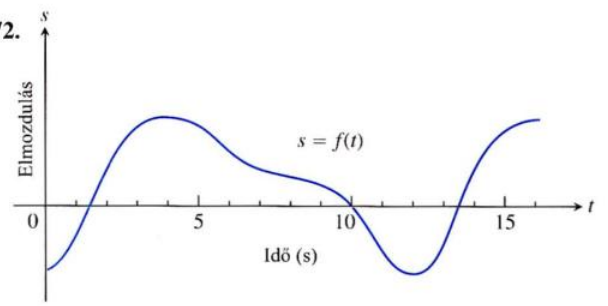
$$y'': \quad \begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ \hline & -1 & & 1 & \end{array}$$

Mozgás egyenes mentén. A 71. és 72. feladatokban a grafikon egy egyenes mentén az $s = f(t)$ függvény szerint előre-hátra mozgó test helyzetét ábrázolja. **(a)** Mikor távolodik a test az origótól? Mikor halad át rajta? **(b)** Hozzávetőleg mely időpontban lesz a test sebessége nulla? **(c)** Mikor lesz a gyorsulás pozitív? És negatív?

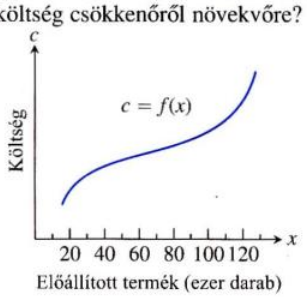
71.



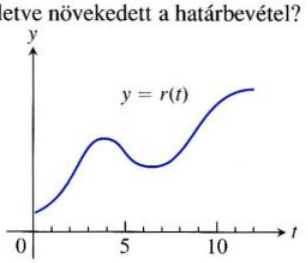
72.



73. Határköltség. A mellékelt ábra valamely x árucikk előállításának $c = f(x)$ költségét mutatja. Milyen termelési szint mellett vált a határköltség csökkenőről növekvőre?



74. A mellékelt ábra egy alkatrészgyártó vállalat havi bevételét mutatja az utóbbi 12 év folyamán. Körülbelül mely időszakokban csökkent, illetve növekedett a határbevétel?



75. Tegyük fel, hogy az $y = f(x)$ függvény deriváltja

$$(x-1)^2(x-2).$$

Ha van, melyik pontban van az f függvénynek lokális maximuma, minimuma és inflexiós pontja? (*Útmutatás: rajzoljuk fel y' előjelsémáját.*)

76. Legyen az $y = f(x)$ függvény deriváltja

$$(x-1)^2(x-2)(x-4).$$

Ha van, melyik pontban van az f függvénynek lokális maximuma, minimuma és inflexiós pontja?

77. Adott $x > 0$ esetén rajzoljunk fel olyan $y = f(x)$ görbét, amelyre $f(1) = 0$ és $f'(x) = 1/x$. Mondhatunk-e valamit egy ilyen görbéről konvexitás szempontjából? Válaszunkat indokoljuk.

78. Mit mondhatunk annak az $y = f(x)$ függvénynek a grafikonjáról, amelynek van második deriváltja, az folytonos és sehol sem nulla? Válaszunkat indokoljuk.

79. Ha b, c és d konstansok, b mely értékére lesz az $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ görbének inflexiós pontja az $x = 1$ helyen?

80. Vízszintes érintő. Igaz vagy hamis? Indokoljuk válaszunkat.

(a) Minden páros fokszámú polinomnak (a legnagyobb hatványkitevő páros) van legalább egy vízszintes érintője.

(b) Minden páratlan fokszámú polinomnak (a legnagyobb hatványkitevő páratlan) van legalább egy vízszintes érintője.

81. Parabolák.

(a) Keressük meg az $y = ax^2 + bx + c$ $a \neq 0$ parabola csúcspontjának koordinátáit.

(b) Mikor lesz a parabola konvex? Konkáv? Válaszunkat indokoljuk.

82. Igaz-e, hogy egy kétszeresen differenciálható $y = f(x)$ függvény konvexitása mindannyiszor megváltozik, ahányszor csak $f''(x) = 0$? Válaszunkat indokoljuk.

83. Másodrendű görbék. Mit mondhatunk az $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ másodrendű görbe inflexiós pontjairól? Válaszunkat indokoljuk.

84. Harmadrendű görbék. Mit mondhatunk az $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$ harmadrendű görbe inflexiós pontjairól? Válaszunkat indokoljuk.

Számítógépes vizsgálatok

A 85–88. feladatokban keressük meg (amennyiben létezik) a függvény grafikonjának inflexiós pontjait, valamint határozzuk meg azoknak a pontoknak a koordinátáit a grafikonon, amelyekben a függvénynek lokális maximuma vagy minimuma van. Azután rajzoljuk meg a függvényt egy megfelelően választott intervallumban úgy, hogy ezek a pontok egyszerre láthatók legyenek. Az ábrát egészítsük ki a függvény első és második deriváltjának grafikonjával. Az eredeti függvény grafikonjához képest az utóbbi grafikonok hol metszik az x-tengelyt? Milyen további kapcsolat van a függvény grafikonja és deriváltjainak grafikonja között?

85. $y = x^5 - 5x^4 - 240$

86. $y = x^3 - 12x$

87. $y = \frac{4}{5}x^5 + 16x^2 - 25$

88. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 20$

89. Rajzoljuk meg egy közös ábrán az $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ függvénynek, valamint első és második deriváltjának grafikonját. Magyarázzuk meg f grafikonjának viselkedését f' és f'' előjelének és értékének függvényében.

90. Rajzoljuk fel közös ábrán az $f(x) = x\cos x$ függvény és második deriváltja grafikonját a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumon. Magyarázzuk meg f grafikonjának viselkedését f' és f'' előjelének és értékének függvényében.

91. **(a)** Közös képernyőn rajzoljuk meg az $f(x) = x^3 + kx$ függvény grafikonját azokra az esetekre, amikor $k = 0$, nullához közeli pozitív, illetve negatív érték. Hogyan befolyásolja k értéke a görbe alakját?

(b) Határozzuk meg $f'(x)$-et. Mint látható, $f'(x)$ az x másodfokú függvénye. Határozza meg a másodfokú egyenlet diszkriminánsát ($ax^2 + bx + c$ diszkriminánsa $b^2 - 4ac$). A k állandó milyen értékére lesz a diszkrimináns pozitív? Nulla? Negatív? k mely értékei mellett van f'-nek két zérushelye? Egy zérushelye? Magyarázzuk meg, hogy k értékének megváltoztatása hogyan befolyásolja f grafikonjának alakját.

(c) Kísérletezzünk más k értékekkel is. Mi történik, amikor $k \to -\infty$, illetve amikor $k \to \infty$?

92. **(a)** Közös képernyőn ábrázoljuk a $-2 \leq x \leq 2$ intervallumon az $f(x) = x^4 + kx^3 + 6x^2$ függvényt $k = -4$-re, valamint -4-hez közel eső valós k-kra. Hogyan befolyásolja a grafikon alakját k értékének változása?

(b) Határozzuk meg $f''(x)$-et. Mint látható, $f''(x)$ az x másodfokú függvénye. Határozzuk meg ennek a másodfokú egyenletnek a diszkriminánsát (l. a 91. feladat (b) részét). A k milyen értékére lesz a diszkrimináns pozitív? Nulla? Negatív? A k mely értékei mellett van f''-nek két zérushelye? Egy zérushelye? Hogyan befolyásolja f grafikonjának alakját k értékének megváltoztatása?

93. **(a)** Ábrázoljuk az $y = x^{2/3}(x^2 - 2)$ függvényt a $-3 \leq x \leq 3$ intervallumon. Az analízis eszközeivel támasszuk alá mindazt, amit a képernyő a görbe konvexitásáról, emelkedéséről és süllyedéséről elárul. (Ha rajzolóprogramunk megkívánja, negatív x értékekre az $x^{2/3}$ függvényt $(x^2)^{1/3}$-ként is felfoghatjuk.)

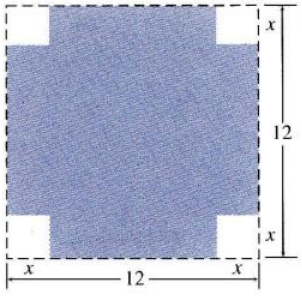
(b) Az $x = 0$ pontban hegyes csúcsa van-e a görbének, vagy csak „szögletes", különböző bal- és jobboldali deriválttal?

94. **(a)** Ábrázoljuk az $y = 9x^{2/3}(x - 1)$ függvényt a $-0{,}5 \leq x \leq 1{,}5$ intervallumon. Az analízis eszközeivel támasszuk alá mindazt, amit a képernyő a görbe konvexitásáról, emelkedéséről és süllyedéséről elárul. Milyen a görbe konvexitása az origótól balra? (Ha rajzolóprogramunk megkívánja, negatív x értékekre az $x^{2/3}$ függvényt $(x^2)^{1/3}$-ként is felfoghatjuk.)

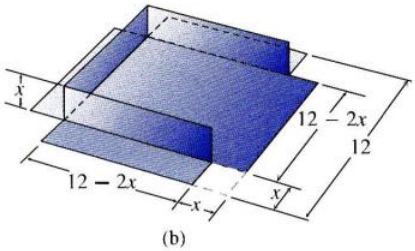
(b) Az $x = 0$ pontban hegyes csúcsa van-e a görbének, vagy csak „szögletes", különböző bal- és jobboldali deriválttal?

95. Lehet-e vízszintes érintője az $y = x^2 + 3\sin 2x$ görbének az $x = -3$ pont közelében? Válaszunkat indokoljuk.

4.5. Alkalmazott optimalizációs problémák

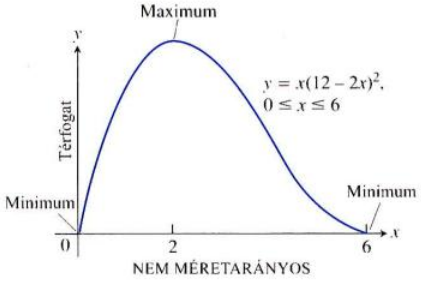


(a)

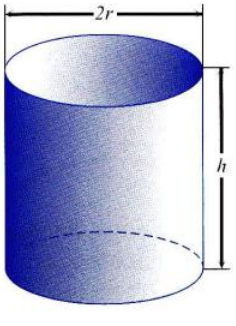


(b)

4.32. ÁBRA: Négyzet alakú bádoglemezből nyitott tetejű dobozt készítünk úgy, hogy a sarkokból kis négyzeteket vágunk ki. Milyen sarokméretekkel maximalizálhatjuk a doboz térfogatát? (1. példa)



4.33. ÁBRA: A 4.32. ábra dobozának térfogata x függvényeként.



4.34. ÁBRA: Az 1 literes bödönnek akkor a legkisebb a felszíne, amikor $h = 2r$ (2. példa).

Valamit optimalizálni annyit jelent, hogy valamilyen szempont alapján maximalizálunk vagy minimalizálunk. Adott kerületű négyszögek közül melyiknek van a legnagyobb területe? Melyik a legkevésbé költséges hengeralak? Mekkora termékszám mellett a leggazdaságosabb a termelési folyamat? A differenciálszámítás hatékony eszköz olyan problémák megoldására, amelyekben egy függvény maximumát vagy minimumát kell megkeresni. Ebben az alfejezetben különféle, az üzleti életből, a matematikából, a fizikából és a közgazdaságtanból vett optimalizálási feladatokat fogunk megoldani.

Üzleti és ipari példák

1. PÉLDA **Dobozkészítés.**

Egy 12-szer 12 centiméteres bádoglemezből nyitott tetejű dobozt kell készítenünk úgy, hogy sarkaiból négyzeteket vágunk ki, az oldalakat pedig felhajtjuk. Mekkora négyzeteket vágjunk ki a sarkokból, hogy a doboz űrtartalma a lehető legnagyobb legyen?

Megoldás. Kezdjük egy rajzzal (4.32. ábra). Az ábrán a sarki négyzetek oldalhossza x cm. A doboz térfogata ennek a változónak a függvénye:

$$V(x) = x(12-2x)^2 = 144x - 48x^2 + 4x^3, \qquad V = hlw.$$

Mivel a bádoglemez oldalhosszúsága mindössze 12 cm, ezért $x \le 6$, és V értelmezési tartománya a $0 \le x \le 6$ intervallum.

V grafikonja (l. a 4.33. ábrát) azt sugallja, hogy V-nek az $x = 0$ és $x = 6$ helyen minimuma, $x = 2$ közelében pedig maximuma van. Hogy ennél többet tudjunk, vizsgáljuk meg V térfogatfüggvény x szerinti első deriváltját.

$$\frac{dV}{dx} = 144 - 96x + 12x^2 = 12(12 - 8x + x^2) = 12(2-x)(6-x).$$

A két zérushely, $x = 2$ és $x = 6$ közül csak $x = 2$ esik a függvény értelmezési tartományának belsejébe. V értéke ebben a kritikus pontban valamint a két végpontban:

$$\text{kritikus pontbeli érték: } V(2) = 128,$$
$$\text{végpontbeli érték: } V(0) = 0, \quad V(6) = 0.$$

A maximális térfogat tehát 128 cm^3. A kivágott négyzetek oldalhosszúsága 2 cm. □

2. PÉLDA **Hengeres bödön megtervezése..**

Egyliteres, egyenes körhenger alakú bödönt kell terveznünk (4.34. ábra). Milyen méretek mellett használjuk fel a legkevesebb anyagot?

Megoldás. *A bödön térfogata.* Ha r-t és h-t centiméterben mérjük, akkor a köbcentiméterben mért térfogatra:

$$\pi r^2 h = 1000. \quad (1 \text{ liter} = 1000 \text{ cm}^3)$$

A bödön felszíne: $A = \underset{\text{az alaplap}}{2\pi r^2} + \underset{\text{a palást}}{2\pi rh}$

Hogy értendő a „legkevesebb anyag" kifejezés? Először is, el szokás tekinteni az anyag vastagságától és az elkészítés során keletkező hulladéktól. Vagyis r-nek és h-nak arra az értékére kérdezünk rá, amelyek kielégítik a $\pi r^2 h = 1000$ egyenlőséget, és a lehető legkisebb felszínt adják.

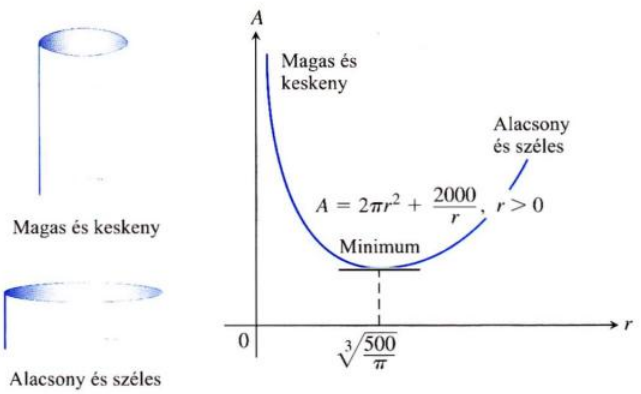
Azért, hogy a felszínt egyetlen változó függvényeként írhassuk fel, az egyik változóra megoldjuk a $\pi r^2 h = 1000$ egyenletet, és a kapott kifejezést behelyettesítjük a felszínképletbe. Egyszerűbb h-t kifejezni:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

Ezzel

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r^2 + 2\pi r h = \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = \\ &= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}. \end{aligned}$$

Olyan $r > 0$ értéket kellene találnunk, amelyre A-nak minimuma van. A 4.35. ábra azt sugallja, hogy van ilyen érték.



4.35. ÁBRA: Az $A = 2\pi r^2 + 2000/r$ grafikon konvex.

Vegyük észre a grafikonról, hogy kis r értékre (magas és keskeny, csőszerű tartály) a $2000/r$ mennyiség a meghatározó, és A nagy. Nagy r érték (széles és alacsony, pizzalap-szerű tartály) esetén a $2\pi r^2$ mennyiség dominál, és A megint csak nagy lesz.

Mivel A differenciálható minden $r > 0$ esetén, vagyis egy végpontokat nem tartalmazó intervallumon, minimális értéke csak ott lehet, ahol első deriváltja nulla.

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dr} &= 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \\ 0 &= 4\pi r - \frac{2000}{r^2} && \text{(feltesszük, hogy } dA/dr = 0\text{)} \\ 4\pi r^3 &= 2000 && \text{(beszoroztunk } r^2\text{-tel)} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}42 && \text{(kifejeztük } r\text{-t)} \end{aligned}$$

Mi történik, ha $r = \sqrt[3]{500/\pi}$?

A

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

második derivált A értelmezési tartományán mindenütt pozitív. Ezért a grafikon mindenütt konvex, és A-nak $r = \sqrt[3]{500/\pi}$-ra abszolút minimuma van.

Ezután h értékére (némi algebrai átalakítással) a következőt kapjuk:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r.$$

A legkisebb anyagszükségletű bödön magassága azonos az átmérőjével, esetünkben $r \approx 5{,}42$ cm és $h \approx 10{,}84$ cm. □

Alkalmazott optimalizációs problémák megoldása

1. *Olvassuk el a feladatot.* Olvassuk át a feladatot többször is, amíg világosan meg nem értjük. Mi van megadva? Mi az az ismeretlen mennyiség, amit optimalizálni kell?

2. *Készítsünk ábrát.* Jelöljük meg az ábrának azokat a részeit, amelyek a feladat szempontjából fontosak lehetnek.

3. *Vezessünk be változókat.* Jegyezzünk fel minden összefüggést, amit az ábráról leolvashatunk, írjuk fel a problémára alkalmazható egyenleteket és algebrai kifejezéseket, azután keressük meg, hogy mi lesz az ismeretlen változó.

4. *Írjunk fel egyenletet az ismeretlen mennyiségre.* Ha lehetséges, az ismeretlent egyetlen változó függvényeként vagy kétismeretlenes egyenletrendszer formájában fejezzük ki.

5. *Vizsgáljuk meg az ismeretlen mennyiséget értelmezési tartományának kritikus pontjaiban és végpontjaiban.* Használjuk fel mindazt, amit a függvény grafikonjának alakjáról tudunk. A függvény kritikus pontjainak azonosítására és osztályozására használjuk az első és a második deriváltat.

Matematikai és fizikai példák

3. PÉLDA **Beírt téglalap.**

Írjunk téglalapot egy 2 egység sugarú félkörbe. Mekkora a téglalap maximális területe, és mekkorák az ilyen téglalap oldalai?

Megoldás. A félkört és a beírt téglalapot helyezzük el úgy a koordinátasíkon, hogy a körívre illeszkedő jobb oldali csúcsának koordinája $(x, \sqrt{4-x^2})$ legyen. Ekkor a téglalap alapja, magassága és területe kifejezhető x-szel, ami a jobb alsó sarkának egyik koordinátája:

$$\text{hosszúság: } 2x, \quad \text{magasság: } \sqrt{4-x^2}, \quad \text{terület: } 2x\cdot\sqrt{4-x^2}.$$

Megjegyezzük, hogy x értéke szükségképpen a $0 \le x \le 2$ intervallumba esik.

Feladatunk az, hogy megkeressük az

$$A = 2x\cdot\sqrt{4-x^2}$$

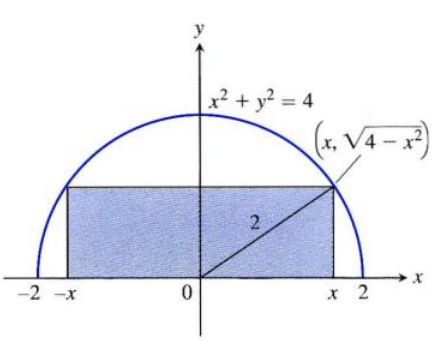
függvény abszolút maximumát a $[0,2]$ intervallumon.

A

$$\frac{dA}{dx} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2}$$

derivált nincs értelmezve ha $x = 2$, és nullával egyenlő, ha

$$\begin{aligned}\frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2} &= 0\\ -2x^2 + 2(4-x^2) &= 0\\ 8 - 4x^2 &= 0\\ x^2 &= 2 \text{ azaz } x = \pm\sqrt{2}.\end{aligned}$$

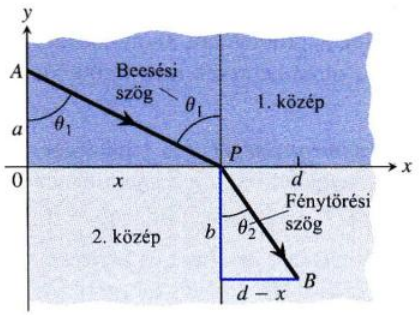


4.36. ÁBRA: Félkörbe írt téglalap (3. példa).

A két gyök, $x = \sqrt{2}$ és $x = -\sqrt{2}$ közül csak $x = \sqrt{2}$ esik A értelmezési tartományának belsejébe, és így csak ez a gyök kerül fel a kritikus pontok listájára. Az A függvény értéke a kritikus pontban és az intervallumvégpontokban:

$$\text{kritikus pontbeli érték: } A(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\sqrt{4-2} = 4$$
$$\text{végpontokbeli értékek: } A(0) = 0, \qquad A(2) = 0.$$

A terület maximális értéke 4, és ezt az értéket akkor veszi fel, amikor a téglalap magassága $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2}$ egység, alapéle pedig $2x = 2\sqrt{2}$ egység hosszú. □



4.37. ÁBRA: A fénysugár megtörik (eltérül eredeti irányától), amikor valamely közegből egy eltérő sűrűségű közegbe lép át (4. példa)

4. PÉLDA **A Fermat-elv és a Snellius-törvény.**

A fény sebessége függ a terjedési közegtől; a terjedési sebesség sűrűbb közegben általában kisebb.

Az optika Fermat-elve azt mondja ki, hogy a fény egyik pontból a másikba olyan úton terjed, hogy a terjedési idő minimális legyen. Állapítsuk meg, milyen úton terjed a fény az A pontból a B pontba, ha az A-t tartalmazó közegben c_1 a terjedési sebesség, a B-t tartalmazó közegben pedig c_2.

Megoldás. Mivel A-ból B-be a fény a leggyorsabb úton halad, azt az útvonalat keressük, amely minimalizálja a terjedési időt. Feltesszük, hogy A és B az xy-síkban van, és a két közeget elválasztó egyenes az x-tengely (l. a 4.37. ábrát).

Homogén közegben, ahol a fénysebesség állandó, a „legrövidebb idő" a „legrövidebb" utat jelenti, és a fénysugár egyenes vonalban terjed. Ezért az A-ból a B-be vezető út A-tól a P határpontig egy egyenes szakasz, mely a P-ből B-be tartó egyenes szakasszal folytatódik. A távolság a sebesség és az idő szorzata, így

$$\text{idő} = \frac{\text{távolság}}{\text{sebesség}}.$$

A fénysugár A-ból P-be jutásához szükséges idő:

$$t_1 = \frac{AP}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1};$$

a P-ből B-be jutáshoz szükséges idő pedig:

$$t_2 = \frac{PB}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2-(d-x)^2}}{c_2}.$$

A fény A-ból B-be jutásához szükséges idő ezek összege:

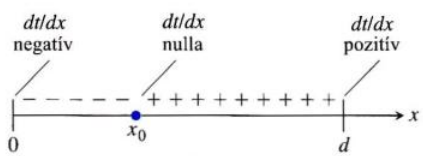
$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2-(d-x)^2}}{c_2}.$$

Ez az egyenlőség t-t x differenciálható függvényeként adja meg, amelynek értelmezési tartománya a $[0,d]$ intervallum; a t abszolút minimumát ezen a zárt intervallumon keressük. Az első derivált:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{c_2\sqrt{b^2-(d-x)^2}}.$$

A 4.37. ábrán jelölt szögekkel:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sin\theta_1}{c_1} - \frac{\sin\theta_2}{c_2}.$$



4.38. ÁBRA: A 4. példában szereplő dt/dx függvény előjelmintája.

Ha x értékét a $0 \le x \le d$ intervallumra korlátozzuk, akkor t deriváltja negatív az $x = 0$ pontban és pozitív az $x = d$ pontban. A 3.1. alfejezetben kimondott középérték-tétel alapján van egy olyan $x_0 \in [0,d]$ pont, ahol $dt/dx = 0$ (l. a 4.38. ábrát). Csak egy ilyen pont van, mert dt/dx az x növekvő függvénye (54. feladat). Ebben a pontban

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}.$$

Ez az egyenlőség a **a Snellius-tövény** vagy **fénytörési törvény**, amely az optika egyik fontos elve. A fényterjedés útját írja le. □

Közgazdasági példák

A következő példákban kétféle eljárást mutatunk az analízis közgazdaságtani alkalmazására. Az első módszerrel meg lehet keresni azt, hogy a profit hol maximális, a másodikkal azt, hogy az átlagos költség hol minimális.

Legyen

$r(x) = x$ darab árucikk eladásából származó bevétel;
$c(x) = x$ darab árucikk előállításának költsége;
$p(x) = r(x) - c(x) = x$ darab árucikk előállításával és eladásával elérhető profit.

x árucikk előállítása és eladása **határbevételének**, **határköltségének** és **határprofitjának** nevezzük a következő mennyiségeket:

$$\frac{dr}{dx} = \text{határbevétel},$$
$$\frac{dc}{dx} = \text{határköltség},$$
$$\frac{dp}{dx} = \text{határprofit}.$$

Első megállapításunk p és a fenti deriváltak viszonyára vonatkozik.

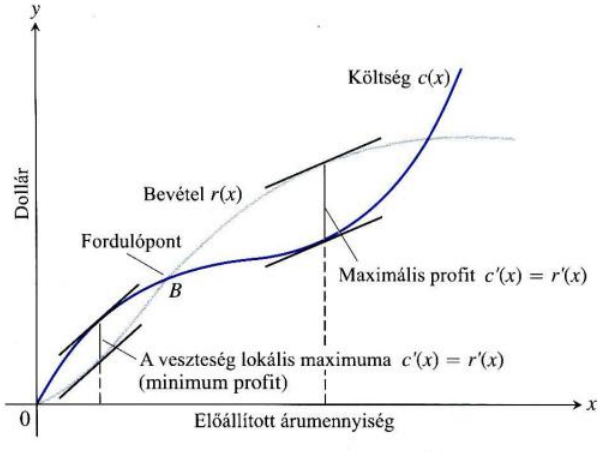
Ha $r(x)$ és $c(x)$ minden $x > 0$ esetén differenciálható, a $p(x) = r(x) - c(x)$ függvénynek pedig van maximális értéke, akkor az csak olyan termelési szinten állhat elő, amelyre $p'(x) = 0$. Mivel $p'(x) = r'(x) - c'(x)$, a $p'(x) = 0$ egyenlőségből az következik, hogy

$$r'(x) - c'(x) = 0, \text{ vagyis } r'(x) = c'(x).$$

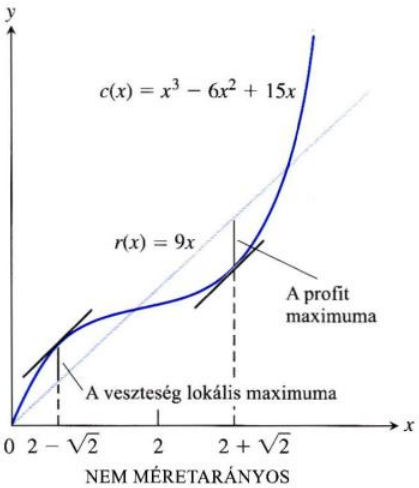
Maximális profitot biztosító termelés esetén a határbevétel egyenlő a határköltséggel (l. a 4.39. ábrát).

5. PÉLDA **Nyereségmaximalizálás.**

Tegyük fel, hogy $r(x) = 9x$ és $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, ahol x-et ezres egységekben adjuk meg. Van-e olyan termelési szint, amely maximalizálja a nyereséget? Ha igen, mi az?



4.39. ÁBRA: Egy tipikus költségfügvény grafikonja kezdetben konkáv. A bevételi görbét a B fordulópontban metszi. B-től balra a társaság veszteséges. B-től jobbra a társaság nyereséggel számolhat, amely ott maximális, ahol $r'(x) = c'(x)$. Még tovább haladva jobbra a költségek egyszer csak meghaladják a bevételt (talán mert ekkor már egy nagy és drága laboratóriumra van szükség, vagy mert túl nagy lesz az anyagköltség vagy mert a piac telítődik), s így a termelés újra gazdaságtalanná válik.



4.40. ÁBRA: Az 5. példa költség- és bevételi görbéje.

Megoldás. Vegyük észre, hogy $r'(x) = 9$ és $c'(x) = 3x^2 - 12x + 15$.

$$3x^2 - 12x + 15 = 9 \qquad \text{(feltesszük, hogy } r'(x) = c'(x)\text{)}$$
$$3x^2 - 12x + 6 = 0.$$

E másodfokú egyenlet két megoldása:

$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{72}}{6} = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586 \quad \text{és}$$
$$x_2 = \frac{12 + \sqrt{72}}{6} = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}414.$$

A nyereségmaximum $x \approx 0{,}86$ és $x \approx 3{,}414$ ezer darab termék előállítása esetén lehetséges. A $p(x) = r(x) - c(x)$ függvény második deriváltja: $p''(x) = -c''(x)$, elvégre $r''(x)$ minden x-re nulla. Így $p''(x) = 6(2-x)$, ez a függvény $x = 2 + \sqrt{2}$ esetén negatív, és $x = 2 - \sqrt{2}$ esetén pozitív. A második derivált teszt szerint maximális profit az $x = 3{,}414$ érték körül figyelhető meg (ahol a bevétel meghaladja a költségeket), a legnagyobb veszteség pedig $x = 0{,}586$ ezer darab termék előállítása esetén éri a társaságot. Az $r(x)$ függvény grafikonját a 4.40. ábrán tanulmányozhatjuk. □

6. PÉLDA **A költségek minimalizálása.**

Egy bútorasztalos egy mahagóniültetvényről szerzi be a munkájához szükséges alapanyagot. Naponta 5 bútort készít el. A beszállítói egy konténernyi fát 5000 dollárért juttatnak el hozzá (függetlenül attól, hogy mennyi fa van a konténerben). A raktározási költség 10 dollár egységenként és naponta, ahol az egység az egy bútor elkészítéséhez szükséges alapanyag mennyisége. Mennyi faanyagot rendeljen egy-egy alkalommal, és milyen gyakran kérje a kiszállítást annak érdekében, hogy minimalizálni tudja a költségeket?

Megoldás. Ha x naponként kér szállítást, akkor $5x$ mennyiségű alapanyagot kell rendelnie, hogy a rendelési ciklusban mindvégig elegendő anyaga legyen. Az *átlagosan* raktározott mennyiség hozzávetőleg a rendelt mennyiség fele, vagyis $5x/2$. Ezért egy-egy ciklusban a szállítási és raktározási költség együttesen

egy ciklusbeli költség = szállítási költség + raktározási költség;

$$\text{egy ciklusbeli költség} = \underbrace{5000}_{\substack{\text{szállítási}\\ \text{költség}}} + \underbrace{\left(\frac{5x}{2}\right)}_{\substack{\text{átlagosan}\\ \text{raktározott}\\ \text{mennyiség}}} \cdot \underbrace{x}_{\substack{\text{raktározási}\\ \text{napok száma}}} \cdot \underbrace{10}_{\substack{\text{napi raktá-}\\ \text{rozási díj}}}$$

Az $c(x)$ *átlagos napi költséget* úgy számítjuk ki, hogy a ciklusra eső költséget elosztjuk a ciklusban lévő napok számával, x-szel (l. a 4.41. ábrát).

$$c(x) = \frac{5000}{x} + 25x, \quad x > 0.$$

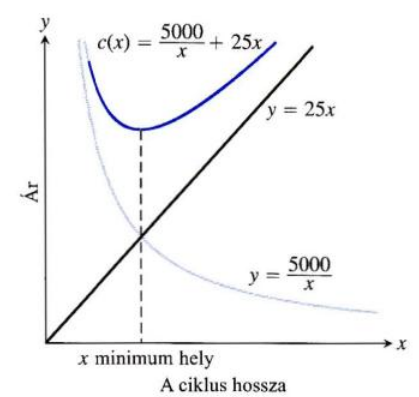
Ha $x \to 0$ vagy $x \to \infty$, az átlagos napi költség nagyon nagy lesz. Egy minimumra számítunk, de vajon hol lesz ez a minimum? Az egyes rendelések közt eltelt napok x számát úgy kell meghatároznunk, hogy ott a költségfüggvénynek abszolút minimuma legyen.

A deriváltat nullával egyenlővé téve határozzuk meg a kritikus pontokat:

$$c'(x) = -\frac{5000}{x^2} + 25 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{200} \approx \pm 14{,}14.$$

A két kritikus pont közül csak $\sqrt{200}$ esik $c(x)$ értelmezési tartományába. Az átlagos napi költség kritikus pontbeli értéke:

$$c(\sqrt{200}) = \frac{5000}{\sqrt{200}} + 25\sqrt{200} = 500\sqrt{2} \approx 707{,}11 \text{ \$}.$$



4.41. ÁBRA: A $c(x)$ átlagos napi költség egy hiperbola és egy egyenes összegeként áll elő (6. példa).

Megjegyezzük, hogy $c(x)$ a $(0,\infty)$ nyílt intervallumon van értelmezve, és $c''(x) = 10000/x^3 > 0$. Ezért az $x = \sqrt{200} \approx 14,14$ nap értéknél a költségfüggvénynek abszolút minimuma van. □

Az 5. és a 6. példában az x darabszámot pozitív valós számnak vettük. A valóságban általában csak a pozitív egész x értéknek van értelme.

7. PÉLDA **A költségminimum érzékenysége.**

Mikor kapunk jobb megoldást a 6. feladatra: ha felfelé vagy ha lefelé kerekítjük a napok számát?

Megoldás. Az átlagos napi költség körülbelül 0,03 dollárral nő, ha lefelé kerekítünk, azaz 14.14 helyett 14 nappal számolunk:

$$c(14) = \frac{5000}{14} + 25 \cdot 14 = 707,14\ \$, \quad \text{és}$$
$$c(14) - c(14,14) = 707,14\ \$ - 707,11\ \$ = 0,03\ \$.$$

Másfelől viszont $c(15) = 708,33$ \$, és költségeink $708,33 - 707,11 = 1,22$ \$-ral nőnek, ha felfelé kerekítünk. Jobb tehát, ha lefelé kerekítünk, és 14 naponta rendelünk. □

4.5. Feladatok

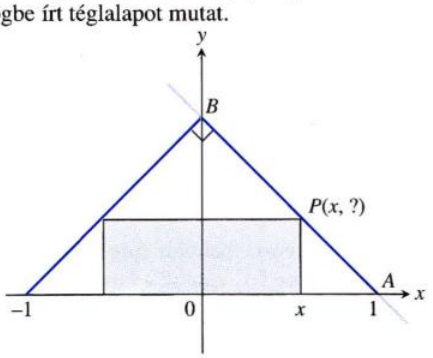
Ha meg akarjuk határozni egy egyváltozós függvény maximumát vagy minimumát, előbb mindig ábrázoljuk a függvény grafikonját a probléma megoldására alkalmas értelmezési tartományban. A rajz ötleteket ad, és olyan összefüggéseket tár fel, amelyek elengedhetetlenek a probléma megválaszolásához.

Geometriai alkalmazások

1. A kerület minimalizálása. Minimálisan mekkora a kerülete a 16 cm^2 területű téglalapnak? Mekkorák lesznek a minimális kerületű téglalap oldalai?

2. Mutassuk meg, hogy a 8 egység kerületű téglalapok közül a négyzetnek a legnagyobb a területe.

3. Az ábra egy 2 egysényi átfogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögbe írt téglalapot mutat.



(a) Fejezzük ki a P pont y koordinátáját x függvényeként. (*Útmutató:* Írjunk fel egyenletet az AB szakaszra.)

(b) Fejezzük ki a téglalap területét x segítségével.

(c) Maximum mekkora lehet a beírt téglalap területe, és mekkorák a maximális területű téglalap oldalai?

4. Egy téglalap egyik oldala az x tengelyen fekszik, két felső csúcsa pedig az $y = 12 - x^2$ parabolán. Milyen oldalhosszak mellett lesz maximális a téglalap területe, és mekkora ez a terület?

5. 8×15 dm-es kartonlapból téglalap alakú, nyitott dobozt készítünk úgy, hogy a kartonlap sarkaiból egybevágó négyzeteket vágunk ki, majd felhajtjuk az oldalakat. Milyenek legyenek a doboz méretei, ha azt szeretnénk elérni, hogy a lehető legnagyobb legyen a térfogata? Mekkora lesz a maximális térfogat?

6. Hozzunk létre egy háromszöget a koordináta-rendszer első síknegyedében úgy, hogy az x-, illetve y-tengely $(a,0)$, $(0,b)$ koordinátájú pontjait egy 20 egység hosszú egyenes szakasszal összekötjük. Mutassuk meg, hogy a közbezárt háromszög területe akkor lesz a legnagyobb, ha $a = b$.

7. A legjobb kerítésterv. Egy farmon az állatok számára el kell keríteni egy téglalap alakú karámot. A területet egyik oldalról folyó határolja, a másik három oldalon egyszálas vezetéket kell kifeszíteni, amelybe aztán áramot vezetnek. A rendelkezésre álló 800 méternyi vezetékkel mekkora területet lehet elkeríteni, és milyen méretű lesz a maximális területű karám?

8. A legrövidebb kerítés. Egy borsóültetvény 216 m^2-es téglalap alakú részét be kell keríteni, majd a kerítés egyik oldalával párhuzamosan két egyenlő részre kell osztani. Mekkorák legyenek a külső téglalap oldalai, hogy a lehető legkevesebb kerítésfonatot kelljen felhasználni? Milyen hosszú kerítésre van szükség?

9. A vasmű szerződést kötött egy papírgyárral egy 500 m^3 térfogatú, négyzet alapú, felül nyitott acéltartály megtervezésére és megépítésére. A tartályt rozsdamentes acéllemezből, az élek mentén hegesztve kell elkészíteni. Mint tervezőmérnöknek az a feladatunk, hogy megadjuk a tartály méreteit úgy, hogy annak súlya a lehető legkisebb legyen.

(a) Milyen méreteket ajánljunk a kivitelezéshez?

(b) Írjuk le röviden, hogy miként vesszük figyelembe a tartály súlyát.

10. Esővíztartály. 1125 m^3 térfogatú, négyzet alapú, szögletes esővíztartályt kell építeni, amelynek alapja x m, magassága y m. A tartályt a földbe kell süllyeszteni úgy, hogy teteje épp a felszínig érjen. A költséget nem csupán a tartály anyaga szabja meg, a földkitermelés költségei az xy szorzattal arányosan nőnek.

(a) Ha a teljes költség

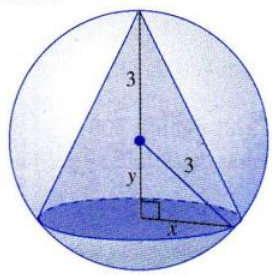
$$c = 5(x^2 + 4xy) + 10xy,$$

milyen x és y érték mellett lesz minimális?

(b) Adjunk elfogadható értelmezést az (a) részben szereplő költségfüggvényre.

11. Posztertervezés. Olyan téglalap alakú posztert kell terveznie, amelynek nyomott felülete 50 dm^2, alul és felül 4 dm-nyi, kétoldalt pedig 2–2 dm-nyi margója van. Milyen méretek mellett a legkisebb a poszter papírigénye?

12. Legfeljebb mekkora térfogatú egyenes körkúp írható egy 3 egység sugarú gömbbe?



13. Egy háromszög két oldalának hossza a és b, az általuk közbezárt szög pedig θ. A θ mely értékére lesz a legnagyobb a háromszög A területe? (*Útmutató:* $A = (1/2)ab\sin\theta$.)

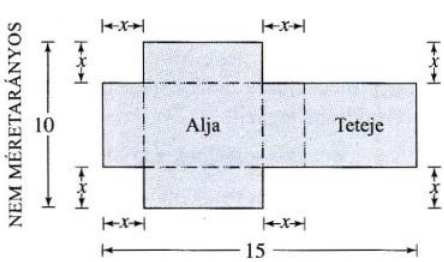
14. Bödön megtervezése. Milyen méretekkel lesz a legkisebb súlyú az a felül nyitott, henger alakú bödön, amelynek térfogata 1000 cm^3? Eredményünket vessük egybe a 2. példa eredményével.

15. Bödön megtervezése. Tervezzünk 1000 cm^3 térfogatú, egyenes körhenger alakú bödönt, de a tervezés során a keletkező hulladék mennyiségére is tekintettel kell lennünk. A hengerpalást kivágásakor nem keletkezik hulladék, de a bödön alját és tetejét, amelyek sugara r, $2r$ oldalhosszúságú négyzetekből kell kivágnunk. A bödön elkészítéséhez felhasznált alumínium teljes mennyisége ezért

$$A = 8r^2 + 2\pi rh,$$

és nem $2\pi r^2 + 2\pi rh$, mint a 2. példában. A 2. példában h és r arányára 2:1 volt a leggazdaságosabb érték. Most mi lesz a legkedvezőbb arány?

16. Fedeles doboz tervezése. Egy téglalap alakú kartonlap oldalai 10, illetve 15 dm hosszúak. Az egyik 10 dm-es oldal végeinél a sarkokból négyzeteket vágtunk ki, ahogy az az ábrán is látható. A másik sarkokból két egyforma méretű téglalapot vágtunk ki úgy, hogy a füleket felhajtva fedeles dobozt készíthetünk a kartonból.



(a) Írjuk fel a doboz $V(x)$ térfogatképletét.

(b) Állapítsunk meg V-re a problémaszituációnak megfelelő értelmezési tartományt, majd ábrázoljuk V-t ezen a tartományon.

(c) Grafikus módszerrel keressük meg a V függvény maximumát és a hozzá tartozó x értéket.

(d) Támasszuk alá analitikusan a (c) részben kapott eredményt.

17. Dobozkészítés. Egy 24 × 36 cm méretű kartonlapot félbehajtunk, mely így az ábrán is látható, 18 × 24 cm-es téglalapot alkot. A félbehajtott téglalap sarkaiból ezután egybevágó, x oldalhosszúságú négyzeteket vágunk ki. A lapot széthajtjuk, és a 6 fület felhajtva fedeles dobozt készítünk belőle.

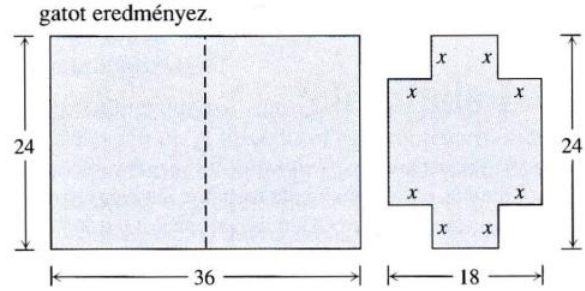
(a) Írjuk fel a doboz $V(x)$ térfogatfüggvényét.

(b) Állapítsunk meg V-re a problémaszituációnak megfelelő értelmezési tartományt, majd ábrázoljuk V-t ezen a tartományon.

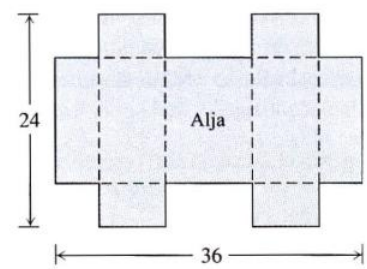
(c) Grafikus módszerrel határozzuk meg a maximális térfogatot és a maximális térfogatot adó x-értéket.

(d) Támasszuk alá analitikusan a (c) részben kapott eredményt.

(e) Keressük meg azt az x értéket, amely 1120 cm^3 térfogatot eredményez.



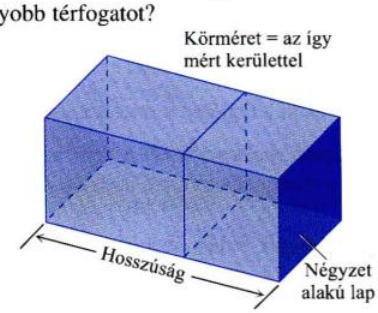
Aztán széthajtjuk a lapot:



18. Tekintsük az $y = 4\cos(0,5x)$ görbe $x = -\pi$ és $x = \pi$ közé eső darabját, és rajzoljunk a görbe alá egy téglalapot. Mekkorák lesznek a maximális területű téglalapnak az oldalai, és mekkora lesz a területe?

19. Adjuk meg a 10 cm sugarú gömbbe írható maximális térfogatú egyenes körhenger sugarát és magasságát. Mekkora a maximális térfogat?

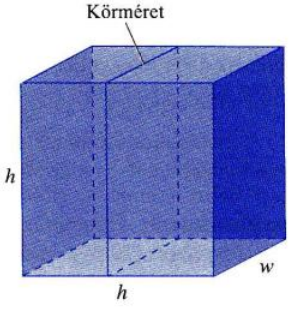
20. (a) Az amerikai posta belföldi forgalomban csak olyan küldeményeket vesz fel, amelyek hosszának és körméretének összege nem haladja meg a 108 inch-et (1 inch = = 2,54 cm). Milyen méretű négyzetes hasábbal lehet elérni a legnagyobb térfogatot?



T **(b)** Ábrázoljuk a 108 inch-es doboz (hosszának és kerületének összege legyen 108 inch) térfogatát mint a hosszúság függvényét, és hasonlítsuk össze a feladat (a) részére adott válaszunkkal.

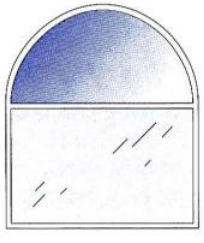
21. A 20. feladat általánosítása.

(a) A négyzetes hasáb méretei legyenek most h, h és w, s így kerülete $2h + 2w$. Mikor lesz a legnagyobb a térfogata?



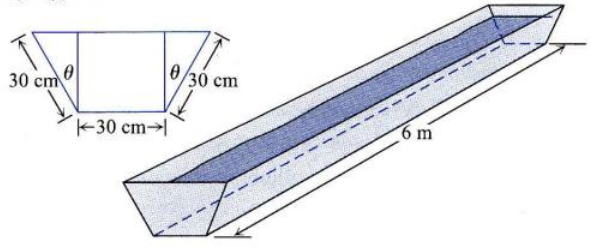
T **(b)** Ábrázoljuk a térfogatot h függvényeként, és hasonlítsuk össze a feladat (a) részére adott válaszunkkal.

22. Tekintsünk egy ablakot, amely egy téglalapból és egy arra ráhelyezett félkörlapból áll. A téglalap alakú rész közönséges üveg, a félkör alakú rész füstüveg, amely egységnyi felületén csak feleannyi fényt enged át, mint amennyit a közönséges üveg. A teljes kerület adott érték. Milyen méretarányok mellett jut át a legtöbb fény ezen az ablakon? A keret vastagságától tekintsünk el.



23. Egy henger alakú gabonatárolót úgy terveztek meg, hogy a teteje félgömb alakú legyen (az aljával most ne foglalkozzunk). A felületegységre eső építési költség kétszer akkora a félgömbre, mint a hengerpalástra. Határozzuk meg, hogy adott térfogat mellett milyen méretekkel lesz a legkisebb az építési költség. A siló falának vastagságától és az építés során keletkező hulladéktól tekintsünk el.

24. Az ábrán látható vályú méretei adottak; egyedül a θ szöget lehet változtatni. A θ mely értékére lesz a vályú térfogata a lehető legnagyobb?

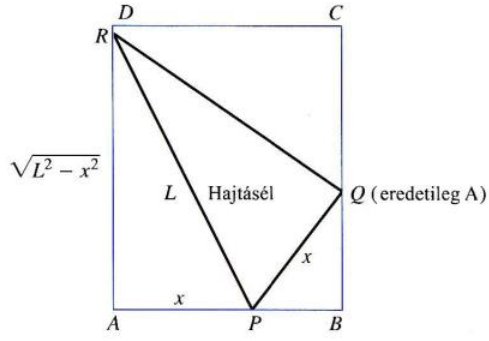


25. Papírhajtogatás. Egy $8,5 \times 15$ cm-es papírlapot helyezzünk valamilyen sík felületre. Egyik csúcsánál hajtsuk fel úgy, hogy a csúcs a szemközti hosszabbik élre kerüljön. Simítsuk le a lapot. Az a feladat, hogy a hajtásél a lehető legrövidebb legyen. Jelölje a hajtásél hosszát L.

(a) Mutassuk meg, hogy $L^2 = 2x^3/(2x - 8,5)$.

(b) Az x mely értékére lesz L^2 a legkisebb?

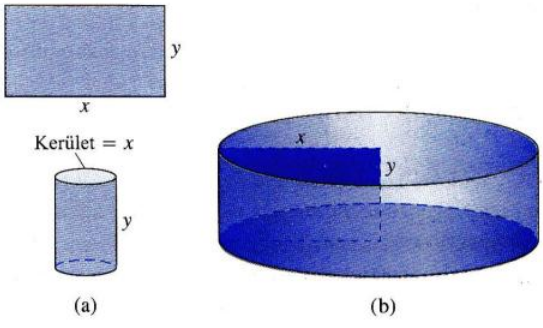
(c) Mi az L minimális értéke?



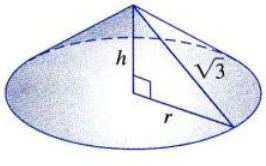
26. Hengerfelület-készítés. Hasonlítsuk össze a következő két konstrukciós problémára adott válaszainkat.

(a) Egy 36 cm kerületű és x, y oldalhosszúságú téglalap alakú papírlapból az alábbi ábra (a) részén látható módon hengert készítünk. Milyen x, y értékek adják a legnagyobb térfogatot?

(b) Ugyanezt a papírlapot az y oldalél mentén megforgatjuk úgy, hogy az az ábra (b) részén látható hengerfelületet söpörje. Milyen x, y értékek adják a legnagyobb térfogatot?



27. Kúpfelület-készítés. Egy $\sqrt{3}$ m átfogójú derékszögű háromszöget az egyik átfogója mentén megforgatva egyenes körkúpot kapunk. Számítsuk ki az így előállítható legnagyobb térfogatú kúpnak a sugarát, magasságát és térfogatát.



28. Az a paraméter milyen értékére van az $f(x) = x^2 + (a/x)$ függvénynek

(a) lokális minimuma az $x = 2$ pontban, illetve

(b) inflexiós pontja az $x = 1$ pontban?

29. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^2 + (a/x)$ függvénynek semmilyen a érték mellett nem lehet lokális maximuma.

30. Az a és b paraméter milyen értékére van az $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ függvénynek

(a) lokális maximuma $x = 1$-ben, és lokális minimuma $x = 3$-ban?

(b) lokális minimuma $x = 4$-ben, és inflexiós pontja az $x = 1$ helyen?

Fizikai alkalmazások

31. Függőleges hajítás. Valamely függőlegesen mozgó test magasságát az

$$s = -4{,}9t^2 + 30t + 34$$

függvény adja meg, ahol s-t méterben, t-t másodpercben mérjük. Mekkora lesz

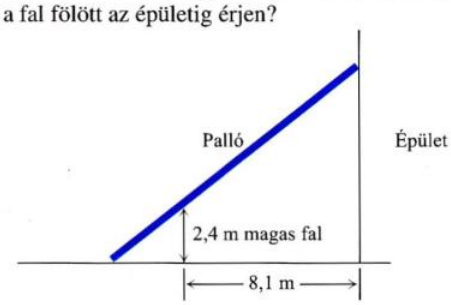
(a) a test sebessége a $t = 0$ időpontban;

(b) a legnagyobb magassága és mikor éri azt el;

(c) a sebessége, amikor $s = 0$?

32. A leggyorsabb útvonal. Jane a parttól 2 kilométerre egy csónakban ül, és szeretne eljutni a tőle légvonalban 6 kilométerre lévő partmenti faluba. 2 km/h sebességgel tud evezni és 5 km/h sebességgel gyalogolni. Hol szálljon ki a csónakból, hogy a lehető legrövidebb idő alatt érjen a faluba?

33. Az ábrán látható 2,4 m magas fal 8,2 méterre van az épülettől. Legalább mekkora egyenes pallóra van szükség, hogy a talajtól a fal fölött az épületig érjen?

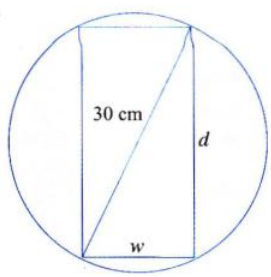


34. Egy téglalap keresztmetszetű fagerenda S szilárdsága a gerenda szélességének és vastagsága négyzetének szorzatával arányos (lásd az ábrát).

(a) A 30 cm átmérőjű rönkfából milyen gerendát kell kivágni, ha azt szeretnénk, hogy a teherbírása a lehető legjobb legyen?

(b) Ábrázoljuk S-et a w szélesség függvényeként. A k arányossági tényező értéke legyen 1. Az eredményt egyeztessük a feladat (a) részének eredményével.

(c) Ugyanazon az ábrán ábrázoljuk S-et mint a d vastagság függvényét. Legyen megint $k = 1$. Hasonlítsuk össze a grafikonokat és a feladat (a) részének eredményét. Milyen hatással van eredményünkre k értékének megváltoztatása? Próbáljuk ki.



35. Egy téglalap keresztmetszetű fagerenda S merevsége szélességének és vastagsága köbének szorzatával arányos.

(a) A 30 cm átmérőjű rönkfából milyen gerendát vágjunk ki, ha azt szeretnénk, hogy a lehető legmerevebb legyen?

(b) Ábrázoljuk S-et a w szélesség függvényeként. A k arányossági tényező értéke legyen 1. Az eredményt egyeztessük a feladat (a) részének eredményével.

(c) Ugyanazon az ábrán ábrázoljuk S-et mint a d vastagság függvényét. Legyen megint $k = 1$. Hasonlítsuk össze a grafikonokat és a feladat (a) részének eredményét. Milyen hatással van eredményünkre k értékének megváltoztatása? Próbáljuk ki.

36. Mozgás egyenes mentén. Két, az s-tengely mentén mozgó tömegpont helyzetét az $s_1 = \sin t$, illetve $s_2 = \sin(t + \pi/3)$ függvény adja meg. Az elmozdulást méterben, az időt másodpercben mérjük.

(a) A $0 \le t \le 2\pi$ intervallum mely időpontjában (időpontjaiban) találkozik a két tömegpont?

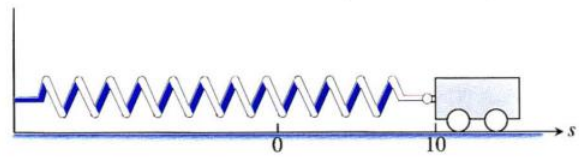
(b) Mekkora a tömegpontok legnagyobb távolsága?

(c) A $0 \le t \le 2\pi$ időintervallum mely pontján változik leggyorsabban a tömegpontok egymástól való távolsága?

