BUDAPESTI MŰSZAKI FŐISKOLA

Kandó Kálmán Villamosmérnöki Kar

Dr. Baróti György – Kis Miklós
Schmidt Edit – Sréterné dr. Lukács Zsuzsanna

MATEMATIKA FELADATGYŰJTEMÉNY

BMF KVK 1190
BUDAPEST, 2005

Budapesti Műszaki Főiskola
Kandó Kálmán Villamosmérnöki Kar

Dr. Baróti György – Kis Miklós
Schmidt Edit – Sréterné dr. Lukács Zsuzsanna

MATEMATIKA FELADATGYŰJTEMÉNY

Budapest, 2005

Szerkesztette: Sréterné dr. Lukács Zsuzsanna főiskolai docens

Lektorálta: dr. György Anna főiskolai docens

Szerzők:
dr. Baróti György főiskolai docens – 6., 7., 14. fejezet,
Kis Miklós főiskolai adjunktus – 1., 11., 13. fejezet,
Schmidt Edit főiskolai adjunktus – 4., 5., 8. (8.3.1.–8.3.5. kivételével), 9. fejezet,
Sréterné dr. Lukács Zsuzsanna főiskolai docens – 2., 3., 8.3.1.–8.3.5., 10., 12., 15. fejezet

Felelős kiadó: Dr. Turmezei Péter, a BMF KVK dékánja.
Munkaszám: BMF KVK 1190

ELŐSZÓ

Feladatgyűjteményünket a korábbi Kandó Kálmán Műszaki Főiskola hallgatói számára készítettük, akik ma a Budapesti Műszaki Főiskola három karán tanulnak. Az összeállításkor a nálunk folyó képzés igényeit tartottuk szem előtt, és tekintetbe vettük a különböző oktatási formák (nappali-, esti-, levelező tagozat, távoktatás) sajátosságait is.
A kötet két részből áll: az első a feladatokat, a második a megoldásokat tartalmazza. A feladatok, egy-egy témakörön belül, nehézségi sorrendben következnek egymás után. A példák összeválogatásánál, a terjedelmi korlátok szabta kereteken belül, igyekeztünk bőséges és változatos kínálatot adni a zárthelyikre és a vizsgákra való felkészüléshez. A megoldási részben a feladatokhoz vagy végeredményeket (E), vagy vázlatos (V), vagy részletes megoldásokat (M) közlünk. Ezt jelzik a feladatok sorszáma mögött álló betűk. A gyűjteményünkben a mi követelményeinknek megfelelő feladatok szerepelnek. Reméljük azonban, hogy más felsőoktatási intézmények hallgatói is eredményesen tudják majd használni.
Az észrevételeket, a könyvben előforduló esetleges hibák közlését kérjük és köszönettel fogadjuk.
Budapest, 2000. szeptember

A szerkesztő

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Mindenekelőtt megkülönböztetett köszönettel tartozunk dr. Bognár Sándor kari főigazgató, főiskolai tanárnak, akinek kezdeményezésére és támogatásával készítettük el ezt a régi hiányt pótló feladatgyűjteményt.
Köszönjük a könyv lektorának, dr. György Anna kari főigazgató-helyettes főiskolai docensnek hasznos megjegyzéseit és javaslatait, amelyekkel segítette munkánkat.
Végül köszönettel tartozunk a kötet szerkesztőjének, Sréterné dr. Lukács Zsuzsanna főiskolai docensnek az észrevételeiért, a gondos és körültekintő szerkesztői munkájáért, amellyel biztosította, hogy formailag és tartalmilag egységes, reményeink szerint jól használható feladatgyűjteményt adhassunk hallgatóink kezébe.
Budapest, 2000. szeptember

A szerzők

1. KOMPLEX SZÁMOK

1.1. Komplex számok ábrázolása

1.1.1. Írja fel az alábbi komplex számok valós és képzetes részét, valamint algebrai alakban a konjugáltját, és számítsa ki az abszolút értéküket! A megadott komplex számokat és a konjugáltakat ábrázolja a komplex számsíkon egy-egy pontként!

a) (M) $z_1 = 3 - j$;
b) (V) $z_2 = -2 + 2j$;
c) (V) $z_3 = 2 + 3j$;
d) (E) $z_4 = -3 - 3j$;
e) (E) $z_5 = -5$;
f) (E) $z_6 = -4j$;
g) (E) $z_7 = -1 + 3j$;
h) (E) $z_8 = 4 + j$.

1.1.2. Írja fel az alábbi komplex számok konjugáltját trigonometrikus alakban, nemnegatív, a teljes szögnél kisebb irányszöggel. A megadott komplex számokat és a konjugáltakat ábrázolja a komplex számsíkon egy-egy pont helyvektoraként!

a) (M) $z_1 = 3(\cos 45° + j\sin 45°)$;
b) (V) $z_2 = 4(\cos 210° + j\sin 210°)$;
c) (V) $z_3 = \sqrt{2}(\cos 420° + j\sin 420°)$;
d) (V) $z_4 = 3{,}5(\cos(-1140°) + j\sin(-1140°))$;
e) (E) $z_5 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right)$;
f) (E) $z_6 = 5\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + j\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$;
g) (E) $z_7 = 4{,}5\left(\cos\frac{20\pi}{12} + j\sin\frac{20\pi}{12}\right)$;
h) (E) $z_8 = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{13\pi}{4}\right)\right)$.

1.1.3. Írja fel az alábbi komplex számok konjugáltját exponenciális alakban, nemnegatív, a teljes szögnél kisebb irányszöggel. A megadott komplex számokat és a konjugáltakat ábrázolja a komplex számsíkon egy-egy pont helyvektoraként!

a) (M) $z_1 = 3\,e^{-j\frac{19\pi}{6}}$;

b) (V) $z_2 = 2\,e^{j\pi}$;

c) (E) $z_3 = 5\,e^{j\frac{5\pi}{6}}$;

d) (E) $z_4 = 3\,e^{-j\frac{21\pi}{14}}$;

e) (E) $z_5 = 2\,e^{j\frac{23\pi}{12}}$;

f) (E) $z_6 = 4\,e^{-j\frac{25\pi}{6}}$;

g) (M) $z_7 = e^{\frac{1}{2}\ln 5 + j\frac{\pi}{3}}$;

h) (E) $z_8 = e^{-\ln\frac{1}{5}+j}$.

1.2. Áttérés a komplex szám egyes alakjai között

1.2.1. Írja fel algebrai alakban az alábbi, trigonometrikus illetve exponenciális alakban megadott komplex számokat!

a) (M) $z = 3\left(\cos 60° + j \sin 60°\right)$;

b) (V) $z = 4\left(\cos(-45°) + j \sin(-45°)\right)$;

c) (E) $z = 2\left(\cos(-330°) + j \sin(-330°)\right)$;

d) (E) $z = \sqrt{2}\left(\cos 765° + j \sin 765°\right)$;

e) (M) $z = \sqrt{2}\,e^{-j\frac{5\pi}{4}}$;

f) (E) $z = 2\,e^{j\frac{7\pi}{2}}$;

g) (E) $z = 6\,e^{-j\frac{11\pi}{6}}$;

h) (E) $z = \sqrt[4]{3}\,e^{j\frac{29\pi}{7}}$.

1.2.2. Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakban az alábbi, algebrai alakban megadott komplex számokat!

a) (M) $z = 1 + \sqrt{3}\,j$;

b) (M) $z = -5\sqrt{3} + 5\,j$;

c) (M) $z = -5\,j$;

d) (E) $z = -4 - 4\,j$;

e) (E) $z = -5$;

f) (E) $z = -e + e\,j$;

g) (E) $z = -0{,}61 - 8{,}83\,j$;

h) (E) $z = -10^{-3} - 1{,}3\cdot 10^{-3}\,j$.

1.2.3. Írja fel az alábbi komplex számokat algebrai, trigonometrikus és exponenciális alakban!

a) (M) $z = -2\left(\cos 135° - j \sin 225°\right)$;

b) (V) $z = \sqrt{2}\left(-\sin 90° - j \sin 270°\right)$;

c) (V) $z = 6\left(\operatorname{tg} 135° + j \sin 60°\right)$;

d) (E) $z = -\sqrt{3}\left(\operatorname{ctg}(-210°) - j \operatorname{tg}(-300°)\right)$;

e) (V) $z = \left(\ln e^3\right) - \left(\lg 10^{\sqrt{3}}\right) j^3$; **f)** (E) $z = 4j^8 - 2j^5$;

g) (E) $z = (2j)^{10}$; **h)** (E) $z = (3j)^{-3}$.

1.2.4. Határozza meg az alábbi komplex számok valós, illetve képzetes részét úgy, hogy irányszöge, illetve abszolút értéke a megadott legyen! A kapott komplex számot írja fel algebrai és trigonometrikus alakban is!

a) (M) $z = -3 + b\,j$, ha $\varphi = 150°$; **b)** (E) $z = a + \sqrt{2}\,j$, ha $\varphi = \frac{7\pi}{3}$;

c) (E) $z = a + b\,j$, ha $\varphi = -240°$ és $r = 5$;

d) (E) $z = a + b\,j$, ha $\varphi = \frac{15\pi}{11}$ és $r = 17$.

1.3. Műveletek különféle alakú komplex számokkal

1.3.1. Végezze el a kijelölt műveletet, és az eredményt adja meg trigonometrikus alakban!

a) (M) $z = (2 + 9j) + (4 - 3j)$; **b)** (E) $z = (-7 - 4j) - (1 - 4j)$;

c) (E) $z = (-1 + 3j) + (3 - 5j)$; **d)** (M) $z = \left(-3\sqrt{3} + 3j\right)\left(\sqrt{3} - j\right)$;

e) (V) $z = \left(-2\sqrt{3} - 3j\right)\left(-2 + \sqrt{3}j\right)$; **f)** (M) $z = \left(2\sqrt{3} - 2j\right)\left(-\sqrt{3} + \sqrt{3}j\right)$;

g) (E) $z = (3 + 2j)(-4 - j)$; **h)** (V) $z = \left(-2 + 2\sqrt{3}\,j\right)^2$;

i) (E) $z = \left(-2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\,j\right)^3$; **j)** (V) $z = \frac{2 - 2j}{1 + j}$;

k) (E) $z = \frac{3j}{-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,j}$; **l)** (E) $z = \frac{(2 + 2j) - (7 - 3j)}{(-3 + 7j) - (-5 + 9j)}$;

m) (E) $z = \frac{6 - 3\sqrt{12}\,j}{-2\sqrt{3} + 2j}$; **n)** (E) $z = \frac{2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\,j}{1 + \sqrt{3}\,j}$.

1.3.2. Végezze el a kijelölt műveletet, és az eredményt adja meg algebrai alakban!

a) (M) $z = \big(2(\cos 37° + j\sin 37°)\big)\big(3(\cos 113° + j\sin 113°)\big)$;

b) (E) $z = \Big(\sqrt{8}\,(\cos 108° + j\sin 108°)\Big)\Big(\sqrt{2}\,(\cos 72° + j\sin 72°)\Big)$;

c) (V) $z = \big(5(\cos 169° + j\sin 169°)\big)\big(0{,}3\big(\cos(-199°) + j\sin(-199°)\big)\big)$;

d) (E) $z = z_1\,\overline{z}_2$, ha

$$z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right) + j\sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right)\right),$$

$$z_2 = \sqrt{8}\,(\cos 240° + j\sin 240°);$$

e) (M) $z = \dfrac{6(\cos 178° + j\sin 178°)}{2(\cos 133° + j\sin 133°)}$;

f) (E) $z = \dfrac{\sqrt{2}\,(\cos 336° + j\sin 336°)}{\sqrt{8}\,(\cos 126° + j\sin 126°)}$;

g) (E) $z = \dfrac{3\sqrt{2}\,\big(\cos(-37°) + j\sin(-37°)\big)}{\sqrt{6}\,\big(\cos(-127°) + j\sin(-127°)\big)}$;

h) (E) $z = \dfrac{4{,}28\big(\cos(-257°) + j\sin(-257°)\big)}{1{,}07\big(\cos 323° + j\sin 323°\big)}$.

1.3.3. Végezze el a kijelölt műveletet, és az eredményt adja meg algebrai alakban!

a) (M) $z = \big(3(\cos 15° + j\sin 15°)\big)^2$;

b) (E) $z = \big(2(\cos 45° + j\sin 45°)\big)^5$;

c) (E) $z = \big(2(\cos 135° + j\sin 135°)\big)^4$;

d) (E) $z = \big(\cos(-3°) + j\sin(-3°)\big)^{15}$;

e) (M) $z = \sqrt[3]{27\big(\cos 180° + j\sin 180°\big)}$;

f) (E) $z = \sqrt[4]{16\big(\cos 120° + j\sin 120°\big)}$;

g) (E) $z = \sqrt[5]{7{,}83\big(\cos 66° + j\sin 66°\big)}$;

h) (V) $z = \big(\cos(-60°) + j\sin(-60°)\big)^{-\frac{5}{2}}$.

1.3.4. Végezze el a kijelölt műveletet, és az eredményt adja meg algebrai alakban!

a) (M) $z = \left(2\,e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{2}}\right)$;

b) (E) $z = \left(1{,}25\,e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)\left(4\,e^{j\frac{\pi}{6}}\right)$;

c) (V) $z = \left(3\,e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)^4$;

d) (E) $z = \left(\sqrt{2}\,e^{-j\frac{\pi}{5}}\right)^3$;

e) (M) $z = \sqrt[3]{2\sqrt{2}\,e^{j\pi}}$;

f) (E) $z = \sqrt[4]{81\,e^{j2\pi}}$.

1.4. Vegyes feladatok

1.4.1. Végezze el a kijelölt műveleteket, és az eredményt adja meg algebrai és trigonometrikus alakban is!

a) (M) $z = \dfrac{6\sqrt{3}+6j}{j\left((6+5j)-(6+3j)\right)}$;

b) (M) $z = \dfrac{(-2+2j)(1-j)}{1+j}$;

c) (E) $z = \dfrac{(-5+3j)-(-4+2j)}{1-j}$;

d) (E) $z = \dfrac{(2+2j)^2(-1-j)}{-1+j}$;

e) (E) $z = \dfrac{(1+j)}{(-1-j)(3-3j)^4}$;

f) (E) $z = \dfrac{4}{\sqrt{3}-j} + 2 - j$;

g) (V) $z = \dfrac{j+j^4+j^7+j^{10}+j^{13}}{1+j^3+j^6+j^9+j^{12}}$;

h) (E) $z = \dfrac{-6+9j}{-3j}$;

i) (E) $z = \dfrac{6-j}{\left(1-\sqrt{3}\,j\right)\left(-3-\sqrt{3}\,j\right)+5j} + 2 - j$.

1.4.2. Végezze el a kijelölt műveletet, és az eredményt adja meg algebrai alakban!

a) (M) $z = \sqrt[3]{-27}$;

b) (V) $z = \sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\,j}$;

c) (V) $z = \sqrt{-5{,}47\cdot 10^{-2}}$;

d) (E) $z = \sqrt[4]{-\dfrac{81}{2} + \dfrac{81\cdot\sqrt{3}}{2}\,j}$;

e) (E) $z = \sqrt[3]{(4-4j)^4}$;

f) (E) $z = \sqrt[4]{-16\sqrt{3}+16j}$;

g) (M) $z = \sqrt{6-8j}$; **h)** (E) $z = \sqrt[5]{j^7}$.

1.4.3. Adja meg az alábbi komplex számokat algebrai és trigonometrikus alakban is!

a) (M) $z = \dfrac{z_1 + z_2}{\overline{z}_1} z_3$, ha

$z_1 = 2e^{j\frac{5\pi}{3}}$, $z_2 = 2\sqrt{3}(\cos 90° + j\sin 90°)$ és $z_3 = -j$;

b) (V) $z = \dfrac{\overline{z}_1 + \overline{z}_2}{z_1} z_3$, ha

$z_1 = 1 + \sqrt{3}j$, $z_2 = 2\sqrt{3}(\cos 270° + j\sin 270°)$ és $z_3 = e^{j\frac{\pi}{2}}$;

c) (V) $z = \dfrac{1 + \dfrac{1}{z_1}}{1 - \dfrac{1}{z_2}} (\overline{z}_1 - z_2)$, ha

$z_1 = 2\sqrt{2}(\cos 135° + j\sin 135°)$ és $z_2 = 2 - 2j$;

d) (E) $z = \dfrac{z_1(z_2 + z_3)}{z_2 z_3}$, ha

$z_1 = 14e^{j\frac{8\pi}{3}}$, $z_2 = -5 + \sqrt{3}j$ és $z_3 = 1 + 3\sqrt{3}j$;

e) (E) $z = \dfrac{z_1 z_2 z_3}{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3}$, ha

$z_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}j$, $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{6}}$ és $z_3 = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}j$;

f) (E) $z = \dfrac{z_1(z_2 + z_3)}{z_1 + z_2 + z_3}$, ha

$z_1 = 3e^{j\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = -\sqrt{3} + j$ és $z_3 = 2(\cos 30° + j\sin 30°)$;

g) (E) $z = \dfrac{\overline{z}_1 \overline{z}_2 + z_3}{z_1 z_2 - z_3}$, ha

$z_1 = 2(\cos 300° + j\sin 300°)$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}\,j$ és $z_3 = 4e^{-j\frac{\pi}{2}}$;

h) (E) $z = \dfrac{z_1^{\,2} + z_2}{z_1 - z_2^{\,2}}$, ha $z_1 = 4e^{j\frac{\pi}{2}}$ és $z_2 = 3e^{j\frac{3\pi}{2}}$.

1.4.4. Adja meg az alábbi komplex számokat algebrai és trigonometrikus alakban is!

a) (M) $z = \sqrt[3]{z_1 (z_2 + \overline{z}_3)}$, ha

$z_1 = 2e^{j\pi}$, $z_2 = 4(\cos 90° + j\sin 90°)$ és $z_3 = 4 + 4j$;

b) (M) $z = \sqrt[4]{\dfrac{z_1 + \overline{z}_2}{z_3}}$, ha

$z_1 = 2\sqrt{2}\,(\cos 90° + j\sin 90°)$, $z_2 = 4e^{j\frac{\pi}{4}}$ és $z_3 = -\dfrac{\sqrt{2}}{8}$;

c) (E) $z = \sqrt[4]{\dfrac{z_1}{z_2 + \overline{z}_3}}$, ha

$z_1 = -2\sqrt{2}$, $z_2 = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + j\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$ és $z_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{8} + j\dfrac{\sqrt{2}}{8}$;

d) (E) $z = \sqrt[3]{z_1 z_2^{\,-1}}$, ha $z_1 = \dfrac{9\left(1 + \sqrt{3}\,j\right)}{2}$ és $z_2 = 8\sqrt{3}\,e^{j\frac{5\pi}{6}}$;

e) (E) $z = \sqrt[3]{\dfrac{z_1 z_2 - z_3}{\overline{z}_1 \overline{z}_2 + z_3}}$, ha

$z_1 = 2e^{j\frac{5\pi}{3}}$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}\,j$ és $z_3 = 4(\cos 270° + j\sin 270°)$;

f) (E) $z = \sqrt[4]{\dfrac{z_1 + (\overline{z}_2 + z_3)\overline{z}_1}{z_1 - z_2 + \overline{z}_3}} + z_3$, ha

$z_1 = 1 + 2j$, $z_2 = 2 - j$ és $z_3 = 1 - j$.

1.4.5. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán, és a gyököket adja meg algebrai alakban!

a) (M) $z^4 - (1+\sqrt{3}\,j) = 0$;

b) (V) $\dfrac{9\sqrt{2}}{z^3(3+3j)} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$;

c) (E) $\dfrac{z^5}{4} + (2-2\sqrt{3}\,j)\,2e^{j\pi} = 0$;

d) (E) $z^4 - \dfrac{z_1+z_2}{z_3} = 0$, ha

$z_1 = -\sqrt{3} - j$, $z_2 = \sqrt{12}(\cos 120° + j\sin 120°)$ és $z_3 = 2j$.

1.4.6. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán, és a gyököket adja meg exponenciális alakban!

a) (M) $z^2 - 2z + 4 = 0$;

b) (E) $4z^2 - 5z + 25 = 0$;

c) (V) $z^4 + 6z^2 + 36 = 0$;

d) (E) $z^3 + 9z = 0$.

1.4.7. Jelentsen R, X_C és X_L mindegyike egy-egy tetszőleges, pozitív valós számot. Határozza meg az alábbiakban megadott, z_0 komplex számok valós és képzetes részét!

a) (V) $z_0 = \dfrac{1}{R - jX_C}$;

b) (V) $\dfrac{1}{z_0} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{jX_L}$;

c) (E) $\dfrac{1}{z_0} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{jX_L} - \dfrac{1}{jX_C}$;

d) (E) $z_0 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{jX_L}} - jX_C$.

1.4.8. (V) Jelentsen R, X_C és X_L mindegyike egy-egy olyan paramétert, amelyek csak pozitív valós számokat vehetnek fel értékül. Adott X_C és X_L esetén, hogyan válasszuk meg R értékét, hogy a

$$z_0 = \frac{1}{\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{jX_C}} + jX_L$$

komplex szám képzetes része nulla legyen? Milyen feltételt kell teljesíteniük X_C és X_L értékeinek ebben az esetben?

2. LINEÁRIS ALGEBRA

2.1. Mátrixok

2.1.1. Adottak az alábbi mátrixok:

$\mathbf{a}^* = [2 \quad -1 \quad 1 \quad 5 \quad 3]$, $\mathbf{b}^* = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ -2 & 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) (E) Határozza meg az **a***, **B** és **D** mátrixok típusát és a **D** mátrix d_{12}, d_{23} és d_{32} elemeit!

b) (E) Milyen speciális mátrixokat talál a fenti mátrixok között?

c) (E) Írja fel a **b***, **B** és **D** mátrixok transzponáltját!

2.1.2. Döntse el, hogy a mátrixokban szereplő a, b, c, d, f valós változók mely értéke esetén lesznek a mátrixok egyenlőek (e az Euler-féle szám)!

a) (M) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \ln\sqrt{e} & \sin 30^\circ \\ \log_3 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -1 \end{bmatrix}$;

b) (E) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 2^{\log_2 3} & 0 \\ \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} & 0 & \operatorname{arctg} 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \log_{\frac{1}{2}} 4 & b & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix}$;

c) (E) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \ln e^3 - \ln\frac{1}{e} & \cos 480^\circ & 2 \\ \sin(-300^\circ) & e^{\operatorname{tg}\pi} & -1 \\ 0 & \arccos 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a & b & 2 \\ c & d & -1 \\ 0 & f & 3 \end{bmatrix}$.

2.1.3. Adottak a következő mátrixok (j a képzetes egység, e az Euler-féle szám)!

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 2e^{j\frac{\pi}{2}} & \cos 0 & 5^{\log_5 2} \\ \ln\frac{1}{e^2} & \sin 0 & 3(\cos 180^\circ + j\sin 180^\circ) \end{bmatrix}.$$

Végezze el az alábbi műveleteket!

a) (E) $\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$; **b)** (V) $\mathbf{A} - \mathbf{B} + 2\mathbf{C}$.

2.1.4. Számítsa ki az alábbi skaláris szorzatok értékét!

a) (E) $\mathbf{a}*\mathbf{b}$, ha $\mathbf{a}^* = [1 \quad -3 \quad 2 \quad 0]$, $\mathbf{b}^* = [3 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$;

b) (E) $\mathbf{c}*\mathbf{d}$, ha $\mathbf{c}^* = [2 \quad -1 \quad 6 \quad 0 \quad 2]$, $\mathbf{d}^* = [-1 \quad 2 \quad 1 \quad -1 \quad 3]$.

2.1.5. Adottak a következő mátrixok:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Számítsa ki az alábbi szorzatokat!

a) (E) $\mathbf{AE}$; **b)** (E) $\mathbf{B0}$; **c)** (M) $\mathbf{AB}$.

2.1.6. Adottak a következő mátrixok:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\\ 0 & 2\\ 5 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}5 & -2 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 6 & 5\end{bmatrix},\quad \mathbf{a}^*=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Végezze el a kijelölt szorzásokat!

a)(E) $\mathbf{a}^*\mathbf{A}$; **b)**(M) $\mathbf{Aa}$; **c)**(E) $\mathbf{AB}$;
d)(M) $\mathbf{DB}$; **e)**(E) $\mathbf{AC}$.

2.1.7. Számítsa ki az **AB** és **BA** szorzatot és vizsgálja meg, hogy egyenlőek-e!

a)(E) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$;

b)(E) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 2 & 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & 2\\ -2 & 2 & -2\\ -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & -2\end{bmatrix}$;

c)(E) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -4\\ 2 & 0 & 5\\ -1 & 2 & 2\\ 3 & -4 & 1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & 2 & -5 & 0\\ 1 & 4 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 4 & -3\end{bmatrix}$.

2.1.8. Számítsa ki az $\mathbf{AA}^*$ szorzatot és állapítsa meg, hogy milyen szabályosság van az eredmény mátrixban!

a) (E) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$; **b)** (E) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

2.1.9. (M) Számítsa ki az **AP** és **PA** szorzatokat és állapítsa meg, hogy milyen kapcsolat van az eredmény mátrix és az **A** mátrix között, ha

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2. Determinánsok

2.2.1. Számítsa ki az alábbi determinánsok értékét (j a képzetes egység, e az Euler-féle szám)!

a) (E) $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$; **b)** (M) $D=\begin{vmatrix} j & 1+j \\ 2 & -j \end{vmatrix}$;

c) (M) $D=\begin{vmatrix} -4 & -1 & 12 \\ 1 & 5 & -3 \\ 10 & 0 & -30 \end{vmatrix}$; **d)** (M) $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;

e) (M) $D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -10 & 5 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$; **f)** (V) $D=\begin{vmatrix} 1+j & 1 & j \\ j & 0 & 1-j \\ 1-j & -j & 1 \end{vmatrix}$;

g) (V) $D=\begin{vmatrix} e^{-j\pi} & \cos 450^\circ + j\cdot\sin 450^\circ & j^3 \\ j^{28} & 2 & e^{j\frac{\pi}{2}} \\ 2(\cos 180^\circ + j\cdot\sin 180^\circ) & 1+j & j^{14} \end{vmatrix}$;

h)(E) $D=\begin{vmatrix} 4 & -3 & 9 & 1 \\ -2 & 7 & -2 & 2 \\ 3 & 9 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; **i)** (E) $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

2.2.2. Határozza meg, hogy mely valós vagy komplex x értékek esetén lesz az alábbi determinánsok értéke nulla (j a képzetes egység)!

a)(V) $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2-x^2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; **b)**(E) $D=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$;

c)(V) $D=\begin{vmatrix} 1 & -j & -1 \\ 1 & x & -1 \\ 1-j & 1 & -j \end{vmatrix}$.

2.2.3. (V) Igazolja, hogy az alábbi egyenlőség bármely valós x esetén teljesül!

$$\begin{vmatrix} 1+\cos x & 1+\sin x & 1 \\ 1-\sin x & 1+\cos x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2.3. Lineáris egyenletrendszerek

2.3.1. Oldja meg Cramer-szabállyal az alábbi egyenletrendszereket!

a)(M)

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 7x_3 &= -7, \\ x_1 + 6x_2 - 10x_3 &= -8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 9; \end{aligned}$$

b)(E)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5; \end{aligned}$$

c) (E)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3, \\ x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= -1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 &= 1; \end{aligned}$$

d) (E)

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 1, \\ -x_1 + 8x_2 + 3x_3 &= 2; \end{aligned}$$

e) (E)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6, \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= -8; \end{aligned}$$

f) (E)

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4, \\ x_1 - x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= -1; \end{aligned}$$

g) (V)

$$\begin{aligned} -3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5; \end{aligned}$$

A megoldást a természetes számok halmazán keresse!

h) (V)

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 4x_4 &= 7, \\ 5x_2 + x_3 + 6x_4 &= 30, \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 7, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_4 &= 10. \end{aligned}$$

2.3.2. Számítsa ki Cramer-szabállyal a kijelölt ismeretlen értékét!

a) (M)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 1, \\ -2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 6x_4 &= 1, \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 - 7x_4 &= 0; \\ x_4 &= ? \end{aligned}$$

b) (E)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3; \\ x_1 &= ? \end{aligned}$$

c) (E)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 &= 0; \\ x_3 &= ? \end{aligned}$$

d) (E)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 &= 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0; \\ x_2 &= ? \end{aligned}$$

2.3.3. Oldja meg Cramer-szabállyal az alábbi egyenletrendszereket a komplex számok halmazán!

a) (M)

$$\begin{aligned} -2jx_1 + (2-j)x_2 &= 5-4j, \\ (1+j)x_1 - 5x_2 &= -11+6j; \end{aligned}$$

b) (E)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1+j, \\ 3x_1 + jx_2 &= 2-3j; \end{aligned}$$

c) (V)

$$\begin{aligned} (-1+j)x_1 - x_2 &= 0, \\ x_1 + x_2 + jx_3 &= 1, \\ -jx_1 + (1+j)x_2 &= -3+j; \end{aligned}$$

d) (E)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8, \\ x_1 + jx_2 - x_3 &= -j, \\ x_1 + (1+j)x_2 + 2jx_3 &= -2+2j. \end{aligned}$$

2.3.4. Oldja meg Gauss-módszerrel az alábbi inhomogén egyenletrendszereket!

a) (E)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= -5; \end{aligned}$$

b) (E)

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 3, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6, \\ -8x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= -3, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 14; \end{aligned}$$

c) (M)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6; \end{aligned}$$

d) (E)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 &= 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0; \end{aligned}$$

e) (V)

$$\begin{aligned} x_1 - 8x_2 + 9x_3 &= -32, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 12; \end{aligned}$$

f) (E)

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 7x_3 &= 13, \\ 9x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= 2, \\ 5x_1 + 6x_2 - 22x_3 &= -14; \end{aligned}$$

g) (M)

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1,\\ x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1,\\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0,\\ x_1 - x_2 + 3x_4 &= 0; \end{aligned}$$

h) (E)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6,\\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4,\\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 &= -2,\\ 13x_1 - 2x_2 - 16x_3 &= 4; \end{aligned}$$

i) (M)

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1,\\ 2x_1 - 8x_2 + 22x_3 &= -8,\\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 6,\\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 &= 7; \end{aligned}$$

j) (E)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_4 &= 3,\\ x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1,\\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 0,\\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5; \end{aligned}$$

k) (V)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1,\\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2,\\ 2x_1 + 5x_3 &= 8,\\ x_1 - x_2 + x_4 &= 3; \end{aligned}$$

l) (E)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 &= 7,\\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= 5,\\ x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 &= 6,\\ 2x_1 - x_3 - 2x_4 - 4x_5 &= 2; \end{aligned}$$

m) (E)

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 1,\\ 4x_1 + 6x_2 - 7x_3 - 5x_4 &= -2,\\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 &= -1; \end{aligned}$$

n) (E)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 4,\\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 8,\\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 16; \end{aligned}$$

o) (V)

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 7,\\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 1,\\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 2x_4 &= 15,\\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3; \end{aligned}$$

Írjon fel egy konkrét megoldást is!

p) (E)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 13,\\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1,\\ 3x_1 + x_2 + x_4 &= 9,\\ x_2 - x_3 - x_4 &= -5; \end{aligned}$$

Írjon fel két konkrét megoldást is!

2.3.5. (M) Állapítsa meg, hogy a c valós paraméter mely értéke esetén van az alábbi egyenletrendszernek legalább egy megoldása és oldja meg ezen érték esetén!

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 4, \\ -3x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 &= c. \end{aligned}$$

2.3.6. Oldja meg Gauss-módszerrel az alábbi homogén egyenletrendszereket!

a) (M)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 0; \end{aligned}$$

b) (V)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 &= 0, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 0, \\ 2x_1 - 5x_2 - 14x_3 + x_4 - 11x_5 &= 0; \end{aligned}$$

c) (E)

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= 0, \\ x_2 - x_3 - x_4 &= 0; \end{aligned}$$

d) (E)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_4 &= 0, \\ x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0; \end{aligned}$$

e) (V)

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0, \\ x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 &= 0, \\ 3x_2 - x_3 + 6x_4 + x_5 &= 0; \end{aligned}$$

f) (E)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0; \end{aligned}$$

g) (E)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 &= 0, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 0; \end{aligned}$$

h) (E)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 + 2x_5 &= 0, \\ x_1 + x_3 + 2x_5 &= 0. \end{aligned}$$

3. VEKTORGEOMETRIA

3.1. Alapfogalmak, alapműveletek

3.1.1. Adja meg az alábbi vektorok koordinátáit és számítsa ki abszolút értéküket!

a) (E) $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$; **b)**(M) $\mathbf{a} = 8\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$; **c)** (E) $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$.

3.1.2. Adottak az $\mathbf{a}(2; -1; 0)$, $\mathbf{b}(4; 6; -2)$, $\mathbf{c}(3; -3; 5)$ vektorok. Számítsa ki az alábbi vektorok koordinátáit!

a) (E) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{a}$; **b)**(E) $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$;

c) (E) $\mathbf{v}_4 = -\frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{c}$.

3.1.3. Adottak az A(–1; 2; 1), B(0; 1; 5), C(2; 1; 3) pontok. Írja fel a kijelölt vektorokat és számítsa ki a hosszukat!

a)(M) $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{CA}$; **b)**(E) $\overrightarrow{AB}$; **c)** (E) $\overrightarrow{BC}$.

3.1.4. Döntse el, hogy párhuzamosak-e az alábbi vektorok!

a) (M) $\mathbf{a}(-2;3;1)$, $\mathbf{b}(0;0;0)$;

b)(V) $\mathbf{c}(6;-12;18)$, $\mathbf{d}(-4;8;-12)$;

c) (E) $\mathbf{e}\left(\frac{1}{3}; 2; -\frac{2}{3}\right)$, $\mathbf{f}(-2;-12;3)$.

3.1.5. Döntse el, hogy egy egyenesen vannak-e az alábbi pontok!

a)(E) A(1; 4; 6), B(–3; 2; 2), C(5; 6; 10);

b)(E) A(2; 1; –1), B(3; 0; 1), C(2; –1; 3).

3.1.6. Írja fel az adott vektorok irányába mutató egységvektort!

a)(M) $\mathbf{a}\left(-5; \sqrt{11}; 8\right)$; **b)**(E) $\mathbf{b}(-3; 4; 0)$; **c)** (E) $\mathbf{c}(-1; -3; 2)$.

3.1.7. (V) Számítsa ki az A(–1; –2; 4), B(–4; –2; 0), C(3; –2; 1) csúcspontú háromszög kerületét! Milyen nevezetes háromszög az ABC háromszög?

3.1.8. (V) Adott az A(8; 2; –1), B(–3; 4; 1), C(2; –4; 0) csúcspontú háromszög. Állapítsa meg a szögek kiszámítása nélkül, hogy a háromszög melyik csúcsánál van a legnagyobb belső szöge!

3.1.9. (V) Egy háromszög csúcspontjai: A(3; –8; –2), B(–5; –2; 8), C(–3; –16; 8). Mutassa meg, hogy a háromszög szabályos!

3.1.10. Egy háromszög két csúcspontja A(1; 2; –1), B(–2; 1; 3), súlypontja S(1; 1; –1).

a)(E) Határozza meg a C csúcspont koordinátáit!

b)(E) Számítsa ki az A csúcsból induló súlyvonal hosszát!

3.2. Vektorok szorzása

3.2.1. Számítsa ki az alábbi vektorok skaláris szorzatát és a hajlásszög kiszámítása nélkül döntse el, hogy a vektorpárok hajlásszöge hegyes-, derék- vagy tompaszög!

a) (M) $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;

b) (E) $\mathbf{c}(-1; 2; 0)$, $\mathbf{d}(-3; 4; 2)$;

c) (E) $\mathbf{e}\left(1; -2; \frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{f}(-2; -3; -8)$.

3.2.2. (V) Egy háromszög csúcspontjai: A(–1; –2; 4), B(x; –2; 0), C(3; –2; 1). Határozza meg x értékét úgy, hogy a háromszög A csúcsánál derékszög legyen!

3.2.3. Határozza meg az alábbi vektorok hajlásszögét!

a) (M) $\mathbf{a}(-1; 1; 0)$, $\mathbf{b}(2; -1; 2)$;

b) (E) $\mathbf{c}(2; 3; -1)$, $\mathbf{d}(1; 4; 3)$.

3.2.4. Számítsa ki az alábbi csúcspontú háromszögek belső szögeit és a háromszög területét!

a) (E) A(4; 1; 1), B(–2; –1; 5), C(0; 2; 6);
b) (V) A(1; 3; 2), B(1; 5; 0), C(–2; 3; 5).

3.2.5. (V) Mutassa meg, hogy az **a**(10; –5; 10), **b**(–11; –2; 10), **c**(–2; –14; –5) vektorok egy kockát feszítenek ki!

3.2.6. Számítsa ki az alábbi vektoriális szorzatokat!
a) (M) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, ha **a**(–3; 2; –4), **b**(3; 1; 5);
b) (E) $\mathbf{d} \times \mathbf{c}$, ha **c**(3; 5; –4), **d**(2; –10; –1);
c) (E) $\mathbf{e} \times \mathbf{f}$, ha **e**(2; 0; –1), **f**(–3; –1; 2).

3.2.7. (E) Számítsa ki $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$-t, ha **a**(2; –3; 2), **b**(1; 1; 1), **c**(–2; 0; –2)!

3.2.8. (M) Számítsa ki az A(1; 5; 6), B(–2; –1; 0), C(2; 2; 1) csúcspontú háromszög területét!

3.2.9. Egy háromszög csúcspontjai: A(1; 0; 2), B(2; 1; 2), C(3; 1; 4).
a) (V) Mekkora a háromszög legkisebb és legnagyobb szögének összege?
b) (V) Mekkora a háromszög területe?

3.2.10. Egy háromszög csúcspontjai: A(2; 1; 3), B(3; 1; λ + 3), C(1; 2; 3).
a) (E) Mekkora a λ értéke, ha a háromszög A csúcsánál lévő szöge 135°?
b) (E) Számítsa ki a háromszög területét, ha $\lambda = 0$!

3.2.11. Egy háromszög csúcspontjai: A(3; 1; 1), B(2; 1; –1), C(2; 0; 1).
a) (M) Döntse el, hogy a háromszög tompaszögű-e!
b) (M) Számítsa ki az A csúcsból induló magasság hosszát!

3.2.12. Egy paralelogramma csúcspontjai: A(3; –8; –2), B(1; 6; –2), C(–5; –2; 8), D(–3; –16; 8).
a) (E) Számítsa ki a paralelogramma szögeit!
b) (E) Számítsa ki a paralelogramma területét!

3.2.13.(E)Egy háromszög csúcspontjai: A(1; 2; –2), B(2; 3; 2), C(2; 1; –2). Számítsa ki a háromszög területét! Legyen a háromszög BC oldalához tartozó magasságának talppontja T! Számolja ki a BT szakasz hosszát!

3.3. Vektorok geometriai alkalmazása

3.3.1. Írja fel a P pontra illeszkedő, **v** vektorral párhuzamos egyenes paraméteres egyenletrendszerét! Adjon meg még egy pontot az egyenesen!

a)(E) P(–2; 5; 1), **v**(–1; 2; 3);

b)(E) P(3; 5;–2), **v**(–4; 3; 12).

3.3.2. Írja fel annak az egyenesnek a paraméteres egyenletrendszerét,

a)(E) amely átmegy az A(3; 1; 2) és B(1; –2; 1) pontokon!

b)(V) amely illeszkedik a P(6; –3; 4) pontra és merőleges az **a**(–2; 3; 1) és **b**(2; 0; 1) vektorokra!

3.3.3.(E) Írja fel az origóra illeszkedő és az e egyenessel párhuzamos egyenes paraméteres egyenletrendszerét, ha

$$e:\ x = 3 + 2t,\quad y = -t,\quad z = \frac{1}{3} + 2t\ !$$

Döntse el, hogy az $A\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right)$ és B(2; –4; 1) pontok ezen az egyenesen vannak-e!

3.3.4. Döntse el, hogy párhuzamos-e az e_1 és e_2 egyenes!

a)(M) e_1: $x\ \ -1+2t,\quad y\ \ 2-3t,\quad z\ \ -3+4t,$

$$e_2:\ x = -t,\quad y = 1 + \frac{3}{2}t,\quad z = 1 - 2t;$$

b)(E) e_1: $x = \frac{1}{2} + 2t,\quad y = -4t,\quad z = 3t,$

e_2: $x = 3 - 3t,\quad y = 6t,\quad z = -t.$

3.3.5. Írja fel a P pontra illeszkedő és az **n** vektorra merőleges sík egyenletét! Döntse el, hogy a sík illeszkedik-e az A pontra!

a) (E) P(–2; 1; 3), **n**(1; –1; 2), A(1; 0; 1);
b) (E) P(2; 0; –5), **n**(–3; 2; 1), A(0; –1; –8).

3.3.6. Írja fel az A, B, C pontok által meghatározott sík egyenletét! Adjon meg még egy pontot a síkban!
a) (M) A(1; 0; –1), B(–2; 1; 1), C(0; –1; 2);
b) (E) A(–2; 3; 5), B(3; 2; 7), C(–3; 6; –2).

3.3.7. (E) Írja fel a P(–3; 2; 5) pontra illeszkedő és az e egyenesre merőleges sík egyenletét, ha
e: $x = 3 - 5t$, $y = 4$, $z = 2 + 4t$!

3.3.8. (V) Írja fel az A(–1; 2; 3), B(2; –2; 1), C(–4; 5; 3) pontok által meghatározott síkra merőleges és az AB szakasz felezőpontján átmenő egyenes paraméteres egyenletrendszerét!

3.3.9. Állapítsa meg az e egyenes és az S sík kölcsönös helyzetét!
a) (M) e: $x = -1 + 2t$, $y = -5 + 3t$, $z = -6 + 4t$, S: $x - y + z - 1 = 0$;
b) (V) e: $x = 1 + t$, $y = t$, $z = -1 + 3t$, S: $5x + y - 2z = 0$;
c) (V) e: $x = 2 + t$, $y = t$, $z = 5 + 3t$, S: $5x + y - 2z = 0$.

3.3.10. (M) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a P(–2; 3; 1) pontra és párhuzamos az S_1 és S_2 síkokkal, ha
$S_1 : 2x - 4y + 6z - 5 = 0$, $S_2 : 3x + 2z - 3 = 0$!

3.3.11. (E) Írja fel a P(0; 2; –5) pontra illeszkedő sík egyenletét, amely párhuzamos az alábbi e_1 és e_2 egyenesekkel!
e_1: $x = -1 + 3t$, $y = 1 + 2t$, $z = 1 - 4t$;
e_2: $x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t$, $y = 2 - t$, $z = 2t$.

3.3.12. Egy háromszög csúcspontjai: A(1; 1; 2), B(0; 2; 0), C(0; 1; 1).
a) (E) Írja fel a háromszög A csúcsán átmenő és a háromszög síkjára merőleges egyenes paraméteres egyenletrendszerét!
b) (E) Számítsa ki a háromszög területét!

3.3.13. Egy háromszög csúcspontjai: A(1; 2; –1), B(0; 3; 3), C(2; 2; –3).

a) (E) Bizonyítsa be, hogy a háromszögnek van tompaszöge!

b) (E) Írja fel a BC oldalhoz tartozó súlyvonal egyenesének paraméteres egyenletrendszerét!

c) (E) Írja fel a háromszög síkjának egyenletét!

d) (E) Számolja ki a háromszög területét!

3.3.14. (V) Határozza meg az $x + y - 2z - 1 = 0$ és a $2x + 2y - 4z + 6 = 0$ síkoktól egyenlő távolságra fekvő sík egyenletét!

3.3.15. (E) Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a P(2; 7; –3) pontra és az e egyenesre, ha
e: $x = -1 + 2t$, $y = 4 + t$, $z = 2 - 3t$.

3.3.16. (M) Adott az ABCD paralelogramma három csúcspontja: A(3; –8; –2), B(1; 6; –2), C(–5; –2; 8).
Írja fel a BD átló paraméteres egyenletrendszerét!

4.EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK

4.1. Sorozatok

4.1.1. Írja fel az alábbi sorozatok első hat elemét! Bizonyítás nélkül állapítsa meg, hogyan viselkednek a sorozatok monotonitás és konvergencia szempontjából!

a) (E) $a_n = 3+\left(\frac{1}{10}\right)^n$;

b) (M) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1$;

c) (E) $a_n = (-1)^{n+1}\cdot\sqrt{n}$;

d) (E) $a_n = \begin{cases} 0, & \text{ha n páros,} \\ \frac{1}{n^2}, & \text{ha n páratlan;} \end{cases}$

e) (E) $a_n = |7-2n|$;

f) (E) $a_n = 10000-(10)^n$;

g) (M) $a_n = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$;

h) (E) $a_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$;

i) (M) $a_n = \frac{120}{n!}$, ahol $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$.

4.1.2. Írja fel az alábbi sorozatok első négy elemét! Számítsa ki a határértéküket határértékszámítási szabályok alkalmazásával!

a) (M) $a_n = n^3 - 10n^2 + 5$;

b) (V) $a_n = \frac{2n+3}{1-n^2}$, ha $n \geq 2$;

c) (E) $a_n = \sqrt{\frac{n^3+1}{5n^2-n}}$;

d) (V) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

4.1.3. Állapítsa meg, hogy az alábbi sorozatok esetében hányadik elemtől kezdve teljesül, hogy az elemeknek a határértéktől való eltérése kisebb a megadott ε értéknél!

a) (E) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\varepsilon = 0{,}01$;

b) (M) $a_n = \frac{4n+10}{3n-1}$, $\varepsilon = 0{,}1$;

c) (V) $a_n = \dfrac{2^n}{2^n + 100}$, $\varepsilon = 0{,}1$.

4.2. Egyváltozós valós függvények elemi vizsgálata

4.2.1. Adja meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi függvények értelmezhetők!

a) (E) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$;

b) (E) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^3 - x}$;

c) (V) $f(x) = \dfrac{\sqrt{-2-3x}}{x}$;

d) (E) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$;

e) (V) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$;

f) (E) $f(x) = \log_2 x^2$;

g) (V) $f(x) = \lg \cos x$;

h) (M) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$;

i) (E) $f(x) = 2^{-\frac{1}{x}}$;

j) (E) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.