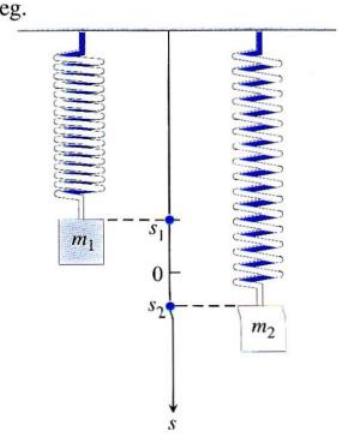
37. Súrlódásmentes kocsi. Egy súrlódásmentesen gördülő kiskocsit rugóhoz kapcsolunk. A rugó másik végét a falhoz rögzítjük. A kocsit nyugalmi helyzetéből 10 cm-nyire kimozdítjuk, majd a $t = 0$ időpontban elengedjük, így 4 másodpercen keresztül oda-vissza gördülhet. A t időpontban a kocsi helyzetét az $s = 10\cos \pi t$ függvény adja meg.

(a) Mekkora a kocsi legnagyobb sebessége? Mikor mozog a leggyorsabban? Hol tartózkodik akkor, amikor a leggyorsabban mozog? Mekkora a gyorsulás nagysága ebben az időpontban?

(b) Hol tartózkodik a kocsi, amikor a legnagyobb a gyorsulása? Mekkora a kocsi sebessége abban az időpontban?



38. Két testet egymás mellett elhelyezett rugókra függesztünk. Pillanatnyi helyzetüket az $s_1 = 2\sin t$, illetve $s_2 = \sin 2t$ függvények adják meg.



(a) A $0 < t$ intervallumban hányszor halad el egymás mellett a két test? (*Útmutató:* $\sin 2t = 2\sin t \cos t$)

(b) A $0 \le t \le 2\pi$ időintervallumban mikor lesz a két test távolsága a legnagyobb? Mekkora ez a távolság? (*Útmutató:* $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$.)

39. Két hajó távolsága. Délben az A hajó 21 kilométerre északra volt a B hajótól. Az A hajó egész nap 21 km/h sebességgel dél felé haladt; a B hajó egész nap 13 km/h sebességgel kelet felé vitorlázott.

(a) Legyen a $t = 0$ időpont déli 12 óra, és fejezzük ki a két hajó s távolságát t függvényeként.

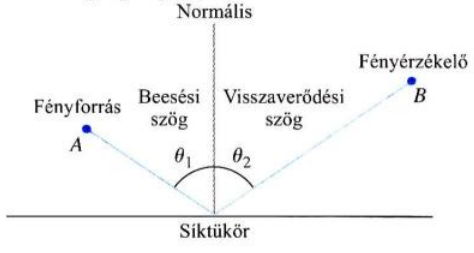
(b) Milyen gyorsan változott a hajók távolsága délben? És egy órával később?

(c) Azon a napon 4 km volt a látótávolság. Láthatta-e valamikor is a legénység a másik hajót?

(d) Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben lehetőleg különböző színekkel s-et és ds/dt-t mint t függvényét a $0 \le t \le 3$ intervallumon. Vessük össze a grafikonokat, és egyeztessük a feladat (b) és (c) részének eredményével.

(e) ds/dt grafikonjának mintha vízszintes aszimptotája lenne az első síknegyedben. Ez azt sugallja, hogy ds/dt-nek határértéke van, ha $x \to \infty$. Mi ez a határérték? Milyen kapcsolat van e határérték és az egyes hajók sebessége között?

40. Az optika Fermat-elve. Az optikai Fermat-elv szerint két pont között a fény mindig olyan úton halad, hogy az út megtételéhez szükséges idő a lehető legkevesebb legyen. Az A fényforrásból induló fény egy síktükrön visszatükröződve a B pontba jut (lásd az ábrát). Mutassuk meg, hogy ha a fény valóban engedelmeskedik a Fermat-elvnek, akkor a beesési szögnek egyenlőnek kell lenni a visszaverődési szöggel, ahol mindkét szöget a tükröző felületre merőleges egyeneshez viszonyítva mérjük. (A levezetéshez nincs szükség az analízis eszközeire. Tisztán geometriai úton megkaphatjuk.)



41. Önpestis. Az ón, amennyiben 13,2 °C alatti hőmérsékleten tartjuk, morzsalékossá válik, mállani kezd, míg végül szürke por lesz belőle. Az ónból készült tárgyak spontán módon szürke porrá alakulnak, amennyiben éveken át alacsony a hőmérséklet környezetükben. Az európaiak, akik végignézték hogyan mállanak szét az évek során templomaikban az orgonasípok, önpestisnek hívták ezt az átalakulást, mert fertőzőnek tűnt – és valóban az is volt, mert a szürke por katalizálja saját keletkezését.

Valamely kémiai folyamat *katalizátorának* olyan anyagot nevezünk, amely anélkül befolyásolja a reakció sebességét, hogy maradandó változást szenvedne. Az *autokatalitikus* reakció olyan reakció, melynek terméke saját kialakulását katalizálja. Ha a katalizátor csak kis mennyiségben van jelen, az ilyen folyamat kezdetben lassú, s lassú a végén is, amikor a kiindulási anyag nagy része már átalakult. De közben, amikor a kiindulási anyag és a katalizátor is bőségesen rendelkezésre áll, a reakció gyors iramban zajlik.

Bizonyos esetekben úgy vehetjük, hogy a $v = dx/dt$ reakciósebesség a kiindulási anyag és a végtermék mennyiségével is arányos. Azaz v-t csupán x függvényének tekinthetjük, és

$$v = kx(a-x) = kax - kx^2,$$

ahol
x a végtermék mennyisége;
a a kezdeti anyagmennyiség;
k pozitív állandó.

x milyen értékénél van v-nek maximuma? Mekkora v maximális értéke?

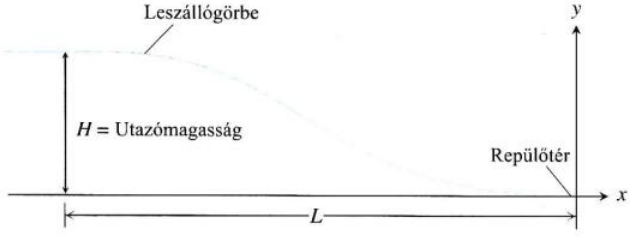
42. Repülőgép leszállási görbéje. A repülőgép H magasságból kezd ereszkedni a kifutópályája felé, amely tőle a földön mérve ekkor L távolságban van (lásd az ábrát). Tegyük fel, hogy a repülőgép leszállógörbéje az $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ harmadfokú polinom grafikonjának felel meg, ahol $y(-L) = H$ és $y(0) = 0$.

(a) Mekkora dy/dx, amikor $x = 0$?

(b) Mekkora dy/dx, amikor $x = -L$?

(c) A dy/dx derivált $x = 0$ és $x = -L$-beli értékének ismeretében, valamint felhasználva, hogy $y(0) = 0$ és $y(-L) = H$, mutassuk meg, hogy

$$y(x) = H\left[2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right].$$



Üzleti alkalmazások

43. Egy hátizsák előállításának és terítésének költsége c dollár. Ha a hátizsákot x dollárért kínálják, az értékesített mennyiséget az

$$n = \frac{a}{x-c} + b(100-x)$$

függvény adja meg, ahol a és b pozitív állandók. Milyen fogyasztói ár hozza a maximális profitot?

44. Egy utazási iroda utaztatási ajánlata a következő: A túrát legkevesebb 50 résztvevőre lehet megrendelni, és ekkor az ár 200 dollár/fő. Minden további részvevő – maximum 80 főig – két dollár kedvezményt kap. A teljes túraköltség 6000 dollár (fix költség) plusz fejenként 32 dollár a vezetési díj. Hány fő részvétele esetén éri el a legnagyobb nyereséget az utazási iroda?

45. A Wilson-féle kritikusmennyiség-képlet.
A készletgazdálkodás egyik képlete azt mutatja meg, hogy mennyi a rendelések, a kifizetések és a raktározás átlagos heti költsége:

$$A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2},$$

ahol q az alacsony keresleti szint esetén rendelt árumennyiség (az áru lehet cipő, rádió, partvis vagy bármi más), k a rendelési költség (mindig ugyanannyi, függetlenül attól, hogy milyen sűrűn rendelünk) c az egy darab termék költsége (állandó), m a hetente eladott tételek száma (állandó), h pedig az egy tételre jutó raktározási költség (mely számol a termék helyigényével, a raktározás során felmerülő veszteséggel, a biztosítás és az őrzés költségével).

(a) Az a feladatunk, hogy készletgazdálkodási menedzserként határozzuk meg azokat az értékeket, amelyek minimalizálják $A(q)$ értékét. Mi ez a minimum? (A megoldásként kapott képletet *Wilson-féle kritikusmennyiség-képletnek* nevezik.)

(b) A rendelési költség olykor a megrendelt mennyiségtől függ. Ebben az esetben helyesebb, ha k-t $k + bq$-val helyettesítjük, ahol b egy állandó. Mi lesz most a leggazdaságosabb rendelési tétel?

46. Termelési szint. Bizonyítsuk be, hogy azon a termelési szinten, ahol az átlagos költség minimális, az átlagos költség egyenlő a határköltséggel.

47. Mutassuk meg, hogy ha a bevételi függvény $r(x) = 6x$, a költségfüggvény pedig $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, akkor a legjobb, ha fölhagyunk a termeléssel (így a bevétel és a költség azonos lesz).

48. Termelési szint. Tegyük fel, hogy x tétel előállításának költsége $c(x) = x^3 - 20x^2 + 20000x$. Keresse meg azt a termelési szintet, amely mellett x tétel előállításának átlagos költsége minimális lesz.

49. Átlagos napi költség. Vezessük be a 6. példában a következő jelöléseket. Az egy szállítmányra eső költség legyen d, a raktározási költség s dollár raktározott tételenként és naponta, az előállított mennyiség pedig p darab naponta.

(a) Mennyi alapanyagot kell rendelni x naponként?

(b) Mutassuk meg, hogy

$$\text{az egy ciklusra jutó költség } = d + \frac{px}{2}sx.$$

(c) Határozzuk meg, mekkora legyen az egyes rendelések közti x^* időtartam, és mekkora legyen az egyszerre megrendelt mennyiség ahhoz, hogy a lehető legkisebb legyen az *átlagos napi költség*.

(d) Mutassuk meg, hogy x^* az $y = d/x$ hiperbola és az $y = psx/2$ egyenes metszéspontja.

50. Az átlagos költség minimalizálása. Tegyük fel, hogy $c(x) = 2000 + 96x + 4x^{3/2}$, ahol x ezer tételt jelent. Létezik-e olyan termelési szint, ahol az átlagos költségek a legkisebbek? Ha igen, mi az?

Orvosi példák

51. Gyógyszerérzékenység. (*A 3.2 alfejezet 52. feladatának folytatása.*) Keressük meg, mekkora gyógyszermennyiségre a legérzékenyebb a test oly módon, hogy meghatározzuk azt az M értéket, amelynél a dR/dM deriváltnak maximuma van,

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right)$$

és C állandó.

52. Hogyan köhögünk? Amikor köhögünk, a trachea (légcső) összehúzódik, így növeli meg a kiáramló levegő sebességét. Ez felveti a kérdést, hogy milyen mérvű összehúzódás mellett lesz maximális a levegő sebessége, illetve hogy valóban olyan nagyon összehúzódik-e a légcső köhögéskor.

A légcső rugalmasságára és a levegőnek a légcső falán való súrlódására vonatkozóan ésszerű feltételezésekkel élve a kiáramló levegő átlagsebességét a

$$v = c(r_0 - r)^2 \text{ cm/s}, \quad \frac{r_0}{2} \le r \le r_0$$

összefüggéssel lehet modellezni, ahol r_0 a nyugalmi állapotban lévő légcső sugara centiméterben, c pozitív állandó, amelynek értéke részben a légcső hosszától függ.

(a) Mutassuk meg, hogy v akkor a legnagyobb, amikor $r = (2/3)r_0$, azaz amikor a trachea 33%-os mértékben húzódik össze. Figyelemre méltó tény, hogy ezt az értéket a röntgensugaras vizsgálatok is megerősítik.

(b) Legyen $r_0 = 0{,}5$ és $c = 1$. ábrázoljuk v-t a $0 \le r \le 0{,}5$ intervallumon. Hasonlítsuk össze az eredményt azzal a kijelentéssel, hogy v-nek $r = (2/3)r_0$ esetén van maximuma.

További példák és feladatok

53. Egy egyenlőtlenség pozitív egész számokra. Mutassuk meg, hogy ha a, b, c és d pozitív egész számok, akkor

$$\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd} \ge 16.$$

54. A 4. példában szerplő dt/dx derivált.

(a) Mutassuk meg, hogy

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

az x növekvő függvénye.

(b) Mutassuk meg, hogy

$$g(x) = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

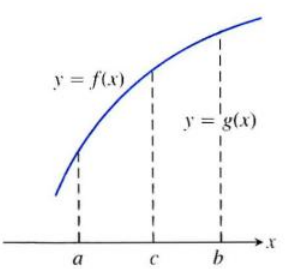
az x csökkenő függvénye.

(c) Mutassuk meg, hogy

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{c_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

az x-nek csökkenő függvénye.

55. Legyen $f(x)$ és $g(x)$ az alábbi ábrán látható két differenciálható függvény; c pedig az a pont, amelyben a grafikonok függőleges távolsága a legnagyobb. Van-e valami sajátos tulajdonsága a görbék c-beli érintőinek? Válaszunkat indokoljuk.



56. Azt kérik tőlünk, hogy határozzuk meg, van-e az $f(x) = 3 + 4\cos x + \cos 2x$ függvénynek negatív értéke.

(a) Fejtsük ki, miért elegendő a $[0, 2\pi]$ intervallumba eső x értékeket vizsgálni.

(b) Negatív-e bárhol is f értéke? Adjunk magyarázatot.

57. (a) Az $y = \operatorname{ctg} x - \sqrt{2}\csc x$ függvénynek abszolút maximuma van a $0 < x < \pi$ intervallumban. Keressük meg az abszolút maximumot.

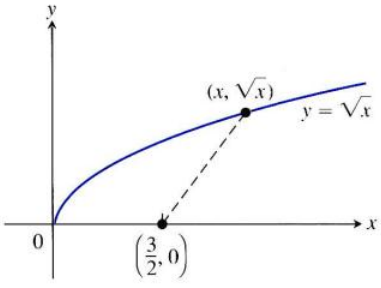
(b) Ábrázoljuk a függvényt, és az ábrát vessük egybe a feladat (a) részének eredményével.

58. (a) Az $y = \operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x$ függvénynek abszolút maximuma van a $0 < x < \pi/2$ intervallumban. Keressük meg az abszolút maximumot.

(b) Ábrázoljuk a függvényt, vessük egybe a grafikont a feladat (a) részének eredményével.

59. **(a)** Mennyire közelíti meg az $y = \sqrt{x}$ görbe a $(3/2, 0)$ pontot? (*Útmutató:* Ha a távolság *négyzetét* minimalizáljuk, kiküszöbölhetjük a négyzetgyököt.)

(b) Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a távolságfüggvényt és az $y = \sqrt{x}$ függvényt; a grafikonokat vessük össze a feladat (a) részének eredményével.



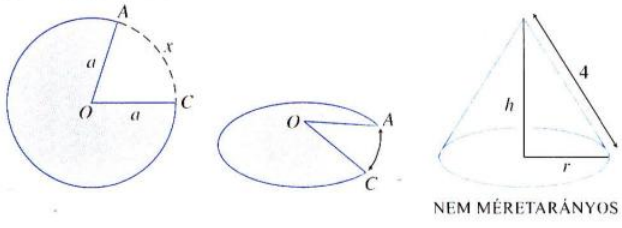
60. **(a)** Mennyire közelíti meg az $y = \sqrt{16 - x^2}$ félkör az $(1, \sqrt{3})$ pontot?

(b) Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a távolságfüggvényt és az $y = \sqrt{16 - x^2}$ függvényt, és a grafikonokat vessük össze a feladata (a) részének eredményével.

Számítógépes vizsgálatok

A 61. és 62. feladat megoldásához segítséget jelenthet a MAPLE, a MATHEMATICA vagy más hasonló programcsomag használata.

61. **Általánosított kúpfeladat.** Egy a sugarú körlapból h magasságú, r sugarú kúpot készítünk oly módon, hogy kivágjuk belőle az x ívhosszúságú AOC körcikket, azután fedésbe hozzuk az OA és OC éleket.



NEM MÉRETARÁNYOS

(a) Fejezzük ki a kúp térfogatát x és a függvényeként.

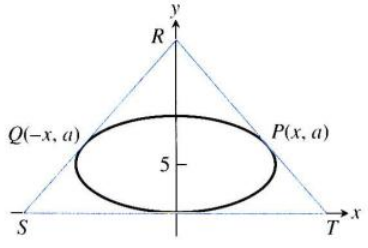
(b) Mekkora lesz a maximális térfogatú kúphoz tartozó r és h érték, ha $a = 4, 5, 6, 8$?

(c) Keressünk egyszerű, a-tól független kapcsolatot r és h között a maximális térfogatú kúp esetén. Fejtsük ki, hogyan jutottunk el ehhez az összefüggéshez.

62. **Ellipszis köré rajzolt kör.** Legyen $P(x, a)$ és $Q(-x, a)$ két pont a $(0, 5)$ középpontú

$$\frac{x^2}{100} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

ellipszis felső ívén. Az alábbi ábra RST háromszöge úgy jött létre, hogy meghúztuk az ellipszis érintőjét a P és a Q pontban.



(a) Mutassuk meg, hogy a háromszög területe:

$$A(x) = -f'(x)\left[x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2 = 1,$$

ahol $y = f(x)$ a felső félellipszist reprezentáló függvény.

(b) Mi az A értelmezési tartománya? Rajzoljuk fel A grafikonját. A grafikon aszimptotái milyen összefüggésben állnak a problémával?

(c) Határozzuk meg a minimális területű háromszög magasságát. Hogyan viszonyul a magasság az ellipszis középpontjának koordinátáihoz?

(d) Válaszoljuk meg az (a)–(c) kérdéseket a $(0, B)$ középpontú

$$\frac{x^2}{C^2} + \frac{(y-B)^2}{B^2} = 1$$

ellipszisre is. Mutassuk meg, hogy a háromszögnek akkor lesz maximális a területe, amikor magassága $3B$.

4.6. Határozatlan alakok és a L'Hospital-szabály

Johann Bernoulli fedezte fel azt a szabályt, amelynek segítségével olyan törtkifejezések határértékét is ki lehet számolni, amelyeknek a számlálója és a nevezője nullához vagy végtelenhez tart. E szabályt ma **L'Hospital-szabályként** ismerjük. Nevét Guillaume François Antoine de L'Hospital (1661–1704) francia főnemesről kapta. Az ő differenciálszámításról írt könyvében jelent meg először nyomtatásban ez a szabály.

0/0 típusú határozatlan alakok

Ha a folytonos $f(x)$ és $g(x)$ függvények mindegyike 0 az $x = a$ helyen, akkor a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határértéket nem lehet kiszámítani az $x = a$ helyettesítéssel. A behelyettesítés eredménye ugyanis 0/0, ami egy értelmetlen, jelentés nélküli kifejezés. A 0/0 szimbólum az úgynevezett **határozatlan alakok** megjelölésére szolgál. A határozatlan alakoktól néha meg lehet szabadulni egyszerűsítéssel, átrendezéssel vagy más algebrai művelettel. Ez azonban nem mindig vihető keresztül, amint a 2. fejezetben már tapasztalhattuk. A 2.4. alfejezetben a $\lim_{x\to 0}(\sin x)/x$ határértéket szerettük volna meghatározni. De az

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határértékkel sem volt szerencsénk, mivel az $x = a$ helyettesítéskor mindig 0/0 alakot öltött. A L'Hospital-szabály segítségével azonban olyan határértékeket is ki lehet számítani, amelyek egyébként minden más próbálkozással határozatlan alakra vezetnek.

6. TÉTEL **L'Hospital-szabály (első alak).**
Tegyük fel, hogy $f(a) = g(a) = 0$, $f'(a)$ és $g'(a)$ létezik és $g'(a) \neq 0$. Akkor

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Figyelem!
Amikor a L'Hospital-szabályt f/g-re alkalmazzuk, f deriváltját kell elosztani g deriváltjával. Ne essünk bele abba a csapdába, hogy megpróbálunk f/g deriváltjával számolni. f'/g'-t kell használni, nem $(f/g)'$-t!

Bizonyítás.

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x\to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \square$$

1. PÉLDA **A L'Hospital-szabály használata.**

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x - \sin x}{x} = \left.\frac{3 - \cos x}{1}\right|_{x=0} = 2$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \left.\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}.$ $\square$

Előfordulhat, hogy a deriválás után az új számláló és nevező is nulla lesz az $x = a$ helyen, mint azt a 2. példában is láthatjuk. Ilyenkor a L'Hospital-szabály egy erősebb alakját használjuk.

7. TÉTEL **L'Hospital-szabály (erősebb alak).**
Tegyük fel, hogy $f(a) = g(a) = 0$, valamint hogy f és g egyaránt differenciálható valamely, az a-t tartalmazó I nyílt intervallumon kivéve esetleg az a pontot, továbbá, hogy $g'(x) \neq 0$ az I-n, ha $x \neq a$. Ekkor

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló határérték létezik.

Mielőtt bebizonyítanánk a tételt, nézzünk egy példát.

2. PÉLDA **A L'Hospital-szabály erősebb alakjának használata.**

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2}= \qquad \left(\tfrac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1/2)(1+x)^{-1/2}-1/2}{2x}= \qquad \text{még mindig } \tfrac{0}{0}\text{, újra deriválunk}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(1/4)(1+x)^{-3/2}}{2}=-\frac{1}{8} \qquad \text{nem } \tfrac{0}{0}\text{, megvan a határérték}$$

$$\text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \qquad \left(\left(\tfrac{0}{0}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}= \qquad \text{még mindig } \tfrac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}= \qquad \text{még mindig } \tfrac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6} \qquad \text{nem } \tfrac{0}{0}\text{, megvan a határérték}$$ □

A L'Hospital-szabály erősebb alakjának bizonyítása a Cauchy-féle középértéktételre alapul, egy olyan középértéktételre, amely nem egy, hanem két függvényre vonatkozik. Először Cauchy tételét (Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857, francia matematikus) bizonyítjuk, amelynek alapján aztán a L'Hospital-szabály is belátható.

8. TÉTEL **Cauchy-féle középértéktétel.**

Tegyük fel, hogy az f és a g függvény folytonos az $[a,b]$ és differenciálható az (a,b) intervallumon, továbbá minden $x\in(a,b)$ esetén $g'(x)\neq 0$. Ekkor létezik olyan $c\in(a,b)$, amelyre

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Bizonyítás. A 4.2. alfejezetben bizonyított középértéktételt fogjuk alkalmazni kétszer egymás után. Először azt mutatjuk meg, hogy $g(a)\neq g(b)$. Ha $g(b)=g(a)$, akkor a középértéktétel szerint valamely a és b közé eső c-re

$$g'(c)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=0$$

adódna, ami nem lehetséges, hiszen $g'(x)\neq 0$ az (a,b) intervallumon.

Most az

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$$

függvényre fogjuk alkalmazni a Rolle-tételt. Ez a függvény folytonos és differenciálható, mivel f és g azok, továbbá $F(b)=F(a)=0$. Ezért létezik olyan a és b közötti c szám, amelyre $F'(c)=0$; f-fel és g-vel kifejezve ez az egyenlőség az

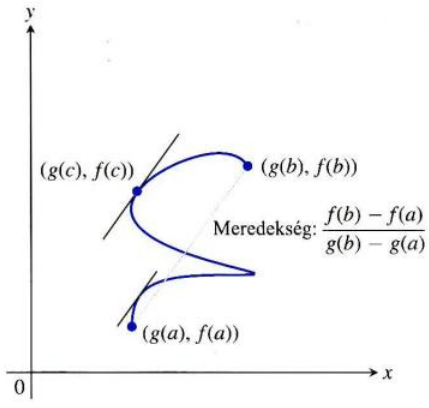
$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g'(c)]=0$$

vagy

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

alakot ölti. □

Megjegyezzük, hogy a 4.2. alfejezetben bizonyított Lagrange-féle középértéktétel a Cauchy-féle középértéktétel azon speciális esete, amelyben $g(x)=x$.



4.42. ÁBRA: Létezik legalább egy olyan $t = c$ paraméterérték $(a < c < b)$, amelyre a görbéhez a $(g(c), f(c))$ pontban húzott érintő meredeksége ugyanakkora, mint a $(g(a), f(a))$, $(g(b), f(b))$ pontokat összekötő szelő meredeksége.

A Cauchy-féle középértéktételnek az $x = g(t)$ és $y = f(t)$ paraméteres egyenletekkel értelmezett C görbére nézve geometriai értelmezést lehet adni. A 3.5. alfejezetben beláttuk, hogy a t-vel paraméterezett görbe meredekségét a

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

kifejezés adja meg. Így $f'(c)/g'(c)$ a görbe $t = c$ pontjához húzott érintő meredeksége. A C görbe $(g(a), f(a))$ és $(g(b), f(b))$ pontjait összekötő szelő meredeksége

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

A 8. Tétel szerint létezik olyan (a, b) intervallumbeli c paraméterérték, amelyre a görbe $(g(c), f(c))$ pontbeli meredeksége egyenlő a $(g(a), f(a))$, $(g(b), f(b))$ pontokat összekötő szelő meredekségével. Ezt a geometriai természetű eredményt mutatja a 4.42. ábra. Megjegyezzük, hogy egynél több ilyen c paraméterérték is létezhet.

Most bebizonyítjuk a 7. Tételt.

A L'Hospital-szabály erősebb alakjának bizonyítása. Az $x \to a^+$ esettel foglalkozunk; $x \to a^-$ esetén a bizonyítás hasonlóképpen megy, a kettő kombinációja pedig épp a kívánt eredményt szolgáltatja.

Tegyük fel, hogy x jobbról tart a-hoz. Ekkor $g'(x) \neq 0$, és az $[a, x]$ zárt intervallumra alkalmazhatjuk a Cauchy-féle középértéktételt. E lépés eredményeként egy olyan a és x között fekvő c értéket kapunk, amelyre

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}.$$

Mivel azonban $f(a) = g(a) = 0$, így

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Amikor $x \to a$, akkor c is tart a-hoz, mivel c az a és az x között helyezkedik el. Ezért

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ami a L'Hospital-szabály arra az esetre, amikor x felülről tart a-hoz. Azt az esetet, amikor x alulról tart a-hoz, úgy kell bizonyítani, hogy a Cauchy-féle középértéktételt az $[x, a]$ zárt intervallumra $(x < a)$ alkalmazzuk. □

A gyakorlati életben használatos, valamint a könyvünkben szereplő függvények zöme is teljesíti a L'Hospital-szabály feltételeit.

A L'Hospital-szabály alkalmazása

A

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határértéket úgy állapítjuk meg a L'Hospital-szabály segítségével, hogy f-et és g-t újra és újra deriváljuk, ameddig csak az $x = a$ helyen $0/0$ határozatlan alakot kapunk. Amikor azonban a deriváltak valamelyike különbözik nullától, megállunk. A L'Hospital-szabályt nem lehet alkalmazni olyan esetben, amikor vagy a számlálónak vagy a nevezőnek véges határértéke van.

3. PÉLDA **A L'Hospital-szabály erős alakjának hibás alkalmazása.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2} = \qquad \frac{0}{0}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin s}{1+2x} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \text{nem } \tfrac{0}{0}\text{, megvan a határérték.}$$

Eddig helyes a számítás, de ha folytatjuk a deriválást és még egyszer alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt, akkor azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin s}{1+2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2},$$

ami viszont már hibás eredmény. A L'Hospital-szabályt *csak* határozatlan alakú határértékekre lehet alkalmazni, 0/1 azonban nem ilyen. □

A 7. Tétel bizonyításából nyilvánvaló, hogy a L'Hospital-szabályt egyoldali határértékekre is alkalmazni lehet.

4. PÉLDA **A L'Hospital-szabály alkalmazása egyoldali határérték esetén.**

Emlékeztetünk arra, hogy ∞ és $+\infty$ ugyanazt a dolgot jelöli.

(a) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^2} = \qquad \frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{2x} = \infty \qquad x > 0\text{-ra pozitív.}$$

(b) $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x^2} = \qquad \frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{2x} = \infty \qquad x < 0\text{-ra negatív.}$$ □

∞/∞, $\infty\cdot 0$, $\infty-\infty$ típusú határozatlan alakok

Előfordul, hogy amikor az $x = a$ helyettesítéssel megpróbálunk kiszámolni egy $x \to a$ határértéket, 0/0 helyett ∞/∞, $\infty\cdot 0$ vagy $\infty-\infty$ típusú, ugyancsak indefinit kifejezéseket kapunk. Először vizsgáljuk a ∞/∞ alakot.

Magasabb szintű könyvekben bizonyítani szokás, hogy a L'Hospital-szabály ugyanúgy alkalmazható a ∞/∞, mint a 0/0 határozatlan alakra. Ha $f(x) \to \pm\infty$ és $g(x) \to \pm\infty$, amikor $x \to a$, akkor

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló határérték létezik. Az $x \to a$ kifejezésben a lehet véges is, végtelen is. Sőt $x \to a$-t az $x \to a^+$ vagy $x \to a^-$ egyoldali határértékekkel is helyettesíthetjük.

5. PÉLDA **A ∞/∞ típusú határozatlan alakkal való számolás.**

Keressük meg a következő határértékeket:

(a) $\lim_{x\to \pi/2}\frac{\sec x}{1+\operatorname{tg} x}$

(b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x-2x^2}{3x^2+5x}$

Megoldás.

(a) A számláló és a nevező nem folytonos az $x = \pi/2$ helyen, ezért a bal oldali, illetve jobb oldali határértékeket kell vizsgálnunk. A L'Hospital-sza-

bály alkalmazásához választhatunk egy olyan I nyílt intervallumot, amelynek egyik végpontja $x = \pi/2$.

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec x}{1+\operatorname{tg} x} = \qquad \text{(a bal oldali határérték } \tfrac{\infty}{\infty} \text{ alakú)}$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{\sec^2 x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \sin x = 1.$$

A jobb oldali határérték szintén 1 lesz, bár a tört eredetileg $-\infty/-\infty$ alakú. Így a kétoldali határérték 1-gyel egyenlő.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2x^2}{3x^2+5x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-4x}{6x+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-4}{6} = -\dfrac{2}{3}.$ □

Most fordítsuk figyelmünket a $\infty \cdot 0$ és $\infty - \infty$ típusú határozatlan alakokra. Előfordul, hogy az ilyen típusú kifejezéseket algebrai átalakításokkal $0/0$ vagy ∞/∞ alakra tudjuk hozni. Ne gondoljuk azt, hogy $\infty \cdot 0$ vagy $\infty - \infty$ szám. Ezek csupán a függvény viselkedésére utaló jelölések. Nézzünk most néhány példát arra, hogy hogyan kell bánnunk az ilyen típusú határozatlan alakokkal.

6. PÉLDA **Egy $\infty \cdot 0$ típusú határozatlan alak.**

Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to\infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right)$$

határértéket.

Megoldás.

$$\lim_{x\to\infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = \qquad \infty \cdot 0$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1}{h} \sin h \right) = \qquad \text{(legyen } h = 1/x\text{)}$$

$$= 1$$ □

7. PÉLDA **Egy $\infty - \infty$ típusú határozatlan alak.**

Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

határértéket.

Megoldás. Ha $x \to 0^+$, akkor $\sin x \to 0^+$ és

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \to \infty - \infty.$$

Hasonlóan: ha $x \to 0^-$, akkor $\sin x \to 0^-$ és

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \to -\infty - (-\infty) = -\infty + \infty.$$

Egyik alakból sem derül ki, mi történik a végtelenben. Alakítsuk át a két törtkifejezést:

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} \qquad \text{a közös nevező } x \cdot \sin x$$

Ezután alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \qquad \text{még mindig } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$ □

4.6. Feladatok

A határérték kiszámítása

Az 1–6. feladatokban először a L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki a határértéket. Azután határozzuk meg a határértéket a 2. fejezetben ismertetett módszerrel is.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x}{7x^2+1}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{4x^3-x-3}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x}{x^3+x+1}$

A L'Hospital-szabály alkalmazása

A 7–26. feladatokban a L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki a határértékeket.

7. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t^2}{t}$

8. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{2x-\pi}{\cos x}$

9. $\lim\limits_{\theta\to\pi}\dfrac{\sin\theta}{\pi-\theta}$

10. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$

11. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{x-\pi/4}$

12. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\cos x-0{,}5}{x-\pi/3}$

13. $\lim\limits_{x\to\pi/2}-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x+7\sqrt{x}}$

15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-(3x+1)\sqrt{x}+2}{x-1}$

16. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a(a+x)}-a}{x}, a>0$

18. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{10(\sin t-t)}{t^3}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\cos x-1)}{\sin x-x}$

20. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$

21. $\lim\limits_{r\to 1}\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$, n pozitív egész

22. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+x})$

24. $\lim\limits_{x\to\infty} x\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$

25. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x-5}{2x^2-x+2}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\operatorname{tg} 11x}$

Elmélet és alkalmazások

A most következő 27–30. feladatoknál a L'Hospital-szabály nem segít a határérték kiszámításában. Próbáljuk ki, és látni fogjuk, hogy állandóan körben forgunk. Keressünk más megoldást.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}$

29. $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-}\dfrac{\sec x}{\operatorname{tg} x}$

30. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{csc} x}$

31. Melyik helyes, melyik hibás? Válaszunkat indokoljuk.

(a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{6}$

(b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-3}=\dfrac{0}{6}=0$

32. ∞/∞ **alak.** Adjunk példát olyan f és g függvényekre, amelyekre $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$, továbbá teljesítik az alábbi feltételeket:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=3$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$

33. Folytonos kiterjesztés. Adjunk meg olyan c értéket, amelyre az

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{9x-3\sin 3x}{5x^3}, & x\neq 0\\ c, & x=0\end{cases}$$

függvény folytonos lesz az $x=0$ helyen. Magyarázzuk meg, miért jó az általunk megadott c érték.

34. Legyen $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ és $g(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

(a) Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=1, \quad \text{de} \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=2.$$

(b) Adjunk magyarázatot arra, hogy miért nem mond ellent ez az eredmény a L'Hospital-szabálynak.

T **35.** $0/0$ **alak.** Állapítsuk meg grafikus módszerrel a

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-(3x+1)\sqrt{x}+2}{x-1}$$

határértéket. Grafikus úton kapott eredményünket támasszuk alá a L'Hospital-szabály alkalmazásával.

T **36.** $\infty-\infty$ **alak.**

(a) Állapítsuk meg grafikus módszerrel a

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)$$

határértéket oly módon, hogy megfelelően nagy intervallumban ábrázoljuk az $f(x)=x-\sqrt{x^2+x}$ függvényt.

(b) Becslésünket támasszuk alá. Első lépésként szorozzuk meg $f(x)$-et az $(x+\sqrt{x^2+x})/(x+\sqrt{x^2+x})$ törttel, majd a számlálót hozzuk egyszerűbb alakra. Itt a L'Hospital szabály nem vezet eredményre.

T **37.** Legyen

$$f(x)=\frac{1-\cos x^6}{x^{12}}.$$

Magyarázzuk meg, hogy az $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ határértékről miért adhat hamis információt a grafikus ábrázolás. (*Útmutató:* Tekintsük először a $[-1,1]$, majd a $[-0{,}5;1]$ intervallumot.)

38. Keressük meg az összes olyan c értéket, amely az adott függvények és adott intervallumok mellett eleget tesz a Cauchy-féle középértéktétel következményének.

(a) $f(x)=x$, $g(x)=x^2$, $(a,b)=(-2,0)$

(b) $f(x)=x$, $g(x)=x^2$, (a,b) tetszőleges

(c) $f(x)=x^3/3-4x$, $g(x)=x^2$, $(a,b)=(0,3)$

39. A mellékelt ábrán látható kör OA sugara 1-gyel egyenlő, AB a kör A pontbeli érintője. Az AC ív ívmértéke θ, és az AB szakasz hossza is θ. A B és a C pontokon átmenő egyenes az x-tengelyt a $P(x,0)$ pontban metszi.

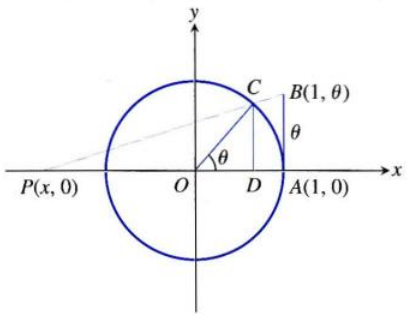
(a) Mutassuk meg, hogy a PA szakasz hossza

$$1 - x = \frac{\theta(1 - \cos\theta)}{\theta - \sin\theta}.$$

(b) Határozzuk meg a $\lim_{\theta \to 0}(1 - x)$ határértéket.

(c) Mutassuk meg, hogy $\lim_{\theta \to \infty}[(1 - x) - (1 - \cos\theta)] = 0$.

Az eredményt értékeljük geometriai szemszögből.



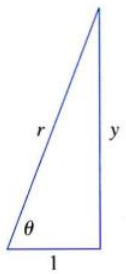
40. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 1, másik befogója y, átfogója pedig r. Az y-nal szemközti szög ívmértéke θ. $\theta \to \pi/2$ esetén határozzuk meg az

(a) $r - y$,

(b) $r^2 - y^2$, és

(c) $r^3 - y^3$

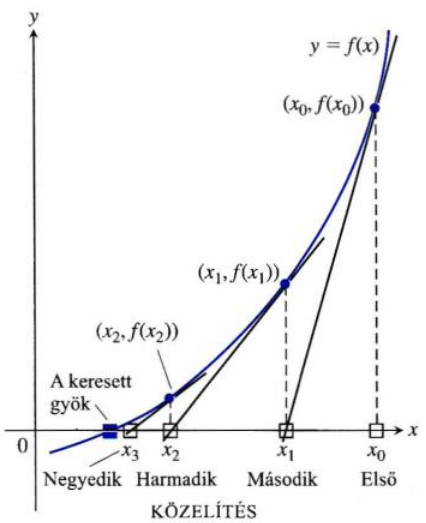
határértékeket.



4.7. A Newton-módszer

A matematika egyik alapproblémája az egyenletek megoldása. A másodfokú egyenlet megoldóképletével meg tudjuk határozni, hogy melyek azok a pontok (megoldások), amelyekre például $x^2 - 3x + 2 = 0$. A harmad- és negyedfokú egyenletek (harmad- és negyedfokú polinomok) megoldására több bonyolult képlet is létezik, Niels Henrik Abel (1802–1829) norvég matematikus azonban megmutatta, hogy ötödfokú egyenletekre nem létezik egyszerű megoldóképlet. Nem létezik egyszerű megoldóképlet az olyan egyenletekre sem, amelyekben – mint a $\sin x = x^2$ egyenletben – transzcendens függvények mellett polinomok vagy más algebrai függvények is szerepelnek.

Ebben az alfejezetben a *Newton-módszernek* vagy *Newton–Raphson-módszernek* nevezett numerikus eljárással fogunk megismerkedni. Ezzel a technikával közelítő megoldást lehet találni az $f(x) = 0$ egyenletre. Az eljárásnak az a lényege, hogy az $y = f(x)$ grafikonhoz érintőket szerkesztünk annak a pontnak a közelében, ahol f nulla. (Azt az x értéket, amelynél f nulla, az f függvény zérushelynek vagy *gyökének*, illetve az $f(x) = 0$ egyenlet *megoldásának* nevezzük.)



4.43. ÁBRA: A Newton-módszer egy találomra választott x_0 értékről indul, és (szerencsés esetben) ezt a véletlenszerűen választott értéket minden egyes lépésben tovább tökéletesíti.

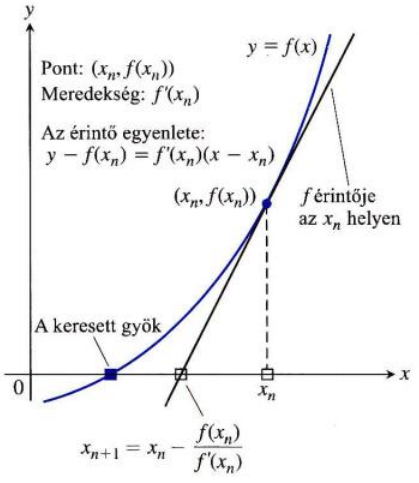
A Newton-módszer menete

A Newton-módszer az $f(x) = 0$ egyenlet megoldását közelítő megoldások sorozatán keresztül adja meg. Kijelöljük a sorozat első, x_0 elemét, majd kedvező esetben a módszer fokozatos közelítő lépések sorozatán keresztül elvezet ahhoz a ponthoz, amelyben f metszi az x-tengelyt (4.43. ábra). A módszer minden egyes lépésben f zérushelyét f valamely linearizációjának zérushelyével közelíti. Nézzük, hogy működik.

Az első közelítő értéket, x_0-t grafikus módszerrel vagy teljesen véletlenszerűen is felvehetjük. A módszert követve ezután az $y = f(x)$ görbét az $(x_0, f(x_0))$ pontjához húzott érintőjével közelítjük, és x_1-nek nevezzük el azt a pontot, amelyben ez az érintő metszi az x-tengelyt (4.43. ábra). Az x_1 szám általában jobban közelíti a megoldást, mint x_0. A sorozatos közelítés következő eleme x_2 lesz, mely az a pont, amelyben a görbe $(x_1, f(x_1))$ pontjához húzott érintő metszi az x-tengelyt. Így haladunk tovább egészen addig, amíg elég közel nem jutunk a gyökhöz.

A fokozatos közelítésre egy képletet is fölállíthatunk a következő módon. Ha adott az x_n közelítés, akkor a görbe $(x_n, f(x_n))$ pontjához húzott érintőre

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$



4.44. ÁBRA: A Newton-módszer egymást követő lépéseinek geometriája. Az x_n pontból függőlegesen felmegyünk a görbéig, majd az ebben a pontban meghúzott érintő mentén lefelé haladva jutunk el az x_{n+1} ponthoz.

Ennek x-tengellyel való metszéspontját meghatározhatjuk úgy, hogy y-t nullával tesszük egyenlővé (4.44. ábra):

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x - x_n$$

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \text{amennyiben } f'(x_n) \neq 0.$$

Ez az x-érték lesz a következő, x_{n+1}-edik közelítés. A Newton-módszer lényegét a következőképp foglalhatjuk össze:

A Newton-módszer lépései

1. Találomra kiválasztjuk az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásának egy első közelítését. Az $y = f(x)$ grafikonja segíthet a választásban.

2. A második közelítéshez használjuk fel az elsőt, a harmadikhoz a másodikat, és így tovább, a következő formula szerint:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \text{ha } f'(x_n) \neq 0. \tag{1}$$

A Newton-módszer alkalmazása

A Newton-módszer alkalmazása általában sok számítást igénylő feladat, ezért célszerű számítógépet vagy kalkulátort használni. Még ha el is tudjuk végezni kézzel a (meglehetősen unalmas) számításokat, célszerű hatékonyabb utat keresni a megoldáshoz.

Első példánkban a $\sqrt{2}$ decimális közelítését keressük oly módon, hogy az $f(x) = x^2 - 2 = 0$ egyenlet pozitív gyökeit vizsgáljuk a Newton-módszer segítségével.

1. PÉLDA **$\sqrt{2}$ értékének kiszámítása.**

Keressük meg az

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

egyenlet gyökeit.

Megoldás. $f(x) = x^2 - 2$-re és $f'(x) = 2x$-re alkalmazva az (1) egyenlőség a következő alakot ölti:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} =$$

$$= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} =$$

$$= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

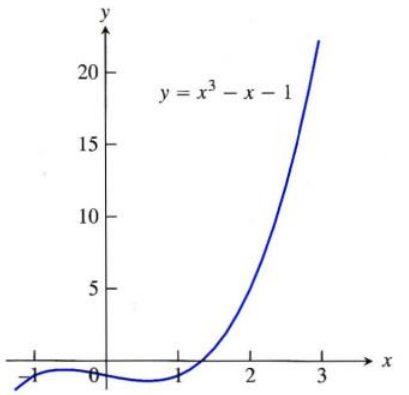
Az

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

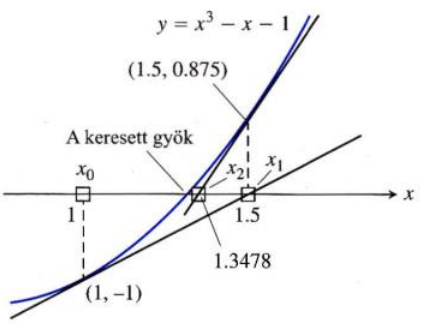
egyenlet segítségével az egyik közelítésből egyszerűen megkaphatjuk a következőt. Az $x_0 = 1$ kezdeti értékkel eredményeinket az alábbi táblázat első oszlopa tartalmazza. (Öt tizedesjegy pontossággal $\sqrt{2} = 1{,}41421$.)

	hiba	A helyes számjegyek száma
$x_0 = 1$	$-0{,}41421$	1
$x_1 = 1{,}5$	0,08579	1
$x_2 = 1{,}41667$	0,00246	3
$x_3 = 1{,}41422$	0,00001	5

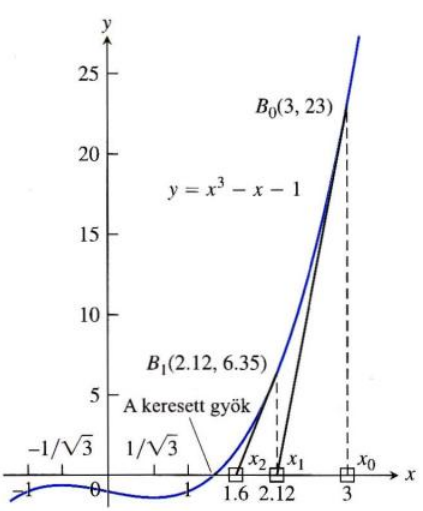
□



4.45. ÁBRA: Az $f(x) = x^3 - x - 1$ függvény grafikonja egyszer metszi az x-tengelyt; ez az a gyök, amit szeretnénk meghatározni (2. példa).



4.46. ÁBRA: A 4.1. táblázat első három x értéke (négy tizedesjegyre).



4.47. ÁBRA: Az $x = 1/\sqrt{3}$-tól jobbra eső bármely x_0 érték elvezet a gyökhöz.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	−1	2	1,5
1	1,5	0,875	5,75	1,3478 26087
2	1,3478 26087	0,1006 82173	4.4499 05482	1,3252 00399
3	1,3252 00399	0,0020 58362	4.2684 68292	1,3247 18174
4	1,3247 18174	0,0000 00924	4.2646 34722	1,3247 17957
5	1,3247 17957	−1,8672E-13	4.2646 32999	1,3247 17957

4.1. TÁBLÁZAT: A Newton-módszer alkalmazása az $f(x) = x^3 - x - 1$ függvényre $x_0 = 1$ kezdőérték mellett

A gyökök kiszámításához a legtöbb számológép a Newton-módszert alkalmazza, mert az elég gyorsan konvergál (később erről még bővebben szó lesz). Ha az 1. példa táblázatában 5 helyett 13 tizedesjegyre végeztük volna el a számításokat, akkor a következő lépésben már 10 tizedesjegynyi pontossággal megkaptuk volna $\sqrt{2}$ értékét.

2. PÉLDA **A Newton-módszer alkalmazása.**

Keressük meg annak a pontnak az x koordinátáját, amelyben az $y = x^3 - x$ görbe metszi az $y = 1$ vízszintes egyenest.

Megoldás. A görbe akkor metszi az egyenest, amikor $x^3 - x = 1$, vagyis ha $x^3 - x - 1 = 0$. Mikor lesz egyenlő nullával $f(x) = x^3 - x - 1$? Mivel $f(1) = -1$ és $f(2) = 5$, a Bolzano-tétel alapján tudjuk, hogy van gyök az $(1,2)$ intervallumban (4.45. ábra).

Alkalmazzuk f-re a Newton-módszert $x_0 = 1$ kezdőértékkel. Az eredményt a 4.1. táblázat és a 4.46. ábra mutatja.

$n = 5$ esetén azt kapjuk, hogy $x_5 = x_6 = 1,324717957$. Ha $x_{n+1} = x_n$, az (1) egyenlőség értelmében $f(x_n) = 0$. Az $f(x) = 0$ egyenletre kilenc tizedesjegy pontosságú megoldást találtunk. □

A 4.47. ábra azt mutatja, hogy a 2. példabeli eljárást a $B_0(3,23)$ pontban is elkezdhetjük, ekkor $x_0 = 3$. A B_0 pont meglehetősen távol van az x-tengelytől, de a B_0 pontban meghúzott érintő hozzávetőleg a $(2,12;0)$ pontban metszi az x-tengelyt, így x_1 már sokkal jobb közelítés x_0-nál. Ha az (1) egyenlőséget ismételten alkalmazzuk $f(x) = x^3 - x - 1$-re és $f'(x) = 3x^2 - 1$-re, akkor hét lépésben eljuthatunk a kilenc tizedesjegyre pontos $x_7 = x_6 = 1,324717957$ megoldáshoz.

A 4.47. ábrán látható görbének lokális maximuma van az $x = -1/\sqrt{3}$ helyen, és lokális minimuma az $x = 1/\sqrt{3}$ helyen. Nem várhatunk jó eredményt a Newton-módszertől, ha x_0 értékét e két pont között választjuk meg, de $x = 1/\sqrt{3}$-tól jobbra bárhol elkezdhetjük a közelítést. Bár nem túl ésszerű, de B_0-tól nagyon távoleső pontot is választhatunk kezdőértéknek, például $x_0 = 10$-et. Valamivel ugyan tovább tart a munka, de az eljárás végül így is ugyanazt az eredményt adja.

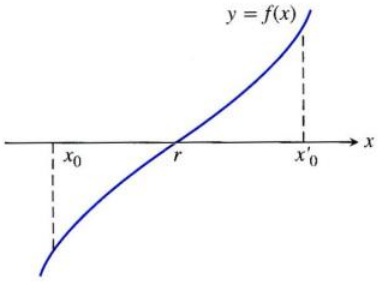
A Newton-módszer konvergenciája

A gyakorlatban a Newton-módszer általában lenyűgöző sebességgel konvergál, de erre nincs garancia. A konvergencia tesztelésére jó módszer, ha ábrázoljuk a függvényt, és egy jó x_0 kezdőértéket választunk. Ha kiszámítjuk $|f(x_n)|$ értékét, ezzel ellenőrizni tudjuk, hogy a gyökhöz elegendően közeli kezdőértéket vettünk-e fel, a konvergenciát pedig $|x_n - x_{n+1}|$ kiszámításával lehet tesztelni.

Az elmélet itt némi segítséget adhat. Részletesebb vizsgálatokkal megállapítható, hogy amennyiben valamely, az r gyököt tartalmazó intervallum minden x elemére teljesül, hogy

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right| < 1 \qquad (2),$$

akkor a Newton-módszer konvergál az r gyökhöz, amennyiben a kezdőérték beleesik ebbe az intervallumba. Megjegyezzük, hogy ez a feltétel általában teljesül,



4.48. ÁBRA: A Newton-módszer bármely kezdőpontot választva konvergálni fog r-hez.

ha f grafikonja nem esik túlságosan közel a vízszinteshez ott, ahol az x-tengelyt metszi.

A Newton-módszer mindig konvergál, ha r és x_0 között f grafikonja konvex, ha $f(x_0) > 0$, és a grafikon konkáv, ha $f(x_0) < 0$. (Lásd a 4.48. ábrát.) A gyökhöz való konvergálás sebességét a legtöbb esetben a felsőbb analízis szerint az

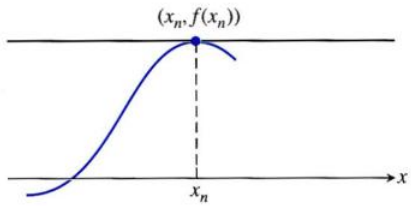
$$\underbrace{|x_{n+1} - r|}_{\text{a hiba } e_{n+1}} \leq \frac{\max|f''|}{2\min|f'|}|x_n - r|^2 = \text{const} \cdot \underbrace{|x_n - r|^2}_{\text{a hiba } e_n}, \tag{3}$$

képlet adja meg, ahol max és min az r szám valamely környezetében felvett maximális, illetve minimális értéket jelenti. A képlet azt fejezi ki, hogy az $n+1$-edik lépésben a hiba nem lehet nagyobb, mint az n-edik lépés hibanégyzetének konstansszorosa. Ez első pillantásra talán nem sokat mond, de gondoljunk csak jobban bele. Ha a konstans nem nagyobb, mint 1 és $|x_n - r| < 10^3$, akkor $|x_{n+1} - r| < 10^{-6}$. *Egyetlen lépésben* három tizedesjegyet javul a közelítés pontossága, és a helyes tizedesjegyek száma minden lépésben megduplázódik.

Rosszul is mehetnek a dolgok

A Newton-módszerrel nem tudunk továbblépni, ha $f'(x_n) = 0$ (l. a 4.49. ábrát). Ebben az esetben válasszunk új kezdeti értéket. f-nek és f'-nek természetesen lehet ugyanaz a gyöke. Ha megállapítottuk, hogy ez így van, akkor először az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldásait keressük meg, majd nézzük meg, milyen értéket vesz fel az f függvény f' zérushelyeinél, vagy ábrázoljuk közös koordinátarendszerben f-et és f'-t. például, ha

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{r-x}, & x < r \\ \sqrt{x-r}, & x \geq r, \end{cases}$$

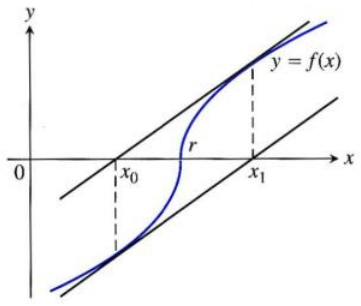


4.49. ÁBRA: Ha $f'(x_n) = 0$, nincs metszéspont, amely x_{n+1}-et kijelölné.

akkor ennek a függvénynek a grafikonja valami olyasmi lesz, amit a 4.50. ábra mutat. Ha $x_0 = r - h$, akkor $x_1 = r + h$ lesz, s a fokozatos közelítés felváltva az előbbi két értéket adja. Az iteráció nem visz bennünket közelebb a gyökhöz.

Ha a Newton-módszer konvergens, akkor a gyökhöz konvergál. De legyünk óvatosak! Előfordulhat, hogy az eljárás konvergens, de az adott helyen nincs is gyök. Az ilyen esetek szerencsére ritkák.

Amikor a Newton-módszer konvergál a gyökhöz, még mindig előfordulhat, hogy nem ahhoz a gyökhöz, amire mi gondoltunk. A 4.51. ábra azt mutatja, hogy ez kétféleképpen is megtörténhet.

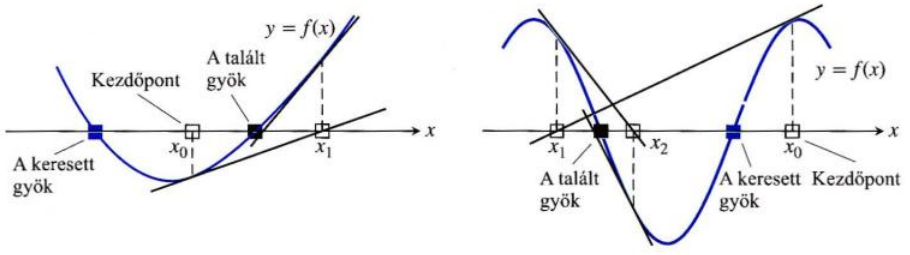


4.50. ÁBRA: A Newton-módszer itt nem konvergál: x_0-ból x_1-be jutunk majd vissza, de nem kerülünk közelebb az r gyökhöz.

A fraktálmedencék és a Newton-módszer

A Newton-módszerrel történő gyökkeresésben van némi bizonytalanság olyan értelemben, hogy bizonyos egyenletekre a végeredmény nagyon érzékeny lehet a kezdeti érték megválasztására.

Ilyen például a $4x^4 - 4x^2 = 0$ egyenlet (l. a 4.52. ábra (a) részét). Ha az x-tengely kék zónájából választunk kezdőértéket, akkor az A gyökhöz jutunk. Ha az x-tengely fekete zónájából választunk kezdőértéket, akkor a B gyökhöz



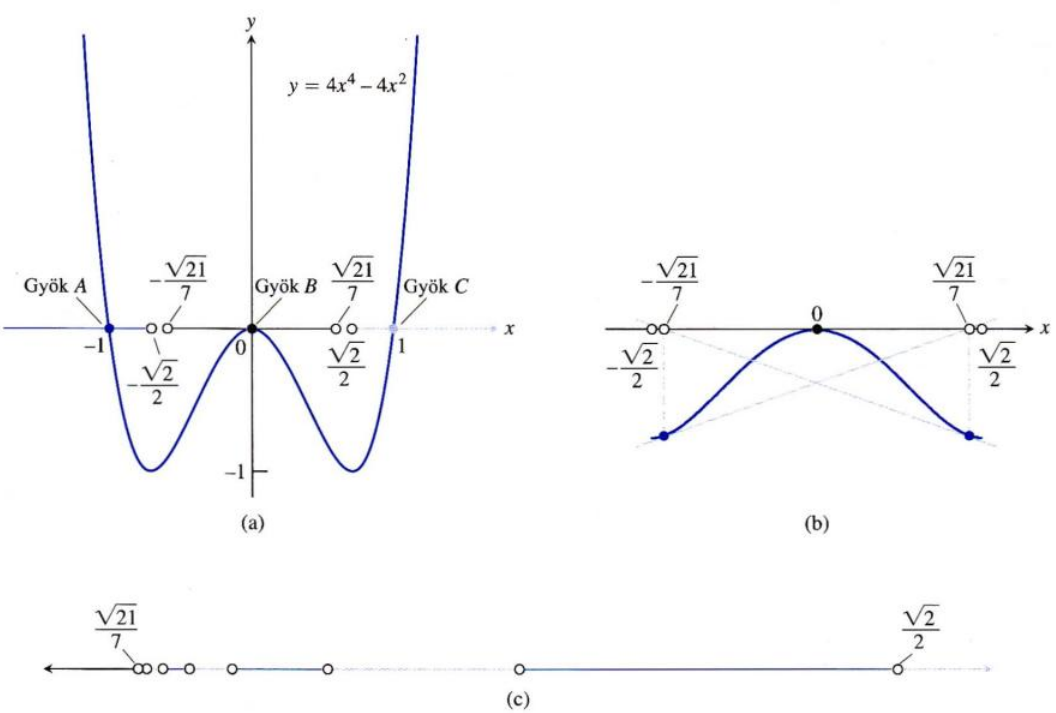
4.51. ÁBRA: Ha a kezdőérték túl messze van a gyöktől előfordulhat, hogy a Newton-módszer átugorja a keresett gyököt.

jutunk. Ha pedig az x-tengely vörös zónájából választunk kezdőértéket, akkor a C gyökhöz jutunk. A $\pm\sqrt{2}/2$ pontokban a görbe érintője vízszintes lesz. A $\pm\sqrt{21}/7$ pontok körbenforgáshoz vezetnek, egyik pontból a másikba jutunk (l. a 4.52. ábra (b) részét).

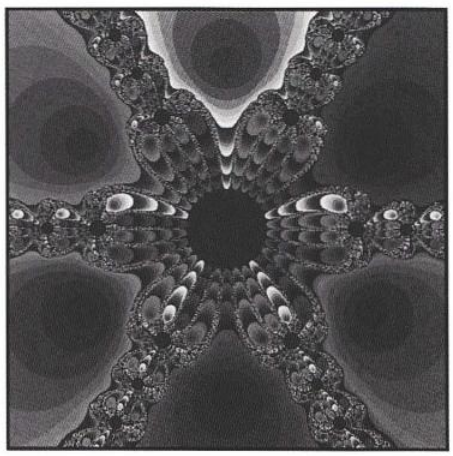
A $\sqrt{21}/7$ és $\sqrt{2}/2$ intervallumban végtelen sok olyan nyílt intervallum van, amelynek pontjai mind az A gyökhöz vezetnek, de ezek végtelen sok olyan nyílt intervallummal váltakoznak, amelyeknek a pontjai a C gyökhöz vezetnek (l. a 4.52. ábra (c) részét). Az egymást követő intervallumok határpontjai (amelyekből szintén végtelen sok van) nem vezetnek gyökhöz, ciklikusan ugyanazt a két értéket adják. Sőt, ha a kezdeti értéket rendre úgy választjuk meg, hogy az jobbról tartson $\sqrt{21}/7$-hez, akkor egyre nehezebb lesz megmondani, hogy mikor jutunk az A és mikor a C gyökhöz. A $\sqrt{21}/7$ szám ugyanazon oldalán, egymáshoz tetszőlegesen közel találhatunk két olyan pontot, amelyek más és más végállomáshoz visznek bennünket.

Ha a gyököket valamiféle „vonzási centrumnak" fogjuk fel, amelyek vonzzák a többi pontot, akkor a 4.52. ábra színes intervallumai a gyökök „vonzáskörzeteiként" foghatók fel. Azt gondolhatnánk, hogy az A és a B gyök közé eső pontok vagy az A-hoz, vagy a B-hez vonzódnak, de mint látjuk, nem ez a helyzet. Az A és a B között végtelen sok olyan intervallum van, amelynek pontjai C-hez vonzódnak. Hasonlóképpen, B és C között is végtelen sok olyan intervallum van, amelynek pontjai mind A-hoz vonzódnak.

Az efféle viselkedés még drámaibb példájával kerülünk szembe akkor, ha a Newton-módszert a $z^6 - 1 = 0$ komplex egyenlet megoldására alkalmazzuk. Ennek az egyenletnek hat megoldása van: az 1, a -1, valamint a $\pm(1/2) \pm (\sqrt{3}/2)i$ számok. Amint azt a 4.53. ábra is mutatja, mind a hat gyöknek végtelen sok „vonzási medencéje" van a komplex síkon (l. az F.4. függeléket). A vörös medencebeli kezdőpontok az 1 gyökhöz vonzódnak, a zöld medencebeliek az $(1/2) + (\sqrt{3}/2)i$ gyökhöz és így tovább. A medencék határán bonyolult alakzatok ismétlődnek vég nélkül. Az ilyen medencéket nevezik **fraktálmedencéknek**. (Az ábra színesben a hátsó borítón látható.)



4.52. ÁBRA: (a) A $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$, $(-\sqrt{21}/7, \sqrt{21}/7)$ és $(\sqrt{2}/2, \infty)$ intervallumokból választott kezdőértékek rendre az A, B és C gyökökhöz vezetnek. (b) Az $x = \pm\sqrt{21}/7$ kezdőértékek kölcsönösen egymásba visznek. (c) $\sqrt{21}/7$ és $\sqrt{2}/2$ között végtelen sok olyan nyílt intervallum van, amelynek pontjai mind az A gyökhöz vezetnek, de ezek között végtelen sok olyan nyílt intervallum helyezkedik el, amelyeknek a pontjai mind a C gyökhöz vezetnek. Ugyanez a helyzet a $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{21}/7)$ intervallumban is.



4.53. ÁBRA: Ez a számítógéppel generált kezdetiérték-portré azt mutatja, hogy hova vezetnek el a komplex sík pontjai, ha kezdeti értékként használjuk őket a $z^6 - 1 = 0$ egyenlet Newton-módszerrel történő megoldásában. A vörös pontok 1-hez vezetnek, a zöld pontok $(1/2) + (\sqrt{3}/2)i$-hez, a sötétkék pontok $(-1/2) + (\sqrt{3}/2)i$-hez és így tovább. Fekete színűek azok a kezdeti értékek, amelyek 32 lépésben nem visznek 0,1 egységnyi közelségbe valamelyik gyökhöz. (Lásd a hátsó borítót!)

4.7. Feladatok

Zérushelyek meghatározása

1. Keressük meg a Newton-módszerrel az $x^2 + x - 1$ egyenlet közelítő megoldását. A bal oldali megoldást először közelítsük az $x_0 = -1$ értékkel, a jobb oldali megoldást pedig az $x_0 = 1$ értékkel. Azután mindkét esetben keressük meg x_2-t is.

2. A Newton-módszert alkalmazva keressük meg az $x^3 + 3x + 1 = 0$ egyenlet valós megoldásának közelítését. Legyen $x_0 = 0$, aztán keressük meg x_2-t.

3. A Newton-módszerrel adjunk becslést az $f(x) = x^4 + x - 3$ függvény két zérushelyére. A bal oldali zérushely esetén legyen $x_0 = -1$, a jobb oldali zérushely esetén pedig legyen $x_0 = 1$. Mindkét esetben határozzuk meg x_2-t.

4. A Newton-módszerrel adjunk becslést az $f(x) = 2x - x^2 + 1$ függvény két zérushelyére. A bal oldali zérushely esetén legyen $x_0 = 0$, a jobb oldali zérushely esetén pedig legyen $x_0 = 2$. Mindkét esetben határozzuk meg x_2-t.

5. A Newton-módszert alkalmazva határozzuk meg 2 pozitív negyedik gyökét oly módon, hogy megoldjuk az $x^4 - 2 = 0$ egyenletet. Legyen $x_0 = 1$, és számoljuk ki x_2-t.

6. A Newton-módszert alkalmazva határozzuk meg 2 negatív negyedik gyökét oly módon, hogy megoldjuk az $x^4 - 2 = 0$ egyenletet. Legyen $x_0 = -1$, és számoljuk ki x_2-t.

Elmélet, példák és alkalmazások

7. A gyök kitalálása. Tegyük fel, hogy az első választásunk szerencsés abban az értelemben, hogy x_0 az $f(x) = 0$ gyöke. Mi történik ilyenkor x_1-gyel és a további közelítésekkel, ha f differenciálható az x_0 helyen és a deriváltja nem nulla?

8. π értékének becslése. Öt tizedesjegy pontossággal szeretnénk kiszámolni $\pi/2$ értékét oly módon, hogy a Newton-módszerrel megoldjuk a $\cos x = 0$ egyenletet. Van-e jelentősége annak, hogy mit választunk kezdeti értéknek? Válaszunkat indokoljuk is.

9. Oszcilláció. Mutassuk meg, hogy $h > 0$ esetén a Newton-módszer alkalmazása az

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

függvényre $x_1 = -h$-t eredményez, ha $x_0 = h$, és $x_1 = h$-t, ha $x_0 = -h$. Rajzoljunk olyan ábrát, amely tükrözi a lényeget.

10. Egyre rosszabb és rosszabb közelítés. Alkalmazzuk a Newton-módszert az $f(x) = x^{1/3}$ függvényre $x_0 = 1$-gyel, és számítsuk ki x_1-et, x_2-t, x_3-at, valamint x_4-et. Keressünk képletet $|x_n|$-re. Mi történik $|x_n|$-nel, amikor $n \to \infty$? Készítsünk illusztrációt.

11. Lássuk be, hogy az alábbiak ugyanannak a feladatnak csupán eltérő megfogalmazásai.

i Keressük meg $f(x) = x^3 - 3x - 1$ zérushelyeit.

ii Határozzuk meg az $y = x^3$ görbe és az $y = 3x + 1$ egyenes metszéspontjának x koordinátáját.

iii Keressük meg annak a pontnak az x koordinátáját, amelyben az $y = x^3 - 3x$ görbe metszi az $y = 1$ vízszintes egyenest.

iv Keresssük meg azokat az x értékeket, amelyekre a $g(x) = (1/4)x^4 - (3/2)x^2 - x + 5$ függvény deriváltja nullával egyenlő.

12. Bolygó helyzetének meghatározása. Egy bolygó térbeli koordinátáinak meghatározásához meg kell oldanunk az $x = 1 + 0{,}5 \sin x$ egyenletet. Az $f(x) = x - 1 - 0{,}5 \sin x$ grafikonja azt sugallja, hogy a függvénynek $x = 1{,}5$ környékén valahol zérushelye van. A Newton-módszer egyszeri alkalmazásával támasszuk alá ezt a sejtést. Legyen tehát $x_0 = 1{,}5$, és határozzuk meg x_1-et. (A zérushely öt tizedesjegy pontossággal 1,49870.) Ne felejtsük el, hogy a szöget radiánban mérjük.

A 13-20. feladatokban – ha szükséges – alkalmazzuk a Maple vagy a Mathematica csomagot.

T 13. A Newton-módszer grafikus programmal. Legyen $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Íme egy házi képernyőprogram a Newton-módszerre.

(a) Legyen $y_0 = f(x)$ és $y_1 = \text{NDER} f(x)$.

(b) x-nek adjuk az $x_0 = -0,3$ értéket.

(c) Aztán adjuk x-nek az $x - (y_0/y_1)$ értéket, és nyomjuk meg újra és újra az ENTER billentyűt. Figyeljük meg, hogy a számok f zérushelyéhez konvergálnak.

(d) Különböző x_0 értékekkel ismételjük meg a (b) és (c) lépéseket.

(e) Írjunk fel egy egyenletet, és a fenti módon alkalmazzuk rá a Newton-módszert. Hasonlítsuk össze eredményünket kalkulátorunk beépített rutinjának eredményével.

T 14. *(A 11. feladat folytatása.)*

(a) A Newton-módszer alkalmazásával keressük meg öt tizedesjegy pontossággal az $f(x) = x^3 - 3x - 1$ függvény két negatív zérushelyét.

(b) Ábrázoljuk az $f(x) = x^3 - 3x - 1$ függvényt a $-2 \leq x \leq 2,5$ intervallumon. Használjuk a ZOOM és TRACE funkciókat, hogy f zérushelyeit 5 tizedesjegy pontosságra meg tudjuk becsülni.

(b) Ábrázoljuk a $g(x) = 0,25x^4 - 1,5x^2 - x + 5$ függvényt. Használjuk a ZOOM és TRACE funkciókat megfelelő nagyításban ahhoz, hogy 5 tizedesjegy pontosságra meg tudjuk mondani, hol lesz vízszintes a görbe érintője.

T 15. Görbék metszéspontja. Az $y = \text{tg}x$ görbe $x = 0$ és $x = \pi/2$ között metszi az $y = 2x$ egyenest. Határozzuk meg a metszéspontot a Newton-módszerrel.

T 16. Negyedrendű egyenlet valós megoldásai. A Newton-módszerrel határozzuk meg az $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$ egyenlet valós gyökeit.

T 17. **(a)** Hány megoldása lehet a $\sin 3x = 0,99 - x^2$ egyenletnek?

(b) Keressük meg Newton-módszerrel ezeket a megoldásokat.

T 18. Görbék metszéspontja.

(a) Lehet-e x egyenlő $\cos 3x$-szel? Válaszunkat indokoljuk.

(b) A Newton-módszerrel keressük meg ezt az x értéket.

T 19. Keressük meg az $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ függvény négy valós zérushelyét.

T 20. π értékének becslése. Határozzuk meg π értékét a Newton-módszerrel annyi tizedesjegyre, amennyit kalkulátorunk kijelzője meg tud jeleníteni oly módon, hogy megoldjuk $x_0 = 3$ kezdőértékkel a $\text{tg}x = 0$ egyenletet.

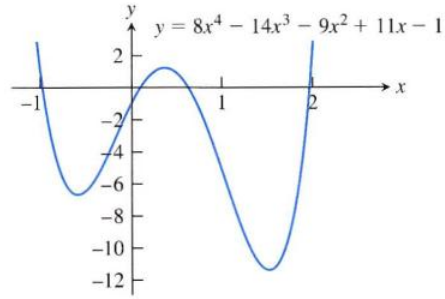
21. Milyen érték(ek)re lesz $\cos x = 2x$?

22. Milyen érték(ek)re lesz $\cos x = -x$?

23. A 2.6. alfejezet Bolzano-tétele segítségével mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^3 + 2x - 4$ függvénynek van gyöke $x = 1$ és $x = 2$ között. Határozzuk meg a gyök értékét öt tizedesjegy pontossággal.

24. Negyedfokú kifejezés tényezőkre bontása. Határozzuk meg az $r_1, \ldots, r_4$ értékeket a következő egyenletben.

$$8x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 11x - 1 = 8(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4).$$



T 25. Más-más zérushelyekhez való konvergencia. A Newton-módszer alapján, számítógép segítségével keressük meg az $f(x) = 4x^4 - 4x^2$ függvény zérushelyeit a megadott kezdeti értékekkel (4.52. ábra).

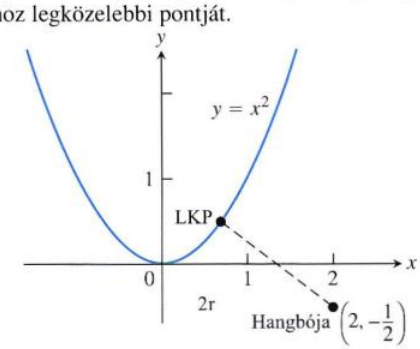
(a) $x_0 = -2$ és $x_0 = -0,8$, és a gyök a $(\infty, -\sqrt{2}/2)$ intervallumban van.

(b) $x_0 = -0,5$ és $x_0 = 0,25$, és a gyök a $(-\sqrt{21}/7, \sqrt{21}/7)$ intervallumban van.

(c) $x_0 = 0,8$ és $x_0 = 2$, és a gyök a $(\sqrt{2}/2, \infty)$ intervallumban van.

(d) $x_0 = -\sqrt{21}/7$ és $x_0 = \sqrt{21}/7$.

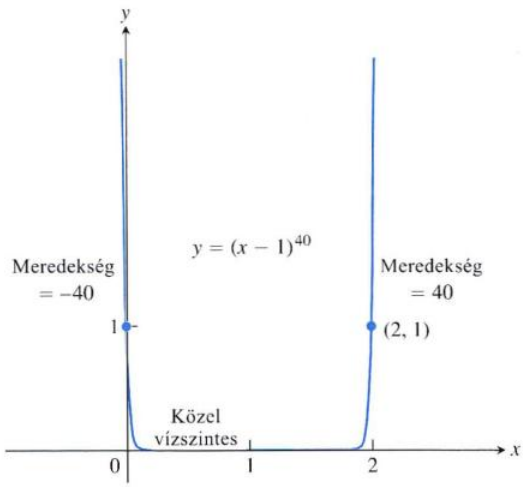
26. A hangbója-probléma. A tengeralattjárók helyzetének meghatározásakor gyakran előforduló probléma, hogy meg kell határozni, mikor esik a hangbója (hangdetektor) legközelebb a hajóhoz. Tegyük fel, hogy a tengeralattjáró az $y = x^2$ parabolapályán mozog, a bója pedig a $(2, -1/2)$ pontban van. Az ábrán LKP („legközelebbi pont") jelöli a tengeralattjáró pályájának a detektorhoz legközelebbi pontját.



(a) Mutassuk meg, hogy az az x érték, amely minimalizálja a bója és a tengeralattjáró közötti távolságot, az $x = 1/(x^2 + 1)$ egyenlet megoldása.

(b) Oldjuk meg az $x = 1/(x^2 + 1)$ egyenletet a Newton-módszerrel.

27. A gyök környezetében sima görbék. Vannak olyan görbék, amelyek a gyök környezetében annyira közelítenek a vízszinteshez, hogy a Newton-módszer használható becslés nélkül ér véget. Próbáljuk ki a Newton-módszert az $f(x) = (x - 1)^{40}$ görbére az $x_0 = 2$ kezdeti értékkel, hogy lássuk, milyen közel jutunk az $x = 1$ gyökhöz.



28. A keresett gyöktől különböző gyök. Az $f(x) = 4x^4 - -4x^2$ függvény mindhárom gyökét meghatározhatjuk, ha a kezdeti értéket $x = \sqrt{21}/7$ közelében vesszük fel. Próbáljuk ki. (Lásd a 4.52. ábrát).

29. Az ionkoncentráció meghatározása. Egy magnéziumhidroxid telített $3{,}6 \cdot 10^{-4}$ mólos sósav oldat $[OH^-]$ hidroxidion koncentrációjának meghatározásakor a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{3{,}64 \times 10^{-11}}{[OH^-]^2} = [OH^-] + 3{,}6\, times 10^{-4}.$$

Az $[OH^-]$ mennyiségének meghatározásához vezessük be új ismeretlenként $x = 10^4[OH^-]$-t, ezzel a fenti egyenlet az

$$x^3 + 3{,}6x^2 - 36{,}4 = 0$$

alakot ölti. Oldjuk meg ezt az egyenletet a Newton-módszerrel. Mit kapunk x-re? (Két tizedes pontossággal számoljunk.) Mit kapunk $[OH^-]$-ra?

T 30. Komplex gyökök. Ha van számítógépünk vagy olyan kalkulátorunk, amely képes aritmetikai műveleteket végezni komplex számokkal, akkor próbáljuk meg a Newton-módszer segítségével megoldani a $z^6 - 1 = 0$ egyenletet. Használjuk a

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^6 - 1}{6z_n^5}, \text{ vagy } z_{n+1} = \frac{5}{6}z_n + \frac{1}{6z_n^5}$$

rekurziós képletet. Próbáljuk ki (egyebek közt) a 2, i, $\sqrt{3} + i$ kezdeti értékeket.

4.8. Primitív függvények

Már számos függvény deriváltját meg tudjuk határozni. Sok gyakorlati probléma azonban azt kívánja, hogy a derivált (a függvény változása) ismeretében határozzuk meg magát a függvényt. Például egy adott magasságból eső tárgy sebességfüggvényének ismeretében szeretnénk tudni, hogy egy bizonyos időintervallum bármely időpontjában mi lesz a tárgy pontos helyzete. Általánosan fogalmazva az F függvényt annak f deriváltjából szeretnénk meghatározni. Amennyiben létezik ilyen F függvény, azt f *primitív függvényének* nevezzük.

A primitív függvény megkeresése

DEFINÍCIÓ Primitív függvény.

Az F függvényt f egy **primitív függvényének** nevezzük az I intervallumon, ha $F'(x) = f(x)$ minden $x \in I$ esetén.

$F(x)$ előállítását annak $f(x)$ deriváltjából *antidifferenciálásnak* is nevezik. Valamely f függvény primitív függvényének jelölésére általában a nagy F betűt használjuk, g primitív függvényére a G betűt stb.

1. PÉLDA **A primitív függvény megkeresése.**

Keressük meg a következő függvények egy primitív függvényét.

1. $f(x) = 2x$
2. $g(x) = \cos x$
3. $h(x) = 2x + \cos x$

Megoldás.

1. $F(x) = x^2$
2. $G(x) = \sin x$
3. $H(x) = x^2 + \sin x$

A megoldásokat deriválással lehet ellenőrizni. $F(x) = x^2$ deriváltja $2x$. $G(x) =$ $= \sin x$ deriváltja $\cos x$, és $H(x) = x^2 + \sin x$ deriváltja $2x + \cos x$. □

Az $F(x) = x^2$ nem az egyetlen olyan függvény, amelynek deriváltja $2x$. Az $x^2 + 1$ függvénynek ugyanez a deriváltja, de ugyanígy minden $x^2 + C$ függvénynek is, ahol C egy állandó. Vannak még mások is?

A 4.2. alfejezetben megismert középértéktétel 2. Következménye megadja a választ erre a kérdésre: egy függvény két primitív függvénye csak egy konstansban különbözhet egymástól. Így az $x^2 + C$ függvények, ahol C tetszőleges állandó, ugyanannak az $f(x) = 2x$ függvénynek a primitív függvényei. Általánosabb megfogalmazásban a következő eredményt kapjuk.

> Ha F az f egy primitív függvénye az I intervallumon, akkor f legáltalánosabb primitív függvénye az I-n az
>
> $$F(x) + C$$
>
> függvény, ahol C tetszőleges állandó.

Tehát f legáltalánosabb primitív függvénye az I intervallumon az $F(x) + C$ alakú függvényekből álló *függvénycsalád*, a „családtag" függvények grafikonjai függőleges irányú eltolással egymásba vihetők. Ebből a családból kiválaszthatunk egy bizonyos primitív függvényt oly módon, hogy C-hez konkrét számértéket rendelünk. A következőkben erre látunk egy példát.

2. PÉLDA **Adott tulajdonságú primitív függvény megkeresése.**

Adjuk meg az $f(x) = \sin x$ függvény azon F primitív függvényét, amely teljesíti az $F(0) = 3$ feltételt.

Megoldás. Mivel $-\cos x$ deriváltja $\sin x$, a primitív függvény általános alakja

$$F(x) = -\cos x + C,$$

s ez az alak $f(x)$ valamennyi primitív függvényét megadja. Az $F(0) = 3$ feltétel konkrét értéket rendel hozzá C-hez. Az $F(x) = -\cos x + C$ függvény az $x = 0$ helyen:

$$F(0) = -\cos 0 + C = -1 + C.$$

Mivel $F(0) = 3$, azt kapjuk, hogy $C = 4$. Így

$$F(x) = -\cos x + 4$$

lesz az a primitív függvény, amely kielégíti az $F(0) = 3$ feltételt. □

A differenciálási szabályokat visszafelé alkalmazva a primitív függvényekre is le tudunk vezetni képleteket. Egy adott függvény primitív függvényeinek általános kifejezésében mindig szerepel egy tetszőleges C állandó. A 4.2. táblázatban megadjuk néhány fontos függvény primitív függvényét.

A 4.2. táblázat képleteit egyszerűen ellenőrizni lehet oly módon, hogy az általános alakú primitív függvényt deriváljuk. Például $\operatorname{tg} x + C$ deriváltja tetszőleges C érték mellett $\sec^2 x$.

3. PÉLDA **A primitív függvény megkeresése a 4.2. táblázat segítségével.**

Keressük meg a következő függvények primitív függvényét.

(a) $f(x) = x^5$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(c) $h(x) = \sin 2x$

(d) $i(x) = \cos \dfrac{x}{2}$

	Függvény	A primitív függvény általános alakja
1.	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $n \neq -1$, n racionális
2.	$\sin kx$	$-\frac{\cos kx}{k}+C$, k állandó, $k \neq 0$
3.	$\cos kx$	$-\frac{\sin kx}{k}+C$, k állandó, $k \neq 0$
4.	$\sec^2 x$	$\operatorname{tg} x+C$
5.	$\csc^2 x$	$-\operatorname{ctg} x+C$
6.	$\sec x \operatorname{tg} x$	$\sec x+C$
7.	$\csc x \operatorname{ctg} x$	$-\csc x+C$

4.2. TÁBLÁZAT: Primitívfüggvény-képletek

Megoldás.

(a) $F(x)=\frac{x^6}{6}+C$ 1. képlet $n=5$-tel

(b) $g(x)=x^{-1/2}$, így

$$G(x)=\frac{x^{1/2}}{1/2}+C=2\sqrt{x}+C$$ 1. képlet $n=-1/2$-del

(c) $H(x)=\frac{-\cos 2x}{2}+C$ 2. képlet $k=2$-vel

(d) $I(x)=\frac{\sin(x/2)}{1/2}+C=2\sin\frac{x}{2}+C$ 3. képlet $k=1/2$-del □

A többi deriválási szabály is ugyanígy elvezet a megfelelő primitívfüggvény-képzési szabályhoz. A primitív függvényeket összeadhatjuk, illetve kivonhatjuk, konstanssal megszorozhatjuk.

A 4.3. táblázatban szereplő képleteket könnyen ellenőrizhetjük a primitív függvények deriválásával. A 2. képlet az 1. képlet speciális esete $k=-1$-re.

4. PÉLDA **A primitív függvényekre vonatkozó szabályok alkalmazása.** Írjuk fel általános alakban az

$$f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+\sin 2x$$

függvény primitív függvényét.

Megoldás. A 3. példa g és h függvényeivel $f(x)=3g(x)+h(x)$. Mivel $G(x)=2\sqrt{x}$ a 3. példa (b) részében szereplő $g(x)$ függvény egyik primitív függvénye, ezért a primitív függvény állandóval való szorzásának szabályából következik, hogy $3G(x)=3\cdot 2\sqrt{x}=6\sqrt{x}$ a $3g(x)=3/\sqrt{x}$ függvény egy primitív függvénye. Hasonlóképpen: a 3. példa (c) részének alapján tudjuk, hogy $H(x)=(-1/2)\cos 2x$ a $h(x)=\sin 2x$ függvény egy primitív függvénye, ezért azt kapjuk, hogy

$$F(x)=3G(x)+H(x)+C=$$
$$=6\sqrt{x}-\frac{1}{2}\cos 2x+C$$

	Függvény	A primitív függvény általános alakja
1. *konstanssal való szorzás*	$kf(x)$	$kF(x)+C$, k állandó
2. *ellentett*	$-f(x)$	$-F(x)+C$,
3. *összeg és különbség*	$f(x)\pm g(x)$	$F(x)\pm G(x)+C$

4.3. TÁBLÁZAT: A primitív függvényekre vonatkozó szabályok

az $f(x)$ függvény primitív függvényének általános képlete, ahol C tetszőleges állandó. □

A primitív függvényeknek fontos szerepük van, a primitív függvény megkeresésének módszere és technikája az analízis egyik nagy fejezete. (Ez lesz a 8. fejezet tárgya.)

Kezdetiérték-problémák és differenciálegyenletek

Az $f(x)$ függvény egy primitív függvényének megkeresése, illetve a

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

egyenletet kielégítő $y(x)$ függvény meghatározása ugyanaz a probléma. A fenti egyenletet **differenciálegyenletnek** nevezzük, mivel ez olyan egyenlet, amelyben egy ismeretlen függvény deriváltja szerepel. Megoldása annyit jelent, hogy meghatározunk egy $y(x)$ függvényt, amely kielégíti az egyenletet. Ezt a függvényt úgy kaphatjuk meg, hogy megadjuk az $f(x)$ függvény primitív függvényét. Az eljárás során fellépő tetszőleges konstans értékét az

$$y(x_0) = y_0$$

kezdeti feltétellel rögzítjük. Ez a feltétel azt jelenti, hogy $x = x_0$ esetén az $y(x)$ függvény értéke y_0 lesz. A differenciálegyenlet és a kezdeti feltétel együttesét **kezdetiérték-problémának** nevezzük. Ezek a problémák fontos szerepet játszanak a tudomány szinte minden területén. Lássunk most néhány példát a kezdetiérték-probléma megoldására.

5. PÉLDA A görbe meghatározása meredekségfüggvénye és egy pontja alapján.

Határozzuk meg azt a görbét, amelynek meredeksége minden (x, y) pontjában $3x^2$, és átmegy az $(1, -1)$ ponton.

Megoldás. A matematika nyelvén megfogalmazva: a feladatunk egy kezdetiérték-probléma megoldása. Ez a következőket foglalja magában:

$$\textit{a differenciálegyenlet:}\quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 \qquad \text{(a görbe meredeksége } 3x^2\text{)}$$
$$\textit{a kezdeti feltétel:}\quad y(1) = -1$$

1. *A differenciálegyenlet megoldása:* Az y az $f(x) = 3x^2$ primitív függvénye, így

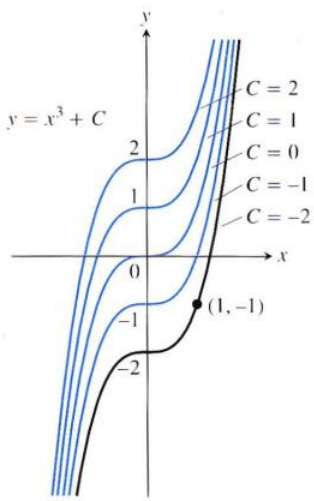
$$y = x^3 + C.$$

Eszerint y egyenlő $x^3 + C$-vel, ahol C valamilyen állandó. Ennek az állandónak az értékét az $y(1) = -1$ kezdeti feltételből fogjuk meghatározni.

2. *C meghatározása:*

$$\begin{aligned} y &= x^3 + C \\ -1 &= (1)^3 + C \qquad \text{a kezdeti feltétel szerint } y(1) = -1 \\ C &= -2 \end{aligned}$$

A keresett görbe: $y = x^3 - 2$ (l. a 4.54. ábrát). □



4.54. ÁBRA: Az $y = x^3 + C$ görbék kitöltik a koordinátasíkot anélkül, hogy átfednék egymást. Az 5. példában az $y = x^3 - 2$ görbét annak alapján választottuk ki közülük, hogy ez az egyetlen, amelyik átmegy az $(1, -1)$ ponton.

A primitív függvény és a mozgás

Láttuk, hogy valamely objektum helyzetét leíró függvény deriválásával megkapjuk az objektum sebességfüggvényét, a sebességfüggvény deriválásával pedig a gyorsulást. Ha ismerjük az objektum gyorsulását, akkor a gyorsulás primitív függvényét megkeresve visszakaphatjuk a sebességfüggvényt, abból meg

a helyzetfüggvényt. Ezt az eljárást a 4.2. alfejezetben a 2. Következmény alkalmazásaként tárgyaltuk. A primitív függvények terminológiájának és fogalmi keretének ismeretében újratárgyaljuk a problémát, most a differenciálegyenletek szemszögéből.

6. PÉLDA **Csomag kiejtése felszálló ballonból.**

Egy 3,6 m/s sebességgel emelkedő ballon 24 méterre van a talajtól, amikor egy csomagot ejtünk ki belőle. Mennyi idő alatt éri el a csomag a földfelszínt?

Megoldás. Jelölje $v(t)$ a csomag t időpontbeli sebességét, a talajtól mért távolságát pedig jelölje $s(t)$. A Föld felszínének közelében a gravitációs gyorsulás értéke 9,8 m/s^2. Feltételezve, hogy az eső csomagra más erő nem hat, azt kapjuk, hogy

$$\frac{dv}{dt} = -9,8$$

A gyorsulás negatív, mert s csökkenésének irányába mutat.

Ez a következő kezdetiérték-problémához vezet:

$$\textit{a differenciálegyenlet:} \quad \frac{dv}{dt} = -9,8$$
$$\textit{a kezdeti feltétel:} \quad v(0) = 3,6.$$

Ez lesz a csomag sebességének matematikai modellje.

1. *A differenciálegyenlet megoldása:* az állandó $-9,8$ függvény primitív függvényének általános alakja
$$v = -9,8t + C.$$
A differenciálegyenlet általános megoldásának ismeretében a partikuláris megoldáshoz a kezdeti feltétel felhasználásával jutunk el, ami egyben problémánk megoldása is lesz.

2. *C értékének meghatározása:*
$$3,6 = -9,8 \cdot 0 + C \qquad \text{a kezdeti feltétel } v(0) = 3,6$$
$$C = 3,6.$$
A kezdetiérték-probléma megoldása:
$$v = -9,8t + 3,6.$$

Mivel a sebesség a helyzetet megadó függvény deriváltja, és a $t = 0$ időpontban, amikor kiejtjük, a csomag 24 méter magasan van, most egy másik kezdetiérték-problémával van dolgunk.

$$\textit{A differenciálegyenlet:} \quad \frac{ds}{dt} = -9,8t + 3,6$$
az utóbbi egyenletbe behelyettesítettük a $v = ds/dt$-t
$$\textit{A kezdeti feltétel:} \quad s(0) = 24.$$

Megoldva ezt a kezdetiérték-problémát, megkapjuk a magasságot a t függvényeként.

1. *A differenciálegyenlet megoldása:* $-9,8t + 3,6$ primitív függvénye általános alakban:
$$s = -4,9t^2 + 3,6t + C.$$

2. *C értékének meghatározása:*
$$24 = -4,9 \cdot 0^2 + 3,6 \cdot 0 + C \qquad \text{a kezdeti feltétel: } s(0) = 24$$
$$C = 24.$$

A csomag talajtól való távolsága t időpontban:
$$s = -4,9t^2 + 3,6t + 24.$$

A megoldás használata: Ha azt akarjuk megtudni, hogy mennyi idő múlva ér földet a csomag, s-t nullával egyenlővé kell tennünk, és t-re meg kell oldanunk az egyenletet.

$$-4,9t^2+3,6t+24=0$$

$$t=\frac{-3,6\pm\sqrt{483,4}}{-9,8} \qquad \text{a másodfokú egyenlet megoldóképlete}$$

$$t\approx -1,88, \quad t\approx 2,6$$

A csomag tehát a kidobástól számítva 2,6 s múlva ér földet. □

Határozatlan integrál

Az f függvény primitív függvényeinek összességére speciális jelölést vezetünk be.

DEFINÍCIÓ Határozatlan integrál, integrandus.

Az f függvény összes primitív függvényének halmazát az f függvény x szerinti **határozatlan integráljának** nevezzük, jelölése:

$$\int f(x)dx.$$

A $\int$ jel az **integráljel**. Az f függvény az integrál **integrandusa**, x az **integrál változója**.

Ezekkel a jelölésekkel az 1. példa eredményeit a következőképpen fogalmazhatjuk át:

$$\int 2xdx=x^2+C,$$
$$\int \cos xdx=\sin x+C,$$
$$\int (2x+\cos x)dx=x^2+\sin x+C.$$

Ez a jelölés a primitív függvények fő alkalmazásához igazodik, melyet az 5. fejezetben fogunk tárgyalni. A primitív függvények kulcsszerepet játszanak a végtelen összegek határértékének kiszámításában, váratlan és rendkívül hasznos szerepet, melyet az 5. fejezet központi eredményének tekinthetünk.

7. PÉLDA **Határozatlan integrálás lépésenként és az integrációs konstans átírása.**

Számítsuk ki az

$$\int (x^2-2x+5)dx$$

integrált.

Megoldás. Amennyiben észrevesszük, hogy az $y=(x^3/3)-x^2+5x$ függvény az $y=x^2-2x+5$ egyik primitív függvénye, akkor az integrált így írhatjuk fel:

$$\int (x^2-2x+5)dx=\underbrace{\frac{x^3}{3}-x^2+5x}_{\text{egy primitív függvény}}+\underbrace{C}_{\text{tetszőleges állandó}}$$

Ha nem tudjuk kitalálni a primitív függvényt közvetlenül, lépésenként is előállíthatjuk az összeadás, a kivonás és a konstanssal való szorzás szabályát felhasználva:

$$\int (x^2-2x+5)dx = \int x^2dx - \int 2xdx + \int 5dx =$$
$$= \int x^2dx - 2\int xdx + 5\int 1dx =$$
$$= \left(\frac{x^2}{3}+C_1\right) - 2\left(\frac{x^2}{2}+C_2\right) + 5(x+C_3) =$$
$$= \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 - 2C_2 + 5x + 5C_3.$$

Ez a formula jóval bonyolultabb, mint amilyen lehetne. Ha C_1-et, $-2C_2$-t és $5C_3$-at egyetlen konstanssá vonjuk össze, azaz legyen $C = C_1 - 2C_2 + 5C_3$, akkor a képlet az egyszerűbb

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

alakot ölti, de még mindig megadja az összes primitív függvényt. Ezért is javasoljuk, hogy mindig törekedjünk a legegyszerűbb alakra, még akkor is, ha az integrálást lépésenként végezzük el. Nyugodtan írhatjuk például, hogy

$$\int (x^2-2x+5)dx = \int x^2dx - \int 2xdx + \int 5dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C.$$

Keressük meg az integrál mögött álló függvények legegyszerűbb primitív függvényeit tagonként, majd a konstansot írjuk a kapott kifejezés végére. □

4.8. Feladatok

A primitív függvény meghatározása

Az 1–16. feladatokban az adott függvények primitív függvényét kell meghatározni. Végezzünk el annyi feladatot, amennyire csak lélekben képesek vagyunk. Eredményünket deriválással ellenőrizzük.

1. (a) $2x$ (b) x^2 (c) x^2-2x+1

2. (a) $6x$ (b) x^7 (c) x^7-6x+8

3. (a) $-3x^{-4}$ (b) x^{-4}
(c) $x^{-4}+2x+3$

4. (a) $2x^{-3}$ (b) $\frac{x^{-3}}{2}+x^2$
(c) $-x^{-3}+x-1$

5. (a) $\frac{1}{x^2}$ (b) $\frac{5}{x^2}$ (c) $2-\frac{5}{x^2}$

6. (a) $-\frac{2}{x^3}$ (b) $\frac{1}{2x^3}$ (c) $x^3-\frac{1}{x^3}$

7. (a) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (c) $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

8. (a) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ (b) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$ (c) $\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

9. (a) $\frac{2}{3}x^{-1/3}$ (b) $\frac{1}{3}x^{-2/3}$ (c) $-\frac{1}{3}x^{-4/3}$

10. (a) $\frac{1}{2}x^{-1/2}$ (b) $-\frac{1}{2}x^{-3/2}$ (c) $-\frac{3}{2}x^{-5/2}$

11. (a) $-\pi\sin\pi x$ (b) $3\sin x$
(c) $\sin\pi x - 3\sin 3x$

12. (a) $\pi\cos\pi x$ (b) $\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}$
(c) $\cos\frac{\pi x}{2}+\pi\cos x$

13. (a) $\sec^2 x$ (b) $\frac{2}{3}\sec^2\frac{x}{3}$
(c) $-\sec^2\frac{3x}{2}$

14. (a) $\csc^2 x$ (b) $-\frac{3}{2}\csc^2\frac{3x}{2}$
(c) $1-8\csc^2 2x$

15. (a) $\csc x\operatorname{ctg} x$ (b) $-\csc 5x\operatorname{ctg} 5x$
(c) $-\pi\csc\frac{\pi x}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}$

16. (a) $\sec x\operatorname{tg} x$ (b) $4\sec 3x\operatorname{tg} 3x$
(c) $\sec\frac{\pi x}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$

Határozatlan integrálok

17. $\int (x+1)dx$ **18.** $\int (5-6x)dx$

19. $\int \left(3t^2+\frac{t}{2}\right)dt$ **20.** $\int \left(\frac{t^2}{2}+4t^3\right)dt$

21. $\int (2x^3-5x+7)dx$ **22.** $\int (1-x^2-3x^5)dx$

23. $\int \left(\frac{1}{x^2}-x^2-\frac{1}{3}\right)dx$ **24.** $\int \left(\frac{1}{5}-\frac{2}{x^3}+2x\right)dx$

25. $\int x^{-1/3}dx$ **26.** $\int x^{-5/4}dx$

27. $\int (\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})dx$ **28.** $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$

29. $\int \left(8y - \frac{2}{y^{1/4}}\right) dy$

30. $\int \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{y^{5/4}}\right) dy$

31. $\int 2x(1 - x^{-3})dx$

32. $\int x^{-3}(x+1)dx$

33. $\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} dt$

34. $\int \frac{4 + \sqrt{t}}{t^3} dt$

35. $\int (-2\cos t)dt$

36. $\int (-5\sin t)dt$

37. $\int 7\sin\frac{\theta}{3} d\theta$

38. $\int 3\cos 5\theta d\theta$

39. $\int (-3\csc^2 x)dx$

40. $\int \left(-\frac{\sec^2 x}{3}\right) dx$

41. $\int \frac{\csc\theta \operatorname{ctg}\theta}{2} d\theta$

42. $\int \frac{2}{5}\sec\theta \operatorname{tg}\theta d\theta$

43. $\int (4\sec x \operatorname{tg} x - 2\sec^2 x)dx$

44. $\int \frac{1}{2}(\csc^2 x - \csc x \operatorname{ctg} x)dx$

45. $\int (\sin 2x - \csc^2 x)dx$

46. $\int (2\cos 2x - 3\sin 3x)dx$

47. $\int \frac{1 + \cos 4t}{2} dt$

48. $\int \frac{1 - \cos 6t}{2} dt$

49. $\int (1 + \operatorname{tg}^2\theta)d\theta$

50. $\int (2 + \operatorname{tg}^2\theta)d\theta$ (*Útmutató:* $1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta$)

51. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$

52. $\int (1 - \operatorname{ctg}^2 x)dx$ (*Útmutató:* $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \csc^2 x$)

53. $\int \cos\theta(\operatorname{tg}\theta + \sec\theta)d\theta$

54. $\int \frac{\csc\theta}{\csc\theta - \sin\theta} d\theta$

A primitívfüggvény-képletek ellenőrzése

Az 55–60. feladatokban ellenőrizzük deriválással a képletek helyességét.

55. $\int (7x-2)^2 dx = \frac{(7x-2)^3}{28} + C$

56. $\int (3x+5)^{-2} dx = -\frac{(3x+5)^{-1}}{3} + C$

57. $\int \sec^2(5x-1)dx = \frac{1}{5}\operatorname{tg}(5x-1) + C$

58. $\int \csc^2\left(\frac{x-1}{3}\right) dx = -3\operatorname{ctg}\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$

59. $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} + C$

60. $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{x}{x+1} + C$

61. Helyes vagy helytelen? Indokoljuk válaszunkat.

(a) $\int x\sin x dx = \frac{x^2}{2}\sin x + C$

(b) $\int x\sin x dx = -\cos x + C$

(c) $\int x\sin x dx = -x\cos x + \sin x + C$

62. Helyes vagy helytelen? Indokoljuk válaszunkat.

(a) $\int \operatorname{tg}\theta\sec^2\theta d\theta = \frac{\sec^2\theta}{3} + C$

(b) $\int \operatorname{tg}\theta\sec^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\theta + C$

(c) $\int \operatorname{tg}\theta\sec^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\sec^2\theta + C$

63. Helyes vagy helytelen? Indokoljuk válaszunkat.

(a) $\int (2x+1)^2 dx = \frac{(2x+1)^3}{3} + C$

(b) $\int 3(2x+1)^2 dx = (2x+1)^3 + C$

(c) $\int 6(2x+1)^2 dx = (2x+1)^3 + C$

64. Helyes vagy helytelen? Indokoljuk válaszunkat.

(a) $\int \sqrt{2x+1}dx = \sqrt{x^2+x+C}$

(b) $\int \sqrt{2x+1}dx = \sqrt{x^2+x} + C$

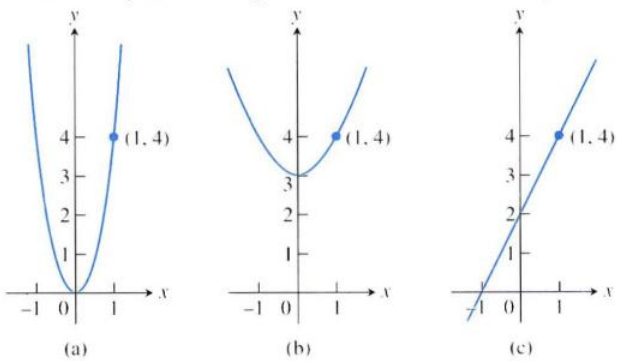
(c) $\int \sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2x+1}\right)^3 + C$

Kezdetiérték-problémák

65. Az alábbi grafikonok közül melyik mutatja a

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad y = 4, \text{ ha } x = 1$$

kezdetiérték-probléma megoldását? Válaszunkat indokoljuk.

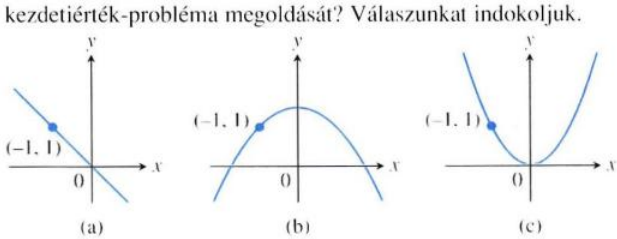


(a) (b) (c)

66. Az alábbi grafikonok közül melyik mutatja a

$$\frac{dy}{dx} = -x, \quad y = 1, \text{ ha } x = -1$$

kezdetiérték-probléma megoldását? Válaszunkat indokoljuk.



(a) (b) (c)

A 67–86. feladatokban oldjuk meg a kezdetiérték-problémát.

67. $\frac{dy}{dx} = 2x - 7, \quad y(2) = 0$

68. $\frac{dy}{dx} = 10 - x, \quad y(0) = -1$

69. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + x, \quad x > 0; \; y(2) = 1$

70. $\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 5, \quad y(-1) = 0$

71. $\frac{dy}{dx} = 3x^{-2/3}, \quad y(-1) = -5$

72. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y(4) = 0$

73. $\frac{ds}{dt} = 1 + \cos t, \quad s(0) = 4$

74. $\frac{ds}{dt} = \cos t + \sin t, \quad s(\pi) = 1$

75. $\dfrac{dr}{d\theta} = -\pi \sin \pi\theta, \quad r(0) = 0$

76. $\dfrac{dr}{d\theta} = \cos \pi\theta, \quad r(0) = 1$

77. $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{2}\sec t \operatorname{tg} t, \quad v(0) = 1$

78. $\dfrac{dv}{dt} = 8t + \csc^2 t, \quad v\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -7$

79. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2 - 6x, \quad y'(0) = 4, y(0) = 1$

80. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad y'(0) = 2, y(0) = 0$

81. $\dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{2}{t^3}; \left.\dfrac{dr}{dt}\right|_{t=1} = 1, r(1) = 1$

82. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{3t}{8}, \quad \left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=4} = 3, s(4) = 4$

83. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 6, \quad y''(0) = -8, y'(0) = 0, y(0) = 5$

84. $\dfrac{d^3\theta}{dt^3} = 0; \theta''(0) = -2, \theta'(0) = -\dfrac{1}{2}, \theta(0) = \sqrt{2}$

85. $y^{(4)} = -\sin t + \cos t, \quad y'''(0) = 7, y''(0) = y'(0) = -1, y(0) = 0$

86. $y^{(4)} = -\cos x + 8\sin 2x, \quad y'''(0) = 0, y''(0) = y'(0) = 1, y(0) = 3$

Görbék meghatározása

87. Keressük meg azt a görbét az xy-síkon, amely átmegy a $(9,4)$ ponton és meredeksége a görbe minden pontjában $3\sqrt{x}$.

88. **(a)** Keressük meg azt az $y = f(x)$ görbét, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

i $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x$, és

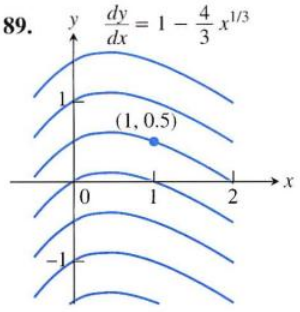
ii f grafikonja áthalad a $(0,1)$ ponton, és ott vízszintes az érintője.

(b) Hány ilyen görbe van?

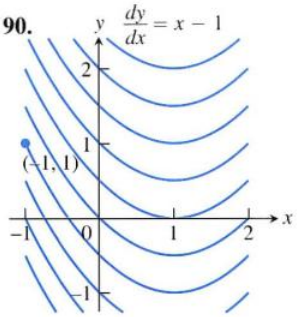
Integrálgörbék

A 89–92. feladatok differenciálegyenletek megoldásait adják meg grafikus formában. Adjuk meg annak a görbének az egyenletét, amely átmegy a megjelölt ponton.

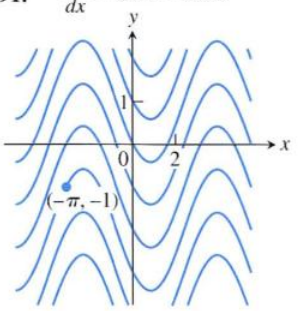
89. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{4}{3}x^{1/3}$



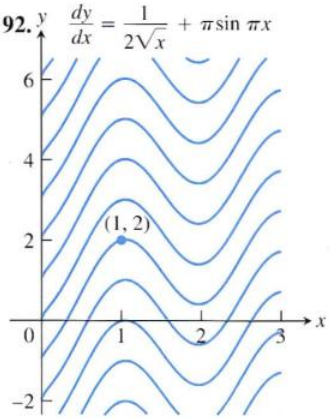
90. $\dfrac{dy}{dx} = x - 1$



91. $\dfrac{dy}{dx} = \sin x - \cos x$



92. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \pi \sin \pi x$



Alkalmazások

93. Az elmozdulás meghatározása a sebesség primitív függvényéből.

(a) Legyen az s-tengely mentén mozgó test sebessége

$$\frac{ds}{dt} = v = 9,8t - 3.$$

i Határozzuk meg a test helyzetét az $[1,3]$ időintervallumban, ha tudjuk, hogy $t = 0$-ban $s = 5$.

ii Határozzuk meg a test helyzetét az $[1,3]$ időintervallumban, ha tudjuk, hogy $t = 0$-ban $s = -2$.

iii Határozzuk meg a test helyzetét az $[1,3]$ időintervallumban, ha tudjuk, hogy $t = 0$-ban $s = s_0$.

b) Tegyük fel, hogy az egyik koordinátatengely mentén mozgó test helyzete az időnek differenciálható függvénye. Igaz-e, hogy ha ismerjük a $\frac{ds}{dt}$ sebességfüggvény egy primitív függvényét, akkor $t = a$ és $t = b$ időpontok között akkor is meg tudjuk adni a test elmozdulását, ha sem az a, sem a b időpontban nem ismerjük a pontos pozícióját? Válaszunkat indokoljuk.

94. Felemelkedés a Föld felszínéről. Egy rakéta állandó, $20\,\text{m/s}^2$ gyorsulással hagyja el a Föld felszínét. Mekkora lesz a sebessége egy perc elteltével?

95. Fékezzünk időben. Autópályán haladunk 90 km/h (= 25 m/s) sebességgel, amikor hirtelen egy baleset történik előttünk, és a fékre kell taposnunk. Milyen lassulás mellett tudunk megállni 75 méter távolságon belül? A kérdést a következő lépésekben válaszoljuk meg:

1. A kezdetiérték-probléma:

a differenciálegyenlet: $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -k \qquad (k \text{ állandó})$

a kezdeti feltétel: $\dfrac{ds}{dt} = -kt + 25$, és $s = 0$, ha $t = 0$

Az időt és a távolságot a fékezés megkezdésének pillanatától mérjük.

2. Határozzuk meg t értékét a $\frac{ds}{dt} = 0$ feltételből. (A megoldásban szerepelni fog k.)

3. Határozzuk meg k értékét az $s = 75$ és a 2. lépésben kiszámított t-érték alapján.

96. Motorkerékpár fékútja. Az Illinois államban érvényes törvény szerint egy motorkerékpárosnak 45 láb (13,7 m) féktávolsággal le kell tudnia fékezni a 30 mérföld/óra (48,3 km/h) sebességgel haladó járművét. Mekkora lassulás szükséges ehhez?