4.2.2. Képezze a megadott f(x) és g(x) függvényekből az f(g(x)) és g(f(x)) összetett függvényeket, és állapítsa meg ezek értelmezési tartományát! (E fejezet további részében és a következő fejezetben valamely f(x) egyváltozós valós függvény értelmezési tartományán, hacsak másképp nincs megadva, a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát értjük, amelyen a függvény értelmezhető.)

a) (E) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{x}$;

b) (E) $f(x) = e^x$, $g(x) = -x$;

c) (V) $f(x) = \lg x$, $g(x) = \lg x$;

d) (E) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = \dfrac{\pi}{2} - x$;

e) (M) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$;

f) (E) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = 3x - 1$.

4.2.3. Adjon meg az alábbi $f(x)$ összetett függvényekhez egy $h(x)$ külső és egy $g(x)$ belső függvényt, hogy $f(x) = h(g(x))$ teljesüljön! Képezze fordított sorrendben is az összetételt!

a) (E) $f(x) = \cos x^3$;

b) (E) $f(x) = e^{\operatorname{ctg} x}$;

c) (E) $f(x) = \ln\frac{1}{x}$;

d) (E) $f(x) = \operatorname{arctg} 10^x$;

e) (E) $f(x) = e^{e^x}$;

f) (E) $f(x) = \operatorname{sh}(-x)$.

4.2.4. Vizsgálja meg az alábbi függvényeket paritás szempontjából!

a) (M) $f(x) = 0$, $D_f = \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$;

b) (E) $f(x) = -1$;

c) (E) $f(x) = \left(x^2+1\right)^2$;

d) (M) $f(x) = \frac{3x}{4x^2-1}$;

e) (M) $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$;

f) (E) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$;

g) (E) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

h) (M) $f(x) = \ln\left(\frac{e+x}{e-x}\right)$;

i) (E) $f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x}$, $D_f = \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$;

j) (M) $f(x) = -x+1$, ha $0 < x < 2$, és $f(x+2) = f(x)$, ha $x \in \mathbf{R}$;

k) (E) $f(x) = -3|x|$, ha $-\pi \le x < \pi$, és $f(x+2\pi) = f(x)$, ha $x \in \mathbf{R}$.

4.2.5. Döntse el, hogy a valós számoknak mely részhalmazára képezi le az alábbi hozzárendelés a valós számoknak megadott A, B illetve C részhalmazait!

a) (M) $f(x) = x^2$, $A = \mathbf{N}$, $B =]-1;1[$, $C = \mathbf{R}$;

b) (E) $f(x) = \sin x$, $A = \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $C = \mathbf{R}$;

c) (E) $f(x) = 2x-1$, $A = \mathbf{N}$, $B = [0;+\infty[$, $C = \mathbf{R}^-$;

d) (E) $f(x) = \frac{1}{x}$, $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in N\right\}$, $B =]-1;0[$, $C = \mathbf{R}^+$.

4.2.6. Ábrázolja a megadott függvényeket, és jellemezze a következő szempontok szerint: értékkészlet, korlátosság, tengelymetszetek, monotonitás, konvexitás! Állapítsa meg a függvények határértékeit a zárójelben megadott helyeken!

a) (E) $f(x) = -x^2 + 6x - 5,\ 0 \le x < 5,$ (0 - ban jobbról, 5 - ben balról);

b) (E) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, \text{ ha } x < 0, \\ e^{x}, \text{ ha } x > 0, \end{cases}$ $(-\infty$ - ben, 0 - ban, $+\infty$ - ben);

c) (M) $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{ha } 0 < x \le \pi, \\ -\frac{4}{\pi}x + 8, & \text{ha } \pi < x \le 2\pi, \end{cases}$ és $f(x + 2\pi) = f(x)$, ha $x \in \mathbf{R}$,

(0 - ban balról és jobbról, $+\infty$ - ben).

4.2.7. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

a) (M) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (-2x^2 + x), \quad \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^2 + x), \quad \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^2 + x);$

b) (E) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{10} - 100x^2 - 1000 \right), \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{10} - 100x^2 - 1000 \right);$

c) (M) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 + x^2}{1 - 2x}, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3 + x^2}{1 - 2x}, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x^2}{1 - 2x},$

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{x^3 + x^2}{1 - 2x}, \quad \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{x^3 + x^2}{1 - 2x};$

d) (E) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3 - 4x}{2 + x}, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3 - 4x}{2 + x}, \quad \lim\limits_{x \to -2^-} \frac{3 - 4x}{2 + x}, \quad \lim\limits_{x \to -2^+} \frac{3 - 4x}{2 + x};$

e) (M) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}}, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}}, \quad \lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}, \quad \lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}};$

f) (V) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}, \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x};$

g) (V) $\lim\limits_{x \to -1^+} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x} \right), \quad \lim\limits_{x \to 1^-} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x} \right);$

h)(V) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$, $\lim\limits_{x\to-1^-}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$,

$\lim\limits_{x\to-1^+}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$, $\lim\limits_{x\to1^-}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$, $\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$;

i) (E) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\lg^2 x^2}{x}$, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\lg^2 x^2}{x}$.

4.2.8. Írja fel az alábbi függvények értelmezési tartományát intervallumok egyesítéseként, majd számoljon határértéket ezen intervallumok végpontjaiban a megfelelő oldalról!

a)(E) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, ahol $a,b,c,d\in\mathbf{R}$ és $a>0$;

b)(E) $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$;

c)(V) $f(x)=\frac{x^2}{(x+1)^2}$;

d)(E) $f(x)=\ln^2 x$;

e)(E) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$;

f) (M) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

g)(E) $f(x)=e^{-px}$, ahol $p\in\mathbf{R}^+$;

h)(E) $f(x)=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$;

i) (V) $f(x)=\arccos x\cdot\log_\pi x$.

4.2.9. Döntse el, hogy folytonosak-e az alábbi függvények!

a)(M) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\le 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{ha } x>0,\end{cases}$ ahol $\lambda\in\mathbf{R}^+$;

b)(E) $f(x)=\operatorname{sgn}^2(x)$, ahol $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & \text{ha } x<0,\\ 0, & \text{ha } x=0,\\ 1, & \text{ha } x>0;\end{cases}$

c) (E) $f(x)=|x|$, ha $-1\le x<1$, és $f(x+2)=f(x)$.

4.2.10. Ellenőrizze, hogy az alábbi függvények szigorúan monotonok! Adja meg az inverz függvényüket!

a)(E) $f(x)=3x-4$;

b)(M) $f(x)=\sqrt[3]{1-x}$;

c) (E) $f(x)=\frac{5^{2x}}{2}$.

4.2.11. Állapítsa meg az alábbi kölcsönösen egyértelmű leképezéssel adott függvények inverzét!

a)(E) $f(n)=\begin{cases} n, & \text{ha n páros,} \\ -n, & \text{ha n páratlan,} \end{cases}$ $D_f=\mathbf{N}$;

b)(M) $f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{ha } x\le 0, \\ x^2, & \text{ha } 0<x\le 1, \\ -\frac{1}{x}, & \text{ha } x>1. \end{cases}$

4.2.12. Számítsa ki számológép használata nélkül az alábbi kifejezések pontos értékét!

a)(E) $\frac{\sqrt[4]{(-12)^2}}{\sqrt{75}}$; **b)**(M) $\sqrt[3]{\frac{27}{8^4}}$;

c) (V) $\sqrt{(-17)^2+(34)^2+(-34)^2}$; **d)**(E) $\sqrt{10^{4-\lg 25}}$;

e)(V) $49^{\frac{1}{2}-\log_7 2}$; **f)** (E) $\ln\sqrt{e}-\ln\sqrt[3]{e}$; **g)**(E) $e^{\frac{\ln 4}{2}}$;

h)(E) $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$; **i)** (E) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\cos 7\pi}$; **j)** (M) $\log_2 \sin\left(-\frac{37\pi}{4}\right)$;

k)(E) $\frac{\sqrt{27}}{\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$; **l)**(V) $\operatorname{ctg}\left(\pi\cdot\ln\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$;

m)(E) $\operatorname{tg}\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; **n)**(M) $\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$;

o)(V) $\frac{\operatorname{arctg}1}{\operatorname{arcctg}1}\cdot\frac{\arccos 1}{\arcsin 1}$; **p)**(E) $\arcsin\lg\frac{1}{10}$;

q)(V) $\log_\pi \log_\pi \arccos(-1)$; **r)** (E) $\arccos \operatorname{ch} 0$;

s) (E) $\operatorname{sh}(-\ln 3)$; **t)** (M) $\operatorname{th}^2(\ln 2)$.

5. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

5.1. Differenciálhányados és deriváltfüggvény

5.1.1. Határozza meg az alábbi függvényeknek a differenciálhányadosát az általános $x_0 \in D_f$ pontjában a differenciálhányados definíciója alapján!

a) (V) $f(x) = x^3$; **b)** (M) $f(x) = \frac{1}{x}$;

c) (V) $f(x) = \sqrt{x}$, ahol $x_0 \neq 0$.

5.1.2. Az összeg-, különbség-, szorzat-, hányados, és a skalárral szorzott függvényekre vonatkozó deriválási szabályok alkalmazásával deriválja az alábbi függvényeket a változójuk szerint!

a) (M) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^7}} + \frac{3^x}{2} - 15$; **b)** (E) $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$;

c) (M) $f(x) = x(x+3)^2$; **d)** (E) $f(x) = \frac{7}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{\sqrt[3]{x^4}}{7}$;

e) (E) $s(t) = v_0 t + \frac{a}{2}t^2$, ahol $v_0, a \in \mathbf{R}$;

f) (E) $r(\phi) = 10(1+\cos\phi)$; **g)** (E) $f(t) = \frac{\sin t \cdot \cos t}{2}$;

h) (V) $f(x) = \cos^2 x$; **i)** (E) $f(x) = ex \cdot e^x$;

j) (E) $f(x) = (1 - \lg x)(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$;

k) (M) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{2x^2}} \cdot \ln x$; **l)** (E) $f(x) = \left(\sqrt{5} - \sqrt{5x}\right)x^{\sqrt{5}}$;

m) (E) $f(x) = \frac{2^x - 2}{\operatorname{sh} x}$; **n)** (M) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{tg} x}{\frac{4}{3}\operatorname{arctg} x}$;

o) (E) $f(x)=\dfrac{3-2x}{5x+4}$; **p)** (E) $u(v)=\dfrac{1+v^2}{1-v^2}$;

q) (V) $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^3+8}$; **r)** (V) $f(x)=\dfrac{\pi}{\sin x}$;

s) (E) $h(x)=\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\log_n x+n^x}$, ahol $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$;

t) (E) $f(x)=\dfrac{e\cdot\ln x}{e^x\cdot\lg x}$; **u)** (V) $u(t)=\dfrac{\sqrt[4]{t}\cdot\operatorname{ch} t}{3-t}$;

v) (M) $f(x)=x^2\cdot e^x\cdot\cos x$; **w)** (E) $f(x)=\sqrt[5]{x}\cdot\operatorname{cth} x\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$;

x) (V) $T(x)=\sum_{n=0}^{100}\dfrac{x^n}{n!}=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^{100}}{100!}$,
ahol $n\in\mathbf{N}$ esetén $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$, és $0!=1$;

y) (E) $z(x)=y\cdot x+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+x^y+y^x+\ln x+\ln y$, ahol $y\in\mathbf{R}^+, y\neq 1$.

5.1.3. Deriválja az alábbi összetett függvényeket a változójuk szerint!

a) (E) $f(x)=\cos\sqrt[3]{x}$; **b)** (E) $f(x)=\operatorname{ctg} e^x$;

c) (M) $f(x)=2^{\sin x}$; **d)** (M) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

e) (E) $u(v)=\arcsin\sqrt[4]{v}$; **f)** (E) $g(t)=\lg\lg t$;

g) (M) $f(x)=\ln ax$, ahol $a\in\mathbf{R}, a\neq 0$;

h) (E) $g(t)=e^{e^t}$; **i)** (E) $f(x)=10^{-x}$;

j) (M) $f(x)=\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{4}$; **k)** (E) $f(x)=e^{\sqrt{\operatorname{sh} x}}$;

l) (V) $f(x)=\log_3^3\operatorname{th} x$; **m)** (E) $f(x)=\sqrt[4]{\operatorname{sh}\sqrt[4]{x^3}}$;

n) (M) $f(x)=5^{\cos^2 2x}$; **o)** (V) $f(x)=\arccos\dfrac{1}{\cos\ln x}$.

5.1.4. Deriválja az alábbi függvényeket a változójuk szerint!

a) (E) $y(t) = A \cdot \cos at + B \cdot \sin bt + C \cdot e^{ct}$, ahol $A, B, C, a, b, c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$;

b)(E) $f(x) = \sin^2 x + \cos x^2 + \operatorname{tg}^2 x^2$;

c) (E) $I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)$, ahol $U_0, R, L \in \mathbf{R}^+$;

d)(E) $f(x) = (3x+2)^4 - 4^{3x+2}$; **e)** (M) $f(x) = \frac{(2x-3)^2}{(x+1)^3}$;

f) (E) $P(r) = \frac{U^2 \cdot r}{(R+r)^2}$, ahol $U, R \in \mathbf{R}^+$;

g)(E) $f(x) = x + \operatorname{arctg}\sqrt{1-x}$; **h)**(E) $f(x) = \operatorname{th} x^e \cdot \operatorname{cth} e^x$;

i) (E) $f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$; **j)** (V) $f(x) = \lg\frac{x}{\ln x}$;

k)(E) $y(t) = A \cdot t^2 \cdot e^{-\frac{t}{2}}$, ahol $A \in \mathbf{R}$;

l) (M) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$; **m)**(V) $f(x) = \left(\sqrt{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)^5$;

n)(E) $f(x) = x \cdot \sin(x \cdot \cos x)$; **o)**(M) $f(x) = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$;

p)(V) $f(x) = \log_4(x + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x)$; **q)**(E) $r(\phi) = \sqrt{\frac{2 \cdot \sin 2\phi}{2 - \sin^2 2\phi}}$;

r) (E) $f(x) = \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi x}{\sqrt{2x^3 + x}}$.

5.1.5. Hozza egyszerűbb alakra a megadott függvények képletét, s az új alakban deriválja őket x-szerint!

a)(E) $f(x) = x \cdot \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$; **b)**(E) $f(x) = \frac{7x \cdot \sqrt[3]{x} - 2x^2}{3\sqrt{x^3}}$;

c) (V) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{27^x}{x \cdot \sqrt[3]{9x}}}$; **d)**(E) $f(x) = \frac{e^{2x} + e^{3x} - 1}{e^x}$;

e) (M) $f(x)=\dfrac{\ln\frac{1}{x^3}}{e^{-x}}$; **f)** (E) $f(x)=2^{\frac{1}{2}\cdot\log_2 3x}$;

g) (E) $f(x)=\sin(\arcsin(\sin(\arcsin x)))$.

5.1.6. Állapítsa meg, hogy az alábbi függvények deriválhatók-e a megadott helyeken, majd írja fel a deriváltfüggvényüket!

a) (M) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\le 0,\\ x^2, & \text{ha } 0<x\le 1,\\ 1, & \text{ha } x>1,\end{cases}$ (0 - ban és 1 - ben);

b) (E) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\le 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{ha } x>0,\end{cases}$ ahol $\lambda\in\mathbf{R}^+$ (0 - ban).

5.1.7. Számítsa ki az alábbi függvények n-ik deriváltját az x_0 helyen a megadott n és x_0 értékek mellett!

a) (M) $f(x)=\ln x$, $n=4$, $x_0=1$;

b) (E) $f(x)=\sin x$, $n=19$, $x_0=0$;

c) (E) $f(x)=e^{-x}$, $n=999$, $x_0=\ln 3$;

d) (E) $f(x)=\sqrt{x}$, $n=3$, $x_0=100$;

e) (E) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, $n=2$, $x_0=-1$;

f) (V) $f(x)=e^{3x-x^3}$, $n=2$, $x_0=\sqrt{3}$.

5.2. A differenciálszámítás alkalmazásai

5.2.1. Írja fel az alábbi függvények megadott x_0 helyhez tartozó érintőjének egyenletét!

a) (M) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=4$; **b)** (E) $f(x)=\sin x$, $x_0=0$;

c) (E) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, $x_0=-2$; **d)** (V) $f(x)=x^2\cdot e^x$, $x_0=-2$;

e) (E) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$, $x_0=\pi$; **f)** (V) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(2x-e)}$, $x_0=e$.

5.2.2. Írja fel az alábbi függvények megadott x_0 helyen vett x-szerinti differenciálját!

a) (E) $f(x)=\cos \pi x$, $x_0=-\dfrac{1}{6}$; **b)**(E) $f(x)=\dfrac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x}}$, $x_0=8$;

c) (M) $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$, $x_0=\dfrac{1}{2}$.

5.2.3. Számítsa ki az alábbi határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával!

a) (M) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2-x)^3}{x^2}$; **b)**(V) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9+x^2}{9-x^2}$;

c) (E) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{100x^2}{x^4-100}$; **d)**(E) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg}3x}$;

e) (E) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{e^x-e^{-x}}$; **f)** (V) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x-e^{-x}}$;

g)(M) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)\cdot e^{x-1}$; **h)**(E) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot e^{-x^2}$;

i) (V) $\lim\limits_{x\to0^+}x\cdot e^{\frac{1}{x}}$; **j)** (E) $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\cdot\ln 2x$;

k)(E) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x$; **l)** (M) $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

5.2.4. Számítsa ki az alábbi függvények x-szerinti első és második deriváltfüggvényeinek zérushelyeit!

a) (E) $f(x)=\dfrac{x^3}{x+2}$; **b)**(E) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$;

c) (M) $f(x)=x\cdot(1-\ln x)^2$; **d)**(E) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2x}{3}$;

e) (V) $f(x)=e^x\cdot\sin x$.

5.2.5. Végezzen teljes függvényelemzést az alábbi függvényeken!

a) (E) $f(x) = x(x-2)^2$;

b) (M) $f(x) = (x^2-1)^3$;

c) (E) $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$;

d) (V) $f(x) = \frac{2x+3}{(x+1)^2}$;

e) (E) $f(x) = \frac{2x^2}{2x^2+3}$;

f) (E) $f(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}$;

g) (M) $f(x) = \frac{(x-1)^3}{3x^2}$;

h) (E) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$;

i) (E) $f(x) = x \cdot e^{1-x}$;

j) (M) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$;

k) (M) $f(x) = \frac{1}{e^x \cdot (2-x)}$;

l) (E) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$;

m) (E) $f(x) = \ln^2 x$;

n) (E) $f(x) = \ln(x^2-4x+8)$;

o) (M) $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$;

p) (V) $f(x) = \frac{x}{1-\ln x}$;

q) (M) $f(x) = (3-x)\sqrt{x-2}$;

r) (E) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$;

s) (V) $f(x) = (15x-7)\sqrt{x^5}$;

t) (E) $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$;

u) (E) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln\sqrt{x}$.

5.2.6. Adja meg az alábbi függvények megadott intervallumon felvett legnagyobb illetve legkisebb értékét!

a) (E) $f(x) = \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$, $[-2;0]$;

b) (E) $f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$, $[-2;1]$;

c) (M) $f(x) = x \cdot (1-\ln x)$, $\left[\frac{1}{e^2}; e\right]$;

d) (V) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$, $[0;+\infty[$.

5.2.7. Állapítsa meg az alábbi függvények értékkészletét!

a) (E) $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$, $D_f =]0; +\infty[$;

b) (E) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, $D_f =]0; +\infty[$;

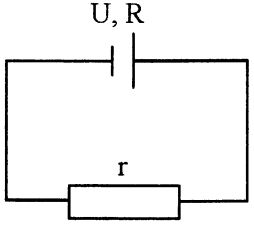
c) (M) $f(x) = \ln^2 x - \ln x^2$, $D_f = [1; +\infty[$;

d) (E) $f(x) = \ln(\sin x + \cos x)$, $D_f = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

e) (V) $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$, $D_f = [1; 4]$.

5.2.8. (M) Az egységsugarú körbe írt téglalapok közül melyiknek maximális a területe?

5.2.9. (V) Az ábrán látható kapcsolási rajzon a belső ellenállás R értéke rögzített, a külső ellenállás r értéke változtatható. Az utóbbinak mely értéke esetén legnagyobb a felvett teljesítménye?



5.2.10. Egy termék költségfüggvénye $C(x) = x^3 - 15x^2 + 76x + 25$, árbevételi függvénye $R(x) = 55x - 3x^2$ ezer pénzegységben, ahol x az előállított termék mennyiségét jelöli ezer tonnában.

a) (V) Írja fel a határprofit függvényt!

b) (M) Számítsa ki, mennyi többletköltséget okoz a termelés ezer tonnával való növelése 2000 tonnás, illetve 4000 tonnás termelés esetén!

c) (V) Milyen mennyiségű termelés esetén lesz maximális a profit?

5.2.11. (E) Egy termék árbevételi függvénye $R(x) = x \cdot \sqrt{1500 - \frac{x}{10}}$, ahol x az előállított termék darabszámát jelöli. Milyen termékszám esetén lesz maximális az árbevétel?

5.2.12. Egy termék költségfüggvénye $C(x) = 100 + 60\ln(2x^2 - 2x + 1)$, ahol x az előállított termék darabszámát jelöli ezer egységben.

a)(E) Határozza meg a fix költség értékét!

b)(E) Milyen termékszám esetén lesz minimális a költség?

6. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK HATÁROZATLAN INTEGRÁLJAI

6.1. Alapintegrálokkal megoldható feladatok

6.1.1. Határozza meg a következő integrálokat!

a) (M) $\int\left(3x^2+2x+1\right)dx$;

b) (E) $\int\left(5x^3-2\sqrt{x}-x^{-4}\right)dx$;

c) (V) $\int\frac{\left(2\cdot\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\right)^2}{x^2}dx$;

d) (E) $\int\frac{3x-\sqrt[4]{x}+x^{-\frac{1}{2}}}{4\cdot\sqrt[5]{x^3}}dx$;

e) (M) $\int\left(2e^x-3\sin x\right)dx$;

f) (E) $\int\left(3\cdot 10^x+5\cos x\right)dx$;

g) (E) $\int\left(4\operatorname{ch}x-3\operatorname{sh}x\right)dx$;

h) (V) $\int\frac{2^x-7\cdot 5^x}{3^x}dx$;

i) (M) $\int\frac{3+x^2}{1+x^2}dx$;

j) (V) $\int\frac{2x^3+3x^2+2x+4}{1+x^2}dx$;

k) (E) $\int\frac{1+x^2}{1-x^2}dx$;

l) (E) $\int\frac{x^4}{1-x^2}dx$;

m) (M) $\int\frac{1-\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

n) (E) $\int\frac{2-3\sqrt{1-x^2}}{x^2-1}dx$;

o) (M) $\int 4\operatorname{tg}^2x\,dx$;

p) (E) $\int\frac{3+\sin^3x}{\sin^2x}dx$;

r) (V) $\int\frac{2-\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{ch}^2x}dx$;

s) (E) $\int\operatorname{cth}^2x\,dx$;

t) (V) $\int\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$;

u) (E) $\int 3\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}dx$.

6.2. $\int f(ax+b)dx \quad (a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0)$ típusú feladatok

6.2.1. Határozza meg a következő integrálokat!

a) (M) $\int (2x+1)^{20}\,dx$;

b) (E) $\int \frac{dx}{(1-x)^{10}}$;

c) (V) $\int \frac{x+3}{x+2}\,dx$;

d) (M) $\int \frac{x^2-3x+4}{1-2x}\,dx$;

e) (E) $\int \left(\sqrt{2x+3} - \frac{2}{\sqrt[3]{1-x}}\right)dx$;

f) (E) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$;

g) (V) $\int \left(\frac{2}{1+4x^2} - \frac{1}{9x^2-1} + \frac{5}{\sqrt{1-16x^2}}\right)dx$;

h) (V) $\int \left(\frac{1}{16+x^2} + \frac{3}{4-x^2} - \frac{2}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx$;

i) (E) $\int \left(\frac{1}{9+25x^2} + \frac{2}{16-9x^2} - \frac{3}{\sqrt{4-49x^2}}\right)dx$;

j) (E) $\int \left(\frac{3}{2+x^2} - \frac{2}{1-3x^2} + \frac{1}{\sqrt{5-2x^2}}\right)dx$;

k) (V) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

l) (E) $\int \frac{dx}{x^2-x+1}$;

m) (E) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$;

n) (E) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+6x-x^2}}$.

6.2.2. Határozza meg a következő integrálokat!

a) (M) $\int \sin^2 x\,dx$;

b) (E) $\int \cos^4 x\,dx$;

c) (E) $\int \mathrm{ch}^2 x\,dx$;

d) (V) $\int \mathrm{sh}^4 x\,dx$;

e) (V) $\int \frac{\left(1-e^{2x}\right)^2}{3e^x}\,dx$;

f) (E) $\int \frac{1}{\cos^2(1-3x)}\,dx$;

g) (E) $\int \frac{1}{\sin^2(2x+5)}\,dx$; **h)**(E) $\int \frac{1}{\mathrm{eh}^2\left(\frac{x}{2}+1\right)}\,dx$;

i) (M) $\int \mathrm{ctg}^2 3x\,dx$; **j)** (E) $\int \mathrm{th}^2 4x\,dx$.

6.3. $\int [f(x)]^{\alpha} f'(x)\,dx$ $(\alpha \in \mathbf{R},\ \alpha \neq -1)$ típusú feladatok

6.3.1. Határozza meg a következő integrálokat!

a) (M) $\int x\left(2-3x^2\right)^8\,dx$; **b)**(E) $\int 2x^2 \cdot \sqrt[3]{4+2x^3}\,dx$;

c) (E) $\int \frac{x^2}{\left(1+x^3\right)^4}\,dx$; **d)**(E) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$;

e) (M) $\int \left(\sin^2 x\,\mathrm{eos}x - 2\mathrm{ch}^3 x\,\mathrm{sh}x\right)dx$;

f) (V) $\int \left(\frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{\mathrm{ch}x}{\sqrt{1+\mathrm{sh}x}}\right)dx$;

g) (M) $\int \cos^3 x\,dx$; **h)**(E) $\int \mathrm{sh}^3 x\,dx$;

i) (V) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x}\,dx$; **j)** (E) $\int \frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{eh}^4 x}\,dx$;

k)(V) $\int \mathrm{tg}^4 x\,dx$; **l)** (E) $\int \mathrm{eth}^4 x\,dx$;

m)(E) $\int e^x \cdot \sqrt[4]{1-2e^x}\,dx$; **n)**(V) $\int \frac{\left(2+e^{-x}\right)^5}{e^x}\,dx$;

o)(E) $\int \frac{2^{\frac{x}{2}}}{\left(3-2^{\frac{x}{2}}\right)^4}\,dx$; **p)**(E) $\int 10^x\left(3-4\cdot 10^x\right)^{10}\,dx$;

q)(E) $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$; **r)** (E) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$;

s) (V) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$; **t)** (E) $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{2+3\ln x}}$.

6.3.2. Határozza meg a következő integrálokat!

a) (E) $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx$;

b) (E) $\int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}\,dx$;

c) (E) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$;

d) (E) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^4 x}$;

e) (E) $\int \frac{\arcsin^4 3x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$;

f) (E) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

g) (E) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\arcsin^2 x}$;

h) (V) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$;

i) (E) $\int \frac{\arccos^3 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

j) (E) $\int \frac{(3+2\operatorname{arctg} x)^5}{1+x^2}\,dx$.

6.4. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ típusú feladatok

6.4.1. Határozza meg a következő integrálokat!

a) (M) $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$;

b) (V) $\int \frac{x-1}{x^2-2x+3}\,dx$;

c) (E) $\int \frac{\cos x}{1-\sin x}\,dx$;

d) (E) $\int \frac{\operatorname{sh} x}{2+3\operatorname{ch} x}\,dx$;

e) (V) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$;

f) (E) $\int \operatorname{th} 2x\,dx$;

g) (E) $\int \frac{e^x}{2-e^x}\,dx$;

h) (E) $\int \frac{2\cdot 3^x}{1+3^x}\,dx$;

i) (V) $\int \frac{dx}{x\ln x}$;

j) (E) $\int \frac{dx}{x(3-2\ln x)}$;

k) (V) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$;

l) (E) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(1+\arcsin x)}$;

m) (E) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\arccos x}$;

n) (E) $\int \frac{dx}{(1+x^2)(4+3\operatorname{arcctg} x)}$.

6.5. $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$ típusú feladatok

6.5.1. Határozza meg a következő integrálokat!

a) (M) $\int x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$;

b) (E) $\int x^2 \sin\left(1+2x^3\right)dx$;

c) (M) $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$;

d) (M) $\int \frac{\ln\ln x}{x}\,dx$;

e) (V) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$;

f) (V) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$.

6.6. Parciális integrálással megoldható feladatok

6.6.1. Határozza meg a következő integrálokat!

a) (M) $\int x\,e^{1-x}\,dx$;

b) (E) $\int \left(x^2+1\right)e^x\,dx$;

c) (E) $\int x\cos 2x\,dx$;

d) (V) $\int \left(x^2+x\right)\sin x\,dx$;

e) (E) $\int (2x+1)\,\mathrm{sh}x\,dx$;

f) (E) $\int \left(2x^2+3x+2\right)\mathrm{ch}\frac{x}{2}\,dx$.

6.6.2. Határozza meg a következő integrálokat!

a) (M) $\int x^2 \ln x\,dx$;

b) (M) $\int \ln x\,dx$;

c) (E) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$;

d) (V) $\int (2x+1)\ln^2 x\,dx$;

e) (E) $\int x\,\mathrm{arctg}x\,dx$;

f) (E) $\int \mathrm{arctg}2x\,dx$;

g) (M) $\int 3x^2\,\mathrm{arctg}x\,dx$;

h) (E) $\int (x-1)\,\mathrm{arctg}x\,dx$;

i) (V) $\int \mathrm{arcsin}x\,dx$;

j) (E) $\int \arccos 3x\,dx$.

6.6.3. Határozza meg a következő integrálokat!

a) (M) $\int e^x \sin 2x\,dx$;

b) (E) $\int e^{2x+3}\cos x\,dx$.

6.7. Racionális törtfüggvények integrálása

6.7.1. Határozza meg a következő integrálokat!

a) (M) $\int \frac{x+2}{2x^2-x-1}\,dx$;

b) (V) $\int \frac{x^3-4x^2+2x}{x^2-5x+6}\,dx$;

c) (E) $\int \frac{x^2+2x+3}{x-x^3}\,dx$;

d) (E) $\int \frac{7x+1}{(x-2)(x^2+2x-3)}\,dx$;

e) (M) $\int \frac{x^2+3x+7}{(x-3)(x+2)^2}\,dx$;

f) (E) $\int \frac{2x+5}{(x-2)(x^2+2x+1)}\,dx$;

g) (E) $\int \frac{x^2+2x+3}{x^4-x^2}\,dx$;

h) (V) $\int \frac{x^2+7x-1}{(x^2+5x-6)^2}\,dx$;

i) (M) $\int \frac{x^2+x+2}{x^3+x}\,dx$;

j) (E) $\int \frac{2x^2-x-8}{(x+1)(x^2+4)}\,dx$;

k) (M) $\int \frac{3x-2}{x^4+x^2}\,dx$;

l) (E) $\int \frac{2x^2+3x+4}{x^3+2x^2+4x}\,dx$.

6.8. Integrálás helyettesítéssel

6.8.1. Határozza meg a következő, a $\sqrt[k]{ax+b}$ $(k \in \mathbf{N} \setminus \{0;1\}$ és $a, b \in \mathbf{R}$ állandók) racionális törtfüggvényeit tartalmazó integrálokat!

a) (M) $\int x^2 \cdot \sqrt{x+1}\,dx$;

b) (V) $\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$;

c) (E) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$;

d) (E) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$;

e) (E) $\int \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1}\,dx$;

f) (E) $\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x-\sqrt[3]{x}}\,dx$;

g) (E) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+x\sqrt[4]{x}}\,dx$;

h) (E) $\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x}-1\right)}\,dx$;

i) (E) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$; **j)** (E) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[12]{x^5}\right)^3}$.

6.8.2. Határozza meg a következő, az e^{cx} $(c \in \mathbf{R}$ állandó$)$ racionális törtfüggvényeit tartalmazó integrálokat!

a) (V) $\int \frac{dx}{e^{2x}-e^x}$; **b)** (E) $\int \frac{dx}{\left(e^x+1\right)^2}$;

c) (V) $\int \frac{dx}{shx}$; **d)** (E) $\int \frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{1+e^x}\,dx$;

e) (E) $\int \frac{dx}{2-e^x-e^{2x}}$; **f)** (E) $\int \frac{ch^2x}{shx}\,dx$.

6.8.3. Határozza meg a következő, a sinx és a cosx racionális törtfüggvényeit tartalmazó integrálokat!

a) (M) $\int \frac{dx}{sinx}$; **b)** (E) $\int \frac{dx}{1+sinx+cosx}$;

c) (E) $\int \frac{dx}{5+4cosx}$; **d)** (E) $\int \frac{1-sinx}{cosx}\,dx$;

e) (E) $\int \frac{2cosx+sinx-3}{2cosx-sinx-3}\,dx$; **f)** (E) $\int \frac{dx}{3+4tgx}$.

6.8.4. Határozza meg a következő, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ $\left(a,b,c \in \mathbf{R}\ a<0,\ b^2-4ac>0\right)$ típusú kifejezéseket tartalmazó integrálokat!

a) (M) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$; **b)** (V) $\int \frac{x^2}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx$;

c) (E) $\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx$; **d)** (V) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx$.

6.9. Vegyes feladatok

6.9.1. Határozza meg a következő integrálokat!

a) (E) $\int \frac{2^x + 5^x}{10^x}\,dx$;

b) (E) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$;

c) (E) $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$;

d) (E) $\int \frac{dx}{x\,(1+\ln x)}$;

e) (E) $\int \operatorname{th}^2 x\,dx$;

f) (E) $\int \frac{x}{x^2+8}\,dx$;

g) (E) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,\arccos x}}$;

h) (E) $\int \frac{\sin 2x}{(3-\cos^2 x)^3}\,dx$;

i) (E) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

j) (E) $\int \frac{x-1}{x^2-6x+13}\,dx$;

k) (E) $\int \operatorname{ch}^2 3x\,dx$;

l) (V) $\int \operatorname{sh}^3 x\,dx$;

m) (M) $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$;

n) (V) $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x\,dx$;

o) (V) $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$;

p) (E) $\int \operatorname{cth}^3 x\,dx$;

r) (M) $\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}\,dx$;

s) (M) $\int \frac{dx}{x\,(1+\ln^2 x)}$;

t) (E) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;

u) (M) $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$.

6.9.2. Határozza meg a következő integrálokat!

a) (V) $\int \frac{dx}{(x+1)(9x^2+12x+4)}$;

b) (V) $\int \frac{dx}{x^4-x^3}$;

c) (E) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$;

d) (E) $\int x \cdot \sqrt[3]{1-x}\,dx$;

e) (E) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

f) (E) $\int \frac{1+\sqrt{x+1}}{x^2+x}\,dx$;

g) (E) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$;

h) (E) $\int \frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2}\,dx$.

6.9.3. Határozza meg a következő integrálokat!

a) (V) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$;

b) (E) $\int \frac{dx}{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2}$;

c) (E) $\int x^2 \sin 3x\, dx$;

d) (V) $\int \frac{x+1}{2^x} dx$;

e) (M) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$;

f) (E) $\int \left(2x^3 + x\right) \operatorname{arctg} x\, dx$;

g) (M) $\int x^2 \arccos 2x\, dx$;

h) (V) $\int x \arcsin(x-1)\, dx$;

i) (E) $\int e^{-x} \sin x\, dx$;

j) (V) $\int e^x \cos^2 x\, dx$;

k) (E) $\int \frac{1}{1-\sin x} dx$;

l) (E) $\int \frac{2+\cos x}{5+4\cos x} dx$.

7. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK HATÁROZOTT INTEGRÁLJAI

7.1. Alapintegrálokra és az $\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = [F(g(x))]_a^b$ $(F' = f)$ képlet speciális eseteire visszavezethető feladatok

7.1.1. Számítsa ki a következő integrálok értékét!

a) (M) $\int_1^8 \left(x^2 - \sqrt[3]{x}\right) dx$;

b) (E) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$;

c) (E) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

d) (E) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

e) (M) $\int_{sh1}^{sh2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

f) (V) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$;

g) (V) $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$;

h) (V) $\int_0^{ln2} \frac{(2-e^x)^2}{e^{2x}}\,dx$;

i) (E) $\int_0^1 \frac{dx}{4-x}$;

j) (V) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^4 \frac{x}{2}\,dx$;

k) (V) $\int_0^{\frac{1}{6}} sh^2 3x\,dx$;

l) (V) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{ch1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}$;

m) (E) $\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}\,dx$;

n) (V) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

o) (E) $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2 - x - 1}$;

p) (V) $\int_{-4}^{-3} \frac{x}{(x+5)^4}\,dx$;

r) (V) $\int_1^2 \frac{x+2}{x^3 + 2x^2 + x}\,dx$;

s) (V) $\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{1 - x^4}$.

7.1.2. Számítsa ki a következő integrálok értékét!

a) (V) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$;

b) (E) $\int_0^2 x^2 \cdot \sqrt[3]{8 - 2x^3}\,dx$;

c) (E) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx$;

d) (E) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}}\,dx$;

e) (E) $\int_1^{10} \frac{\lg x}{x}\,dx$;

f) (V) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$;

g) (E) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x\,dx$;

h) (V) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg}^4 x\,dx$;

i) (E) $\int_0^{\log_3 2} 3^x \left(2 - 3^x\right) dx$;

j) (E) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x+1}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx$.

7.1.3. Számítsa ki a következő integrálok értékét!

a) (V) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} 2x\,dx$;

b) (E) $\int_0^1 \frac{1 + 2^x \cdot \ln 2}{x + 2^x}\,dx$;

c) (V) $\int_0^1 \frac{x^3 + x}{x^4 + 2x^2 + 1}\,dx$;

d) (V) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$;

e) (V) $\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 + x + 1}\,dx$;

f) (V) $\int_0^1 \frac{x^2 + 3x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$;

g) (M) $\int_{-2\cdot\ln 2}^{-\frac{3}{2}\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{1-4e^{2x}}}\,dx$;

h)(E) $\int_{-2}^{0} (x+1)\cos(x^2+2x)\,dx$;

i) (E) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}\,dx$;

j) (E) $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}$.

7.2. Parciális integrálással megoldható feladatok

7.2.1. Számítsa ki a következő integrálok értékét!

a) (M) $\int_{0}^{\ln 2} x\,e^{-x}\,dx$;

b)(E) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x\,dx$;

c) (E) $\int_{0}^{2\pi} x^2\cos x\,dx$;

d)(E) $\int_{0}^{\ln 4} (2x+1)\,ch\frac{x}{2}\,dx$;

e) (E) $\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - x)\cos 3x\,dx$;

f) (E) $\int_{0}^{1} (x-1)^2 e^{2x}\,dx$.

7.2.2. Számítsa ki a következő integrálok értékét!

a) (M) $\int_{0}^{1} \ln(x+1)\,dx$;

b)(E) $\int_{1}^{2} x\ln x\,dx$;

c) (E) $\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arccos x\,dx$;

d)(E) $\int_{1}^{2} x^2\ln 2x\,dx$;

e) (V) $\int_{0}^{\sqrt{3}} (x-\sqrt{3})\,arctgx\,dx$;

f) (E) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} arctg2x\,dx$.

7.2.3. Számítsa ki a következő integrálok értékét!

a) (M) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$;

b)(E) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{1-x}\sin 2x\,dx$;

c) (E) $\int_0^{\pi} e^x \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$; **d)**(E) $\int_1^{\pi+1} e^{3x-2} \sin(x-1)\,dx$.

7.3. Helyettesítéssel megoldható feladatok

7.3.1. Számítsa ki a következő integrálok értékét!

a)(M) $\int_0^1 x \cdot \sqrt{1+x}\,dx$; **b)**(V) $\int_9^{28} \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}-1}\,dx$;

c)(M) $\int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} \frac{e^{2x}+2e^x}{e^{2x}+1}\,dx$; **d)**(V) $\int_0^{\ln\frac{3}{2}} \frac{1+e^x}{2-e^x}\,dx$;

e) (M) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin x}$; **f)** (V) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x}$;

g)(V) $\int_0^2 x^2 \cdot \sqrt{4-x^2}\,dx$; **h)**(V) $\int_0^{\frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)} \frac{x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx$;

i) (V) $\int_1^{ch2} \sqrt{(x-1)^3(x+1)}\,dx$; **j)** (V) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

7.4. Vegyes feladatok

7.4.1. Számítsa ki a következő integrálok értékét!

a)(E) $\int_0^{\frac{\ln 2}{4}} \frac{4sh2x}{ch^3 2x}\,dx$; **b)**(E) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos^2 3x\,dx$;

c) (E) $\int_2^3 \frac{x^3-1}{\sqrt[3]{x^4-4x}}\,dx$; **d)**(E) $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{11}{8}} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$;

e) (E) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

f) (E) $\int_{1}^{e^{\pi}} \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$;

g) (V) $\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)(x^2+2)}dx$;

h) (V) $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$;

i) (E) $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2-2x-8}$;

j) (E) $\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$;

k) (V) $\int_{0}^{\ln\sqrt{3}} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

l) (E) $\int_{2}^{3} \ln(2x-3)dx$;

m) (E) $\int_{0}^{\frac{5}{3}} \frac{dx}{x-\sqrt{3x+4}}$;

n) (M) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$;

o) (E) $\int_{-1}^{-\frac{2}{3}} x\operatorname{arctg}(3x+2)$;

p) (V) $\int_{0}^{1} \frac{2^x+3^x}{e^x}dx$.

7.5. Határozott integrálok alkalmazásai

7.5.1. Számítsa ki az adott görbe és az x tengely közti területet a megadott intervallumban!

a) (M) $y=x^2-4x+5,\ 0\le x\le 3$; **b)** (E) $y=\sin^2\frac{x}{2},\ 0\le x\le 2\pi$;

c) (E) $y=\ln(x+1),\ 0\le x\le e-1$; **d)** (E) $y=\operatorname{sh}2x,\ \ln 2\le x\le \ln 3$;

e) (M) $y=x^2+x-2,\ 0\le x\le 2$; **f)** (V) $y=x(1-x^2),\ -2\le x\le 3$;

g) (E) $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{2},\ -2\sqrt{3}\le x\le 2$;

h) (E) $y=\frac{\ln x}{x},\ \frac{1}{2}\le x\le e$.

7.5.2. Számítsa ki az alábbi paraméteres alakban adott görbe és az x tengely közti területet a megadott intervallumban!

a) (M) $x = 2\cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le \pi$;

b)(E) $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

7.5.3. Számítsa ki az adott görbék által határolt korlátos síkrész területét!

a) (M) $y = 6x - x^2 - 7,\ y = x - 3$; **b)**(E) $y = 2x^2e^x,\ y = -x^3e^x$;

c) (M) $y = \operatorname{tg} x,\ y = \frac{2}{3}\cos x,\ x = 0$;

d)(V) $y = x^2 - x,\ y = x\sqrt{1-x},\ x = \frac{9}{25},\ x = \frac{3}{4}$.

7.5.4. Számítsa ki az adott görbeívnek az x tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogatát!

a) (M) $y = 4 - x^2,\ -2 \le x \le 2$; **b)**(E) $y = \frac{1}{\sqrt{\cos x}},\ 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$;

c) (E) $y = \sqrt{x}\,e^{-x},\ 0 \le x \le 1$; **d)**(V) $y = \operatorname{ch}^2 x,\ -\ln 2 \le x \le \ln 2$.

7.5.5. Számítsa ki az adott görbeív hosszát a megadott intervallumban!

a) (M) $y = 2x^{\frac{3}{2}},\ 0 \le x \le 11$; **b)**(V) $y = \sqrt{2x - x^2} - 1,\ \frac{1}{2} \le x \le 1$;

c) (E) $y = \operatorname{ch} x,\ 0 \le x \le \ln 2$; **d)**(E) $y = \frac{x}{6}\sqrt{x+12},\ -11 \le x \le -3$;

e) (E) $y = \operatorname{sh}^2 x,\ -\ln 3 \le x \le \ln 3$; **f)**(E) $y = \ln\left(x^2 - 1\right),\ 2 \le x \le 5$;

g)(E) $y = \ln \sin x,\ \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$;

h)(E) $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x,\ 0 \le x \le \frac{9}{16}$.

7.5.6. Számítsa ki az alábbi paraméteresen adott görbeív hosszát a megadott intervallumban!

a) (M) $x = t^2,\ y = t\left(\frac{1}{3} - t^2\right),\ 0 \le t \le \frac{1}{3}$;

b) (E) $x = 8\sin^2 t,\ y = 3\cos 2t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

c) (E) $x = \frac{1}{2}\mathrm{ch}^2 t,\ y = \mathrm{sh}t,\ 0 \le t \le 1$;

d) (E) $x = e^t \sin t,\ y = e^t \cos t,\ 0 \le t \le \ln 2$;

e) (V) $x = 2t^3\left(1 - t^2\right),\ y = \sqrt{15}\, t^4,\ 0 \le t \le \frac{1}{\sqrt{2}}$;

f) (V) $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi$;

g) (V) $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ 0 \le t < 2\pi$;

h) (E) $x = \frac{t}{\sqrt{2}}\cos \ln t,\ y = \frac{t}{\sqrt{2}}\sin \ln t,\ 1 \le t \le 2$;

i) (E) $x = \cos t + t\sin t,\ y = \sin t - t\cos t,\ 0 \le t \le \pi$;

j) (E) $x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t,\ y = \left(t^2 - 2\right)\cos t - 2t\sin t,\ 0 \le t \le \pi$;

k) (V) $x = \cos t + \ln \mathrm{tg}\frac{t}{2},\ y = \sin t,\ \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{5\pi}{6}$.

7.5.7. Számítsa ki az alábbi integrálok közelítő értékét a Simpson-formulával, először négy, majd nyolc részre való felosztást alkalmazva!

a) (M) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$;

b) (E) $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx$;

c) (E) $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x}\, dx$.

7.5.8. (V) Számolja ki, hogy az $I(t) = \sin 2t$ erősségű áram mennyi hőt fejleszt π másodperc alatt!

7.5.9. (V) Mekkora a víz nyomóereje egy parabola által határolt függőleges falra és hol van a nyomatékközéppontja, ha a vízoszlop magassága 10 m és a víztükör a parabolából 6,8 m hosszúságú húrt metsz ki?

7.5.10. (M)Mekkora munkát kell végezni a nehézségi erő ellenében ahhoz, hogy feltöltsünk egy egyenes körkúp alakú homogén homokrakást, ha a kúp alapkörének sugara 1,2 m, magassága 1 m és a homok fajsúlya $2\frac{g}{cm^3}$?

7.6. Improprius integrálok

7.6.1. Számítsa ki a következő improprius integrálok értékét!

a) (M) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$;

b)(E) $\int_{-\ln 2}^{+\infty} e^{-2x}\,dx$;

c) (M) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$;

d)(E) $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dx}{sh^2 2x}$;

e) (E) $\int_0^{+\infty} \frac{shx}{ch^2 x}\,dx$;

f) (V) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$;

g)(E) $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$;

h)(V) $\int_1^{+\infty} \frac{x+6}{x^3+3x}\,dx$;

i) (E) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

j) (E) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

k)(M) $\int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{2}}\,dx$;

l) (E) $\int_1^{+\infty} (2x+3)e^{1-x}\,dx$;

m)(V) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx$;

n)(V) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x\sqrt{x})^2}\,dx$;

o) (V) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+\sqrt{e^x}}$.

7.6.2. Számítsa ki a következő improprius integrálok értékét!

a) (E) $\int_{-\infty}^{0} e^{x+1}\,dx$;

b) (E) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(2x-1)^2}$;

c) (E) $\int_{-\infty}^{-\ln 2} \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$;

d) (M) $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{arctg}x\,dx$;

e) (E) $\int_{-\infty}^{-1} x^2 e^{2x}\,dx$;

f) (E) $\int_{-\infty}^{0} \frac{2e^x}{1+e^{2x}}\,dx$.

7.6.3. Számítsa ki a következő improprius integrálok értékét!

a) (M) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2}$;

b) (E) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10}$;

c) (V) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}x}}{1+x^2}\,dx$;

d) (M) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$;

e) (E) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 \frac{x}{2}}$;

f) (V) $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$;

g) (V) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$;

h) (V) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2x}\,dx}{\left(1+2e^x\right)^3}$.

7.6.4. Számítsa ki a következő improprius integrálok értékét!

a) (M) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$;

b) (V) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}}$;

c) (M) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1-x^2}$;

d) (M) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$;

e) (V) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$;

f) (M) $\int_{0}^{1} \ln x\,dx$;

g) (M) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

h) (M) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x \ln^2 x}$;

i) (E) $\int_{-2}^{2} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$;

j) (M) $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$;

k)(M) $\int_{0}^{\pi} \operatorname{tgx}\,dx$;

l) (E) $\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

7.6.5. Számítsa ki a következő improprius integrálok értékét!

a)(V) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}x}$;

b)(M) $\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x}$;

c) (M) $\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$;

d)(V) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$;

e) (V) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-x}$;

f) (V) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[3]{\operatorname{arctgx}}}$.

8.KÉTVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK

8.1. Kétváltozós valós függvények értelmezése

8.1.1. Állapítsa meg a valós számpároknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi függvények értelmezhetők, majd ábrázolja ezt a tartományt az xy-síkon!

a) (E) $f(x;y)=x^2+xy+y^2$;

b) (E) $f(x;y)=\dfrac{x-y}{x+y}$;

c) (E) $f(x;y)=\sin\sqrt{xy}$;

d) (V) $f(x;y)=e^{\frac{1}{x^2-y^2}}$;

e) (M) $f(x;y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$;

f) (E) $f(x;y)=\dfrac{\ln y}{x}$.

8.1.2. Döntse el, hogy az alábbi kétváltozós valós függvények értelmezve vannak-e a megadott P, Q, illetve R pontokban, s ahol igen, ott számítsa ki a függvényértéket!

a) (E) $f(x;y)=\lg(ax+by+c)$, ahol $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,

$P(0;0)$, $Q(1;1)$, $R\left(\dfrac{c}{4a};\dfrac{4-5c}{4b}\right)$;

b) (E) $f(x;y)=\dfrac{x}{\sqrt{x-2y}}$, $P(0;4)$, $Q(4;0)$, $R(0;0)$;

c) (M) $f(x;y)=\arccos\dfrac{y}{x}$, $P(1;2)$, $Q(1;0)$, $R\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$;

d) (E) $f(x;y)=(\ln xy)\cdot\sqrt{\ln(x^2+y^2)}$,

$P\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $Q(-1;1)$, $R(1;1)$.

8.2. Kétváltozós valós függvények differenciálszámítása

8.2.1. Adja meg az alábbi kétváltozós valós függvényeknek a változói szerinti elsőrendű parciális deriváltfüggvényeit!

a) (V) $f(x;y) = -x^3 + 3x^2y - xy^3$;

b) (E) $f(x;y) = \frac{3x}{4} - \frac{y}{8}$;

c) (E) $g(u;v) = 6^u \cdot v^6$;

d) (E) $V(r;m) = \frac{r^2 \pi m}{3}$;

e) (M) $f(x;y) = \frac{1}{x-y}$;

f) (E) $f(x;y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$;

g) (E) $W(Q;C) = \frac{Q^2}{2C}$;

h) (V) $z(x;y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + x + y + 1$;

i) (M) $f(x;y) = x^y$;

j) (E) $f(x;y) = \sqrt{y^3 - 6x^2 + 2}$;

k) (V) $h(u;v) = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$;

l) (V) $f(x;y) = (4y)^{3x}$;

m) (E) $f(x;y) = x \cdot e^{xy}$;

n) (M) $z(x;y) = \sqrt{y} \cdot \lg(x^3 + y^3)$;

o) (E) $g(x;y) = 3^{-\frac{x}{y}} \cdot \sin(\pi xy)$;

p) (M) $f(x;y) = \frac{x}{10y} \cdot \ln(10y - x) - x$;

q) (E) $f(x;y) = \sqrt{x} + \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \operatorname{sh}(x + 2y)$;

r) (E) $h(x;y) = \frac{\operatorname{th} y^x}{5^{x^2 y}}$;

s) (E) $f(x;y) = (\operatorname{sh} x)^{y \cdot \operatorname{ch} y}$.

8.2.2. Számítsa ki az alábbi kétváltozós valós függvényeknek az x-, illetve y-szerinti elsőrendű parciális deriváltjait a megadott $P_0(x_0;y_0)$ pontban!

a) (E) $f(x;y) = x^2 + 2xy + y^2$, $P_0(0;0)$;

b)(E) $f(x;y)=3x\cdot e^{2y}$, $P_0\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$;

c) (M) $f(x;y)=\frac{1}{\log_2\left(y^2-x\right)}$, $P_0(5;3)$;

d)(E) $f(x;y)=\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi x}{y}$, $P_0(-1;4)$.

8.2.3. Írja fel az alábbi kétváltozós valós függvények teljes differenciálját, majd adja meg a teljes differenciált a megadott $P_0(x_0;y_0)$ pontban!

a)(E) $f(x;y)=\frac{x^2y^3}{3}$, $P_0(1;-1)$;

b)(E) $f(x;y)=10\cdot\sqrt[3]{4x-3y}$, $P_0(-4;-8)$;

c) (M) $f(x;y)=\frac{e^{\frac{x}{y}}}{x}$, $P_0(6;3)$.

8.2.4. Számítsa ki az alábbi kétváltozós valós függvényeknek a P_0 pontban vett, α szöghöz tartozó iránymenti deriváltját adott $P_0(x_0;y_0)$ és α mellett!

a)(M) $f(x;y)=(2x-4xy+y)^3$, $P_0\left(-\frac{1}{2};2\right)$, $\alpha=120^\circ$;

b)(E) $f(x;y)=\sin\left(\frac{\ln y}{x}\right)$, $P_0(1;1)$, $\alpha=-30^\circ$;

c) (E) $f(x;y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $P_0(2;-2)$, $\alpha=45^\circ$;

d)(V) $f(x;y)=(\sin x)^{\cos y}$, $P_0\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$, $\alpha=240^\circ$.

8.2.5. Adja meg az alábbi kétváltozós valós függvényeknek a változói szerinti másodrendű parciális deriváltfüggvényeit!

a)(E) $f(x;y)=7x^3y^2-\frac{y^4}{2}$; **b)**(M) $f(x;y)=e^{\frac{x}{y}}$;

c) (E) $f(u;v)=\dfrac{u+v}{u-v}$.

8.2.6. Számítsa ki az alábbi kétváltozós valós függvényeknek a változói szerinti vegyes másodrendű parciális deriváltját a megadott $P_0(x_0;y_0)$ pontban!

a) (M) $f(x;y)=x\cdot \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$, $P_0\left(\sqrt{2};0\right)$;

b) (E) $f(x;y)=\dfrac{2^{-\frac{y}{x^2}}}{y^2}$, $P_0(-1;-1)$.

8.2.7. Adja meg egyszerűsített alakban az alábbi kifejezéseket a megadott kétváltozós valós függvényekre!

a) (E) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, ha $u(x;y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$;

b) (E) $y\cdot f'_x(x;y)-x\cdot f'_y(x;y)$, ha $f(x;y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{y}$;

c) (V) $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\cdot\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$, ha $f(x;y)=e^{\frac{x^2y^2}{2}}$.

8.3. Kétváltozós valós függvények differenciálszámításának alkalmazásai

8.3.1. Határozza meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit!

a) (M) $f(x;y)=(5+2x-y)\cdot e^{x^2}$; **b)** (M) $f(x;y)=e^{xy}$;

c) (M) $f(x;y)=5-x^2+4x-y^2$; **d)** (E) $f(x;y)=e^{\frac{x}{2}}\cdot\left(x+y^2\right)$;

e) (E) $f(x;y)=x^2+y^2+xy+y+\dfrac{1}{3}$;

f) (E) $f(x;y)=x^3+y^3-3xy$;

g) (V) $f(x;y)=y^3-x^2-4y^2+2xy$;

h)(E) $f(x;y)=xy-\frac{x^4}{4}-\frac{y^2}{2}+10$;

i) (E) $f(x;y)=e^{-x^2-y^2}$;

j) (E) $f(x;y)=x^3+y^3-6x^2-3y^2-9y$;

k)(E) $f(x;y)=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$;

l) (V) $f(x;y)=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$;

m)(V) $f(x;y)=(x-y)(1-xy)$;

n)(E) $f(x;y)=4y^4+\frac{x^2}{2}-2xy+5$.

8.3.2. (E) Egy üzemben kétféle terméket állítanak elő. A két termék előállítási költségét az alábbi kétváltozós függvény adja meg: $C(x;y)=3x^2+2xy+2y^2-18x-16y+48$, ahol x az A jelű, y a B jelű termékből egy év alatt termelt mennyiséget jelenti ezer tonnában. Határozza meg, hogy milyen termékösszetétel esetén lesz minimális a költség!

8.3.3. (V) Egy üzem két terméket állít elő. A termékek előállítási költségét a $C(x;y)=x^2-2xy+2y^2+7x-7y-5$, az árbevételt az $R(x;y)=3x+5y$ kétváltozós függvények adják meg, ahol x az A jelű, y a B jelű termékből egy év alatt termelt mennyiséget jelenti ezer tonnában. Határozza meg, hogy milyen termékösszetétel esetén lesz maximális a profit!

8.3.4. (E) Határozza meg a $z=xy-1$ felületnek az origóhoz legközelebb eső pontját!

8.3.5. (V) Egy felül nyitott, téglatest alakú 4 m^3 térfogatú tartályt akarunk készíteni. Határozza meg, hogy az élek mely értéke esetén kell a legkevesebb anyag a tartályhoz!

8.3.6. Egy derékszögű háromszög rövidebbik befogójának hosszát $a = 5 \pm 0{,}1$ cm-nek mértük, a másik befogójának hosszát pedig $b = 12 \pm 0{,}2$ cm-nek. Becsülje meg, hogy mekkora abszolút illetve relatív hibával számítható ki

a) (M) az átfogó hossza; **b)** (E) a háromszög területe;

c) (V) $\operatorname{tg}\beta$, ahol β a b oldallal szemközti csúcsnál fekvő szög!

8.3.7. (V) Az R_1 ellenállás $6{,}4\Omega$, az R_2 ellenállás $4{,}2\Omega$. Az adatok egy tizedesjegyre kerekítettek. Számítsa ki a hibák figyelembe vételével a két ellenállás párhuzamos eredő ellenállását!

8.3.8. (E) Kísérleti úton határozzuk meg egy bizonyos faanyag sűrűségét. Készítettünk belőle egy $a = 20$ cm oldalú homogén kockát, s lemértük ennek tömegét, melyre $m = 419$ dkg adódott. A hosszmérés hibája legfeljebb 0,1 cm, a tömegmérésé pedig 0,5 dkg volt. Számítsa ki a hibák figyelembe vételével a sűrűséget!

(Emlékeztetőül: $\rho = \dfrac{m}{V}$.)

8.3.9. A véges növekmények tételének felhasználásával adjon közelítést az alábbi kétváltozós valós függvényeknek a megadott pontban felvett értékére egy olyan közeli pontból kiindulva, ahol a függvényérték könnyen számolható!

a) (M) $f(x;y) = \ln\left(x^2 - y^3\right)$, $P(3{,}02;1{,}96)$;

b) (E) $f(x;y) = (xy)^2 - 2(y+2x)^3$, $P(-1{,}98;3{,}01)$.

8.4. Kétváltozós valós függvények integrálszámítása

8.4.1. Számítsa ki az alábbi kétváltozós valós függvények kettős integrálját a megadott T tartományon!

a) (V) $f(x;y) = 1 - \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{4}$, $T = \left\{(x;y) \mid -1 \le x \le 1,\ -2 \le y \le 2\right\}$;

b) (E) $f(x;y) = x \cdot \sin y$, $T = \left\{(x;y) \,\middle|\, 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$;

c) (E) $f(x;y)=\dfrac{2x^2y}{1+y^2}$, $T=\left\{(x;y)\,\middle|\, 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\right\}$;

d)(M) $f(x;y)=\dfrac{1+xy}{1-y}$, $T=\left\{(x;y)\,\middle|\, 0\le x\le 2,\ -1\le y\le 0\right\}$;

e) (E) $f(x;y)=\dfrac{1}{(x-y-1)^2}$, $T=\left\{(x;y)\,\middle|\, -2\le x\le 1,\ 1\le y\le 3\right\}$;

f) (M) $f(x;y)=x^3\cdot e^{x^2y}$, $T=\left\{(x;y)\,\middle|\, -1\le x\le -\dfrac{1}{2},\ 0\le y\le 1\right\}$.

8.4.2. Számítsa ki az alábbi kétváltozós valós függvények kettős integrálját a csúcsaival adott téglalaptartományon!

a) (E) $f(x;y)=\cos(2x-y)$, $A(0;0)$, $B\left(\dfrac{\pi}{2};0\right)$, $C\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, $D\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$;

b)(E) $f(x;y)=\dfrac{\ln^2 x}{xy^2}$, $A\left(1;\dfrac{1}{4}\right)$, $B(1;1)$, $C(e;1)$, $D\left(e;\dfrac{1}{4}\right)$;

c) (M) $f(x;y)=\dfrac{x}{(x+y)^2}$, $A(1;0)$, $B(2;0)$, $C(2;2)$, $D(1;2)$.

8.4.3. Számítsa ki az alábbi kétváltozós valós függvények kettős integrálját a megadott T tartományon!

a)(M) $f(x;y)=\dfrac{54y}{1+x^2}$, $T=\left\{(x;y)\,\middle|\, 0\le x\le \sqrt{3},\ 0\le y\le \operatorname{arctg} x\right\}$;

b)(E) $f(x;y)=\dfrac{\sin x}{y^3}$, $T=\left\{(x;y)\,\middle|\, 0\le x\le \dfrac{\pi}{3},\ \cos x\le y\le 2\cos x\right\}$;

c) (V) $f(x;y)=3x-4y$, $T=\left\{(x;y)\,\middle|\, x^2+y^2\le 4\right\}$;

d)(E) $f(x;y)=x\cdot\sin 2y+y$, $T=\left\{(x;y)\,\middle|\, 0\le x\le \cos y,\ 0\le y\le \dfrac{\pi}{2}\right\}$;

e) (E) $f(x;y)=\sqrt{\dfrac{y}{x^3}}$, $T=\left\{(x;y)\,\middle|\, y\le x\le (1+y)^2,\ 1\le y\le 3\right\}$.

8.4.4. Számítsa ki az alábbi kétváltozós valós függvények kettős integrálját a csúcsaival adott sokszögtartományon!

a) (E) $f(x;y)=x\cdot\sin y$, $A\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, $B(\pi;0)$, $C(\pi;\pi)$;

b) (V) $f(x;y)=x+8y$, $A(-2;-9)$, $B(14;-13)$, $C(14;3)$;

c) (E) $f(x;y)=e^{x-y}$, $A(0;0)$, $B(1;1)$, $C(0;2)$;

d) (E) $f(x;y)=-\frac{x}{y^2}$, $A(2;2)$, $B(2;3)$, $C(4;4)$;

e) (M) $f(x;y)=\frac{2y}{\left(y^2-x^2\right)^2}$, $A\left(0;\frac{3}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, $C(0;2)$;

f) (V) $f(x;y)=\frac{e^x}{1+e^x}+3y\cdot\sqrt{y^2-x^2}$,
$A(0;0)$, $B(4;4)$, $C(4;5)$, $D(0;1)$.

8.4.5. Számítsa ki az alábbi kétváltozós valós függvények kettős integrálját a csúcsaival adott sokszögtartományon!

a) (E) $f(x;y)=e^{2x-y}$, $A(0;0)$, $B(1;-2)$, $C(2;-2)$;

b) (M) $f(x;y)=\left(\frac{x}{y}\right)^2$, $A(-1;2)$, $B(1;2)$, $C(0;4)$;

c) (V) $f(x;y)=\frac{2}{1+(y-x)^2}$, $A(1;1)$, $B(2;1)$, $C\left(2\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$, $D\left(\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$;

d) (E) $f(x;y)=x^2\cdot\ln y$, $A(1;1)$, $B(e;e)$, $C(-e;e)$, $D(-1;1)$;

e) (E) $f(x;y)=\frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)\cdot\sqrt{y^2+3}}$, $A(0;1)$, $B(0;2)$, $C(2;2)$, $D(1;1)$.

8.4.6. Számítsa ki az alábbi kétváltozós valós függvények kettős integrálját azon a korlátos tartományon, amelyet a következő egyenletekkel megadott görbék határolnak!

a) (E) $f(x;y)=\frac{12y^2}{x}$, $x=1$, $x=e$, $y=0$, $y=\ln x$;

b)(E) $f(x;y)=\dfrac{\cos x}{y^4}$, $x=\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{3\pi}{4}$, $y=\sin x$, $y=2\sin x$;

c)(M) $f(x;y)=\dfrac{x-1}{(y+1)^2}$, $x=1$, $x=-1$, $y=x^2$, $y=4$;

d)(V) $f(x;y)=4y\cdot \operatorname{sh} x$, $x=\ln 3$, $y=1$, $y=e^x$.

8.4.7. Számítsa ki az alábbi kétváltozós valós függvények kettős integrálját azon a korlátos tartományon, amelyet a következő egyenletekkel megadott görbék határolnak!

a)(M) $f(x;y)=y\cdot e^x$, $x=y$, $x=\dfrac{1}{3}y^2$;

b)(E) $f(x;y)=\dfrac{y}{(1+x)^2}$, $x=-y$, $x=y^2$, $y=-\dfrac{1}{2}$;

c)(E) $f(x;y)=\ln y$, $x=\dfrac{1}{y}$, $x=y^2$, $y=\dfrac{1}{2}$;

d)(V) $f(x;y)=1$, $x=y^2-4$, $x=-\dfrac{1}{2}y^2+2$.

8.4.8. Számítsa ki az alábbi kettős integrálokat, majd ábrázolja azt a tartományt, ahol integrált!

a)(M) $\displaystyle\int_1^e\left(\int_0^{\ln x}\left(\frac{2y}{x}-1\right)dy\right)dx$;

b)(E) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{\cos x}\frac{\operatorname{tg} x}{y^2}dy\right)dx$;

c)(E) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{1-2y}(x+y+1)dx\right)dy$.

8.4.9. Írja fel a következő, csúcsaikkal adott sokszögtartományokat normáltartományok egyesítéseként! Számítsa ki az alábbi kétváltozós valós függvény kettős integrálját ezeken a tartományokon!

a)(M) $f(x;y)=\sin y\cdot\cos x$,
$A(\pi;0)$, $B(\pi;\pi)$, $C(0;2\pi)$, $D(-\pi;\pi)$, $E(-\pi;0)$;

b)(E) $f(x;y)=72x(y-4)$, $A(-6;0)$, $B(-2;2)$, $C(0;4)$.

9. KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

9.1. Alapfogalmak

9.1.1. Döntse el, hogy az alábbi differenciálegyenletek hányadrendűek, illetve azt is, hogy lineárisak-e!

a)(M) $y''' \cdot \operatorname{tg} x - \frac{y'}{4x^2} + y \cdot \frac{e^x}{\sin x} = x \cdot \arccos x$;

b)(E) $y'' = 5y' - 4$; **c)** (E) $y^{(4)} \cdot \ln y + \sin y'' = 0$.

9.1.2. Döntse el, hogy az alábbi differenciálegyenleteknek megoldásai-e a megadott f(x) illetve g(x) függvények!

a)(V) $(y')^2 + y \cdot y'' = 4\cos 4x, \quad f(x) = \cos 2x, \quad g(x) = -\sin 2x$;

b)(E) $y'' = y + x^2, \quad f(x) = 2x^2, \quad g(x) = -x^2 - 2 - e^x$.

9.1.3. Határozza meg integrálással az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását, majd adja meg a megadott kezdeti feltételt illetve feltételeket kielégítő partikuláris megoldását!

a)(M) $y''' = 1, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0, \; y''(0) = -1$;

b)(E) $y'' = \cos\frac{x}{2}, \quad y(0) = 0$; **c)** (E) $y'(1 + e^x) = e^x, \quad y(0) = 0$.

9.2. Elsőrendű differenciálegyenletek

9.2.1. Adja meg az alábbi szétválasztható változójú differenciálegyenletek általános megoldását! Ha adott kezdeti feltétel is, akkor írja fel az ezt kielégítő partikuláris megoldását is!

a)(M) $y' = 2xy^2, \quad y(1) = -\frac{1}{2}$; **b)**(V) $y' = xy$;

c)(E) $dy = 4x\sqrt{y}\,dx, \quad y(1) = 1$; **d)**(E) $x^3\,dy = y^3\,dx, \quad y(0) = 1$;

e)(M) $y' \sin x = y \ln y$; **f)** (V) $1 + y^2 + 2xy \cdot y' = 0$;

g)(E) $(1+y^2)x-(1+x^2)y'=0$; **h)**(E) $y'e^{x+y}=1$.

9.2.2. Írja fel az alábbi elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletek általános megoldását!

a)(M) $xy'-3y=0$; **b)**(E) $y'+x^2y=0$;

c)(E) $y'\sin x-y\cos x=0$; **d)**(V) $y'+\frac{1}{x^2-1}y=0$.

9.2.3. Oldja meg az állandó variálásának módszerével az alábbi elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenleteket!

a)(M) $y'-\frac{y}{x+1}=x^2-1$; **b)**(E) $y'-2y=2x$;

c)(V) $xy'+y=\cos\frac{x}{2}$; **d)**(E) $y'+y=2\operatorname{ch}2x$;

e)(E) $y'+\frac{2}{x}y=\frac{3}{x^4+x^3-2x^2}$;

f) (E) $y'-\frac{2x}{1+x^2}y=(x^3+x)\operatorname{arctg}x$;

g)(M) $x^2y'+y=x\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x$; **h)**(E) $y'\cos x-\frac{y}{\cos x\cdot\operatorname{tg}x}=1$;

i) (V) $y'-\frac{2y}{1-x^2}=1$; **j)** (E) $2xy'+y=\frac{x}{x+1}$;

k)(E) $y'+y\cos x=x\cdot e^{x^2-\sin x}$; **l)** (E) $y'+\frac{2}{x^3}y=e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\ln\frac{1}{x}$;

m)(E) $xy'+\frac{y}{\ln x}=1$; **n)**(V) $xy'+xy-y+x^3=0$.

9.2.4. Határozza meg az állandó variálásának módszerével az alábbi elsőrendű lineáris differenciálegyenleteknek a megadott kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását!

a)(E) $2xy'-y=2x^3$, $y(4)=\frac{8}{5}$;

b)(V) $y'+y\operatorname{tg}x=-2\cos^3x$, $y(0)=1$;

c) (E) $y' - \frac{y}{x-2} = \frac{x-2}{x \cdot \ln x}$, $y(e) = 0$;

d) (E) $y' - \frac{y}{e-x} = \operatorname{ch} x$, $y(0) = 0$;

e) (V) $y' + \frac{2}{1-x^2} y = 1 - x^2$, $y(0) = 0$;

f) (M) $y' + y = \sin x$, $y(0) = \frac{1}{2}$;

g) (E) $y' - \frac{x}{1+x^2} y = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$, $y(0) = -2$;

h) (E) $y' \sin x + 2y \cos x = \cos x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$;

i) (E) $y' + y \cos x = \cos x$, $y(0) = -e$;

j) (V) $y' - \frac{3}{x^2 + x - 2} y = 1$, $y(0) = 3$.

9.2.5. Oldja meg próbafüggvény-módszerrel az alábbi állandó együtthatójú elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket!

a) (M) $y' + y = \sin x$;

b) (E) $y' - 2y = 4x$;

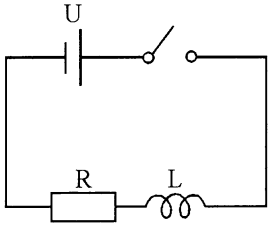
c) (V) $2y' + y = 10\left(e^{2x} + e^{-x}\right)$;

d) (E) $y' - 4y = \frac{25}{4} \cos 3x + 2$.

9.2.6. Az ábrán látható egyenáramú RL-körben $R = 0{,}4\,\Omega$, $L = 0{,}8\,H$, $U = 12\,V$.

a) (M) Írja fel (zárt kapcsoló esetén) az áramkörben folyó i(t) áramra a Kirchhoff-féle huroktörvényből adódó differenciálegyenletet az idő függvényében!

b) (E) Az $i(0) = 0$ kezdeti feltétel felhasználásával adja meg a bekapcsolás pillanatától kialakuló áramot az idő függvényében!



9.3. Másodrendű differenciálegyenletek

9.3.1. Adja meg az alábbi állandó együtthatójú másodrendű lineáris homogén differenciálegyenletek általános megoldását!

a)(E) $y''-2y'-3y=0$;
b)(M) $y''+5y'=0$;
c)(E) $4y''+y'=0$;
d)(E) $y''-6y'+9y=0$;
e)(M) $y''-2y'+10y=0$;
f) (V) $y''+4y=0$.

9.3.2. Oldja meg próbafüggvény-módszerrel az alábbi állandó együtthatójú másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenleteket!

a)(E) $9y''-y=4$;
b)(E) $y''+y'-12y=6x+2$;
c)(V) $y''+y=3x^2$;
d)(E) $y''+y'=6e^{\frac{x}{2}}$;
e)(M) $5y''+y'=18e^{x}-5\cos x$;
f) (E) $4y''+y=85\left(e^{-x}-e^{2x}\right)$;
g)(E) $2y''-2y'+5y=-\left(100x^2+24\right)$;
h)(E) $y''+10y'+9y=25\sin\frac{x}{2}$;
i) (E) $y''-4y=10\cos x+8x$;
j) (V) $y''+2y'+y=-10\cos 2x-5\sin 2x$;
k)(V) $y''+4y=-\operatorname{sh}3x$;
l) (V) $y''-3y'-10y=2e^{x}\cdot\operatorname{sh}x$;
m)(M) $y''+y=(x+1)e^{-x}$;
n)(E) $y''-5y'+6y=12x^2\cdot e^{x}$;
o)(E) $y''-16y=13e^{x}\cdot\sin x$;
p)(E) $y''-2y'=-15x\cdot\cos x$.

9.3.3. Adja meg az alábbi állandó együtthatójú másodrendű lineáris differenciálegyenleteknek az adott kezdeti feltételt illetve feltételeket kielégítő partikuláris megoldását!

a)(E) $y''+\frac{9}{4}y=0,\quad y(0)=-1,\ y(\pi)=1$;

b)(E) $y''+2y'=0,\quad y(0)=1;$

c)(V) $y''-3y'+2y=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0;$

d)(M) $-y''+4y'-5y=25x^2+e^{2x},\quad y(0)=0;$

e)(E) $y''+7y'+6y=-6\sin x-\cos x,\quad y(0)=0,\ y'(0)=0.$

9.3.4. Adottak az $ay''+by'+cy=q(x)$ $(a,b,c\in\mathbf{R},\ a\neq 0)$ alakú differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletének λ_1,λ_2 gyökei és a $q(x)$ zavarófüggvény. Írjon fel a partikuláris megoldás kereséséhez rezonanciamentes próbafüggvényt!

a)(M) $\lambda_1=2,\ \lambda_2=3,\quad q(x)=e^{2x}-x-1;$

b)(E) $\lambda_1=0,\ \lambda_2=4,\quad q(x)=20e^{4x}-16;$

c)(E) $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-3,\quad q(x)=10\cos x+12x;$

d)(M) $\lambda_{1,2}=-1,\ q(x)=2e^{-x};$ **e)**(E) $\lambda_{1,2}=4,\ q(x)=4\operatorname{sh}4x;$

f)(E) $\lambda_{1,2}=\pm j,\ q(x)=\sin x+\cos x;$

g)(V) $\lambda_{1,2}=\pm 3j,\ q(x)=12\sin 3x;$

h)(E) $\lambda_{1,2}=1\pm j,\ q(x)=e^x\cdot\sin x.$

9.3.5. Oldja meg próbafüggvény-módszerrel az alábbi állandó együtthatójú másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenleteket!

a)(M) $y''-5y'+6y=3e^{2x}-5e^{3x}+6;$

b)(E) $y''-2y'-3y=6\left(e^{-x}-x\right);$ **c)**(E) $2y''+3y'=10\sin\frac{x}{2}+6;$

d)(V) $3y''-y'=2x-7;$ **e)**(E) $y''+9y=\sin 3x-\cos 3x;$

f)(E) $y''-2y'=10\cos x-4x;$ **g)**(M) $-y''-6y'+7y=\operatorname{sh}x+1;$

h)(E) $4y''-y=8\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+x^2;$

i)(E) $y''+y'=3x^2+6x+1-2e^{-x};$

j)(E) $y''-4y'+4y=e^{2x}+4x;$ **k)**(V) $y''-8y'+16y=4\operatorname{ch}4x;$

l)(E) $y''+2y'+y=25\sin 2x+2e^{-x};$

m)(V) $y''-3y'=2e^x+(6x+5)e^{3x}.$

9.3.6. Adja meg az alábbi állandó együtthatójú másodrendű lineáris differenciálegyenleteknek az adott kezdeti feltételt illetve feltételeket kielégítő partikuláris megoldását!

a)(E) $y'' + 2y' = 12x^2 - 2, \quad y(0) = 0, \; y\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 - e;$

b)(M) $y'' - 6y' = 12 + 37\sin x, \quad y(0) = 2, \; y'(0) = 0;$

c)(E) $y'' - 3y' = 3e^{3x} + 9, \quad y(0) = 0;$

d)(M) $y'' - 5y' + 6y = -3e^{2x} + 10\sin x, \quad y(0) = 0;$

e)(E) $y'' + y = 2\cos x, \quad y(0) = -3;$

f)(E) $y'' + 4y = \sin 2x + 2\cos 2x, \quad y(0) = -1, \; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi;$

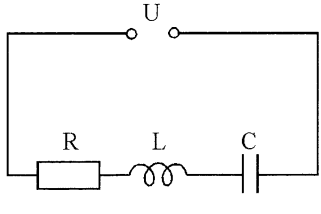
g)(V) $y'' - 3y' + 2y = 24\,\mathrm{ch}\,x + 12x, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1;$

h)(V) $y'' - y = x \cdot e^x, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = -\frac{1}{4}.$

9.3.7. Az alábbi váltakozó áramú RLC-körben $R = 40\Omega$, $L = 0{,}5\,\mathrm{H}$, $C = 25\,\mu\mathrm{F}$ és $U = U_0 \cdot \sin \omega t$, ahol $U_0 = 34\,\mathrm{V}$ illetve $\omega = 314\frac{1}{s}$.

a)(M) Írja fel az áramkörben folyó i(t) áramra a Kirchhoff-féle huroktörvényből adódó differenciálegyenletet az idő függvényében!

b)(E) Adja meg a differenciálegyenlet általános megoldását!



10. LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ

10.1. Laplace és inverz Laplace-transzformált

10.1.1. Képezze az alábbi függvények Laplace-transzformáltját!

a) (E) $f(t) = 2e^{9t} + 3t^7 - 2$;

b) (E) $f(t) = 9e^{-12t} + 3\sin 7t - \frac{1}{2}t$;

c) (E) $f(t) = 3 - 2\cos 8t + 3e^{-\frac{t}{2}}$;

d) (E) $f(t) = \frac{1}{3}\mathrm{sh}6t - 5\mathrm{ch}3t$;

e) (E) $f(t) = \frac{R}{L}e^{-\omega t} + \frac{1}{C}\sin\omega t$ (R, L, ω, C pozitív állandók);

f) (M) $f(t) = 2e + e^{-t} \cdot \mathrm{ch}5t$;

g) (E) $f(t) = e^{3t} \cdot t^4$;

h) (E) $f(t) = e^{3t} \cdot \mathrm{sh}\frac{2t}{3} + 2e^{-\frac{t}{3}} \cdot \mathrm{ch}5t$;

i) (E) $f(t) = e^{5t} \cdot \cos 2t + 4e^{-t} \cdot \sin 9t$;

j) (M) $f(t) = \sin^2 t$;

k) (M) $f(t) = t \cdot \sin t$;

l) (M) $f(t) = \sin t \cdot \cos t$;

m) (V) $f(t) = 8\mathrm{sh}t \cdot \cos 3t + \sin^2 t + \cos^2 t$;

n) (E) $f(t) = t^2 + e^{\frac{3}{4}t} + 4\mathrm{sh}\frac{t}{5} \cdot \mathrm{ch}\frac{t}{5}$.

10.1.2. Az eltolási tétel alkalmazásával határozza meg a következő függvények Laplace-transzformáltját!

a) (E) $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 5, \\ (t-5)^3, & \text{ha } t \geq 5; \end{cases}$

b)(E) $f(t)=\begin{cases}0, & \text{ha } t<3,\\ \sin(t-3), & \text{ha } t\geq 3;\end{cases}$

c) (M) $f(t)=\begin{cases}0, & \text{ha } t<2,\\ \cos(3t-6), & \text{ha } t\geq 2.\end{cases}$

10.1.3. Határozza meg az alábbi függvények inverz Laplace-transzformáltját!

a)(E) $\bar{f}(s)=\frac{2}{s-8}+\frac{2}{s^2+4}-\frac{5}{s}$;

b)(E) $\bar{f}(s)=\frac{6}{s^5}+\frac{1}{3s+21}-\frac{8s}{s^2-4}$;

c) (M) $\bar{f}(s)=\frac{2s+3}{s^2+5}$;

d)(V) $\bar{f}(s)=\frac{15}{8s^2-50}+\frac{12}{63s^2+28}$;

e) (M) $\bar{f}(s)=\frac{6}{s^2-5s+4}$;

f) (E) $\bar{f}(s)=\frac{3}{s^4}+\frac{s+1}{s^2+2s-3}$;

g)(E) $\bar{f}(s)=\frac{5}{s^2+4s+4}$;

h)(E) $\bar{f}(s)=\frac{1}{s^2+6s+10}+\frac{1}{(s-3)^3}$;

i) (M) $\bar{f}(s)=\frac{s-10}{s^2-18s+82}$;

j) (V) $\bar{f}(s)=\frac{15s-15}{s^3+8s^2+15s}$;

k)(E) $\bar{f}(s)=\frac{s^2-4}{s^4+2s^2}$;

l) (M) $\bar{f}(s)=\frac{s^2+18}{s^5+9s^3}$;

m)(E) $\bar{f}(s)=\frac{s^2+9}{s^5-9s^3}$;

n)(V) $\bar{f}(s)=\frac{15}{s^3-2s^2+5s}$.

10.2. Lineáris differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval

10.2.1. Oldja meg Laplace-transzformációval az alábbi elsőrendű differenciálegyenleteket az adott kezdeti feltételek mellett!

a) (M) $y'+3y=-8e^{5x}$, $y(0)=4$;

b)(E) $y'+2y=10\operatorname{sh}3x$, $y(0)=5$;

c) (E) $y' - 5y = 25x$, $y(0) = 1$;
d) (V) $y' + 2y = 10\sin 4x$, $y(0) = 0$;
e) (E) $y' + 3y = 2\cos x$, $y(0) = 0$;
f) (E) $y' - 2y = -4x + 12\operatorname{ch} x$, $y(0) = 0$;
g) (V) $y' - y = 4x \cdot e^{-x}$, $y(0) = 0$;
h) (V) $y' + 2y = 17e^{2x} \cdot \cos x$, $y(0) = 0$;
i) (E) $y' - 3y = e^{3x} - 2$, $y(0) = -2$.

10.2.2 Oldja meg Laplace-transzformációval az alábbi másodrendű differenciálegyenleteket az adott kezdeti feltételek mellett!

a) (M) $y'' + 9y = 9$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$;
b) (E) $y'' + 4y = 13e^{3x}$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 5$;
c) (E) $y'' + 3y' + 2y = 2x + 5$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;
d) (E) $y'' + 3y' + 2y = 12e^{2x}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$;
e) (E) $y'' - y' = 2$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;
f) (V) $y'' - 6y' + 9y = 25e^{-2t}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;
g) (E) $y'' + 4y' = 68\sin x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;
h) (E) $y'' + 5y' + 4y = 4t$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;
i) (V) $y'' + 3y' - 4y = \operatorname{sh} 3x$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 3$;
j) (E) $y'' + y' = t^2 + 2t$, $y(0) = 4,\ y'(0) = -2$;
k) (E) $y'' + 2y = 6e^{2x}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;
l) (E) $y'' - y' - 2y = 18e^{-4x} + 12$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;
m) (E) $y'' + y' - 2y = 15\sin 2x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;
n) (V) $y'' + 4y' + 4y = 25e^{3x}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;
o) M) $y'' - 6y' + 9y = 3x^2 \cdot e^{3x}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;
p) (M) $y'' + 2y' + 5y = 13e^{2x}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;
q) (E) $y'' + 3y' + 2y = 24\operatorname{ch} 2x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;
r) (E) $y'' - 2y' + 2y = 2$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;
s) (M) $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$;
t) (V) $y'' - y = 8x + 24e^{x}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;

u)(E) $y'' - 4y' + 5y = 2e^{3x}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

10.2.3. (M) Határozza meg Laplace-transzformáció alkalmazásával az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!
$y'' + 3y' = e^{x}$.

10.2.4. (E) Egy állandó feszültségre kapcsolt soros RL-áramkörben az áramerősség időben történő változását az alábbi differenciálegyenlet írja le:
$\frac{di(t)}{dt} + 8i(t) = 4$.
Határozza meg Laplace-transzformáció segítségével az i(t) időfüggvényt az áramkör bekapcsolásakor (i(0)=0)!

10.2.5. (V) Egy rezgő tömegpontra az elmozdulással arányos, de azzal ellentétes irányú rugóerő és ellentétes irányú súrlódási erő hat. A tömegpont egyenes mentén való mozgását az alábbi rezgési differenciálegyenlet írja le:
$\frac{d^2x(t)}{dt} + 5 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0$.
Határozza meg Laplace-transzformáció alkalmazásával az elmozdulás x(t) időfüggvényét, ha a t = 0 időpillanatban az elmozdulás nulla, a sebesség 2 m/s!

11. VÉGTELEN SOROK

11.1. Számsorok

11.1.1. Írja fel a részletösszegek sorozatának első három elemét, majd vizsgálja meg, hogy teljesül-e a konvergencia szükséges feltétele!

a) (M) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+3n+2}$;

b) (E) $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{2}{5}\right)^n$;

c) (M) $\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{\sqrt{19}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^n$;

d) (V) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-3^{-n+1}}{3^{n-1}+3^{-n+1}}$;

e) (E) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$;

f) (E) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+4}\right)$.

11.1.2. Vizsgálja meg az alábbi számsorok konvergenciáját! Amelyik konvergens, annak számítsa ki az összegét!

a) (M) $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{5}{7}\right)^n$;

b) (M) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$;

c) (V) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+7^n}{21^n}$;

d) (E) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{2^{n+2}}$;

e) (E) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{5}+1}\right)^{2n}$;

f) (E) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{5}-2\right)\left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}+1}\right)^n$.

11.1.3. Számítsa ki az alábbi számsorok összegét!

a) (M) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)}$;

b) (V) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+6}{n(n+2)(n+4)}$;

c) (E) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n-4)}$;

d) (E) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$;

e) (E) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+3}{(n-1)(n+2)(n-2)}$;

f) (E) $\sum_{n=2}^{\infty} \log_2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^3$.

11.1.4. Vizsgálja meg az alábbi váltakozó előjelű sorok konvergenciáját!

a) (M) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+2}$;

b) (M) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+2}{2n+1}$;

c) (E) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}\cos n\pi$;

d) (V) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+2)!}\sin^{n}\frac{3\pi}{2}$;

e) (E) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n-1}{2^{n-1}}$;

f) (E) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$.

11.1.5. A D'Alembert-féle hányados-, illetve a Cauchy-féle gyökkritérium alkalmazásával vizsgálja meg az alábbi, pozitív tagú számsorok konvergenciáját!

a) (M) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{5^{n}}$;

b) (V) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!}{3^{n}}$;

c) (E) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)(n+3)}$;

d) (M) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+3)^{n}}$;

e) (V) $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)^{\frac{n}{3}}$;

f) (E) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

11.2. Hatványsorok

11.2.1. Vizsgálja meg, hogy az alábbi hatványsorok konvergensek-e a megadott helyeken!

a) (M) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n+2}$, ha $x_1 = 0{,}5$ illetve $x_2 = 3$;

b) (V) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^{n}}{n^2+1}$, ha $x_1 = 1$ illetve $x_2 = 5$;

c) (E) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{3^{n}}x^{n}$, ha $x_1 = 2$ illetve $x_2 = 6$;

d) (E) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^{n}x^{n}$, ha $x_1 = 0{,}5$ illetve $x_2 = 0{,}25$;

e) (V) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$, ha $x_1 = 2$ illetve $x_2 = 2e$;

f) (E) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}(n+4)!}{3^n(n+2)!} x^n$, ha $x_1 = 0{,}1$ illetve $x_2 = 10$.

11.2.2. Írja fel az alábbi függvények megadott x_0 körüli, harmadrendű Taylor-polinomját!

a) (M) $f(x) = 2^x$, ha $x_0 = 1$;

b) (M) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, ha $x_0 = e$;

c) (V) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, ha $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

d) (E) $f(x) = x^7 - x^2$, ha $x_0 = 1$;

e) (E) $f(x) = x \ln x$, ha $x_0 = e$;

f) (E) $f(x) = e^{x^2}$, ha $x_0 = -1$.

11.2.3. Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorát! Határozza meg, hogy Taylor-sora melyik tartományban állítja elő a függvényt!

a) (M) $f(x) = \frac{1}{2} \sin 3x$;

b) (V) $f(x) = \sin 2x \cos x$;

c) (V) $f(x) = \frac{2}{e^x}$;

d) (E) $f(x) = x^3 e^{2x}$;

e) (E) $f(x) = \cos x^3$;

f) (M) $f(x) = \frac{1}{4 + x^2}$;

g) (M) $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$;

h) (M) $f(x) = \ln(2 - x)$;

i) (V) $f(x) = x^2 \ln(x + 2)$;

j) (E) $f(x) = \lg(1 - 2x)$;

k) (E) $f(x) = \sqrt[3]{5 - x}$;

l) (E) $f(x) = 2x \arccos(-x)$.

11.2.4. Az $x_0 = 0$ körüli, harmadrendű Taylor-polinom alkalmazásával, adja meg két egész szám hányadosaként az alábbi függvények közelítő értékét a megadott x_1 helyen, és adjon felső becslést a közelítő érték hibájára!

a) (M) $f(x) = e^x$, ha $x_1 = -0{,}1$;

b) (E) $f(x) = \sqrt[3]{1 + x}$, ha $x_1 = 0{,}1$;

c) (E) $f(x) = \cos x$, ha $x_1 = 0{,}2$;

d) (E) $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$, ha $x_1 = 0{,}1$.

11.2.5. Az integrandus $x_0 = 0$ körüli, negyedfokú Taylor-polinomjának alkalmazásával, adja meg két egész szám hányadosaként az alábbi határozott integrálok közelítő értékét, és adjon felső becslést a közelítő érték hibájára!

a) (M) $\int_0^{0,2} \frac{\sin 2x}{x} dx$; **b)** (E) $\int_0^{0,3} e^{-x^2} dx$.

11.2.6. Az integrandus $x_0 = 0$ körüli Taylor-polinomjának alkalmazásával, számítsa ki az alábbi határozott integrálok közelítő értékét úgy, hogy a pontos értéktől való eltérés legfeljebb 10^{-6} legyen!

a) (M) $\int_0^{0,2} e^{-x^2} dx$; **b)** (V) $\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x} dx$;

c) (E) $\int_{0,4}^{0,6} \sqrt{1+x^2}\, dx$; **d)** (E) $\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx$.

11.3. Fourier-sorok

11.3.1. Írja fel, és ábrázolja az alábbi periodikus függvények Fourier-sorának első három, nullától különböző Fourier-együtthatójú tagját, a függvény egy periódusában! Ábrázolja ezek összegét és a megadott függvényt is!

a) (M) $f(x) = \begin{cases} -\pi, & \text{ha} \quad -2\pi < x \le 0, \\ \pi, & \text{ha} \quad 0 < x \le 2\pi, \end{cases}$

és $f(x) = f(x + 4\pi)$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén;

b) (V) $f(x) = x$, ha $-\pi < x \le \pi$,

és $f(x) = f(x + 2\pi)$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén.