97. A koordinátatengely mentén történő mozgás. Egy részecske az egyik koordinátatengely mentén mozog $a = d^2s/dt^2 = 15\sqrt{t} - (3/\sqrt{t})$ gyorsulással. A $t = 1$ időpontban $ds/dt = 4$ és $s = 0$. Adjuk meg

(a) ds/dt sebességét t függvényében, illetve

(b) s helyzetét t függvényében.

T **98. A kalapács és a toll.** Amikor az Apolló-15 űrhajósa, David Scott a Holdon egyszerre ejtett el egy kalapácsot és egy tollat annak illusztrálására, hogy légüres térben mindkét test ugyanazzal az (állandó) gyorsulással esik, mindkét tárgyat 1,2 m magasságban engedte el. Az eseményről készített film tanúsága szerint a kalapács és a toll jóval lassabban esett, mint a Földön, ahol vákuumban mindössze fél másodperc alatt földet értek volna. Mennyi idő alatt tette meg a kalapács és a toll az 1,2 méteres utat a Holdon? Először oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát s-re mint t függvényére, azután s-et nullával egyenlővé téve határozzuk meg t értékét.

$$\textit{A differenciálegyenlet:}\quad \frac{ds^2}{dt^2} = -1{,}6\,\mathrm{m/s^2}.$$

$$\textit{A kezdeti feltétel:}\quad \frac{ds}{dt} = 0 \text{ és } s = 1{,}2, \text{ amikor } t = 0.$$

99. Állandó gyorsulású mozgás. A valamely koordinátatengely mentén állandó a gyorsulással mozgó test helyzetét leíró standard egyenlőség

$$s = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + s_0 \qquad (1)$$

alakú, ahol v_0 és s_0 a test sebessége, illetve helyzete a $t = 0$ időpontban. Vezessük le ezt az egyenletet a

$$\textit{a differenciálegyenlet:}\quad \frac{ds^2}{dt^2} = a;$$

$$\textit{a kezdeti feltétel:}\quad \frac{ds}{dt} = v_0 \text{ és } s = s_0, \text{ amikor } t = 0$$

kezdetiérték-probléma megoldása révén.

100. Szabadesés egy bolygó felszínének közelében. Egy bolygó felszínének közelében a gravitáció által okozott gyorsulás g hosszúságegység/s^2, s ezzel a 99. feladat (1) egyenlősége az

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0 \qquad (2)$$

alakot ölti, ahol s a testnek a bolyó felszínétől mért távolsága. Az egyenlőségben azért szerepel a mínusz előjel, mert a gyorsulás lefelé, s csökkenésének irányába mutat. A v_0 sebesség pozitív, ha az objektum a $t = 0$ időpontban emelkedik, és negatív, ha esik.

Ahelyett, hogy a 99. feladat eredményét használnánk fel, a (2) egyenletet úgy is levezethetjük, hogy megoldunk egy alkalmas kezdetiérték-problémát. Mi lenne ez? A biztonság kedvéért oldjuk meg a kezdetiérték-feladatot, és a megoldást lépésenként értelmezzük.

További példák és feladatok

101. Legyen

$$f(x) = \frac{d}{dx}(1 - \sqrt{x}) \text{ és } g(x) = \frac{d}{dx}(x + 2).$$

Számítsuk ki az alábbi integrálokat.

(a) $\int f(x)dx$ **(b)** $\int g(x)dx$

(c) $\int [-f(x)]dx$ **(d)** $\int [-g(x)]dx$

(e) $\int [f(x) + g(x)]dx$ **(f)** $\int [f(x) - g(x)]dx$

102. A megoldás egyértelműsége Ha a

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték-feladatnak az $y = F(x)$ és $y = G(x)$ differenciálható függvény is megoldása az I intervallumon, akkor szükségképpen teljesül-e az I intervallum minden pontjára, hogy $F(x) = G(x)$? Válaszunkat indokoljuk.

Számítógépes vizsgálatok

A MAPLE vagy a MATHEMATICA csomag segítségével oldjuk meg a 103–106. feladatokban megadott kezdetiérték-problémákat.

Rajzoljuk fel a megoldásgörbéket.

103. $y' = \cos^2 x + \sin^2 x,\ y(\pi) = 1$

104. $y' = \dfrac{1}{x} + x,\ y(1) = -1$ **105.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}},\ y(0) = 2$

106. $y'' = \dfrac{2}{x} + \sqrt{x},\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0$

4. fejezet Áttekintő kérdések

1. Mit mondhatunk egy zárt intervallumon folytonos függvény szélsőértékeiről?

2. Mit jelent az, hogy egy függvénynek értelmezési tartománya valamely pontjában lokális szélsőértéke van? Mit jelent, hogy abszolút szélsőértéke van? Hogyan viszonyulnak egymáshoz a lokális és az abszolút szélsőértékek? Mondjunk példákat.

3. Hogyan tudjuk megkeresni egy zárt intervallumon folytonos függvény abszolút szélsőértékét? Mondjunk példákat.

4. Melyek a Rolle-tétel feltételei és állításai? Valóban szükséges minden feltétel? Válaszunkat indokoljuk.

5. Milyen feltételek alapján mit állít a Lagrange-féle középértéktétel? Milyen fizikai interpretációt adhatunk a tételnek?

6. Sorolja fel a Lagrange-féle középértéktétel három következményét.

7. Hogyan azonosítható az f függvény, ha adott f' és f értékét ismerjük az $x = x_0$ pontban?

8. Mit jelent az első derivált teszt a lokális szélsőértékek vonatkozásában? Adjunk példákat a teszt alkalmazására.

9. Hogyan kell vizsgálnunk egy kétszeresen differenciálható függvényt, ha konvexitását akarjuk feltárni? Mutassunk példákat.

10. Mi az inflexiós pont? Mondjunk példát rá. Milyen fizikai jelentése lehet az inflexiós pont fogalmának?

11. Mi a lokális szélsőértékekre vonatkozó második derivált teszt?

12. Mit árulnak el a deriváltak a függvény grafikonjának meredekségéről?

13. Soroljuk fel, milyen lépésekben ábrázolnánk egy polinomfüggvényt. Mondandónkat példával is illusztráljuk.

14. Mit nevezünk csúcsnak? Mondjunk példát rá.

15. Soroljuk fel egy racionális függvény ábrázolásának lépéseit. Illusztráljuk példával is.

16. Fogalmazzuk meg egy maximum–minimum-probléma megoldásának általános stratégiáját. Adjunk példát.

17. Mondjuk ki a L'Hospital-szabályt. Honnan tudjuk, hogy mikor lehet alkalmazni a szabályt és mikor kell abbahagyni alkalmazását? Mondjunk példát.

18. Hogyan lehet kezelni a ∞/∞, $\infty \cdot 0$ és $\infty - \infty$ típusú határozatlan alakokra vezető határértékeket? Mondjunk példákat.

19. Fogalmazzuk meg az egyenletek megoldására alkalmazható Newton-módszert. Mondjunk egy példát. Mi a módszer elméleti háttere? Mire kell figyelnünk a módszer alkalmazásakor?

20. Lehet-e egy függvénynek egynél több primitív függvénye? Fejtsük ki a választ.

21. Mi a határozatlan integrál? Hogyan lehet kiszámítani? Milyen általános képleteket ismerünk a határozatlan integrál kiszámítására?

22. Hogyan lehet megoldani a $dy/dx = f(x)$ típusú differenciálegyenleteket?

23. Mit nevezünk kezdetiérték-problémának? Hogyan oldjuk meg? Mondjunk egy példát.

24. Ha ismerjük egy a koordinátatengely mentén mozgó test gyorsulását az idő függvényeként, mire van még szükségünk ahhoz, hogy meg tudjuk adni a test helyzetét? Mondjunk egy példát.

4. fejezet Gyakorló feladatok

Szélsőérték létezése

1. Lehet-e lokális maximuma vagy lokális minimuma az $f(x) = x^3 + 2x + \operatorname{tg} x$ függvénynek? Válaszunkat indokoljuk.

2. Lehet-e lokális maximuma vagy lokális minimuma az $f(x) = \operatorname{csc} x + 2\operatorname{ctg} x$ függvénynek? Válaszunkat indokoljuk.

3. Lehet-e abszolút minimuma az $f(x) = (7+x)(11-3x)^{1/3}$ függvénynek? És abszolút maximuma? Ha igen, keressük meg, ha nem, mondjuk meg, miért nem. Soroljuk fel f összes kritikus pontját.

4. Adjunk olyan értéket a-nak és b-nek, hogy az

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2-1}$$

függvénynek lokális szélsőértéke legyen az $x = 3$ helyen. Maximum vagy minimum lesz ez a lokális szélsőérték? Válaszunkat indokoljuk.

5. Az $f(x) = [x]$ egészrész függvény minden x értékre értelmezve van, a $[0,1)$ intervallum minden pontjában lokális maximuma van, melynek értéke 0. Lehet-e e lokális maximumértékek valamelyike egyben az f lokális minimuma is? Válaszunkat indokoljuk.

6. **(a)** Adjunk példát olyan differenciálható f függvényre, amelynek első deriváltja nulla valamely c pontban, f-nek mégsincs sem lokális maximuma, sem lokális minimuma c-ben.

(b) Hogyan hozható összhangba ez az állítás 4.1. alfejezet 1. Tételével?

7. Az $y = 1/x$ függvénynek a $0 < x < 1$ intervallumon nincs sem maximuma sem minimuma, pedig folytonos ezen az intervallumon. Nem mond ez ellent a folytonos függvényekre vonatkozó szélsőértéktételnek? Válaszunkat indokoljuk.

8. Mi a maximuma és a minimuma az $y = |x|$ függvénynek a $-1 \le x < 1$ intervallumon? Megjegyezzük, hogy ez az intervallum nem zárt. Összhangban van ez a folytonos függvényekre vonatkozó szélsőértéktétellel? Válaszunkat indokoljuk.

T 9. Az olyan grafikon, amely elég nagy ahhoz, hogy valamely függvény globális viselkedését megmutassa, nem mindig alkalmas a függvény fontos lokális jellegzetességeinek megfigyelésére. Ez a helyzet például az $f(x) = (x^8/8) - (x^6/2) - x^5 + 5x^3$ esetében is.

(a) Ábrázoljuk a függvény grafikonját a $-2{,}5 \le x \le 2{,}5$ intervallumon. Hol látunk szélsőértékhelyet vagy inflexiós pontot?

(b) Ábrázoljuk $f'(x)$ grafikonját, és mutassuk meg, hogy f-nek lokális maximuma van a $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}70998$ helyen és lokális minimuma van az $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1{,}73205$ helyen.

(c) Közelítsünk rá a függvény grafikonjára úgy, hogy láthassuk a lokális szélsőértékeket az $x = \sqrt[3]{5}$ és $x = \sqrt{3}$ helyeken.

Ebből az a tanulság, hogy az analízis nélkül a három szélsőérték közül kettőt valószínűleg nem vennénk észre. Egy szokásos méretű függvénygrafikonon ezek az értékek a számítógép egyetlen pixelpontjánál közelebb vannak egymáshoz.

[Forrás: Benny Evans and Jerry Johnson: *Uses of Technology in the Mathematics Curriculum*. Oklahoma Állami Egyetem, 1990.]

T 10. (*A 9. feladat folytatása*)

(a) Ábrázoljuk az $f(x) = (x^8/8) - (2/5)x^5 - 5x + (5/x^2) + 11$ függvény grafikonját a $-2 \le x \le 2$ intervallumon. Hol látunk lokális szélsőértékhelyet vagy inflexiós pontot?

(b) Mutassuk meg, hogy f-nek lokális maximuma van a $\sqrt[7]{5} \approx 1{,}2585$ helyen és lokális minimuma van az $x = \sqrt[3]{2} \approx \approx 1{,}2599$ helyen.

(c) Közelítsünk rá a függvény grafikonjára úgy, hogy láthassuk a lokális szélsőértékeket az $\sqrt[7]{5} \approx 1{,}2585$ és $x = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599$ helyeken.

A Lagrange-féle középértéktétel

11. **(a)** Mutassuk meg, hogy a $g(t) = \sin^2 t - 3t$ függvény értelmezési tartományának bármely részintervallumán csökkenő.

(b) Hány megoldása van a $\sin^2 t - 3t = 5$ egyenletnek?

12. **(a)** Mutassuk meg, hogy $y = \operatorname{tg}\theta$ függvény értelmezési tartományának bármely részintervallumán növekvő.

(b) Ha az (a) állítás valóban igaz, hogyan magyarázzuk azt, hogy $\operatorname{tg}\pi = 0$ kisebb, mint $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$?

13. **(a)** Mutassuk meg, hogy az $x^4 + 2x^2 - 2 = 0$ egyenletnek a $[0, 1]$ intervallumban pontosan egy megoldása van.

T **(b)** Keressük meg ezt a megoldást annyi tizedesjegy pontossággal, amennyire csak tudjuk.

14. **(a)** Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x/(x+1)$ függvény értelmezési tartományának bármely részintervallumán növekvő.

(b) Mutassuk meg, hogy $f(x) = x^3 + 2x$-nek nincs sem lokális maximum- sem lokális minimumértéke.

15. Egy heves esőzés következtében egy víztárolóban 24 óra alatt 1,722 millió m^3-rel nőtt a víz mennyisége. Mutassuk meg, hogy ez alatt az időszak alatt volt egy olyan pillanat, amikor a víztárolóban lévő vízmennyiség 1 millió liter/perc sebességgel nőtt.

16. Az $F(x) = 3x + C$ képlet minden C értékre más függvényt ad meg. Mindezeknek a függvényeknek ugyanaz az x szerinti deriváltjuk, nevezetesen $F'(x) = 3$. Ezek az egyedüli olyan függvények, amelyeknek 3 a deriváltjuk? Lehetnek még más függvények is, amelyeknek ugyancsak 3 a deriváltjuk? Válaszunkat indokoljuk.

17. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x+1}\right)$$

annak ellenére, hogy

$$\frac{x}{x+1} \neq -\frac{1}{x+1}.$$

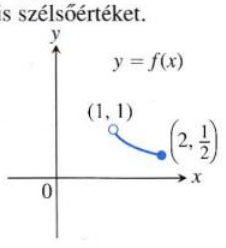
Nincs ez ellentmondásban a középértéktétel 2. Következményével? Válaszunkat indokoljuk.

18. Számítsuk ki az $f(x) = x^2/(x^2+1)$ és a $g(x) = -1/(x^2+1)$ függvények deriváltját. Mire következtethetünk a függvények grafikonjára vonatkozólag?

A függvénygrafikonból levonható következtetések

A 19. és 20. feladatban a függvény grafikonja alapján válaszoljunk a feltett kérdésekre.

19. Keressük meg az f globális szélsőértékét és azt az x-et, ahol fölveszi ezt a globális szélsőértéket.

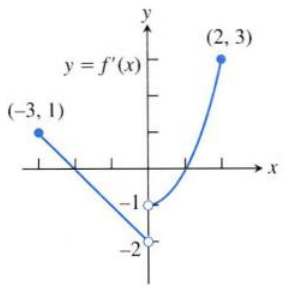


20. Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyekben az $y = f(x)$

(a) növekvő;

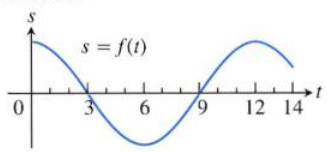
(b) csökkenő.

(c) Az f' függvény grafikonjának felhasználásával mondjuk meg, hol van az f-nek lokális szélsőértéke. Melyik maximum és melyik minimum?

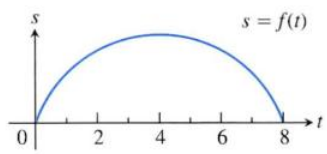


A 21. és 22. feladatokban szereplő grafikonok egy a koordinátatengely mentén mozgó test $s = f(t)$ helyzetfüggvényének a grafikonjai (t az idő). **(a)** Körülbelül mely időpontban lesz nulla a test sebessége? **(b)** Körülbelül mely időpontban lesz nulla a test gyorsulása? **(c)** Körülbelül milyen időintervallumban mozog a test előrefelé? **(d)** Körülbelül milyen időintervallumban mozog a test hátrafelé?

21.



22.



Grafikonok, a grafikon megrajzolása

A 23–32. feladatokban ábrázoljuk a megadott függvényeket.

23. $y = x^2 - (x^3/6)$

24. $y = x^3 - 3x^2 + 3$

25. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$

26. $y = (1/8)(x^3 + 3x^2 - 9x - 27)$

27. $y = x^3(8 - x)$

28. $y = x^2(2x^2 - 9)$

29. $y = x - 3x^{2/3}$

30. $y = x^{1/3}(x - 4)$

31. $y = x\sqrt{3 - x}$

32. $y = x\sqrt{4 - x^2}$

A 33–38. feladatokban megadtuk az $y = f(x)$ függvény deriváltját. **(a)** Hol lehet az f függvénynek lokális maximuma, minimuma vagy inflexiós pontja? **(b)** Vázoljuk fel a függvény grafikonját.

33. $y' = 16 - x^2$

34. $y' = x^2 - x - 6$

35. $y' = 6x(x+1)(x-2)$

36. $y' = x^2(6 - 4x)$

37. $y' = x^4 - 2x^2$

38. $y' = 4x^2 - x^4$

A 39–42. feladatokban rajzoljuk fel a függvény grafikonját. Azután az első derivált segítségével értelmezzük a látottakat.

39. $y = x^{2/3} + (x-1)^{1/3}$

40. $y = x^{2/3} + (x-1)^{2/3}$

41. $y = x^{1/3} + (x-1)^{1/3}$

42. $y = x^{2/3} - (x-1)^{1/3}$

A 43–50. feladatokban rajzoljuk fel a függvény grafikonját.

43. $y = \dfrac{x+1}{x-3}$

44. $y = \dfrac{2x}{x+5}$

45. $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

46. $y = \dfrac{x^2-x+1}{x}$

47. $y = \dfrac{x^3+2}{2x}$

48. $y = \dfrac{x^4-1}{x^2}$

49. $y = \dfrac{x^2-4}{x^2-3}$

50. $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

A L'Hospital-szabály alkalmazása

Az 51–62. feladatokban számítsuk ki a határértékeket a L'Hospital-szabály segítségével.

51. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$

52. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^a-1}{x^b-1}$

53. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

54. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x+\sin x}$

55. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}(x^2)}$

56. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$

57. $\lim\limits_{x\to \pi/2^-} \sec 7x \cos 3x$

58. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\sec x$

59. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{csc} x - \operatorname{ctg} x)$

60. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

61. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}\right)$

62. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2-1} - \dfrac{x^3}{x^2+1}\right)$

Optimalizálás

63. Két nemnegatív szám összege 36. Melyik ez a két szám, ha

(a) négyzetgyökük különbsége a lehető legnagyobb?

(b) négyzetgyökük összege a lehető legnagyobb?

64. Két nemnegatív szám összege 20. Határozzuk meg a számokat úgy, hogy

(a) az egyiknek a másik négyzetgyökével való szorzata a lehető legnagyobb legyen, illetve hogy

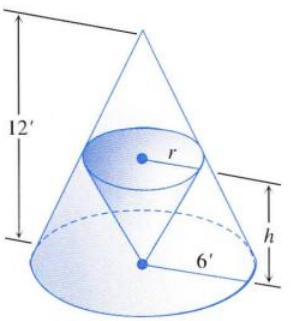
(b) az egyik számnak és a másik négyzetgyökének az összege a lehető legnagyobb legyen.

65. Egy egyenlő szárú háromszög csúcsa az origóban van, alapja párhuzamos az x-tengellyel, és az x-tengely fölött elhelyezkedő csúcsai illeszkednek az $y = 27 - x^2$ parbolára. Maximum mekkora lehet a háromszög területe?

66. Egy megrendelő négyszögletes acéltartály megtervezésére ad megbízást. A megbízásban a következők állnak: a tartálynak négyzetalapúnak, térfogatának pedig $0{,}9\ \mathrm{m}^3$-nek kell lennie, 6,4 mm vastagságú lemezből kell összehegeszteni, a tömege pedig nem lehet nagyobb a feltétlenül szükségesnél. Milyen méreteket ajánljunk?

67. Adjuk meg annak a legnagyobb térfogatú egyenes körhengernek a sugarát és magasságát, ami még éppen belefér egy $\sqrt{3}$ sugarú gömbbe.

68. Az ábrán két egymásba helyezett egyenes körkúp látható. Alaplapjuk párhuzamos, a kisebbik kúp csúcsa illeszkedik a nagyobbik alaplapjára. Milyen r és h értékek mellett lesz a legnagyobb a kisebbik kúp térfogata?



69. Gumiabroncsgyártás. Társaságunk x-szer száz darab A típusú és y-szor száz darab B típusú gumit tud készíteni naponta; $0 \le x \le 4$ és

$$y = \frac{40 - 10x}{5 - x}.$$

Az A típusún kétszer akkora a hasznunk, mint a B típusún. Mennyit gyártsunk naponta az egyes típusokból, ha a lehető legnagyobb profitot szeretnénk előállítani?

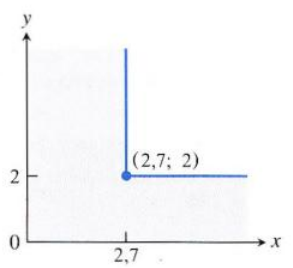
70. Részecskemozgás. Két részecske helyzetét az s-tengelyen az $s_1 = \cos t$ és $s_2 = \cos(t + \pi/4)$ függvények írják le.

(a) Mekkora a részecskék legnagyobb távolsága?

(b) Mikor ütköznek össze?

T **71. Felülről nyitott doboz.** 10×16 centiméteres kartonlapból felülről nyitott négyszögletes dobozt kell készítenünk oly módon, hogy a kartonlap sarkaiból négyzeteket vágunk ki, majd az oldalakat felhajtjuk és összeragasztjuk. Adjuk meg a lehető legnagyobb térfogatú doboz méreteit és térfogatát. Eredményünket grafikus módszerrel is támasszuk alá.

72. A létra problémája. Legfeljebb milyen hosszú, vízszintesen tartott létrával lehet befordulni az alábbi folyosón? A létra hosszát méterben adjuk meg, a kapott értéket kerekítsük lefelé.



A Newton-módszer

73. Legyen $f(x) = 3x - x^3$. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = -4$ egyenletnek van megoldása a $[2,3]$ intervallumban, s a megoldás megkereséséhez használjuk a Newton-módszert.

74. Legyen $f(x) = x^4 - x^3$. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = 75$ egyenletnek van megoldása a $[3,4]$ intervallumban, a megoldás megkereséséhez használjuk a Newton-módszert.

A határozatlan integrál kiszámítása

A 75–90. feladatokban számítsuk ki a határozatlan integrálokat (adjuk meg általános alakban a primitív függvényt). Az eredményt ellenőrizzük deriválással.

75. $\int (x^3+5x-7)dx$

76. $\int \left(8t^3-\frac{t^2}{2}+t\right)dt$

77. $\int \left(3\sqrt{t}+\frac{4}{t^2}\right)dt$

78. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{3}{t^4}\right)dt$

79. $\int \frac{dr}{(r+5)^2}$

80. $\int \frac{6dr}{\left(r-\sqrt{2}\right)^3}$

81. $\int 3\theta\sqrt{\theta^2+1}d\theta$

82. $\int \frac{\theta}{\sqrt{7+\theta^2}}d\theta$

83. $\int x^3(1+x^4)^{-1/4}dx$

84. $\int (2-x)^{3/5}dx$

85. $\int \sec^2 \frac{s}{10}ds$

86. $\int \csc^2 \pi s ds$

87. $\int \csc\sqrt{2}\theta \operatorname{ctg}\sqrt{2}\theta d\theta$

88. $\int \sec\frac{\theta}{3}\operatorname{tg}\frac{\theta}{3}d\theta$

89. $\int \sin^2\frac{x}{4}dx$

90. $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$ *(Útmutató:* $\cos^2\theta=(1+\cos 2\theta)/2$*)*

Kezdetiérték-problémák

Oldjuk meg a 91–94. kezdetiérték-problémákat.

91. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+1}{x^2}$, $y(1)=-1$

92. $\frac{dy}{dx}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$, $y(1)=1$

93. $\frac{d^2r}{dt^2}=15\sqrt{t}+\frac{3}{\sqrt{t}}$; $r'(1)=8$, $r(1)=0$

94. $\frac{d^3r}{dt^3}=-\cos t$; $r''(0)=r'(0)=0$, $r(0)=-1$

4. fejezet Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. Mit mondhatunk arról a függvényről, amelynek egy adott intervallumban megegyezik a maximális és a minimális értéke?

2. Igaz-e, hogy egy nem folytonos függvénynek egy zárt intervallumon nem lehet egyszerre maximális és minimális értéke? Válaszunkat indokoljuk.

3. Mondhatunk-e valamit egy folytonos függvény szélsőértékeiről egy nyílt intervallumban? Egy félig nyílt intervallumban? Válaszunkat indokoljuk.

4. Lokális szélsőérték. Készítsük el a

$$\frac{df}{dx}=6(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^3$$

derivált előjeltáblázatát annak érdekében, hogy meg tudjuk határozni, hol van az f függvénynek lokális maximuma és minimuma.

5. Lokális szélsőérték.

(a) Tegyük fel, hogy az $y=f(x)$ függvény deriváltja

$$y'=6(x+1)(x-2)^2.$$

Mely pontban van – ha van – f grafikonjának lokális maximuma, minimuma vagy inflexiós pontja?

(b) Tegyük fel, hogy az $y=f(x)$ függvény deriváltja

$$y'=6(x+1)(x-2).$$

Mely pontban van – ha van egyáltalán – f grafikonjának lokális maximuma, minimuma, illetve inflexiós pontja?

6. Ha minden x esetén $f'(x)\le 2$, akkor mennyi az f függvény lehetséges legnagyobb növekedése a $[0,6]$ intervallumon? Válaszunkat indokoljuk.

7. Függvény korlátossága. Tegyük fel, hogy f folytonos az $[a,b]$ intervallumon, legyen c ennek az intervallumnak egy belső pontja. Mutassuk meg, hogy ha $f'(x)\le 0$ az $[a,c)$ intervallumon, és $f'(x)\ge 0$ a $(c,b]$-n, akkor az $[a,b]$ intervallumon $f(x)$ soha nem lehet kisebb $f(c)$-nél.

8. Egy egyenlőtlenség.

(a) Mutassuk meg, hogy $-1/2\le x/(1+x^2)\le 1/2$ minden x-re.

(b) Tegyük fel, hogy az f függvény deriváltja $f'(x)=x/(1+x^2)$. A feladat (a) részének eredményét felhasználva mutassuk meg, hogy

$$|f(b)-f(a)|\le\frac{1}{2}|b-a|$$

tetszőleges a és b mellett teljesül.

9. Az $f(x)=x^2$ függvény deriváltja nulla az $x=0$ helyen, pedig f nem konstans függvény. Nem mond ez ellent a középértéktétel következményének, amely azt mondja ki, hogy azok a függvények, amelyeknek nulla a deriváltja, konstans függvények? Válaszunkat indokoljuk.

10. Szélsőérték és inflexiós pont. Legyen $h=fg$ az x változó két differenciálható függvényének szorzata.

(a) Ha f és g pozitív, mindkettőnek lokális maximuma van az $x=a$ helyen, továbbá f' és g' előjelet vált a-ban, akkor h-nak is lokális maximuma van a-ban?

(b) Ha f és g grafikonjának inflexiós pontja van az $x = a$ helyen, akkor h-nak is inflexiós pontja van a-ban?

Ha a válasz igen, minden esetben bizonyítsuk is be az állítást. Ellenkező esetben adjunk ellenpéldát.

11. A függvény meghatározása. Az alábbi információk birtokában határozzuk meg az $f(x) = (x+a)/(bx^2+cx+2)$ képletben szereplő a, b és c paraméterek értékét.

i a, b és c mindegyike vagy 0 vagy 1;

ii f grafikonja áthalad a $(-1,0)$ ponton;

iii az $y = 1$ egyenes f grafikonjának vízszintes aszimptotája.

12. Vízszintes érintő. A k állandó mely értékére (értékeire) lesz az $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ görbének pontosan egy vízszintes érintője?

13. A legnagyobb beírható háromszög. Legyenek A és B egy egységsugarú kör átmérőjének végpontjai, C pedig a körvonal valamely pontja. Igaz-e, hogy az ABC háromszög területe akkor maximális, ha a háromszög egyenlőszárú? Honnan tudjuk?

14. A második derivált teszt bizonyítása. A lokális maximumra és lokális minimumra vonatkozó második derivált teszt azt mondja ki, hogy

(a) f-nek lokális maximuma van $x = c$-ben, ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) < 0$; illetve, hogy

(b) f-nek lokális minimuma van $x = c$-ben, ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) > 0$.

Az (a) állítás bizonyításához legyen $\varepsilon = (1/2)|f''(c)|$. Azután felhasználva, hogy

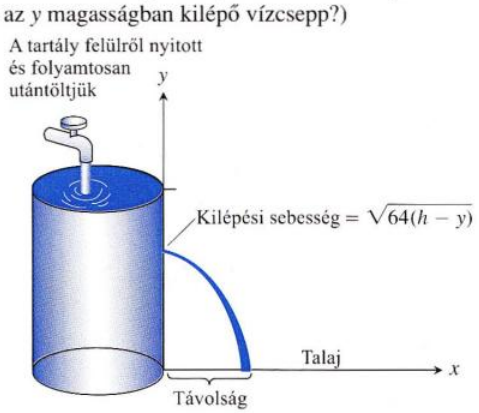
$$f''(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h)}{h},$$

bizonyítsuk be, hogy valamely $\delta > 0$- ra

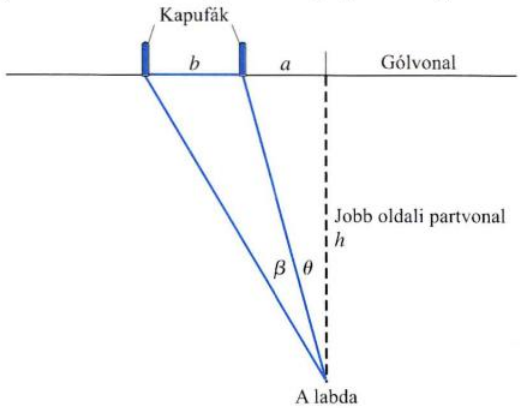
$$0 < |h| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(c+h)}{h} < f''(c) + \varepsilon < 0.$$

Emiatt $f'(c+h)$ pozitív $-\delta < h < 0$, és negatív $0 < h < \delta$ esetén. A (b) állítás bizonyítása hasonló módon történik.

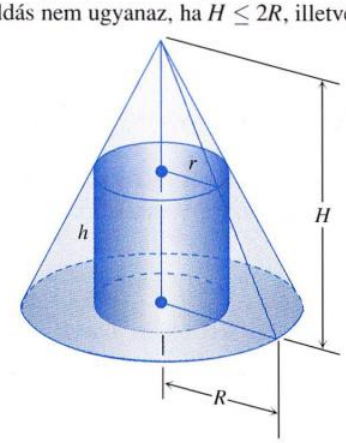
15. Lyuk a víztartályon. Lyukat akarunk fúrni az ábrán látható víztartályba úgy, hogy a kiömlő vízsugár a tartály aljától a lehető legnagyobb távolságban érje el a talajt. Ha a lyuk a tartály felső részén van, ott kicsi a víz nyomása, a víz kis sebességgel ömlik ki, viszont aránylag hosszú időt tölt a levegőben. Ha a tartály aljának közelében fúrunk lyukat, akkor nagyobb sebességgel ömlik ki a víz, de aztán rövid időn belül eléri a talajt. Hol készítsük el a kiömlőnyílást? (*Útmutatás:* Mennyi idő alatt éri el a talajt az y magasságban kilépő vízcsepp?)



16. Mezőnygól. Egy amerikai focista gólt szeretne lőni a jobb oldali partvonalról. A kapu b méter széles és az oldalvonal $a > 0$ távolságra van a jobb oldali kapufától. (L. az ábrát.) Keressük meg azt az alapvonaltól h távolságra levő pontot az oldalvonalon, ahonnan a lövő játékos a lehető legnagyobb β szögben látja a kaput. Feltételezzük, hogy a futballpálya sík talajon van.



17. Változó megoldású maximum–minimum-probléma. A maximum–minimum-probléma megoldása olykor az alakzatok méretarányaitól is függ. Egy R sugarú, H magasságú egyenes körkúpba helyezzünk r sugarú, h magasságú egyenes körhengert úgy, ahogy az az ábrán látható. Keressük meg r-nek azt az értékét (R-rel és H-val kifejezve), amelyre a henger teljes felszíne (alap és fedőlapjával együtt) a lehető legnagyobb lesz. Látni fogjuk, hogy a megoldás nem ugyanaz, ha $H \le 2R$, illetve ha $H > 2R$.



18. A paraméter értékének minimalizálása. Keressük meg az m pozitív állandónak azt a legkisebb értéket, amelyre bármely pozitív x érték mellett az $mx - 1 + (1/x)$ kifejezés nagyobb vagy egyenlő lesz nullánál.

19. Számítsuk ki a következő határértékeket.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\sin 5x}{3x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \sin 5x \operatorname{ctg} 3x$

(c) $\lim_{x\to 0} \csc^2 \sqrt{2x}$

(d) $\lim_{x\to \pi/2} (\sec x - \operatorname{tg} x)$

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$

(f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x \sin x}$

(g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sec x - 1}{x^2}$

(h) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

20. A következő határértékek kiszámításában nem segít a L'Hospital-szabály. Keressünk valami más utat:

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}+5}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x + 7\sqrt{x}}$

21. Tegyük fel, hogy egy cégnél x egységnyi termék előállításának költsége $y = a + bx$ dollár. Hetente x egységet adnak el $P = c - ex$ egységáron; a, b, c és e pozitív állandók. **(a)** Milyen termelési szint mellett lehet maximalizálni a profitot? **(b)** Mi a megfelelő ár? **(c)** Mekkora a heti profit nagysága ezen a termelési szinten? Milyen egységár hozza a legnagyobb hasznot, ha a kormány minden eladott árucikkre t dollár adót vet ki? Magyarázzuk meg, mi a különbség a nettó ár és az adóval terhelt ár között.

22. Reciprok meghatározása osztás nélkül. Az a szám reciprokát anélkül is meg tudjuk határozni, hogy osztanunk kellene a-val, ha a Newton-módszert az $f(x) = (1/x) - a$ függvényre alkalmazzuk. Például ha $a = 3$, akkor az $f(x) = (1/x) - 3$ függvényt kell tekintenünk.

(a) Ábrázoljuk az $f(x) = (1/x) - 3$ függvényt. Hol metszi a grafikon az x-tengelyt?

(b) Mutassuk meg, hogy ebben az esetben a rekurziós képlet

$$x_{n+1} = x_n(2 - 3x_n),$$

tehát valóban nincs szükség osztásra.

23. $\sqrt[q]{a}$ értékének meghatározása céljából alkalmazzuk a Newton-módszert az $f(x) = x^q - a$ függvényre; a pozitív valós, q pedig pozitív egész szám. Mutassuk meg, hogy az x_1 szám az x_0 és az a/x_0^{q-1} „súlyozott" átlaga lesz, és keressük meg azokat az m_0, m_1 együtthatókat, amelyekkel:

$$x_1 = m_0 x_0 + m_1 \left(\frac{a}{x_0^{q-1}} \right), \quad \begin{matrix} m_0 > 0,\ m_1 > 0 \\ m_0 + m_1 = 1. \end{matrix}$$

Mi következik abból, ha x_0 és a/x_0^{q-1} egyenlő egymással? Ebben az esetben mi lesz x_1 értéke?

24. Az $y = ax + b$ (a, b teszőleges állandók) egyenessereg az $y'' = 0$ relációval jellemezhető. Keresssünk hasonló relációt az

$$(x - h)^2 + (y - h)^2 = r^2$$

körseregre is, ahol h és r tetszőleges állandók. (*Útmutatás:* Az eredeti, valamint a két egymást követő deriválással előálló három egyenletből iktassuk ki a h és r állandókat.)

25. Egy személygépkocsi fékberendezése k m/s^2 lassulást képes produkálni. **(a)** Határozzuk meg, mekkorának kell lennie k-nak, hogy a 90 km/h sebességgel haladó autó 30 méteren belül meg tudjon állni. **(b)** Ha csak 48 km/h az autó sebessége, mennyit mehet még tovább fékezés nélkül, hogy ugyanazon a ponton meg tudjon állni?

26. Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ folytonosan differenciálható függvények, amelyek kielégítik az $f'(x) = g(x)$ és $f''(x) = -f(x)$ összefüggéseket. Legyen $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$. Határozzuk meg $h(10)$ értékét, ha tudjuk, hogy $h(0) = 5$.

27. Kielégítheti-e egy görbe a következő feltételeket? d^2y/dx^2 mindenütt nulla és $x = 0$, $y = 0$ esetén $dy/dx = 1$. Válaszunkat indokoljuk.

28. Keressük meg annak az xy-síkban fekvő görbének az egyenletét, amely átmegy az $(1, -1)$ ponton, és meredeksége a görbe minden (x, y) pontjában $3x^2 + 2$.

29. Egy részecske az x-tengely mentén mozog. Gyorsulása $a = -t^2$. A $t = 0$ időpillanatban a részecske az origóban tartózkodik. Mozgása során eljut az $x = b$ pontba, ahol $b > 0$, de b-n túl soha. Adjuk meg a sebességét a $t = 0$ időpontban.

30. Egy részecske gyorsulása $a = \sqrt{t} - (1/\sqrt{t})$. Fejezzük ki a részecske

(a) v sebességét t függvényében;

(b) s helyzetét t függvényében,

ha a $t = 1$ időpontban $v = 4/3$ és $s = -4/15$.

31. Adva van az $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ függvény, ahol $a > 0$. Bizonyítsuk be, hogy minden valós x-re $f(x) \geq 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $b^2 - ac \leq 0$.

32. A Schwartz-egyenlőtlenség.

(a) A 31. feladatban legyen

$$f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \ldots + (a_nx + b_n)^2,$$

és vezessük le az

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq \\ \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

Schwartz-egyenlőtlenséget.

(b) Mutassuk meg, hogy a Schwartz-egyenlőtlenségben egyenlőség csakis akkor áll fenn, ha létezik olyan valós x, amelyre $a_ix = -b_i$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén.

Függelékek

F.1. Teljes indukció

Sok olyan összefüggés van, mint amilyen például az

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

azonosság, amelynek bizonyításában a *teljes* (vagy *matematikai*) *indukció* axiómájára hivatkozunk.

A teljes indukción alapuló bizonyítások két lépése:

(1) ellenőrizzük, hogy a szóban forgó formula $n=1$ esetén igaz;

(2) belátjuk, hogy tetszőleges k szám esetén abból, hogy a formula $n=k$ esetén igaz, következik, hogy $n=k+1$ esetén is igaz.

Ha ez a két feltétel teljesül, akkor biztosak lehetünk abban, hogy formulánk minden n természetes számra igaz. Erről a következő gondolatmenet alapján győződhetünk meg. Az (1) lépés szerint a formula igaz 1-re. A (2) szerint teljesül, hogy ha 1-re igaz, akkor 2-re is igaz, így tehát 2-re is igaz. De az is fennáll, hogy ha 2-re igaz, akkor igaz 3-ra is, így aztán 3-ra is igaz stb. Ha az első dominó eldől, és a k-adik dominó (tetszőleges k esetén) eldönti a $k+1$-edik dominót, akkor a végeredmény: minden dominó eldől.

Hogy a dolgot más szempontból is megvilágítsuk, tekintsük az $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ állításssorozatot. Tegyük fel, hogy mindegyik állítás igazsága maga után vonja a sorban utána következő állítás igazságát. Ekkor ha S_1 igaz, akkor vele együtt igaz az összes utána következő állítás is.

1. PÉLDA

Igazoljuk, hogy bármely n természetes számra:

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Megoldás. A fenti, kétlépéses stratégiát követjük.

(1) Az állítás $n=1$ esetén igaz, elvégre

$$1=\frac{1(1+1)}{2}.$$

(2) Az indukciós lépésben azt kell igazolnunk, hogy ha az állítás valamely $n=k$ szám esetén igaz, akkor $n=k+1$ esetén is igaz. Ha

$$1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2},$$

akkor

$$1+2+\ldots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k^2+k+2k+2}{2}=$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.$$

Az egyenlőségsorozat utolsó tagja éppen $n(n+1)/2$, amennyiben $n=k+1$.

Az indukciós axióma alapján így leszögezhetjük: az állítás minden n természetes számra igaz. □

Az 5.2. alfejezet 4. példájában az első n természetes szám összegére vonatkozó állítást másféleképpen is belátjuk, az indukciós bizonyítás azonban alapvetőbb, ráadásul ennek alapján az első n négyzetszám, illetve köbszám összegére vonatkozó formulákat is könnyen igazolhatjuk (l. a 9. és 10. feladatot). Lássunk még egy példát.

2. PÉLDA

Igazoljuk, hogy minden n természetes számra

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}.$$

Megoldás. Újra a kétlépéses stratégiát követjük.

(1) Az állítás $n=1$ esetén igaz, elvégre

$$\frac{1}{2^1}=1-\frac{1}{2^1}.$$

Ha pedig fennáll

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k},$$

akkor

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=$$
$$=1-\frac{2}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2^{k+1}}.$$

Ha tehát a formula k-ra igaz, akkor igaz $k+1$-re is, tetszőleges k esetén.

Az indukció két lépése így biztosítja, hogy az állítás minden n természetes számra igaz. □

Más kezdőértékek

Bizonyos esetekben az indukciós bizonyítások első lépésében nem $n=1$, hanem valamely más természetes szám esetén kell ellenőriznünk, hogy igaz-e a bizonyítandó állítás. Ilyenkor a két lépés a következőképpen módosul:

(1) ellenőrizzük, hogy a szóban forgó formula $n=n_1$ esetén igaz; ahol n_1 természetes szám (most ez az indukció „alapja");

(2) belátjuk, hogy tetszőleges $k\geq n_1$ szám esetén abból, hogy a formula $n=k$ esetén igaz, következik, hogy $n=k+1$ esetén is igaz.

Ha (1)-et és (2)-t igazoltuk, akkor az indukció axiómája garantálja, hogy a szóban forgó állítás minden $n\geq n_1$ természetes szám esetén igaz.

3. PÉLDA

Igazoljuk, hogy ha n elég nagy, akkor $n!>3^n$.

Megoldás. Milyen nagy az „elég nagy"? A következő táblázatból a válasz is kiderül:

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040
3^n	3	9	27	81	243	729	2187

A sejtésünk az, hogy minden $n\geq 7$ esetén $n!>3^n$. A sejtés bizonyítására használjunk indukciót. Az első lépésben legyen $n_1=7$ (látjuk, hogy $n=7$-re az állítás igaz).

Tegyük fel tehát, hogy valamely $k\geq 7$ számra $k!>3^k$. Ekkor

$$(k+1)!=(k+1)k!>(k+1)k^3>7\cdot 3^k>3^{k+1}.$$

Ezzel a bizonyítás teljessé vált: ha $n\geq 7$, akkor $n!>3^n$. □

F.1. Feladatok

1. A két valós számra vonatkozó $|a+b| \le |a|+|b|$ háromszög-egyenlőtlenség alapján igazoljuk, hogy tetszőleges n-re és $x_1, \ldots, x_n$ számra

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|.$$

2. Igazoljuk, hogy ha $r \neq 1$, akkor tetszőleges n természetes szám esetén

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

3. A szorzatfüggvény deriváltjára vonatkozó $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v$ szabály, valamint a $\frac{d}{dx}(x) = 1$ összefüggés alapján igazoljuk, hogy bármely n természetes szám esetén $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.

4. Tegyük fel, hogy az f függvényre az $f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ összefüggés tetszőleges x_1 és x_2 valós számok esetén teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor

$$f(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n),$$

tetszőleges n természetes szám és $x_1, \ldots, x_n$ valós számok esetén.

5. Igazoljuk, hogy minden n természetes számra teljesül a

$$\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$$

egyenlőség.

6. Igazoljuk, hogy ha n elég nagy, akkor $n! > n^3$.

7. Igazoljuk, hogy ha n elég nagy, akkor $2^n > n^2$.

8. Igazoljuk, hogy ha $n \ge -3$, akkor $2^n \ge 1/8$.

9. Négyzetszámok összege. Igazoljuk, hogy az első n pozitív egész szám négyzetének összege:

$$\frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}.$$

10. Harmadik hatványok összege. Igazoljuk, hogy az első n pozitív egész szám köbének összege:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

11. Véges összegek. Igazoljuk, hogy tetszőleges n természetes szám, illetve $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ számok esetén

(a) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$;

(b) $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$;

(c) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$, tetszőleges c-re;

(d) $\sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot c$, amennyiben minden k-ra $a_k = c$.

12. Igazoljuk, hogy tetszőleges x valós szám és n természetes szám esetén $|x^n| = |x|^n$.

F.2. A határértékre vonatkozó tételek bizonyítása

Ebben a pontban belátjuk a 2.2. alfejezetbeli 1. Tétel 2–5. állításait, valamint a 4. Tételt.

1. TÉTEL Határértékszabályok.

Legyenek L, M, c és k valós számok; tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{és} \quad \lim_{x \to c} g(x) = M.$$

Ekkor fennállnak a következők.

1. ÖSSZEG:	$\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = L + M$
2. KÜLÖNBSÉG:	$\lim_{x \to c}(f(x) - g(x)) = L - M$
3. SZORZAT:	$\lim_{x \to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
4. SZORZÁS KONSTANSSAL:	$\lim_{x \to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot L$
5. HÁNYADOS:	$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, ha $M \neq 0$
6. RACIONÁLIS HATVÁNY:	Ha r és s relatív prím egész számok, és $s \neq 0$, akkor $\lim_{x \to c}(f(x))^{r/s} = L^{r/s}$, feltéve, hogy $L^{r/s}$ valós szám (ha s páros, akkor azt is feltesszük, hogy $L > 0$).

Az összegre vonatkozó szabályt a 2.2. alfejezetben már beláttuk, a racionális kitevőjű hatványfüggvényekkel való kompozícióra vonatkozó 6. szabály bizonyítását a felsőbb analíziskönyvekre hagyjuk. A különbségre vonatkozó 2. szabályt az összegszabály speciális eseteként kaphatjuk meg, g helyében a $-g$ függvénnyel, M helyében pedig a $-M$ számmal. A konstanssal való szorzásra vonatkozó 4. szabály a szorzatszabály azon speciális esete, amikor $g(x) = k$ minden x-re. Marad tehát a szorzat- és a hányadosszabály – a következőkben ezeket bizonyítjuk be.

A szorzatszabály bizonyítása. Belátjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy az f és g értelmezési tartományai D metszetének minden x elemére

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x) - LM| < \varepsilon.$$

Rögzítsünk tehát egy pozitív ε számot; írjuk fel az $f(x)$ és a $g(x)$ függvényt a következő alakban:

$$f(x) = L + (f(x) - L), \quad g(x) = M + (g(x) - M).$$

Szorozzuk össze a két egyenlőséget, a szorzatból pedig vonjunk ki LM-et:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) - LM &= [L + (f(x) - L)][M + (g(x) - M)] = \\ &= LM + L(g(x) - M) + M(f(x) - L) + (f(x) - L)(g(x) - M) - LM = \\ &= L(g(x) - M) + M(f(x) - L) + (f(x) - L)(g(x) - M). \end{aligned} \quad (1)$$

Mivel f és g határértéke, amint $x \to c$, rendre L és M, vannak olyan $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ számok, amelyekre teljesül, hogy a D halmaz minden x elemére:

$$\begin{aligned} &0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \sqrt{\varepsilon/3} \\ &0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \sqrt{\varepsilon/3} \\ &0 < |x - c| < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/3(1 + |M|) \\ &0 < |x - c| < \delta_4 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/3(1 + |L|). \end{aligned} \quad (2)$$

Legyen δ a $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ számok legkisebbike; ekkor a (2)-beli implikációk utótagjai mind fennállnak, ha $0 < |x - c| < \delta$ teljesül. Így ha $0 < |x - c| < \delta$, akkor minden $x \in D$ esetén

$$\begin{aligned} &|f(x)g(x) - LM| \leq \\ &\leq |L| \cdot |g(x) - M| + |M| \cdot |f(x) - L| + |f(x) - K| \cdot |g(x) - M| \leq \\ &\leq (1 + |L|) \cdot |g(x) - M| + (1 + |M|) \cdot |f(x) - L| + |f(x) - K| \cdot |g(x) - M| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük. □

A hányadosszabály bizonyítása.

Belátjuk, hogy $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{M}$. Ebből ugyanis a szorzatszabály felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} \frac{1}{g(x)} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}.$$

Rögzítsünk tehát egy pozitív ε számot. Meg kell mutatnunk, hogy létezik olyan $\delta > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy tetszőleges x esetén

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \varepsilon.$$

Mivel a feltevésünk szerint $|M| > 0$, azért létezik olyan δ_1 pozitív szám, hogy minden x-re

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{|M|}{2}. \quad (3)$$

Tetszőleges A és B számokra teljesül az $|A|-|B| \le |A-B|$, a $|B|-|A| \le |A-B|$, ezek következtében pedig az $||A|-|B|| \le |A-B|$ egyenlőtlenség. Az utóbbiból az $A = g(x)$, $B = M$ helyettesítéssel a

$$||g(x)|-|M|| \le |g(x)-M|$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amiből a (3) implikáció utótagját is figyelembe véve

$$||g(x)|-|M|| < \frac{|M|}{2}$$

következik. Eszerint

$$\begin{aligned} -\frac{|M|}{2} < |g(x)|-|M| < \frac{|M|}{2}, \\ \frac{|M|}{2} < |g(x)| < \frac{3|M|}{2}, \\ |M| < 2|g(x)| < 3|M|, \end{aligned}$$

amiből

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|} < \frac{3}{|g(x)|}. \tag{4}$$

Ha tehát $0 < |x-c| < \delta_1$, akkor

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M-g(x)}{M \cdot g(x)}\right| \le \frac{1}{|M|} \cdot \frac{1}{|g(x)|} \cdot |M-g(x)| < \\ < \frac{1}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} \cdot |M-g(x)|. \tag{5}$$

Az utolsó lépésben felhasználtuk a (4) egyenlőtlenséget.

Mivel $(1/2)|M|^2\varepsilon > 0$, azért van olyan $\delta_2 > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$0 < |x-c| < \delta_2 \Rightarrow |M-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}|M|^2. \tag{6}$$

Ha tehát δ-nak a δ_1 és $\delta_2\}$ közül a kisebbet választjuk, akkor (5) és (6) egyaránt teljesül minden $0 < |x-c| < \delta$ esetén, így azt kapjuk, hogy minden x-re:

$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \varepsilon,$$

ez pedig éppen a bizonyítandó állítás. □

4. TÉTEL Szendvicstétel.

Tegyük fel, hogy valamely, a c pontot tartalmazó nyílt intervallum minden (de legalábbis c kivételével minden) x elemére teljesül $g(x) \le f(x) \le h(x)$. Ha ezen felül

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L,$$

akkor fennáll $\lim_{x \to c} f(x) = L$ is.

Bizonyítás.

Jobb oldali határérték. Tegyük fel, hogy $\lim_{x \to c^+} g(x) = \lim_{x \to c^+} h(x) = L$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in (c, c+\delta)$ esetén

$$L-\varepsilon < g(x) < L+\varepsilon \quad \text{és} \quad L-\varepsilon < h(x) < L+\varepsilon.$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből a $g(x) \le f(x) \le h(x)$ egyenlőtlenséget is felhasználva a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} L-\varepsilon < g(x) \le f(x) \le h(x) < L+\varepsilon, \\ L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon, \\ -\varepsilon < f(x)-L < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tehát tetszőleges x-re: ha $c < x < c + \delta$, akkor $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Bal oldali határérték. Tegyük fel, hogy $\lim_{x \to c^-} g(x) = \lim_{x \to c^-} h(x) = L$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in (c - \delta, c)$ esetén

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \quad \text{és} \quad L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon.$$

Az előbbi gondolatmenetet követve most azt kapjuk, hogy tetszőleges x-re: ha $c - \delta < x < c$, akkor $|f(x) - L| < \varepsilon$.

„Kétoldali" határérték. Ha $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, akkor $g(x)$ és $h(x)$ jobb és bal oldali határértéke is létezik, amint $x \to c^+$, illetve $x \to c^-$. Az előzőek szerint ekkor $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L$ is fennáll, így $\lim_{x \to c} f(x)$ is létezik és egyenlő L-lel. □

F.2. Feladatok

1. Tegyük fel, hogy az $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ függvények határértéke az $x = c$ helyen rendre L_1, L_2 és L_3. Igazoljuk, hogy ekkor $\lim_{x \to c}(f_1 + f_2 + f_3)(x) = L_1 + L_2 + L_3$. Indukcióval igazoljuk az állítás általánosítását is.

2. A szorzatfüggvény határértékére vonatkozó szabályt felhasználva teljes indukcióval igazoljuk, hogy ha az $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ függvények határértéke az $x = c$ helyen rendre $L_1, L_2, \ldots, L_n$, akkor

$$\lim_{x \to c}(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)(x) = L_1 \cdot L_2 \cdot \ldots \cdot L_n.$$

3. A $\lim_{x \to c} x = c$ összefüggés és a 2. feladat alapján igazojuk, hogy tetszőleges $n > 1$ egész szám esetén $\lim_{x \to c} x^n = c^n$.

4. Polinomfüggvény határértéke. A $\lim_{x \to c}(k) = k$ összefüggés, valamint az 1. és a 3. feladat eredménye alapján igazoljuk, hogy tetszőleges

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

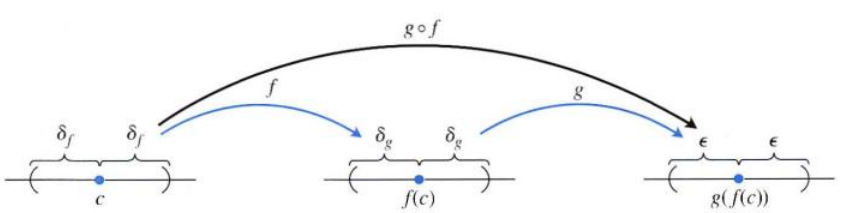
polinomfüggvény esetén $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

5. Racionális törtfüggvény határértéke. Az 1. Tétel és a 4. feladat eredményének felhasználásával bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $f(x)$ és $g(x)$ polinomfüggvényekre teljesül, hogy ha $g(c) \neq 0$, akkor

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}.$$

6. Folytonos függvények kompozíciója. Az F.1. ábra annak a tételnek a bizonyítását illusztrálja, amely szerint két folytonos függvény kompozíciója is folytonos függvény, pontosabban: ha az f függvény a c helyen, g pedig az $f(c)$ helyen folytonos, akkor $g \circ f$ folytonos a c helyen. Rekonstruáljuk a bizonyítást az ábra alapján.