11.3.2. Ábrázolja az alábbi periodikus, páratlan vagy páratlanná transzformálható függvények három periódusát, és határozza meg a Fourier-sorukat! A szakadási helyeken számítsa ki a sor összegét!

a) (M) $f(x)=\begin{cases}3, & \text{ha} \quad -\pi < x \le 0,\\ -3, & \text{ha} \quad 0 < x \le \pi,\end{cases}$

és $f(x)=f(x+2\pi)$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén;

b) (V) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad -\pi < x \le 0,\\ 6, & \text{ha} \quad 0 < x \le \pi,\end{cases}$

és $f(x)=f(x+2\pi)$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén;

c) (E) $f(x)=-x, \quad \text{ha} \quad -\pi < x \le \pi,$

és $f(x)=f(x+2\pi)$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén;

d) (E) $f(x)=\begin{cases}-x-\pi, & \text{ha} \quad -\pi < x \le 0,\\ -x+\pi, & \text{ha} \quad 0 < x \le \pi,\end{cases}$

és $f(x)=f(x+2\pi)$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén;

e) (E) $f(x)=\begin{cases}-1, & \text{ha} \quad -1 < x \le 0,\\ 1, & \text{ha} \quad 0 < x \le 1,\end{cases}$

és $f(x)=f(x+2)$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén;

f) (E) $f(x)=2x, \quad \text{ha} \quad -1 < x \le 1,$

és $f(x)=f(x+2)$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén.

11.3.3. Határozza meg az alábbi periodikus, páratlan vagy páratlanná transzformálható függvények Fourier-sorát!

a) (V) $f(x)=\begin{cases}x^2+3, & \text{ha} \quad -1 < x \le 0,\\ -x^2+3, & \text{ha} \quad 0 < x \le 1,\end{cases}$

és $f(x)=f(x+2)$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén;

b) (V) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad -1 < x \le -0{,}5,\\ 2\sin \pi x, & \text{ha} \quad -0{,}5 < x \le 0{,}5,\\ 0, & \text{ha} \quad 0{,}5 < x \le 1,\end{cases}$

és $f(x)=f(x+2)$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén;

c) (E) $f(x)=\begin{cases}2x, & \text{ha} \quad -1 < x \le -0{,}5,\\ 2(x-\sin \pi x), & \text{ha} \quad -0{,}5 < x \le 0{,}5,\\ 2x, & \text{ha} \quad 0{,}5 < x \le 1,\end{cases}$

és $f(x)=f(x+2)$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén.

11.3.4. Ábrázolja az alábbi periodikus, páros függvényeket és határozza meg a Fourier-sorukat!

a)(V) $f(x)=\begin{cases}2, & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{3\pi}{2},\end{cases}$

és $f(x)=f(x+2\pi)$ minden $x\in\mathbf{R}$ esetén;

b)(E) $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{ha} \quad -\pi<x\le 0,\\ x, & \text{ha} \quad 0<x\le\pi,\end{cases}$

és $f(x)=f(x+2\pi)$ minden $x\in\mathbf{R}$ esetén;

c)(E) $f(x)=2-|x|$, ha $-2<x\le 2$,

és $f(x)=f(x+4)$ minden $x\in\mathbf{R}$ esetén.

11.3.5. Határozza meg az alábbi periodikus, páros függvények Fourier-sorát!

a)(M) $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & \text{ha} \quad -2<x\le 0,\\ e^{x}, & \text{ha} \quad 0<x\le 2,\end{cases}$

és $f(x)=f(x+4)$ minden $x\in\mathbf{R}$ esetén;

b)(E) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad -0{,}5<x\le -0{,}25,\\ 2\cos\pi x, & \text{ha} \quad -0{,}25<x\le 0{,}25,\\ 0, & \text{ha} \quad 0{,}25<x\le 0{,}5,\end{cases}$

és $f(x)=f(x+1)$ minden $x\in\mathbf{R}$ esetén;

c)(E) $f(x)=x^2$, ha $-2<x\le 2$,

és $f(x)=f(x+4)$ minden $x\in\mathbf{R}$ esetén.

11.3.6. Ábrázolja az alábbi periodikus függvényeket és határozza meg a Fourier-sorukat! A sort írja fel $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(n\omega x+\varphi_n)$ alakban is!

a)(M) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad -\pi < x \le \dfrac{\pi}{4},\\ 2, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{4} < x \le \pi,\end{cases}$

és $f(x)=f(x+2\pi)$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén;

b)(E) $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{ha} \quad -2 < x \le 0,\\ x-2, & \text{ha} \quad 0 < x \le 2,\end{cases}$

és $f(x)=f(x+4)$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén.

11.3.7. Határozza meg az alábbi periodikus függvények Fourier-sorát! A sort írja fel $a_0+\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega x+\varphi_n)$ alakban is!

a)(M) $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & \text{ha} \quad 0 < x \le 1,\\ 1, & \text{ha} \quad 1 < x \le 2,\end{cases}$

és $f(x)=f(x+2)$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén;

b)(E) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad -\pi < x \le \dfrac{\pi}{4},\\ \sin x, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{4} < x \le \pi,\end{cases}$

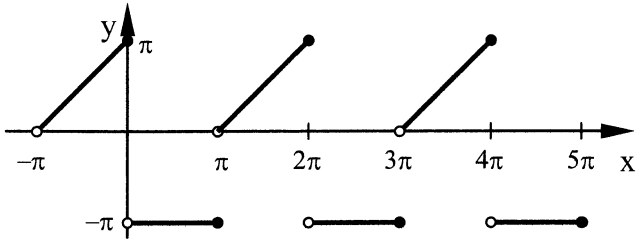
és $f(x)=f(x+2\pi)$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén;

c)(E) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad 0 < x \le \dfrac{1}{3},\\ 3\sin \pi x, & \text{ha} \quad \dfrac{1}{3} < x \le 1,\\ 0, & \text{ha} \quad 1 < x \le 2,\end{cases}$

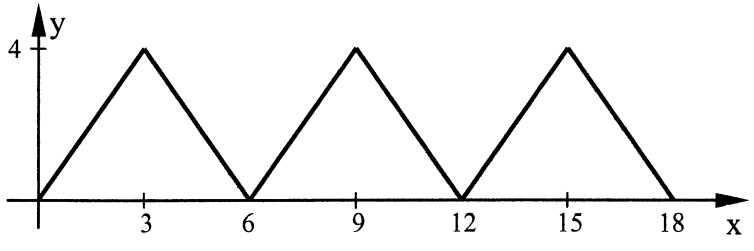
és $f(x)=f(x+2)$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén.

11.3.8. Határozza meg az alábbi, szakaszokból álló grafikonnal megadott, periodikus függvények Fourier-sorát!

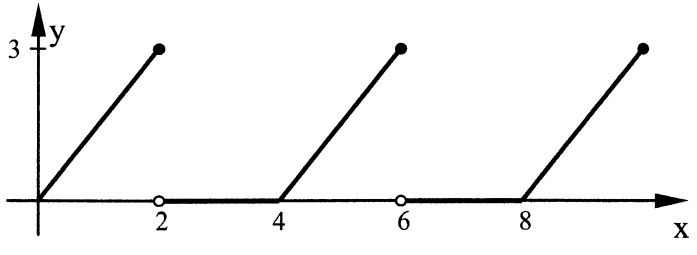
a) (M)



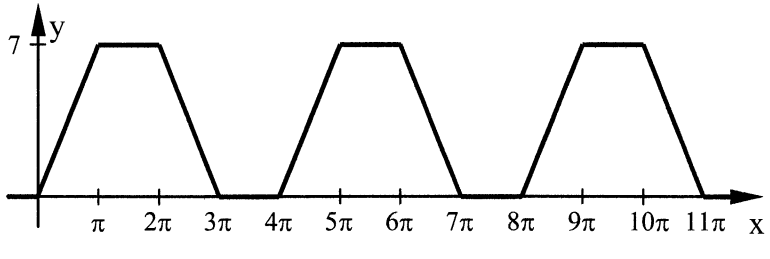
b) (V)



c) (E)



d) (V)



12. LINEÁRIS PROGRAMOZÁS

12.1. Lineáris egyenlőtlenségek grafikus megoldása

12.1.1. Oldja meg grafikusan a következő kétismeretlenes lineáris egyenlőtlenségrendszereket és határozza meg a megoldáshalmazok csúcspontjait!

a) (M)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 12, \\ 2 \le x_1 &\le 8, \\ 3 \le x_2 &\le 8; \end{aligned}$$

b) (E)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 0, \\ -2x_1 + x_2 &\ge -4, \\ x_2 &\ge 0; \end{aligned}$$

c) (E)

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &\ge -6, \\ x_1 + x_2 &\ge 2, \\ x_1 - x_2 &\le 4, \\ x_1, x_2 &\ge 0; \end{aligned}$$

d) (E)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 2, \\ x_1 - x_2 &\le 4, \\ -x_1 + x_2 &\le 6, \\ x_2 &\le 0. \end{aligned}$$

12.2. Lineáris programozás alapfeladata

12.2.1. Írja fel az alábbi feladatokat az egyenlőtlenségek és a célfüggvény megfelelő átalakításával

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\le \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &\ge 0, \\ (\mathbf{c} * \mathbf{x}) &\to \max. \end{aligned}$$

alaknak megfelelő formában!

a) (E)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &\le 6, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &\ge 1, \\ x_2 - x_3 &\ge -3, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\ge 0, \\ (2x_1 - 3x_2 + x_3) &\to \max; \end{aligned}$$

b) (E)

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &\le 10, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 &\ge 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\ge 0, \\ (-3x_1 + x_2 - 4x_3) &\to \min. \end{aligned}$$

12.2.2. (M) Egy gyár négyféle terméket állít elő (A_1, A_2, A_3, A_4) három erőforrás (I, II, III) felhasználásával. Az egyes termékek fajlagos erőforrásigényét, az egyes erőforrásokból rendelkezésre álló mennyiségeket, valamint az egyes termékek darabárát az alábbi táblázat mutatja.

Erőforrások	Termékek				Erőforrások kapacitása
	A_1	A_2	A_3	A_4	
I	1	2	4	3	100
II	0	3	2	1	120
III	2	0	0	4	80
Ár (ezer Ft-ban)	15	20	25	17	

Írja fel annak a feladatnak a matematikai modelljét, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

- az erőforrások kapacitása nem léphető túl;
- az A_1 termékből legalább annyit kell termelni, mint az A_2-ből és A_3-ból összesen;
- a II. erőforrásból a kapacitást teljesen ki kell használni;
- a gyár célja a maximális árbevétel.

12.3. Kétváltozós lineáris programozási feladat grafikus megoldása

12.3.1. Oldja meg grafikusan az alábbi kétváltozós feladatokat! A célfüggvényeket a z, z_1 és z_2 szimbólumokkal jelöltük.

a) (M)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\le 2, \\ 2x_1 - 2x_2 &\ge -8, \\ x_1 + 4x_2 &\ge 8, \\ x_1,\ x_2 &\ge 0, \\ z = (x_1 + x_2) &\to \max, \\ z = (x_1 + x_2) &\to \min; \end{aligned}$$

b) (E)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\le 30, \\ x_1 - 2x_2 &\le 2, \\ -4x_1 + 3x_2 &\le 12, \\ x_1,\ x_2 &\ge 0, \\ z_1 = (2x_1 - x_2) &\to \max, \\ z_2 = (-3x_1 + 6x_2) &\to \min; \end{aligned}$$

c) (E)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\ge 6, \\ -2x_1 + x_2 &\le 2, \\ -4x_1 + 5x_2 &\le 20, \\ x_1,\ x_2 &\ge 0, \\ z_1 = (4x_1 + 2x_2) &\to \max, \\ z_2 = (8x_1 - 10x_2) &\to \min; \end{aligned}$$

d) (E)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6, \\ 2x_1 - x_2 &\ge -2, \\ x_1 - 2x_2 &\le 2, \\ x_1,\ x_2 &\ge 0, \\ z_1 = (5x_1 + 3x_2) &\to \max, \\ z_2 = (5x_1 - 5x_2) &\to \min; \end{aligned}$$

e) (E)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &\le 6, \\ 2x_1 + x_2 &\ge 4, \\ -x_1 + x_2 &\le 2, \\ 7x_1 - 6x_2 &\le 42, \\ x_1 \ge 0,\ 0 \le x_2 &\le 7, \\ z_1 = (15x_1 + 3x_2) &\to \max, \\ z_2 = (6x_1 + 3x_2) &\to \min; \end{aligned}$$

f) (E)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\ge 3, \\ x_1 - 3x_2 &\le 3, \\ -x_1 + 3x_2 &\le 15, \\ x_1 + 3x_2 &\le 21, \\ 0 \le x_1 \le 6,\ x_2 &\ge 0, \\ z_1 = (-2x_1 - 6x_2) &\to \max, \\ z_2 = (4x_1 - 5x_2) &\to \min; \end{aligned}$$

g) (E)

$$x_1 + x_2 \geq 2,$$
$$8x_1 - 6x_2 \leq 48,$$
$$-4x_1 + 2x_2 \leq 8,$$
$$x_1, x_2 \geq 0,$$
$$z_1 = (5x_1 + 3x_2) \to \min,$$
$$z_2 = (7x_1 + 10x_2) \to \max;$$

h) (E)

$$x_1 + x_2 \geq 4,$$
$$-x_1 + x_2 \leq 5,$$
$$2x_1 - 4x_2 \leq -4,$$
$$x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0,$$
$$z_1 = (3x_1 + 3x_2) \to \min,$$
$$z_2 = (-4x_1 + 2x_2) \to \max.$$

12.3.2. (E) Írjon fel olyan feladatot, amelyben a lehetséges megoldások halmazát az A(0;0), B(4;0), C(6;2), D(4;4), E(0;2) csúcspontok által meghatározott konvex poliéder pontjai alkotják és a $4x_1 + 4x_2$ célfüggvény maximumát keressük! Oldja meg a feladatot grafikusan!

12.3.3. (V) Egy bányászati társaságnak két bányája van (A és B), mindkettőben háromféle minőségű (első-, másod-, és harmadosztályú) ércet termelnek ki. Az óránkénti kitermelést tonnában az alábbi táblázat mutatja.

bánya	első osztályú	másod osztályú	harmad osztályú
A	2	3	3
B	1	2	6

A társaság az első osztályú ércből legalább 100 tonnát, a másodosztályúból legalább 180 tonnát, a harmadosztályúból legalább 240 tonnát akar kitermelni. Az A bánya üzemeltetése óránként 250 $-ba, a B bányáé pedig óránként 275 $-ba kerül. Határozza meg a bányák optimális üzemeltetési idejét, amely alatt a szükségelt mennyiséget minimális költséggel termelik ki!

13. VEKTORANALÍZIS

Ha azt külön nem jelezzük, akkor ebben a fejezetben, valamennyi függvény értelmezési tartományának a hozzárendelési szabály által megengedett, legbővebb halmazt tekintjük.

13.1. Vektor-skalár függvények

13.1.1. Határozza meg az alábbi vektor-skalár függvények első derivált függvényeit!

a) (M) $\mathbf{r}(t) = (t\sin t)\mathbf{i} + (t\cos t)\mathbf{j} + (\arccos t)\mathbf{k}$;

b) (E) $\mathbf{r}(t) = \left(\ln\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\mathbf{i} + (3^t + t)\mathbf{j} + (\log_2 t)\mathbf{k}$;

c) (E) $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 3t)\mathbf{i} + (\operatorname{tg} t)\mathbf{j} + \sqrt[3]{t}\mathbf{k}$;

d) (M) $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{\operatorname{th} t}\left((\operatorname{sh} 2t)\mathbf{i} + (\operatorname{ch} 2t)\mathbf{j} + (\operatorname{cth} t)\mathbf{k}\right)$;

e) (E) $\mathbf{r}(t) = \left(\operatorname{arc\,tg}(1+t^2)\right)\mathbf{i} + t^2 e^t\mathbf{j} + 2\sqrt{t^3 + 2t}\mathbf{k}$;

f) (E) $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t^2 - t}\left(\left(t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}\right) - \left(\sqrt[4]{t}\mathbf{i} + \sqrt[3]{t}\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}\right)\right)$.

13.1.2. Írja fel az alábbi vektor-skalár függvények t_1 és t_2 független változó értékei által meghatározott P_1P_2 szakasz paraméteres egyenletrendszerét, és számítsa ki a pontok távolságát!

a) (M) $\mathbf{r}(t) = \frac{t}{e^t - e + 1}\mathbf{i} + \frac{1-t}{1+t}\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, ha $t_1 = 0$ és $t_2 = 1$;

b) (E) $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\mathbf{i} + (t-3)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, ha $t_1 = 0$ és $t_2 = 1$;

c) (E) $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \left(t + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{k}$, ha $t_1 = 0$ és $t_2 = \frac{\pi}{2}$;

d) (E) $\mathbf{r}(t) = \left(\ln(t^4 + 1)\right)\mathbf{i} + (\operatorname{arctg} t)\mathbf{j} + (t^4 - 1)\mathbf{k}$, ha $t_1 = 0$ és $t_2 = 1$.

13.1.3. Írja fel az alábbi vektor-skalár függvények által meghatározott térgörbék esetében, a t_0 független változó értékhez tartozó, P_0 pontbeli érintő paraméteres egyenletrendszerét!

a) (M) $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 11)\mathbf{i} + (t^2 - 3t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, ha $t_0 = 2$;

b) (V) $\mathbf{r}(t) = e^{-t+2}\mathbf{i} + \sqrt{\cos t}\,\mathbf{j} + (2\ln(t+1))\mathbf{k}$, ha $t_0 = 0$;

c) (E) $\mathbf{r}(t) = \frac{e^t}{\operatorname{ch} t}\mathbf{i} + \frac{e^t}{\operatorname{sh} t}\mathbf{j} + \frac{\log_2 t}{t}\mathbf{k}$, ha $t_0 = 1$;

d) (E) $\mathbf{r}(t) = (\ln 2 \sin t)\mathbf{i} + (t^2 \ln\cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, ha $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

13.1.4. A megadott $t_1 \le t \le t_2$ esetén, számítsa ki az alábbi vektor-skalár függvények által meghatározott térgörbék ívhosszát!

a) (M) $\mathbf{r}(t) = t^5\mathbf{i} + \frac{\sqrt{10}}{3}t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, ha $1 \le t \le 2$;

b) (M) $\mathbf{r}(t) = (2 + \ln t^3)\mathbf{i} + (3t^2 - 4)\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}$, ha $\sqrt{e} \le t \le e$;

c) (V) $\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, ha $0 \le t \le \pi$;

d) (E) $\mathbf{r}(t) = \frac{\log_4 t}{6}\mathbf{i} + \frac{\log_4 t}{3}\mathbf{j} + \frac{\log_8 t}{2}\mathbf{k}$, ha $e \le t \le e^3$;

e) (E) $\mathbf{r}(t) = t\left(\frac{(\ln t - 1)^2 + 1}{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}(1 - \ln t)\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$, ha $1 \le t \le e$;

f) (V) $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{cth} 2t)\mathbf{i} + \frac{\cos 2t}{\operatorname{sh} 2t}\mathbf{j} + \frac{\sin 2t}{\operatorname{sh} 2t}\mathbf{k}$, ha $\ln 2 \le t \le \ln 4$;

g) (V) $\mathbf{r}(t) = \frac{e^t}{e^{2t} + 1}\left((\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (\operatorname{sh} t)\mathbf{k}\right)$, ha $0 \le t \le \ln\sqrt{3}$;

h) (E) $\mathbf{r}(t) = \frac{16t^3}{3}\mathbf{i} + \left(4\sqrt{2}\ln(1+t)\right)\mathbf{j} + \left(2\ln\frac{t}{1+t} - \frac{1+2t}{t+t^2}\right)\mathbf{k}$,
ha $1 \le t \le 2$;

i) (E) $\mathbf{r}(t) = \frac{t + \operatorname{ctg} t}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + (\ln\sin t)\mathbf{j} + \frac{t}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$, ha $\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}$;

j) (E) $\mathbf{r}(t) = 3\left(t\mathbf{i} + (t - \operatorname{tg} t)\mathbf{j} + \sqrt{2}(\ln\cos t)\mathbf{k}\right)$, ha $0 \le t \le \frac{\pi}{6}$;

k) (E) $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} + \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln(1+t)\right)\mathbf{j} + \frac{4\sqrt{t+1}}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$, ha $1 \le t \le 2$;

l) (E) $\mathbf{r}(t) = \frac{e^{4t+2}}{4}\mathbf{i} + \frac{(t+1)^3}{3}\mathbf{j} + \frac{2t+1}{4e^{-2t-1}}\mathbf{k}$, ha $-3 \le t \le 1$.

13.1.5. (M) Hányszorosa a $t_1 = 0$ és a $t_2 = 1$ független változó értékekhez tartozó, P_1 és P_2 pontokat összekötő térgörbe ívhossza, a pontok távolságának, ha a térgörbét az

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{9(1+t^3)^3}\mathbf{i} + \frac{t^3}{3}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{3(1+t^3)}\mathbf{k}$$

vektor-skalár függvény határozza meg?

13.1.6. Jelölje s_1 és s_2 az alábbi vektor-skalár függvények által meghatározott térgörbék, $t_0 \le t \le t_1$ és $t_1 \le t \le t_2$ egyenlőtlenségekkel megadott, két részletének ívhosszát. Számítsa ki az ívhosszak arányát!

a) (M) $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j} + \frac{t}{4}\mathbf{k}$, ha $-1 \le t \le 0$ és $0 \le t \le 1$;

b) (E) $\mathbf{r}(t) = \sqrt{3}t^2\mathbf{i} + 3t^4\mathbf{j} + 2\sqrt{3}t^6\mathbf{k}$, ha $0 \le t \le 1$ és $1 \le t \le 2$;

c) (E) $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + \sqrt{5}\mathbf{k}$, ha $0 \le t \le 1$ és $1 \le t \le 3$;

d) (V) $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, ahol $x(t) = \frac{4\sqrt{2}\sqrt[4]{(1-t^2)^3}}{3}$,

$$y(t) = \frac{12t^3 \arcsin t + (4t^2+8)\sqrt{1-t^2}}{9} \text{ és } z(t) = \ln \arcsin t,$$

ha $\frac{1}{2} \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ és $\frac{\sqrt{2}}{2} \le t \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

13.1.7. (V) Hányszorosa az egyenes körhenger palástjára írt csavarvonal egy teljes körülfordulásának ívhossza a henger alapköre kerületének, ha a csavarvonalat az

$\mathbf{r}(t) = (r\cos t)\mathbf{i} + (r\sin t)\mathbf{j} + \lambda t\mathbf{k}$,

ahol $r > 0$ és $\lambda > 0$ valós számok, vektor-skalár függvény határozza meg?

13.1.8. (V) 80 mm átmérőjű, kör keresztmetszetű, szigetelőanyagból készült csévetestre, 1,4 mm átmérőjű, ugyancsak kör keresztmetszetű huzalból, 300 menetet tekercselnek. Egy rétegben pontosan 100 menet fér el. A rétegek közötti szigetelés vastagsága 0,2 mm. Milyen hosszú huzalra van szükség a tekercs elkészítéséhez, ha a két kivezetés egyenként 120 mm hosszú?

13.2. Skalár-vektor függvények

13.2.1. Írja fel az alábbi kétváltozós, valós függvények teljes differenciálját!

a) (M) $f(x;y) = \cos xy$;

b) (M) $f(x;y) = \log_2 (x-y)^2$;

c) (V) $f(x;y) = \operatorname{arc\,ctg} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

d) (E) $f(x;y) = \dfrac{\operatorname{sh}(1-x^2)}{\operatorname{ch}(1-y^2)}$;

e) (E) $f(x;y) = 3^{(x-1)y}$;

f) (E) $f(x;y) = (x^2-x)^{y+3}$.

13.2.2. Írja fel az alábbi kétváltozós, valós függvények iránymenti deriváltját!

a) (M) $f(x;y) = \sin(x^2+y^3)$;

b) (M) $f(x;y) = 2^{x^2(1-y^2)}$;

c) (V) $f(x;y) = \arccos \dfrac{x}{x+y}$;

d) (E) $f(x;y) = \dfrac{e^x \operatorname{tg} y}{e^{\sqrt{y}} \operatorname{tg} x}$;

e) (E) $f(x;y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{e^x}{e^y - e^{-xy}}$;

f) (E) $f(x;y) = (\ln x - \ln y) \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$.

13.2.3. Számítsa ki az alábbi kétváltozós, valós függvények gradiensét a megadott $P_0(x_0;y_0)$ helyen!

a) (M) $f(x;y) = x^2 + 2xy + y^2$ és $P_0(-1;2)$;

b) (M) $f(x;y) = \dfrac{x \sin y}{y \cos x}$ és $P_0\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right)$;

c) (E) $f(x;y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{1+x}$ és $P_0(1;1)$;

d) (E) $f(x;y) = e^{-x} \ln y$ és $P_0(0;1)$;

e) (E) $f(x;y)=\operatorname{sh}\frac{x}{1+y^2}\operatorname{ch}\frac{y}{1+x^2}$ és $P_0(0;0)$;

f) (E) $f(x;y)=\frac{\log_4(x^2-y)}{\log_2(x-y^2)}$ és $P_0(3;1)$.

13.2.4. Számítsa ki az alábbi kétváltozós, valós függvény megadott $P_0(x_0;y_0)$ helyen vett gradiensvektorával párhuzamos egyenes meredekségét!

a) (V) $f(x;y)=x^2-y^2$ és $P_0(1;1)$;

b) (E) $f(x;y)=\frac{\operatorname{tg}x}{\sin y}$ és $P_0\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$;

c) (V) $f(x;y)=\frac{x\log_x y}{y\log_y x}$ és $P_0(e;e)$.

13.2.5. A megadott α esetén, számítsa ki az alábbi kétváltozós, valós függvények $P_0(x_0;y_0)$ pontbeli, iránymenti deriváltját!

a) (M) $f(x;y)=\sin\frac{\pi x}{x^2+y^2}$, $\alpha=30°$ és $P_0\left(1;\sqrt{2}\right)$;

b) (E) $f(x;y)=\sqrt{xy^3+x^2y}$, $\alpha=135°$ és $P_0(3;1)$;

c) (E) $f(x;y)=\operatorname{sh}^2 xy-\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{y}$, $\alpha=60°$ és $P_0(-1;2)$.

13.2.6. A $\mathbf{v}=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}$ vektorral meghatározott irány esetén számítsa ki az alábbi kétváltozós, valós függvények $P_0(x_0;y_0)$ pontbeli, iránymenti deriváltját!

a) (V) $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\sqrt{3}\mathbf{j}$ és $P_0(1;-1)$;

b) (E) $f(x;y)=\frac{x-y}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$ és $P_0\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$;

c) (E) $f(x;y)=\ln\sqrt{xy+x^2}+x^y$, $\mathbf{v}=\sqrt{3}\mathbf{i}+\mathbf{j}$ és $P_0(e;e)$.

13.2.7. Számítsa ki az alábbi kétváltozós, valós függvények $P_0(x_0;y_0)$ pontbeli, iránymenti deriváltjának legnagyobb értékét!

a) (M) $f(x;y)=\dfrac{x+2}{4-x^2-y^2}$ és $P_0(1;1)$;

b) (E) $f(x;y)=xy-x+y$ és $P_0(0;0)$;

c) (E) $f(x;y)=\cos\left(\sqrt{3}x+y\right)$ és $P_0\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{3}};\dfrac{\pi}{6}\right)$.

13.2.8. Írja fel a megadott kétváltozós, valós függvény által meghatározott felület $Q_0(x_0;y_0;z_0)$ pontbeli érintősíkjára merőleges, Q_0 pontra illeszkedő egyenes paraméteres egyenletrendszerét, ha x_0, y_0 adott és $z_0=f(x_0;y_0)$!

a) (M) $f(x;y)=xy^2-x^2y$, ha $x_0=2$ és $y_0=-1$;

b) (E) $f(x;y)=e^{x-y}+x^y-y^x$, ha $x_0=2$ és $y_0=3$;

c) (V) $f(x;y)=\dfrac{\cos(x-y)}{\sin(x+y)}$, ha $x_0=\dfrac{\pi}{3}$ és $y_0=\dfrac{\pi}{4}$;

d) (E) $f(x;y)=\dfrac{y-\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}xy}$, ha $x_0=1$ és $y_0=-1$.

13.2.9. Írja fel az alábbi kétváltozós, valós függvények által meghatározott felület $Q_0(x_0;y_0;z_0)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét, ha x_0, y_0 adott és $z_0=f(x_0;y_0)$!

a) (M) $f(x;y)=x^2-\operatorname{arctg}y$, ha $x_0=1$ és $y_0=1$;

b) (V) $f(x;y)=(x-y)\arcsin(y-x)$, ha $x_0=\dfrac{1}{2}$ és $y_0=1$;

c) (E) $f(x;y)=\dfrac{2^x+y^3}{3^y+x^2}$, ha $x_0=2$ és $y_0=1$;

d) (V) $f(x;y)=\dfrac{x^y}{y^x-x^y}-\dfrac{y^x}{x^y+y^x}$, ha $x_0=1$ és $y_0=2$;

e) (E) $f(x;y)=\sqrt[y]{(2+x)^3}$, ha $x_0=1$ és $y_0=2$;

f) (V) $f(x;y)=\ln\dfrac{\pi-y}{\cos(x+y)}$, ha $x_0=\dfrac{\pi}{6}$ és $y_0=\dfrac{\pi}{6}$.

13.2.10. Számítsa ki annak a P_0 pontnak az x_0, y_0 koordinátáit, amelyikben a megadott kétváltozós, valós függvény minden iránymenti deriváltja nulla! Írja fel a függvény által meghatározott felület $Q_0(x_0;y_0;z_0)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét, ahol $z_0=f(x_0;y_0)$!

a) (M) $f(x;y)=x^2+4y^2-4x+8y+9$;

b) (E) $f(x;y)=3e^{-(x^2+y^2+2x-2y+2)}$;

c) (E) $f(x;y)=x^2+y^2+xy+x+4y-1$;

d) (E) $f(x;y)=\log_3(6x^2+18x+3y^2+14y-2xy+48)$.

A következő feladatokban $\mathbf{r}$, illetve $u(\mathbf{r})$ az $\mathbf{r}(x;y;z)$ vektort, illetve az $u(x;y;z)$ skalár-vektor függvényt jelenti.

13.2.11. Írja fel az alábbi skalár-vektor függvények teljes differenciálját!

a) (M) $u(x;y;z)=\operatorname{sh} xyz$;

b) (E) $u(x;y;z)=\log_3\dfrac{xyz}{x+y+z}$;

c) (E) $u(x;y;z)=2^{x+y+z}$;

d) (V) $u(x;y;z)=\dfrac{\operatorname{arc\,ctg} xyz}{\ln(x^2+yz)}$;

e) (E) $u(\mathbf{r})=\dfrac{1}{|\mathbf{r}|}$;

f) (E) $u(\mathbf{r})=\ln|\mathbf{r}|^{|\mathbf{r}|}$.

13.2.12. Számítsa ki a $\nabla=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{i}+\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\mathbf{j}+\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{k}$ (∇ olv.: nabla) Hamilton-operátor és az alábbi skalár-vektor függvények szorzatát!

a) (M) $u(x;y;z)=(x+z)(1+y)$; **b)** (E) $u(x;y;z)=xyz\operatorname{tg}\dfrac{x}{yz}$;

c) (E) $u(x;y;z)=\left(x^2+z^2\right)^{-y}$; **d)**(E) $u(x;y;z)=\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{yz}{x}$;

e) (E) $u(\mathbf{r})=|\mathbf{r}|^3\ln|\mathbf{r}|$; **f)** (E) $u(\mathbf{r})=\dfrac{|\mathbf{r}|}{\arcsin|\mathbf{r}|}$.

13.2.13. Írja fel az alábbi skalármezők gradiensét!

a) (M) $u(\mathbf{r})=3\left(|\mathbf{r}|+2\right)^2$; **b)**(E) $u(\mathbf{r})=\dfrac{1}{\left(|\mathbf{r}|-1\right)^2}$;

c) (E) $u(\mathbf{r})=\dfrac{|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|+1}$; **d)**(E) $u(x;y;z)=\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$.

13.2.14. Számítsa ki az alábbi skalár-vektor függvények gradiens vektorának koordinátáit a megadott $\mathbf{r}_0(x_0;y_0;z_0)$ helyen!

a) (M) $u(x;y;z)=\dfrac{\operatorname{ch}xyz}{e^{xyz}}$ és $\mathbf{r}_0(-1;0;1)$;

b)(V) $u(x;y;z)=\sqrt[3]{12-\left(x^2+y^3+z^4\right)}$ és $\mathbf{r}_0(2;-1;-1)$;

c) (E) $u(x;y;z)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}$ és $\mathbf{r}_0(3;2;1)$;

d)(E) $u(x;y;z)=\dfrac{z}{x+y}\arccos\dfrac{x}{yz}$ és $\mathbf{r}_0(-1;2;1)$;

e) (M) $u(\mathbf{r})=\log_3\dfrac{1}{|\mathbf{r}|^3+\left(|\mathbf{r}|+2\right)^2}$ és $\mathbf{r}_0(1;1;1)$;

f) (E) $u(\mathbf{r})=\dfrac{|\mathbf{r}|}{\operatorname{arc\,tg}|\mathbf{r}|}$ és $\mathbf{r}_0(-1;0;0)$.

13.2.15. Megadott $\mathbf{r}_0(x_0;y_0;z_0)$ és $\Delta\mathbf{r}_0(\Delta x_0;\Delta y_0;\Delta z_0)$ esetén, becsülje meg az alábbi skalár-vektor függvények értékének abszolút és relatív hibáját!

a) (M) $u(x;y;z)=x^4-y^3+z^2$, ha $\mathbf{r}_0(2;2\sqrt{2};4)$ és $\Delta\mathbf{r}_0\left(\dfrac{1}{32};\dfrac{1}{24};\dfrac{1}{8}\right)$;

b)(E) $u(x;y;z)=x^{y-z}$, ha $\mathbf{r}_0(2;2;-5)$ és $\Delta\mathbf{r}_0(0{,}02;0{,}01;0{,}025)$;

c) (E) $u(x;y;z)=\dfrac{\ln(x+y+z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, ha $\mathbf{r}_0(e;e;e)$ és $\Delta\mathbf{r}_0\left(\dfrac{e}{50};\dfrac{e}{20};\dfrac{e}{50}\right)$;

d)(E) $u(x;y;z)=x^2y\cos z$, ha $\mathbf{r}_0\left(2;10;\dfrac{\pi}{3}\right)$ és $\Delta\mathbf{r}_0\left(\dfrac{1}{10};\dfrac{1}{5};\dfrac{\pi}{12}\right)$;

e) (E) $u(x;y;z)=\dfrac{x^2y}{2z}$, ha $\mathbf{r}_0(10;2;5)$ és $\Delta\mathbf{r}_0(0{,}02;0{,}01;0{,}25)$.

13.2.16. (V) Egy tekercs villamos jellemzőit mérjük. Önindukciós együtthatójának mért értéke $L_0=7{,}2\,\text{mH}$, a műszer méréshatára $M_L=10\,\text{mH}$, a méréshatárra vonatkoztatott, relatív hibája pedig $h_L=2\%$. Ellenállásának mért értéke $R_0=5{,}6\,\Omega$, az ellenállásmérő méréshatára $M_R=10\,\Omega$, erre vonatkoztatott relatív hibája $h_R=5\%$. A frekvencia mért értéke $f_0=49{,}8\,\text{Hz}$, egy $M_f=60\,\text{Hz}$ méréshatárú műszerrel mérve, amelynek a méréshatárra vonatkoztatott, relatív hibája $h_f=1\%$. A tekercs impedanciájának abszolút értékét a

$$Z=\sqrt{R^2+(2\cdot\pi\cdot f\cdot L)^2}$$

összefüggés alapján számítjuk ki. Legfeljebb mennyi lesz az impedancia kiszámított értékének abszolút és relatív hibája?

13.3. Vektor-vektor függvények

A következő feladatokban $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, illetve $v_i(\mathbf{r})$ $(i=1;2;3)$ rendre az $\mathbf{r}(x;y;z)$ vektort, a $\mathbf{v}(x;y;z)$ vektor-vektor függvényt, illetve a koordinátafüggvényét, a $v_i(x;y;z)$ skalár-vektor függvényt jelenti.

13.3.1. Számítsa ki a $\nabla=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{i}+\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\mathbf{j}+\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{k}$ Hamilton-operátor és az alábbi vektor-vektor függvények skaláris szorzatát!

a) (M) $\mathbf{v}(x;y;z) = x^2\sqrt{y}\,z\,\mathbf{i} + x\,y^2\sqrt{z}\,\mathbf{j} + \sqrt{x}\,y\,z^2\,\mathbf{k}$;

b) (M) $\mathbf{v}(x;y;z) = (\operatorname{tg} xyz)\mathbf{i} + (\cos(x+y+z))\mathbf{j} + (\sin(x+y-z))\mathbf{k}$;

c) (E) $\mathbf{v}(x;y;z) = \dfrac{y\,e^{-x}}{z}\mathbf{i} + \dfrac{z\,e^{-y}}{x}\mathbf{j} + \dfrac{x\,e^{-z}}{y}\mathbf{k}$;

d) (E) $\mathbf{v}(x;y;z) = y(\ln x^z)\mathbf{i} + z(\ln y^x)\mathbf{j} + x(\ln z^y)\mathbf{k}$;

e) (E) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|\mathbf{i} + |\mathbf{r}|^2\,\mathbf{j} + |\mathbf{r}|^3\,\mathbf{k}$;

f) (E) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (\ln|\mathbf{r}|)\mathbf{i} + (\operatorname{arc\,ctg}|\mathbf{r}|)\mathbf{j} + \dfrac{1}{|\mathbf{r}|}\mathbf{k}$.

13.3.2. Írja fel az alábbi vektor-vektor függvények divergenciáját!

a) (M) $\mathbf{v}(x;y;z) = \dfrac{y+z}{x}\mathbf{i} + \dfrac{x+z}{y}\mathbf{j} + \dfrac{x+y}{z}\mathbf{k}$;

b) (V) $\mathbf{v}(x;y;z) = 2^x(\log_y z)\mathbf{i} + 2^z(\log_x y)\mathbf{j} + 2^y(\log_z x)\mathbf{k}$;

c) (E) $\mathbf{v}(x;y;z) = (x+y)^z\mathbf{i} + (y+z)^x\mathbf{j} + (x+z)^y\mathbf{k}$;

d) (V) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}$;

e) (E) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (\operatorname{sh}|\mathbf{r}|)\mathbf{i} + (\operatorname{ch}|\mathbf{r}|)\mathbf{j} + (\operatorname{th}|\mathbf{r}|)\mathbf{k}$;

f) (E) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\,e^{|\mathbf{r}|}$.

13.3.3. Döntse el, hogy forrásmentesek-e az alábbi vektor-vektor függvények által meghatározott vektormezők!

a) (M) $\mathbf{v}(x;y;z) = (x^3 + 3xy^2 - 2xz)\mathbf{i} - (3x^2y + y^3)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$;

b) (E) $\mathbf{v}(x;y;z) = \dfrac{x^z}{y^z}\mathbf{i} + \dfrac{y^x}{z^x}\mathbf{j} + \dfrac{z^y}{x^y}\mathbf{k}$;

c) (E) $\mathbf{v}(x;y;z) = x(x^2+3y)(\ln z)\mathbf{i} - 3x^2y(\ln z)\mathbf{j} + 3yz(1-\ln z)\mathbf{k}$;

d) (M) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dfrac{\mathbf{r}}{\ln|\mathbf{r}|}$.

13.3.4. Számítsa ki a $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{k}$ Hamilton-operátor és az alábbi vektor-vektor függvények vektoriális szorzatát!

a) (M) $\mathbf{v}(x;y;z) = x^3y^2z\,\mathbf{i} + x\,y^3z^2\,\mathbf{j} + x^2y\,z^3\,\mathbf{k}$;

b) (V) $\mathbf{v}(x;y;z) = (\log_x y)\,\mathbf{i} + (\log_y z)\,\mathbf{j} + (\log_z x)\,\mathbf{k}$;

c) (E) $\mathbf{v}(x;y;z) = \frac{z}{x+y}\mathbf{i} + \frac{x}{y+z}\mathbf{j} + \frac{y}{x+z}\mathbf{k}$;

d) (V) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|\,\mathbf{r}$;

e) (E) $\mathbf{v}(x;y;z) = \frac{\cos xy}{z}\mathbf{i} + \frac{\sin yz}{x}\mathbf{j} + \frac{\cos xz}{y}\mathbf{k}$;

f) (E) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2 + 2}$.

13.3.5. Írja fel az alábbi vektor-vektor függvények rotációját!

a) (M) $\mathbf{v}(x;y;z) = \frac{1}{yz}\mathbf{i} + \frac{1}{xz}\mathbf{j} + \frac{1}{xy}\mathbf{k}$;

b) (M) $\mathbf{v}(x;y;z) = 2^{-x+y}\,\mathbf{i} + 8^{-y+z}\,\mathbf{j} + 4^{x-z}\,\mathbf{k}$;

c) (E) $\mathbf{v}(x;y;z) = \big(\mathrm{ch}(x+z)\big)\mathbf{i} + \big(\mathrm{cth}(x-y)\big)\mathbf{j} + \big(\mathrm{sh}(y-z)\big)\mathbf{k}$;

d) (E) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \big(\sin^2|\mathbf{r}| - \cos^2|\mathbf{r}| + \cos 2|\mathbf{r}| - 1\big)\mathbf{r}$.

13.3.6. Döntse el, hogy örvénymentesek-e az alábbi vektor-vektor függvények által meghatározott, egyes vektormezők!

a) (M) $\mathbf{v}(x;y;z) = 2x(\sin y)(\ln z)\,\mathbf{i} + x^2(\cos y)(\ln z)\,\mathbf{j} + \frac{x^2\sin y}{z}\mathbf{k}$;

b) (M) $\mathbf{v}(x;y;z) = \frac{1}{x^2yz}\mathbf{i} + \frac{1}{xy^2z}\mathbf{j} + \frac{1}{xyz^2}\mathbf{k}$;

c) (E) $\mathbf{v}(x;y;z) = \frac{x\,\mathrm{tg}\,x}{y^z}\mathbf{i} + \frac{y\,\mathrm{tg}\,y}{z^x}\mathbf{j} + \frac{x+y}{z}\mathbf{k}$;

d) (E) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{(xy)^z z}{x}\mathbf{i} + \frac{(xy)^z z}{y}\mathbf{j} + (xy)^z(\ln xy)\,\mathbf{k}$.

13.3.7. Döntse el, hogy a megadott skalár-vektor függvény potenciálfüggvénye-e a vektor-vektor függvénynek!

a) (M) $\mathbf{v}(x;y;z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k})$ és $u(\mathbf{r})=|\mathbf{r}|$;

b) (V) $\mathbf{v}(x;y;z)=\dfrac{y}{e^z}\mathbf{i}+\dfrac{x}{e^z}\mathbf{j}-\dfrac{xy}{e^z}\mathbf{k}$ és $u(x;y;z)=\dfrac{xy}{e^z}$;

c) (V) $\mathbf{v}(x;y;z)=\left(\dfrac{1}{y}\mathbf{i}+\dfrac{(x+z)}{y^2}\mathbf{j}+\dfrac{1}{y}\mathbf{k}\right)\operatorname{ch}\dfrac{x+z}{y}$ és

$u(x;y;z)=\operatorname{sh}\dfrac{x+z}{y}$;

d) (E) $\mathbf{v}(\mathbf{r})=\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2\ln 2}$ és $u(\mathbf{r})=\log_2|\mathbf{r}|$.

13.3.8. Írja fel az alábbi skalár-vektor függvények gradiensét, majd a gradiens divergenciáját és rotációját!

a) (M) $u(x;y;z)=\dfrac{x^2}{y-\sqrt{z}}$; **b)** (M) $u(\mathbf{r})=\dfrac{1}{\sqrt[3]{|\mathbf{r}|}}$;

c) (E) $u(\mathbf{r})=|\mathbf{r}|\log_{|\mathbf{r}|}|\mathbf{r}|^3$; **d)** (E) $u(\mathbf{r})=\arcsin|\mathbf{r}|$.

13.3.9. Számítsa ki az alábbi vektor-vektor függvények vonalmenti integrálját a megadott görbe mentén és határok között!

a) (M) $\mathbf{v}(x;y;z)=(y+z)\mathbf{i}+(x+z)\mathbf{j}+(x+y)\mathbf{k}$,

ha $\mathbf{r}(t)=t^2\,\mathbf{i}+\sqrt{t}\,\mathbf{j}+t\,\mathbf{k}$ és $0\le t\le 1$;

b) (M) $\mathbf{v}(\mathbf{r})=|\mathbf{r}|\mathbf{r}$, ha $\mathbf{r}(t)=t\,\mathbf{i}+\sqrt{2t}\,\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $1\le t\le 2$;

c) (V) $\mathbf{v}(\mathbf{r})=\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$, ha $\mathbf{r}(t)=e^t\,\mathbf{i}+\mathbf{j}+\sqrt{2e^t}\,\mathbf{k}$ és $0\le t\le\ln 2$;

d) (E) $\mathbf{v}(x;y;z)=\dfrac{x}{yz}\mathbf{i}+\dfrac{1}{x}\mathbf{j}+\dfrac{z}{xy}\mathbf{k}$,

ha $\mathbf{r}(t)=(t^2+2t)\mathbf{i}+t^2\,\mathbf{j}+t\,\mathbf{k}$ és $1\le t\le 2$;

e) (E) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2e^{|\mathbf{r}|^2}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|^2} + \ln|\mathbf{r}|^2\right)\mathbf{r}$,

ha $\mathbf{r}(t) = 5(\cos 2t)\mathbf{i} + 5(\sin 2t)\mathbf{j} + e^{3\sin t}\mathbf{k}$ és $0 \le t \le \pi$;

f) (E) $\mathbf{v}(x;y;z) = \sqrt[3]{\frac{yz}{x}}\mathbf{i} + \sqrt[3]{\frac{xz}{y}}\mathbf{j} + \sqrt[3]{\frac{xy}{z}}\mathbf{k}$,

ha $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ és $\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4}$.

13.3.10. Számítsa ki az alábbi vektor-vektor függvények vonalmenti integrálját a P_1 kezdő- és P_2 végpontú szakasz mentén!

a) (M) $\mathbf{v}(x;y;z) = \frac{x^2+y}{z}\mathbf{i} + \frac{y^2+z}{x}\mathbf{j} + \frac{x+z^2}{y}\mathbf{k}$,

ha $P_1(1;1;1)$ és $P_2(2;2;2)$;

b) (V) $\mathbf{v}(x;y;z) = (y\cos x)\mathbf{i} + (z\sin y)\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$,

ha $P_1(0;0;0)$ és $P_2\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{4}\right)$;

c) (E) $\mathbf{v}(x;y;z) = xe^{yz}\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz(\ln(1+y))\mathbf{k}$,

ha $P_1(0;0;0)$ és $P_2(2;1;3)$;

d) (E) $\mathbf{v}(x;y;z) = (xy\,\mathrm{sh}\,z)\mathbf{i} + (y-z)(\mathrm{ch}\,x)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$,

ha $P_1(1;2;1)$ és $P_2(3;2;2)$;

e) (E) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}$, ha $P_1(-2;-1;3)$ és $P_2(-1;0;4)$;

f) (E) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\ln(1+|\mathbf{r}|)$, ha $P_1(0;0;0)$ és $P_2(2;-1;-2)$.

13.3.11. Számítsa ki az alábbi vektor-vektor függvények vonalmenti integrálját a P_1, P_2 és P_3 pontok által meghatározott törött-vonal mentén!

a) (M) $\mathbf{v}(x;y;z) = \frac{2x}{yz}\mathbf{i} - \frac{x^2}{y^2z}\mathbf{j} - \frac{x^2}{yz^2}\mathbf{k}$,

ha $P_1(2;1;3)$, $P_2(1;2;1)$ és $P_3(3;1;3)$;

b)(E) $\mathbf{v}(x;y;z)=\dfrac{z\ln y}{x}\mathbf{i}+\dfrac{y\ln(1+z)}{x}\mathbf{j}+\dfrac{yz}{x}\mathbf{k}$,
ha $P_1(-2;1;0)$, $P_2(-2;2;2)$ és $P_3(-2;1;3)$.

13.3.12. Számítsa ki az alábbi vektor-vektor függvények vonalmenti integrálját a P_1, P_2, P_3 és P_4 pontok által meghatározott törött-vonal mentén!

a)(M) $\mathbf{v}(x;y;z)=\dfrac{y^2\cos x}{e^z}\mathbf{i}+\dfrac{2y\sin x}{e^z}\mathbf{j}-\dfrac{y^2\sin x}{e^z}\mathbf{k}$,
ha $P_1(3;2;5)$, $P_2(-1;4;3)$, $P_3(-2;-1;6)$ és $P_4(3;2;5)$;

b)(E) $\mathbf{v}(x;y;z)=\dfrac{1}{(1+x^2)(y+z)}\mathbf{i}-\dfrac{\operatorname{arctg} x}{(y+z)^2}\mathbf{j}-\dfrac{\operatorname{arctg} x}{(y+z)^2}\mathbf{k}$,
ha $P_1(1;1;1)$, $P_2(-2;4;3)$, $P_3(5;3;-6)$ és $P_4(1;1;1)$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1. Eseményalgebra

14.1.1. Egy dobókockával háromszor egymás után dobunk. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik dobás 6-os (i = 1, 2, 3)! Írja fel az A_1, A_2 és A_3 eseményekkel az alábbi eseményeket:

a) (E) legalább az egyik dobás 6-os;
b) (E) mindhárom dobás 6-os;
c) (E) az első dobás 6-os, a második és harmadik dobás nem 6-os;
d) (M) pontosan egy dobás 6-os;
e) (E) pontosan két dobás 6-os;
f) (V) legalább két dobás 6-os;
g) (E) legfeljebb két dobás 6-os!

14.1.2. Milyen kapcsolat van az A és B események között, ha:

a) (E) $A + B = B$; **b)** (V) $(A + B) - B = A$;
c) (E) $A + \overline{A}B = A$; **d)** (V) $A + B = AB$?

14.1.3. Milyen A és B eseményre teljesülnek a következő egyenlőségek?

a) (V) $A + B = \overline{A}$; **b)** (E) $\overline{A}B = A$; **c)** (E) $A + \overline{B} = AB$.

14.1.4. (M) Adott az A és B esemény. Írja fel az X eseményt, ha

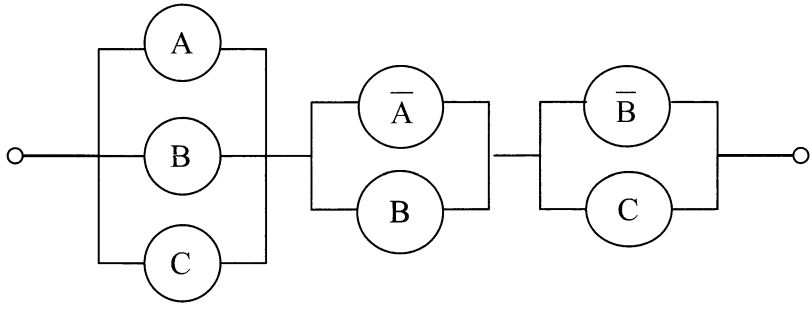
$$\overline{X + A} + \overline{X + \overline{A}} = B\,!$$

14.1.5. Bizonyítsa be a következő egyenlőségeket:

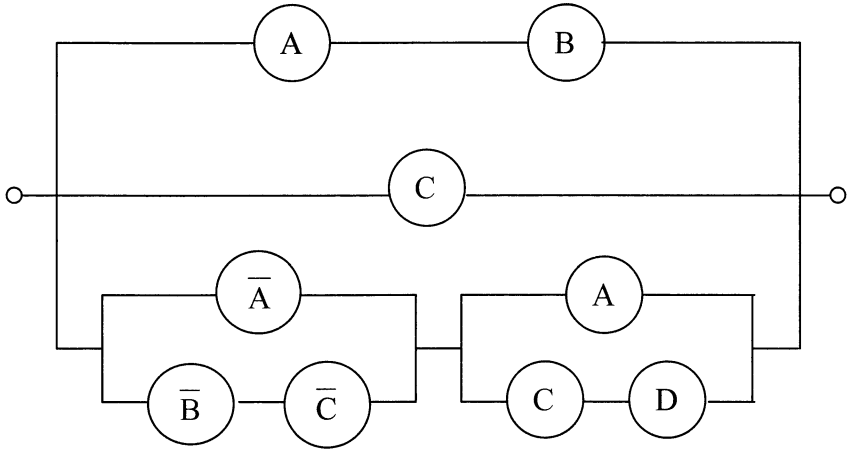
a) (V) $A + AB = A$; **b)** (V) $\overline{A\overline{B} + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{B}} = AB$;
c) (V) $A(B - C) = AB - AC$;
d) (V) $\left(\overline{A + B}\right)C = C - C(A + B)$;
e) (V) $A - \{A - [B - (B - C)]\} = ABC$;
f) (V) $(A + B)(A + C)(B + C) = AB + AC + BC$!

14.1.6. Tekintsük elektromos jelfogók egy hálózatát. Mindegyik jelfogóhoz hozzárendelhető egy esemény, amely akkor és csak akkor következik be, ha a jelfogón folyik áram. Két jelfogó soros kapcsolásának a megfelelő események szorzata, párhuzamos kapcsolásának a megfelelő események összege felel meg. Ha egy jelfogón sohasem folyik áram, akkor annak a lehetetlen esemény, ha mindig folyik áram, akkor a biztos esemény felel meg. Írja fel a következő hálózatoknak megfelelő eseményalgebrai kifejezéseket, majd egyszerűsítse azokat és ezután rajzolja fel az egyszerűsített kifejezéseknek megfelelő hálózatokat!

a) (E)



b) (E)



14.2. Valószínűségek kombinatorikus kiszámítási módja

14.2.1. Bizonyítsa be a következő egyenlőségeket!

a) (V) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; **b)** (V) $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$;

c) (V) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;

d) (V) $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$.

14.2.2. Egy szabályos dobókockát feldobva, mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) (E) 6-ost dobunk;

b) (E) legalább 5-öt dobunk;

c) (E) nem az 1-est dobjuk;

d) (E) törzsszámot dobunk?

14.2.3. Két szabályos dobókockát feldobva, mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) (M) legalább az egyiken 6-os áll;

b) (E) a dobott számok minimuma 3;

c) (E) a dobott számok maximuma 3;

d) (E) a dobott számok összege kisebb, mint 5;

e) (E) a dobott számok legnagyobb közös osztója 2?

14.2.4. Egy szabályos pénzdarabot ötször feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) (E) dobunk fejet és írást is;

b) (E) legalább két fejet dobunk;

c) (M) több írást dobunk, mint fejet;

d) (E) nem dobunk két fejet egymás után;

e) (E) dobunk három fejet egymás után?

14.2.5. (E) Egy dobozban 20 cédula van 1-től 20-ig megszámozva. Találomra kiveszünk 5 cédulát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy kihúzott számok mindegyike 8-nál nagyobb?

14.2.6. Egy főiskolán 400 oktató tanít. Angolból 120-nak, németből 100-nak és oroszból 85-nek van nyelvvizsgája. Angolból és németből 45-nek, angolból és oroszból 20-nak, németből és oroszból 25-nek van nyelvvizsgája. 4 oktatónak mind a három nyelvből van nyelvvizsgája. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy találomra kiválasztott oktatónak a három nyelv közül

a) (V) egyikből sincs nyelvvizsgája;
b) (V) csak oroszból van nyelvvizsgája;
c) (V) csak angolból és németből van nyelvvizsgája?

14.2.7. 32 lapos magyar kártyából 3 lapot találomra kihúzva, mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) (M) a kihúzott lapok különböző színűek;
b) (M) a kihúzott lapok között van piros is és ász is?

14.2.8. Egy szabályos dobókockát négyszer feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) (E) különböző számokat dobunk;
b) (E) a harmadik dobásnál dobunk először 6-ost;
c) (M) nem dobunk két 6-ost egymás után;
d) (M) a dobott számok maximuma 4;
e) (M) dobunk 6-ost és 1-est is, de a 6-os előbb van, mint az 1-est?

14.2.9. (M) 5 különböző dobozba találomra belehelyezünk 10 különböző golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindegyik dobozban pontosan két golyó lesz?

14.2.10. (E) 5 különböző dobozba találomra belehelyezünk 10 egyforma golyót. Két elhelyezést csak akkor tekintünk különbözőnek, ha az egyiknél található legalább egy olyan doboz, amelyben nem ugyanannyi golyó van, mint a másiknál ebben a dobozban. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindegyik dobozban pontosan két golyó lesz?

14.2.11. Tekintsük az első 6 pozitív egész szám egy véletlen permutációját! Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) (E) az 1 és a 2 nem lesz egymás mellett;
b) (E) megtalálható benne a 123 háromjegyű szám?

14.3. Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel

14.3.1. (M) 100 alkatrész közül 5 selejtes. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 10 alkatrészt találomra kiválasztva, azok között 3 selejtes lesz?

14.3.2. 32 lapos magyar kártyából 4 lapot találomra kiválasztva mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között

a) (E) pontosan két piros lesz;
b) (E) legalább egy ász lesz;
c) (E) legfeljebb egy zöld lesz?

14.3.3. (E) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ötös lottón egy találomra kitöltött lottószelvénnyel pontosan k találatot érünk el ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)?

14.3.4. Egy urnában 5 piros és 3 fehér golyó van. Az urnából 10-szer húzunk úgy, hogy a kihúzott golyót mindig visszatesszük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) (M) pontosan 3 piros golyót húzunk;
b) (M) legalább egy fehér golyót húzunk;
c) (M) több piros golyót húzunk, mint fehéret?

14.3.5. Bizonyos típusú tranzisztorok 3 %-a selejt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 10 db tranzisztort vásárolva azok között

a) (M) 3 selejtes lesz;
b) (M) több selejtes lesz, mint jó?

14.3.6. Alkatrészek közül egy mintát veszünk. A mintában szereplő selejtes alkatrészek várható értéke 2, szórásnégyzete $\frac{2}{3}$.

a) (M) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a minta legfeljebb 2 selejtes alkatrészt tartalmaz, ha a minta 5 elemű és a mintát visszatevés nélkül vesszük?
b) (M) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a minta legfeljebb 2 selejtes alkatrészt tartalmaz, ha a mintát visszatevéssel vesszük?

14.4. Feltételes valószínűség és függetlenség

14.4.1. (M) Számolja ki a $P(A + B)$ és a $P(\overline{A} \mid \overline{B})$ valószínűségeket, ha:

$$P(A) = \frac{1}{4},\ P(A \mid B) = \frac{1}{4} \text{ és } P(B \mid A) = \frac{1}{2}\ !$$

14.4.2. (M) Két szabályos dobókockát feldobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy az egyik kockán 6-os áll, B_1 azt, hogy a két szám különböző, B_2 azt, hogy az összeg páros és B_3 azt, hogy a dobott számok minimuma 4. Számolja ki a $P(A \mid B_i)$ feltételes valószínűségeket (i = 1, 2, 3)!

14.4.3. Két urna közül az egyikben 6 piros és 4 fehér, a másikban 5 piros és 3 fehér golyó van. Találomra kiválasztjuk az egyik urnát és abból találomra kihúzunk egy golyót.

a) (V) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a golyó piros?

b) (V) Megnézzük a kihúzott golyót és látjuk, hogy piros. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első urnából húztunk?

14.4.4. (V) Tíz gép mindegyikén ugyanannyi és ugyanolyan típusú alkatrészeket gyártanak. Hat gépnél 2 %, három gépnél 1 % és egy gépnél 0,5 % a selejt. A tíz gép által gyártott alkatrészekből találomra kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez nem selejtes?

14.4.5. (V) Egy szabályos dobókockát egyszer feldobunk. Ha a dobott szám k, akkor feldobunk k-szor egy szabályos pénzdarabot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy nem dobunk kétszer egymás után fejet?

14.4.6. (E) 100 csavar közül 10 selejtes. Visszatevés nélkül egyesével kihúzunk 4 darabot és látjuk, hogy ezek mindegyike jó. Ezután ugyanígy kihúzunk 4 darabot. Mennyi a valószínűsége, hogy ezek között 2 selejtes lesz?

14.4.7. (V) Egy oktatót keresünk a főiskolán. Tudjuk, hogy p annak a valószínűsége, hogy az oktató a főiskolán tartózkodik és itt ugyanolyan valószínűséggel lehet öt adott terem valamelyikében. Feltéve, hogy négy termet megnézve nem találjuk az oktatót, mennyi annak a valószínűsége, hogy az ötödik teremben megtaláljuk?

14.4.8. (E) Egy üzletben 50 műszer van. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy a műszerek között i darab szépséghibás van (i=0, 1, 2, 3, 4). Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy hibátlan műszert veszünk, ha bármelyik műszert ugyanolyan valószínűséggel vehetjük meg és

$$P(A_0)=\frac{1}{4},\ P(A_1)=\frac{1}{6},\ P(A_2)=P(A_4)=\frac{1}{12},\ P(A_3)=\frac{5}{12}?$$

14.4.9. (V) 32 lapos magyar kártyából találomra kiválasztunk egy lapot. Jelölje A azt az eseményt, hogy a kihúzott lap piros, B azt, hogy ász és C azt, hogy az az alsó, felső, király, ász valamelyike. Igazolja, hogy az A és a B, valamint az A és a C függetlenek, de a B és a C nem függetlenek!

14.4.10.(M)Bizonyítsa be, hogy ha az A és B események függetlenek, akkor az $\overline{A}$ és B, valamint az $\overline{A}$ és $\overline{B}$ események is függetlenek!

14.4.11.(E) Egy üzemben három gép dolgozik egymástól függetlenül. Az első hetenként 0,15, a második 0,2 és a harmadik 0,1, valószínűséggel esik ki a termelésből. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy hét folyamán legalább az egyik gép kiesik a termelésből?

14.4.12.(E) Egy 1000 darabból álló szállítmány 4%-a szépséghibás. A szállítmány átvevője találomra megvizsgál 15 darabot, majd ezeket visszatéve megismétli a vizsgálatot. A szállítmányt csak akkor veszi át, ha az egyik vizsgálatnál sem talál szépséghibás darabot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy átveszi a szállítmányt?

14.5. Diszkrét valószínűségi változók és nevezetes eloszlások

14.5.1. (E) Egy szabályos pénzdarabot 4-szer feldobunk. Jelölje ξ azt a valószínűségi változót, hogy hány fejet dobunk. Írja fel ξ eloszlását!

14.5.2. Az alábbi számsorozatok közül melyek alkotnak valószínűségeloszlást?

a) (V) $p^3, 3p^2q, 3pq^2, q^3$ $\quad (q = 1 - p, 0 \le p \le 1)$;

b) (V) $\binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}$, $\quad k = 0,1, ..., 10$;

c) (V) $\frac{2^k}{k!}e^{-2}$, $\quad k = 0, 1, 2, ...$;

d) (V) $\frac{\binom{6}{k}\binom{14}{4-k}}{\binom{20}{4}}$, $\quad k = 0, 1, 2, 3, 4$;

e) (V) $\frac{1}{k(k+1)}$, $\quad k = 1, 2, ...$;

f) (V) $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k$, $\quad k = 0, 1, ...$

14.5.3. (M) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy tízgyermekes családban pontosan 4 lány van, ha egy fiúgyermek születésének valószínűsége 0,51 és egy lánygyermek születésének a valószínűsége pedig 0,49?

14.5.4. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy szabályos dobókockát 20-szor feldobva

a) (E) legalább háromszor dobunk 3-mal osztható számot;

b) (E) legalább 3, de legfeljebb 5 dobás lesz 3-mal osztható szám?

14.5.5. Egy dobozban 60 kártya van. Húsz kártyán van A betű, tíz kártyán B betű és harmincon C betű. Egymás után 5 kártyát visszatevéssel kihúzunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) (E) pontosan 3-szor húzunk A betűt;

b) (E) legalább kétszer húzunk B betűt;

c) (E) páros sokszor húzunk C betűt?

14.5.6. Egy céltáblára 15 fiú ad le egy-egy lövést. Mindenki 0,6 valószínűséggel talál bele a 10-es körbe. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) (E) pontosan 5 találat lesz a 10-es körbe;

b) (E) legfeljebb négy találat lesz a 10-es körbe,

c) (E) legalább két találat lesz a 10-es körbe?

14.5.7. (V) Legalább hányszor dobjunk fel egy szabályos dobókockát ahhoz, hogy legalább 0,5 valószínűséggel a hatos dobások száma legalább kettő legyen?

14.5.8. Egy telefonközpontba 1 perc alatt átlagosan 5 hívás érkezik be. Ha adott időtartam alatt beérkező hívások száma Poisson-eloszlású, mennyi annak a valószínűsége, hogy egy perc alatt:

a) (M) pontosan 2 hívás érkezik be;

b) (M) legfeljebb 3 hívás érkezik be;

c) (M) legalább egy hívás érkezik be?

14.5.9. (M) Egy 400 oldalas könyvben 100 sajtóhiba van. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 20 véletlenszerűen kiválasztott oldalon nem lesz sajtóhiba, ha feltesszük, hogy a sajtóhibák száma Poisson-eloszlású valószínűségi változó?

14.5.10. (E) Egy ruhaszövet anyagában 50 méterenként átlag 2 hiba van. Egy 400 méteres szövetet 4 méteres darabokra vágunk szét. Várhatóan hány hibás darab lesz ezek között, ha feltesszük, hogy a hibák száma Poisson-eloszlást követ?

14.5.11. (M) Egy üzemben egymástól függetlenül azonos típusú gépek működnek. Jelölje a ξ valószínűségi változó azt, hogy hány gép hibásodik meg egy adott időn belül. A tapasztalatok azt mutatják, hogy a gépek közül átlagosan 500 óránként romlik el egy. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 5000 óra alatt legfeljebb 5 gép romlik el?

14.5.12. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy szabályos dobókockával dobva a hatodik dobásnál dobunk

a) (M) először hatost;

b) (M) másodszor hatost;

c) (M) harmadszor hatost?

14.5.13. Egy szabályos dobókockával egymás után dobunk.

a) (V) Jelölje a ξ valószínűségi változó azt, hogy hányadik dobásnál dobunk először 6-ost. Írja fel ξ eloszlását!

b) (V) Mennyi annak a valószínűsége, hogy páros sorszámú dobásnál dobunk először 6-ost?

c) (V) Jelölje az η valószínűségi változó azt, hogy hányadik dobásnál dobunk másodszor 6-ost. Írja fel η eloszlását!

14.5.14. Egy dobozban 21 piros és 7 fehér golyó van. Kihúzunk a dobozból 10 golyót. Jelölje a ξ valószínűségi változó a kihúzott golyók között a piros golyók számát! Melyik értéket veszi fel ξ a legnagyobb valószínűséggel, ha

a) (M) visszatevés nélkül húzzuk ki a 10 golyót;

b) (M) visszatevéssel húzunk ki a 10 golyót?

14.5.15. (V) Jelölje a ξ valószínűségi változó az ötös lottón kihúzott számok közül a legnagyobbat és η a legkisebbet! Írja fel ξ és η eloszlását!

14.5.16. (E) Legyen ξ λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Melyik k természetes szám esetén lesz a $P(\xi = k)$ valószínűség a legnagyobb?

14.6. Eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény

14.6.1. Igazolja, hogy F(x) eloszlásfüggvény. Írja fel az F(x) eloszlásfüggvényű ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét és számolja ki a felírt valószínűségeket!

a) (M) $F(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}\quad (-\infty<x<+\infty)$, $P(\xi>0)$, $P(\ln 2\le\xi\le\ln 3)$;

b) (E) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{ha}\quad x\le -1,\\ 1-\dfrac{1}{\pi}\arccos x, & \text{ha}\quad -1<x\le 1,\\ 1, & \text{ha}\quad x>1,\end{cases}$

$P\left(|\xi|<\dfrac{1}{2}\right)$, $P\left(\xi\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P(-2<\xi<0)$;

c) (E) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{ha}\quad x\le 0,\\ 1-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & \text{ha}\quad x>0\end{cases}$ ($\sigma>0$ valós állandó),

$P(\xi\ge\sigma)$, $P\left(\dfrac{\sigma}{2}<\xi<2\sigma\right)$;

d) (E) $F(x)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^3, & \text{ha}\quad x>x_0,\\ 0, & \text{ha}\quad x\le x_0\end{cases}$ ($x_0>0$ valós állandó),

$P(\xi<2x_0)$, $P(0<\xi<x_0^2)$;

e) (E) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{ha}\quad x<1,\\ \dfrac{x-1}{x+1}, & \text{ha}\quad x\ge 1,\end{cases}$ $P(\xi>2)$, $P(0<\xi<3)$.

14.6.2. Határozza meg az A és a B állandókat úgy, hogy F(x) eloszlásfüggvény legyen!

a) (M) $F(x)=A+B\operatorname{arctg}x \quad (-\infty<x<+\infty)$;

b) (E) $F(x)=A+B\operatorname{th}x \quad (-\infty<x<+\infty)$;

c) (V) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x<0, \\ A+Be^{-x}, & \text{ha} \quad x\geq 0; \end{cases}$

d) (M) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x<-1, \\ A+B\arcsin x, & \text{ha} \quad -1\leq x<1, \\ 1, & \text{ha} \quad x\geq 1; \end{cases}$

e) (E) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x<1, \\ Ax+B, & \text{ha} \quad 1\leq x<2, \\ 1, & \text{ha} \quad x\geq 2; \end{cases}$

f) (E) $F(x)=\begin{cases} A+e^{x}, & \text{ha} \quad x\leq 0, \\ B, & \text{ha} \quad x>0; \end{cases}$

g) (E) $F(x)=\begin{cases} A, & \text{ha} \quad x\leq 0, \\ \dfrac{x^2+2x}{4}, & \text{ha} \quad 0<x<1, \\ \dfrac{B}{4}, & \text{ha} \quad 1\leq x\leq 2, \\ \dfrac{x^2+32}{48}, & \text{ha} \quad 2<x\leq 4, \\ 1, & \text{ha} \quad x>4. \end{cases}$

14.6.3. Igazolja, hogy f(x) sűrűségfüggvény és írja fel a megfelelő eloszlásfüggvényt!

a) (M) $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty < x < +\infty$;

b) (M) $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha} \quad x \geq 0,\\ 0, & \text{ha} \quad x < 0\end{cases}$ ($\lambda > 0$ valós állandó);

c) (E) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & \text{ha} \quad x \geq 1,\\ 0, & \text{ha} \quad x < 1;\end{cases}$

d) (M) $f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2}, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq 1,\\ 0, & \text{máshol};\end{cases}$

e) (E) $f(x)=\begin{cases}4\cos 2x, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{12} \leq x \leq \dfrac{\pi}{4},\\ 0, & \text{máshol}.\end{cases}$

14.6.4. (V) Igazolja, hogy ha c olyan valós szám, amelyre $2 \leq c < 3$, akkor az alábbi f(x) függvény sűrűségfüggvény:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad x < c,\\ \dfrac{x-c}{3-c}, & \text{ha} \quad c < x < 3,\\ 1, & \text{ha} \quad 3 < x < c+1,\\ \dfrac{4-x}{3-c}, & \text{ha} \quad c+1 < x < 4,\\ 0, & \text{ha} \quad 4 < x.\end{cases}$$

14.6.5. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f(x). Írja fel a c állandó értékét és a ξ eloszlásfüggvényét!

a) (M) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{x^3}, & \text{ha} \quad x \geq 2,\\ 0, & \text{ha} \quad x < 2;\end{cases}$

b) (V) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{x^2+x-2}, & \text{ha} \quad x \geq 4,\\ 0, & \text{ha} \quad x < 4;\end{cases}$

c) (E) $f(x)=\begin{cases}c\,xe^{-x}, & \text{ha} \quad x \geq 0,\\ 0, & \text{ha} \quad x < 0;\end{cases}$

d) (V) $f(x)=ce^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty;$

e) (E) $f(x)=\begin{cases}c\cdot\sqrt{x+1}, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq 3,\\ 0, & \text{máshol;}\end{cases}$

f) (M) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad x < 0,\\ \dfrac{c}{\sqrt{x}}e^{-x}, & \text{ha} \quad x > 0;\end{cases}$

g) (V) $f(x)=\begin{cases}c\,x\ln x, & \text{ha} \quad 1 \leq x \leq e,\\ 0, & \text{máshol;}\end{cases}$

h) (V) $f(x)=\begin{cases}c\cdot\arccos x, & \text{ha} \quad |x| \leq \dfrac{1}{2},\\ 0, & \text{máshol;}\end{cases}$

i) (M) $f(x)=cx^2e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$

14.7. Várható érték és szórás

14.7.1. (V) Egy sorsjátékon 1 darab 100000 Ft-os, 10 darab 10000 Ft-os és 1000 darab 500 Ft-os nyeremény van. Mennyi legyen egy sorsjegy ára, ha 50000 jegyet adnak ki és egy jegy ára az egy jegyre jutó nyeremény várható értékének a másfélszeresével egyenlő?

14.7.2. (V) Egy szabályos dobókockával ötször dobunk egymás után. Jelölje a ξ valószínűségi változó azt, hogy hányszor dobtunk 6-ost; az η valószínűségi változó pedig jelölje a dobott számok összegét! Számítsa ki a ξ és az η valószínűségi változók várható értékét és szórását!

14.7.3. (M) Egy dobozban 4 piros és 6 fehér golyó van. Találomra húzunk – visszatevés nélkül – egy-egy golyót, amíg pirosat nem húzunk. Számolja ki a kihúzott golyók számának várható értékét és szórását!

14.7.4. (M) Mennyi lesz az előző feladatban (14.7.3. feladat) a kihúzott golyók számának várható értéke, ha a kihúzott golyót mindig visszatesszük?

14.7.5. (E) Két játékos, Pista és Gábor, az 52 lapos francia kártyával játszik. A játék szabálya a következő: a kártyacsomagból felváltva felütnek egy-egy lapot és ha az első négy felütött lap között van pikk, akkor Pista fizet Gábornak 40 Ft-ot, ha pedig a négy lap között nincs pikk, akkor Gábor fizet Pistának 100 Ft-ot. Melyik játékosnak előnyösebb a játék? Mennyit fizessen Gábor a Pistának, hogy a játék igazságos legyen? (Egy játékos számára akkor előnyösebb a játék, ha a nyereségének a várható értéke pozitív és a játék akkor igazságos, ha ez a várható érték 0.)

14.7.6. (V) Egy szabályos pénzdarabbal addig dobunk, amíg fejet nem kapunk. Mennyi az ehhez szükséges dobások várható száma?

14.7.7. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f(x). Számolja ki ξ várható értékét és szórását!

a) (M) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x^4}, & \text{ha} \quad x \geq 1,\\ 0, & \text{ha} \quad x<1;\end{cases}$

b) (E) $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & \text{ha} \quad x \geq 0,\\ 0, & \text{ha} \quad x<0;\end{cases}$

c) (E) $f(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & \text{ha} \quad x \geq 0,\\ 0, & \text{ha} \quad x<0;\end{cases}$

d) (E) $f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2}, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq 1,\\ 0, & \text{máshol};\end{cases}$

e) (M) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}, & \text{ha} \quad x \geq 1,\\ 0, & \text{ha} \quad x<1;\end{cases}$

f) (M) $f(x)=\dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}, \quad -\infty<x<+\infty;$

g) (V) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi\left(1+x^2\right)}, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq 1,\\ 0, & \text{máshol};\end{cases}$

h) (V) $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}, \quad -\infty<x<+\infty;$

i) (V) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & \text{ha} \quad |x|<1,\\ 0, & \text{ha} \quad |x|\geq 1;\end{cases}$

j) (V) $f(x)=\begin{cases}\arccos x, & \text{ha} \quad 0\leq x\leq 1,\\ 0, & \text{máshol;}\end{cases}$

k)(E) $f(x)=\begin{cases}4x\sin 2x, & \text{ha} \quad 0\leq x\leq \dfrac{\pi}{4},\\ 0, & \text{máshol;}\end{cases}$

l) (E) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\cdot \ln x}{x}, & \text{ha} \quad 1\leq x\leq e,\\ 0, & \text{máshol;}\end{cases}$

m)(V) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{4x+9}}, & \text{ha} \quad 0\leq x\leq 4,\\ 0, & \text{máshol;}\end{cases}$

n)(M) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad x<0,\\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{ha} \quad x\geq 0;\end{cases}$

o) (V) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty<x<+\infty.$

14.7.8. Számolja ki az $\eta=2\xi+1$ valószínűségi változó várható értékét és szórását, ha ξ

a) (E) standard normális eloszlású;

b)(V) λ paraméterű exponenciális eloszlású!

14.8. Nevezetes folytonos eloszlások

14.8.1. Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó, amelynek a várható értéke m és szórása σ!

a) (M) Számolja ki a $P(|\xi| > 0{,}2)$ valószínűséget, ha $m = 0$ és $\sigma = 0{,}1$! Milyen x értékre teljesül a $P(\xi \geq x) = 0{,}0668$ egyenlőség?

b) (E) Számolja ki a $P(|\xi| \leq 2)$ valószínűséget, ha $m = -1$ és $P(\xi > 1) = 0{,}1587$!

c) (V) Számolja ki az m és a σ értékét, ha $m = 4\sigma$ és $P(\xi < 12) = 0{,}0228$!

d) (E) Számolja ki a $P(|\xi| > 1)$ valószínűséget, ha $\sigma = 2$ és $P(\xi \leq 2) = 0{,}8413$!

e) (E) Számolja ki a $P(|\xi| < 0{,}5)$ valószínűséget, ha $P(\xi < 1) = 0{,}8413$ és $P(\xi > 2) = 0{,}0228$!

14.8.2. Valamely súly mérésekor a tényleges és a mérleg által mutatott súly különbsége, azaz a mérési hiba normális eloszlású valószínűségi változó, amelynek várható értéke 0 gramm, szórása 1 gramm.

a) (V) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mérési hiba legalább 0,5 gramm?

b) (V) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mérési hiba abszolút értéke legfeljebb 0,2 gramm?

14.8.3. (V) Egy automata gép folyékony mosogatószert adagol műanyag flakonokba. A flakonokba töltendő mennyiség 1 liter, ez a gép által adagolt mosószermennyiség várható értéke. A betöltött mennyiség szórását szabályozni lehet. Mekkorára állítsuk be a szórást, ha azt szeretnénk, hogy 0,9876 legyen annak a valószínűsége, hogy a flakonokba töltött mennyiség 0,98 és 1,02 liter között legyen? (A tapasztalatok azt mutatják, hogy a flakonokba töltött mosószermennyiség normális eloszlású valószínűségi változó.)

14.8.4. (V) Egy repülőgép egy 100 m magasságú légifolyosóban repül. A repülőgép repülési magasságának a légifolyosó közepétől való eltérése 20 m várható értékű és 50 m szórású normális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a repülőgép a légifolyosóban halad?

14.8.5. (V) Egy gyártmány mérethibája – azaz a névleges mérettől való eltérése – 0 várható értékű normális eloszlású valószínűségi változó. Annak a valószínűsége, hogy a mérethiba abszolút értéke a 12 mm-t meghaladja 0,1336. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mérethiba abszolút értéke 10 mm-nél kisebb?

14.8.6. (V) Egy munkapadról kikerült termék hossza m cm ($m > 0$) várható értékű és 4 cm szórású normális eloszlású valószínűségi változó. Annak a valószínűsége, hogy egy termék hossza $0{,}5m$ és m közé esik 0,2881. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy termék hossza több, mint $2m$ cm?

14.8.7. (V) Egy barkácsboltban bizonyos típusú lécek között válogatunk. A lécek hossza normális eloszlású valószínűségi változó. Annak a valószínűsége, hogy egy léc 143 cm-nél kisebb 0,3085 és annak a valószínűsége, hogy 146 cm-nél nagyobb 0,1587. Számolja ki a lécek hosszának várható értékét és szórását, továbbá annak a valószínűségét, hogy egy léc hossza 143,5 cm és 144,5 cm közé esik!

14.8.8. (E) Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó az (1;4) intervallumon. Írja fel ξ sűrűségfüggvényét, eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását!

14.8.9. (M) A ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete egyaránt 4-gyel egyenlő. Írja fel ξ sűrűségfüggvényét, eloszlásfüggvényét és számolja ki annak a valószínűségét, hogy a ξ értéke 3 és 5 közé esik!

14.8.10. Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a (0;1) intervallumon!

a) (V) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ξ értékének első tizedes jegye a 3-as?

b) (V) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ξ értékének az ötödik tizedes jegye a 3-as?

14.8.11. Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a (–1;1) intervallumon! Írja fel η sűrűségfüggvényét, ha

a) (M) $\eta = 2\xi - 1$;

b) (M) $\eta = |\xi|$;

c) (M) $\eta = \xi^2$;

d) (M) $\eta = \arcsin \xi$.

14.8.12. (V) Egy benzinkútnál a tapasztalatok alapján annak a valószínűsége, hogy a tankolásra 3 percnél több ideig kell várni, 0,1. Ha a várakozási idő exponenciális eloszlású valószínűségi változó, mennyi annak a valószínűsége, hogy a benzinkúthoz érkezve 1 percen belül elkezdhetünk tankolni?

14.8.13. (M) Egy gép 10 olyan alkatrészt tartalmaz, amelyek bármelyikének meghibásodása esetén a gép leáll. Az alkatrészek élettartama, azaz a gép beindításától számított működési ideje egymástól független m_1, m_2, …, m_{10} várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Jelölje az η valószínűségi változó a gép beindításától az első leállásáig eltelt időtartamot. Írja fel η eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét és számolja ki a várható értékét és a szórását!

15. MATEMATIKAI STATISZTIKA

15.1. A statisztikai minta jellemzői

15.1.1. (M) Az alábbi táblázat 20 iskolás gyerek magasságát tartalmazza centiméterre kerekítve:

130	137	119	135	132
131	128	142	127	142
133	131	126	144	125
134	135	138	130	129

Készítsen gyakorisági eloszlást az osztályközt 5-nek választva, és adja meg az osztályközepeket!

15.1.2. (E) Az alábbi táblázatban azon időket adtuk meg másodpercre kerekítve, amelyekre 40 egyetemi hallgatónak egy feladat megoldásához szüksége volt. Készítsen gyakorisági hisztogramot, az adatokat 7 osztályba sorolva.

135	170	151	133	123	125	148	158
144	158	140	138	150	152	147	143
163	129	138	180	165	117	154	153
146	175	143	147	135	152	140	134
162	145	133	142	152	158	145	126

15.1.3.

a) (E) Határozza meg a {3, 8, 1, 6, 5, 2} számhalmaz átlagát és tapasztalati szórását.

b) (E) Mutassa meg, hogy ha a fenti számhalmaz minden eleméhez 3-at hozzáadunk, akkor a két halmaz tapasztalati szórása azonos, de az átlaguk nem!

15.1.4. Határozza meg az átlagot és a tapasztalati szórást az alábbi minták esetén!

a) (V) 17,18,16,16,17,18,19,17,15,17,19,18,16,16,18,17;

b)(V) A gyakorisági eloszlás:

X_i	2	3	4	5	7	10
f_i	3	1	2	3	4	2

15.1.5. (E) Egy középiskolában 55 tanulót megkérdeztek, hogy hány perc alatt érnek be reggel az iskolába. Az alábbi táblázat a közlekedési idejük gyakorisági eloszlását tartalmazza.

Idő (perc)	10–12	12–14	14–16	16–18	18–20	20–22	22–24
Gyakoriság	2	4	8	12	16	10	3

Készítse el a gyakorisági hisztogramot, és számítsa ki, hogy átlagosan mennyi idő alatt érnek be a tanulók az iskolába!

15.1.6. (M) Az alábbi táblázat egy főiskolai matematika szigorlaton legalább elégséges jegyet elért hallgatók pontszámának gyakorisági eloszlását tartalmazza.

Pontszám	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100
Gyakoriság	15	18	37	20	10

Készítse el a sűrűséghisztogramot, és számítsa ki a mintaközepet!

15.1.7. (M) Adott az alábbi gyakorisági eloszlás.

Osztályok	61–63	63–65	65–67	67–69	69–71
Gyakoriság	5	18	42	27	8

Számítsa ki a mintaközepet, a tapasztalati szórást és a korrigált tapasztalati szórást!

15.1.8. (V) Egy ifjúsági szállóban 1426 szállóvendég esetén feljegyezték az életkorukat, és az alábbi gyakorisági eloszlást kapták.

Életkor	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40
Gyakoriság	562	450	350	58	6

Számítsa ki a mintaközepet, a korrigált tapasztalati szórást és a variációs tényezőt! Milyen következtetéseket tud levonni a kiszámított értékekből?

15.1.9. (E) Egy gazdaságban megfigyelték 108 tábla hektáronkénti szénatermését. A nyert adatokat 7 osztályba sorolták, amelyet az alábbi táblázat tartalmaz.

Szénatermés (q/ha)	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100
Gyakoriság	1	6	25	43	26

Szénatermés (q/ha)	100–120	120–140
Gyakoriság	5	2

Számítsa ki a hektáronkénti átlagos termést és a tapasztalati szórást!

15.2. Konfidenciaintervallum várható értékre

15.2.1. (M) Egy normális eloszlású sokaság szórása 5. A sokaságból 25 elemű véletlen mintát vettek és a mintaközépre 14-et kaptak. Adjon 95 % -os megbízhatósági szinten konfidenciaintervallumot a várható értékre!

15.2.2. (M) A szórás ismeretében, 200 elemű minta alapján 95 % -os megbízhatósági szinten szimmetrikus konfidenciaintervallumot számoltak egy bizonyos gép által gyártott csapágyak átmérőjére. A csapágyak átmérője normális eloszlásúnak tekinthető. Határozza meg a szórást és a minta átlagát,ha a kon-

fidencia-intervallum: (8,182;8,298)! Adja meg a 98% -os szintnek megfelelő konfidenciaintervallumot!

15.2.3. (E) Orvosi vizsgálat során 250 véletlenszerűen kiválasztott felnőtt férfi magasságából a következő adatokat számították ki: $\sum_{i=1}^{250} X_i = 43\,205$, $\sum_{i=1}^{250} X_i^2 = 7\,469\,107$, ahol X_i a centiméterre kerekített magasságokat jelenti. A magasság normális eloszlásúnak tekinthető. Adjon 99 % -os szintnek megfelelő konfidenciaintervallumot a várható értékre a számított adatok felhasználásával!

15.2.4. (V) Egy normális eloszlású sokaságból vett 120 elemes mintából a mintaközépre 8,4-et, a korrigált tapasztalati szórásra 1,2-t kaptak. Adjon 97 % -os szintnek megfelelő konfidenciaintervallumot a várható értékre!

15.2.5. (E) Egy normális eloszlású valószínűségi változónál 7 elemű minta (X_i) esetén a következő adatokat ismerjük:

$$\sum_{i=1}^{7} X_i = 35{,}9\,;\ \sum_{i=1}^{7} X_i^2 = 186{,}19\,.$$

Adjon 90 % -os szinten konfidenciaintervallumot a változó várható értékére!

15.2.6. (E) Bizonyos televízió-képcsövek élettartamának szórását 100 órára becsülték. Mekkora mintát kell venni ahhoz, hogy 95 % -os szinten biztosak lehessünk abban, hogy a becsült átlagos élettartam hibája nem haladja meg a 20 órát?

15.3. Statisztikai próbák

15.3.1. Ebben a feladatban adott m_o, és adott σ_o paraméterű, normális eloszlású sokaságot vizsgáltak. Az n elemű véletlen mintą átlaga $\overline{X}$. A táblázatbeli adatok alapján ellenőrizze a hipotéziseket az adott szignifikanciaszinten!

	n	$\overline{X}$	σ_o	Hipotézisek	Szignifikancia-Szint
a) (M)	16	197	3	H_o:m_o=200; H_1:$m_o \neq 200$	1 %
b) (E)	50	5,92	0,8	H_o:m_o=6; H_1:$m_o \neq 6$	5 %
c) (M)	81	15	2,3	H_o:m_o=15,4; H_1:$m_o < 15,4$	5 %
d) (E)	50	1850	100	H_o:m_o=1800; H_1:$m_o > 1800$	1 %

15.3.2. (E) Egy gyár által előállított villanykörtékből egy bizonyos napon 100 elemű mintát vettek. Az élettartam normális eloszlású 120 óra szórással. Az átlagos élettartamra 1570 órát kaptak. Döntse el 5 % -os szignifikanciaszinten, hogy ez az eredmény a villanykörték 1600 órás várható élettartamának megváltozását jelenti-e! Magyarázza meg, hogy mit jelent az „5 % -os szignifikanciaszint"!

15.3.3. (V) Egy csomagológép által készített 11 bála mérlegelése után a bálák átlagos tömegére 1506,8 kg kerekített értéket kapták. A báláknak 1506,5 kg tömegűnek kell lenniük. Feltételezve, hogy a bálák tömege normális eloszlású 0,4 kg szórással, döntse el 5 % -os szignifikanciaszinten, hogy a csomagológép által készített bálák túlsúlyosak-e!
Adjon 99 % -os szintnek megfelelő konfidenciaintervallumot a bálák tömegére!

15.3.4. Egy bizonyos pékségben készült cipók tömege normális eloszlású 500 g várható értékkel és 20 gramm szórással.

a)(E) Számítsa ki, hogy a cipók hány százaléka lesz 475 grammnál kevesebb tömegű és hány százalékuk 530 grammnál nagyobb tömegű!

b)(E) 25 cipót lemértek és a tömegük átlagára 490 grammot kaptak. Állíthatjuk-e, hogy a teljes készletnél csökkent a tömeg átlagos értéke? Állapítsa meg, hogy egy- vagy kétoldali próbát kell alkalmazni és döntsön 5 % -os szignifikanciaszinten!

15.3.5. Ebben a feladatban adott m_o, és ismeretlen σ paraméterű normális eloszlású sokaságokat vizsgáltak. Az n elemű véletlen minta átlaga: $\overline{X}$. A táblázatbeli adatok alapján ellenőrizze a hipotéziseket az adott szignifikanciaszinten!

	n	$\overline{X}$	$\sum(X-\overline{X})^2$	Hipotézisek	Szignifikanciaszint
a)(M)	64	1997	9694,6	H_o:m_o=2000, H_1:m_o<2000	2 %
b)(M)	10	1,978	0,00336	H_o:m_o=2, H_1:m_o≠2	1 %
c)(E)	6	1505,8	50,8	H_o:m_o=1503, H_1:m_o>1503	5 %

15.3.6. (E) Egy tojásszállítmányból 5 darabos mintát vettek, a tojások súlyára 6,7; 6,5; 7,1; 7,3 és 6,8 grammot kaptak a méréskor. Döntse el 5 % -os szinten, hogy a tojásszállítmány szignifikánsan eltér-e a 7 grammtól!

15.3.7. (V) Egy konzervgyárban egy bizonyos adagológép előírás szerint 500 grammot tölt egy üvegbe. Ellenőrzés során 10 üveg lemérésekor a minta átlagára 494 grammot, a tapasztalati szórásra 8,06 grammot kaptak. A tömeg normális eloszlásúnak tekinthető. Döntse el 5 % -os szignifikanciaszinten, hogy a gép jól dolgozik vagy kevesebbet tölt az üvegekbe!