Tegyük fel, hogy c az f függvény, $f(c)$ pedig a g függvény értelmezési tartományának belső pontja; ekkor valamennyi határértéket kétoldalinak tekinthetjük. (A jobb, illetve bal oldali határértékekre a bizonyítás hasonlóan megy.)



F.1. ÁBRA: Két folytonos függvény kompozíciója is folytonos.

F.3. A valós számok elmélete

Az analízis a valós számok elméletén alapul. A határértékekre, deriváltakra és integrálokra vonatkozó tételeink jelentős része a racionális számok halmazán értelmezett függvényekre nem is igaz. Ebben a függelékben a valós számok elméletének alapfogalmait mutatjuk be, de utalunk azokra az eredményekre is, amelyekkel bővebben csak a magasabb szintű tanulmányainkban ismerkedünk majd meg.

A valós számok tulajdonságait három csoportra osztjuk: **algebrai** és **rendezési** tulajdonságok, valamint a **teljesség**. Az algebrai tulajdonságok az összeadásra, szorzásra, kivonásra és osztásra vonatkoznak. Ezek a racionális számokra éppúgy érvényesek, mint a következő függelékben tárgyalandó komplex számokra.

Az összeadásra és a szorzásra vonatkozó tulajdonságok („axiómák"):

A1 $a+(b+c)=(a+b)+c$ tetszőleges a,b,c esetén.

A2 $a+b=b+a$, tetszőleges a,b esetén.

A3 Van egy 0-val jelölt szám, amelyre teljesül, hogy minden a-ra $a+0=a$.

A4 Minden $a\neq 0$-hoz van olyan b, amelyre $a+b=0$.

M1 $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ tetszőleges a,b,c esetén.

M2 $a\cdot b=b\cdot a$, tetszőleges a,b esetén.

M3 Van egy 1-gyel jelölt, amelyre teljesül, hogy minden a-ra $a\cdot 1=a$.

M4 Minden 0-tól különböző a-hoz van olyan b, amelyre $a\cdot b=1$.

D $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ tetszőleges a,b,c esetén.

A1 és M1 az összeadás és a szorzás **asszociativitását**, A2 és M2 a két művelet **kommutativitását**, D pedig a szorzásnak az összeadásra való **disztributivitását** mondja ki. Ha egy halmaz a rajta értelmezett $+$ és $\cdot$ műveletekkel rendelkezik a felsorolt tulajdonságokkal, akkor **testnek** nevezzük. A testek és más, hasonló struktúrák általános jellemzőivel az absztrakt algebra foglalkozik.

A **rendezési** tulajdonságok a $\leq$ reláció jellemzőit rögzítik.

O1 Tetszőleges a,b esetén vagy $a\leq b$, vagy $b\leq a$, vagy mindkettő.

O2 Ha $a\leq b$ és $b\leq a$, akkor $a=b$.

O3 Ha $a\leq b$ és $b\leq c$, akkor $a\leq c$.

O4 Ha $a\leq b$, akkor $a+c\leq b+c$.

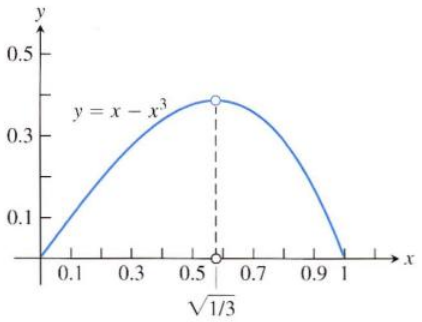
O5 Ha $a\leq b$ és $0\leq c$, akkor $ac\leq bc$.

O3 szerint a $\leq$ reláció **tranzitív**; O4 és O5 a rendezés és az összeadás, illetve a szorzás viszonyáról szól.

A valós, a racionális és az egész számokon értelmezhetjük az O1–O5 tulajdonságokkal rendelkező $\leq$ relációt, a komplex számok azonban nem rendezhetők ilyen módon. Nem tudjuk megállapítani például, hogy $\sqrt{-1}=i$ nagyobb vagy kisebb-e, mint 0. Az olyan testet, amelynek elemein adott egy, az O1–O5 tulajdonságoknak eleget tevő $\leq$ reláció, **rendezett testnek** nevezzük. Rendezett testre példa – többek között – a racionális és a valós számok teste.

Ha a valós számokra mint a számegyenes pontjaira gondolunk, a teljességi tulajdonság azt mondja ki, hogy a számegyenes minden pontjának megfeleltethető egy valós szám. A valós számegyenesen nincsenek „rések". A racionális számok halmaza nem ilyen: a számegyenes $\sqrt{2}$ vagy π pontjához nem található megfelelő racionális szám; az egész számok között pedig még az 1/2-nek sincs helye.

De mit értünk azon, hogy a valós számegyenesen nincsenek „rések"? A válaszhoz pontosítanunk kell a teljesség meghatározását. Az M számot egy valós számokból álló halmaz **felső korlátjának** nevezzük, ha M a szóban forgó halmaz egyetlen eleménél sem kisebb; a halmaz felső korlátai közül a legkisebbet a halmaz legkisebb felső korlátjának (vagy **szuprémumának**) nevezzük. Az $M=2$ szám például a negatív számok egy felső korlátja; mivel az 1 szám szintén felső korlát, a 2 nem a legkisebb. A negatív számok legkisebb felső korlátja a 0. Azt mondjuk, hogy egy rendezett test **teljes** (vagy **teljesen rendezett**), ha minden nemüres, felülről korlátos részhalmazának létezik legkisebb felső korlátja.



F.2. ÁBRA: Az $y = x - x^3$ függvény $[0,1]$ intervallumbeli maximumhelye az $x = \sqrt{1/3}$ pont.

A $\sqrt{2}$-nél kisebb racionális számok halmazának viszont nem létezik legkisebb felső korlátja, elvégre a halmaz tetszőleges felső korlátjához találhatunk egy nála valamivel kisebbet, amely mindazonáltal még mindig nagyobb, mint $\sqrt{2}$. A racionális számok rendezése tehát nem teljes. A valós számokkal más a helyzet: ebben a halmazban minden nemüres, felülről korlátos részhalmaznak van legkisebb felső korlátja.

Az analízis több tételének bizonyítása a valós számok teljességi tulajdonságán alapul. Ilyenek a zárt intervallumon értelmezett folytonos függvények szélsőértékével kapcsolatos tételek, amelyekről a 4.1. alfejezetben volt szó. Az $y = x - x^3$ függvénynek például van maximuma a $[0,1]$ intervallumon, méghozzá az $1 - 3x^2 = 0$ egyenlet – ebbe az intervallumba eső – megoldása: $x = \sqrt{1/3}$ (l. az F.2. ábrát). Ha csupán a racionális számok körében vizsgálódnánk, arra a következtetésre kellene jutnunk, hogy a függvénynek nincs maximuma, elvégre $\sqrt{1/3}$ irracionális szám. A zárt intervallumon értelmezett folytonos függvényekre vonatkozó szélsőértéktétel a racionális számok halmazán értelmezett függvényekre nem igaz.

Hasonló a helyzet azzal a Bolzano-tétellel is, amely szerint tetszőleges, az $[a,b]$ zárt intervallumon értelmezett folytonos f függvény esetén, amennyiben $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor van olyan $x \in [a,b]$, amelynél $f(x) = 0$. A racionális számokon értelmezett folytonos függvényekre ez a tétel sem igaz: az $f(x) = 3x^2 - 1$ függvény esetében például $f(0) = -1$ és $f(1) = 2$, a függvénynek mégsincs racionális zérushelye a $[0,1]$ intervallumban. (A függvény értéke csak az $x = \sqrt{1/3}$ helyen lenne nulla, ez azonban irracionális.)

Azonosítottuk tehát a valós számoknak a tételeink bizonyításához szükséges tulajdonságát, ez azonban még nem minden. A pitagoreusok annak idején egy másik tulajdonsággal próbálkoztak, jelesül azzal, hogy a számegyenes minden pontja két egész szám hányadosának feleltethető meg. A kísérlet kudarcot vallott, amikor kiderült, hogy – például – a $\sqrt{2}$ szám nem racionális. Honnan tudjuk, hogy a teljességi tulajdonsággal nem ez a helyzet? Talán a teljességi tulajdonság is olyan, mint az Escher képein látható, mindvégig fölfelé kanyargó, de a kezdőpontba visszatérő lépcső: a mérnök hamar rájön, hogy nincs olyan struktúra, amely megfelelne a „szemléletes" képnek. Mi biztosítja, hogy a valós számok elméletében nincs valamiféle rejtett ellentmondás?

Ahhoz, hogy a kérdésre megnyugtató választ adhassunk, meg kell konstruálnunk a valós számokat, és igazolni, hogy modellünkben a teljesség mellett az algebrai és a rendezési tulajdonságok is teljesülnek. Az egyik lehetséges konstrukció az, amelyben a valós számokat

$$a, d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots$$

végtelen tizedes törtekkel reprezentáljuk, ahol a egész szám, a d_i-k pedig 0 és 9 közötti számjegyek. Az ilyen sorozatok között vannak, amelyekben bizonyos jegy után már csupa 0 áll, másokban egy adott szakasz ismétlődik végtelen sokszor, de olyanok is akadnak, amelyek mindenféle szabályszerűséget nélkülöznek. A $2{,}00$, a $0{,}333\ldots$ és a $3{,}1415926535898\ldots$ szimbólumok például jól ismert valós számokat reprezentálnak. A bennük szereplő ... mibenlétének precíz meghatározásához a végtelen sorozatok és sorok elméletére van szükségünk. A témával részletesen a 11. fejezetben foglalkozunk; ehelyütt annyit szögezünk le, hogy az $a, d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots$ végtelen tizedes tört „valójában" az

$$a + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \ldots$$

végtelen sor.

A végtelen tizedes törtek elméletében persze nem minden ilyen egyszerű. Igaz ugyan, hogy a rendezési és a teljességi tulajdonságok fennállása könnyen igazolható, a műveletekre vonatkozó azonosságok ellenőrzése azonban meglehetősen nehézkes. Gondoljuk meg: két végtelen sor összeadása vagy szorzása már önmagában végtelen sok művelet elvégzését követeli meg, az osztás értelmezésekor pedig különösen körültekintően kell eljárnunk.

Az első precíz valósszám-konstrukciót (1872-ben) megadó Richard Dedekind (1831–1916) másfajta utat követett. Világos, hogy tetszőleges x valós szám

két részre osztja a racionális számokat: az x-nél nem nagyobbak, és az x-nél nagyobbak halmazára. Ezt a megfigyelést zseniálisan megfordítva Dedekind a következő javaslattal állt elő: tekintsük a racionális számok efféle „felszeleteléseit" a valós számoknak. Ez elsőre különösnek tűnhet, a matematikában mindazonáltal gyakoriak az efféle konstrukciók.

Több más megközelítés is létezik, és valamennyi rendelkezik a megkövetelt tulajdonságokkal. Ezután már csupán egyetlen probléma merül fel: ellenőrizni kell, hogy a különböző konstrukciók „lényegében" ugyanazok. Ha ugyanis nem így van, akkor választanunk kellene közülük. Szerencsére nem ez a helyzet: belátható, hogy „lényegében" egyetlen valósszám-struktúra létezik.

A valós számok és a határértékek természetével kapcsolatos zűrzavar az analízis történetének kezdetén meglehetősen sok vitát kavart. Newton, Leibniz és követőik a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

differenciahányados határértéke helyett két „végtelen kicsi" mennyiség hányadosáról beszéltek. Az ilyen – „infinitezimálisnak" nevezett – számokra úgy tekintettek, mint amelyek bármely „normális" számnál kisebbek ugyan, 0-nál azonban mégis nagyobbak. Hasonlóan: az integrálokat

$$f(x) \cdot dx$$

alakú infinitezimális mennyiségek végtelen összegének tekintették. Magát a $\Delta y/\Delta x$ differenciahányadost lényegében úgy értelmezték, ahogy mi, a megfelelő deriváltat azonban nem határértékekként, hanem infinitezimálisok hányadosaként adták meg. A „végtelen kicsi" mennyiségekkel való számolás azonban logikai buktatókat rejt. Ezeket a modern analízis úgy kerüli el, hogy a deriváltat a differenciahányadosok *határértékeként definiálja*, az infinitezimálisokra így nincs is szüksége.

F.4. Komplex számok

A komplex számok $a + ib$ alakú kifejezések, amelyekben a és b valós számok, az i szimbólum pedig $\sqrt{-1}$-et jelöli. A 'valós' és 'képzetes' szavakhoz fűződő képzettársítások okolhatók azért, hogy $\sqrt{-1}$ némileg hátrányosabb megítélés alá esik, mint – mondjuk – $\sqrt{2}$. Már a valós számok elméletének felépítéséhez is komoly képzelőerőre volt szükség; ebben a fejezetben ennek az útnak a fontosabb állomásait is áttekintjük. A valós számok után következő lépés a komplex számok bevezetése.

Valós számok lépésről lépésre

A számfogalom kialakulásának első lépése az $1, 2, 3, \ldots$ **természetes számok** (pozitív egész számok) használata. Bizonyos aritmetikai műveletek ebben a számkörben is elvégezhetők úgy, hogy az eredményük is természetes szám. A pozitív egész számok köréből sem az összeadás, sem a szorzás nem vezet ki: ha tehát m és n pozitív egész számok, akkor

$$m + n = p \quad \text{és} \quad m \cdot n = q \tag{1}$$

szintén pozitív egészek. Alkalmanként ennél több is igaz: bizonyos m és p számokhoz találhatunk olyan n számot, amelyre $m + n = p$. A $3 + n = 7$ egyenlet például a természetes számok körében is megoldható. A $7 + n = 3$ egyenlettel azonban nem ez a helyzet, a megoldáshoz bővítenünk kell a számkört.

Ha a nulla és a negatív számok is rendelkezésünkre állnak, akkor a $7 + n = 3$ egyenlet is megoldható. A

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

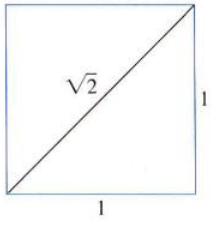
egész számokat használó kultúrákban minden művelt ember meg tudja oldani az $m+n=p$ alakú egyenleteket, akármelyik betűt tekintjük is ismeretlennek.

De hiába ismeri emberünk az egész számok körében az összeadás és a szorzás műveletét, hamar felismeri, hogy az $m \cdot n = p$ alakú egyenleteket néha meg tudja oldani, néha pedig nem. A számok körét az m/n alakú törtekkel kibővítve ezen a nehézségen felül tud kerekedni. A 0 tulajdonságai persze okozhatnak kisebb problémákat, de végül is elegendő, ha csak olyan törtekkel foglalkozik, amelyeknek a nevezője nem nulla. Az így kapott számok – a **racionális számok** – körében már mind a négy alapművelet elvégezhető:

1. (a) összeadás,
(b) kivonás,

2. (a) szorzás,
(b) osztás.

Egyetlen kivétel: *nullával nem lehet osztani,* a nullával való osztás értelmetlen.



F.3. ÁBRA: Körzővel és vonalzóval könnyen szerkeszthetünk irracionális hosszú szakaszt.

Egységnyi oldalú négyzet könnyen szerkeszthető, a négyzet átlójának hossza Pitagorasz tétele szerint $\sqrt{2}$. Eszerint tehát az

$$x^2 = 2$$

egyenlet szerkesztéssel (F.3. ábra) „megoldható" ugyan, a racionális számok körében azonban nem.

Nincs olyan racionális szám, amelynek négyzete 2. Ha ugyanis lenne ilyen racionális szám, akkor léteznének olyan p és q relatív prím egész számok, amelyekre teljesül

$$p^2 = 2q^2. \tag{3}$$

Mivel p és q egész számok, p-nek párosnak kell lennie (ha p páratlan, akkor a négyzete is az, így nem lehet egyenlő a $2q^2$ páros számmal). Eszerint tehát van olyan p_1, hogy $p = 2p_1$. Ezt a (3) egyenletbe behelyettesítve és 2-vel egyszerűsítve a $2p_1^2 = q^2$ egyenletet kapjuk, ami csak úgy állhat fenn, ha q páros. Ez azonban azt jelenti, hogy p és q egyaránt osztható 2-vel, így nem lehetnek relatív prímek. Az ellentmondás azt mutatja, hogy $\sqrt{2}$ nem írható fel két egész szám hányadosaként.

Az $x^2 = 2$ egyenletet ugyan nem tudjuk megoldani a valós számok körében, képezhetünk azonban olyan racionális számokból álló sorozatot, amelyre teljesül, hogy a tagok négyzeteiből alkotott sorozat határértéke 2. Ilyen például az

$$\frac{1}{1}, \frac{7}{5}, \frac{41}{29}, \frac{239}{169}, \ldots \tag{4}$$

sorozat. A tagok négyzetei:

$$\frac{1}{1}, \frac{49}{25}, \frac{1681}{841}, \frac{57\,121}{28\,561}, \ldots \tag{5}$$

Innen már csupán egyetlen – bár évszázadokig tartó – lépés arra rájönni, hogy a racionális számkör megfelelő bővítéséhez a határérték fogalmára van szükség. Ha elfogadjuk azt a tényt, hogy minden – a (4)-hez hasonlóan – felülről korlátos, monoton növekvő sorozat konvergens (erről részletesen a 11. fejezetben lesz szó), akkor arra kell következtetnünk, hogy van olyan L szám, amely a (4) sorozat határértéke. Mivel azonban a sorozat tagjainak négyzeteiből álló sorozat (5) szerint 2-höz tart, arra jutunk, hogy a (4) sorozat határértéke nem racionális szám. Ha a racionális számok körét kibővítjük a racionális számokból álló, felülről korlátos, monoton növekvő sorozatok határértékeivel, akkor megkapjuk a „valós" számokat: a jelzőt azért tettük idézőjelbe, mert ezek az objektumok semmivel sem inkább és semmivel sem kevésbé „reálisak", mint bármely más matematikai rendszer elemei.

A komplex számok

A valós számrendszer felépítése során a képzelet háromszor is nagy szerepet kapott; a természetes számok bevezetett rendszerének bővítéséhez háromszor is „fel kellett találni" egy-egy struktúrát.

1. Az egész számok halmazát a természetes számokból;

2. a racionális számok halmazát az egész számokból;

3. a valós számok halmazát pedig a racionális számokból konstruáltuk meg.

A számstruktúrák hierarchiába rendeződnek, a hierarchia magasabb szintjei bizonyos értelemben „magukba foglalják" az alacsonyabb szinteket. Mindegyik rendszer bővebb az előzőnél abban az értelemben, hogy általánosan elvégezhető benne olyan művelet, amely „korábban" csupán megszorításokkal volt értelmezhető.

1. Az egész számok halmazán minden

$$x + a = 0 \tag{6}$$

alakú egyenlet megoldható, ahol a tetszőleges egész szám lehet.

2. A racionális számok halmazán minden

$$ax + b = 0 \tag{7}$$

alakú egyenlet megoldható, ahol a és b tetszőleges racionális számok lehetnek; az egyetlen kikötés, hogy $a \neq 0$.

3. A valós számok halmazán a (6) és (7) alakú egyenleteken kívül az

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{8}$$

alakú másodfokú egyenletek is megoldhatók; itt $a \neq 0$, és feltesszük, hogy $b^2 - 4ac \geq 0$.

Feltehetően az Olvasó is jól ismeri a (8) alakú egyenletek megoldásait megadó

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{9}$$

képletet. Valószínűleg azzal is tisztában van, hogy ha a $b^2 - 4ac$ diszkrimináns negatív, úgy a (9) képlet nem ad *valós* megoldásokat. Az igen egyszerű

$$x^2 + 1 = 0$$

egyenlet megoldásainak nincs helyük a felsorolt három „teremtett" számrendszer egyikében sem.

Szükség van tehát egy *negyedik* számkörre is: ennek elemei az $a + bi$ alakú **komplex számok**. Az i szimbólumra valójában nincs szükségünk, használata kiküszöbölhető, amennyiben a komplex számokat valós számokból alkotott rendezett pároknak tekintjük. Az ilyen számpárok halmazán értelmezünk egy egyenlőségrelációt, összeadást és szorzást a következők szerint. Az $a + bi$ és az (a, b) jelölést egyaránt használni fogjuk, a jelöli az (a, b) komplex szám **valós**, b pedig a **képzetes részét**.

Definícióink a következők:

EGYENLŐSÉG:	$a + ib = c + id$ pontosan akkor, ha $a = c$ és $b = d$.	Az (a, b) és a (c, d) komplex szám egyenlő, ha $a = c$ és $b = d$.
ÖSSZEADÁS:	$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$.	Az (a, b) és (c, d) komplex számok összege az $(a + c, b + d)$ komplex szám.
SZORZÁS:	$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$.	Az (a, b) és (c, d) komplex számok szorzata az $(ac - bd, ad + bc)$ komplex szám.
	$c(a + ib) = ac + i(bc)$.	Az (a, b) komplex számnak a c valós számmal vett szorzata az (ac, bc) komplex szám.

Azok az (a,b) komplex számok, amelyekben $b=0$, minden olyan tulajdonsággal rendelkeznek, amellyel a valós számok is. Az ilyen alakú számok összegét és szorzatát például a következőképpen adhatjuk meg:

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0),$$
$$(a,0)\cdot(b,0)=(ac,0).$$

A műveletek eredménye tehát újfent olyan szám, amelynek a képzetes része 0. A (c,d) komplex számot az $(a,0)$ „valós számmal" megszorozva azt kapjuk, hogy:

$$(a,0)\cdot(c,d)=(ac,ad)=a\cdot(c,d).$$

A $(0,0)$ szám a komplex számok körében ugyanazt a szerepet játssza, mint a 0 *zéruselem* a valós számok között, az $(1,0)$ komplex szám pedig éppen azt tudja, amit az 1 *egység* tud a valós számkörben.

A $(0,1)$ komplex szám figyelemre méltó tulajdonsága, hogy négyzetre emelve olyan komplex számot kapunk, amelynek képzetes része 0, valós része pedig -1:

$$(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0).$$

A komplex számok körében tehát van olyan szám ($x=(0,1)$), amelynek négyzetéhez az egységet adva a zéruselemet kapjuk:

$$(0,1)^2+(1,0)=(0,0),$$

az új számkörben tehát az

$$x^2+1=0$$

egyenlet is megoldható.

Az Olvasó feltehetően az $a+ib$ jelölést jobban megszokta, mint a rendezett párokra hivatkozó szimbolizmust. A műveletek algebrai tulajdonságai alapján azonban

$$(a,b)=(a,0)+(b,0)=a(1,0)+b(0,1)$$

mindig teljesül, az $(1,0)$ komplex szám az egység, a $(0,1)$ komplex szám pedig az egység ellentettjének négyzetgyöke, így $a+ib$ helyébe (a,b)-t is írhatunk, a komplex számok két különböző felírása között tehát mindig szabad az átjárás. A definícióink ráadásul semmiféle előjogokat nem biztosítanak az $(1,0)$ számnak a $(0,1)$ számmal szemben, így egyiket sem kell a másiknál „valóságosabbnak" vagy „kevésbé valóságosnak" tekintenünk. A komplex számokon végzett algebrai műveletek eredménye mindig egyetlen komplex számmal fejezhető ki, elvégre a számításokban megjelenő i^2 helyett mindenütt -1-et írhatunk. Egy régi tilalom továbbra is érvényben marad: a $(0,0)=0+i0$ komplex számmal nem lehet osztani. Ha azonban $a+ib\neq 0$, akkor az osztás már elvégezhető:

$$\frac{c+id}{a+ib}=\frac{(c+id)(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{(ac+bd)+i(ad-bc)}{a^2+b^2}.$$

A hányados tehát egy $x+iy$ komplex szám, amelyben:

$$x=\frac{ac+bd}{a^2+b^2},\quad y=\frac{ad-bc}{a^2+b^2},$$

és itt $a^2+b^2\neq 0$, elvégre $a+ib=(a,b)\neq(0,0)$.

Az $a-ib$ számot – amely az osztás során segítségünkre volt a nevező „i-telenítésében" – az $a+ib$ komplex szám (**komplex**) **konjugáltjának** nevezzük. A z komplex szám konjugáltját általában $\bar{z}$ jelöli, eszerint tehát ha $z=a+ib$, akkor $\bar{z}=a-ib$.

Amikor tehát a $(c+id)/(a+ib)$ tört számlálóját és nevezőjét is megszorozzuk a nevező komplex konjugáltjával, akkor a nevező képzetes része nullává válik.

1. PÉLDA **Műveletek komplex számokkal.**

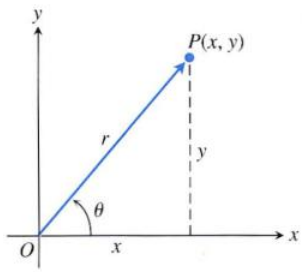
(a) $(2+3i)+(6-2i)=(2+6)+(3-2)i=8+i$

(b) $(2+3i)-(6-2i)=(2-6)+(3-(-2))i=-4+5i$

(c) $(2+3i)(6-2i)=2\cdot 6+2\cdot(-2i)+3i\cdot 6+3i\cdot(-2i)=$
$=12-4i+18i-6i^2=12+14i+6=18+14i$

(d) $\dfrac{2+3i}{6-2i}=\dfrac{2+3i}{6-2i}\cdot\dfrac{6+2i}{6+2i}=$
$=\dfrac{12+4i+18i+6i^2}{36+12i-12i-4i^2}=\dfrac{6+22i}{40}=\dfrac{3}{20}+\dfrac{11}{20}i$ □

Argand-diagramok



F.4. ÁBRA: A $z=x+iy$ komplex szám Argand-diagramja z-nek a $P(x,y)$ pontot vagy az $\overrightarrow{OP}$ vektort feleltheti meg.

A $z=x+iy$ komplex számnak két geometriai reprezentációja is van:

1. az xy-sík $P(x,y)$ pontja, valamint
2. az origóból a P pontba mutató $\overrightarrow{OP}$ vektor.

Az x-tengelyt mindkét esetben **valós**, az y-tengelyt pedig **képzetes tengelynek** nevezzük. A komplex számok geometriai reprezentációit gyakran **Argand-diagram** néven emlegetjük (F.4. ábra).

Az x-et és az y-t az ábrán megadott θ szöggel és az r szakasszal (tehát polárkoordinátákkal) is kifejezhetjük:

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

így tehát

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta). \tag{10}$$

Az r számot az $x+iy$ komplex szám **abszolút értékének** nevezzük; r tehát az origóból a $P(x,y)$ pontba mutató $\overrightarrow{OP}$ vektor hossza. Az abszolút értéket a komplex számok körében is a megszokott függőleges vonalakkal jelöljük; világos, hogy

$$r=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

A z szám „polárkoordinátás" megadásában szereplő θ szöget z **argumentumának** nevezzük, jelölése $\theta=\arg z$. Az argumentum nyilván nem adható meg egyértelműen: ha θ megfelel, akkor megfelel $\theta+k\cdot 2\pi$ is, tetszőleges k egész szám esetén.

A z komplex szám konjugáltja és abszolútértéke között fennáll a következő, gyakran használt összefüggés:

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2.$$

Az Euler-formula

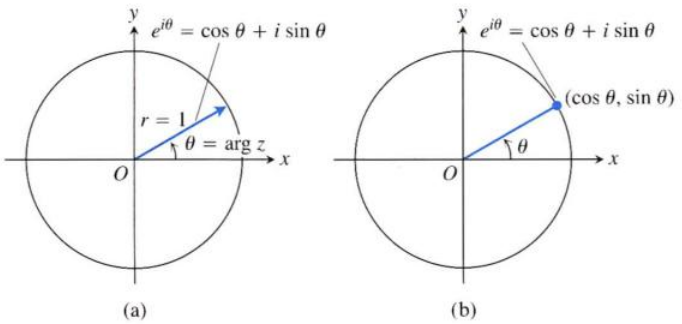
Euler-formulának nevezzük az

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

azonosságot, amelynek alapján a (10) egyenletet

$$z=re^{i\theta}$$

alakba írhatjuk. Az utolsó összefüggésnek a komplex számok szorzatának, hányadosának, hatványainak és gyökeinek kiszámításakor vesszük hasznát. A (10) egyenlet alapján az $e^{i\theta}$ szám Argand-diagramja az x-tengely pozitív irányával θ szöget bezáró egységvektor, amint az F.5. ábrán is látható.



F.5. ÁBRA: Az $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ komplex szám Argand-diagramjai: a számot az ábra (a) részén egy vektor, az ábra (b) részén egy pont reprezentálja.

Szorzás

Két komplex szám szorzásakor az abszolútértékeket összeszorozzuk, az argumentumokat pedig összeadjuk: ha tehát a

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \tag{11}$$

számokra

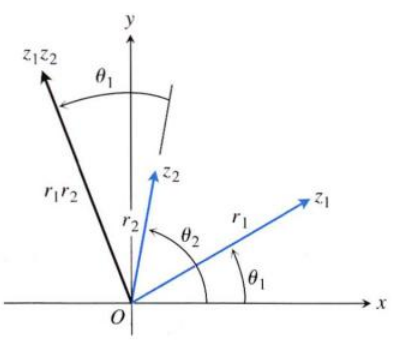
$$|z_1| = r_1, \ \arg z_1 = \theta_1, \ |z_2| = r_2, \ \arg z_1 = \theta_2,$$

akkor

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

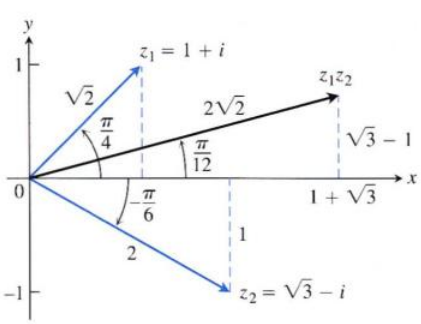
Vagyis valóban:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|, \\ \arg(z_1 z_2) &= \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2. \end{aligned} \tag{12}$$



F.6. ÁBRA: Ha az z_1 és z_2 komplex számok szorzata olyan szám, amelyre: $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ és $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

Két komplex szám szorzata tehát olyan vektorral reprezentálható, amelynek hossza a számokat reprezentáló vektorok hosszának szorzata, irányszöge pedig a vektorok irányszögeinek összege (l. az F.6. ábrát). A (12) egyenlet szerint az $e^{i\theta}$ számmal való szorzás geometriai szempontból egy origó középpontú, θ szögű, az óramutató járásával ellentétes irányú elforgatásnak felel meg: i-vel szorozva minden vektor 90°-kal, -1-gyel szorozva 180°-kal, $-i$-vel szorozva 270°-kal fordul el stb.



F.7. ÁBRA: Két komplex számot szorzásakor az abszolútértékeket összeszorozzuk, az argumentumokat pedig összeadjuk.

2. PÉLDA **Két komplex szám szorzatának meghatározása.**

Legyen $z_1 = 1 + i$ és $z_2 = \sqrt{3} - i$. A két szám Argand-diagramjáról (F.7. ábra) kiolvasható, hogy

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}, \quad z_2 = 2e^{-i\pi/6}.$$

Ekkor:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{i\pi}{4} - \frac{i\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{i\pi}{12}\right) = \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \approx 2{,}73 + 0{,}73i. \end{aligned}$$

Itt $\exp A$ természetesen e^A-t jelöli. □

Osztás

Ha (11)-ben $r_2 \neq 0$, akkor

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Eszerint tehát

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{és} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Komplex számok osztásakor tehát az abszolútértékeket osztjuk, az argumentumokat pedig kivonjuk.

3. PÉLDA

Legyen megint $z_1 = 1 + i$ és $z_2 = \sqrt{3} - i$ (mint a 2. példában). Ekkor:

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi i/12} \approx 0,707\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) \approx$$
$$\approx 0,183 + 0,683i. \qquad \square$$

Hatványozás

Tetszőleges n pozitív egész szám esetén a

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ darab tényező}}$$

szorzat kiszámítására a (12) formulát használjuk. Ha $z = re^{i\theta}$, akkor

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{i(\overbrace{\theta+\theta+\ldots+\theta}^{n \text{ darab tag}})} = r^n e^{in\theta}, \tag{13}$$

hatványozáskor tehát az abszolútértéket hatványozzuk, az argumentumot pedig szorozzuk.

A (13) egyenletben r helyébe 1-et írva De Moivre tételét kapjuk:

De Moivre tétele

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{14}$$

Ha a tétel bal oldalán álló hatványt a binomiális tétel szerint kiszámítjuk, akkor az egyenlőség két oldalának valós és képzetes részét egyenlővé téve $\sin n\theta$-t és $\cos n\theta$-t egyaránt felírhatjuk $\sin\theta$ és $\cos\theta$ polinomkifejezéseként.

4. PÉLDA

Ha a (14) egyenletben $n = 3$, akkor

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

Az egyenlet bal oldalán a hatványozást elvégezve a

$$\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$

kifejezést kapjuk, amelynek valós része $\cos 3\theta$-val, képzetes része pedig $\sin 3\theta$-val egyenlő:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$
$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta. \qquad \square$$

Gyökvonás

Tetszőleges $z = r^{i\theta} \neq 0$ komplex és n pozitív egész szám esetén pontosan n darab $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ olyan komplex szám létezik, amelyek n-edik hatványa éppen z. Valóban, ha $w = \rho e^{i\alpha}$ a $z = re^{i\theta}$ komplex szám n-edik gyöke, akkor

$$w^n = z,$$

másképpen:

$$\rho^n e^{in\alpha} = re^{i\theta}.$$

Eszerint

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

az r szám közönséges (pozitív) n-edik gyöke. Az argumentumokról mindössze annyit állíthatunk, hogy különbségük a 2π egész számú többszöröse:

$$n\alpha = \theta + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Ebből:

$$\alpha = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n},$$

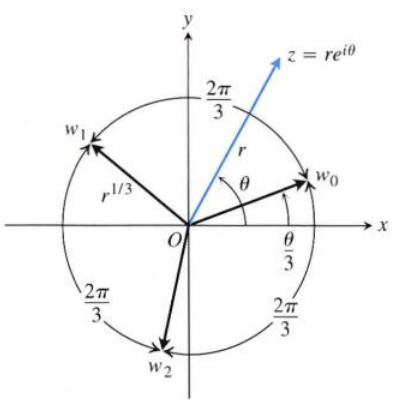
az $z = re^{i\theta}$ komplex szám n-edik gyökei tehát:

$$\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\exp i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \tag{15}$$

Az a benyomásunk támadhat, hogy – mivel k lehetséges értékeinek száma végtelen – végtelen sok n-edik gyök létezik. A (15) egyenletben azonban tetszőleges k esetén a k és a $k+n$ egész számoknak ugyanaz a megoldás felel meg, így k helyébe n darab egymás után következő egész számot írva az összes különböző megoldást megkapjuk. A legcélszerűbb általában a következő választás:

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Az $re^{i\theta}$ komplex szám n-edik gyökei tehát mind egy origó középpontú körvonalon helyezkednek el, a kör sugara $\sqrt[n]{r}$, az r szám n-edik (pozitív) valós gyöke. Az egyik n-edik gyök argumentuma $\alpha = \theta/n$; a gyökök egyenletesen oszlanak el e körvonalon, a szomszédosak egy-egy $2\pi/n$ nagyságú középponti szöget határoznak meg. Az F.8. ábrán a $z = re^{i\theta}$ komplex szám, valamint z három darab harmadik gyökének Argand-diagramja látható.



F.8. ÁBRA: A $z = re^{i\theta}$ komplex szám három harmadik gyöke.

5. PÉLDA **Negyedik gyökök.**

Adjuk meg a -16 négy negyedik gyökét.

Megoldás. Az F.9. ábra a -16 Argand-diagramját mutatja. A -16 „poláris felbontásában" $r = 16$ és $\theta = \pi$. A $16e^{i\pi}$ szám egyik negyedik gyöke $2e^{i\pi/4}$. A többit úgy kapjuk meg, hogy az első argumentumához egyszer, kétszer, illetve háromszor $2\pi/4 = \pi/2$-t adunk. Végeredményben azt kapjuk, hogy

$$\sqrt[4]{16\exp i\pi} = 2\exp i\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right),$$

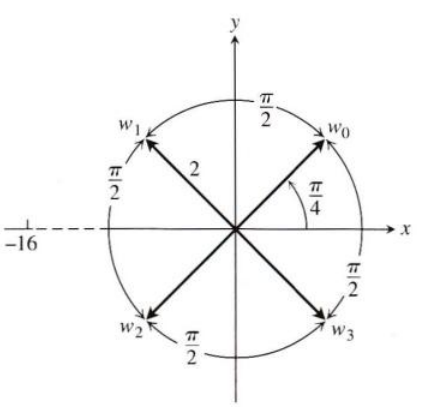
azaz

$$w_0 = 2\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(1+i),$$

$$w_1 = 2\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(-1+i),$$

$$w_2 = 2\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(-1-i),$$

$$w_3 = 2\left[\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(1-i).$$



F.9. ÁBRA: A -16 négy negyedik gyöke.

Az algebra alaptétele

Mit mondhatnánk annak, aki így érvel: szép és jó, most már tudjuk, hogy van $\sqrt{-1}$ is – de hol ér véget a számkör bővítésének folyamata? Vajon új szimbólumot kell majd bevezetnünk a $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[6]{-1}$ stb. számokra is? A válasz: nem. Mindkét szám kifejezhető $a+bi$ alakú komplex számokkal. Mi több, az *algebra alaptétele* szerint a komplex számok körében minden polinom-egyenlet megoldható, és minden polinom lineáris faktorok szorzatára bontható.

5. TÉTEL Az algebra alaptétele.

A komplex számok körében minden n-ed fokú ($n \geq 1$),

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

alakú egyenletnek (amelynek $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ együtthatói komplex számok és $a_n \neq 0$) pontosan n darab gyöke van, amennyiben az m-szeres gyököket m-szer számoljuk.

A tétel bizonyítását bármely, komplex analízissel foglalkozó tankönyvben megtalálhatjuk.

F.3. Feladatok

Műveletek komplex számokkal

1. Szorzás. Határozzuk meg az $(a,b)\cdot(c,d) = (ac - -bd, ad+bc)$ számot.

(a) $(2,3)\cdot(4,-2)$

(b) $(2,-1)\cdot(-2,3)$

(c) $(-1,-2)\cdot(2,1)$

[A számítógépek így szoroznak össze komplex számokat.]

2. Oldjuk meg az egyenleteket (x és y valós számok).

(a) $(3+4i)^2 - 2(x-iy) = x+iy$

(b) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2 + \dfrac{1}{(x+iy}} = 1+i$

(c) $(3-2i)(x+iy) = 2(x-2i)+2i-1$

A komplex számok geometriai ábrázolása

3. Hogyan kaphatjuk meg geometriailag a $z = x+iy$ számból a következő számokat? Illusztráljuk válaszunkat egy ábrával.

(a) $\bar{z}$ **(b)** $\overline{(-z)}$ **(c)** $-z$ **(d)** $1/z$

4. Igazoljuk, hogy a komplex számsíkon a z_1 és z_2 pontok távolsága $|z_1 - z_2|$.

Az 5–10. feladatokban ábrázoljuk a megadott feltételnek megfelelő $z = x+iy$ pontokat.

5. **(a)** $|z| = 2$; **(b)** $|z| < 2$; **(c)** $|z| > 2$

6. $|z-1| = 2$ **7.** $|z+1| = 1$

8. $|z+1| = |z-1|$ **9.** $|z+i| = |z-1|$

10. $|z+1| \geq |z|$

A 11–14. feladatokban írjuk fel a megadott komplex számokat $re^{i\theta}$ alakban, ahol $r \geq 0$ és $-\pi < \theta \leq \pi$. Rajzoljunk Argand-diagramot is.

11. $(1+\sqrt{-3})^2$ **12.** $\dfrac{1+i}{1-i}$

13. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ **14.** $(2+3i)((1-2i)$

Hatványok és gyökök

De Moivre tétele alapján írjuk fel a megadott trigonometrikus kifejezést $\sin\theta$ és $\cos\theta$ segítségével.

15. $\cos 4\theta$ **16.** $\sin 4\theta$

17. Határozzuk meg 1 köbgyökeit (három van).

18. Határozzuk meg i négyzetgyökeit (kettő van).

19. Határozzuk meg $-8i$ három köbgyökét.

20. Írjuk fel 64 mind a hat hatodik gyökét.

21. Oldjuk meg a $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$ egyenletet (4 megoldása van).

22. Oldjuk meg a $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$ egyenletet (6 megoldása van).

23. Oldjuk meg az $x^4 + 4x^2 + 16 = 0$ egyenletet.

24. Oldjuk meg az $x^4 + 1 = 0$ egyenletet.

További példák és feladatok

25. Komplex számok és síkbeli vektorok. Mutassuk meg, hogy a komplex számsíkon két szám a paralelogrammaszabállyal analóg módon adható össze.

26. Konjugáltak és algebrai műveletek. Igazoljuk, hogy a z_1 és z_2 komplex számok konjugáltjainak összege, szorzata, illetve hányadosa rendre az összegük, szorzatuk, illetve hányadosuk konjugáltjával egyenlő.

27. Konjugáltak és polinomok.

(a) Az előző feladatot általánosítva igazoljuk, hogy tetszőleges valós $a_0, \ldots, a_n$ együtthatójú

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

polinomfüggvény és z komplex szám esetén $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

(b) Igazoljuk, hogy az (a) részben szereplő polinomfüggvényre $f(z) = 0$ valamely z komplex szám esetén, akkor fennáll $f(\bar{z}) = 0$ is. [*Útmutatás:* Legyen $f(z) = u + iv = 0$, ekkor u-nak és v-nek egyaránt nullának kell lennie. Ezután használjuk ki, hogy $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} = u - iv$.]

28. Konjugálás és abszolútérték. Igazoljuk, hogy tetszőleges z komplex szám esetén $|z| = |\bar{z}|$.

29. Hol helyezkedik el a z szám a komplex számsíkon, ha $z = \bar{z}$?

30. Valós és képzetes rész. Jelölje $\mathrm{Re}\, z$, illetve $\mathrm{Im}\, z$ a z komplex szám valós, illetve képzetes részét. Igazoljuk, hogy az alábbi összefüggések tetszőleges z, z_1 és z_2 komplex számok esetén fennállnak.

(a) $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}\, z$ **(b)** $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z$

(a) $|\mathrm{Re}\, z| \le |z|$

(b) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z_1\bar{z}_2)$

(c) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

F.5. Algebrai, geometriai és trigonometriai összefüggések

Algebra

Alapműveletek:

$$a(b+c) = ab + ac, \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \qquad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Előjelszabály:

$$-(-a) = a, \qquad \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Nulla:

A nullával való osztást nem értelmezzük.

$$\text{Ha } a \neq 0, \text{ akkor } \frac{0}{a} = 0,\ a^0 = 1,\ 0^a = 0.$$

Tetszőleges a szám esetén: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

Hatványozás:

$$a^m a^n = a^{m+n},\ (ab)^m = a^m b^m,\ (a^m)^n = a^{mn},\ a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Amennyiben pedig $a \neq 0$, úgy

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ a^0 = 1,\ a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Binomiális tétel:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

Speciális esetek:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Azonos kitevőjű hatványok különbsége:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Speciális esetek:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$$

Teljes négyzetté alakítás:

Ha $a \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + a\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right) + c = \\ &= a \cdot \underbrace{\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right)}_{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = u^2} + \underbrace{\left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}_{v} = \\ &= au^2 + v. \end{aligned}$$

Másodfokú egyenlet megoldóképlete:

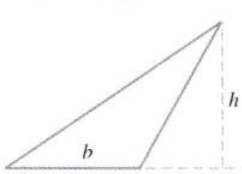
Ha $ax^2 + bx + c = 0$ (és $a \neq 0$), akkor

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Geometria

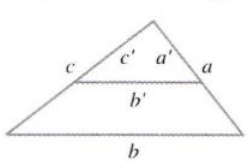
A területet A, a térfogatot V, az alap területét B, a kerületet C, a palást területét, illetve a felszínt S jelöli.

Háromszög:



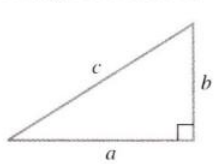
$$A = \frac{1}{2}bh$$

Hasonló háromszögek:



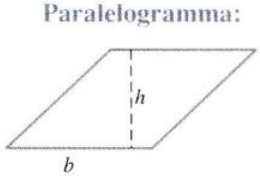
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

Pitagorasz tétele:



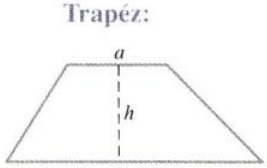
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Paralelogramma:



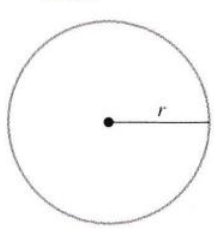
$$A = bh$$

Trapéz:



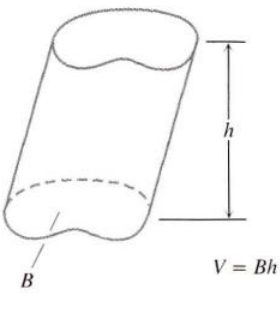
$$A = \frac{1}{2}(a+b)h$$

Kör:

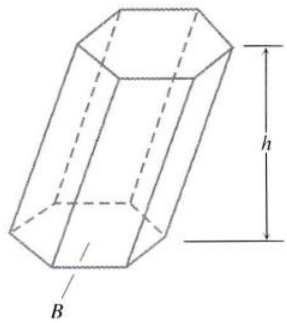


$$A = \pi r^2,$$
$$C = 2\pi r$$

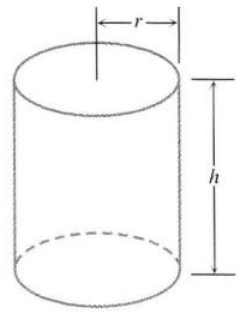
Ferde hasáb és henger:



$V = Bh$



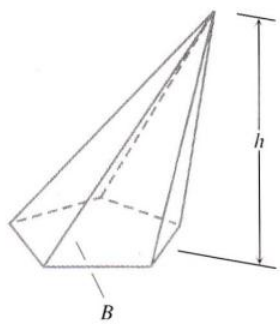
Egyenes körhenger:

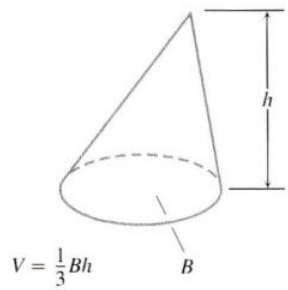


$V = \pi r^2 h$

$S = 2\pi rh$ = Area of side

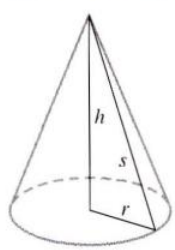
Ferde kúp és gúla:





$V = \frac{1}{3}Bh$

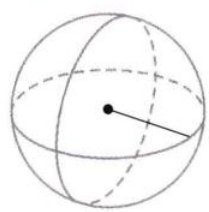
Egyenes körkúp:



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$S = \pi rs$ = a palást területe

Gömb:



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $S = 4\pi r^2$

Trigonometria

Definíciók és alapvető azonosságok:

szinusz: $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\csc\theta}$

koszinusz: $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sec\theta}$

tangens: $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\theta}$

Azonosságok:

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\sin^2\theta + \cos^{\theta} = 1$$

$$\sec^2\theta = 1 + \mathrm{tg}^2\theta$$

$$\csc^2\theta = 1 + \mathrm{ctg}^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

$$\mathrm{tg}\,(A+B) = \frac{\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B}{1 - \mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B}$$

$$\mathrm{tg}\,(A-B) = \frac{\mathrm{tg}A - \mathrm{tg}B}{1 + \mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B}$$

$$\sin\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos A$$

$$\cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \sin A$$

$$\sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \cos A$$

$$\cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin A$$

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}\cos(A-B) - \frac{1}{2}\cos(A+B)$$

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\cos(A-B) + \frac{1}{2}\cos(A+B)$$

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\sin(A-B) + \frac{1}{2}\sin(A+B)$$

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

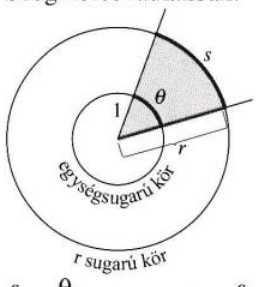
$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$

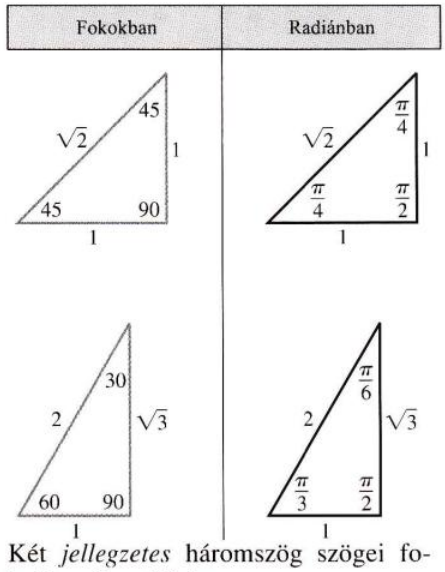
Trigonometrikus függvények:

Szögmérés radiánban:

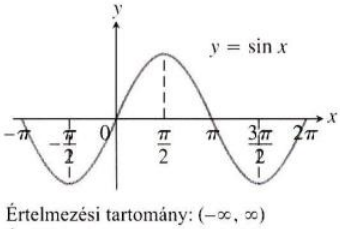


$\frac{s}{r} = \frac{\theta}{1} = \theta$ vagy $\theta = \frac{s}{r}$.

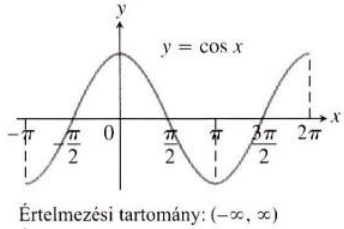
Átszámítás: $180° = \pi$ radián.



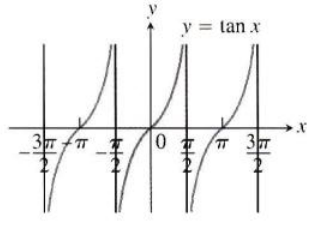
Két *jellegzetes* háromszög szögei fokokban és radiánban.



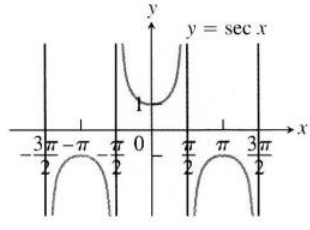
Értelmezési tartomány: $(-\infty, \infty)$
Értékkészlet: $[-1, 1]$



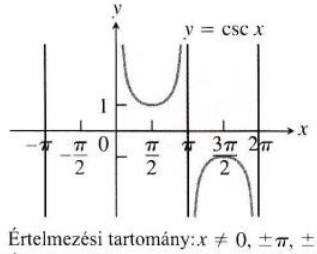
Értelmezési tartomány: $(-\infty, \infty)$
Értékkészlet: $[-1, 1]$



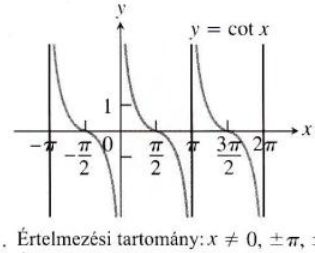
Értelmezési tartomány: Minden valós szám, kivéve $\pi/2$ páratlan számú többszörösei
Értékkészlet: $(-\infty, \infty)$



Értelmezési tartomány: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Értékkészlet: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Értelmezési tartomány: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Értékkészlet: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Értelmezési tartomány: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Értékkészlet: $(-\infty, \infty)$

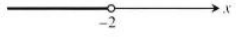
Megoldások

1. fejezet

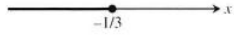
1.1. A valós számok és a valós számegyenes

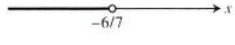
1. $0,\overline{1}$; $0,\overline{2}$; $0,\overline{3}$; $0,\overline{8}$; $0,\overline{9}$ vagy 1.

3. **(a)** nem feltétlenül igaz; **(b)** igaz; **(c)** igaz; **(d)** igaz; **(e)** igaz; **(f)** igaz; **(g)** igaz; **(h)** igaz.

5. $x < -2$ 

7. $x \leq \frac{5}{4}$ 

9. $x \leq -\frac{1}{3}$ 

11. $x < -\frac{6}{7}$ 

13. ± 3 **15.** $-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}$ **17.** $\frac{7}{6}, \frac{25}{6}$

19. $-2 < x < 2$ 

21. $-2 \leq t \leq 4$ 

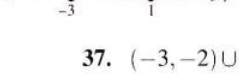
23. $1 < y < \frac{11}{3}$ 

25. $0 \leq z \leq 10$ 

27. $\frac{2}{7} < x < \frac{2}{5}$ vagy $\frac{10}{35} < x < \frac{14}{35}$ 

29. $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

31. $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

33. $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$ 

35. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ **37.** $(-3, -2) \cup (2, 3)$

39. $(-1, 3)$ **41.** $(0, 1)$

43. $a \geq 0$; tetszőleges negatív valós szám

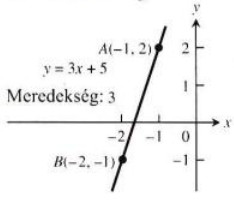
47. $-\frac{1}{2} < x \leq 3$

1.2. Egyenesek, körök és parabolák

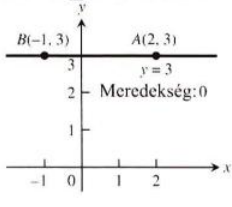
1. 2, -4; $2\sqrt{5}$ **3.** $-4,9$, 0; $4,9$ **5.** Egységkör.

7. Az origó középpontú, $\sqrt{3}$ sugarú kör(vonal) és a kör belseje.

9. $m_{\perp} = -\frac{1}{3}$



11. $m_{\perp}$ nem definiált



13. **(a)** $x = -1$, **(b)** $y = 4/3$ **15.** **(a)** $x = 0$, **(b)** $y = -\sqrt{2}$

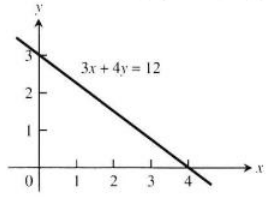
17. $y = -x$ **19.** $y = -\frac{x}{5} + \frac{23}{5}$

21. $y = -\frac{5}{4}x + 6$ **23.** $y = -9$

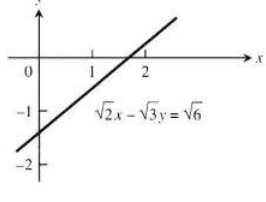
25. $y = 4x + 4$ **27.** $y = -\frac{2}{5}x + 1$

29. $y = -\frac{x}{2} + 12$

31. Az x-tengelyt a 4, az y-tengelyt a 3 helyen metszi.



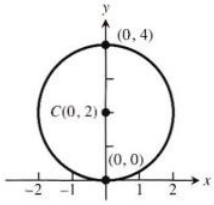
33. Az x-tengelyt a $\sqrt{3}$, az y-tengelyt a $-\sqrt{2}$ helyen metszi.