15.3.8. Döntse el a táblázatbeli adatok alapján, hogy van-e szignifikáns eltérés az adott σ_1 és σ_2 paraméterű normális eloszlású alapsokaságok m_1 és m_2 várható értéke között!

	n_1	$\overline{X}_1$	σ_1	n_2	$\overline{X}_2$	σ_2	Hipotézisek	Szignifikanciaszint
a)(M)	100	5400	900	100	6000	1000	H_o:m_1=m_2, H_1:m_1≠m_2	5 %
b)(E)	50	68,2	2,5	50	67,5	2,8	H_o:m_1=m_2, H_1:m_1>m_2	5 %
c)(E)	20	4,75	1,517	25	5,4	1,581	H_o:m_1=m_2, H_1:m_1<m_2	2 %

15.3.9. Döntse el a megadott adatok alapján, hogy van-e szignifikáns eltérés az ismeretlen, de azonos σ paraméterű normális eloszlású sokaságok m_1 és m_2 várható értéke között!

a) (E)

n_1	$\sum X$	$\sum(X-\overline{X})^2$	n_2	$\sum Y$	$\sum(Y-\overline{Y})^2$	Hipotézisek	Szignifikanciaszint
20	43	1296	17	36	1388	$H_0: m_1=m_2$, $H_1: m_1\neq m_2$	2 %

b) (V)

n_1	$\sum X$	$\sum X^2$	n_2	$\sum Y$	$\sum Y^2$	Hipotézisek	Szignifikanciaszint
72	7920	879912	68	7820	904808	$H_0: m_1=m_2$, $H_1: m_1<m_2$	1 %

15.3.10. (V) Egy normális eloszlású sokaság szórása 8. A sokaságból 40 elemes véletlen mintát vettek, a minta átlaga 74. Egy másik normális eloszlású sokaság szórása 7. A sokaságból vett 50 elemes minta átlaga 78. Döntse el 5 % -os szignifikanciaszinten, hogy van-e szignifikáns eltérés a két sokaság várható értéke között!

15.3.11. (V) Két egyetemen (A és B) az aktív sportolók közül véletlenszerűen kiválasztott fiú hallgatóknak megmérték a magasságát. Az A egyetemen 6 elemű minta átlagára 179,67 cm-t, a tapasztalati szórásnégyzetre 4,556 cm-t kaptak. A B egyetemen a 11 elemű minta átlaga 181 cm, a tapasztalati szórásnégyzete pedig 4,909 cm. A sportoló hallgatók magasságáról mindkét egyetemen feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak és azonos szórásúak. 5 % -os szignifikanciaszinten döntse el, hogy feltételezhetjük-e, hogy az A egyetem sportolói alacsonyabbak?

15.3.12. (M) Egy dobókockáról el akarjuk dönteni, hogy szabályos-e. 1200 dobást végezve az alábbi gyakorisági eloszlást kaptuk.

Szám	1	2	3	4	5	6
Gyakoriság	195	210	190	204	205	196

Döntsön 5 % -os szignifikanciaszinten!

15.3.13. (V) Az alábbi táblázat az 1 és 12 közötti egész számokból véletlenszám-táblázattal kiválasztott 500 szám gyakorisági eloszlását tartalmazza.

Szám	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Gyakoriság	41	34	54	39	49	45	41	33	37	41	47	39

Ellenőrizze χ^2 próbával 5 % -os szignifikanciaszinten, hogy eltér-e szignifikáns mértékben a várható eloszlástól!

15.3.14. (E) Egy pénzérmét 200-szor feldobva 115 alkalommal fej, 85 alkalommal írás az eredmény. Ellenőrizze χ^2-próbával 5 % -os szignifikanciaszinten, hogy az érme szabályos-e!

15.3.15. (V) Négy érmét 160-szor feldobtunk. A fej-dobás gyakorisági eloszlását az alábbi táblázat tartalmazza.

Fejdobások száma (k)	0	1	2	3	4
Gyakoriság (f_k)	5	35	67	41	12

Ellenőrizze χ^2-próbával 5 % -os szignifikanciaszinten, hogy az érmék szabályosak-e!

15.3.16. (V) Döntse el χ^2-próbával 5 % -os szignifikanciaszinten az alábbi táblázatban adott adatokról, hogy azok egy Poisson-eloszlású sokaságból származnak-e!

Szám (X_i)	0	1	2	3	4	5	6	7
Gyakoriság (f_i)	14	18	29	18	10	7	3	1

15.3.17. (M) Egy automata gép működését kívánták ellenőrizni. 1500 db legyártott alkatrésznél lemérték egyik lényeges méretének az elméleti mérettől való δ eltéréseit mikronban. A mérési eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza.

Eltérés	Gyakoriság
(–16) – (–12)	17
(–12) – (– 8)	63
(– 8) – (– 4)	254
(–4) – 0	446
0 – 4	422
4 – 8	208
8 – 12	71
12 – 16	19

A szórás 5 μ. Ellenőrizze 1 % -os szignifikanciaszinten, hogy a hibaeloszlás normális eloszlású-e!

15.4. Lineáris korreláció, regressziós egyenes

15.4.1. Az alábbi táblázatokban szereplő adatokhoz adja meg a legkisebb négyzetek elve alapján számított regressziós egyenes egyenletét!

a) (M)

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

y-t x függvényeként adja meg!
Rajzolja meg a szórásdiagramot és ábrázolja a kapott regressziós egyenest is!

b)(E)

x	1	2	4	6	7	8	10
y	10	14	12	13	15	12	13

y-t x függvényeként adja meg!

c) (V)

x	51	67	84	81	101	109	71	97	109	51	105	89
y	25	30	43	44	57	58	43	46	62	45	55	45

y-t x függvényeként és x-et y függvényeként is adja meg!

15.4.2. Az alábbi táblázatokban szereplő adatok felhasználásával állapítsa meg az empirikus lineáris korreláció mértékét!

	$\sum x$	$\sum y$	$\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$	n
a)(E)	680	996	20154	24844	34670	30
b)(E)	36	54	268	428	694	10
c)(M)	225	361	8875	12905	22641	6
d)(E)	1015	553	90667	48888	26807	12

15.4.3. Az alábbi táblázat 10 malac 4, illetve 8 hetes kori súlyát tartalmazza.

4 hetes súly (x kg)	3,2	3,6	4	4,4	4,8	5,2	5,6	6	6,4	6,8
8 hetes súly (y kg)	14	12,8	13,2	12,8	13,6	14,5	14,2	16,5	15	17,5

a) (V) Mutassa meg, hogy szoros lineáris korreláció van a két súly között!

b)(V) Írja fel a regressziós egyenes egyenletét, y-t x függvényeként adja meg!

c) (V) Adjon becslést egy 5 kg-os 4 hetes malac 8 hetes súlyára!

15.4.4. Megmérték 9 búzakalász hosszát és megszámolták a kalászonkénti szemek számát. Az eredményt az alábbi táblázat tartalmazza.

Kalász hossza (x cm)	10,2	9,5	8,6	8,3	8,1	8,1	7,7	7,3	7,1
Szemek száma (y db)	41	38	29	33	30	28	22	24	26

a)(E) Mutassa meg, hogy szoros lineáris korreláció van a kalászok hossza és a kalászonkénti szemek száma között!

b)(E) Írja fel a legkisebb négyzetek elvével illesztett regressziós egyenes egyenletét, y-t x függvényeként adja meg!

15.4.5. Az alábbi táblázat egy főiskola első éves hallgatói közül véletlenszerűen kiválasztott 10 hallgatója fizika és matematika vizsgadolgozatának a pontszámát tartalmazza.

Fizika (x)	77	84	75	80	93	65	87	71	98	68
Matematika (y)	74	89	82	78	86	72	91	80	95	72

a)(E) Határozza meg az adatokhoz a legkisebb négyzetek elvével illesztett regressziós egyenes egyenletét, y-t x függvényeként adja meg!

b)(E) Egy hallgató csak a fizika dolgozatát írta meg, amely 95 pontos lett. Várhatóan hány pontos lenne a matematika dolgozata?

15.4.6. 15 véletlenszerűen kiválasztott parcellán lemérték a burgonyatermést és a talaj humusztartalmát. Az alábbi táblázat a mérések eredményét tartalmazza, a humusztartalmat mg %-ban (100 g földben levő humusz mg-ban), a burgonyatermést pedig mázsában kataszteri holdanként.

Humusz (x mg %)	523	594	517	593	696	845	617	780
Termés								

(y q/kh)	27,3	62,8	52	49,6	61,5	71,8	51	79,6

Humusz (x mg %)	634	671	732	724	739	732	682
Termés (y q/kh)	53,9	53,6	63,1	71,9	78,9	72,2	63

a)(E) Állapítsa meg, hogy milyen szoros lineáris korreláció van a talaj humusztartalma és a terméseredmény között!

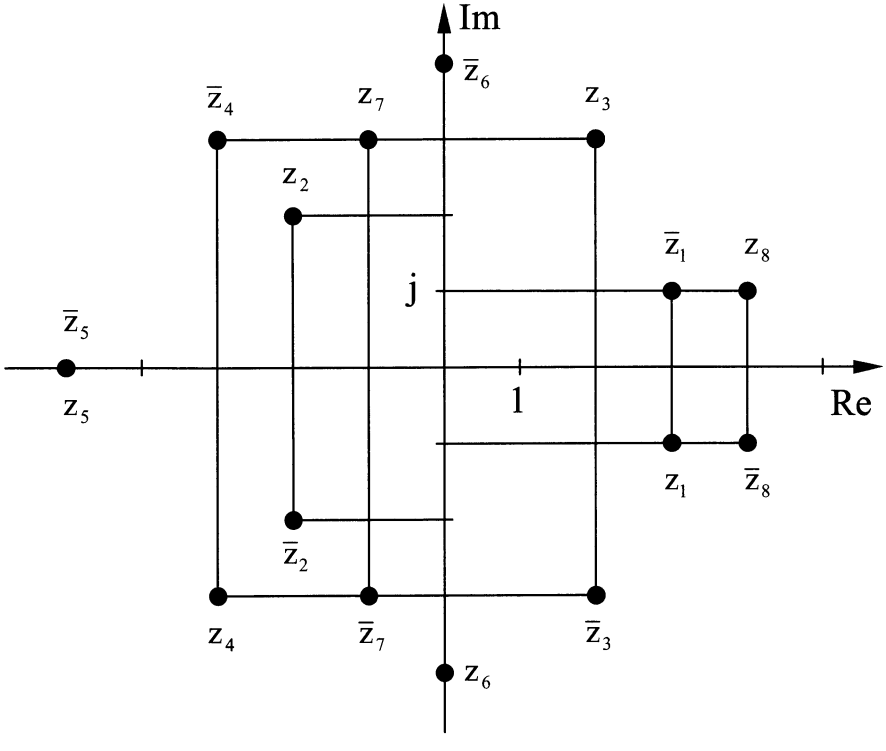
b)(E) Az adatok alapján írja fel a regressziós egyenes egyenletét, y-t x függvényeként adja meg!

MEGOLDÁSOK

1. KOMPLEX SZÁMOK

1.1. Komplex számok ábrázolása

1.1.1.



a) A megadott komplex szám valós illetve képzetes része: $\mathrm{Re}\, z_1 = 3$ illetve $\mathrm{Im}\, z_1 = -1$, konjugáltja: $\bar{z}_1 = (\mathrm{Re}\, z_1) - (\mathrm{Im}\, z_1)\,\mathrm{j} = 3 + \mathrm{j}$, abszolút értéke: $|z_1| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z_1)^2 + (\mathrm{Im}\, z_1)^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.

b) $\mathrm{Re}\, z_2 = -2$, $\mathrm{Im}\, z_2 = 2$, $\bar{z}_2 = -2 - 2\,\mathrm{j}$, $|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

c) $\mathrm{Re}\, z_3 = 2$, $\mathrm{Im}\, z_3 = 3$, $\bar{z}_3 = 2 - 3\,\mathrm{j}$, $|z_3| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

d) $\mathrm{Re}\,z_4 = -3$, $\mathrm{Im}\,z_4 = -3$, $\overline{z}_4 = -3+3\,\mathrm{j}$, $|z_4| = 3\sqrt{2}$.

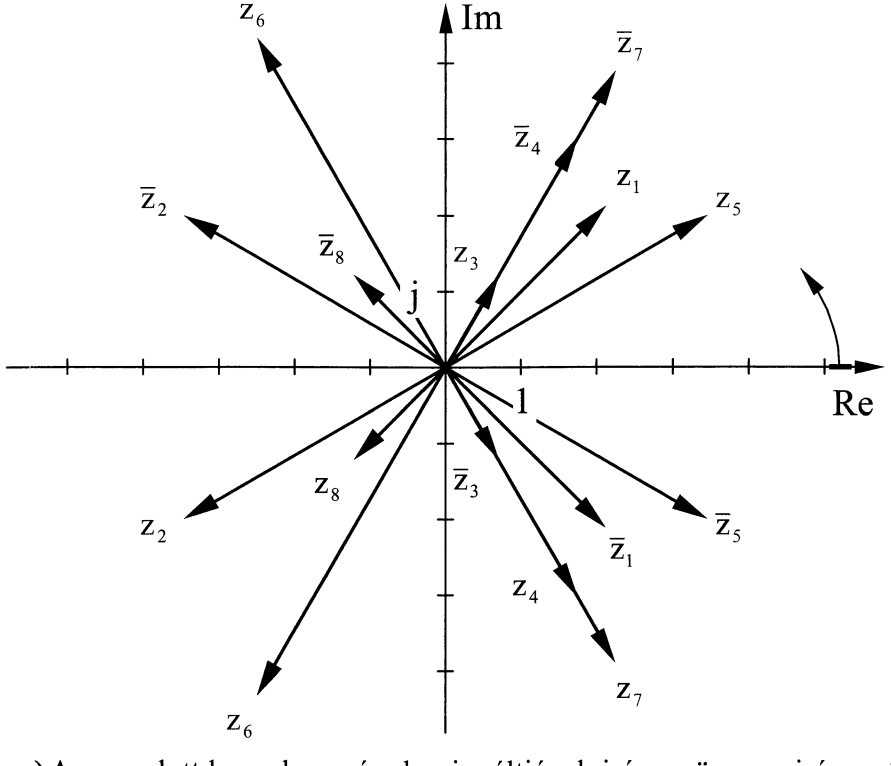
e) $\mathrm{Re}\,z_5 = -5$, $\mathrm{Im}\,z_5 = 0$, $\overline{z}_5 = z_5 = -5$, $|z_5| = 5$.

f) $\mathrm{Re}\,z_6 = 0$, $\mathrm{Im}\,z_6 = -4$, $\overline{z}_6 = 4\,\mathrm{j}$, $|z_6| = 4$.

g) $\mathrm{Re}\,z_7 = -1$, $\mathrm{Im}\,z_7 = 3$, $\overline{z}_7 = -1-3\,\mathrm{j}$, $|z_7| = \sqrt{10}$.

h) $\mathrm{Re}\,z_8 = 4$, $\mathrm{Im}\,z_8 = 1$, $\overline{z}_8 = 4-\mathrm{j}$, $|z_8| = \sqrt{17}$.

1.1.2.



a) A megadott komplex szám konjugáltjának irányszöge, az irányszög mínusz egyszerese: $\overline{z}_1 = 3\big(\cos(-45°) + \mathrm{j}\sin(-45°)\big)$.
A forgásszögek szögfüggvényeinek értelmezése alapján:

$\cos(-45°) = \cos(-45° + 360°) = \cos 315°$ és
$\sin(-45°) = \sin(-45° + 360°) = \sin 315°$.
Így a konjugált nemnegatív, a teljes szögnél kisebb irányszöggel:
$\bar{z}_1 = 3(\cos 315° + j\sin 315°)$.
Ebben és a következő feladatban, a komplex számsíkon az irányszög nulla értékét és pozitív irányát a pozitív, valós féltengelyre állított nyíl jelöli.

b) $\bar{z}_2 = 4(\cos(-210° + 360°) + j\sin(-210° + 360°)) =$
$= 4(\cos 150° + j\sin 150°)$.

c) $\bar{z}_3 = \sqrt{2}(\cos(-420° + 720°) + j\sin(-420° + 720°)) =$
$= \sqrt{2}(\cos 300° + j\sin 300°)$.

d) $\bar{z}_4 = 3{,}5(\cos(1140° - 1080°) + j\sin(1140° - 1080°)) =$
$= 2(\cos 60° + j\sin 60°)$.

e) $\bar{z}_5 = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + j\sin\frac{11\pi}{6}\right)$. **f)** $\bar{z}_6 = 5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

g) $\bar{z}_7 = 4{,}5\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right)$. **h)** $\bar{z}_8 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + j\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

1.1.3.

a) A megadott komplex szám konjugáltjának irányszöge, az irányszög mínusz egyszerese: $\bar{z}_1 = 3e^{j\frac{19\pi}{6}}$.
Az Euler-féle összefüggés és a forgásszögek szögfüggvényeinek értelmezése alapján:
$e^{j\frac{19\pi}{6}} = \cos\frac{19\pi}{6} + j\sin\frac{19\pi}{6} = \cos\frac{7\pi}{6} + j\sin\frac{7\pi}{6} = e^{j\frac{7\pi}{6}}$, ezért a konjugált nemnegatív, a teljes szögnél kisebb irányszöggel: $\bar{z}_1 = 3e^{j\frac{7\pi}{6}}$.

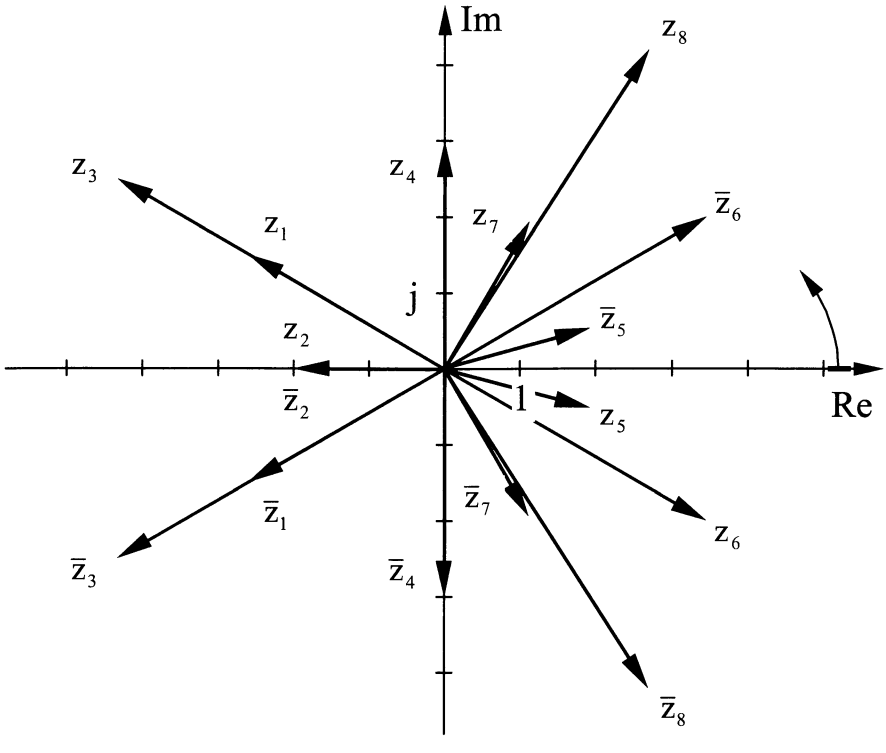
b) $\bar{z}_2 = 2e^{-j\pi} = 2e^{j(-\pi+2\pi)} = 2e^{j\pi} = z_2$.

c) $\overline{z}_3 = 5e^{j\frac{7\pi}{6}}$.

d) $\overline{z}_4 = 3e^{j\frac{3\pi}{2}}$.

e) $\overline{z}_5 = 2e^{j\frac{\pi}{12}}$.

f) $\overline{z}_6 = 4e^{j\frac{\pi}{6}}$.



g) A logaritmus definíciója, a hatvány logaritmusa és a hatványozás azonossága alapján: $z_7 = e^{\frac{1}{2}\ln 5 + j\frac{\pi}{3}} = e^{\ln\sqrt{5} + j\frac{\pi}{3}} = \sqrt{5}\,e^{j\frac{\pi}{3}}$. A komplex szám konjugáltja: $\overline{z}_7 = \sqrt{5}\,e^{j\frac{5\pi}{6}}$.

h) $\overline{z}_8 = 5e^{j(2\pi-1)}$.

1.2. Áttérés a komplex szám egyes alakjai között

1.2.1.

a) Behelyettesítjük a szögfüggvények értékeit, és kiszámítjuk a komplex szám valós és képzetes részét:

$$z = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,j\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\,j.$$

b) $z = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,j\right) = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,j.$

c) $z = \sqrt{3} + j.$ **d)** $z = 1 + j.$

e) Az exponenciális alakban megadott komplex számot felírjuk trigonometrikus alakban, és kiszámítjuk az algebrai alakot:

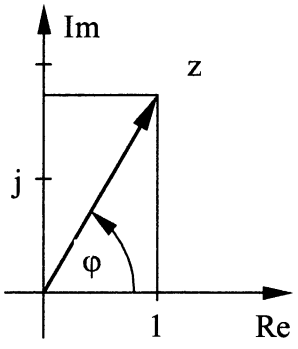
$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,j\right) = -1 + j.$$

f) $z = -2\,j.$ **g)** $z = 3\sqrt{3} + 3\,j.$

h) $z \approx 1{,}43 + 0{,}69\,j.$

1.2.2.

a) A komplex szám abszolút értéke: $|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2} = 2.$



Ábrázolva a Gauss-féle számsíkon a komplex számnak megfelő pontot, megállapítjuk, hogy a komplex szám irányszöge hegyesszög:

$\varphi = \text{arc tg}\dfrac{\text{Im}\,z}{\text{Re}\,z} = \text{arc tg}\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \dfrac{\pi}{3}$, illetve $\varphi = 60°$. A komplex szám trigonometrikus és exponenciális alakban tehát

$z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \text{j}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ és $z = 2\text{e}^{\text{j}\frac{\pi}{3}}$.

b) A komplex szám abszolút értéke: $|z| = \sqrt{\left(-5\sqrt{3}\right)^2 + 5^2} = 10$.

Mivel a komplex szám a második síknegyedbe esik, ezért

$\varphi = \pi + \text{arc tg}\dfrac{5}{-5\sqrt{3}} = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$, illetve $\varphi = 150°$.

Így $z = 10(\cos 150° + \text{j}\sin 150°)$ és $z = 10\text{e}^{\text{j}\frac{5\pi}{6}}$.

c) Mivel $\text{Re}\,z = 0$ és $\text{Im}\,z = -5$, ezért $\varphi = 270°$ és $|z| = 5$ A komplex szám trigonometrikus alakban $z = 5(\cos 270° + \text{j}\sin 270°)$, és exponenciális alakban $z = 5\text{e}^{\text{j}\frac{3\pi}{2}}$.

d) $z = 4\sqrt{2}\,(\cos 225° + \text{j}\sin 225°)$ és $z = 4\sqrt{2}\,\text{e}^{\text{j}\frac{5\pi}{4}}$.

e) $z = 5(\cos 180° + \text{j}\sin 180°)$ és $z = 5\text{e}^{\text{j}\pi}$.

f) $z = \sqrt{2}\,\text{e}(\cos 135° + \text{j}\sin 135°)$ és $z = \sqrt{2}\,\text{e}\,\text{e}^{\text{j}\frac{3\pi}{4}}$.

g) $z \approx 8{,}851(\cos 266{,}05° + \text{j}\sin 266{,}05°)$ és $z \approx 8{,}851 \cdot \text{e}^{\text{j}\frac{266{,}05\pi}{180}}$.

h) $z \approx 1{,}64 \cdot 10^{-3}\,(\cos 232{,}43° + \text{j}\sin 232{,}43°)$ és

$z = 1{,}64 \cdot 10^{-3}\, e^{j\frac{232{,}43\pi}{180}}$.

1.2.3.

a) A szögfüggvények értékeit behelyettesítve, megkapjuk a komplex szám algebrai alakját: $z = -2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)j\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,j$. Abszolút értéke: $|z| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2$. Mivel a komplex szám a negyedik síknegyedbe esik, ezért

$$\varphi = 2\pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = 2\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4},$$

illetve $\varphi = 315°$. Így a megadott komplex szám trigonometrikus és exponenciális alakban: $z = 2(\cos 315° + j\sin 315°)$ és $z = 2e^{j\frac{7\pi}{4}}$.

b) $z = \sqrt{2}\,(-1-(-1)\,j) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,j$, $|z| = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2$,

$\varphi = \pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4}$, illetve $\varphi = 135°$.

$z = 2(\cos 135° + j\sin 135°)$ és $z = 2e^{j\frac{3\pi}{4}}$.

c) $z = -6 + 3\sqrt{3}\,j$, $|z| = 3\sqrt{7} \approx 7{,}94$, $\varphi = \pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{3\sqrt{3}}{-6} \approx \frac{139{,}11\pi}{180}$.

$z \approx 7{,}94(\cos 139{,}11° + j\sin 139{,}11°)$ és $z \approx 7{,}94e^{j\frac{139{,}11\pi}{180}}$.

d) $z = 3 + 3\,j$, $z = 3\sqrt{2}(\cos 45° + j\sin 45°)$ és $z = 3\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}}$.

e) A hatványozás és a logaritmus azonosságait alkalmazva:

$z = 3 + \sqrt{3}\,j$, $z = 2\sqrt{3}(\cos 30° + j\sin 30°)$ és $z = 2\sqrt{3}\,e^{j\frac{\pi}{6}}$.

f) $z = 4 - 2\,j$, $z \approx 4{,}47(\cos 333{,}43° + j\sin 333{,}43°)$ és

$z \approx 4{,}46\,e^{j\cdot 5{,}82}$.

g) $z = -2$, $z = 2(\cos 180° + j\sin 180°)$ és $z = 2e^{j\pi}$.

h) $z = \frac{1}{27}j$, $z = \frac{1}{27}(\cos 90° + j\sin 90°)$ és $z = \frac{1}{27}e^{j\frac{\pi}{2}}$.

1.2.4.

a) Mivel $\operatorname{tg} 150° = \frac{b}{-3}$, ezért $b = 3\sqrt{3}$, tehát a komplex szám algebrai alakban: $z = -3 + 3\sqrt{3}\,j$. A komplex szám abszolút értéke $|z| = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$, trigonometrikus alakja pedig: $z = 6(\cos 150° + j\sin 150°)$.

b) $z = \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{2}\,j$ és $z = 2\sqrt{\frac{2}{3}}(\cos 60° + j\sin 60°)$.

c) $z = -\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}j$ és $z = 5(\cos 120° + j\sin 120°)$.

d) $z \approx -7{,}06 - 15{,}46\,j$ és $z = 17\left(\cos\frac{15\pi}{11} + j\sin\frac{15\pi}{11}\right)$.

1.3. Műveletek különféle alakú komplex számokkal

1.3.1.

a) Az összeg valós része a valós részek, képzetes része pedig a képzetes részek összege: $z = (2+4) + (9-3)\,j = 6 + 6\,j$. A komplex szám abszolút értéke és irányszöge:

$|z| = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ és $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{6}{6} = \frac{\pi}{4}$ illetve $\varphi = 45°$. Az összeg trigonometrikus alakban: $z = 6\sqrt{2}(\cos 45° + j\sin 45°)$.

b) $z = 8(\cos 180° + j\sin 180°)$. **c)** $z = 2\sqrt{2}(\cos 315° + j\sin 315°)$.

d) A szorzatot a kéttagú összegek szorzására vonatkozó azonosság alapján, arra figyelemmel számítjuk ki, hogy $j^2 = -1$:

$z = -9 + 3\sqrt{3}\,j + 3\sqrt{3}\,j - 3j^2 = -6 + 6\sqrt{3}\,j$. A komplex szám abszolút értéke és irányszöge: $|z| = \sqrt{(-6)^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2} = 12$ és

$\varphi = \pi + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{6\sqrt{3}}{-6} = \dfrac{2\pi}{3}$. A szorzat trigonometrikus alakban:

$z = 12\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + j\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

e) $z = 7\sqrt{3}(\cos 0° + j\sin 0°)$.

f) $z = (2\sqrt{3} - 6) + (2\sqrt{3} + 6)\,j$, $|z| = 4\sqrt{6}$ és

$\varphi = \pi + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{2\sqrt{3}+6}{2\sqrt{3}-6} = \pi - \operatorname{arc\,tg}(2+\sqrt{3})$.

Megjegyezzük,

hogy $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 + \sqrt{3}$,

ezért $\varphi = \dfrac{7\pi}{12}$, illetve $\varphi = 105°$. A komplex szám, trigonometrikus alakban: $z = 4\sqrt{6}(\cos 105° + j\sin 105°)$.

g) $z \approx 14{,}87(\cos 227{,}73° + j\sin 227{,}73°)$.

h) A kéttagú összeg négyzete: $z = 4 - 8\sqrt{3}\,j - 12 = -8 - 8\sqrt{3}\,j$.

A komplex szám abszolút értéke és irányszöge $|z| = 16$ és $\varphi = 240°$, trigonometrikus alakja: $z = 16(\cos 240° + j\sin 240°)$.

i) $z = 48\sqrt{6}(\cos 45° + j\sin 45°)$.

j) A törtet bővítjük a nevező konjugáltjával: $z = \frac{2-2j}{1+j} \cdot \frac{1-j}{1-j} = -2j$.

A kapott komplex szám trigonometrikus alakja:
$z = 2(\cos 270° + j\sin 270°)$.

k) $z = 1{,}5(\cos 315° + j\sin 315°)$. **l)** $z = 2{,}5(\cos 180° + j\sin 180°)$.

m) $z = 3(\cos 150° + j\sin 150°)$. **n)** $z = \sqrt{6}(\cos 255° + j\sin 255°)$.

1.3.2.

a) A szorzat abszolút értéke a tényezők abszolút értékeinek szorzata, irányszöge pedig a tényezők irányszögeinek összege:
$z = 6(\cos 150° + j\sin 150°)$. A szorzat algebrai alakban:

$$z = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = -3\sqrt{3} + 3j.$$

b) $z = -4$.

c) $z = 1{,}5(\cos(-30°) + j\sin(-30°)) = 1{,}5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}j$.

d) $z = 2\sqrt{6}j$.

e) A hányados abszolút értéke a számláló és a nevező abszolút értékének hányadosa, irányszöge pedig a számláló és a nevező irányszögének különbsége:

$z = \frac{6}{3}(\cos(178° - 133°) + j\sin(178° - 133°)) =$

$= 2(\cos 45° + j\sin 45°)$. A hányados algebrai alakban:

$z = \sqrt{2} + \sqrt{2}j$.

f) $z = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}j$.

g) $z = \sqrt{3}\,j$.

h) $z \approx -3{,}06 + 2{,}57\,j$.

1.3.3.

a) A hatvány abszolút értéke a hatványalap abszolút értékének hatványa, irányszöge pedig a hatványalap irányszögének és a hatványkitevőnek a szorzata:

$z = 3^2\,(\cos(2\cdot 15°) + j\sin(2\cdot 15°)) = 9(\cos 30° + j\sin 30°)$.

A hatvány algebrai alakban: $z = \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2}j$.

b) $z = -16\sqrt{2} - 16\sqrt{2}\,j$.

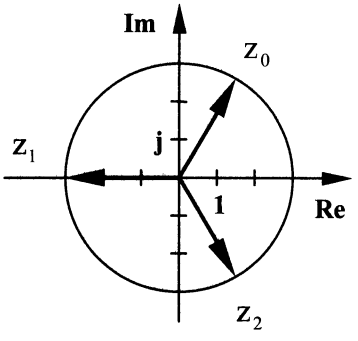
c) $z = -16$.

d) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j$.

e) A komplex számból való gyökvonás eredménye annyi komplex szám, ahányadik gyököt vonunk. Abszolút értékeik egyenlők egymással. Ez a gyökjel alatt álló komplex szám abszolút értékének adott kitevőjű gyöke: $r_0 = r_1 = r_2 = \sqrt[3]{27} = 3$. Az első gyök irányszöge az irányszög és a gyökkitevő hányadosa, minden további irányszög rendre annyival nagyobb az előzőnél, mint a 360° és a gyökkitevő hányadosa, tehát:

$\varphi_0 = \frac{180°}{3} = 60°$, $\varphi_1 = 60° + \frac{360°}{3} = 180°$ és

$\varphi_2 = 180° + \frac{360°}{3} = 300°$.



Tehát a három gyök, trigonometrikus alakban:

$z_0 = 3(\cos 60° + j\sin 60°)$

$z_1 = 3(\cos 180° + j\sin 180°)$

$z_2 = 3(\cos 300° + j\sin 300°)$,

és algebrai alakban:

$$z_0 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}j,\ z_1 = -3 \text{ és } z_2 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}j.$$

f) $z_0 = \sqrt{3} + j$, $z_1 = -\sqrt{3} + j$, $z_2 = -\sqrt{3} - j$ és $z_4 = \sqrt{3} - j$.

g) $z_0 \approx 1{,}47 + 0{,}34\,j$, $z_1 \approx 0{,}13 + 1{,}50\,j$, $z_2 \approx -1{,}39 + 0{,}59\,j$, $z_3 \approx -0{,}99 - 1{,}14\,j$ és $z_4 \approx 0{,}78 - 1{,}29\,j$.

h) A negatív, törtkitevős hatvány azonossága alapján

$z = \dfrac{1}{\sqrt{(\cos(-60°) + j\sin(-60°))^5}}$. A hatványozás és a négyzetgyökvonás után, kiszámítjuk az algebrai alakot:

$$z_0 = \frac{1}{\cos 30° + j\sin 30°} = \cos 330° + j\sin 330° = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j,$$

$$z_1 = \frac{1}{\cos 210° + j\sin 210°} = \cos 150° + j\sin 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j.$$

1.3.4.

a) A szorzat abszolút értéke a tényezők abszolút értékeinek szorzata, irányszöge pedig a tényezők irányszögeinek összege:

$$z = 2\sqrt{2}\,e^{j\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

algebrai alakban: $z = -2 + 2\,j$.

b) $z = \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\,j$.

c) $z = 3^4\, e^{-j\frac{4\pi}{3}+j2\pi} = 81\left(\cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{81}{2} + \frac{81\sqrt{3}}{2}\,j$.

d) $z \approx -0{,}87 - 2{,}69\,j$.

e) A gyökvonást exponenciális alakban ugyanúgy kell elvégezni, mint trigonometrikus alakban.

$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\,j$, $z_1 = -\sqrt{2}$ és $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\,j$.

f) $z_0 = 3\,j$, $z_1 = -3$, $z_2 = -3\,j$ és $z_3 = 3$.

1.4. Vegyes feladatok

1.4.1.

a) A nevezőben elvégezzük a kivonást és algebrai alakban a szorzást:

$z = \frac{6\sqrt{3} + 6\,j}{2\,j^2} = -3\sqrt{3} - 3\,j$, mivel a nevező képzetes része nulla. A hányados abszolút értéke és irányszöge:

$|z| = \sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2} = 6$ és $\varphi = \pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{-3}{-3\sqrt{3}} = \frac{7\pi}{6}$.

A hányados trigonometrikus alakban: $z = 6(\cos 210° + j\sin 210°)$.

b) A nevező konjugáltjával bővítjük a törtet, és a számlálóban (-2)-t kiemelünk, így a tört algebrai alakban:

$z = \frac{-2(1-j)^3}{(1+j)(1-j)} = \frac{-2\left(1-3\,j+3\,j^2-j^3\right)}{2} = -(1-3\,j-3+j) = 2+2\,j$.

A hányados abszolút értéke és irányszöge: $|z| = 2\sqrt{2}$ és $\varphi = 45°$.

A hányados trigonometrikus alakban: $z = 2\sqrt{2}\,(\cos 45° + j\sin 45°)$.

c) $z=-1$ és $z=\cos 180°+\mathrm{j}\sin 180°$.

d) $z=-8$ és $z=8(\cos 180°+\mathrm{j}\sin 180°)$.

e) $z=\dfrac{1}{324}\approx 3{,}1\cdot 10^{-3}$ és $z=\dfrac{1}{324}(\cos 0°+\mathrm{j}\sin 0°)$.

f) $z=2+\sqrt{3}$ és $z=\left(2+\sqrt{3}\right)(\cos 0°+\mathrm{j}\sin 0°)$.

g) A képzetes egység hatványozásának ciklikussága miatt,
$z=\dfrac{\mathrm{j}+1-\mathrm{j}-1+\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}-1+\mathrm{j}+1}=\mathrm{j}$ és $z=\cos 90°+\mathrm{j}\sin 90°$.

h) $z=-3-2\,\mathrm{j}$ és $z\approx 3{,}61(\cos 213{,}69°+\mathrm{j}\sin 213{,}69°)$.

i) $z\approx 1{,}59-1{,}42\,\mathrm{j}$ és $z\approx 2{,}13(\cos 318{,}26°+\mathrm{j}\sin 318{,}26°)$.

1.4.2.

a) A gyökjel alatti komplex számot felírjuk trigonometrikus alakban:
$\omega_k=\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{27}\,(\cos(60°+k\cdot 120°)+\mathrm{j}\sin(60°+k\cdot 120°))$, ahol $k=0;1;2$. A gyökök trigonometrikus alakban:
$\omega_0=3(\cos 60°+\mathrm{j}\sin 60°)$, $\omega_1=3(\cos 180°+\mathrm{j}\sin 180°)$ és
$\omega_2=3(\cos 300°+\mathrm{j}\sin 300°)$; algebrai alakban pedig
$\omega_0=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}$, $\omega_1=-3$ és $\omega_2=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}$.

b) $\omega_k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\cos(30°+k\cdot 120°)+\mathrm{j}\sin(30°+k\cdot 120°))$, $(k=0;1;2)$,
$\omega_0=\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{j}$, $\omega_1=-\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{j}$ és $\omega_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}$.

c) $\omega_k=\sqrt{5{,}47}\cdot 10^{-1}(\cos(90°+k\cdot 180°)+\mathrm{j}\sin(90°+k\cdot 180°))$,
$(k=0;1)$, $\omega_0\approx 2{,}34\,\mathrm{j}$ és $\omega_1\approx -2{,}34\,\mathrm{j}$.

d) $\omega_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\,\mathrm{j}$, $\omega_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{j}$, $\omega_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,\mathrm{j}$ és $\omega_3 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{j}$.

e) $\omega_0 = 4\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j}$, $\omega_1 = -8\sqrt[3]{2}$ és $\omega_2 = 4\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j}$.

f) $\omega_0 \approx 1{,}89 + 1{,}45\,\mathrm{j}$, $\omega_1 \approx -1{,}45 + 1{,}89\,\mathrm{j}$, $\omega_2 \approx -1{,}89 - 1{,}45\,\mathrm{j}$ és $\omega_3 \approx 1{,}45 - 1{,}89\,\mathrm{j}$.

g) $\omega_0 \approx -2{,}83 + 1{,}41\,\mathrm{j}$ és $\omega_1 \approx 2{,}83 - 1{,}41\,\mathrm{j}$.

(Megjegyezzük, hogy a gyökök pontos értéke is meghatározható. Mivel a gyök alatt álló komplex szám valós része pozitív, képzetes része pedig negatív, ezért irányszöge $\varphi = 270° + \alpha$. Ezért egyik gyökének irányszöge $\varphi_0 = 135° + \frac{\alpha}{2}$, a gyökök abszolút értéke pedig $\sqrt{10}$. Ezen gyök valós része

$$\mathrm{Re}\,\omega_0 = \sqrt{10}\cos\left(135° + \frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{10}\sqrt{\cos^2\left(135° + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Alkalmazva a megfelelő linearizáló és az összegzési azonosságot, $\cos^2\left(135° + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos(270° + \alpha)}{2} = \frac{1 + \sin\alpha}{2}$, továbbá mivel α hegyesszög, ezért $\sin\alpha = \frac{|\mathrm{Re}(6 - 8\,\mathrm{j})|}{|6 - 8\,\mathrm{j}|} = \frac{6}{10}$. Behelyettesítve:

$$\mathrm{Re}\,\omega_0 = -\sqrt{10}\sqrt{\frac{1 + \frac{6}{10}}{2}} = -2\sqrt{2},\ \text{és}$$

$$\mathrm{Im}\,\omega_0 = \sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}\ \text{adódik.)}$$

h) $\omega_0 \approx 0{,}59 + 0{,}81\,\mathrm{j}$, $\omega_1 \approx -0{,}59 + 0{,}81\,\mathrm{j}$, $\omega_2 \approx -0{,}95 - 0{,}31\,\mathrm{j}$, $\omega_3 = -\mathrm{j}$ és $\omega_4 \approx 0{,}95 - 0{,}31\,\mathrm{j}$.

1.4.3.

a) Az exponenciális és a trigonometrikus megadott komplex számokat átváltjuk algebrai alakra: $z_1 = 2(\cos 300° + j\sin 300°) = 1 - \sqrt{3}\,j$, $\overline{z}_1 = 1 + \sqrt{3}\,j$ és $z_2 = 2\sqrt{3}\,j$. Behelyettesítünk és elvégezzük a kijelölt műveleteket: $z = \dfrac{\left(1 - \sqrt{3}\,j\right) + 2\sqrt{3}\,j}{1 + \sqrt{3}\,j}(-j) = \dfrac{1 + \sqrt{3}\,j}{1 + \sqrt{3}\,j}(-j) = -j$. A kapott komplex szám abszolút értéke 1, irányszöge pedig 270°. Trigonometrikus alakban, tehát
$z = \cos 270° + j\sin 270°$.

b) Algebrai alakra való áttérés után $z = \dfrac{\left(1 - \sqrt{3}\,j\right) + 2\sqrt{3}\,j}{1 + \sqrt{3}\,j}\,j = j$. Trigonometrikus alakban: $z = \cos 90° + j\sin 90°$.

c) Mivel komplex számok reciprokát, összegét és konjugáltját kell képezni, ezért célszerű a z_1 komplex számot is algebrai alakban felírni.
$z = -4$ és $z = 4(\cos 180° + j\sin 180°)$.

d) $z = 4$ és $z = 4(\cos 0° + j\sin 0°)$.

e) $z = -\dfrac{3}{8}j$ és $z = \dfrac{3}{8}(\cos 270° + j\sin 270°)$.

f) $z = \dfrac{6}{5}j$ és $z = \dfrac{6}{5}(\cos 90° + j\sin 90°)$.

g) $z = -j$ és $z = \cos 270° + j\sin 270°$.

h) $z \approx -1{,}61 + 0{,}38\,j$ és $z \approx 1{,}65(\cos 166{,}66° + j\sin 166{,}66°)$.

1.4.4.

a) Az exponenciális és a trigonometrikus alakban megadott komplex számokat átváltjuk algebrai alakra:

$z_1 = 2(\cos 180° + j\sin 180°) = -2$, $z_2 = 4j$ és $\bar{z}_3 = 4 - 4j$.

Behelyettesítünk, elvégezzük a kijelölt műveleteket és áttérünk trigonometrikus alakra:

$z = \sqrt[3]{-2(4j + (4 - 4j)} = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8(\cos 180° + j\sin 180°)}$.

A gyökvonás eredményei trigonometrikus alakban:

$\omega_k = 2(\cos(60° + k \cdot 120°) + j\sin(60° + k \cdot 120°)), (k = 0;1;2)$,

és algebrai alakban:

$\omega_0 = 1 + \sqrt{3}\,j$, $\omega_1 = -2$ és $\omega_2 = 1 - \sqrt{3}\,j$.

b) Algebrai alakban behelyettesítünk, elvégezzük a kijelölt műveleteket és áttérünk trigonometrikus alakra:

$$z = \sqrt[4]{\frac{2\sqrt{2}\,j + \left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,j\right)}{-\frac{\sqrt{2}}{8}}} = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16(\cos 180° + j\sin 180°)}.$$

A gyökvonás eredményei trigonometrikus alakban:

$\omega_k = 2(\cos(45° + k \cdot 90°) + j\sin(45° + k \cdot 90°)), (k = 0;1;2;3)$,

és algebrai alakban:

$\omega_0 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,j$, $\omega_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,j$, $\omega_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,j$ és

$\omega_3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,j$.

c) $\omega_k = 2(\cos(45° + k \cdot 90°) + j\sin(45° + k \cdot 90°)), (k = 0;1;2;3)$,

$\omega_0 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,j$, $\omega_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,j$, $\omega_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,j$ és

$\omega_3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,j$.

d) $\omega_k = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos(90° + k \cdot 120°) + j\sin(90° + k \cdot 120°)), (k = 0;1;2)$,

$\omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}j$, $\omega_1 = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}j$ és $\omega_2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}j$.

e) $\omega_k = \cos(30° + k \cdot 120°) + j\sin(30° + k \cdot 120°)$, $(k = 0;1;2)$,

$\omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j$, $\omega_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j$ és $\omega_2 = -j$.

f) $\omega_0 \approx 1{,}35(\cos 2{,}86° + j\sin 2{,}86°) \approx 1{,}34 + 0{,}07\,j$,

$\omega_1 \approx 0{,}66(\cos 264{,}15° + j\sin 264{,}15°) \approx 0{,}07 - 0{,}65\,j$,

$\omega_2 \approx 2{,}17(\cos 287{,}59° + j\sin 287{,}59°) \approx 0{,}65 - 2{,}07\,j$,

$\omega_3 \approx 2{,}47(\cos 326{,}96° + j\sin 326{,}96°) \approx 2{,}07 - 1{,}34\,j$.

1.4.5.

a) Az ismeretlent kifejezzük az egyenletből és a gyök alatt álló komplex számot trigonometrikus alakban írjuk fel:

$z = \sqrt[4]{1 + \sqrt{3}\,j} = \sqrt[4]{2(\cos 60° + j\sin 60°)}$.

A gyökvonást a komplex szám trigonometrikus alakjában végezzük el, majd áttérünk az algebrai alakra:

$\omega_k = \sqrt[4]{2}(\cos(15° + k \cdot 90°) + j\sin(15° + k \cdot 90°))$, $(k = 0;1;2;3)$,

$\omega_0 \approx 1{,}15 + 0{,}31\,j$, $\omega_1 \approx -0{,}31 + 1{,}15\,j$, $\omega_2 \approx -1{,}15 - 0{,}31\,j$ és

$\omega_3 \approx 0{,}31 - 1{,}15\,j$.

b) Áttérünk a trigonometrikus alakokra:

$9\sqrt{2} = 9\sqrt{2}(\cos 0° + j\sin 0°)$, $3 + 3\,j = 3\sqrt{2}(\cos 45° + j\sin 45°)$ és

$e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos 270° + j\sin 270°$.

A komplex számok trigonometrikus alakját helyettesítjük be, és kifejezzük az ismeretlent:

$$z = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{2}(\cos 0° + j\sin 0°)}{3\sqrt{2}(\cos 45° + j\sin 45°)(\cos 270° + j\sin 270°)}} =$$

$$= \sqrt[3]{3(\cos(-315°) + j\sin(-315°))} = \sqrt[3]{3(\cos 45° + j\sin 45°)}.$$

A gyökvonást a komplex szám trigonometrikus alakjában végezzük el, majd áttérünk az algebrai alakra:

$\omega_k = \sqrt[3]{3}(\cos(15° + k \cdot 120°) + j\sin(15° + k \cdot 120°))$, $(k = 0;1;2)$,

$\omega_0 \approx 1{,}39 + 0{,}37\,j$, $\omega_1 \approx -1{,}02 + 1{,}02\,j$ és $\omega_3 \approx -0{,}37 - 1{,}39\,j$.

c) $\omega_0 = 1+\sqrt{3}\,\mathrm{j}$, $\omega_1 \approx -1{,}34+1{,}49\,\mathrm{j}$, $\omega_2 \approx 1{,}83-0{,}81\,\mathrm{j}$, $\omega_3 \approx 0{,}21-1{,}99\,\mathrm{j}$ és $\omega_4 \approx 1{,}96-0{,}42\,\mathrm{j}$.

(Megjegyezzük, hogy valamennyi gyököt van mód pontosan felírni, mivel ismert, hogy $\sin 72° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ és $\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, s így a szögfüggvények összegzési tételei segítségével pontosan megadhatók a $\varphi_k = 60° + k\cdot 72°$, (ahol $k = 1;2;3;4$) alakú szögek szögfüggvényei.)

d) $\omega_0 \approx 1{,}15+0{,}31\,\mathrm{j}$, $\omega_1 \approx -0{,}31+1{,}15\,\mathrm{j}$, $\omega_2 \approx -1{,}15-0{,}31\,\mathrm{j}$ és $\omega_3 \approx 0{,}31-1{,}15\,\mathrm{j}$.

1.4.6.

a) A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva, a két gyök a $z_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4-16}}{2} = 1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{j}$ alakú, konjugált komplex számpár.

Abszolút értékük: $|z_1| = |z_2| = 2$, irányszögük pedig $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ és $\varphi_2 = \frac{5\pi}{3}$.

Exponenciális alakjuk: $z_1 = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}$ és $z_2 = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{5\pi}{3}}$.

b) $z_1 = 5\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}$ és $z_2 = 5\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{5\pi}{3}}$.

c) Az $u = z^2$ helyettesítéssel vezessük vissza másodfokú egyenletre. A megoldásként kapott komplex számokból négyzetgyököt vonunk, és megkapjuk a megadott egyenlet megoldásait:

$z_1 = \sqrt{6}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = \sqrt{6}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{4\pi}{3}}$, $z_3 = \sqrt{6}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}}$ és $z_4 = \sqrt{6}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{5\pi}{3}}$.

d) $z_1 = 0$, $z_2 = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$ és $z_3 = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3\pi}{2}}$.

1.4.7.

a) A törtet a nevező konjugáltjával bővítve,

$$\mathrm{Re}\,z_0 = \frac{R}{R^2 + X_C^2} \text{ és } \mathrm{Im}\,z_0 = \frac{X_C}{R^2 + X_C^2}.$$

b) A jobboldalt közös nevezőre hozva, és mindkét oldal reciprokát véve,

$z_0 = \dfrac{jRX_L}{R + jX_L}$. A nevező konjugáltjával való bővítés után,

$$\mathrm{Re}\,z_0 = \frac{RX_L^2}{R^2 + X_L^2} \text{ és } \mathrm{Im}\,z_0 = \frac{R^2 X_L}{R^2 + X_L^2}.$$

c) $\mathrm{Re}\,z_0 = \dfrac{R(X_C X_L)^2}{(X_C X_L)^2 + R^2(X_L - X_C)^2}$ és

$$\mathrm{Im}\,z_0 = -\frac{R^2 X_C X_L (X_C - X_L)}{(X_C X_L)^2 + R^2(X_L - X_C)^2}.$$

d) $\mathrm{Re}\,z_0 = \dfrac{RX_L^2}{R^2 + X_L^2}$ és $\mathrm{Im}\,z_0 = \dfrac{R^2 X_L}{R^2 + X_L^2} - X_C$.

1.4.8. Az $\mathrm{Im}\,z_0 = X_L - \dfrac{R^2 X_C}{R^2 + X_C^2} = 0$, ha $X_L = \dfrac{R^2 X_C}{R^2 + X_C^2}$. Ezt átrendezve adódik, hogy $R = \dfrac{X_C}{\sqrt{\dfrac{X_C}{X_L} - 1}}$. Mivel R, X_C és X_L mindegyike csak pozitív valós szám lehet, ezért a feladatbeli feltétel csak $X_L < X_C$ esetén teljesülhet.

2. LINEÁRIS ALGEBRA

2.1. Mátrixok

2.1.1.

a) **a*** 1·5 típusú, **B** 3·3 típusú, **D** 3·4 típusú,
$d_{12} = -1, \quad d_{23} = -4, \quad d_{32} = 3.$

b) sorvektor: **a***, **b***;
egységvektor: **b***;
négyzetes mátrixok: **A**, **B**, **C**, **E**;
zérusmátrix: **C**;
diagonál mátrix: **B**, **C**, **E**;
egységmátrix: **E**.

c) $(\mathbf{b}^*)^* = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

2.1.2.

a) **A** és **B** típusa megegyezik, ezért **A** = **B**, ha megfelelő indexű elemeik egyenlők, tehát, ha $a = \ln\sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, $b = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $c = \log_3 1 = 0$.

b) $a = -2, \quad b = 3, \quad c = -1, \quad d = \frac{\pi}{4}$.

c) $a = 4, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad d = 1, \quad f = \frac{\pi}{2}$.

2.1.3.

a) $\mathbf{A}-3\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 5 & -7 & 3 \\ -3 & 8 & -2 \end{bmatrix}$.

b) A kijelölt műveletek elvégezhetők, mert a mátrixok azonos típusúak. A **C** mátrixban szereplő komplex számokat felírjuk algebrai alakban és kiszámítjuk a mátrixban levő kifejezések értékét:

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 2\mathrm{j} & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}-\mathbf{B}+2\mathbf{C}$ mátrix elemeit úgy kapjuk meg, hogy **A** eleméből kivonjuk **B** megfelelő indexű elemét és ehhez hozzáadjuk **C** megfelelő indexű elemének kétszeresét!

Így

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 3+4\mathrm{j} & -1 & 7 \\ -5 & 6 & -6 \end{bmatrix}.$$

2.1.4.

a) 0. **b)** 8.

2.1.5.

a) $\mathbf{AE}=\mathbf{A}$. **b)** $\mathbf{B0}=\mathbf{0}$.

c) A 3·3 típusú **A** és a 3·4 típusú **B** mátrixok szorzata 3·4 típusú lesz.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & \mathbf{2} & -1 \\ & 5 & 2 & \mathbf{0} & 1 \\ & 3 & -1 & \mathbf{4} & 2 \end{array} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}=\begin{array}{c|ccc} 1 & -2 & 3 \\ \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 0 & -7 & 14 & 3 \\ 26 & 8 & \mathbf{12} & -2 \\ 0 & -3 & 8 & -1 \end{array} = \mathbf{AB}$$

Például az **AB** mátrix második sorának harmadik elemét úgy kaptuk meg, hogy az **A** mátrix második sorát, mint sorvektort, skalári-

san megszoroztuk a **B** mátrix harmadik oszlopával, mint oszlopvektorral. A műveletben részt vevő értékeket félkövéren írt számokkal emeltük ki.
Tehát $6\cdot 2 + 4\cdot 0 + 0\cdot 4 = 12$.

2.1.6.

a) $\begin{bmatrix} -5 & 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

b) Ennél a feladatnál nem kell a táblázatos formát használni, hiszen az eredmény egy oszlopvektor lesz. Négy elemét megkapjuk, ha az **A** mátrix minden sorát, mint sorvektort skalárisan megszorozzuk az **a** oszlopvektorral. Így például az **Aa** első eleme
$0\cdot 2 + 1\cdot(-3) + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 1 = -2$ lesz.

$$\mathbf{Aa} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

c) $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 13 & -1 \\ 6 & 4 \\ -1 & 4 \\ 11 & -1 \end{bmatrix}$.

d) A 2·4 típusú **D** mátrix és a 4·2 típusú **B** mátrix **DB** szorzata 2·2 típusú mátrix lesz.

$$\begin{array}{|cccc|c|} \hline & & & & \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{matrix} \\ \hline \mathbf{D} = \begin{matrix} 5 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 5 \end{matrix} & & & & \begin{matrix} 4 & 13 \\ 39 & 14 \end{matrix} \\ \hline \end{array} \begin{matrix} \\ = \mathbf{B} \\ \\ = \mathbf{DB} \end{matrix}$$

e) $\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

2.1.7.

a) $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 13 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -7 \\ 6 & 4 & 8 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

b) $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$.

c) $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -24 & 21 \\ 16 & 14 & 10 & -15 \\ 3 & 10 & 11 & 0 \\ 7 & -8 & -7 & -15 \end{bmatrix}$, $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 12 & -1 & -12 \\ 19 & -11 & 17 \\ -7 & 26 & 7 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

2.1.8.

a) $\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{AA}^* = \begin{bmatrix} 30 & -7 & 3 \\ -7 & 26 & 34 \\ 3 & 34 & 53 \end{bmatrix}$.

Elemei a főátlóra szimmetrikusak (szimmetrikus mátrix).

b) $\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{AA}^* = \begin{bmatrix} 14 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 43 \end{bmatrix}$.

Elemei a főátlóra szimmetrikusak (szimmetrikus mátrix).

2.1.9.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & 8 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 8 \\ -1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{matrix} \\ \hline \end{array} \quad \begin{matrix} = \mathbf{P} \\ \\ = \mathbf{AP} \end{matrix}$$

$$\mathbf{A} = \qquad \mathbf{P} =$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \begin{matrix} 1 & 8 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 8 & 0 \end{matrix} \\ \hline \end{array} \quad \begin{matrix} = \mathbf{A} \\ \\ = \mathbf{PA} \end{matrix}$$

Megfigyelhető, hogy **AP**-ben **A** oszlopai szerepelnek, de más sorrendben, míg **PA**-ban **A** sorai szerepelnek, más sorrendben.
A cserét a **P** mátrix 1-gyel egyenlő elemeinek (p_{12}, p_{23}, p_{31}) indexei alapján állapíthatjuk meg.
AP-nél az első index **A** oszlopát, a második index ezen oszlop **AP**-beli helyét jelöli ki.
Tehát
$p_{12} = 1$, ezért **A** első oszlopa **AP** második oszlopa lett,
$p_{23} = 1$, ezért **A** második oszlopa **AP** harmadik oszlopa lett,
$p_{31} = 1$, ezért **A** harmadik oszlopa **AP** első oszlopa lett.
PA-nál a második index **A** sorát, az első index ezen sor **PA**-beli helyét jelöli ki.
Tehát
$p_{12} = 1$, ezért **A** második sora **PA** első sora lett,
$p_{23} = 1$, ezért **A** harmadik sora **PA** második sora lett,
$p_{31} = 1$, ezért **A** első sora **PA** harmadik sora lett.

2.2. Determinánsok

2.2.1.

a) $D = 22$. **b)** $D = j\cdot(-j) - 2(1+j) = -j^2 - 2 - 2j = -1 - 2j$.

c) $D = 0$, mert a harmadik oszlop az első oszlop (–3)-szorosa.

d) Mivel a főátló felett és alatt minden elem nulla, ezért a determináns értéke a főátlóbeli elemek szorzatával egyenlő.
$D = 2\cdot(-3)\cdot 5 = -30$.

e) Megpróbálunk valamelyik sorban vagy oszlopban két elem helyén nullát előállítani, például a 3. oszlopban.
Adjuk hozzá a második sor 2-szeresét az első és harmadik sorhoz, így a harmadik oszlopban két nulla elem lesz, majd a kapott determinánst kifejtjük a 3. oszlop szerint. A kifejtésnél azon aldeterminánsokat, amelyek 0 elemhez tartoznak nem írjuk le, mert 0-val való szorzatuk úgyis nulla lesz. A (–1)-hez tartozó aldeterminánst (–1)-gyel kell szoroznunk a „sakktábla-szabály" szerint.

$$D = \begin{vmatrix} -17 & 9 & 0 \\ -10 & 5 & -1 \\ -17 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 9 \\ -17 & 6 \end{vmatrix} = -17\cdot 6 + 17\cdot 9 = 3\cdot 17 = 51.$$

f) A determinánst kifejtjük a második oszlopa szerint, a nulla elemhez tartozó aldeterminánst nem írjuk le, mert 0-val való szorzata úgyis nulla lesz.

$$D = -\begin{vmatrix} j & 1-j \\ 1-j & 1 \end{vmatrix} + j\begin{vmatrix} 1+j & j \\ j & 1-j \end{vmatrix} = -(j-(1-j)(1-j)) +$$
$$+ j((1+j)(1-j) - j^2) = 0.$$

g) A komplex számokat felírjuk algebrai alakban és a j hatványokat kiszámítjuk, majd a kapott determinánst kifejtjük például az első oszlop szerint.

$$D=\begin{vmatrix}-1 & j & -j\\ 1 & 2 & j\\ -2 & 1+j & -1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & j\\ 1+j & -1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}j & -j\\ 1+j & -1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}j & -j\\ 2 & j\end{vmatrix}=$$

$$=-(-2-j(1+j))-(-j+j(1+j))-2(j^2+2j)=4-3j.$$

h) $D=0$. **i)** $D=-48$.

2.2.2.

a) Vonjuk ki a második sorból az első sort, majd fejtsük ki a kapott determinánst a második sora szerint!

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1-x^2 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=x^2-1=0.$$

Tehát $x = 1$ és $x = -1$ esetén lesz a determináns értéke 0.

b) $x = 1$, $x = -2$.

c) Adjuk hozzá az első oszlophoz a harmadik oszlopot, és fejtsük ki a kapott determinánst az első oszlopa szerint!

$$D=\begin{vmatrix}0 & -j & -1\\ 0 & x & -1\\ 1-2j & 1 & -j\end{vmatrix}=2+j+x(1-2j)=0.$$

Fejezzük ki x-et!

$$x=\frac{-2-j}{1-2j}.$$

Az osztás elvégzése után $x = -j$.

2.2.3. Vonjuk ki az első és a második sorból a harmadik sort és fejtsük ki a determinánst a harmadik oszlop szerint. Ezután könnyen belátható az állítás.

2.3. Lineáris egyenletrendszerek

A determináns soraival, illetve oszlopaival elvégzendő műveleteket az egyenlőségjel felett adjuk meg rövidített formában. Az első tag jelöli ki azt a sort, illetve oszlopot, amelyhez hozzáadjuk a második tagban megjelölt sor, illetve oszlop számszorosát.
Például: 1.o+3·3.o jelentése: az első oszlophoz hozzáadjuk a harmadik oszlop 3-szorosát.
A sor rövidített jelölésére az s betűt használjuk.

2.3.1.

a) Felhasználjuk, hogy $x_k = \frac{D_k}{D}$, ha $D \neq 0$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 1 & 6 & -10 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{1.o+3\cdot 3.o \\ 2.o+2\cdot 3.o}}{=} \begin{vmatrix} -20 & -10 & -7 \\ -29 & -14 & -10 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{kifejtünk a} \\ \text{3.o szerint}}}{=} -\begin{vmatrix} -20 & -10 \\ -29 & -14 \end{vmatrix} =$$

$$= -(280 - 290) = 10,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -7 & 4 & -7 \\ -8 & 6 & -10 \\ 9 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{1.o+9\cdot 3.o \\ 2.o+2\cdot 3.o}}{=} \begin{vmatrix} -70 & -10 & -7 \\ -98 & -14 & -10 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{kifejtünk a} \\ \text{3.s szerint}}}{=} -\begin{vmatrix} -70 & -10 \\ -98 & -14 \end{vmatrix} =$$

$$= 980 - 980 = 0, \qquad x_1 = \frac{D_1}{D} = 0.$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -7 & -7 \\ 1 & -8 & -10 \\ 3 & 9 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{2.s-1.s \\ 3.s-3\cdot 1.s}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -7 & -7 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 30 & 20 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{kifejtünk az} \\ \text{1. szerint}}}{=} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 30 & 20 \end{vmatrix} =$$

$$= -20 + 90 = 70, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{70}{10} = 7.$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 1 & 6 & -8 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} \overset{\substack{2.s-1.s \\ 3.s-3\cdot 1.s}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -10 & 30 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{kifejtünk az} \\ \text{1. o szerint}}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -10 & 30 \end{vmatrix} =$$

$$= 60 - 10 = 50, \qquad x_3 = \frac{50}{10} = 5.$$

b) $x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = -2$.

c) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{1}{4}$.

d) $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

e) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

f) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -1$.

g) $D = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 39, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -78,$

$x_1 = \frac{D_1}{D} = -2$, mivel ez nem természetes szám, az egyenletrendszernek nincs megoldása a természetes számok halmazán.

h) $D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 & 4 \\ 30 & 5 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ 10 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 10.$

Mivel D = 0 és van nullától különböző módosított determináns ($D_1 \neq 0$), ezért az egyenletrendszernek nincs megoldása.

2.3.2.

a) $x_4 = \dfrac{D_4}{D} \quad D \neq 0\,.$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & -6 \\ -1 & -1 & -5 & -7 \end{vmatrix} \overset{\substack{1.o-4.o \\ 2.o-4.o \\ 3.o-4.o}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \\ 4 & 9 & 12 & -6 \\ 6 & 6 & 2 & -7 \end{vmatrix} \overset{\text{kifejtünk az 1. s szerint}}{=}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & 9 & 12 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{2.\,s+6\cdot 1.\,s \\ 3.\,s+1.\,s}}{=} -\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 16 & -9 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{kifejtünk a 3. o szerint}}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} 16 & -9 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(48 + 72) = 240,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 0 \end{vmatrix} \overset{3.\,s-2.\,s}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \\ -4 & 6 & 8 & 0 \\ -1 & -1 & -5 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{kifejtünk a 4. o szerint}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 6 & 8 \\ -1 & -1 & -5 \end{vmatrix} \overset{\substack{1.\,o-3.\,o \\ 2.\,o-3.\,o}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -12 & -2 & 8 \\ 4 & 4 & -5 \end{vmatrix} \overset{\text{kifejtünk az 1. s szerint}}{=} \begin{vmatrix} -12 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -48 + 8 = -40, \qquad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{-40}{240} = -\frac{1}{6}\,.$$

b) $x_1 = -2$. **c)** $x_3 = 3$. **d)** $x_2 = -4$.

2.3.3.

a) $D = \begin{vmatrix} -2j & 2-j \\ 1+j & -5 \end{vmatrix} = 10j - (2-j)(1+j) = 10j - (2+1+j(2-1)) =$

$= -3 + 9j,$

$D_1 = \begin{vmatrix} 5-4j & 2-j \\ -11+6j & -5 \end{vmatrix} = -5(5-4j) - (2-j)(-11+6j) =$

$= -25 + 20j - (-22 + 6 + j(12+11)) = -9 - 3j,$

egyszerűsítünk 3-mal
és bővítünk a nevező
konjugáltjával

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-9-3j}{-3+9j} = \frac{-3-j}{-1+3j} \cdot \frac{-1-3j}{-1-3j} =$$

$$= \frac{3-3+j(9+1)}{10} = \frac{10j}{10} = j.$$

$D_2 = \begin{vmatrix} -2j & 5-4j \\ 1+j & -11+6j \end{vmatrix} = -2j(-11+6j) - (5-4j)(1+j) =$

$= 12 + 22j - (5 + 4 + j(5-4)) = 3 + 21j,$

egyszerűsítünk 3-mal
és bővítünk a nevező
konjugáltjával

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{3+21j}{-3+9j} = \frac{1+7j}{-1+3j} \cdot \frac{-1-3j}{-1-3j} =$$

$$= \frac{-1+21+j(-3-7)}{10} = \frac{20-10j}{10} = 2-j.$$

b) $x_1 = 1 - j, \quad x_2 = j$.

c) $D=\begin{vmatrix} -1+j & -1 & 0 \\ 1 & 1 & j \\ -j & 1+j & 0 \end{vmatrix}=-1+2j,$

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & j \\ -3+j & 1+j & 0 \end{vmatrix}=1+3j, \qquad x_1=\frac{D_1}{D}=1-j.$$

$$D_2=\begin{vmatrix} -1+j & 0 & 0 \\ 1 & 1 & j \\ -j & -3+j & 0 \end{vmatrix}=-4-2j, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=2j.$$

$$D_3=\begin{vmatrix} -1+j & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -j & 1+j & -3+j \end{vmatrix}=1-2j, \qquad x_3=\frac{D_3}{D}=-1.$$

d) $x_1=-2+2j, \quad x_2=-1-5j, \quad x_3=3+2j.$

2.3.4.

a) $x_1=2, x_2=-1, x_3=0.$ **b)** $x_1=0, x_2=1, x_3=2, x_4=3.$

c) 1. lépés: átírjuk az egyenletrendszert táblázatos alakba.

2. lépés: x_1 kiküszöböléséhez az első sor (–1)-szeresét a második sorhoz, (–3)-szorosát a harmadik sorhoz, (–2)-szeresét a negyedik sorhoz adjuk.

3. lépés: x_2 kiküszöböléséhez a második sor 4-szeresét a harmadik sorhoz, (–1)-szeresét a negyedik sorhoz adjuk.

4. lépés: a harmadik és negyedik sort elosztjuk (–3)-mal.

5. lépés: x_3 kiküszöböléséhez a harmadik sor (–2)-szeresét a negyedik sorhoz adjuk.

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \end{array}\right\| \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \end{array}\right\|$$

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & -27 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -3 \end{array}\right\| \quad \left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right\| \quad \left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right\|$$

6. **lépés**: felírjuk a redukált egyenletrendszert az utolsó táblázat alapján:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ x_2 + x_3 - 4x_4 &= -5, \\ x_3 + 9x_4 &= 9, \\ -17x_4 &= -17. \end{aligned}$$

7. **lépés**: az utolsó egyenletből kifejezzük x_4-et majd visszafelé haladva, behelyettesítéssel rendre megkapjuk a többi ismeretlen értékét.

$$\begin{aligned} x_4 &= 1, \\ x_3 + 9 &= 9, \quad \text{tehát} \quad x_3 = 0. \\ x_2 - 4 &= -5, \quad \text{tehát} \quad x_2 = -1. \\ x_1 - 1 + 3 &= 1, \quad \text{tehát} \quad x_1 = -1. \end{aligned}$$

d) $x_1 = 3, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 1.$

e) x_1 kiküszöbölése után az alábbi táblázatot kapjuk:

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 9 & -32 \\ 0 & 15 & -15 & 63 \\ 0 & 10 & -10 & 44 \end{array}\right\|$$

A második és harmadik sornak megfelelő egyenletek ellentmondóak, ezért nincs megoldás.

f) Nincs megoldás.

g) 1. lépés: felírjuk az egyenletrendszernek megfelelő táblázatot.

2. **lépés**: az első sor (–1)-szeresét, hozzáadjuk a harmadik és negyedik sorhoz.

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right\|$$

3. lépés: észrevehető, hogy a második és harmadik sor megegyezik, a negyedik sornak megfelelő egyenlet ezekkel ellentmondó, hiszen a negyedik sorban az ismeretlenek együtthatói a második, illetve a harmadik sorban levők kétszerese, míg ez nem teljesül a választóvonal mögötti konstansra, ezért az egyenletrendszernek nincs megoldása.

h) Nincs megoldás.

i) 1. lépés: átírjuk az egyenletrendszert táblázatos alakba.

2. lépés: célszerű először x_2-t kiküszöbölni, ehhez az első sor (–8)-szorosát a második sorhoz, 2-szeresét a harmadik sorhoz, az első sort a negyedik sorhoz adjuk.

3. lépés: a harmadik és negyedik sor megegyezik, a második sor pedig ezek (–2)-szerese, ezért kettő közülük elhagyható, hiszen a nekik megfelelő egyenletek ekvivalensek. Hagyjuk el például a második és harmadik sort!

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -8 & 22 & -8 & -14 \\ 3 & 2 & -5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & -2 & 7 & 7 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -8 & 22 & -8 & -14 \\ 5 & 1 & -2 & 7 & 7 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 8 & 8 \end{array}\right\|$$

4. lépés: felírjuk a redukált egyenletrendszert:

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1,$$
$$7x_1 + x_3 = 8.$$

5. lépés: végtelen sok megoldás van, egy ismeretlen paraméternek választható, hiszen három ismeretlen, de csak két egyenlet van. Válasszuk például x_1-et paraméternek!

6. lépés: kifejezzük az x_2, x_3 ismeretleneket az x_1 paraméterrel:

$$x_3 = 8 - 7x_1,$$
$$x_2 = -1 + 2x_1 + 3x_3 = -1 + 2x_1 + 24 - 21x_1 = 23 - 19x_1 .$$

A megoldás: $x_2 = 23 - 19x_1$, $x_3 = 8 - 7x_1$.

j) $x_1 = 3 - x_2 - 4x_4$, $x_3 = -1 + x_2 + 3x_4$.

k) Az x_1 és x_2 ismeretlenek kiküszöbölése után az alábbi táblázatot kapjuk, ahol az utolsó sor elhagyható.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Redukált egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2, \\ -x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Végtelen sok megoldás van, egy ismeretlen paraméternek választható, például x_4.

A megoldás: $x_1 = 9$, $x_2 = 6 + x_4$, $x_3 = -2$.

l) $x_1 = 3 + x_4 + x_5$, $x_2 = 2 - x_4 - x_5$, $x_3 = 4 - 2x_5$.

m) $x_1 = \frac{11}{2}x_2 - 4x_4 - \frac{1}{2}$, $x_3 = 4x_2 - 3x_4$.

n) $x_1 = 6 - x_3$, $x_2 = -2 + x_4$.

o) Az x_1 ismeretlen kiküszöbölése után az alábbi táblázatot kapjuk, amelyből a második és harmadik sor elhagyható.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & 4 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -2 & -7 & -2 & -11 \end{array}\right)$$

Redukált egyenletrendszer

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 7, \\ 2x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 11. \end{aligned}$$

Végtelen sok megoldás van, két ismeretlen paraméternek választható, például x_3, x_4.

Megoldás: $x_1 = 4 - 3x_3$, $x_2 = \frac{11}{2} - \frac{7}{2}x_3 - x_4$.

Konkrét megoldás például: $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{11}{2}$.

p) $x_1 = 9 - 2x_4$, $x_2 = -18 + 5x_4$, $x_3 = -13 + 4x_4$.

Konkrét megoldások például: $x_4 = 0$, $x_1 = 9$, $x_2 = -18$, $x_3 = -13$.

$x_4 = 4$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

2.3.5. 1. lépés: felírjuk az egyenletrendszernek megfelelő táblázatot.

2. lépés: x_1 kiküszöböléséhez az első sor (–2)-szeresét a második sorhoz, 3-szorosát a harmadik sorhoz adjuk.

3. lépés: x_2 kiküszöböléséhez a második sort a harmadik sorhoz adjuk.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & -2 & 4 \\ -3 & -5 & 4 & 1 & c \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 6+c \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6+c \end{array}$$

4. lépés: az egyenletrendszer akkor oldható meg, ha 6 + c = 0, azaz c = –6.

5. lépés: a második sort végigszorozzuk (–1)-gyel és felírjuk a redukált egyenletrendszert.

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2,$$
$$x_2 + x_3 + 4x_4 = 0.$$

6. lépés: végtelen sok megoldás van, két ismeretlen paraméternek választható például x_2, x_4.

7. lépés: kifejezzük x_1, x_3-at a paraméterekkel.

$$x_3 = -x_2 - 4x_4,$$
$$x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 - 2x_2 - x_2 - 4x_4 - x_4 =$$
$$= 2 - 3x_2 - 5x_4.$$

Tehát a megoldás:

$$x_1 = 2 - 3x_2 - 5x_4, \quad x_3 = -x_2 - 4x_4.$$

2.3.6.

a) 1. lépés: felcseréljük az első és második sor sorrendjét és felírjuk az egyenletrendszernek megfelelő táblázatot.

2. lépés: x_1 kiküszöböléséhez az első sor (–2)-szeresét a második sorhoz, (–3)-szorosát a harmadik sorhoz adjuk.

3. lépés: a második sort végigszorozzuk (–1)-gyel, most x_3-at célszerű kiküszöbölni, ehhez a második sort hozzáadjuk a harmadik sorhoz.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

4. lépés: felírjuk a redukált egyenletrendszert.

$$x_1 + 2x_2 = 0,$$
$$3x_2 + x_3 = 0,$$
$$-2x_2 = 0.$$

5. lépés: az utolsó egyenletből $x_2 = 0$, visszafelé haladva kiszámítjuk x_3, x_1 értékét is. Megoldás: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$. Az egyenletrendszernek csak triviális megoldása van.

b) x_1 kiküszöbölése után az alábbi táblázatot kapjuk:

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & -5 & 0 \end{array}$$

A második és harmadik sornak megfelelő egyenletek azonosak, így például a harmadik elhagyható.

A redukált egyenletrendszer:

$$x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = 0,$$
$$x_2 + 6x_3 + x_4 + 5x_5 = 0.$$

Végtelen sok megoldás van, három ismeretlen paraméternek választható, például x_3, x_4, x_5.

A megoldás: $x_1 = -8x_3 - 3x_4 - 7x_5$, $x_2 = -6x_3 - x_4 - 5x_5$.

c) $x_1 = 4x_2 - 2x_3, \quad x_4 = x_2 - x_3.$

d) $x_1 = -x_2 - 4x_4, \quad x_3 = x_2 + 3x_4.$

e) Az első és második egyenlet sorrendjét felcseréltük, x_1 és x_2 kiküszöbölése után az alábbi táblázatot kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

A harmadik és negyedik sornak megfelelő egyenletek ekvivalensek, így például a negyedik sor elhagyható.

A redukált egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ x_2 - 7x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0, \\ 10x_3 - 3x_4 - x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Végtelen sok megoldás van, két ismeretlen paraméternek választható, pl. x_3, x_4.

A megoldás: $x_1 = -8x_3 + 2x_4, \; x_2 = -3x_3 - x_4, \; x_5 = 10x_3 - 3x_4.$

f) Csak triviális megoldás van: $x_1 = 0, \; x_2 = 0, \; x_3 = 0, \; x_4 = 0.$

g) $x_1 = 2x_4 - 2x_5, \quad x_2 = -3x_4 + 3x_5, \quad x_3 = 0.$

h) $x_1 = -x_3 - 2x_5, \quad x_4 = -2x_2 + x_3.$

3. VEKTORGEOMETRIA

3.1. Alapfogalmak, alapműveletek

3.1.1.

a) $\mathbf{i}(1;\ 0;\ 0)$, $\mathbf{j}(0;\ 1;\ 0)$, $\mathbf{k}(0;\ 0;\ 1)$,
$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$.

b) $(8;\ -4;\ 1)$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{81} = 9$.

c) $\mathbf{b}(-2;\ 0;\ 3)$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{13}$.

3.1.2.

a) $\mathbf{v}_1 = (-2;\ -7;\ 2)$, $\mathbf{v}_2(2;\ 7;\ -2)$.

b) $\mathbf{v}_3(-5;\ -23;\ 11)$. **c)** $\mathbf{v}_4\left(-1;\ -4;\ \frac{8}{3}\right)$.

3.1.3.

a) $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$, ahol **a** és **c** az A és C pontok helyvektorai, koordinátáik megegyeznek A és C koordinátáival.
$\overrightarrow{AC}(3;\ -1;\ 2)$ $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$, így $\overrightarrow{CA}(-3;\ 1;\ -2)$,
$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$.

b) $\overrightarrow{AB}(1;\ -1;\ 4)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3\sqrt{2}$.

c) $\overrightarrow{BC}(2;\ 0;\ -2)$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = 2\sqrt{2}$.

3.1.4.

a) A nullvektor iránya megállapodás szerint tetszőleges, ezért párhuzamos **a**-val.

b) A megfelelő koordináták hányadosa $-\frac{3}{2}$, tehát $\mathbf{c}=-\frac{3}{2}\mathbf{d}$. A két vektor párhuzamos.

c) Nem párhuzamosak.

3.1.5.

a) Igen. **b)** Nem.

3.1.6.

a) Az **a** irányába mutató egységvektor: $\mathbf{e}_a=\frac{1}{|\mathbf{a}|}\cdot\mathbf{a}$.

$|\mathbf{a}|=\sqrt{25+11+64}=10$, $\mathbf{e}_a=\frac{1}{10}\mathbf{a}$, így $\mathbf{e}_a=\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{11}}{10};\frac{4}{5}\right)$.

b) $\mathbf{e}_b\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5};0\right)$; **c)** $\mathbf{e}_c\left(-\frac{1}{\sqrt{14}};-\frac{3}{\sqrt{14}};\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$.

3.1.7. A három oldal oldalvektora: $\overrightarrow{AB}(-3;0;-4)$, $\overrightarrow{BC}(7;0;1)$, $\overrightarrow{CA}(-4;0;3)$ (a vektorokat ellenkező irányítással is vehetnénk).

$K=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{CA}|=10+5\sqrt{2}$ egység.

A háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög, mert

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CA}|=5$ és $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2$.

3.1.8. A háromszög legnagyobb belső szöge a leghosszabb oldalával szemben van.

Mivel $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{129}>|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{90}>|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{73}$, ezért a háromszög legnagyobb szöge az AB oldallal szemben, a C csúcsnál van.

3.1.9. A háromszög szabályos, ha oldalai egyenlő hosszúak.

$\overrightarrow{AB}(-8; 6; 10)$, $\overrightarrow{BC}(2; -14; 0)$, $\overrightarrow{CA}(6; 8; -10)$,

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = 10\sqrt{2}$, tehát a háromszög szabályos.

3.1.10.

a) C(4; 0; –5) . **b)** A súlyvonal hossza: $\frac{3}{2}$ egység.

3.2. Vektorok szorzása

3.2.1.

a) $\mathbf{ab} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = -8$.

Mivel $\mathbf{ab} = -8 < 0$, ezért **a** és **b** hajlásszöge tompaszög.

b) **c** és **d** hajlásszöge hegyesszög.

c) **e** és **f** hajlásszöge derékszög.

3.2.2. Ha az A csúcsnál derékszög van, akkor az $\overrightarrow{AB}(x+1; 0; -4)$ és $\overrightarrow{AC}(4; 0; -3)$ vektorok skaláris szorzata nulla. Ez x = –4 esetén teljesül.

3.2.3.

a) Jelöljük a hajlásszöget α-val! A skaláris szorzat definíciója alapján

$\cos\alpha = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{-2-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{9}} = \frac{-3}{\sqrt{2} \cdot 3} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, tehát $\alpha = 135°$.

b) Hajlásszög $\approx 54{,}79°$.

3.2.4.

a) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 90°$,

$T = 7 \cdot \sqrt{3}$ területegység .

b) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = -\dfrac{1}{2}, \qquad \alpha = 120^\circ .$

$\cos\beta = \dfrac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|} \approx 0{,}802955, \quad \beta \approx 36{,}59^\circ .$

$\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta) \approx 23{,}41^\circ .$

$T = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin 120^\circ = 3\sqrt{3}$ területegység .

3.2.5. A kocka egy csúcsból induló élei páronként merőlegesek egymásra és hosszuk egyenlő.

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 15$ és $\mathbf{ab} = \mathbf{bc} = \mathbf{ca} = 0$, tehát a három vektor egy kockát feszít ki.

3.2.6.

a) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$

$= \mathbf{i}(10+4) - \mathbf{j}(-15+12) + \mathbf{k}(-3-6) = 14\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 9\mathbf{k} .$

b) $\mathbf{d}\times\mathbf{c} = 45\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 40\mathbf{k}$.

c) $\mathbf{e}\times\mathbf{f} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

3.2.7. $\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0$.

3.2.8. A háromszög területe: $T = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$.

(Bármelyik egy csúcsból kiinduló két oldalvektorát használhatnánk.)

$\overrightarrow{AB}(-3;-6;-6), \qquad \overrightarrow{AC}(1;-3;-5)$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -3 & -6 & -6\\ 1 & -3 & -5\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}-6 & -6\\ -3 & -5\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}-3 & -6\\ 1 & -5\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}-3 & -6\\ 1 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{i}(30-18)-\mathbf{j}(15+6)+\mathbf{k}(9+6)=12\mathbf{i}-21\mathbf{j}+15\mathbf{k},$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{144+441+225}=\sqrt{810}=9\sqrt{10},$$

$$T=\frac{9\cdot\sqrt{10}}{2}\text{ területegység.}$$

3.2.9.

a) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=3$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{5}$, a legnagyobb szög tehát a B csúcsnál levő β szög, a legkisebb szög a C csúcsnál levő γ szög. Mivel $\beta+\gamma=180°-\alpha$, ezért elég α-t kiszámítani.

$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha=45°$, így $\beta+\gamma=135°$.

b) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}$,

$T=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{3}{2}$ területegység.

3.2.10.

a) $\lambda=0$.

b) $T=\frac{1}{2}$ területegység.

3.2.11.

a) A tompaszög a háromszög leghosszabb oldalával szemben lehet.

$\overrightarrow{AB}(-1;\,0;\,-2)$, $\overrightarrow{BC}(0;\,-1;\,2)$, $\overrightarrow{CA}(1;\,1;\,0)$,

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|>\left|\overrightarrow{CA}\right|$.

Két tompaszög nem lehet, ezért a háromszög nem tompaszögű.

b) Az A csúcsból induló magasság: $m = \dfrac{2T}{|\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+4+1} = 3, \qquad m = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ egység.}$$

3.2.12.

a) A és C csúcsnál levő szögek: 120°,
B és D csúcsnál levő szögek: 60°,

b) $T = 100 \cdot \sqrt{3}$ területegység.

3.2.13. T = 3 területegység, BT hossza: $\dfrac{9}{\sqrt{5}} = \dfrac{9\sqrt{5}}{5}$ egység.

3.3. Vektorok geometriai alkalmazása

3.3.1.

a) $x = -2 - t, \quad y = 5 + 2t, \quad z = 1 + 3t$.
Még egy pont az egyenesen: A(–3; 7; 4) (t = 1 választással).

b) $x = 3 - 4t, \quad y = 5 + 3t, \quad z = -2 + 12t$.
Még egy pont az egyenesen: B(7; 2; –14) (t = –1 választással).

3.3.2.

a) x = 3 + 2t, y = 1 + 3t, z = 2 + t vagy x = 1+ 2t, y = –2+ 3t, z =1 + t.

b) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges **a**-ra és **b**-re is, ezért irányvektornak vehetjük az $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{v}(3;\ 4;\ -6)$ vektort.
Az egyenes egyenletrendszere: x = 6 + 3t, y = –3 + 4t, z = 4 – 6t.

3.3.3. $x = 2t,\ \ y = -t,\ \ z = 2t.$

Az A pont rajta van, a B pont nincs rajta az egyenesen.

3.3.4.

a) A két egyenes párhuzamos, ha irányvektoraik párhuzamosak.

e_1 irányvektora: $\mathbf{v}_1(2; -3; 4)$, e_2 irányvektora $\mathbf{v}_2 = \left(-1; \frac{3}{2}; -2\right)$.

A megfelelő koordináták hányadosa:

$$\frac{-1}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{-3} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad \mathbf{v}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{v}_1.$$

Mivel $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ párhuzamosak, ezért az egyenesek is párhuzamosak.

b) Nem párhuzamosak.

3.3.5.

a) $x - y + 2z - 3 = 0$, a sík illeszkedik az A pontra.

b) $3x - 2y - z - 11 = 0$, a sík nem illeszkedik az A pontra.

3.3.6.

a) A síkot egy pontja és egy, a síkra merőleges vektor határozza meg. Pontnak válasszuk pl. az A-t (nyilván bármelyiket választhatjuk). Síkra merőleges vektort kapunk, ha vesszük a sík két vektorának, például $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$-nek a vektoriális szorzatát.

$\overrightarrow{AB}(-3; 1; 2)$, $\overrightarrow{AC}(-1; -1; 3)$,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Tehát normálvektornak $\mathbf{n}(5; 7; 4)$-et felhasználva a sík egyenlete: $5(x-1) + 7y + 4(z+1) = 0$.

Rendezés után: $5x + 7y + 4z - 1 = 0$.

A sík egy pontját megkapjuk, ha pl. x-nek és y-nak választunk valamilyen értéket, amelyeket a sík egyenletébe behelyettesítve megkapjuk a pont harmadik koordinátáját.

Legyen pl. $x = 0$, $y = 0$, ekkor $z = \frac{1}{4}$.

A $D\left(0; 0; \frac{1}{4}\right)$ a sík egy pontja.

b) $x + 33y + 14z - 167 = 0$, a sík még egy pontja: $D(1; 1; 9{,}5)$.

3.3.7. $5x - 4z + 35 = 0$.

3.3.8. Az AB oldal felezőpontja: $F\left(\frac{1}{2}; 0; 2\right)$.

Az egyenes **v** irányvektora merőleges a síkra, tehát annak bármely vektorára, így például $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorokra. Az irányvektor tehát párhuzamos az $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vektorral.

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, vegyük ennek $\frac{1}{3}$-szorosát, $\mathbf{v}(2; 2; -1)$.

Az egyenes egyenletrendszere: $x = \frac{1}{2} + 2t$, $y = 2t$, $z = 2 - t$.

3.3.9.

a) Ha van közös pontjuk, akkor a koordináták kielégítik az egyenes és a sík egyenleteit is. A sík egyenletébe behelyettesítjük az egyenes paraméteres egyenletrendszerből x, y, z-t:
$-1 + 2t + 5 - 3t - 6 + 4t - 1 = 0$.
Rendezés után $3t = 3$, azaz $t = 1$. A síknak és az egyenesnek tehát egy közös pontja van, az egyenes $t = 1$ paraméterértékhez tartozó pontja: $x = 1$, $y = -2$, $z = -2$.
A közös pontjuk: $D(1; -2; -2)$.

b) Az **a)** feladat megoldásához hasonlóan járunk el:
$5 + 5t + t + 2 - 6t = 0$. Rendezés után $7 = 0$, ami nem teljesülhet, tehát az egyenes egyetlen pontja sincs a síkban. Az egyenes párhuzamos a síkkal.

c) Az **a)** feladat megoldásához hasonlóan járunk el:
$10 + 5t + t - 10 - 6t = 0$.
Rendezés után $0 = 0$, tehát bármely t esetén teljesül az egyenlőség. Az egyenes a síkban fekszik.

3.3.10. Ha az egyenes párhuzamos a síkokkal, akkor merőleges a két sík normálvektorára, $\mathbf{n}_1$-re és $\mathbf{n}_2$-re, vagyis párhuzamos ($\mathbf{n}_1$ x $\mathbf{n}_2$)-vel.
A síkok normálvektora:$\mathbf{n}_1(2; -4; 6)$, $\mathbf{n}_2(3; 0; 2)$.

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -8\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 12\mathbf{k} \ .$$

Irányvektornak vehetjük a $\mathbf{v} = -\frac{1}{2}(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)$vektort: $\mathbf{v}(4; -7; -6)$.
Az egyenes egyenletrendszere: $x = -2 + 4t$, $y = 3 - 7t$, $z = 1 - 6t$.

3.3.11. $2y + z + 1 = 0$.

3.3.12.

a) Az egyenes egyenletrendszere: $x = 1 - t$, $y = 1 + t$, $z = 2 + t$.

b) $T = \frac{\sqrt{3}}{2}$ területegység .

3.3.13.

a) Az A csúcsnál tompaszög van.

b) A súlyvonal egyenesének egyenletrendszere:

$$x = 1, \quad y = 2 + \frac{1}{2}t, \quad z = -1 + t \ .$$

c) A háromszög síkjának egyenlete: $2x - 2y + z + 3 = 0$.

d) $T = \frac{3}{2}$ területegység.

3.3.14. A két sík párhuzamos, tehát van ilyen sík. A keresett sík normálvektora párhuzamos a két sík normálvektorával, így az $\mathbf{n}(1; 1; -2)$-t választhatjuk normálvektornak.
Írjuk fel az első sík egy tetszőleges pontján, például P(1; 2; 1) ponton átmenő, a síkokra merőleges egyenes paraméteres egyenletrendszerét: $x = 1 + t$, $y = 2 + t$, $z = 1 - 2t$.
Ez az egyenes a másik síkot $D\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$ pontban döfi. A keresett sík illeszkedik a PD szakasz $F\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$ felezőpontjára, így egyenlete: $x + y - 2z + 1 = 0$.

3.3.15. $4x + y + 3z - 6 = 0$.

3.3.16. Jelöljük a B pont helyvektorát **b**-vel, a D pontét **d**-vel, amely $\mathbf{d} = \mathbf{b} + \overrightarrow{BD}$ alakban állítható elő és $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.
Számítsuk ki a $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ vektorokat:
$\overrightarrow{BA}(2; -14; 0)$, $\overrightarrow{BC}(-6; -8; 10)$, így $\overrightarrow{BD}(-4; -22; 10)$, tehát $\mathbf{d}(-3; -16; 8)$.
A D pont koordinátái megegyeznek **d** koordinátáival, így a paralelogramma negyedik csúcspontja: D(–3; –16; 8).
A BD átló egyenesének irányvektorának vegyük a $\overrightarrow{BD}$ vektor $\left(-\frac{1}{2}\right)$-szeresét: $\mathbf{v}(2; 11; -5)$.
A B pontot használva, az átló egyenesének egyenletrendszere:
$x = 1 + 2t$, $y = 6 + 11t$, $z = -2 - 5t$.

4.EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK

4.1. Sorozatok

4.1.1.

a) 3,1; 3,01; 3,001; 3,0001; 3,00001; 3,000001. Szigorúan monoton csökken, konvergens, határértéke 3.

b) $-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; -\frac{9}{8}; -\frac{15}{16}; -\frac{33}{32}; -\frac{63}{64}$.

Mivel egy negatív valós szám pozitív egész kitevős hatványai váltakozó előjelűek, ezért a sorozat elemei váltakozva kisebbek illetve nagyobbak -1-nél. Így a sorozat nem monoton. A $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ abszolút értéke n növekedésével csökken, 0-hoz tart. Tehát a sorozat elemeinek -1-től való eltérése 0-hoz tart. Így a sorozat konvergens, határértéke -1.

c) $1; -\sqrt{2}; \sqrt{3}; -2; \sqrt{5}, -\sqrt{6}$. Nem monoton, divergens, nincs határértéke.

d) $1; 0; \frac{1}{9}; 0; \frac{1}{25}; 0$. Nem monoton, konvergens, határértéke 0.

e) 5; 3; 1; 1; 3; 5. A negyedik elemtől kezdve szigorúan monoton nő, divergens, határértéke $+\infty$.

f) 9990; 9900; 9000; 0; -90000; -99000. Szigorúan monoton csökken, divergens, határértéke $-\infty$.

g) $\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0$.