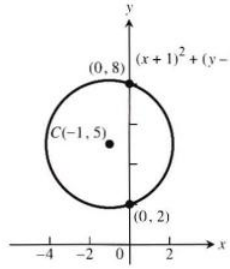
35. Igen. Az egyenesek merőlegesek, mivel meredekségük $(-A/B$, illetve $B/A)$ egymás reciprokának ellentettjei.

37. $(3, -3)$ **39.** $(-2, -9)$

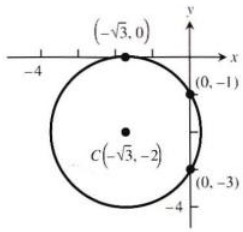
41. $x^2+(y-2)^2=4$



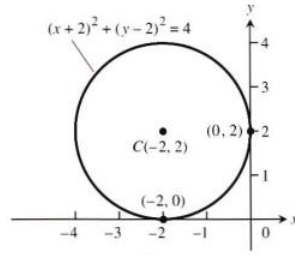
43. $(x+1)^2+(y-5)^2=10$



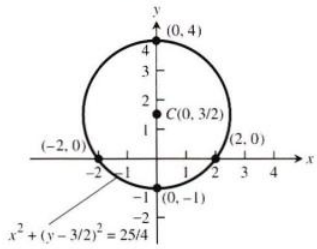
45. $(x+\sqrt{3})^2+(y+2)^2=4$



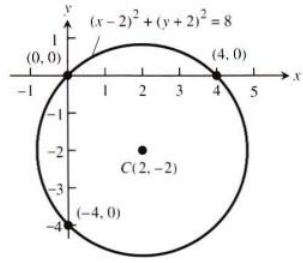
47. $(x+2)^2+(y-2)^2=4$



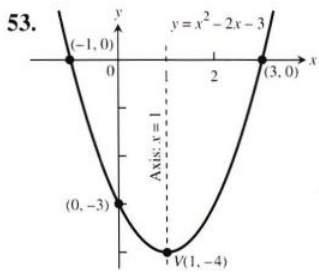
49. $x^2+(y-3/2)^2=25/4$



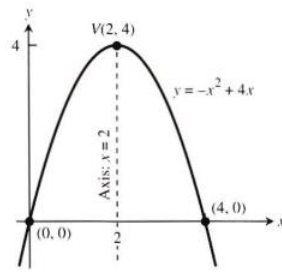
51. $(x-2)^2+(y+2)^2=8$



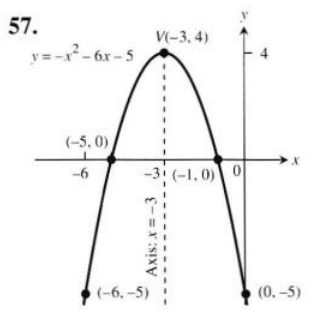
53.



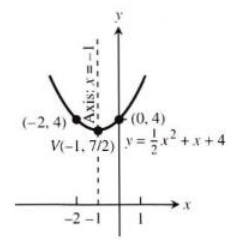
55.



57.



59.



61. A $\sqrt{7}$ sugarú, origó középpontú kör külső pontjai.

63. A 2 sugarú, $(1,0)$ középpontú kör(vonal) a belsejével együtt.

65. Az $x^2+y^2=1$ és az $x^2+y^2=4$ körök közötti gyűrű (az origótól 1-nél távolabb, de 2-nél közelebb eső pontok halmaza).

67. A $(0,-3)$ középpontú, 3 sugarú kör azon belső pontjai, amelyek az $y=-3$ egyenletű egyenes fölött helyezkednek el.

69. $(x+2)^2+(y-1)^2<6$

71. $x^2+y^2\le 2,\quad x\ge 1$

73. $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

75. $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right),\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

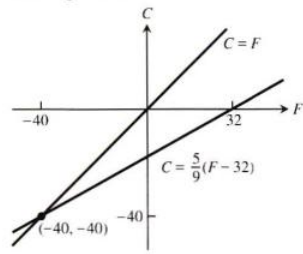
77. $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{3}\right)$

79. $\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

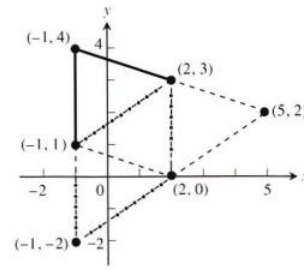
81. **(a)** $\approx -2,5$ fok/inch; **(b)** $\approx -16,1$ fok/inch; **(c)** $\approx -8,3$ fok/inch

83. 5,97 atm

85. Igen: $C=F=-40°$.



91.



93. $k=-8,\quad k=1/2$

1.3. Függvények és grafikonok

1. $D=(-\infty,\infty),\quad R=[1,\infty)$

3. $D=(0,\infty),\quad R=(0,\infty)$

5. $D=[-2,2],\quad R=[0,2]$

7. **(a)** Bizonyos x-értékekhez két y-érték tartozik, nem függvény.

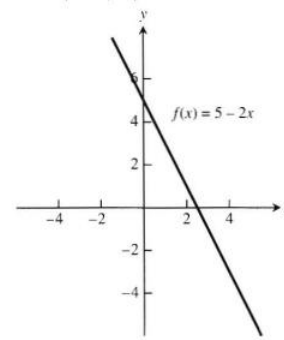
(b) Minden x-hez egyetlen y tartozik, függvény.

9. **(a)** Nem; **(b)** Nem; **(c)** Nem; **(d)** $(0,1]$

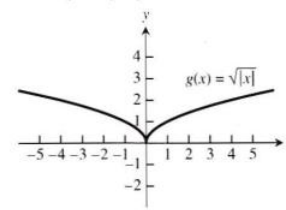
11. $A=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2,\quad p=3x$

13. $x=\frac{d}{\sqrt{3}};\quad A=2d^2;\quad V=\frac{d^3}{3\sqrt{3}}$

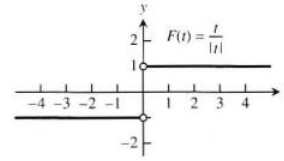
15. $(-\infty,\infty)$



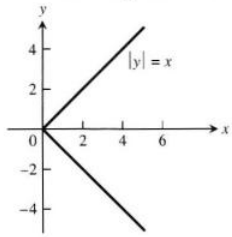
17. $(-\infty,\infty)$



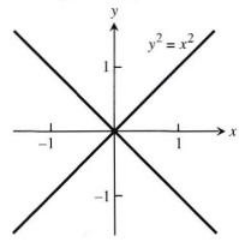
19. $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$



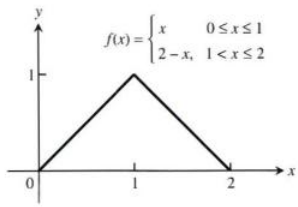
21. **(a)** Minden pozitív x-hez két y tartozik.



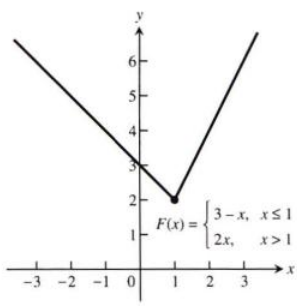
(b) Minden nemnulla x-hez két különböző y tartozik.



23.



25.



27. **(a)** $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ -x+2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x < 2 \\ 2, & 2 \le x < 3 \\ 0, & 3 \le x \le 4 \end{cases}$

29. **(a)** $f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, & 1 < x < 3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & -2 \le x \le 0 \\ -2x+2, & 0 < x \le 1 \\ -1, & 1 < x \le 3 \end{cases}$

31. **(a)** $(-2,0) \cup (4,\infty)$

33. **(a)** $0 \le x < 1$; **(b)** $-1 < x \le 0$

35. Igen.

37. $V = x(14-2x)(22-2x)$

39. **(a)** A kör eredeti, 8π hosszúságú kerületéből egy x hosszúságú részt távolítottunk el.

(b) $r = \frac{8\pi - x}{2\pi} = 4 - \frac{x}{2\pi}$

(c) $h = \sqrt{16 - r^2} = \frac{\sqrt{16\pi x - x^2}}{2\pi}$

(d) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{(8\pi - x)^2\sqrt{16\pi x - x^2}}{24\pi^2}$

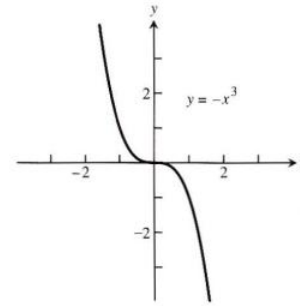
1.4. Alapvető függvénytípusok és matematikai modellek

1. **(a)** Lineáris, algebrai, elsőfokú polinomfüggvény; **(b)** hatványfüggvény, algebrai függvény ; **(c)** racionális, algebrai függvény ; **(d)** exponenciális függvény.

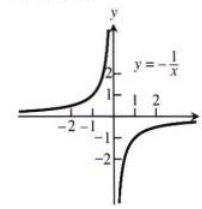
3. **(a)** Racionális algebrai függvény; **(b)** algebrai függvény; **(c)** trigonometrikus függvény; **(d)** logaritmusfüggvény.

5. **(a)** h; **(b)** f; **(c)** g

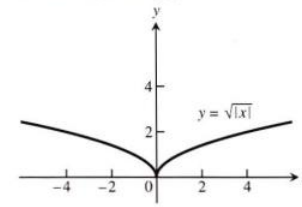
7. Szimmetrikus az origóra; csökkenő, ha $-\infty < x < \infty$.



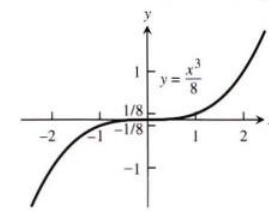
9. Szimmetrikus az origóra; növekvő, ha $-\infty < x < 0$, $0 < x < \infty$



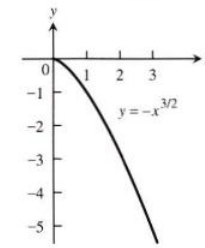
11. Szimmetrikus az y-tengelyre; csökkenő, ha $-\infty < x \le 0$, és növekvő, ha $0 \le x < \infty$.



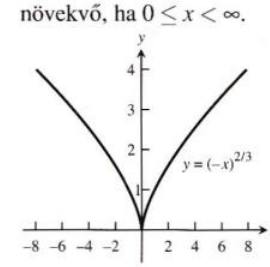
13. Szimmetrikus az origóra; növekvő, ha $-\infty < x < \infty$.



15. Nincs szimmetria; csökkenő, ha $0 \le x < \infty$



17. Szimmetrikus az y-tengelyre; csökkenő, ha $-\infty < x \le 0$, és növekvő, ha $0 \le x < \infty$.

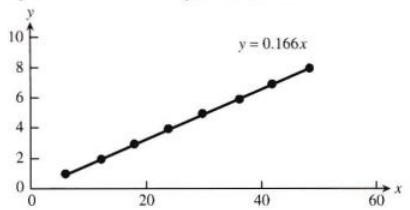


19. Páros. **21.** Páros. **23.** Páratlan. **25.** Páros.

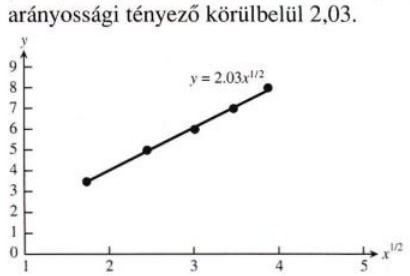
27. Nem páros és nem is páratlan.

29. Nem páros és nem is páratlan.

31. **(a)** A grafikon szerint y arányos x-szel, az arányossági tényező hozzávetőlegesen 0,166.

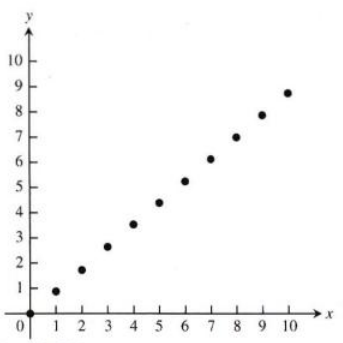


(b) A grafikon szerint az y mennyiség arányos $\sqrt{x}$-szel, az arányossági tényező körülbelül 2,03.



33. **(a)** $k \approx 0,21$; **(b)** $k \approx 4,76$

35. **(a)**



(b) $k \approx 0,87$

(c) Ha $y = 0,87x$ és $x = 13$, akkor $y = 11,31$.

1.5. Függvényműveletek és függvénytranszformációk

1. $D_f : -\infty < x < \infty$; $D_g : x \geq 1$; $R_f : -\infty < y < \infty$; $R_g : y \geq 0$; $D_{f+g} = D_{f \cdot g} = D_g$; $R_{f+g} : y \geq 1$; $R_{f \cdot g} : y \geq 0$.

3. $D_f : -\infty < x < \infty$; $D_g : -\infty < x < \infty$; $R_f : y = 2$; $R_g : y \geq 1$; $D_{f/g} : -\infty < x < \infty$; $R_{f/g} : 0 < y \leq 2$; $D_{g/f} : -\infty < x < \infty$; $R_{g/f} : y \geq 1/2$.

5. **(a)** 2; **(b)** 22; **(c)** $x^2 + 2$; **(d)** $x^2 + 10x + 22$; **(e)** 5; **(f)** -2; **(g)** $x + 10$; **(h)** $x^4 - 6x^2 + 6$.

7. **(a)** $\frac{4}{x^2} - 5$; **(b)** $\frac{4}{x^2} - 5$; **(c)** $\left(\frac{4}{x} - 5\right)^2$; **(d)** $\left(\frac{1}{4x-5}\right)^2$; **(e)** $\frac{1}{4x^2-5}$; **(f)** $\frac{1}{(4x-5)^2}$.

9. **(a)** $f(g(x))$; **(b)** $j(g(x))$; **(c)** $g(g(x))$; **(d)** $j(j(x))$; **(e)** $g(h(f(x)))$; **(f)** $h(j(f(x)))$.

11.

	$g(x)$	$f(x)$	$f \circ g(x)$
(a)	$x-7$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x-7}$
(b)	$x+2$	$3x$	$3x+6$
(c)	x^2	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(d)	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	x
(e)	$\frac{1}{x-1}$	$1+\frac{1}{x}$	x
(f)	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	x

13. **(a)** $f(g(x)) = \sqrt{\frac{1}{x}+1}$, $g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

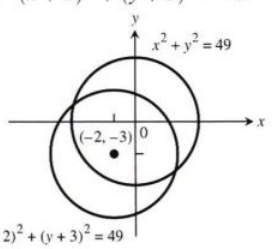
(b) $D_{f \circ g} = (0, \infty)$, $D_{g \circ f} = (-1, \infty)$

(c) $R_{f \circ g} = (1, \infty)$, $R_{g \circ f} = (0, \infty)$

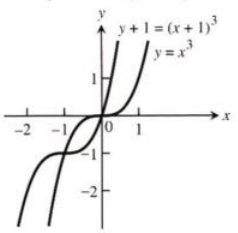
15. **(a)** $y = -(x+7)^2$; **(b)** $y = -(x-4)^2$.

17. **(a)** 4; **(b)** 1; **(c)** 2; **(d)** 3.

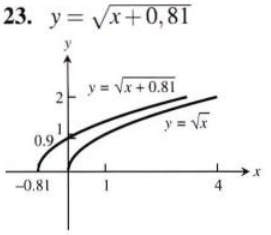
19. $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 49$



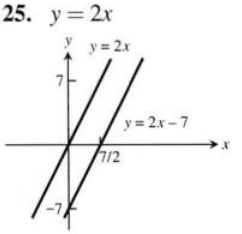
21. $y + 1 = (x+1)^3$



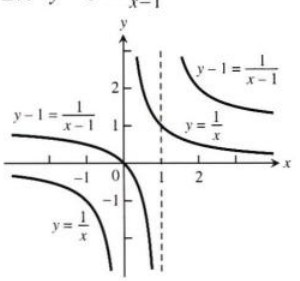
23. $y = \sqrt{x + 0,81}$



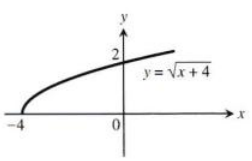
25. $y = 2x$



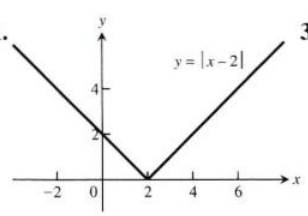
27. $y - 1 = \frac{1}{x-1}$



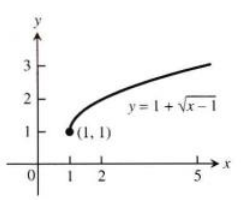
29.



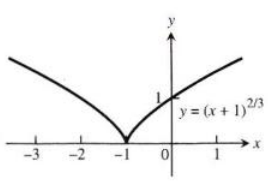
31.



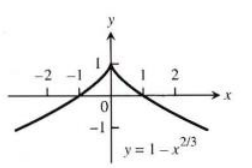
33.



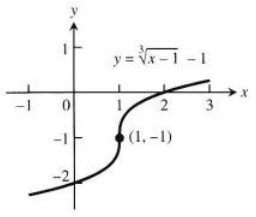
35.



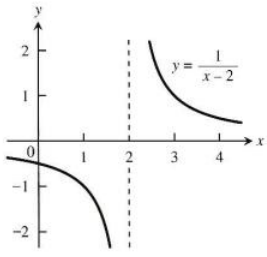
37.



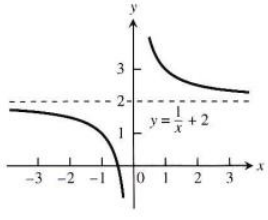
39.



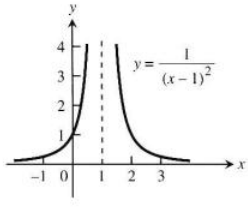
41.



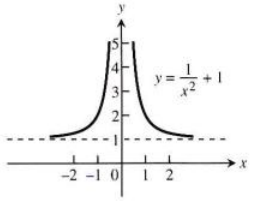
43.



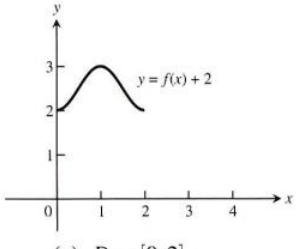
45.



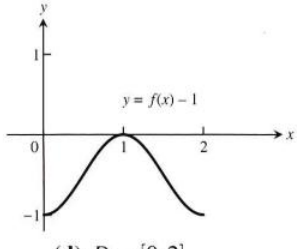
47.



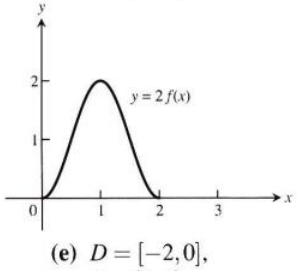
49. **(a)** $D = [0,2]$, $R = [2,3]$



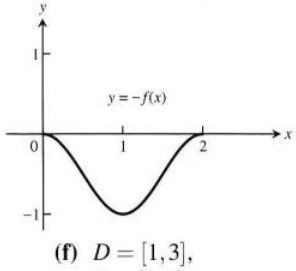
(b) $D = [0,2]$, $R = [-1,0]$



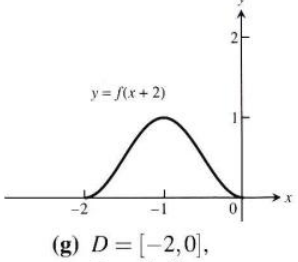
(c) $D = [0,2]$, $R = [0,2]$



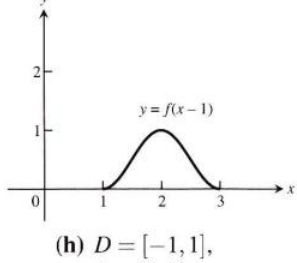
(d) $D = [0,2]$, $R = [-1,0]$



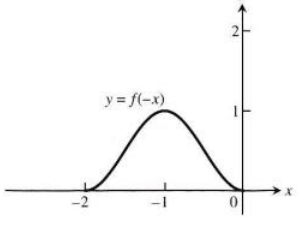
(e) $D = [-2,0]$, $R = [0,1]$



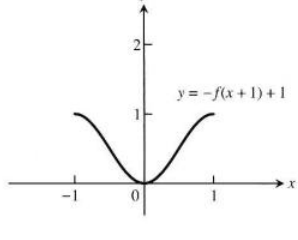
(f) $D = [1,3]$, $R = [0,1]$



(g) $D = [-2,0]$, $R = [0,1]$



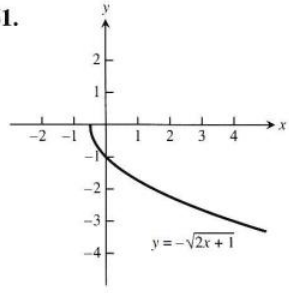
(h) $D = [-1,1]$, $R = [0,1]$



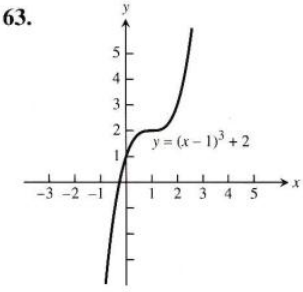
51. $y = 3x^2 - 3$ **53.** $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}$ **55.** $y = \sqrt{4x+1}$

57. $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ **59.** $y = 1 - 27x^3$

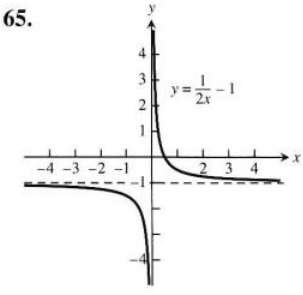
61.



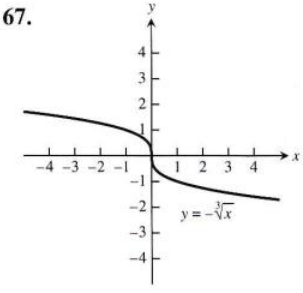
63.



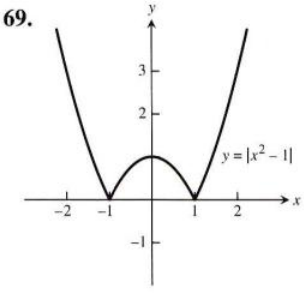
65.



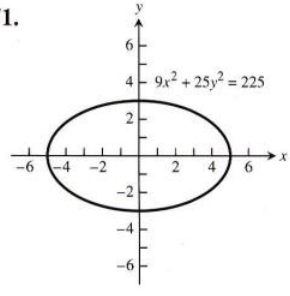
67.



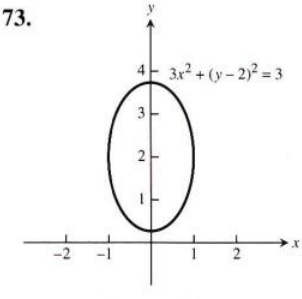
69.



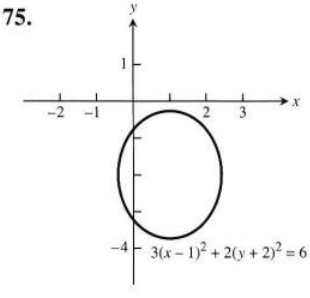
71.



73.



75.



77. $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$; a középpont: $(-4,3)$
A főtengely a $(-8,3)$ és a $(0,3)$ pontokat összekötő szakasz.

79. **(a)** Páratlan; **(b)** páratlan; **(c)** páratlan; **(d)** páros; **(e)** páros; **(f)** páros; **(g)** páros; **(h)** páros; **(i)** páratlan.

1.6. Trigonometrikus függvények

1. **(a)** 8π; m **(b)** $\frac{55\pi}{9}$ m. **3.** 8,4 cm

5. n.d. – nem definiált

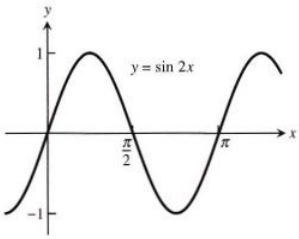
θ	$-\pi$	$-2\pi/3$	0	$\pi/2$	$3\pi/4$
$\sin\theta$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\theta$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\operatorname{tg}\theta$	0	$\sqrt{3}$	0	n.d.	-1
$\operatorname{ctg}\theta$	n.d.	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	n.d.	0	-1
$\sec\theta$	-1	-2	1	n.d.	$-\sqrt{2}$
$\csc\theta$	n.d.	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	n.d.	1	$\sqrt{2}$

7. $\cos x = -4/5$; $\operatorname{tg} x = -3/4$.

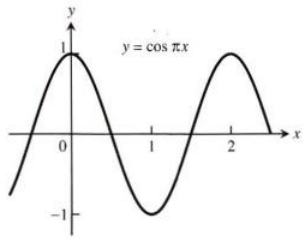
9. $\sin x = -\frac{\sqrt{8}}{3}$; $\operatorname{tg} x = -\sqrt{8}$.

11. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

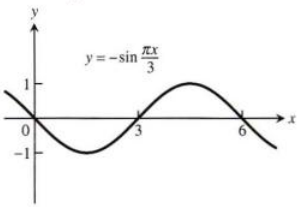
13. A periódus π.



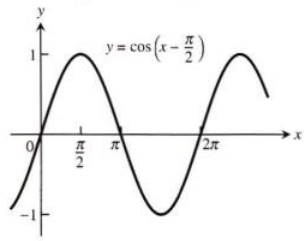
15. A periódus 2.



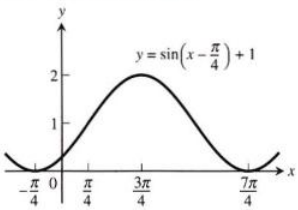
17. A periódus 6.



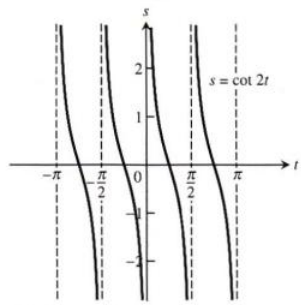
19. A periódus 2π.



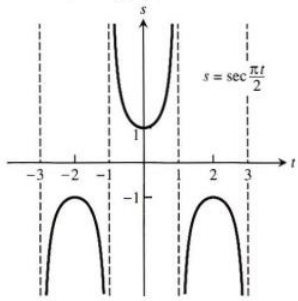
21. A periódus 2π.



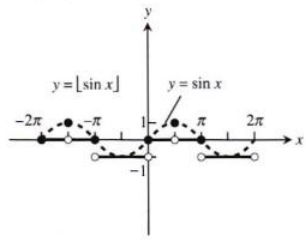
23. A periódus $\pi/2$; szimmetrikus az origóra.



25. A periódus 4, szimmetrikus az y-tengelyre.



29. $D = (-\infty, \infty)$ $R : y = -1, 0, 1$



39. $-\cos x$

41. $-\cos x$

43. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

45. $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

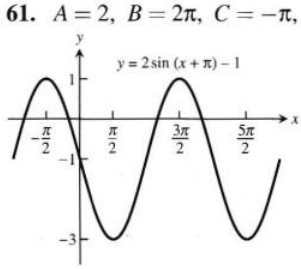
47. $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

49. $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

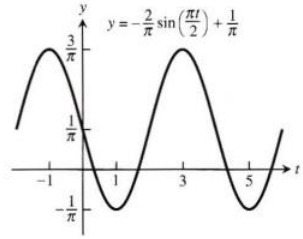
55. $c = \sqrt{7} \approx 2{,}646$

59. $a = 1{,}464$

61. $A = 2$, $B = 2\pi$, $C = -\pi$, $D = -1$.



63. $A = -\frac{2}{\pi}$, $B = 4$, $C = 0$, $D = \frac{1}{\pi}$.



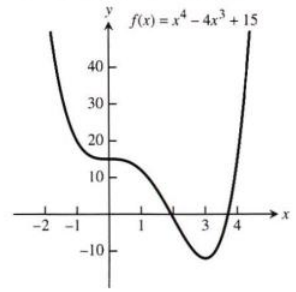
65. **(a)** 37; **(b)** 365; **(c)** jobbra 101; **(d)** fölfelé 25.

1.7. Grafikus módszerek

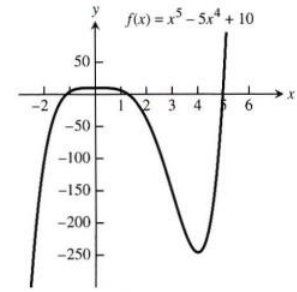
1. **(d)**

3. **(d)**

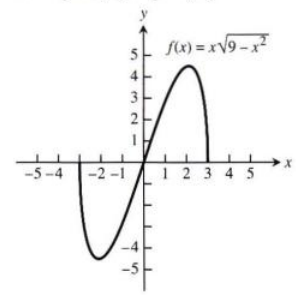
5. $[-3{,}5] \times [-15, 40]$



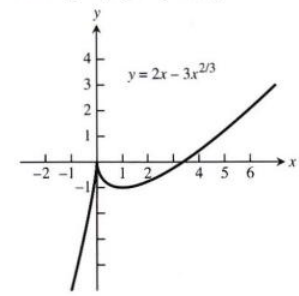
7. $[-3, 6] \times [-250, 50]$



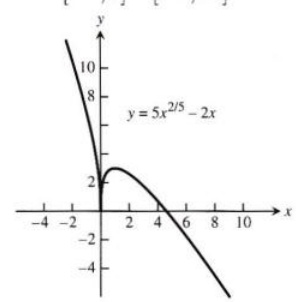
9. $[-3, 3] \times [-6, 6]$



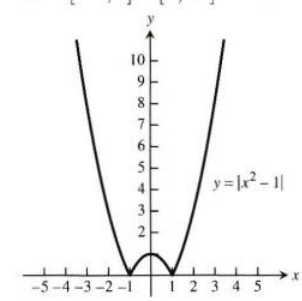
11. $[-2, 6] \times [-5, 4]$



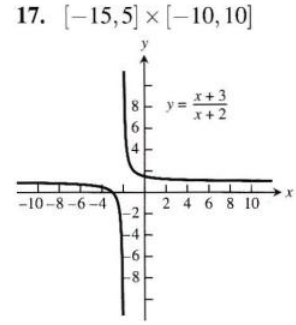
13. $[-2, 8] \times [-5, 10]$



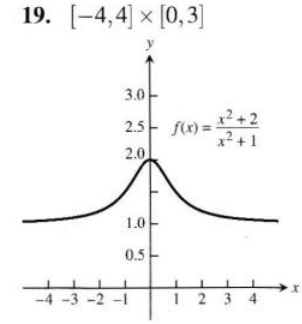
15. $[-3, 3] \times [0, 10]$



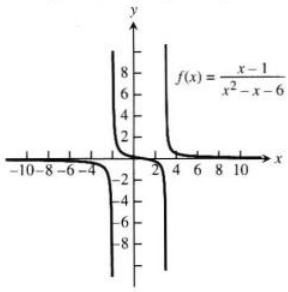
17. $[-15, 5] \times [-10, 10]$



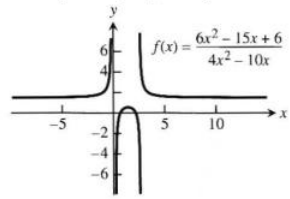
19. $[-4, 4] \times [0, 3]$



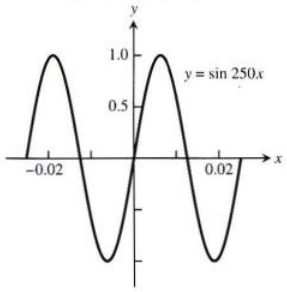
21. $[-10,10]\times[-6,6]$



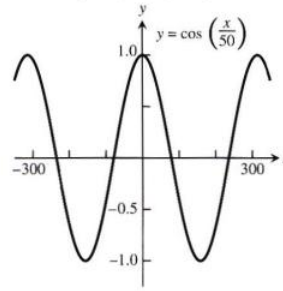
23. $[-6,6]\times[-6,6]$



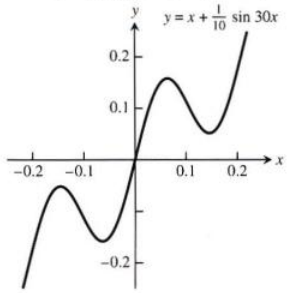
25. $[-\frac{\pi}{125},\frac{\pi}{125}]\times$
$\times[-1,25;1,25]$



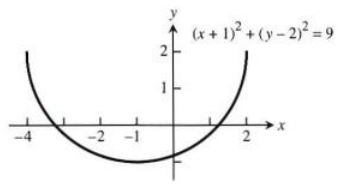
27. $[-100\pi,100\pi]\times$
$\times[-1,25;1,25]$



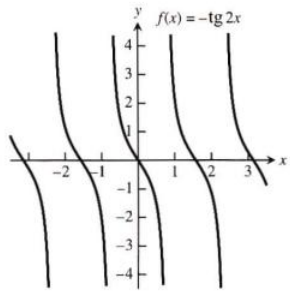
29. $[-\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{15}]\times[-0,25;0,25]$



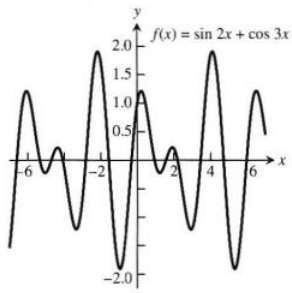
31.



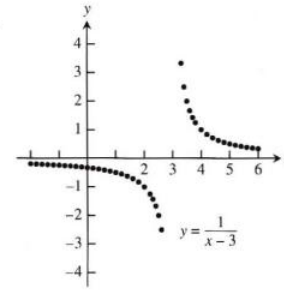
33.



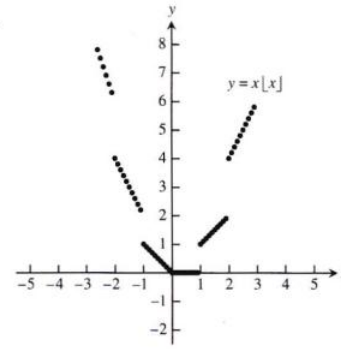
35.



37.



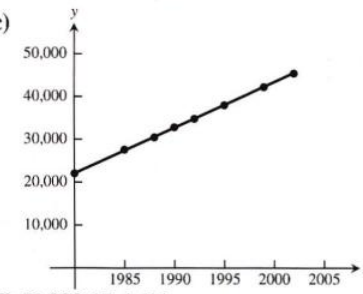
39.



41. **(a)** $y=1059,14x-2074972,23$

(b) $m=1059,14$, ennyivel nő évente a fizetés.

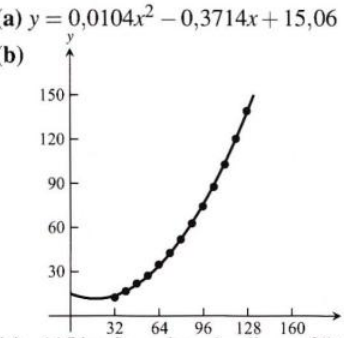
(c)



(d) 53 899,17 dollár

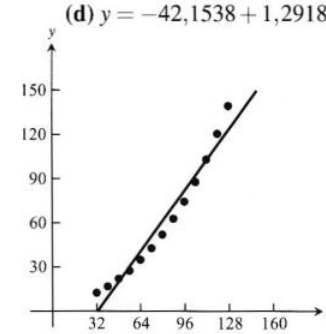
43. **(a)** $y=0,0104x^2-0,3714x+15,06$

(b)



(c) 115 km/h sebességnél a féktávolság hozzávetőleg 109,89 m; 136 km/h sebességnél körülbelül 156,91 m.

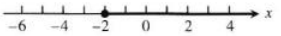
(d) $y=-42,1538+1,2918x$

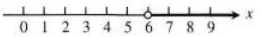


115 km/h sebességnél a féktávolság körülbelül 106,40 m; 136 km/h sebességnél körülbelül 133,53 m.

A másodfokú regressziós függvény illeszkedik jobban az adatokra.

Gyakorló feladatok

1. $x \geq -2$ 

3. $x > 6$ 

5. $-8,\ 6$

7. $x < -1$ vagy $x > 5$

9. $(0, 11)$

11. Nincs két egyenlő hosszú oldal; nincs két merőleges oldal.

13. $y = 3x - 9$

15. $x = 0$

17. $y = 2$

19. $y = -3x + 3$

21. $y = -\frac{4}{3}x - \frac{20}{3}$

23. $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

25. $A = \pi r^2,\ C = 2\pi r,\ A = \frac{C^2}{4\pi}$

27. $x = \operatorname{tg}\theta,\ y = \operatorname{tg}^2\theta$

29. Origó

31. Egyik sem

33. Páros

35. Páros

37. Páratlan

39. Egyik sem

41. **(a)** Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$; **(b)** értékkészlet: $[-2, \infty)$.

43. **(a)** Értelmezési tartomány: $[-4, 4]$; **(b)** értékkészlet: $[0, 4]$.

45. **(a)** Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$; **(b)** értékkészlet: $(-3, \infty)$.

47. **(a)** Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$; **(b)** értékkészlet: $[-3, 1]$.

49. **(a)** Értelmezési tartomány: $(3, \infty)$; **(b)** értékkészlet: $\mathbb{R}$.

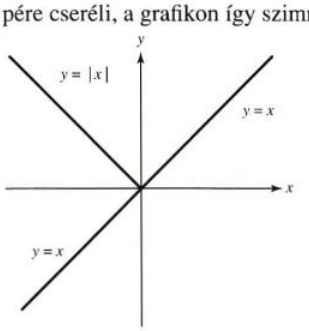
51. **(a)** Értelmezési tartomány: $[-4, 4]$; **(b)** értékkészlet $[0, 2]$.

53. $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

55. **(a)** 1; **(b)** $\frac{1}{\sqrt{2{,}5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$; **(c)** $x,\ x \neq 0$; **(d)** $\frac{1}{\sqrt{1/\sqrt{x+2}+2}}$.

57. **(a)** $(f \circ g)(x) = -x,\ x \geq -2,\ (g \circ f)(x) = \sqrt{4 - x^2}$.
(b) $D_{f \circ g} = [-2, \infty),\ D_{g \circ f} = [-2, 2]$.
(c) $R_{f \circ g} = (-\infty, 2],\ R_{g \circ f} = [0, 2]$.

59. A grafikon $x < 0$ részét az x-tengelyre vonatkozó tükörképére cseréli, a grafikon így szimmetrikus lesz az y-tengelyre.



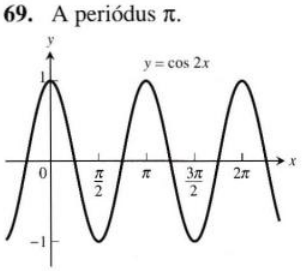
61. Nem változtatja meg.

63. A grafikon $x > 0$ feletti részének tükörképét is hozzáveszi, a grafikon így szimmetrikus lesz az y-tengelyre.

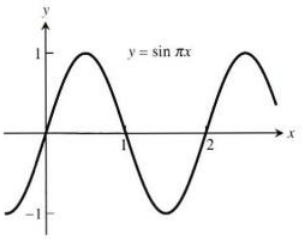
65. Az $y < 0$ részt tükrözi az x-tengelyre.

67. Az $y < 0$ részt tükrözi az x-tengelyre.

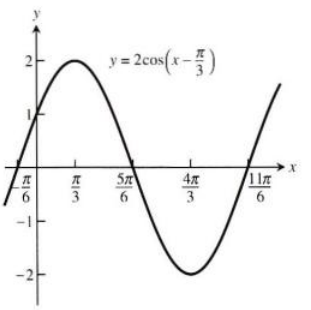
69. A periódus π.



71. A periódus 2.



73.



75. **(a)** $a = 1,\ b = \sqrt{3}$; **(b)** $a = 2\sqrt{3}/3,\ c = 4\sqrt{3}/3$.

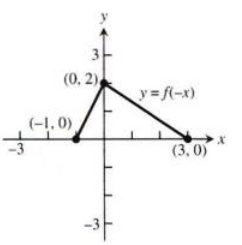
77. **(a)** $a = \frac{b}{\operatorname{tg}B}$; **(b)** $c = \frac{a}{\sin A}$.

79. $\approx 16{,}98$ m

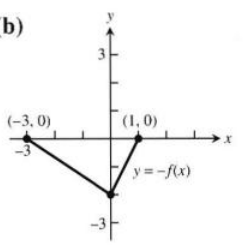
81. **(b)** 4π

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

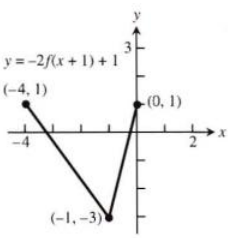
1. **(a)**



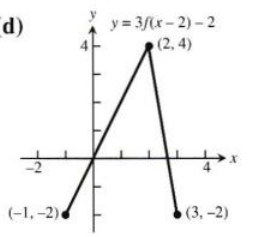
(b)



(c)



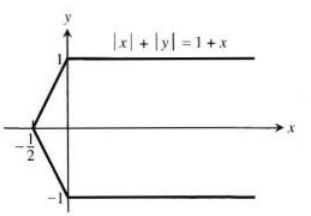
(d)



3. Igen. Példák: $f(x) = 1/x$ és $g(x) = 1/x$; $f(x) = 2x$ és $g(x) = x/2$; $f(x) = e^x$ és $g(x) = \ln x$.

5. Ha $f(x)$ páratlan, akkor $g(x) = f(x) - 2$ nem páratlan; $g(x)$ nem is páros, kivéve, ha minden x-re $f(x) = 0$. Ha $f(x)$ páros, akkor $g(x) = f(x) - 2$ is az.

7.



9. $\sqrt{2}$ **11.** 3/4 **13.** $3\sqrt{15}/16$ **27.** $-4 < m < 0$

2. fejezet

2.1. Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma

1. **(a)** Nem létezik. Amint x jobbról tart 1-hez, a $g(x)$ függvényértékek 0-hoz tartanak, ha pedig x balról közelíti az 1-et, akkor a $g(x)$ függvényértékek is 1-hez tartanak. Nincs tehát *egyetlen* olyan szám, amelyhez a $g(x)$ függvényértékek tetszőlegesen közel kerülnének, amint $x \to 1$.
(b) 1 **(c)** 0

3. **(a)** Igaz; **(b)** igaz; **(c)** hamis; **(d)** hamis; **(e)** hamis; **(f)** igaz.

5. Amint x balról tart 0-hoz, $x/|x|$ értékei -1-hez közelítenek, ha viszont x jobbról tart 0-hoz, akkor $x/|x|$ 1-hez közelít. Nincs tehát *egyetlen* olyan L szám, amelyhez a függvényértékek tetszőlegesen közel kerülnének, amint $x \to 0$.

7. Semmit.

9. Nem; nem; nem.

11. **(a)** $f(x) = (x^2 - 9)/(x+3)$

x	$-3{,}1$	$-3{,}01$	$-3{,}001$	$-3{,}0001$	$-3{,}00001$	$-3{,}000001$
$f(x)$	$-6{,}1$	$-6{,}01$	$-6{,}0001$	$-6{,}00001$	$-6{,}00001$	$-6{,}000001$

x	$-2{,}9$	$-2{,}99$	$-2{,}999$	$-2{,}9999$	$-2{,}99999$	$-2{,}999999$
$f(x)$	$-5{,}9$	$-5{,}99$	$-5{,}999$	$-5{,}9999$	$-5{,}99999$	$-5{,}999999$

(c) $\lim_{x \to -3} f(x) = -6$

13. **(a)** $G(x) = (x+6)/(x^2 + 4x - 12)$

x	$-5{,}9$	$-5{,}99$	$-5{,}999$
$G(x)$	$-0{,}126582$	$-0{,}1251564$	$-0{,}1250156$

x	$-5{,}9999$	$-5{,}99999$	$-5{,}999999$
$G(x)$	$-0{,}1250015$	$-0{,}1250001$	$-0{,}1250000$

x	$-6{,}1$	$-6{,}01$	$-6{,}001$
$G(x)$	$-0{,}123456$	$-0{,}124843$	$-0{,}124984$

x	$-6{,}0001$	$-6{,}00001$	$-6{,}000001$
$G(x)$	$-0{,}124998$	$-0{,}124999$	-124999

(c) $\lim_{x \to -6} G(x) = -1/8 = -0{,}125$

15. **(a)** $f(x) = (x^2 - 1)/(|x| - 1)$

x	$-1{,}1$	$-1{,}01$	$-1{,}001$	$-1{,}0001$	$-1{,}00001$	$-1{,}000001$
$f(x)$	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001	2,00001

x	$-0{,}9$	$-0{,}99$	$-0{,}999$	$-0{,}9999$	$-0{,}99999$	$-0{,}999999$
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	1,9999	1,99999	1,999999

(c) $\lim_{x \to -1} f(x) = 2$

17. **(a)** $g(\theta) = \sin\theta/\theta$

θ	0,1	0,01	0,001	0,0001
$g(\theta)$	0,998334	0,999983	0,999999	0,999999

θ	0,00001	0,000001
$g(\theta)$	0,999999	0,999999

θ	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$
$g(\theta)$	0,998334	0,999983	0,999999	0,999999

θ	$-0{,}00001$	$-0{,}000001$
$g(\theta)$	0,999999	0,999999

$\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = 1$

19. **(a)** $f(x) = x^{1/(1-x)}$

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	0,99999	0,999999
$f(x)$	0,348678	0,366032	0,367695	0,367861	0,367877	0,367879

x	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,00001	1,000001
$f(x)$	0,385543	0,369711	0,368063	0,367897	0,367881	0,367878

$\lim_{x \to 1} f(x) \approx 0{,}36788$

21. 4 **23.** 0 **25.** 9 **27.** $\pi/2$

29. **(a)** 19; **(b)** 1. **31.** **(a)** $-\frac{4}{\pi}$; **(b)** $-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$. **33.** 1

35. [Ha az Olvasó megoldása nem pontosan ilyen, abban a nyomda ördöge is hibás lehet.]

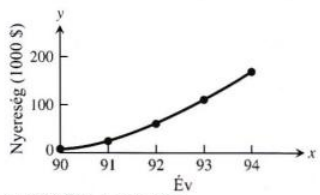
(a)

PQ_1	PQ_2	PQ_3	PQ_4
43	46	49	50

[A sebességet m/s egységben mérve.]

(b) $\approx$ 50 m/s vagy 180 km/h

37. **(a)**



(b) $\approx$ 56000 dollár/év
(c) $\approx$ 42000 dollár/év

39. **(a)** 0,414213, 0,449489, $(\sqrt{1+h} - 1)/h$;
(b) $g(x) = \sqrt{x}$.

$1+h$	1,1	1,01	1,001	1,0001
$\sqrt{1+h}$	1,04880	1,004987	1,0004998	1,0000499
$(\sqrt{1+h} - 1)/h$	0,4880	0,4987	0,4998	0,499

$1+h$	1,00001	1,000001
$\sqrt{1+h}$	1,000005	1,0000005
$(\sqrt{1+h} - 1)/h$	0,5	0,5

(c) 0,5;
(d) 0,5

2.2. Határértékek kiszámítása

1. -9 **3.** 4 **5.** -8 **7.** 5/8
9. 5/2 **11.** 27 **13.** 16 **15.** 3/2
17. 3/2 **19.** 1/10 **21.** -7 **23.** 3/2
25. $-1/2$ **27.** 4/3 **29.** 1/6 **31.** 4
33. 1/2 **35.** 3/2

37. **(a)** Hányados; **(b)** különbség és hatvány;
(c) Összeg, konstanssal való szorzás.

39. **(a)** -10; **(b)** -20; **(c)** -1; **(d)** 5/7

41. **(a)** 4; **(b)** -21; **(c)** -12; **(d)** $-7/3$

43. 2 **45.** 3 **47.** $1/(2\sqrt{7})$ **49.** $\sqrt{5}$

51. **(a)** A határérték 1.

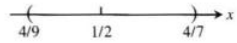
53. $c = 0,\ 1,\ -1$; a határérték a 0 helyen $c = 0$, $c = \pm 1$ esetén pedig 1.

55. 7 **57.** **(a)** 5; **(b)** 5.

2.3. A határérték precíz definíciója

1. $\delta = 2$ 

3. $\delta = 1/2$ 

5. $\delta = 1/18$ 

7. $\delta = 0,1$ **9.** $\delta = 7/16$

11. $\delta = \sqrt{5} - 2$ **13.** $\delta = 0,36$

15. $(3,99; 4,01)$, $\delta = 0,01$ **17.** $(-0,19; 0,21)$, $\delta = 0,19$

19. $(3,15)$, $\delta = 5$ **21.** $(10/3, 5)$, $\delta = 2/3$

23. $(-\sqrt{4,5}, -\sqrt{3,5})$, $\delta = \sqrt{4,5} - 2 \approx 0,12$

25. $(\sqrt{15}, \sqrt{17})$, $\delta = \sqrt{17} - 4 \approx 0,12$

27. $\left(2 - \frac{0,03}{m}, 2 + \frac{0,03}{m}\right)$, $\delta = \frac{0,03}{m}$

29. $\left(\frac{1}{2} - \frac{c}{m}, \frac{c}{m} + \frac{1}{2}\right)$, $\delta = \frac{c}{m}$

31. $L = -3$, $\delta = 0,01$ **33.** $L = 4$, $\delta = 0,05$

35. $L = 4$, $\delta = 0,75$

55. $[3,384; 3,387]$ A biztonság kedvéért a bal oldali végpontot fölfelé, a jobb oldalit lefelé kerekítettük.

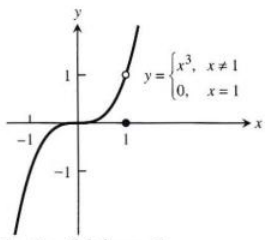
59. Nem létezik a határérték, amint $x \to 3$.

2.4. Jobb és bal oldali határérték. Határérték a végtelenben

1. **(a)** Igaz; **(b)** igaz; **(c)** hamis; **(d)** igaz; **(e)** igaz; **(f)** igaz; **(g)** hamis; **(h)** hamis; **(i)** hamis; **(j)** hamis; **(k)** igaz; **(l)** hamis.

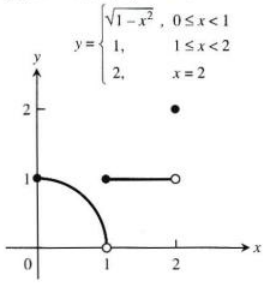
3. **(a)** 2,1; **(b)** nem, $\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$; **(c)** 3,3; **(d)** igen, 3.

5. **(a)** Nem; **(b)** igen, 0; **(c)** nem.

7. **(a)** 

(b) 1, 1; **(c)** igen, 1.

9. **(a)** $D: 0 \leq x \leq 2$; $R: 0 < y \leq 1$ és $y = 2$; **(b)** $(0,1) \cup (1,2)$; **(c)** $x = 2$; **(d)** $x = 0$



11. $\sqrt{3}$ **13.** 1 **15.** $2/\sqrt{5}$ **17.** **(a)** 1; **(b)** -1.

19. **(a)** 1; **(b)** 2/3. **21.** 1 **23.** 3/4 **25.** 2

27. 1/2 **29.** 2 **31.** 1 **33.** 1/2 **35.** 3/8

37. **(a)** -3; **(b)** -3. **39.** **(a)** 1/2; **(b)** 1/2.

41. **(a)** $-5/3$; **(b)** $-5/3$. **43.** 0 **45.** -1

47. **(a)** 2/5; **(b)** 2/5. **49.** **(a)** 0; **(b)** 0.

51. **(a)** 7; **(b)** 7. **53.** **(a)** 0; **(b)** 0.

55. **(a)** $-2/3$; **(b)** $-2/3$. **57.** 0 **59.** 1

61. ∞ **69.** 1 **73.** $\delta = \varepsilon^2$, $\lim_{x \to 5^+} \sqrt{x-5} = 0$.

77. **(a)** 400; **(b)** 399; **(c)** a határérték nem létezik

79. 1 **81.** 3/2 **83.** 3

2.5. Végtelen határértékek és függőleges aszimptoták

1. ∞ **3.** $-\infty$ **5.** $-\infty$ **7.** ∞

9. **(a)** ∞; **(b)** $-\infty$ **11.** ∞ **13.** ∞ **15.** $-\infty$

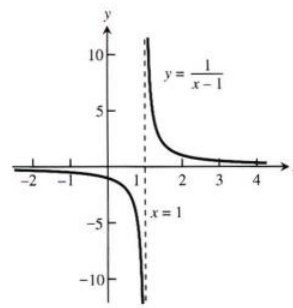
17. **(a)** ∞; **(b)** $-\infty$; **(c)** $-\infty$; **(d)** ∞

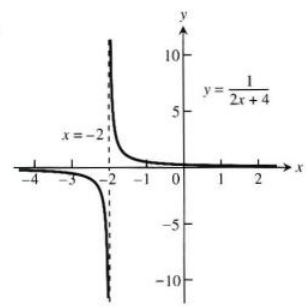
19. **(a)** $-\infty$; **(b)** ∞; **(c)** 0; **(d)** 3/2

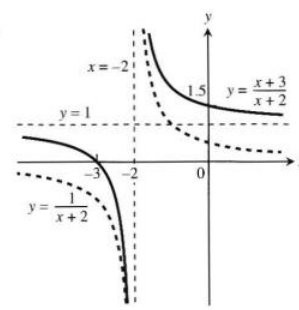
21. **(a)** $-\infty$; **(b)** 1/4; **(c)** 1/4; **(d)** 1/4; **(e)** $-\infty$ lesz

23. **(a)** $-\infty$; **(b)** ∞

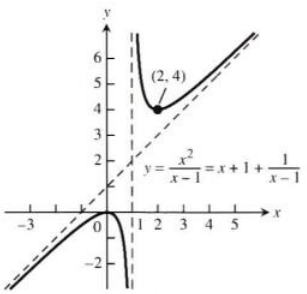
25. **(a)** ∞; **(b)** ∞; **(c)** ∞; **(d)** ∞

27. 

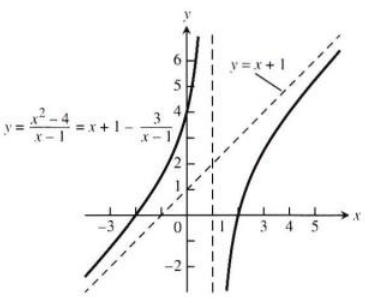
29. 

31. 

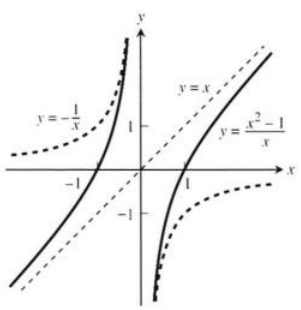
33.



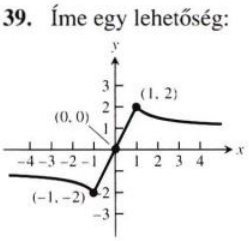
35.



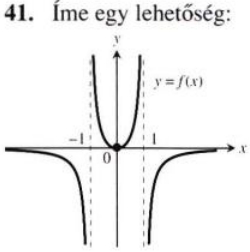
37.



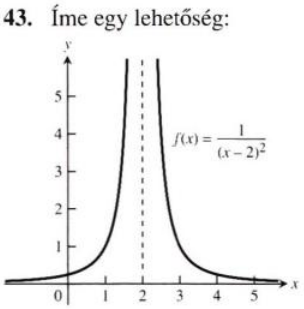
39. Íme egy lehetőség:



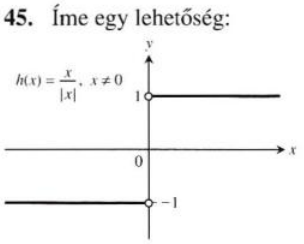
41. Íme egy lehetőség:



43. Íme egy lehetőség:



45. Íme egy lehetőség:



51. **(a)** Minden pozitív B valós számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden x esetén

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > B.$$

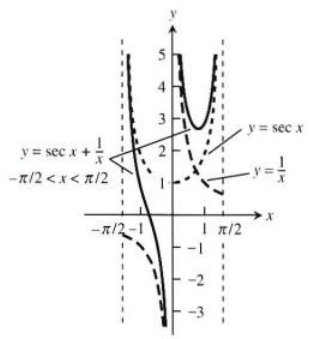
(b) Minden negatív $-B$ valós számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden x esetén

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) < -B.$$

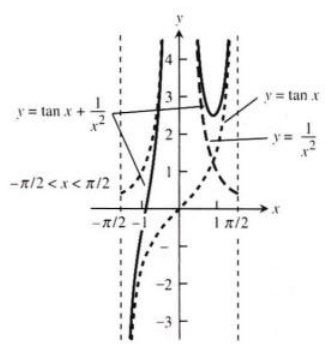
(c) Minden negatív $-B$ valós számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden x esetén

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < -B.$$

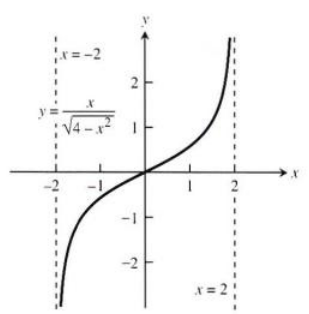
57.



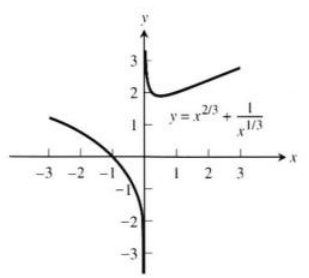
59.



61.



63.



2.6. Folytonosság

1. Nem, az $x = 2$ helyen nem folytonos, mert értelmezve sincs.

3. Folytonos.

5. **(a)** Igen; **(b)** igen; **(c)** igen; **(d)** igen.

7. **(a)** Nem; **(b)** nem.

9. 0

11. 1, nem megszüntethető; 0, megszüntethető.

13. Az $x = 2$ kivételével mindenütt.

15. Az $x = 1$ és az $x = 3$ kivételével mindenütt.

17. Mindenütt.

19. Az $x = 0$ kivételével mindenütt.

21. Az $x = n\pi/2$ helyek kivételével (ahol n tetszőleges egész szám) mindenütt.

23. Az $x = n\pi/2$ helyek kivételével (ahol n tetszőleges páratlan egész szám) mindenütt.

25. Minden $x \geq -3/2$ esetén. **27.** Mindenütt.

29. 0; az $x = \pi$ helyen folytonos.

31. 1; az $y = 1$ helyen folytonos.

33. $\sqrt{2}/2$; a $t = 0$ helyen folytonos.

35. $g(3) = 6$ **37.** $f(1) = 3/2$ **39.** $a = 4/3$

63. $x \approx 1{,}8794,\ -1{,}5321,\ -0{,}3473$ **65.** $x \approx 1{,}7549$

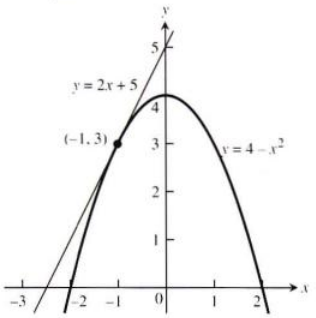
67. $x \approx 3{,}5156$ **69.** $x \approx 0{,}7391$

2.7. Érintő és derivált

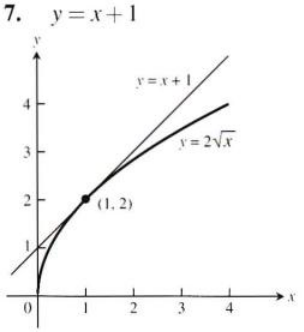
1. $P_1 : m_1 = 1$; $P_2 : m_2 = 5$.

3. $P_1 : m_1 = 5/2$; $P_2 : m_2 = -1/2$.

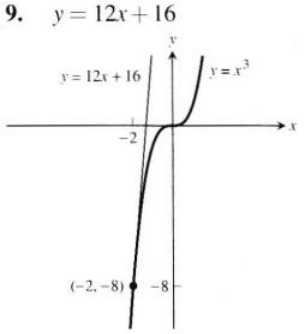
5. $y = 2x + 5$



7. $y = x + 1$



9. $y = 12x + 16$



11. $m = 4$; $y - 5 = 4(x - 2)$.

13. $m = -2$; $y - 3 = -2(x - 3)$.

15. $m = 12$; $y - 8 = 12(t - 2)$.

17. $m = \frac{1}{4}$; $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$.

19. $m = -10$ **21.** $m = -1/4$ **23.** $(-2, -5)$

25. $y = -(x + 1)$, $y = -(x - 3)$. **27.** 19,6 m/s

29. 6π **31.** Igen. **33.** Igen.

35. **(a)** Sehol sem.

37. **(a)** Az $x = 0$ helyen.

39. **(a)** Sehol sem.

41. **(a)** Az $x = 1$ helyen.

43. **(a)** Az $x = 0$ helyen.

Gyakorló feladatok

1.

$x = -1$ $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$, így $\lim_{x \to -1} f(x) = 1 = f(-1)$, f tehát folytonos az $x = -1$ helyen.

$x = 0$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, így $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, mivel azonban $f(0) \neq 0$, f nem folytonos az $x = 0$ helyen; a szakadás megszűnik, ha az $f(0)$ függvényértéket 0-nak definiáljuk.

$x = 1$ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1$, viszont $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$, emiatt $\lim_{x \to 1} f(x)$ nem létezik; f-nek nem megszüntethető szakadása van az $x = 1$ helyen.

3. **(a)** -21; **(b)** 49; **(c)** 0; **(d)** 1;
(e) 1; **(f)** 7; **(g)** -7; **(h)** $-\frac{1}{7}$.

5. 4

7. **(a)** $(-\infty, \infty)$; **(b)** $[0, \infty)$; **(c)** $(-\infty, 0)$ és $(0, \infty)$; **(d)** $(0, \infty)$.

9. **(a)** Nem létezik; **(b)** 0.

11. $\frac{1}{2}$ **13.** $2x$ **15.** $-\frac{1}{4}$ **17.** 2 **19.** 0

21. $\frac{2}{5}$ **23.** 0 **25.** $-\infty$ **27.** 0 **29.** 1

31. Egyikben sem; a $\lim_{x \to 1} f(x)$ és a $\lim_{x \to -1} f(x)$ határérték nem létezik.

37. 1,324717957

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

3. 0; csak a bal oldali határértéket lehetett vizsgálni, mert a függvény $v > c$ esetén nincs értelmezve.

5. $18{,}23 < t < 23{,}77$; legfeljebb 2,77°C fokkal.

13. **(a)** B; **(b)** A; **(c)** A; **(d)** A.

21. **(a)** $\lim_{a \to 0} r_+(a) = 0{,}5$, $\lim_{a \to -1^+} r_+(a) = 1$.
(b) $\lim_{a \to 0} r_-(a)$ nem létezik, $\lim_{a \to -1^+} r_-(a) = 1$.

25. 0 **27.** 1 **29.** 4

3. fejezet

3.1. A deriváltfüggvény

1. $-2x$, 6, 0, -2

3. $-\frac{2}{t^2}$, 2, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$

5. $\frac{3}{2\sqrt{3\theta}}$, $\frac{3}{2\sqrt{3}}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2\sqrt{2}}$

7. $6x^2$

9. $\frac{2}{(2t+1)^2}$

11. $\frac{-1}{2(q+1)\sqrt{q+1}}$

13. $1-\frac{9}{x^2}$, 0

15. $3t^2-2t$, 5

17. $\frac{-4}{(x-2)\sqrt{x-2}}$, $y-4=-\frac{1}{2}(x-6)$

19. 6

21. 1/8

23. $\frac{-1}{(x+2)^2}$

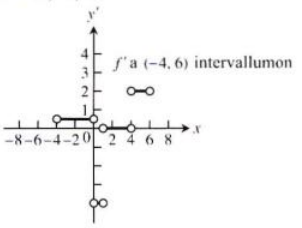
25. $\frac{-1}{(x-1)^2}$

27. b

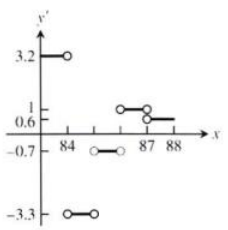
29. d

31. **(a)** $x=0,\ 1,\ 4$

(b)



33.



35. Mivel $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=1$, de $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=0$, az $f(x)$ függvény nem differenciálható az $x=0$ helyen.

37. Mivel $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=2$, de $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=1/2$, az $f(x)$ függvény nem differenciálható az $x=1$ helyen.

39. **(a)** $-3\le x\le 2$; **(b)** nincs ilyen ; **(c)** nincs ilyen.

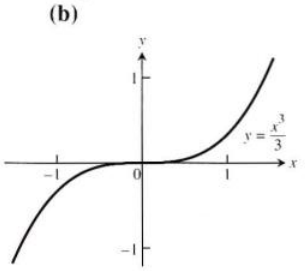
41. **(a)** $-3\le x<0,\ 0<x\le 3$; **(b)** nincs ilyen; **(c)** $x=0$.

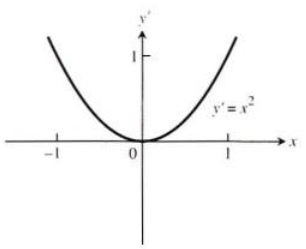
43. **(a)** $-1\le x<0,\ 0<x\le 2$; **(b)** $x=0$; **(c)** nincs ilyen.

45. **(a)** $y'=-2x$; **(c)** $x<0,\ x=0,\ x>0$; **(d)** $-\infty<x<0$, $0<x<\infty$.

47. **(a)** $y'=x^2$

(b)





(c) $x\ne 0,\ x=0$, nincs ilyen.

(d) $-\infty<x<\infty$, nincs ilyen.

49. $y'=3x^2$ sohasem negatív.

51. Igen, az $y+16=-(x-3)$ egyenletű egyenes a $(3,-16)$ pontbeli érintő.

53. Nem, az $y=\lfloor x\rfloor$ függvényre a deriváltra vonatkozó Bolzano-tétel nem igaz.

55. Igen, $(-f)'(x)=-(f'(x))$.

57. Ha $g(t)=mt$ és $h(t)=t$, akkor $\lim\limits_{t\to 0}\frac{g(t)}{h(t)}=m$, általában nem 0.

3.2. Deriválási szabályok

1. $\frac{dy}{dx}=-2x$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-2$

3. $\frac{ds}{dt}=15t^2-15t^4$, $\frac{d^2s}{dt^2}=30t-60t^3$

5. $\frac{dy}{dx}=4x^2-1$, $\frac{d^2y}{d^2}=8x$

7. $\frac{dw}{dz}=-\frac{6}{z^3}+\frac{1}{z^2}$, $\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{18}{z^4}-\frac{2}{z^3}$

9. $\frac{dy}{dx}=12x-10+10x^{-3}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=12-30x^{-4}$

11. $\frac{dr}{ds}=\frac{-2}{3s^3}+\frac{5}{2s^2}$, $\frac{d^2r}{ds^2}=\frac{2}{s^4}-\frac{5}{s^3}$

13. $y'=-5x^4+12x^2-2x-3$

15. $y'=3x^2+10x+2-\frac{1}{x^2}$

17. $y'=\frac{-19}{(3x-2)^2}$

19. $g'(x)=\frac{x^2+x+4}{(x+0{,}5)^2}$

21. $\frac{dv}{dt}=\frac{t^2-2t-1}{(1+t^2)^2}$

23. $f'(s)=\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)^2}$

25. $v'=-\frac{1}{x^2}+2x^{-3/2}$

27. $y'=\frac{-4x^3-3x^2+1}{(x^2-1)^2(x^2+x+1)^2}$

29. $y'=2x^3-3x-1$, $y''=6x^2-3$, $y'''=12x$, $y^{(4)}=12$, $y^{(n)}=0$ minden $n\ge 5$ esetén.

31. $y'=2x-7x^{-2}$, $y''=2+14x^{-3}$

33. $\frac{dr}{d\theta}=3\theta^{-4}$, $\frac{d^2r}{d\theta^2}=-12\theta^{-5}$

35. $\frac{dw}{dz}=-z^{-2}-1$, $\frac{d^2w}{dz^2}=2z^{-3}$

37. $\frac{dp}{dq}=\frac{1}{6}q+\frac{1}{6}q^{-3}+q^{-5}$, $\frac{d^2p}{dq^2}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}q^{-4}-5q^{-6}$

39. **(a)** 13; **(b)** -7; **(c)** 7/25; **(d)** 20.

41. **(a)** $y=-\frac{x}{8}+\frac{5}{4}$; **(b)** $m=-4$ a $(0,1)$ pontban; **(c)** $y=8x-15$, $y=8x+17$.

43. $y=4x$, $y=2$.

45. $a=1$, $b=1$, $c=0$.

47. **(a)** $y=2x+2$; **(c)** $(2,6)$

49. $P'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+2a_2x+a_1$

51. A konstanssal való szorzás a szorzatszabály speciális esete.

53. **(a)** $\frac{d}{dx}(uvw)=uvw'+uv'w+u'vw$

(b) $\frac{d}{dx}(u_1u_2u_3u_4)=u_1u_2u_3u_4'+u_1u_2u_3'u_4+u_1u_2'u_3u_4+u_1'u_2u_3u_4$

(c) $\frac{d}{dx}(u_1\cdots u_n)=u_1\cdot u_2\cdots u_{n-1}u_n'+u_1\cdot u_2\cdots u_{n-1}'u_n+\ldots$
$\ldots+u_1\cdot u_2'\cdots u_{n-1}u_n+u_1'\cdot u_2\cdots u_{n-1}u_n$

55. $\frac{dP}{dV}=-\frac{nRT}{(V-nb)^2}+\frac{2an^2}{V^3}$

3.3. A derivált mint változási sebesség

1. **(a)** -2 m, -1 m/s; **(b)** 3 m/s, 1 m/s, 2 m/s^2, 2 m/s^2; **(c)** irányváltás: $t = 3/2$ s.

3. **(a)** -9 m, -3 m/s; **(b)** 3 m/s, 12 m/s, 6 m/s^2, -12 m/s^2; **(c)** irányváltás nincs.

5. **(a)** -20 m, -5 m/s; **(b)** 45 m/s, 1/5 m/s, 140 m/s^2, 4/25 m/s^2; **(c)** irányváltás nincs.

7. **(a)** $a(1) = -6$ m/s^2, $a(3) = 6$ m/s^2; **(b)** $v(2) = 3$ m/s; **(c)** 6 m.

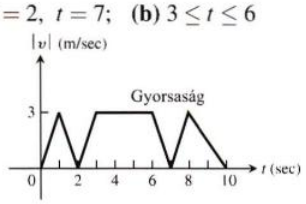
9. Mars: $\approx 7{,}5$ s Jupiter: $\approx 1{,}2$ s.

11. $g_s = 0{,}75$ m/s^2

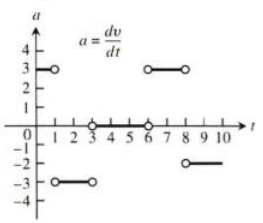
13. **(a)** $v = -9{,}8t$, $|v| = 9{,}8t$ m/s, $a = -9{,}8$ m/s^2; **(b)** $t \approx 3{,}3$ s; **(c)** $v \approx -32{,}6$ m/s

15. **(a)** $t = 2$, $t = 7$; **(b)** $3 \le t \le 6$

(c)



(d)



17. **(a)** 57 m/s; **(b)** 2 s; **(c)** 8 s; **(d)** 10,8 s, 27 m/s; **(e)** 2,8 s; **(f)** a gyorsulás 2 s elteltével a legnagyobb; **(g)** a 2 s és a 10,8 s között állandó, $-9{,}8$ m/s^2 a gyorsulás.

19. **(a)** 4/7 s, 280 cm/s; **(b)** 560 cm/s, 980 cm/s^2; **(c)** 29,75 villanás/s.

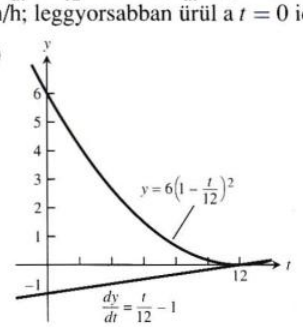
21. C: helyzet, A: sebesség, B: gyorsulás

23. **(a)** 110 dollár/gép; **(b)** 80 dollár; **(c)** 79,90 dollár

25. **(a)** $b'(0) = 10^4$ baktérium/h; **(b)** $b'(5) = 0$ baktérium/h; **(c)** $b'(10) = 10^{-4}$ baktérium/h.

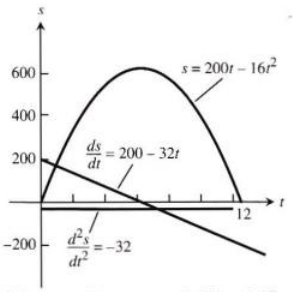
27. **(a)** $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{12} - 1$; **(b)** $\frac{dy}{dt}$ leglassabban ürül a $t = 12$ időpontbeli 0 m/h; leggyorsabban ürül a $t = 0$ időpontban -1 m/h.

(c)



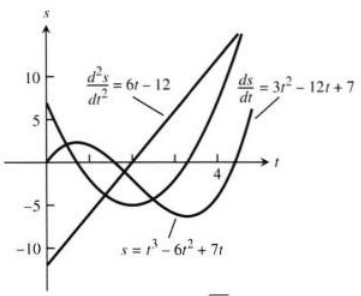
29. $t = 25$ s, $D = \frac{6250}{9}$ m

31.



(a) $v = 0$ a $t = 6{,}25$ s időpontban; **(b)** $v > 0$, amikor $0 \le t \le 6{,}25$ (a test lefelé halad), $v < 0$, amikor $6{,}25 < t \le 12{,}25$ (a test fölfelé halad) ; **(c)** irányváltoztatás a $t = 6{,}25$ s időpontban; **(d)** a sebesség növekszik a $(6{,}25; 12{,}5]$ intervallumban, csökken a $[0; 6{,}25)$ intervallumban; **(e)** a test sebessége a $t = 0$ s és a $t = 12{,}25$ s időpontokban a legnagyobb (200 ft/s), legkisebb a sebessége a $t = 6{,}25$ s időpontban (0 ft/s); **(f)** a $t = 6{,}25$ s pillanatban van a test legtávolabb a kiindulóponttól ($s = 625$ m-re).

33.



(a) $v = 0$ a $t = \frac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ s időpontokban; **(b)** $v < 0$, amikor $\frac{6-\sqrt{15}}{3} < t < \frac{6+\sqrt{15}}{3}$ (a test balra halad), $v > 0$, amikor $0 \le t < \frac{6-\sqrt{15}}{3}$ vagy $\frac{6+\sqrt{15}}{3} < t \le 4$ (a test jobbra halad) ; **(c)** irányváltoztatás a $t = \frac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ s időpontokban; **(d)** a sebesség növekszik a $\left(\frac{6-\sqrt{15}}{3}, 2\right) \cup \left(\frac{6+\sqrt{15}}{3}, 4\right]$ intervallumokban, csökken a $\left[0, \frac{6-\sqrt{15}}{3}\right) \cup \left(2, \frac{6+\sqrt{15}}{3}\right)$ intervallumokban; **(e)** a test sebessége a $t = 0$ s és a $t = 4$ s időpontokban a legnagyobb (7 hosszegység/s), legkisebb a sebesség a $t = \frac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ s időpontokban; **(f)** a $t = \frac{6-\sqrt{15}}{3}$ s pillanatban van a test legtávolabb a kiindulóponttól ($s = -6{,}303$ hosszegységre).

35. **(a)** 135 s; **(b)** az átlagsebesség: $\frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{5-0}{73-0} = \frac{5}{73} \approx 0{,}068$ furlong/s; **(c)** a centrált differenciálhányadossal (l. a 3.4. alfejezet 53. feladatát) a sebesség $\frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{4-2}{59-33} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13} \approx 0{,}077$ furlong/s; **(d)** a leggyorsabban az utolsó furlongon szaladt a ló, mivel ezt tette meg legrövdebb idő (11 s) alatt; **(e)** a gyorsulás az első furlongon a legnagyobb.

3.4. A trigonometrikus függvények deriváltja.

1. $-10 - 3\sin x$

3. $-\csc x \operatorname{ctg} x - \frac{2}{\sqrt{x}}$

5. 0

7. $\frac{-\csc^2 x}{(1+\operatorname{ctg} x)^2}$

9. $4\operatorname{tg} x \sec x - \csc^2 x$

11. $x^2 \cos x$

13. $\sec^2 t - 1$

15. $\frac{-2\csc t \operatorname{ctg} t}{(1-\csc t)^2}$

17. $-\theta(\theta\cos\theta + 2\sin\theta)$

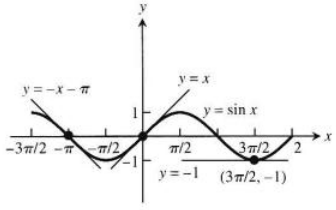
19. $\sec\theta\csc\theta(\operatorname{tg}\theta - \operatorname{ctg}\theta) = \sec^2\theta - \csc^2\theta$

21. $\sec^2 q$

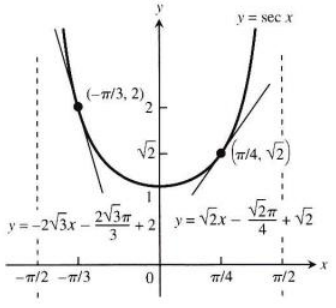
23. $\sec^2 q$

25. **(a)** $2\csc^3 x - \csc x$; **(b)** $2\sec^3 x - \sec x$.

27.



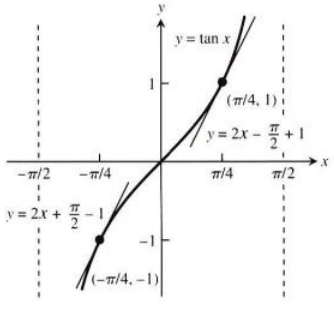
29.



31. Igen, az $x = \pi$ helyen

33. Nem.

35. $(-\frac{\pi}{4}, -1)$; $(\frac{\pi}{4}, 1)$



37. **(a)** $y = -x + \pi/2 + 2$; **(b)** $y = 4 - \sqrt{3}$.

39. 0 **41.** -1 **43.** 0

45. $-\sqrt{2}$ m/s, $\sqrt{2}$ m/s, $\sqrt{2}$ m/s^2, $\sqrt{2}$ m/s^3

47. $c = 9$ **49.** $\sin x$

3.5. A láncszabály. Paraméteres egyenletek

1. $12x^3$ **3.** $3\cos(3x+1)$

5. $-\sin(\sin x)\cos x$ **7.** $10\sec^2(10x-5)$

9. Ha $u = (2x+1)$ és $y = u^5$, akkor $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 5u^4 \cdot 2 = 10(2x+1)^4$.

11. Ha $u = (1-(x/7))$ és $y = u^{-7}$, akkor $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -7u^{-8} \cdot (-\frac{1}{7}) = (1-\frac{x}{7})^{-8}$.

13. Ha $u = ((x^2/8)+x-(1/x))$ és $y = u^4$, akkor $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot (\frac{x}{4}+1+\frac{1}{x^2}) = 4\left(\frac{x^2}{8}+x-\frac{1}{x}\right)^3 (\frac{x}{4}+1+\frac{1}{x^2})$.

15. Ha $u = \operatorname{tg} x$ és $y = \sec u$, akkor $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (\sec u \operatorname{tg} u)(\sec^2 u) = \sec(\operatorname{tg} x)\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)\sec^2 x$.

17. Ha $u = \sin x$ és $y = u^3$, akkor $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 3u^2\cos x = 3\sin^2 x(\cos x)$.

19. $-\frac{1}{2\sqrt{3-t}}$ **21.** $\frac{4}{\pi}(\cos 3t - \sin 5t)$

23. $\frac{\csc\theta}{\operatorname{ctg}\theta+\csc\theta)}$

25. $2x\sin^4 x + 4x^2\sin^3 x\cos x + \cos^{-2} x + 2x\cos^{-3} x\sin x$

27. $(3x-2)^6 - \frac{1}{x^3\left(4-\frac{1}{2x^2}\right)^2}$

29. $\frac{(4x+3)^3(4x+7)}{(x+1)^4}$

31. $\sqrt{x}\sec^2(2\sqrt{x}) + \operatorname{tg}(2\sqrt{x})$

33. $\frac{2\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}$

35. $\frac{dr}{d\theta} = -2\sin(\theta^2)\sin 2\theta + 2\theta\cos(2\theta)\cos(\theta^2)$

37. $\frac{dq}{dt} = \left(\frac{t+2}{2(t+1)^{3/2}}\right)\cos\left(\frac{t}{\sqrt{t+1}}\right)$

39. $2\pi\sin(\pi t-2)\cos(\pi t-2)$

41. $\frac{8\sin(2t)}{(1+\cos 2t)^5}$

43. $-2\cos(\cos(2t-5))(\sin(2t-5))$

45. $\left(1+\operatorname{tg}^4\left(\frac{t}{12}\right)\right)^2\left(\operatorname{tg}^3\left(\frac{t}{12}\right)\sec^2\left(\frac{t}{12}\right)\right)$

47. $-\frac{t\sin(t^2)}{\sqrt{1+\cos(t^2)}}$

49. $\frac{6}{x^3}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)$

51. $2\csc^2(3x-1)\operatorname{ctg}(3x-1)$

53. 5/2 **55.** $-\pi/4$

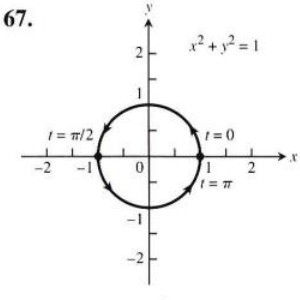
57. 0

59. **(a)** 2/3; **(b)** $2\pi+5$; **(c)** $15-8\pi$; **(d)** 37/6; **(e)** -1; **(f)** $\sqrt{2}/24$; **(g)** 5/32; **(h)** $-5/(3\sqrt{17})$.

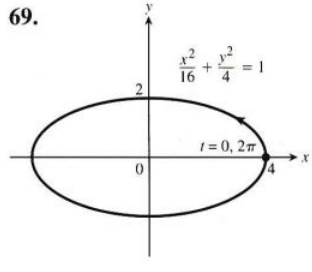
61. 5 **63.** **(a)** 1; **(b)** 1.

65. **(a)** $y = \pi x + 2 - \pi$; **(b)** $\pi/2$.

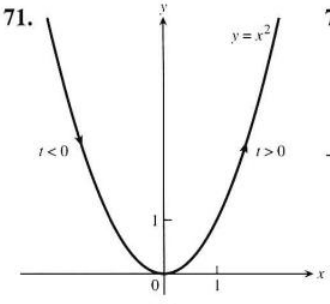
67.



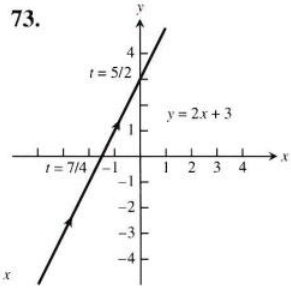
69.



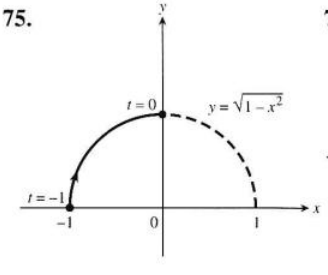
71.



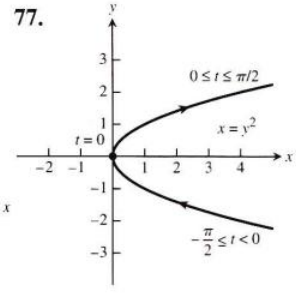
73.



75.



77.



79. **(a)** $x = a\cos t$, $y = -a\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$
(b) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$
(c) $x = a\cos t$, $y = -a\sin t$, $0 \le t \le 24\pi$
(d) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le 4\pi$

81. Egy lehetséges válasz: $x = -1+5t$, $y = -3+4t$, $0 \le t \le 1$.

83. Egy lehetséges válasz: $x = t^2+1$, $y = t$, $t \le 0$.

85. Egy lehetséges válasz: $x = 2-3t$, $y = 3-4t$, $t \ge 0$.

87. $y = -x+2$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\pi/4} = -\sqrt{2}$

89. $y = x+\frac{1}{4}$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1/4} = -2$

91. $y = x-4$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=-1} = \frac{1}{2}$

93. $y = 2$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\pi/2} = -1$

95. A sebességet, a gyorsulást és a „lökést" rendre 2-vel, 4-gyel, illetve 8-cal szorozza.

97. $v(6) = \frac{2}{5}$ m/s, $a(6) = -\frac{4}{125}$ m/s^2

107. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, $y = 2x$, amikor $t = 0$, $y = -2x$, amikor $t = \pi$.

3.6. Implicit függvény deriváltja

1. $\frac{9}{4}x^{5/4}$

3. $\frac{2^{1/3}}{3x^{2/3}}$

5. $\frac{7}{2(x+6)^{1/2}}$

7. $-(2x+5)^{-3/2}$

9. $\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^{1/2}}$

11. $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{7}t^{-5/7}$

13. $\frac{dy}{dt} = -\frac{4}{3}(2t+5)^{-5/3}\cos[(2t+5)^{-2/3}]$

15. $f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x(1-\sqrt{x})}}$

17. $h'(\theta) = -\frac{2}{3}(\sin 2\theta)(1+\cos 2\theta)^{-2/3}$

19. $\frac{-2xy-y^2}{x^2+2xy}$

21. $\frac{1-2y}{2x+2y-1}$

23. $\frac{-2x^3+3x^2y-xy^2+x}{x^2y-x^3+y}$

25. $\frac{1}{y(x+1)^2}$

27. $\cos^2 y$

29. $\frac{-\cos^2(xy)-y}{x}$

31. $\frac{-y^2}{y\sin\left(\frac{1}{y}\right)-\cos\left(\frac{1}{y}\right)+xy}$

33. $-\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\theta}}$

35. $\frac{-r}{\theta}$

37. $y' = -\frac{x}{y}$, $y'' = \frac{-y^2-x^2}{y^3}$

39. $y' = \frac{x+1}{y}$, $y'' = \frac{y^2-(x+1)^2}{y^3}$

41. $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+1}$, $y'' = \frac{1}{2(\sqrt{y}+1)^3}$

43. -2

45. $(-2,1) : m = -1$, $(-2,-1) : m = 1$

47. **(a)** $y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$; **(b)** $y = -\frac{4}{7}x + \frac{29}{7}$.

49. **(a)** $y = 3x+6$; **(b)** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$.

51. **(a)** $y = \frac{6}{7}x + \frac{6}{7}$; **(b)** $y = -\frac{7}{6}x - \frac{7}{6}$.

53. **(a)** $y = -\frac{\pi}{2}x + \pi$; **(b)** $y = \frac{2}{\pi}x - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$.

55. **(a)** $y = 2\pi x - 2\pi$; **(b)** $y = -\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}$.

57. A $(-\sqrt{7},0)$ és a $(\sqrt{7},0)$ pont; a meredekség -2.

59. A $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontban $m = -1$, a $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$ pontban $m = \sqrt{3}$.

61. $(-3,2) : m = -\frac{27}{8}$; $(-3,-2) : m = \frac{27}{8}$; $(3,2) : m = \frac{27}{8}$; $(3,-2) : m = -\frac{27}{8}$.

63. 0

65. -6

67. **(a)** Hamis; **(b)** igaz; **(c)** igaz; **(d)** igaz.

69. $(3,-1)$

73. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^3+2xy}{x^2+3xy^2}$, $\frac{dx}{dy} = -\frac{x^2+3xy^2}{y^3+2xy}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$

3.7. Kapcsolt deriváltak

1. $\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$

3. **(a)** $\frac{dV}{dt} = \pi r^2\frac{dh}{dt}$; **(b)** $\frac{dV}{dt} = 2\pi hr\frac{dr}{dt}$;
(c) $\frac{dV}{dt} = \pi r^2\frac{dh}{dt} + 2\pi hr\frac{dr}{dt}$.

5. **(a)** 1 V/s; **(b)** $-\frac{1}{3}$ A/s; **(c)** $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{I}\left(\frac{dV}{dt} - \frac{V}{I}\frac{dI}{dt}\right)$;
(d) 3/2 Ω/s, R növekszik.

7. **(a)** $\frac{dS}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dx}{dt}$
(b) $\frac{dS}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dx}{dt} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dy}{dt}$
(c) $\frac{dS}{dt} = -\frac{y}{x}\frac{dy}{dt}$

9. **(a)** $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$
(b) $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}b\sin\theta\frac{da}{dt}$
(c) $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}b\sin\theta\frac{da}{dt} + \frac{1}{2}a\sin\theta\frac{db}{dt}$

11. **(a)** 14 cm^2/s, növekszik; **(b)** 0 cm/s, állandó;
(c) -14/13 cm/s, csökken.

13. **(a)** $-3,6$ m/s; **(b)** $-5,355$ m^2/s; **(c)** -1 rad/s.

15. 4 m/s

17. **(a)** $\frac{dh}{dt} = 11,19$ cm/min; **(b)** $\frac{dr}{dt} = 14,92$ cm/min.

19. **(a)** $\frac{-1}{24\pi}$ m/min; **(b)** $r = \sqrt{26y-y^2}$ m;
(c) $\frac{dr}{dt} = -\frac{5}{288\pi}$ m/min

21. 0,5 m/min, 10π m^2/min

23. 2,25 m/s

25. Növekszik, percenként 466/1681 literrel.

27. 1 rad/s

29. -5 m/s

31. $-48,98$ m/s

33. $\frac{5}{72\pi}$ cm/min, $\frac{10}{3}$ cm^2/min

35. 18 cm/min

37. **(a)** $\approx -2,61$ m/s
(b) $d\theta_1/dt \approx -0,12$ rad/s, $d\theta_2/dt \approx 0,12$ rad/s
(b) $d\theta_1/dt \approx -0,17$ rad/s, $d\theta_2/dt \approx 0,17$ rad/s

3.8. Linearizáció és differenciálok

1. $L(x) = 10x - 13$ **3.** $L(x) = 2$

5. $2x$ **7.** -5 **9.** $\frac{1}{12}x + \frac{4}{3}$

11. **(a)** $L(x) = x$; **(b)** $L(x) = \pi - x$.

13. **(a)** $L(x) = 1$; **(b)** $L(x) = 2 - 2\sqrt{3}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

15. $f(0) = 1$; továbbá $f'(x) = k(1+x)^{k-1}$, így $f'(0) = k$. Az $x = 0$ helyen vett linearizáció ennélfogva $L(x) = 1 + kx$.

17. **(a)** 1,01; **(b)** 1,003. **19.** $\left(3x^2 - \frac{3}{2\sqrt{x}}\right)dx$

21. $\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}dx$ **23.** $\frac{1-y}{3\sqrt{y}+x}dx$

25. $\frac{5}{2\sqrt{x}}\cos(5\sqrt{x})dx$ **27.** $(4x^2)\sec^2\left(\frac{x^3}{3}\right)dx$

29. $\frac{3}{\sqrt{x}}(\csc(1-2\sqrt{x})\operatorname{ctg}(1-2\sqrt{x}))dx$

31. **(a)** 0,41; **(b)** 0,4; **(c)** 0,1.

33. **(a)** 0,231; **(b)** 0,2; **(c)** 0,031.

35. **(a)** $-1/3$; **(b)** $-2/5$; **(c)** $1/15$.

37. $dV = 4\pi r_0^2 dr$ **39.** $dS = 12x_0 dx$

41. $dV = 2\pi r_0 h dr$ **43.** **(a)** $0{,}08\pi\ \mathrm{m}^2$; **(b)** 2.%

45. $V \approx 9270\ \mathrm{cm}^3$ **47.** $\frac{1}{3}\%$

49. 0,05%

51. Az arány 37,87; eszerint tehát a gravitációs gyorsulás megváltozásának a Holdon körülbelül 38-szor akkora hatása van, mint egy ugyanakkora mennyiséggel való változásnak a Földön.

53. 3% **55.** 3%

59. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sqrt{1+0}}{1+\left(\frac{0}{2}\right)} = \frac{1}{1} = 1$

65. $0{,}07c$

Gyakorló feladatok

1. $5x^4 - 0{,}25x + 0{,}25$ **3.** $3x(x-2)$

5. $2(x+1)(2x^2+4x+1)$

7. $3(\theta^2 + \sec\theta + 1)^2(2\theta + \sec\theta\operatorname{tg}\theta)$

9. $\frac{1}{2\sqrt{t}(1+\sqrt{t})^2}$ **11.** $2\sec^2 x \operatorname{tg} x$

13. $8\cos^3(1-2t)\sin(1-2t)$ **15.** $5(\sec t)(\sec t + \operatorname{tg} t)^5$

17. $\frac{\theta\cos\theta + \sin\theta}{\sqrt{2\theta}\sin\theta}$ **19.** $\frac{\cos\sqrt{2\theta}}{\sqrt{2\theta}}$

21. $x\csc\left(\frac{2}{x}\right) + \csc\left(\frac{2}{x}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{2}{x}\right)$

23. $\frac{1}{2}x^{1/2}\sec(2x)^2[16\operatorname{tg}(2x)^2 - x^{-2}]$

25. $-10x\csc^2(x)^2$

27. $8x^3\sin(2x^2)\cos(2x^2) + 2x\sin^2(2x^2)$

29. $\frac{-(t+1)}{8t^3}$ **31.** $\frac{1-x}{(x+1)^3}$

33. $\frac{-1}{2x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}}$ **35.** $\frac{-2\sin\theta}{(\cos\theta-1)^2}$

37. $3\sqrt{2x+1}$ **39.** $-9\left[\frac{5x+\cos 2x}{(5x^2+\sin 2x)^{5/2}}\right]$

41. $-\frac{y+2}{x+3}$ **43.** $\frac{-3x^2-4y+2}{4x-4y^{1/3}}$

45. $-\frac{y}{x}$ **47.** $\frac{1}{2y(x+1)^2}$

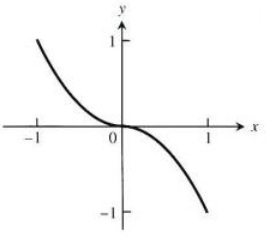
49. $\frac{dp}{dq} = \frac{6q-4p}{3p^2+4q}$ **51.** $\frac{dr}{ds} = (2r-1)(\operatorname{tg} 2s)$

53. **(a)** $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2xy^3-2x^4}{y^5}$; **(b)** $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2xy^2-1}{x^4y^3}$.

55. **(a)** 7; **(b)** -2; **(c)** 5/12; **(d)** 1/4; **(e)** 12; **(f)** 9/2; **(g)** 3/4.

57. 0 **59.** $\sqrt{3}$ **61.** $-\frac{1}{2}$ **63.** $\frac{-2}{(2t+1)^2}$

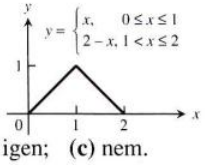
65. **(a)**



$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x < 0 \\ -x^2, & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

(b) igen; **(c)** igen.

67. **(a)**



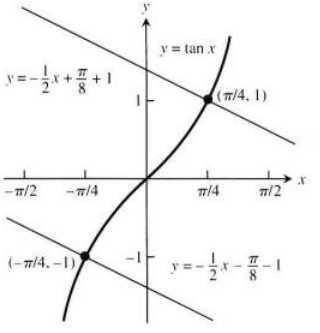
(b) igen; **(c)** nem.

69. $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right)$ és $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

71. $(-1,27)$ és $(2,0)$

73. **(a)** $(-2,16)$, $(3,11)$; **(b)** $(0,20)$, $(1,7)$

75.



77. $\frac{1}{4}$ **79.** 4

81. Érintő: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$; normális: $y = 4x - 2$.

83. Érintő: $y = 2x - 4$; normális: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

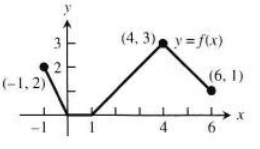
85. Érintő: $y = -\frac{5}{4}x + 6$; normális: $y = \frac{4}{5}x - \frac{11}{5}$.

87. $(1,1) : m = -\frac{1}{2}$; $(1,-1) : m$ nem értelmezett.

89. $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$.

91. B az f, A az f' grafikonja.

93.



95. **(a)** $(0,0)$; **(b)** 1700 nyúl, $\approx$ 1400 nyúl.

97. -1 **99.** 1/2 **101.** 4 **103.** 1

107. **(a)** $\frac{dS}{dt} = (4\pi r + 2\pi h)\frac{dr}{dt}$

(b) $\frac{dS}{dt} = 2\pi r\frac{dh}{dt}$

(c) $\frac{dS}{dt} = (4\pi r + 2\pi h)\frac{dr}{dt} + 2\pi r\frac{dh}{dt}$

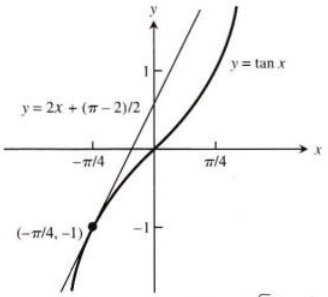
(d) $\frac{dr}{dt} = -\frac{r}{2r+h}\frac{dh}{dt}$

109. $-40\,\text{m}^2/\text{s}$ **111.** $0,02\Omega/\text{s}$ **113.** 22 m/s

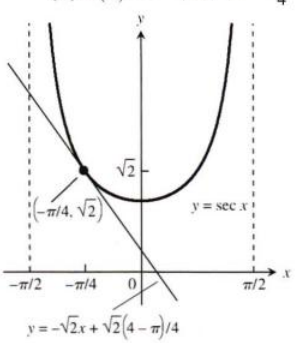
115. **(a)** $r \approx 0,4h$; **(b)** 8,42 cm/min.

117. **(a)** $\frac{3}{5}$ km/h vagy 600 m/s; **(b)** $\frac{18}{\pi}$ rpm (ford/min).

119. **(a)** $L(x) = 2x + \frac{\pi-2}{2}$



(b) $L(x) = -\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}(4-\pi)}{4}$



121. $L(x) = 1,5x + 0,5$

123. $dS = \frac{\pi r h_0}{\sqrt{r^2+h_0^2}}dh$

125. **(a)** 4%; **(b)**8%; **(c)** 12%.

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

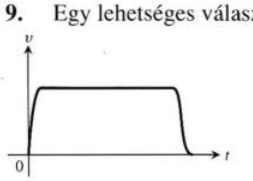
1. **(a)** $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$; $2\cos 2\theta = 2\sin\theta(-\sin\theta) + \cos\theta(2\cos\theta)$;
$2\cos 2\theta = -2\sin^2\theta + 2\cos^2\theta$; $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
(b) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$; $-2\sin 2\theta = 2\cos\theta(-\sin\theta) - 2\sin\theta(\cos\theta)$;
$\sin 2\theta = \cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta$; $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

3. **(a)** $a = 1$, $b = 0$, $c = -\frac{1}{2}$; **(b)** $b = \cos a$, $c = \sin a$.

5. $h = -4$, $k = \frac{9}{2}$, $a = \frac{5\sqrt{5}}{2}$.

7. **(a)** $0,09y$; **(b)** évente 1%-kal növekszik.

9. Egy lehetséges válasz:



11. **(a)** 2,04 s, **(b)** 12,5 s, 125 m.

15. **(a)** $m = -\frac{b}{\pi}$; **(b)** $m = -1$, $b = \pi$.

17. **(a)** $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{9}{4}$

19. f páratlan $\Rightarrow$ f' páros

23. h' az $x = 0$ helyen értelmezve van, de nem folytonos; k' értelmezve van *és* folytonos is az $x = 0$ helyen

27. **(a)** 24,85 cm; **(b)** 0,002 s; **(c)** körülbelül 2,92 percet késik naponta

4. fejezet

4.1. Függvény szélsőértékei

1. Abszolút minimum $x = c_2$-ben, abszolút maximum $x = b$-ben.

3. Abszolút maximum $x = c$-ben, abszolút minimum nincs.

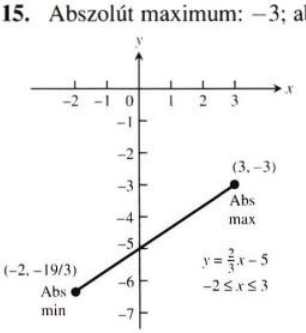
5. Abszolút minimum $x = a$-ban, abszolút maximum $x = c$-ben.

7. Lokális minimum $(-1,0)$-ban, lokális maximum $(1,0)$-ban.

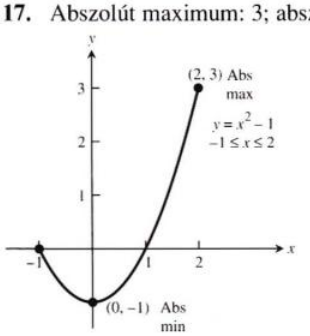
9. Maximum a $(0,5)$ pontban.

11. **(c)** **13.** **(d)**

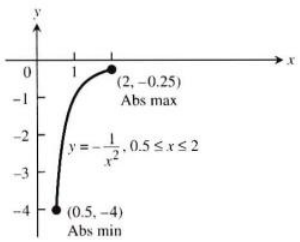
15. Abszolút maximum: -3; abszolút minimum: $-19/3$.



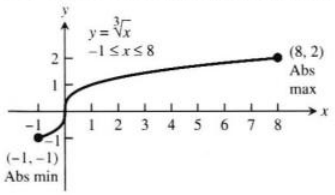
17. Abszolút maximum: 3; abszolút minimum: -1.



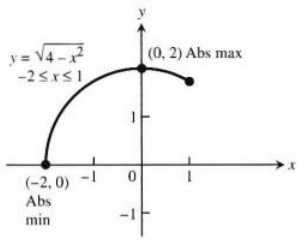
19. Abszolút maximum: -0.25; abszolút minimum: -4.



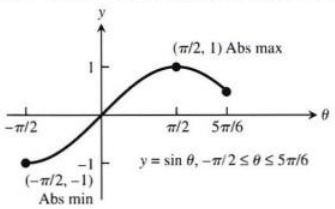
21. Abszolút maximum: 2; abszolút minimum: -1.



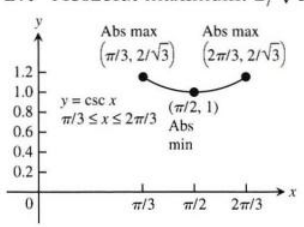
23. Abszolút maximum: 2; abszolút minimum: 0.



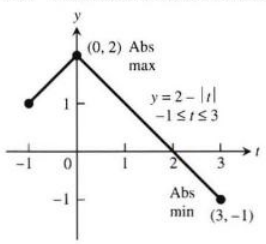
25. Abszolút maximum: 1; abszolút minimum: -1.



27. Abszolút maximum: $2/\sqrt{3}$; abszolút minimum: 1.



29. Abszolút maximum: 2; abszolút minimum: -1.



31. Növekvő a $(0,8)$, csökkenő a $(-1,0)$ intervallumban; abszolút maximum az $x = 8$ helyen, értéke 16; abszolút minimum az $x = 0$ helyen, értéke 0.

33. Növekvő a $(-32,1)$ intervallumban; abszolút maximum a $\theta = 1$ helyen, értéke 1; abszolút minimum a $\theta = -32$ helyen, értéke -8.

35. A minimumérték 1 az $x = 2$ pontban.

37. Lokális maximum a $(-2,17)$ pontban; lokális minimum a $\left(\frac{4}{3}, -\frac{41}{27}\right)$ pontban.

39. A minimumérték 0 az $x = -1$ és $x = 1$ pontban.

41. Lokális minimum van a $(0,1)$ pontban.

43. A maximumérték $\frac{1}{2}$ az $x = 1$ pontban; a minimumérték $-\frac{1}{2}$ az $x = -1$ pontban.

45.

kritikus pont	derivált	szélsőérték	érték
$x = -\frac{4}{5}$	0	lokális max.	$\frac{12}{25}10^{1/3} = 1.034$
$x = 0$	nincs ért.	lokális min.	0

47.

kritikus pont	derivált	szélsőérték	érték
$x = -2$	nincs értelmezve	lokális maximum	0
$x = -\sqrt{2}$	0	minimum	-2
$x = \sqrt{2}$	0	maximum	2
$x = 2$	nincs értelmezve	lokális minimum	0

49.

kritikus pont	derivált	szélsőérték	érték
$x = 1$	nincs értelmezve	minimum	2

51.

kritikus pont	derivált	szélsőérték	érték
$x = -1$	0	maximum	5
$x = 1$	nincs értelmezve	lokális minimum	1
$x = 3$	0	maximum	5

53. **(a)** Nem.

(b) A derivált értelmezve van, és nem nulla, ha $x \neq 2$. Továbbá $f(2) = 0$ és $f(x) > 0$ ha $x \neq 2$.

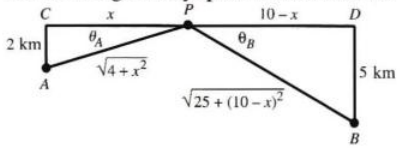
(c) Nem, mert $(-\infty, \infty)$ nem zárt intervallum.

(d) A válasz ugyanaz, mint **(a)**-ban és **(b)**-ben, csak 2-t a-val kell helyettesíteni.

55. **(a)** $C(x) = 0{,}3\sqrt{16+x^2} + 0{,}2(9-x)$ millió dollár, ahol $0 \le x \le 9$ km. Az építési költségek akkor lesznek minimálisak, ha a csővezeték az A ponttól 3,58 km távolságra lévő B pontban ér partot, s azután a part mentén halad az olajfinomítóig.

(b) A vízalatti csővezeték kilométerenkénti p költsége elvben akár végtelen nagy is lehet, ami a csővezeték lehető legrövidebb úton való partravezetését indokolja (azaz x_c legyen nulla). $p > 0{,}218864$ esetén mégis van olyan x_c érték a $(0,9)$ intervallumban, amely minimumot ad C-re. Ezt úgy lehet bizonyítani, hogy megvizsgáljuk $C''(x_c) = \frac{16p}{(16+x_c^2)^{3/2}}$-t, ami $p > 0$ esetén mindig pozitív lesz.

57. A csővezeték hossza: $L(x) = \sqrt{4+x^2} + \sqrt{25+(10-x)^2}$, $0 \le x \le 10$. $x = \frac{20}{7} \approx 2{,}857$ km, ahol x az A város és a szivattyúház távolsága a folyópart mentén mérve.



59. **(a)** A maximumérték 144 $x = 2$-re.

(b) A doboz legnagyobb térfogata 144 térfogategység, s ezt az értéket akkor veszi fel, ha $x = 2$.

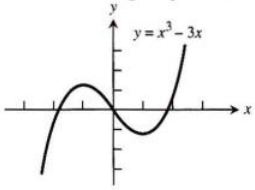
61. A lehető legnagyobb terület $A\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) = \frac{25}{4}$ cm^2.

63. $\frac{v_0^2}{2g} + s_0$.

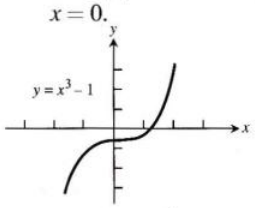
65. Igen.

67. $-c$-ben g-nek lokális maximuma van.

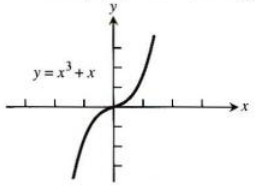
69. **(a)** $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ másodfokú függvény, tehát 0, 1 vagy 2 zérushelye van, és ezeken a helyeken lehetnek f-nek kritikus pontjai. Példák: Az $f(x) = x^3 - 3x$ függvénynek két kritikus pontja van, $x = -1$ és $x = 1$



Az $f(x) = x^3 - 1$ függvénynek egy kritikus pontja van, $x = 0$.



Az $f(x) = x^3 + x$ függvénynek nincs kritikus pontja.



(b) Kettő vagy egy.

71. A maximum értéke 11 az $x = 5$-nél; a minimum értéke a $[-3,2]$ intervallumon -5; lokális maximum a $(-5,9)$ pont.

73. A maximum értéke 5 a $[3,\infty)$ intervallumon; a minimum értéke a $(-\infty,-2]$ intervallumon -5.

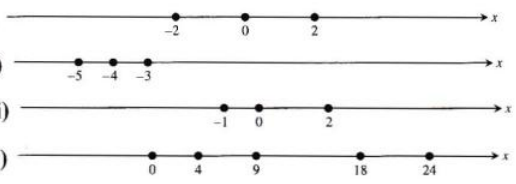
4.2. A középértéktétel

1. 1/2 **3.** 1

5. Nem teljesíti; f nem differenciálható az értelmezési tartomány $x = 0$ belső pontjában.

7. Teljesíti.

11. **(a)**



23. Igen.

25. **(a)** 4; **(b)** 3; **(c)** 3.

27. **(a)** $\frac{x^2}{2} + C$; **(b)** $\frac{x^3}{3} + C$; **(c)** $\frac{x^4}{4} + C$.

29. **(a)** $\frac{1}{x} + C$; **(b)** $x + \frac{1}{x} + C$; **(c)** $5x - \frac{1}{x} + C$.

31. **(a)** $= -\frac{1}{2}\cos 2t + C$; **(b)** $2\sin\frac{t}{2} + C$; **(c)** $-\frac{1}{2}\cos 2t + 2\sin\frac{t}{2} + C$.

33. $f(x) = x^2 - x$ **35.** $r(\theta) = 8\theta + \operatorname{ctg}\theta - 2\pi - 1$

37. $s = 4,9t^2 + 5t + 10$ **39.** $s = \frac{1-\cos(\pi t)}{\pi}$

41. $s = 16t^2 + 20t + 5$ **43.** $s = \sin(2t) - 3$

45. Ha a hőmérő hőmérséklete a t időpontban $T(t)$, akkor $T(0) = -19°\text{C}$ és $T(14) = 100°\text{C}$. A középértéktétel alapján létezik olyan $0 < t_0 < 14$, amelyre $\frac{T(14)-T(0)}{14-0} = 8,5°\text{C/s} = T'(t_0)$, azaz ebben a $t = t_0$ időpillanatban éppen ezzel a sebességgel emelkedett a higanyszint a hőmérőben.

47. Mivel az átlagsebesség 14,167 km/h volt, a középértéktétel szerint legalább egy alkalommal ezzel a sebességgel kellett haladnia a hajónak.

51. A középértéktétel következménye szerint

$$\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b-a} = -\frac{1}{c^2} \Rightarrow c^2\left(\frac{a-b}{ab}\right) = a - b \Rightarrow c = \sqrt{ab}.$$

55. A Bolzano-tétel szerint a és b között $f(x)$-nek legalább egyszer nullának kell lennie. Tegyük fel, hogy $f(x)$ a és b között kétszer veszi fel a nulla értéket. Akkor a középértéktétel szerint $f(x)$ két zérushelye között $f'(x)$-nek legalább egyszer nullának kellene lennie, ez viszont nem teljesülhet, mert ezen az intervallumon $f'(x) \neq 0$. Így $f(x)$ a és b között egyszer és csak egyszer lesz nulla.

61. $1,09999 \leq f(0,1) \leq 1,1$

4.3. Monoton függvények és az első derivált teszt

1. **(a)** 0, 1; **(b)** a $(-\infty,0)$ és $(1,\infty)$ intervallumokban növekvő, $(0,1)$-ben csökkenő; **(c)** Lokális maximum $x = 0$-ban, lokális minimum $x = 1$-ben.

3. **(a)** -2, 1; **(b)** a $(-2,1)$ és $(1,\infty)$ intervallumokban növekvő, $(-\infty,-2)$-ben csökkenő; **(c)** lokális maximuma nincs, lokális minimum $x = -2$-ben.

5. **(a)** -2, 1, 3; **(b)** a $(-2,1)$ és $(3,\infty)$ intervallumokban növekvő, $(-\infty,-2)$ és $(1,3)$ intervallumokban csökkenő; **(c)** lokális maximum $x = 1$-ben, lokális minimum $x = -2$-ben és $x = 3$-ban.

7. **(a)** -2, 0; **(b)** a $(-\infty,-2)$ és $(0,\infty)$ intervallumokban növekvő, $(-2,0)$-ban csökkenő; **(c)** lokális maximum $x = -2$-ben, lokális minimum $x = 0$-ban.

9. **(a)** a $-\infty,-1,5)$ intervallumban növekvő, a $(-1,5,\infty)$ intervallumban csökkenő; **(b)** a lokális maximum értéke 5,25 és ezt $t = -1,5$-ben veszi fel; **(c)** abszolút maximum: 5,25 és ezt $t = -1,5$-ben veszi fel.

11. **(a)** Csökkenő $(-\infty,0)$-ban, növekvő $(0,4/3)$-ban, csökkenő a $(4/3,\infty)$-ben; **(b)** lokális minimum $x = 0$-ban, értéke 32/37; lokális maximum az $x = 4/3$ helyen, értéke 32/27; **(c)** nincs abszolút szélsőértéke.

13. **(a)** Csökkenő $(-\infty,0)$-ban, növekvő $(0,1/2)$-ban, csökkenő $(1/2,\infty)$-ben; **(b)** lokális minimum $\theta = 1/2$-ben, értéke 1/4; lokális maximum a $\theta = 1/2$ helyen, értéke 1/4; **(c)** nincs abszolút szélsőérték.

15. Növekvő $(-\infty,\infty)$-ben, sehol sem csökkenő; **(b)** nincs lokális szélsőértéke; **(c)** nincs abszolút szélsőértéke.

17. Növekvő a $(-2,0)$ és $(2,\infty)$ intervallumokon, csökkenő a $(-\infty,-2)$ és $(0,2)$ intervallumokon; **(b)** a lokális maximum 16, ezt $x = 0$-ban veszi fel, a lokális minimum 0, ezt $x = \pm 2$-ben veszi fel; **(c)** nincs abszolút maximum; az abszolút minimum 0, ezt $x = \pm 2$-ben veszi fel.

19. **(a)** Növekvő $(-\infty,-1)$-ben, csökkenő $(-1,0)$-ben, növekvő $(0,1)$-ben, csökkenő $(1,\infty)$-ben; **(b)** lokális maximum

± 1-ben, értéke 0,5, lokális minimum $x = 0$-ban, értéke 0; **(c)** abszolút maximum $x = \pm 1$-ben, értéke 1/2; abszolút minimum nincs.

21. **(a)** Csökkenő $(-2\sqrt{2}, -2)$-n, növekvő $(-2, 2)$-n, csökkenő $(2, 2\sqrt{2})$-n; **(b)** lokális minimum: $g(-2) = -4$, $g(2\sqrt{2}) = 0$; lokális maximum: $g(-2\sqrt{2}) = 0$, $g(2) = 4$; **(c)** abszolút maximum $x = 2$-ben, értéke 4; abszolút minimum $x = -2$-ben, értéke -4.

23. **(a)** Növekvő $(-\infty, 1)$-ben, csökkenő, ha $1 < x < 2$, csökkenő, ha $2 < x < 3$, szakadása van $x = 2$-ben, növekvő $(3, \infty)$-ben; **(b)** lokális minimum $x = 3$-ban, $(3, 6)$, lokális maximum $x = 1$-ben, $(1, 2)$ **(c)** abszolút szélsőértéke nincs.

25. **(a)** Növekvő $(-2, 0)$-ban és $(0, \infty)$-ben, csökkenő $(-\infty, -2)$-ben; **(b)** lokális minimum: $-6\sqrt[3]{2}$ az $x = -2$ helyen; **(c)** nincs abszolút maximum; abszolút minimum: $-6\sqrt[3]{2}$ az $x = -2$ helyen.

27. **(a)** Növekvő $(-\infty, -2/\sqrt{7})$-ben és $(2/\sqrt{7}, \infty)$-ben, csökkenő $(-2/\sqrt{7}, 0)$-ban és $(0, 2/\sqrt{7})$-ben; **(b)** lokális maximum: $24\sqrt[3]{2}/7^{7/6} \approx 3,12$ $x = -2/\sqrt{7}$-ben; lokális minimum: $-24\sqrt[3]{2}/7^{7/6} \approx -3,12$ $x = 2/\sqrt{7}$-ben; **(c)** abszolút szélsőérték nincs.

29. **(a)** Lokális maximum: 1 $x = 1$-ben; lokális minimum: 0 $x = 2$-ben; **(b)** abszolút maximum: 1 az $x = 1$ helyen; nincs abszolút minimum.

31. **(a)** Lokális maximum: 1 $x = 1$-ben; lokális minimum: 0 $x = 2$-ben; **(b)** nincs abszolút maximum; abszolút minimum: 0 az $x = 2$ helyen.

33. **(a)** Lokális maximum: -9 $t = -3$-ban és 16 $t = 2$-ben; lokális minimum: -16 $t = -2$-ben; **(b)** abszolút maximum: 16 a $t = 2$ helyen, abszolút minimum nincs.

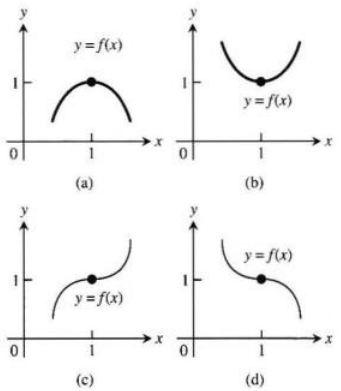
35. **(a)** Lokális minimum: 0 $x = 0$-ban; **(b)** abszolút maximum nincs; abszolút minimum: 0 az $x = 0$ helyen.

37. **(a)** Lokális minimum: $(\pi/3) - \sqrt{3}$ $x = 2\pi/3$-ban; lokális maximum: 0 az $x = 0$ helyen; lokális maximum: π $x = 2\pi$-ben.

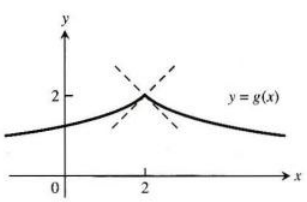
39. **(a)** Lokális minimum: 0 az $x = \pi/4$-ben.

41. Lokális maximum: 3 $\theta = 0$-ban; lokális minimum: -3 a $\theta = 2\pi$-ben.

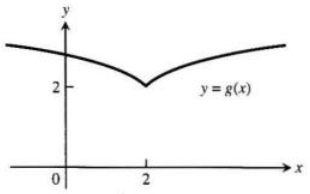
43.



45. **(a)**



(b)



47. Növekvő.

4.4. Konvexitás és a függvénygörbe felrajzolása

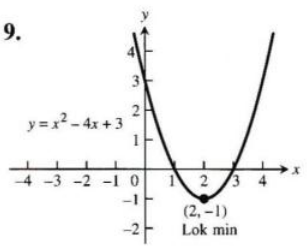
1. Lokális maximum: 3/2 az $x = -1$-ben, lokális minimum: -3 az $x = 2$-ben, inflexiós pont: $(1/2, -3/4)$, emelkedik $(-\infty, -1)$-en és $(2, \infty)$-n, esik $(-1, 2)$-n, konvex $(1/2, \infty)$-n, konkáv $(-\infty, 1/2)$-en.

3. Lokális maximum: 3/4 az $x = 0$-ban, lokális minimum: 0 az $x = \pm 1$-ben, inflexiós pontok $\left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt[3]{4}}{4}\right)$-ben és $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt[3]{4}}{4}\right)$-ben, emelkedik $(-1, 0)$-n és $(1, \infty)$-n, esik $(-\infty, -1)$-en és $(0, 1)$-en, konvex $(-\infty, -\sqrt{3})$-n és $(\sqrt{3}, \infty)$-n, konkáv $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$-n.

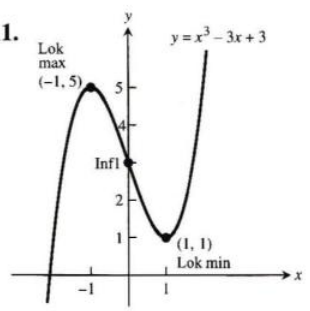
5. Lokális maximum: $-2\pi/3 + \sqrt{3}/2$ az $x = -2\pi/3$-ban; $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ az $x = \frac{\pi}{3}$-ban, lokális minimum: $-\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ az $x = -\frac{\pi}{3}$-ban, $2\pi/3 - \sqrt{3}/2$ az $x = \frac{2\pi}{3}$-ban, inflexiós pontok: $(-\pi/2, -\pi/2)$, $(0, 0)$ és $(\pi/2, \pi/2)$, emelkedik $(-\pi/3, \pi/3)$-ban, esik $(-2\pi/3, -\pi/3)$-ban és $(\pi/3, 2\pi/3)$-ban, konvex $(-\pi/2, 0)$-ban és $(\pi/2, 2\pi/3)$-ban, konkáv $(-2\pi/3, -\pi/2)$-ben és $(0, \pi/2)$-ben.

7. Lokális maximum: 1 az $x = -\frac{\pi}{2}$-ben és $x = \frac{\pi}{2}$-ben, 0 az $x = -2\pi$-ben és $x = 2\pi$-ben; lokális minimum: -1 az $x = -\frac{3\pi}{2}$-ben és $x = \frac{3\pi}{2}$-ben, 0 az $x = 0$-ban, inflexiós pontok: $(-\pi, 0)$ és $(\pi, 0)$, emelkedik $(-3\pi/2, -\pi/2)$-n, $(0, \pi/2)$-n és $(3\pi/2, 2\pi)$-n, esik $(-2\pi, -3\pi/2)$-n, $(-\pi/2, 0)$-n és $(\pi/2, 3\pi/2)$-n, konvex $(-2\pi, -\pi)$-n és $(\pi, 2\pi)$-n, konkáv $(-\pi, \pi)$-n.

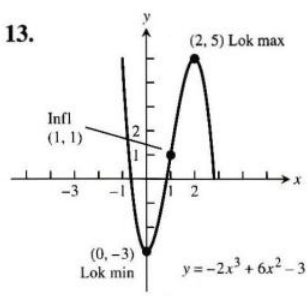
9.



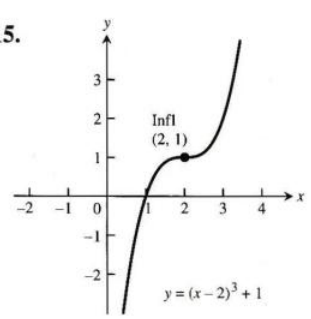
11.



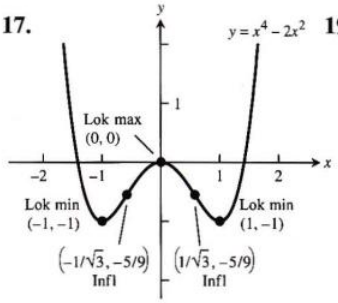
13.



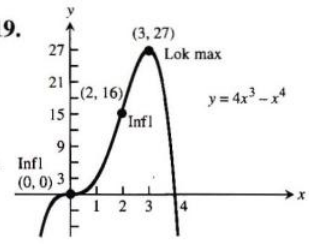
15.



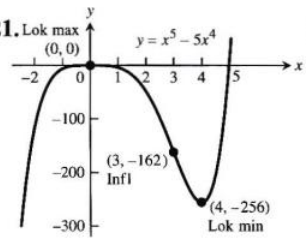
17.



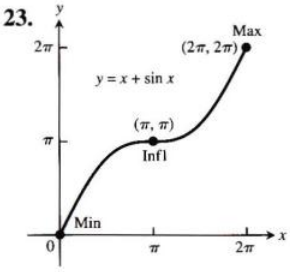
19.



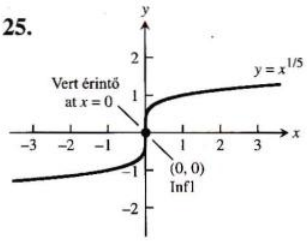
21. Lok max (0, 0)



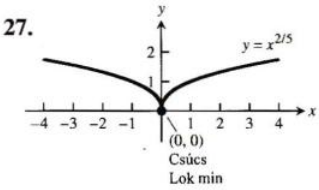
23.



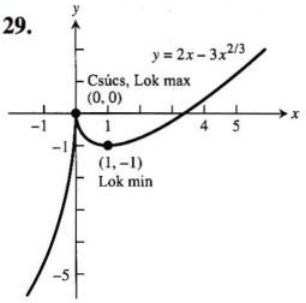
25.



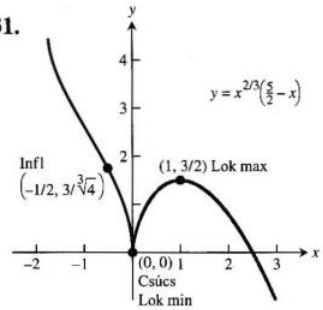
27.



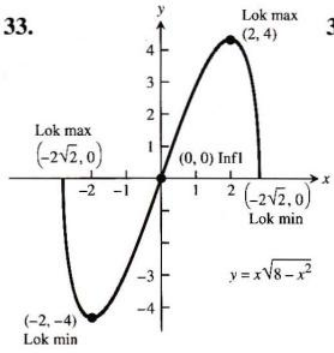
29.



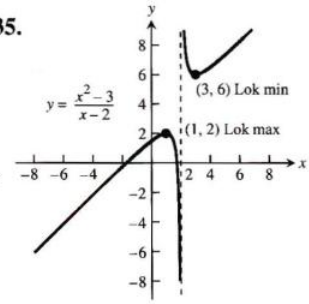
31.



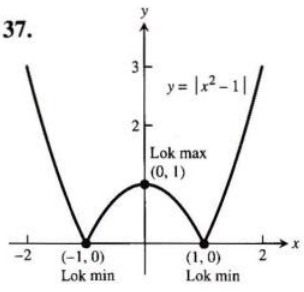
33.



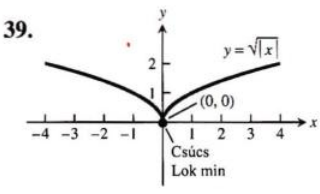
35.



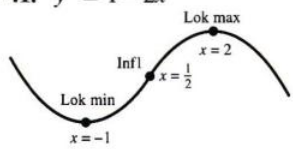
37.



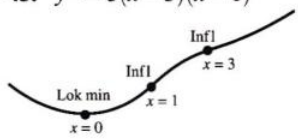
39.



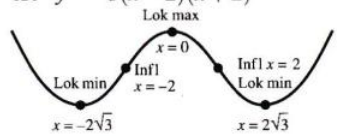
41. $y'' = 1 - 2x$



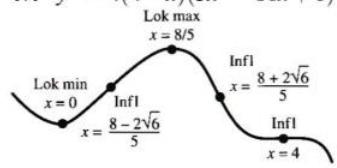
43. $y'' = 3(x-3)(x-1)$



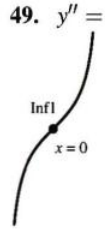
45. $y'' = 3(x-2)(x+2)$



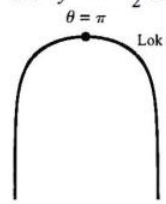
47. $y'' = 4(4-x)(5x^2 - 16x + 8)$



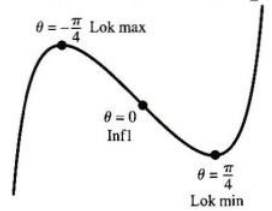
49. $y'' = 2\sec^2 x \operatorname{tg} x$



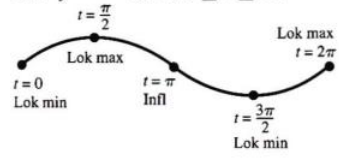
51. $y'' = -\frac{1}{2}\csc^2\frac{\theta}{2}, 0 < \theta < 2\pi$



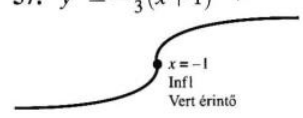
53. $y'' = 2\operatorname{tg}\theta\sec^2\theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$



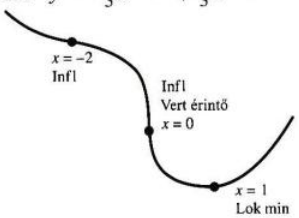
55. $y'' = -\sin t, 0 \le t \le 2\pi$



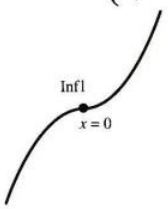
57. $y'' = -\frac{2}{3}(x+1)^{-5/3}$



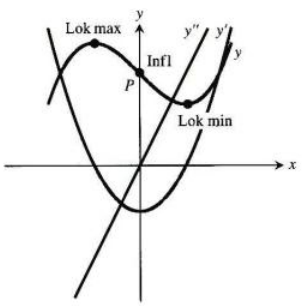
59. $y'' = \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{2}{3}x^{-5/3}$



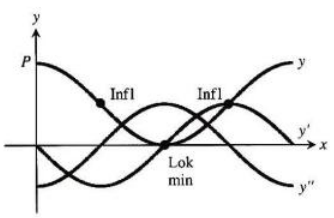
61. $y'' = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$



63.



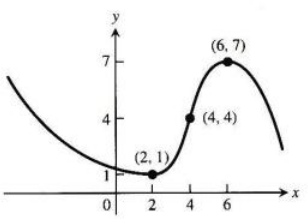
65.



67.

pont	y'	y''
P	−	+
Q	+	0
R	+	−
S	0	−
T	−	−

69.



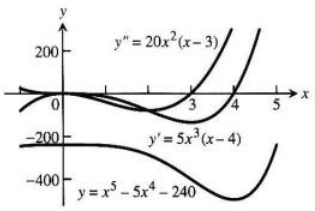
73. ≈ 60 ezer egység.

75. Lokális minimum $x = 2$-nél, inflexiós pont $x = 1$-nél és $x = 5/3$-nál.

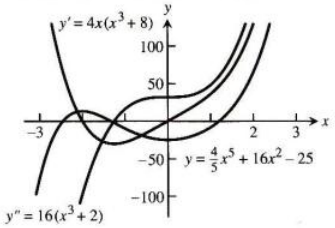
79. $b = -3$

81. **(a)** $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ **(b)** konvex, ha $a > 0$, konkáv, ha $a < 0$.

85. y' és y'' zérushelyei y szélsőérték-, illetve inflexiós helyei. Inflexiós pont van $x = 3$-ban, lokális maximum $x = 0$-ban, lokális minimum $x = 4$-ben.



87. y' és y'' zérushelyei y szélsőérték-, illetve inflexiós helyei. Inflexiós pont van $x = -\sqrt[3]{2}$-ben, lokális maximum $x = -2$-ben, lokális minimum $x = 0$-ban.



91. **(b)** $f'(x) = 3x^2 + k$; $-12k$; pozitív, ha $k < 0$, negatív, ha $k > 0$, 0, ha $k = 0$; f'-nek két zérushelye van, ha $k < 0$, egy zérushelye van, ha $k = 0$ és nincs zérushelye, ha $k > 0$; azaz k előjele szabja meg a lokális szélsőértékek számát.

93. Csúcsos, mert $\lim_{x\to 0^-} = \infty$ és $\lim_{x\to 0^+} = -\infty$.

95. Igen, y' grafikonja metszi az x-tengelyt $x = -3$ közelében, ezért y érintője vízszintes $x = -3$ közelében.

4.5. Alkalmazott optimalizációs problémák

1. 16 cm; 4×4 cm.

3. **(a)** $(x, 1-x)$

5. $\frac{14}{3} \times \frac{35}{3} \times \frac{5}{3}$ dm, $\frac{2450}{27}$ dm^3.

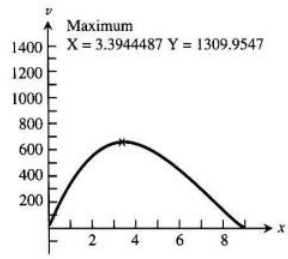
7. 80 000 m^2; 400 m-szer 200 m.

9. **(a)** A tartály optimális mérete: az alapél 10 m, a mélység 5 m.

(b) Adott falvastagság esetén a felületet minimalizálva a súlyára is a minimális értéket kapjuk. Az acéllemez vastagságát más igények szabják meg, például a szerkezeti követelmények.

11. 9×18 dm **13.** $\frac{\pi}{2}$. **15.** $h : r = 8 : \pi$.

17. **(a)** $V(x) = 2x(24-2x)(18-2x)$ **(b)** Az értelmezési tartomány: $(0, 9)$.

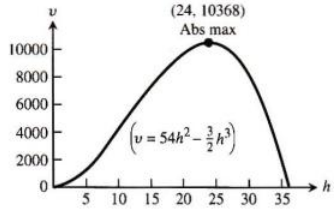


(c) A maximális térfogat $\approx 1309{,}95$ cm^3, amikor $x \approx 3{,}39$ cm. **(d)** $V'(x) = 24x^2 - 336x + 864$, így a kritikus pont $x = 7 - \sqrt{13}$, ami megerősíti a feladat **(c)** részének eredményét. **(e)** $x = 2$ cm vagy $x = 5$ cm.

19. $\approx 2418{,}40$ cm^3

21. (a) $h = 24$, $w = 18$

(b)



23. Ha r a félgömb sugara, h a henger magassága és V a térfogata, akkor $r = \left(\frac{3V}{8\pi}\right)^{1/3}$ és $h = \left(\frac{3V}{\pi}\right)^{1/3}$.

25. (b) $x = \frac{51}{8}$. (c) $L \approx 11$ cm.

27. sugár $\sqrt{2}$ m, magasság 1 m, térfogat $\frac{2\pi}{3}$ m^3.

31. (a) $v(0) = 30$ m/s (b) 82 m, ha $t = 3{,}06$ s (c) Amikor $s = 0$, akkor a sebesség $v(7{,}1) = -39{,}6$ m/s.

33. $\approx 14{,}18$ méter **35.** (a) $\approx 15 \times 26$ cm

37. (a) $10\pi \approx 31{,}42$ cm/s; ha $t = 0{,}5$ s, 1,5 s, 2,5 s, 3,5 s; $s = 0$, a gyorsulás 0. (b) A nyugalmi helyzettől 10 cm-re; a sebesség 0.

39. (a) $s = ((21 - 21t)^2 + 169t^2)^{1/2}$ (b) 21 km/h, 5,4 km/h (c) Nem.

41. $x = \frac{a}{2}$, $v = \frac{ka^2}{4}$. **43.** $\frac{c}{2} + 50$.

45. (a) $\sqrt{\frac{2km}{h}}$ (b) $\sqrt{\frac{2km}{h}}$

49. (a) A bútoraszta losnak px egységnyi anyagot kell rendelnie, hogy az kitartson a következő szállítmányig.

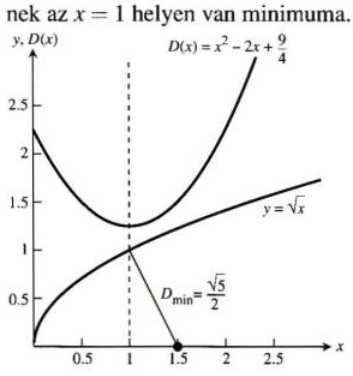
(c) Az átlagos napi költség $= \frac{\left(d + \frac{ps}{2}x^2\right)}{x} = \frac{d}{x} + \frac{ps}{x}x$; $x^* = \sqrt{\frac{2d}{ps}}$; $px^* = \sqrt{\frac{2pd}{s}}$ ad minimumot.

(d) Az egyenes és a hiperbola akkor metszi egymást, amikor $\frac{d}{x} = \frac{ps}{2}x$. $x > 0$-ra $x_{\text{metszéspont}} = \sqrt{\frac{2d}{ps}} = x^*$. Az átlagos napi költség akkor lesz minimális, amikor a szállítás napi költsége és a raktározás napi költsége egyenlő egymással.

51. $M = \frac{C}{2}$ **57.** (a) $y = -1$

59. (a) A minimális távolság $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(b) Az $y = \sqrt{x}$ görbe grafikonjának $(1, 1)$ pontja van legközelebb a $(3/2, 0)$ ponthoz, azaz a $D(x)$ távolságnégyzetfüggénynek az $x = 1$ helyen van minimuma.



61. (a) $V(x) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2\pi a - x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{a^2 - \left(\frac{2\pi a - x}{2\pi}\right)^2}$

(b) Ha $a = 4$: $r = \frac{4\sqrt{6}}{3}$, $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$; ha $a = 5$: $r = \frac{5\sqrt{6}}{3}$, $h = \frac{5\sqrt{3}}{3}$; ha $a = 6$: $r = 2\sqrt{6}$, $h = 2\sqrt{3}$; ha $a = 8$: $r = \frac{8\sqrt{6}}{3}$, $h = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

(c) Mivel $r = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ és $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, hányadosuk: $\frac{r}{h} = \sqrt{2}$.

4.6. Határozatlan alakok és a L'Hospital-szabály

1. $\frac{1}{4}$. **3.** $\frac{5}{7}$. **5.** $\frac{1}{2}$. **7.** 0.
9. 1. **11.** $\sqrt{2}$. **13.** $+1$. **15.** -1.
17. $\frac{1}{2}$. **19.** 3. **21.** na **23.** $-\frac{1}{2}$.
25. 0. **27.** 3. **29.** 1.
31. (b) helyes, (a) nem. **33.** $c = \frac{27}{10}$. **35.** -1.

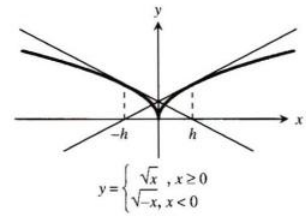
4.7. A Newton-módszer

1. $x_2 = -\frac{5}{3}, \frac{13}{21}$. **3.** $x_2 = -\frac{51}{31}, \frac{5763}{4945}$.

5. $x_2 = \frac{2387}{2000}$.

7. x és minden további approximáció is egyenlő x_0-lal.

9.



11. Az $y = x^3$ és $y = 3x + 1$ vagy az $y = x^3 - 3x$ és az $y = 1$ görbék metszéspontjai ugyanazokat az x értékeket szolgáltatják, mint a feladat (i) részének gyökei vagy (iv) részének megoldásai.

15. 1,165561185.

17. (a) Kettő. (b) 0,35003501505249 és $-1{,}0261731615301$.

19. $\pm 1{,}3065629648764$, $\pm 0{,}5411961001462$.

21. $x \approx 0{,}45$.

23. A gyök 1,17951.

25. (a) $x_0 = -2$-re vagy $x_0 = -0{,}8$-ra $x_i \to -1$.
(b) $x_0 = -0{,}5$-re vagy $x_0 = -0{,}25$-re $x_i \to 0$.
(c) $x_0 = 0{,}8$-ra vagy $x_0 = 2$-re $x_i \to 1$.
(d) $x_0 = -\sqrt{21}/7$-re vagy $x_0 = \sqrt{21}/7$-re a Newton-módszer nem konvergál. x_i értéke hol $-\sqrt{21}/7$, hol $\sqrt{21}/7$ lesz.

27. A válasz a gép sebességétől függ.

29. 2,45; 0,000245.

4.8. Primitív függvények

1. (a) x^2 (b) $\frac{x^3}{3}$ (c) $\frac{x^3}{3} - x^2 + x$

3. (a) x^{-3} (b) $-\frac{1}{3}x^{-3}$ (c) $-\frac{1}{3}x^{-3} + x^2 + 3x$

5. (a) $-\frac{1}{x}$ (b) $-\frac{5}{x}$ (c) $2x + \frac{5}{x}$

7. (a) $\sqrt{x^3}$ (b) $\sqrt{x}$ (c) $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x}$

9. (a) $x^{2/3}$ (b) $x^{1/3}$ (c) $x^{-1/3}$

11. (a) $\cos(\pi x)$ (b) $-3\cos x$ (c) $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + \cos(3x)$

13. (a) $\operatorname{tg} x$ (b) $2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right)$ (c) $-\frac{2}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{3x}{2}\right)$

15. (a) $-\csc x$ (b) $\frac{1}{5}\csc(5x)$ (c) $2\csc\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

17. $\frac{x^2}{2} + x + C$ **19.** $t^3 + \frac{t^2}{4} + C$

21. $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C$ **23.** $-\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$

25. $\frac{3}{2}x^{2/3} + C$ **27.** $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{4}x^{4/3} + C$

29. $4y^2 - \frac{8}{3}y^{3/4} + C$ **31.** $x^2 + \frac{2}{x} + C$

33. $2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C$ **35.** $-2\sin t + C$

37. $-21\cos\frac{\theta}{3} + C$ **39.** $3\operatorname{ctg} x + C$

41. $-\frac{1}{2}\csc\theta + C$ **43.** $3\sec x - 2\operatorname{tg} x + C$

45. $-\frac{1}{2}\cos 2x + \operatorname{ctg} x + C$ **47.** $\frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} + C$

49. $\operatorname{tg}\theta + C$ **51.** $-\operatorname{ctg} x - x + C$

53. $-\cos\theta - \theta + C$

61. **(a)** Hibás: $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\sin x + C\right) = \frac{2x}{2}\sin x + \frac{x^2}{2}\cos x = x\sin x + \frac{x^2}{2}\cos x$.

(b) Hibás: $\frac{d}{dx}(-x\cos x + C) = -\cos x + x\sin x$.

(c) Helyes: $\frac{d}{dx}(-x\cos x + \sin x + C) = -\cos x + x\sin x + \cos x = x\sin x$.

63. **(a)** Hibás: $\frac{d}{dx}\left(\frac{(2x+1)^3}{3} + C\right) = \frac{3(2x+1)^2(2)}{3} = 2(2x+1)^2$.

(b) Hibás: $\frac{d}{dx}((2x+1)^2 + C) = 3(2x+1)^2(2) = 6(2x+1)^2$.

(c) Helyes: $\frac{d}{dx}((2x+1)^3 + C) = 6(2x+1)^2$.

65. (b)

67. $y = x^2 - 7x + 10$ **69.** $y = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}$

71. $y = 9x^{1/3} + 4$ **73.** $s = t + \sin t + 4$

75. $r = \cos(\pi\theta) - 1$ **77.** $v = \frac{1}{2}\sec t + \frac{1}{2}$

79. $y = x^2 - x^3 + 4x + 1$ **81.** $r = \frac{1}{t} + 2t - 2$

83. $y = x^3 - 4x^2 + 5$ **85.** $y = -\sin t + \cos t + t^3 - 1$

87. $y = 2x^{3/2} - 50$ **89.** $y = x - x^{4/3} + \frac{1}{2}$

91. $y = -\sin x - \cos x - 2$

93. **(a)** **(i)** 33,2 egység, (ii) 33,2 egység, (iii) 33,2 egység; **(b)** igaz.

95. $t = 25/k$, $k = 4, 17$

97. **(a)** $v = 10t^{3/2} - 6t^{1/2}$ **(b)** $s = 4t^{5/2} - 4t^{3/2}$

101. **(a)** $-\sqrt{x} + C$ **(b)** $x + C$ **(c)** $\sqrt{x} + C$ **(d)** $-x + C$ **(e)** $x - \sqrt{x} + C$ **(f)** $-x - \sqrt{x} + C$

Gyakorló feladatok

1. Nem.

3. Minimum nincs; abszolút maximum: $f(1) = 16$; kritikus pontok: $x = 1$ és $11/3$.

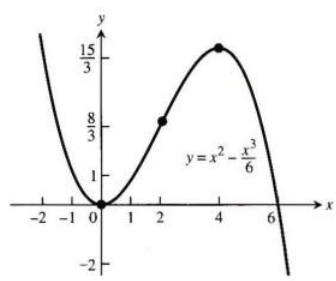
5. Igen, kivéve $x = 0$-nál. **7.** Nem.

11. **(b)** Egy. **13.** **(b)** 0,8555996772

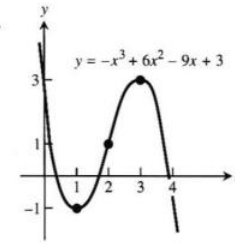
19. A globális minimumérték $\frac{1}{2}$ az $x = 2$ helyen.

21. **(a)** $t = 0,\ 6,\ 12$ **(b)** $t = 3,\ 9$ **(c)** $6 < t < 12$ **(d)** $0 < t < 6$, $12 < t < 14$.

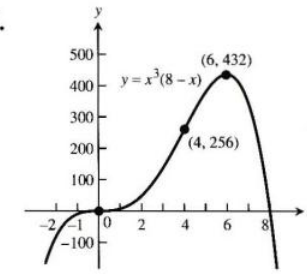
23.



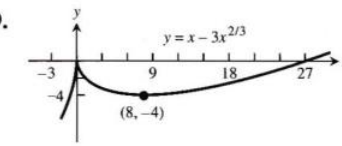
25.



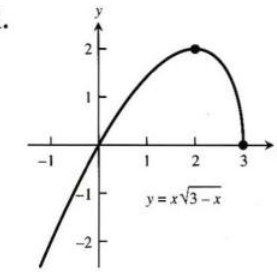
27.



29.

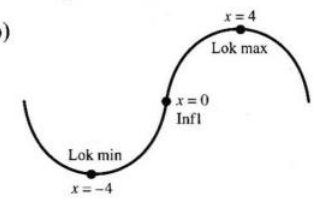


31.



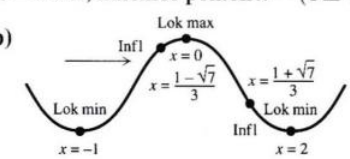
33. **(a)** Lokális maximum $x = 4$-nél, lokális minimum $x = -4$-nél, inflexiós pont $x = 0$-nál.

(b)



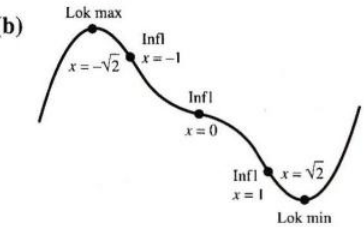
35. **(a)** Lokális maximum $x = 0$-nál, lokális minimum $x = -1$-nél és $x = 2$-nél, inflexiós pontok $x = (1 \pm \sqrt{7})/3$-nál.

(b)

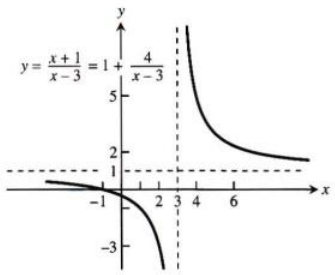


37. **(a)** Lokális maximum $x = -\sqrt{2}$-nél, lokális minimum $x = \sqrt{2}$-nél, inflexiós pont $x = \pm 1$-nél és $x = 0$-nál.

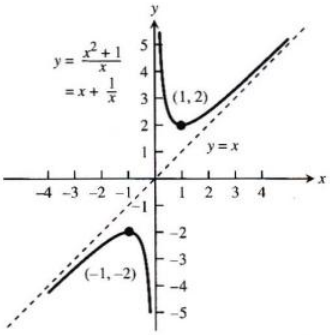
(b)



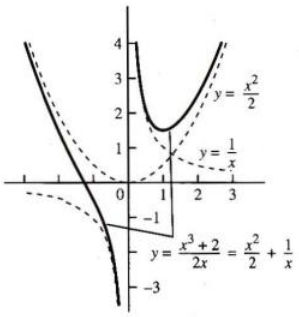
43.



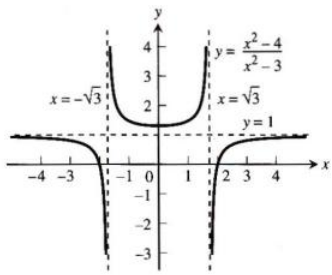
45.



47.



49.



51. 5 **53.** 0 **55.** 1 **57.** 3/7

59. 0 **61.** 1 **63.** **(a)** 0, 36 **(b)** 18, 18

65. 54 területegység.

67. magasság = 2, sugár = $\sqrt{2}$

69. $x = (5-\sqrt{5})$-szer 100 $\approx$ 276 gumi, $y = 2(5-\sqrt{5})$-ször 100 $\approx$ 553 gumi.

71. A méretek: az alap 6×12 cm, a magasság 2 cm; a maximális térfogat 144 cm^3.

73. $x_5 = 2,195823345$ **75.** $\frac{x^4}{4} + \frac{5}{2}x^2 - 7x + C$

77. $2t^{3/2} - \frac{4}{t} + C$ **79.** $-\frac{1}{r+5} + C$

81. $(\theta^2+1)^{3/2} + C$ **83.** $\frac{1}{3}(1+x^4)^{3/4} + C$

85. $10\text{tg}\,\frac{s}{10} + C$ **87.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\sqrt{2}\theta + C$

89. $\frac{1}{2}x - \sin\frac{x}{2} + C$ **91.** $y = x - \frac{1}{x} - 1$

93. $r = 4t^{5/2} + 4t^{3/2} - 8t$

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. Ezen az intervallumon a függvény állandó.

3. Szélsőértékek nem lehetnek egy nyílt intervallum végpontjaiban.

5. **(a)** Lokális minimum $x = -1$-nél, inflexiós pont $x = 0$-nál és $x = 2$-nél. **(b)** Lokális maximum van $x = 0$-ban, lokális minimum van $x = -1$-ben és $x = 2$-ben, inflexiós pont van $x = \frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$-nél.

9. Nem. **11.** $a = 1,\ b = 0,\ c = 1$

13. Igen.

15. $y = h/2$-nél fúrjuk a lyukat!

17. $r = \frac{RH}{2(H-R)}$ $H > 2R$-re és $r = R$ ha $H \le 2R$

19. **(a)** $\frac{10}{3}$; **(b)** $\frac{5}{3}$; **(c)** $\frac{1}{2}$; **(d)** 0; **(e)** $-\frac{1}{2}$; **(f)** 1; **(g)** $\frac{1}{2}$; **(h)** 3.

21. **(a)** $\frac{c-b}{2e}$; **(b)** $\frac{c+b}{2}$; **(c)** $\frac{b^2-2bc+c^2+4ae}{4e}$; **(d)** $\frac{c+b+t}{2}$.

23. $m_0 = 1 - \frac{1}{q}, m_1 = \frac{1}{q}$

25. **(a)** $k = -10,41\ \text{m/s}^2$ **(b)** 21,47 m

27. Igen, $y = x + C$. **29.** $v_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}b^{3/4}$

Függelék

F.5. Algebrai, geometriai és trigonometriai összefüggések

1. **(a)** (14,8); **(b)** (−1,8); **(c)** (0,5)

3. **(a)** A z pont valós tengelyre való tükrözésével; **(b)** a z pont képzetes tengelyre való tükrözésével ; **(c)** a z pont valós tengelyre tükrözésének és a megfelelő helyvektor $1/|z|^2$ arányú nyújtásának egymásutánjával

5. **(a)** az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletű kör(vonal) pontjai; **(b)** az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletű kör belső pontjai; **(c)** az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletű kör külső pontjai

7. Az 1 sugarú, $(-1,0)$ középpontú kör(vonal) pontjai

9. Az $y = -x$ egyenletű egyenes pontjai

11. $4e^{2\pi i/3}$ **13.** $1e^{2\pi i/3}$

15. $\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$

17. $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **19.** $2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$

21. $\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$ **23.** $1 \pm \sqrt{3}i, -1 \pm \sqrt{3}i$

Tárgymutató

A, Á
ablak 60
  négyzetes 60
abszcissza 16
abszolútérték 13
abszolútérték-függvény 30
abszolút maximum 229
abszolút minimum 229
algebra alaptétele 317
algebrai függvény 36
arányosság 40
Argand-diagram 313
aszimptota 109
  ferde 110, 119
  függőleges 117
  vízszintes 109
asszociativitás 307
átlagos változási sebesség 77
átlagsebesség 164

B
bal oldali határérték 102
Bernoulli, Johann 271
besési merőleges 195
Bolzano-tétel 128
  deriváltra vonatkozó 150

C
Cauchy, Augustin-Louis 273
Cauchy-féle középértéktétel 273

Cs
csökkenő függvény 246

D
deriválás 144
deriválás-operátor 145
derivált 136
  bal oldali 147
  jobb oldali 147
  második 161
deriváltfüggvény 143
Descartes-féle levél 194
Descartes, René 17
diferenciálható függvény 147
differenciahányados 136
  centrált 179
differenciál 208, 211
differenciálegyenlet 288
differenciálható függvény 143
Dirichlet-függvény 131
disztributivitás 307
domináns tag 120

E, É
egészrészfüggvény 33
  alsó 30
  felső 31
egész számok 10
egyenes
  irányszöge 18
  iránytangense 18
  kanonikus egyenlete 19
  meredeksége 18
egyenes arányosság 40
egyenlet
  grafikonja 17
egyenlőtlenség 12
  grafikonja 17
  megoldása 12
egységkör 21
egységugrásfüggvény 81
ellipszis
  kanonikus egyenlete 48
  kistengelye 48
  középpontja 48
  nagytengelye 48
elmozdulás 164
emelkedés 25
érintő 78, 132, 134
  dinamikus fogalma 132
értékkészlet 26
értelmezési tartomány 26
  természetes 27
exponenciális függvény 37
extrapoláció 66
extremum 229
extrémum 229

F
felezőpont 25
felső korlát 307
  legkisebb 307
félszögképletek 56
fényterjedés 262
fényvisszaverődés 24
ferde aszimptota 119
Fermat-elv 262
fixpont 131
  -tétel 131
folytonos függvény 125
fraktáledence 282
függőleges aszimptota 117
függőleges egyenes 18
függvény 26
  algebrai 36
  algebrai tört- 36
  alulról korlátos 142
  balról folytonos 123
  csökkenő 38, 246
  deriváltja 136
  differenciálható 143, 147
  egységugrás- 81
  értékkészlete 26
  értelmezési tartománya 26
  exponenciális 37
  felülről korlátos 142
  fifferenciahányadosa 136
  fixpontja 131
  folytonos 125
    intervallumon 125
  folytonos kiterjesztése 127
  grafikonja 28
  határértéke 93
  hatvány- 34
  jobbról folytonos 123
  korlátos 142
  köbgyök- 35
  lineáris 34
  logaritmus- 37
  monoton 246
  négyzetgyök- 35
  növekvő 38, 246
  összetett 44
  páratlan 39
  páros 39
  periodikus 54
  periódusa 54
  polinom- 35
  szakadási pontja 123
  természetes értelmezési tartománya 27
  transzcendens 38
  trigonometrikus 37
  változási sebessége 77
  zérushelye 129

G
görbe
érintője 78, 134
kezdőpontja 185
meredeksége 134
meredeksége egy pontban 133
normálisa 162
paraméteres 185
paraméterezése 185
végpontja 185
grafikon
egyenleté 17
egyenlőtlenségé 17

Gy
gyorsaság 165
gyorsulás 165, 166

H
halmaz 11
eleme 11
részhalmaza 11
üres 11
halmazok
metszete 11
uniója 11
harmonikus rezgőmozgás 176
háromszög-egyenlőtlenség 13
határbevétel 263
határérték
a végtelenben 106, 107
bal oldali 102
jobb oldali 102
kétoldali 102
precíz definíciója 93
szemléletes fogalma 79
határköltség 168, 263
határprofit 263
hatványfüggvény 34
hatványláncszabály 183
Héron-képlet 72
hidrosztatkai nyomás 24
hőmérsékleti skálák 25
hőszigetelés 24

I, Í
implicit deriválás 193
inflexiós pont 233, 251
inkrementum 17
integrál
határozatlan 290
integrandus 290
intervallum 11
belseje 12
belső pontja 12
félig nyílt 12
határa 12
határpontja 12
nyílt 12
véges 11
végtelen 11
zárt 12
irányszög 18
iránytangens 18
irracionális számok 11

J
jobb oldali határérték 102

K
kapcsolt deriváltak 201
képzetes tengely 313
kistengely 48
kommutativitás 307
komplex szám
abszolút értéke 313
argumentuma 313
képzetes része 311
konjugáltja 312
valós része 311
komplex számok 311
konjugált 312
konkáv 250
konvex 250
koordinátapár 16
koordinátatengely 16
koszinusztétel 56
köbgyökfüggvény 35
kör 20
belseje 21
kanonikus egyenlete 21
külseje 21
közbensőérték-tulajdonság 128
középértéktétel
Cauchy-féle 273
kritikus pont 233
kúp
-hajtogatás 33

L
láncgörbe 38
láncszabály 180
Leibniz-szabály 227
L'Hospital-szabály 271
lineáris approximáció 209
sztenderd 209
lineáris egyenlet 19
általános 19
lineáris függvény 34
linearizáció 209
Lissajous-görbe 192
logaritmusfüggvény 37
lokális maximum 231
lokális minimum 231
Lorentz-kontrakció 141
lökés 166

M
második derivált 161
matematikai indukció 301
maximum
abszolút 229
lokális 231
megszüntethető szskadás 124
metszet 11
abszolút 229
lokális 231
Mt. Washington 25

N
nagytengely 48
négyzetgyökfüggvény 35
növekmény 17
növekvő függvény 246
numerikus függvényreprezentáció 29

O, Ó
órainga 227
ordináta 16
origó 16

Ö, Ő
összegezési képletek 56

P
parabola 22
ábrázolása 22
csúcspontja 22
tengelye 22
paraméterezés 185
páratlan függvény 39
páros függvéy 39
páros-páratlan felbontás 73
periodikus függvény 54
periódus 54
pillanatnyi változási sebesség 78
polinomfüggény 35
pontdiagram 29
primitív függvény 285

R
racionális függvény 36
racionális számok 10
radián 51
regresszióanalízis 64
regressziós görbe 64
relatív szélsőérték 232
rendőrelv 89
részhalmaz 11

S
sebesség 165
pillanatnyi 165
síknegyed 17
simaság 148
simulókör 225
Snellius-törvény 262

Sz
szabadesés 76
Galilei-féle törvénye 76
szakadás
megszüntethető 124
szakadási pont 123
szelő 77
szélsőérték
relatív 232
szélsőértéktétel 230
szendvicstétel 89, 91, 103, 109, 305
szinusztétel 59
szög
alaphelyzete 51

T
távolság
pont és egyenes 25
teljes indukció 301
természetes számok 10
test 307
rendezett 307
teljesen rendezett 307
transzcendens függvény 38
trigonometrikus függvények 37

U, Ú
ugrás 123, 124
unió 11

Ü, Ű
üres halmaz 11

V
valós szám
abszolútértéke 13
valós számegyenes 9
valós számok 9, 307
algebrai tulajdonságai 10
konstrukciója 308
rendezési tulajdonságai 10
teljességi tulajdonsága 10
valós tengely 313
változási sebesség
átlagos 77
pillanatnyi 78
vízszintes egyenes 18

W
Wilson-féle kritikusmennyiség-képlet 269

Z
zérushely 129

Hibajegyzék

Jelmagyarázat:

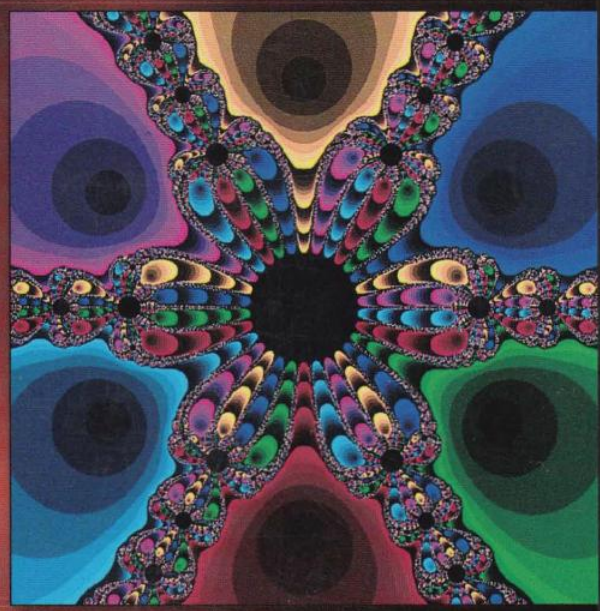
oldal/rész/sor	*rész* lehet bekezdés sorszáma, tétel, definíció...
76/2.1. TÁBL/8	76. oldal, 2.1. TÁBLÁZAT, 8. sor
123//6–12	123. oldal, 6. sortól a 12. sorig
123//a6	123. oldal, alulról a 6. sor
123/a3/2	123. oldal, alulról a 3. bekezdés, 2. sor
!!	súlyos hiba, a diákoknak külön megemlítendő
!	zavaró hiba
–	apró elírás, sajtóhiba, helyesírási hiba,...
??	kérdéses/problémás hely, megoldandó az előadáson
szöveg	a „szöveg" megjegyzés vagy utasítás, pl. *törlendő*

A hibák jegyzéke:

hely		hiba	javítás/megjegyzés
10//7	–	F.4. függelékben	F.3. függelékben
21/7. PÉLDA/8	–	$-6x$	$-6y$
11//21	–	részhalmazának nevezzük	**részhalmazának** nevezzük
39//a5-a6	–	$f(x)=x+1$ páros...páratlan	$f(x)=x+1$ páratlan...páros
40/1.3. TÁBL/a1	–	és azt meghatározó távolságuk (R).	és a bolygópálya nagytengelyének fele (R).
54/1.4. TÁBL/4	–	$\cos 180^\circ = 0$	$\cos 180^\circ = -1$ *kétszer*
64//11	–	viszont f viszont a 0 helyen	f viszont a 0 helyen
76/2.1. TÁBL/8	–	16,649	19,649
76/2.1. TÁBL/9	–	16,6049	19,6049
123//a1	!!	3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$	3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Ha c az értelmezési tartomány végpontja, akkor a 2. és 3. pontokban bal, illetve jobb oldali határérték számítandó.
145//a2	–	$\ldots\vert_{x=a}$	$\ldots\vert_{x=4}$
154//a12	??	binomiális tétel	*a könyvben nincs a binomiális tétel kimondva, egyébként e tétel egyszerűbben bizonyítható nélküle*
186/11. PÉLDA	–	Adjuk meg a $(2,-1)$	Adjuk meg a $(-2,1)$
194/2. PÉLDA/6	–	$y=-\sqrt{25-x^2}$	$y_2=-\sqrt{25-x^2}$
203/3. PÉLDA/8	–	x tengely pozitív iránya mutat észak felé... y tengely mutat kelet felé	y tengely pozitív iránya mutat észak felé... x tengely mutat kelet felé
204/5. feldt/a6	–	$V=IR$	$U=IR$
204/5. feldt/a1	–	Mennyi dV/dt?	Mennyi dU/dt?
205/5. feldt/4	–	$V=12V$	$U=12V$
210//12–13	–	3.2	3,2 *kétszer*
236/25–26. fldt	–	$\ldots\le x\le\ldots$	$\ldots\le\theta\le\ldots$ *kétszer*
240//9.	–	$b=-3$	$b=3$
250/4.26. ÁBRA	–	KONKÁV	KONVEX
252//1	–	a $t=0$ és	a $t=1$ és
253/Mego (c)/4	–	f'' előjele $-\ -\ +$	f'' előjele $+\ -\ +$
262/középen	–	$\sqrt{b^2-(d-x)^2}$	$\sqrt{b^2+(d-x)^2}$ *háromszor*
268/33. F. ábra	–	8,1 m	8,2 m
272//a5	!!	kivéve esetleg az a pontot	*törlendő*
274//a2	!	véges határértéke van.	véges, nem 0 határértéke van.
275//3	–	$\frac{\sin s}{1+2x}$	$\frac{\sin x}{1+2x}$
275/4. PÉLDA/5	!	$=\infty$	$=-\infty$
334//6	!	33. Igen.	33. Nem.

A Thomas-féle Kalkulus a mérnökök matematikaoktatásában világszerte fogalommá vált. Az eredeti, 15 fejezetből álló terjedelmes tankönyv központi témája a differenciál- és az integrálszámítás, célja pedig, hogy az olvasót bevezesse az analízis e két alapvető eszközének legfontosabb alkalmazásaiba, a kúpszeletek, a véges sorok és sorozatok, a vektorszámítás, a vektorfüggvények, a parciális deriváltak és a többszörös integrálok elméletébe. A magyar kiadás 3 kötetben jelenik meg.

Az Olvasó most az első kötetet tartja a kezében, melynek tárgya a differenciálszámítás. Az első fejezet lényegében a továbblépéshez szükséges középiskolai ismeretek összefoglalása. A 2. fejezetben a szerzők a határérték és a folytonosság fogalmát tárgyalják, majd ezt követi a 3. fejezetben a derivált fogalmának bevezetése és a deriválási szabályok ismertetése. A 4. fejezet a derivált legfontosabb alkalmazásait öleli fel, itt kaptak helyet oly fontos és közismert tételek is, mint a Bolzano- vagy a Darboux-tétel. A kötet egyik nagy erénye, hogy rendkívül nagy számban tartalmaz kidolgozott példákat, illetve különböző szintű gyakorlófeladatokat, így egységes komplex tankönyvként és példatárként használható.



A Thomas-féle Kalkulust első lépcsőben (hosszas és alapos mérlegelést követően) a BME választotta a BSc-képzés alaptankönyvének. Ez a nagyszabású vállalkozás lehetőséget teremt más egyetemek és főiskolák számára, hogy olyan tankönyvsorozatra tervezzék a BSc-szintű analízistanításukat, amely mind hazai, mind világviszonylatban konvertálható tudást ad a hallgatóknak. A Thomas-féle Kalkulus magyar kiadását és használatát éppen ez indokolja. Számtalan kiváló magyar nyelvű analízistankönyv létezik, de a Thomas-féle Kalkulussal egyik sem vetekedhet ismertség és elfogadottság tekintetében.

Az eredeti művet George B. Thomas, a Massachusetts Institute of Technology néhai professzora írta a differenciál- és integrálszámítás oktatására szolgáló tankönyvként.

TYPOTEX

4200 Ft

ISBN 978-9-632790-11-4

9 789632 790114