Az előjel váltakozása miatt nem monoton. Mivel bármely indextől

kezdve van a sorozat elemei között $\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ is, nincs olyan valós szám, amelytől ezen elemeknek való eltérésének abszolút értéke kisebb lenne, mint például $\frac{1}{2}$. Tehát a sorozatnak nincs határértéke, divergens.

h) $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{7}{8}; \frac{15}{16}; \frac{31}{32}; \frac{63}{64}$. Szigorúan monoton nő, konvergens, határértéke 1.

i) 120; 60; 20; 5; 1; $\frac{1}{6}$.

Mivel n növekedésével a nevezőben álló n! értéke is növekszik, ezért a sorozat szigorúan monoton csökken. A sorozat elemei a hatodik elemtől kezdve 1-nél kisebbek, s az n-edik elem nevezője az előző elem nevezőjének n-szerese. A nevezők minden határon túl való növekedésével a törtek 0-hoz tartanak. Tehát a sorozat konvergens, határértéke 0.

4.1.2. Figyelje meg, hogy egy sorozat első néhány eleméből általános esetben még nem tudjuk megsejteni a határértéket!
Ebben a feladatban és a továbbiakban is egy szorzat vagy hányados határértékének megállapítjuk a „típusát", és ezt az egyenlőségjel alatt zárójelben megadjuk. (Azaz szorzatnál a tényezőknek, hányadosnál a számlálónak és a nevezőnek külön kiszámítjuk az adott helyen vett határértékét.)

a) $a_1 = -4;\ a_2 = -27;\ a_3 = -58;\ a_4 = -91;$ de pl. $a_{20} = 4005$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^3 \cdot \left(1 - 10\cdot\frac{1}{n} + 5\cdot\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{(+\infty\cdot 1)}{=} +\infty$, felhasználva, hogy

$10\cdot\frac{1}{n} \to 10\cdot 0 = 0$, és $5\cdot\frac{1}{n^2} \to 5\cdot 0 = 0$, ha $n \to +\infty$.

b) $a_2 = -\frac{7}{3};\ a_3 = -\frac{9}{8};\ a_4 = -\frac{11}{15};\ a_5 = -\frac{13}{24}$.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{-n^2} \cdot \frac{1+\frac{3}{2n}}{1-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{2}{n} \cdot \frac{1+\frac{3}{2n}}{1-\frac{1}{n^2}} \right) \underset{\left(0\cdot\frac{1}{1}\right)}{=} 0.$$

c) 0,71; 0,71; 0,82; 0,92. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

d) $a_1 = 2{,}41;\ a_2 = 3{,}15;\ a_3 = 3{,}73;\ a_4 = 4{,}24$.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(n+1)-n} = +\infty.$$

4.1.3.

a) $n \geq 10001$.

b) $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{4}{3} = A,\quad |a_n - A| = \left|\frac{4n+10}{3n-1} - \frac{4}{3}\right| = \left|\frac{34}{3(3n-1)}\right| < \frac{1}{10}$ teljesül, ha $\frac{34}{3(3n-1)} < \frac{1}{10}$, hiszen $\frac{34}{3(3n-1)}$ pozitív, mert $n \geq 1$. Ebből átrendezéssel kapjuk, hogy $340 < 9n - 3$, azaz $n \geq 39$.

c) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$, és $|1 - a_n| = 1 - a_n$, mivel $1 - a_n > 0$.

$1 - \frac{2^n}{2^n + 100} < \frac{1}{10}$, azaz $900 < 2^n$ teljesül, ha $n \geq 10$.

4.2. Egyváltozós valós függvények elemi vizsgálata

4.2.1.

a) $x \in \mathbf{R} \setminus \{2; -1\}$.

b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$.

c) $-2-3x \geq 0$, és $x \neq 0$, így $x \in \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right]$.

d) $x \in]-\infty; -2\,] \cup [\,2; +\infty[$.

e) $x \geq 0$ és $1-\sqrt{x} \neq 0$, azaz $x \neq 1$, így $x \in [\,0; 1\,[\cup]1; +\infty[$.

f) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

g) $\cos x > 0$, azaz $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi;\ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right[$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

h) Csak pozitív kifejezéseknek értelmezzük a logaritmusát, így $\frac{1+x}{1-x} > 0$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $1+x>0$ és $1-x>0$, vagy $1+x<0$ és $1-x<0$. Összesítve: $-1<x<1$. (Az utóbbi két egyenlőtlenség nem teljesülhet egyszerre.) Tehát $x \in]-1; 1[$.

i) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

j) $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

4.2.2.

a) $f(g(x)) = \sin\sqrt{x}$, $x \in [\,0; +\infty[$;
$g(f(x)) = \sqrt{\sin x}$, $x \in [\,k \cdot 2\pi;\ \pi + k \cdot 2\pi\,]$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

b) $f(g(x)) = e^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$; $g(f(x)) = -e^{x}$, $x \in \mathbf{R}$.

c) $f(g(x)) = g(f(x)) = \lg\lg x$.
$\lg x > 0$, azaz $x > 1$, így $x \in]1; +\infty[$.

d) $f(g(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{k \cdot \pi\}$, ahol $k \in \mathbf{Z}$;

$g(f(x)) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg} x$, $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + m \cdot \pi\right\}$, ahol $m \in \mathbf{Z}$.

e) $f(g(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}}} = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-1}} = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}$.

A tört nevezőjében a gyök alatt csak pozitív szám állhat, ezért $x^2-1>0$, azaz $x^2>1$. Ez teljesül, ha $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

$g(f(x)) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \sqrt{1-x^2}$.

A gyök alatt nem állhat negatív szám, ezért $1-x^2 \geq 0$, azaz $x^2 \leq 1$. Ez teljesül, ha $x \in [-1;1]$.

f) $f(g(x)) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$; $g(f(x)) = 3 \cdot \dfrac{1}{x^2} - 1$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

4.2.3.

a) $h(x) = \cos x$, $g(x) = x^3$, $g(h(x)) = \cos^3 x$.

b) $h(x) = e^x$, $g(x) = \operatorname{ctg} x$, $g(h(x)) = \operatorname{ctg} e^x$.

c) $h(x) = \ln x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(h(x)) = \dfrac{1}{\ln x}$.

d) $h(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = 10^x$, $g(h(x)) = 10^{\operatorname{arctg} x}$.

e) $h(x) = e^x$, $g(x) = e^x$, $g(h(x)) = e^{e^x}$.

f) $h(x) = \operatorname{sh} x$, $g(x) = -x$, $g(h(x)) = -\operatorname{sh} x$.

4.2.4.

a) D_f szimmetrikus a 0-ra, és bármely $x \in D_f$ esetén $f(-x) = 0$.

Mivel $f(-x) = f(x) = -f(x) = 0$ is teljesül, a függvény páros és pá-

ratlan is. Megjegyzés: Azon függvények, melyek egyszerre párosak és páratlanok, pontosan a következők: $f(x)=0$, D_f szimmetrikus a 0-ra.

b) Páros. **c)** Páros.

d) $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$, ez szimmetrikus a 0-ra. Bármely $x \in D_f$ esetén $f(-x) = \frac{3(-x)}{4(-x)^2-1} = \frac{-3x}{4x^2-1} = -f(x)$, tehát a függvény páratlan.

e) Mivel $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ nem szimmetrikus a 0-ra, nincs értelme paritásról beszélni.

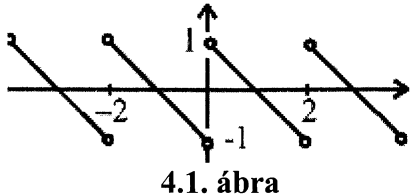
f) Páros. **g)** Páratlan.

h) $D_f =]-e;e[$, ez szimmetrikus a 0-ra. Bármely $x \in D_f$ esetén $f(-x) = \ln\left(\frac{e-x}{e+x}\right) = \ln\left(\frac{e+x}{e-x}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{e-x}{e+x}\right) = -f(x)$, tehát a függvény páratlan. (Felhasználtuk, hogy $\ln x^{-1} \equiv -\ln x$, hiszen az értelmezési tartományuk megegyezik, a függvényértékek egyenlősége pedig az ismert logaritmus azonosságból adódik.)

i) Nem páros és nem páratlan.

j) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{k \cdot 2\}$, ahol k egész, ez szimmetrikus a 0-ra. Jelen esetben a függvény ábrájából a legkönnyebb eldönteni, hogy a függvény páratlan, hiszen grafikonja szimmetrikus az origóra. (4.1. ábra)

k) Páros.



4.1. ábra

4.2.5. Ebben a feladatban $f(A)=H$ jelöli, hogy az A halmazt az $f(x)$ függvény a H halmazra képezi le.

a) A természetes számokat négyzetre emelve a négyzetszámokat kapjuk, kivéve a 0-t, így $f(A)=\{\text{négyzetszámok}\}\setminus\{0\}$. Ha pedig $-1<x<1$, akkor $0\le x^2<1$, s bármely $[0;1[$-beli valós szám előáll $]-1;1[$-beli valós szám négyzeteként (például a gyökének négyzeteként), így $f(B)=[0;1[$. Hasonlóan $f(C)=[0;+\infty[$.

b) $f(A)=\{0\}$, $f(B)=f(C)=[-1;1]$.

c) $f(A)=\{\text{pozitív páratlan egészek}\}$, $f(B)=[-1;+\infty[$, $f(C)=]-\infty;-1[$.

d) $f(A)=\mathbf{N}$, $f(B)=]-\infty;-1[$, $f(C)=\mathbf{R}^+$.

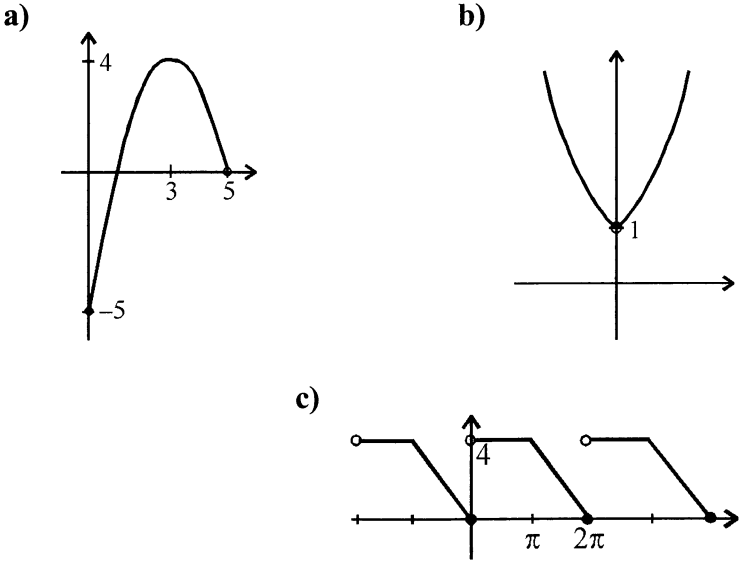
4.2.6. Ebben a feladatban és a továbbiakban is $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b^+$ azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvény az a helyen a b-nél nagyobb számokon keresztül tart b-hez, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b^-$ pedig azt, hogy $f(x)$ a b-nél kisebb számokon keresztül tart b-hez. Természetesen a $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ megoldás is helyes.

a) $f(x)=-(x-3)^2+4$, $D_f=[0;5[$, $R_f=[-5;4]$, korlátos.
x - tm : $P_1(1;0)$, y - tm : $P_2(0;-5)$.
A $[0;3]$intervallumon szigorúan monoton növekszik, a $[3;5[$ intervallumon szigorúan monoton csökken. Konkáv.
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-5^+$, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=0^+$. (4.2.a. ábra.)

b) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $R_f=]1;+\infty[$, alulról korlátos. Páros.
Nem metszi a tengelyeket.
A $]-\infty;0[$ intervallumon szigorúan monoton csökken, a $]0;+\infty[$ intervallumon szigorúan monoton növekszik.

A $]-\infty;0[$ intervallumon és a $]0;+\infty[$ intervallumon konvex.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1^{+}$. (4.2.b. ábra.)



4.2. ábra

c) Az $f_2(x) = -\frac{4}{\pi}x + 8$ függvény képe egyenes, mely az $f_2(\pi) = 4$ és $f_2(2\pi) = 0$ függvényértékek segítségével felrajzolható.

$D_f = \mathbf{R}$, $R_f = [0;4]$, korlátos, periodikus, y - tm : $P_2(0;0)$.

A függvény további jellemzését a $]0;2\pi]$ periódusban adjuk meg:

x - tm : $P_2(2\pi;0)$.

A $]0;\pi]$ intervallumon konstans (monoton nő és csökken), a $[\pi;2\pi]$ intervallumon szigorúan monoton csökken.

Konkáv, mert az intervallumon belül bármely két pontját összekötve, a húr nem megy a függvénygörbe fölé. (A $]0;\pi]$ intervallumon konkáv és konvex.)

$\lim\limits_{x\to 0^{-}} f(x) = 0^{+}$, $\lim\limits_{x\to 0^{+}} f(x) = 4$.

Az f(x) függvénynek a $+\infty$-ben nem létezik határértéke. Ha ugyanis az $x_n = n \cdot 2\pi$ sorozaton keresztül tartunk a $+\infty$-be, akkor a függvényértékek sorozata $f(x_n) = f(n \cdot 2\pi) = 0$ a 0-hoz tart, ha az $x_n = \pi + n \cdot 2\pi$ sorozaton keresztül, akkor $f(x_n) = f(\pi + n \cdot 2\pi) = 4$ pedig a 4-hez. (4.2.c. ábra.)

4.2.7.

a) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (-2x^2 + x) = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 0.$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^2 + x) \underset{-\infty+(-\infty)}{=} -\infty.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^2 + x) \underset{-\infty+(+\infty)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}\right) \underset{(-\infty \cdot 1)}{=} -\infty.$

Felhasználtuk, hogy $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, és $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

A fentihez hasonlóan általában is belátható, hogy a racionális egész függvényeknek a $+\infty$-ben (illetve $-\infty$-ben) vett határértéke megegyezik a legmagasabb fokú tagnak a $+\infty$-ben (illetve $-\infty$-ben) vett határértékével.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 + x^2}{1 - 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{0^3 + 0^2}{1 - 2 \cdot 0} = 0.$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + x^2}{1 - 2x} \underset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{-2x} \cdot \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{2x}} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{2x}} \right) \underset{(-\infty \cdot 1)}{=}$$

$$= -\infty; \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x^2}{1 - 2x} \underset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{2} x^2 \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{2x}} \right) \underset{(-\infty \cdot 1)}{=} -\infty.$$

A fentiekhez hasonlóan általában is belátható, hogy a racionális törtfüggvényeknek a $+\infty$-ben (illetve $-\infty$-ben) vett határértéke megegyezik a számláló és a nevező legmagasabb fokú tagjainak hányadosának a $+\infty$-ben (illetve $-\infty$-ben) vett határértékével. Ezt a későbbiekben használni fogjuk.

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} \dfrac{x^3+x^2}{1-2x} = \left(\dfrac{\frac{3}{8}}{0^+}\right) = +\infty$, felhasználva, hogy $x<\dfrac{1}{2}$ esetén $1-2x>0$.

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} \dfrac{x^3+x^2}{1-2x} = \left(\dfrac{\frac{3}{8}}{0^-}\right) = -\infty$, felhasználva, hogy $x>\dfrac{1}{2}$ esetén $1-2x<0$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-4$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-4$, $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$.

e) Összetett függvények esetén a határértékszámítást belülről kifelé haladva végezzük, akárcsak a függvényértékszámítást.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1^-$, hiszen $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$, és $\lim\limits_{x\to0^-} e^x = 1^-$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1^+$, hiszen $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$, és $\lim\limits_{x\to0^+} e^x = 1^+$.

$\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0^+$, hiszen $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, és $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$.

$\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, hiszen $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, és $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \left(\dfrac{1}{-\infty}\right) = 0^-$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \left(\dfrac{1}{+\infty}\right) = 0^+$, $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \left(\dfrac{+\infty}{0^+}\right) = +\infty$.

g) $\lim\limits_{x\to -1^+} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\infty$, hiszen $\lim\limits_{x\to -1^+} \left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 0^+$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = +\infty$, hiszen $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\frac{1+x}{1-x}\right) = +\infty$.

h) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = 0$, hiszen $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{x+1}{-x+1} = -1$, így $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left|\frac{x+1}{-x+1}\right| = +1$.

$\lim\limits_{x\to -1^{\pm}} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = -\infty$, hiszen $\lim\limits_{x\to -1^{\pm}} \left|\frac{1+x}{1-x}\right| = 0^+$.

$\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = +\infty$, hiszen $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} \left|\frac{1+x}{1-x}\right| = +\infty$.

i) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

4.2.8.

a) $D_f =]-\infty; +\infty[$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0^+$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0^-$.

c) $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2+2x+1} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$. $\lim\limits_{x\to -1^{\pm}} \frac{x^2}{(x+1)^2} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$.

d) $D_f =]0; +\infty[$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

e) $D_f =]0; +\infty[$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

f) $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = 0^-$, hiszen $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$, és $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{arctg} x = 0^-$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}^+$, hiszen $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, és $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}^+$.

Mivel a függvény páratlan, ezekből következnek az alábbiak:

$\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}^-$, és $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = 0^+$.

g) $D_f =]-\infty; +\infty[$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$.

h) $D_f =]0; +\infty[$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1^+$.

i) $D_f =]0; 1]$, felhasználva, hogy a $g(x) = \arccos x$ függvény értelmezési tartománya: $D_g = [-1; 1]$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \arccos x \cdot \log_\pi x = \underset{\left(\frac{\pi}{2}\cdot(-\infty)\right)}{=} -\infty$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} \arccos x \cdot \log_\pi x = \arccos 1 \cdot \log_\pi 1 = 0$.

4.2.9.

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 - e^{-\lambda\cdot 0} = 0$, azaz $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$.

Az $f_1(x) = 0$ és az $f_2(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ elemi függvények, így folytonosak. Az f(x) függvény a 0-ban is folytonos a fentiek alapján, tehát értelmezési tartományának minden pontjában folytonos. Az f(x) függvény folytonos függvény.

b) Nem folytonos. **c)** Folytonos.

4.2.10.

a) f(x) szigorúan monoton nő, $\bar{f}(x) = \frac{x+4}{3}$.

b) Az $x_1 < x_2$ egyenlőtlenséggel ekvivalensek az alábbiak: $-x_1 > -x_2$, $1-x_1 > 1-x_2$, $\sqrt[3]{1-x_1} > \sqrt[3]{1-x_2}$. (Felhasználtuk, hogy a $g(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény szigorúan monoton nő.) Tehát $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$, azaz az f(x) függvény szigorúan monoton csökken. Mivel $y = \sqrt[3]{1-x}$ esetén $y^3 = 1-x$, azaz $x = 1-y^3$, az f(x) függvény inverze: $\bar{f}(x) = 1-x^3$.

c) f(x) szigorúan monoton nő, $\bar{f}(x) = \frac{\log_5 2x}{2}$.

4.2.11.

a) $D_{\bar{f}} = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{-(2n-1) \mid n \in \mathbf{N}\}$ és $\bar{f}(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x > 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$

b) Legyen $f_1(x) = x-1$ és $D_{f_1} = A =]-\infty;0]$. Ekkor a 4.2.5. és a 4.2.10. feladatok megoldásait és jelöléseit alkalmazva $f_1(A) =]-\infty;-1]$ és $\overline{f_1}(x) = x+1$. Hasonlóan legyen $f_2(x) = x^2$, $D_{f_2} = B =]0;1]$, ezekre $f_2(B) =]0;1]$, $\overline{f_2}(x) = \sqrt{x}$. Végül legyen $f_3(x) = -\frac{1}{x}$, $D_{f_3} = C =]1;+\infty[$, ezekre $f_3(C) =]-1;0[$, $\overline{f_3}(x) = -\frac{1}{x}$. Ezen adatok segítségével az inverz függvény:

$$D_{\bar{f}} = f_1(A) \cup f_3(C) \cup f_2(B), \quad \bar{f}(x) = \begin{cases} x+1, & \text{ha } x < -1, \\ -\frac{1}{x}, & \text{ha } -1 < x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{ha } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

4.2.12.

a) $\frac{2}{5}$.

b) $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8^4}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^4} = \frac{3}{2^4} = \frac{3}{16}$.

c) $\sqrt{(17)^2\left(1+2^2+2^2\right)} = 51$.

d) 20.

e) $\dfrac{49^{\frac{1}{2}}}{\left(7^2\right)^{\log_7 2}} = \dfrac{7}{4}$. **f)** $\dfrac{1}{6}$. **g)** 2.

h) 0. **i)** 5.

j) $\log_2 \sin\left(\dfrac{3\pi}{4} - 5\cdot 2\pi\right) = \log_2 \sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \log_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \log_2 2^{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2}$.

k) -6. **l)** $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$. **m)** $-\sqrt{3}$.

n) $\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{3} = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$. Megjegyzés:

$\operatorname{arctg}\operatorname{tg} x_0 = x_1$, ahol $x_1 \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, és $x_1 = x_0 + k\cdot\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

o) 0, mert $\arccos 1 = 0$. **p)** $-\dfrac{\pi}{2}$.

q) $\log_\pi 1 = 0$. **r)** 0. **s)** $-\dfrac{4}{3}$.

t) $\left(\operatorname{th}\ln 2\right)^2 = \left(\dfrac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}\right)^2 = \left(\dfrac{2-\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$.

5.EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

5.1. Differenciálhányados és deriváltfüggvény

5.1.1.

a) $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x_0+\Delta x)^3-x_0^3}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(3x_0^2+3x_0\cdot\Delta x+\Delta x^2)=3x_0^2.$

b) $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x_0+\Delta x}-\dfrac{1}{x_0}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{x_0-(x_0+\Delta x)}{(x_0+\Delta x)\cdot x_0}}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-\Delta x}{(x_0+\Delta x)\cdot x_0}\cdot\dfrac{1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-1}{(x_0+\Delta x)\cdot x_0}=\dfrac{-1}{x_0\cdot x_0}=-\dfrac{1}{x_0^2}.$

c) $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}=$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}.$

5.1.2. A deriváltfüggvényeket akkor egyszerűsítjük, ha ettől az eredmény valóban egyszerűbbé válik.

a) $f'(x)=\left(x^{-\frac{7}{2}}\right)'+\dfrac{1}{2}\left(3^x\right)'-(15)'=-\dfrac{7}{2}x^{-\frac{9}{2}}+\dfrac{1}{2}\cdot 3^x\cdot\ln 3-0=$

$=-\dfrac{7}{2\sqrt{x^9}}+\dfrac{\ln 3}{2}\cdot 3^x.$

b) $f'(x)=x-1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}.$

c) $f'(x)=\left(x(x^2+6x+9)\right)'=\left(x^3+6x^2+9x\right)'=3x^2+12x+9$.

d) $f'(x)=-\dfrac{21}{4\sqrt[4]{x^7}}-\dfrac{4\sqrt[3]{x}}{21}$. **e)** $s'(t)=v_0+at$.

f) $r'(\phi)=-10\sin\phi$. **g)** $f'(t)=\dfrac{1}{2}\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)$.

h) $f'(x)=(\cos x\cdot\cos x)'=-2\sin x\cdot\cos x$.

i) $f'(x)=e\cdot e^x(x+1)=e^{x+1}(x+1)$.

j) $f'(x)=-\dfrac{1}{x\cdot\ln 10}(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)+(1-\lg x)\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

k) $f'(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}\cdot x^{-\frac{2}{5}}\cdot\ln x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}\left(\left(x^{-\frac{2}{5}}\right)'\cdot\ln x+x^{-\frac{2}{5}}\cdot(\ln x)'\right)=$

$=\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}\left(-\dfrac{2}{5}x^{-\frac{7}{5}}\cdot\ln x+x^{-\frac{2}{5}}\cdot\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{2x^7}}\left(1-\dfrac{2}{5}\ln x\right)$.

l) $f'(x)=-\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}\cdot x^{\sqrt{5}}+\left(5-5\sqrt{x}\right)x^{\sqrt{5}-1}$.

m) $f'(x)==\dfrac{\ln 2\cdot 2^x\cdot\operatorname{sh}x-\left(2^x-2\right)\cdot\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2 x}$.

n) $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{arctg}x}\right)'=\frac{3}{8}\frac{(\operatorname{tg}x)'\cdot\operatorname{arctg}x-(\operatorname{arctg}x)'\cdot\operatorname{tg}x}{(\operatorname{arctg}x)^2}=$

$$=\frac{3}{8}\cdot\frac{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\operatorname{arctg}x-\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\operatorname{arctg}^2 x}.$$

o) $f'(x)=-\frac{23}{(5x+4)^2}.$ **p)** $u'(v)=\frac{4v}{\left(1-v^2\right)^2}.$

q) $f'(x)=\frac{8x\left(x^3+8\right)-4x^2\cdot 3x^2}{\left(x^3+8\right)^2}=-4\cdot\frac{x^4-16x}{\left(x^3+8\right)^2}.$

r) $f'(x)=\frac{0\cdot\sin x-\pi\cdot\cos x}{\sin^2 x}=-\pi\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$

s) $h'(x)=\frac{\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}\left(\log_n x+n^x\right)-\sqrt[n]{x}\left(\frac{1}{x\cdot\ln n}+n^x\cdot\ln n\right)}{\left(\log_n x+n^x\right)^2}.$

t) $f'(x)=e\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot\lg x-\ln x\cdot\lg x-\frac{\ln x}{x\cdot\ln 10}}{e^x\cdot\lg^2 x}.$

u) $u'(t)=\frac{\left(\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{t^3}}\cdot\operatorname{ch}t+\sqrt[4]{t}\cdot\operatorname{sh}t\right)(3-t)+\sqrt[4]{t}\cdot\operatorname{ch}t}{(3-t)^2}=$

$$=\frac{3\operatorname{ch}t+3t\cdot\operatorname{ch}t+12t\cdot\operatorname{sh}t-4t^2\cdot\operatorname{sh}t}{4\cdot\sqrt[4]{t^3}(3-t)^2}.$$

v) Két megoldást adunk a példára:

$f'(x) = \left(x^2 \cdot e^x\right)' \cdot \cos x + x^2 \cdot e^x \left(\cos x\right)' = \left(2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x\right)\cos x -$
$- x^2 \cdot e^x \cdot \sin x = e^x\left(2x \cdot \cos x + x^2 \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x\right).$

Másrészt felhasználva a háromtényezős szorzat deriválására vonatkozó $\left(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) +$

$+ f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$ képletet:

$f'(x) = \left(x^2\right)' \cdot e^x \cdot \cos x + x^2 \cdot \left(e^x\right)' \cdot \cos x + x^2 \cdot e^x \cdot \left(\cos x\right)' =$
$2x \cdot e^x \cdot \cos x + x^2 \cdot e^x \cdot \cos x - x^2 \cdot e^x \cdot \sin x.$

w) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{\operatorname{cth} x}{5} - \frac{x}{\operatorname{sh}^2 x} + \left(\ln \frac{1}{2}\right) x \cdot \operatorname{cth} x\right).$

x) Felhasználva, hogy $\left(\frac{x^k}{k!}\right)' = \frac{k \cdot x^{k-1}}{k \cdot (k-1)!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$, ha $k \in \mathbf{N}$,

$T'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{99}}{99!} = \sum_{n=0}^{99} \frac{x^n}{n!}.$

y) $z'(x) = y + \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} + y \cdot x^{y-1} + y^x \cdot \ln y + \frac{1}{x}.$

5.1.3.

a) $f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \sin \sqrt[3]{x}.$ **b)** $f'(x) = -\frac{e^x}{\sin^2 e^x}.$

c) $f(x) = h(g(x))$, ahol $h(x) = 2^x$, $h'(x) = 2^x \cdot \ln 2$ és $g(x) = \sin x$, így

$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = 2^{g(x)} \cdot \ln 2 \cdot \left(\sin x\right)' = \ln 2 \cdot 2^{\sin x} \cdot \cos x.$

d) $f(x) = h(g(x))$, ahol $h(x) = \operatorname{arctg} x$, $h'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ és $g(x) = \frac{1}{x}$, így

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{1+(g(x))^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{x^2+1}.$$

e) $u'(v) = \frac{1}{4\sqrt[4]{v^3} \cdot \sqrt{1-\sqrt{v}}}$.

f) $g'(t) = \frac{1}{(\ln^2 10)\, t \cdot \lg t}$.

g) $f(x) = h(g(x))$, ahol $h(x) = \ln x$, és $g(x) = ax$, így bármely $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ esetén $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{ax} \cdot (ax)' = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$.

Az integrálszámításban felhasználjuk azt az eredményt, hogy $\left(\ln(-x)\right)' = \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$, s ebből következően $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$.

h) $g'(t) = e^{e^t} \cdot e^t$.

i) $f'(x) = (-\ln 10) 10^{-x}$.

j) Többszörösen összetett függvények esetén a láncszabályt alkalmazzuk. $f(x) = h(g(x))$, ahol $h(x) = x^2$ és $g(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{4}$.

$$f'(x) = 2 \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{4} \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right)' = 2 \operatorname{tg}\frac{x}{4} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{4}} \cdot \left(\frac{x}{4}\right)'\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{4}}{2\cos^2\frac{x}{4}}.$$

k) $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{\operatorname{sh} x}} \cdot \operatorname{ch} x}{2 \cdot \sqrt{\operatorname{sh} x}}$.

l) $f'(x) = 3\left(\log_3^2 \operatorname{th} x\right) \cdot \frac{1}{\operatorname{th} x \cdot \ln 3} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{6}{\ln 3} \cdot \frac{\log_3^2 \operatorname{th} x}{\operatorname{sh} 2x}$.

(Felhasználtuk, hogy $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$.)

m) $f'(x) = \frac{3}{16} \cdot \frac{\operatorname{ch} \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x \cdot \left(\operatorname{sh} \sqrt[4]{x^3}\right)^3}}$.

n) $f'(x) = 5^{\cos^2 2x} \cdot \ln 5 \cdot \left(\cos^2 2x\right)' = \ln 5 \cdot 5^{\cos^2 2x} \cdot \left(2 \cdot \cos 2x \cdot \left(\cos 2x\right)'\right) =$

$= 2 \ln 5 \cdot 5^{\cos^2 2x} \cdot \cos 2x \cdot \left((-\sin 2x) \cdot (2x)'\right) = -2 \ln 5 \cdot 5^{\cos^2 2x} \cdot \sin 4x$.

(Felhasználtuk, hogy $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$.)

o) $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^{-2} \ln x}} \cdot \left(\cos^{-1} \ln x\right)' = \frac{-\sin \ln x}{x \cdot \cos^2 \ln x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2 \ln x}}}$.

5.1.4.

a) $y'(t) = -A \cdot a \cdot \sin at + B \cdot b \cdot \cos bt + C \cdot c \cdot e^{ct}$.

b) $f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x - 2x \sin x^2 + \frac{4x \operatorname{tg} x^2}{\cos^2 x^2}$.

c) $I'(t) = \frac{U_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$.

d) $f'(x) = 12(3x+2)^3 - (3 \ln 4) 4^{3x+2}$.

e) Az alábbi megoldásban megmutatjuk, hogyan célszerű racionális törtfüggvények vizsgálatakor a deriváltfüggvényt kiszámítani. A zárójelek felbontása előtt kiemelünk, majd egyszerűsítünk.

$$f'(x)=\frac{2(2x-3)\cdot 2\cdot(x+1)^3-(2x-3)^2\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6}=$$

$$=\frac{(2x-3)(x+1)^2\big(4(x+1)-3(2x-3)\big)}{(x+1)^6}=\frac{(2x-3)(-2x+13)}{(x+1)^4}.$$

f) $P'(r)=U^2\dfrac{R-r}{(R+r)^3}$.

g) $f'(x)=1-\dfrac{1}{2(2-x)\sqrt{1-x}}$.

h) $f'(x)=\dfrac{e\,x^{e-1}\cdot \operatorname{cth} e^x}{\operatorname{ch}^2 x^e}-\dfrac{e^x\cdot \operatorname{th} x^e}{\operatorname{sh}^2 e^x}$.

i) $f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}\cdot\ln\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{x^2-1}{x^5+x^3}$.

j) $f'(x)=\dfrac{\ln x}{(\ln 10)x}\cdot\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)'=\dfrac{\ln x(\ln x-1)}{(\ln 10)x\cdot\ln^2 x}$.

k) $y'(t)=A\,t\cdot e^{-\frac{t}{2}}\left(2-\dfrac{t}{2}\right)$.

l) $f'(x)=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)'=\dfrac{1}{1+\dfrac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\cdot\dfrac{2(1-x^2)+2x\cdot 2x}{(1-x^2)^2}=$

$$=\frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2+4x^2}=\frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{1+x^2}.$$

Megjegyezzük, hogy a megadott függvény deriváltfüggvénye a közös értelmezési tartományban megegyezik a $g(x)=2\operatorname{arctg} x$ függvény deriváltfüggvényével.

m) $f'(x)=5\left(\sqrt{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)^4\left(\left(-\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}\right)\cdot\frac{\pi}{2}\right)=$

$$=-\frac{5\pi}{2\cos^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\left(\sqrt{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)^4.$$

n) $f'(x)=\sin(x\cdot\cos x)+x\cdot\big(\cos(x\cdot\cos x)\big)\cdot(\cos x-x\cdot\sin x)$.

o) $f'(x)=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)'=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\left(1-\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)=$

$$=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}=-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

p) $f'(x)=\frac{(x+\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x)'}{(\ln 4)(x+\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x)}=\frac{1+\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x}{(\ln 4)(x+\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x)}=$

$$=\frac{2\operatorname{ch}^2x}{(\ln 4)(x+\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x)}.$$ (Felhasználtuk, hogy $1+\operatorname{sh}^2x=\operatorname{ch}^2x$.)

q) $r'(\phi)=\sqrt{\frac{2-\sin^2 2\phi}{2\sin 2\phi}}\cdot\frac{2\cos 2\phi(2+\sin^2 2\phi)}{\left(2-\sin^2 2\phi\right)^2}$.

r) $f'(x)=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{-2x^3+x}{\sqrt{\left(2x^3+x\right)^3}}\cdot\cos\frac{\pi x}{\sqrt{2x^3+x}}$.

5.1.5.

a) $f(x)=x^2+1+2x,\quad f'(x)=2x+2$.

b) $f(x)=\frac{7}{3}x^{-\frac{1}{6}}-\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}$, $f'(x)=-\frac{7}{18\sqrt[6]{x^7}}-\frac{1}{3\sqrt{x}}$.

c) $f(x)=\frac{\sqrt[3]{27^x}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{x^4}}}=\frac{1}{\sqrt[9]{9}}\cdot 3^x\cdot x^{-\frac{4}{9}}$, $f'(x)=\frac{3^x\left((\ln 3)x-\frac{4}{9}\right)}{\sqrt[9]{9x^{13}}}$.

d) $f(x)=e^x+e^{2x}-e^{-x}$, $f'(x)=e^x+2e^{2x}+e^{-x}$.

e) $f(x)=\left(\ln x^{-3}\right)\cdot e^{-(-x)}=-3e^x\cdot\ln x$, $f'(x)=-3e^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$.

(Felhasználtuk, hogy $\ln x^{-3}\equiv -3\ln x$, hiszen a két függvény értelmezési tartománya megegyezik, a függvényértékek azonosságát pedig az ismert logaritmus azonosság biztosítja.)

f) $f(x)=\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}$, $f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$. **g)** $f(x)=x$, $f'(x)=1$.

5.1.6.

a) A deriválhatóság szükséges feltétele, a folytonosság teljesül.

$x\le 0$ esetén $f(x)=f_1(x)$, ahol $f_1(x)=0$, ezért $x<0$ esetén a derivált, illetve az $x=0$ helyen a baloldali derivált $f_1'(x)=0$.

$0\le x\le 1$ esetén $f(x)=f_2(x)$, ahol $f_2(x)=x^2$, ezért $0<x<1$ esetén a derivált, illetve az $x=0$ helyen a jobboldali, az $x=1$ helyen a baloldali derivált $f_2'(x)=2x$.

$x\ge 1$ esetén $f(x)=f_3(x)$, ahol $f_3(x)=1$, ezért $x>1$ esetén a derivált, illetve az $x=1$ helyen a jobboldali derivált $f_3'(x)=0$.

Mivel az $x=0$ helyen a bal-, illetve jobboldali derivált is 0, ezért itt a függvény deriválható, de az $x=1$ helyen a baloldali derivált 2, a jobboldali derivált pedig 0, tehát itt a függvény nem deriválható.

(A deriváltfüggvény az $x = 1$ helyen nincs értelmezve.)

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ 2x, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

b) A függvény az $x = 0$ helyen nem deriválható.

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

5.1.7.

a) $(\ln x)^{(4)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(3)} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)'' = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{6}{x^4}$, $f^{(4)}(1) = -\frac{6}{1^4} = -6$.

b) $f^{(19)}(0) = -1$.

c) $f^{(999)}(\ln 3) = -\frac{1}{3}$.

d) $f^{(3)}(100) = \frac{3}{800000}$.

e) $f''(-1) = -\frac{1}{2}$.

f) $f''(x) = 3e^{3x-x^3}\left(3(1-x^2)^2 - 2x\right)$, $f''(\sqrt{3}) = 6(6-\sqrt{3})$.

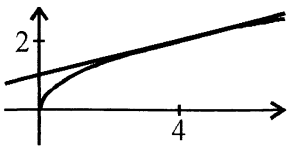
5.2. A differenciálszámítás alkalmazásai

5.2.1.

a) A $P_0(x_0, y_0)$ ponton áthaladó, m meredekségű egyenes általános egyenlete: $y - y_0 = m(x - x_0)$, ahol $m = f'(x_0)$. (Ld. az ábrát.)

$x_0 = 4$, $y_0 = f(x_0) = 2$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $m = f'(x_0) = \frac{1}{4}$.

Az érintő egyenes egyenlete: $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$, azaz $y = \frac{1}{4}x + 1$.



b) $y = x$.

c) $y = -\frac{3}{16}x - \frac{1}{2}$.

d) $y_0 = \frac{4}{e^2}$, $m = 0$, $y = \frac{4}{e^2}$.

e) $y = \frac{1}{\pi^2}x - \frac{2}{\pi}$.

f) $f'(x) = -\frac{2}{(2x-e)\cdot \ln^2(2x-e)}$, $y = -\frac{2}{e}x + 3$.

5.2.2.

a) $df = \frac{\pi}{2}dx$.

b) $df = -\frac{1}{96}dx$.

c) Az f(x) függvény x_0 helyen vett x-szerinti differenciálja: $df = f'(x_0)dx$. A megadott adatokkal:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}, \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}} = 1, \quad df = dx.$$

5.2.3. Ebben a feladatban és a továbbiakban is egy szorzat, hányados, összeg vagy különbség határértékének „típusát" az egyenlőségjel alatt zárójelben megadjuk, ahogy ezt a sorozatoknál is tettük. (Ez azt jelenti, hogy szorzat esetében a tényezők, összeg és különbség esetében a tagok, hányados esetében pedig a számláló és a nevező adott helyen vett határértékét külön-külön kiszámítjuk.)

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(2-x)^3}{x^2} \underset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-3(2-x)^2}{2x} \underset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6(2-x)}{2} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} 3(2-x) = +\infty$. (A szabályt kétszer alkalmaztuk.)

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-1)=-1.$ **c)** $0^+.$

d) $\dfrac{2}{3}.$ **e)** $0.$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x-e^{-x}}=0^+.$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)e^{x-1}\underset{(+\infty\cdot 0^+)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{e^{1-x}}\underset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{-e^{1-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x-1}=0^+.$

(Felhasználtuk, hogy $\left(e^{x-1}\right)^{-1}=e^{1-x}$.)

h) $0^+.$

i) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{x^{-1}}}{x^{-1}}\underset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x^{-2}\cdot e^{x^{-1}}}{-x^{-2}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$. (Megjegyezzük, hogy az $x\cdot e^{\frac{1}{x}}=\dfrac{x}{e^{-x^{-1}}}$ átalakítás zsákutcába vezet.)

j) $0^-.$ **k)** $-1.$

l) $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)\underset{(-\infty-(-\infty))}{=}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1-\cos x}{\sin x+x\cdot\cos x}=$

$=\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\lim\limits_{x\to0^-}}\dfrac{\sin x}{2\cos x-x\cdot\sin x}\underset{\left(\frac{0^-}{2}\right)}{=}0^-.$

5.2.4.

a) $f'(0)=f'(-3)=0,\quad f''(0)=0.$ **b)** $f'(x)\neq0,\quad f''\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0.$

c) $f'(x) = (1-\ln x)^2 + x \cdot 2(1-\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right) = (1-\ln x)^2 - 2(1-\ln x) =$

$= \ln^2 x - 1$. $f'(x) = 0$, ha $\ln^2 x = 1$, azaz $\ln x = 1$, tehát $x = e$,

vagy $\ln x = -1$, tehát $x = \frac{1}{e}$. $f'(e) = f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$.

$f''(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$, $f''(x) = 0$, ha $\ln x = 0$, azaz $x = 1$, $f''(1) = 0$.

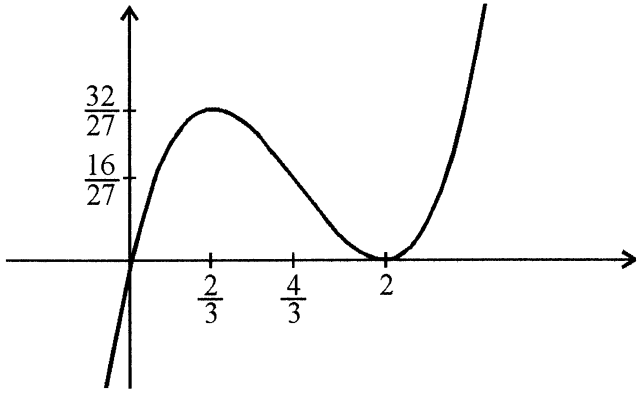
d) $f'(-1) = 0$, $f''(x) \neq 0$.

e) $f'(x) = e^x(\sin x + \cos x)$, $f'\left(-\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi\right) = 0$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

$f''(x) = 2e^x \cdot \cos x$, $f''\left(\frac{\pi}{2} + m \cdot \pi\right) = 0$, ahol $m \in \mathbf{Z}$.

5.2.5. Az alábbi feladatban, hacsak külön nem jelezzük, a deriváltfüggvények értelmezési tartománya megegyezik, vagy bővebb az eredeti függvény értelmezési tartományánál.

a) $R_f = \mathbf{R}$.



b)1. Értelmezési tartomány:

$D_f = \mathbf{R} =]-\infty; +\infty[$.

2. Párosság:

$f(-x) = \left((-x)^2 - 1\right)^3 = \left(x^2 - 1\right)^3 = f(x)$, tehát az f(x) függvény páros,

elemzését a $[0,+\infty[$ intervallumon végezzük, majd tükrözzük a képét az y-tengelyre.

3. Határértékek:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

4. Tengelymetszetek:

x-tm: $P_1(1;0)$, mert $(x^2-1)^3=0$, ha $x=1$ ($x\geq 0$ mellett),

y-tm: $P_2(0;-1)$, mert $f(0)=-1$.

5. Monotonitás:

$f'(x)=3(x^2-1)^2\cdot 2x=6x(x^2-1)^2$, $f'(x)=0$, ha $x=\pm 1$, vagy $x=0$.

Az értelmezési tartományt olyan intervallumokra bontjuk, melyeken belül a derivált előjele egységes. Most kivételesen megvizsgáljuk a $]-1;0[$ intervallumot is, hogy eldönthessük, van-e szélsőérték az $x=0$ helyen. (Az előjelvizsgálathoz felhasználjuk, hogy $(x^2-1)^2>0$, ha $x\neq\pm 1$.)

	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	1	$x>1$
$f'(x)$	–	0	+	0	+
$f(x)$	↓	P_2	↑		↑

Lokális minimum: $P_2(0;-1)$.

6. Konvexitás:

$f''(x)=6(x^2-1)^2+6x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x=6(x^2-1)(5x^2-1)$,

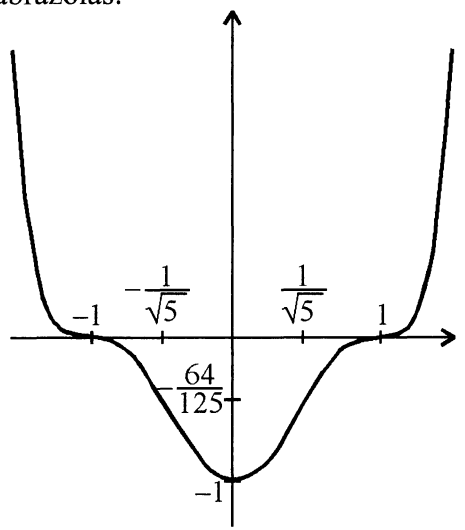
$f''(x)=0$, ha $x=1$, vagy $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\approx 0{,}45$ ($x\geq 0$ mellett).

Az értelmezési tartományt olyan intervallumokra bontjuk, melyeken belül a második derivált előjele egységes.

	$0<x<\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}<x<1$	1	$x>1$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	∪	P_3	∩	P_1	∪

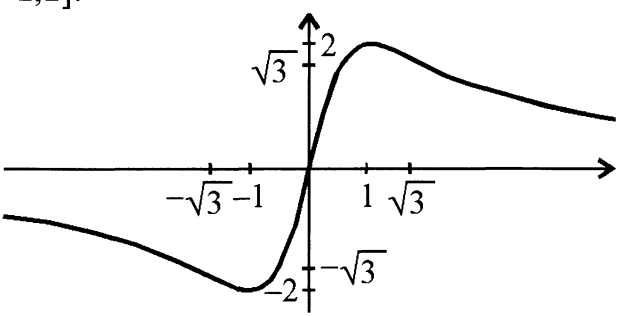
Inflexiós pontok: $P_3\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{-64}{125}\right)$, $P_1(1;0)$.

7. Függvényábrázolás:



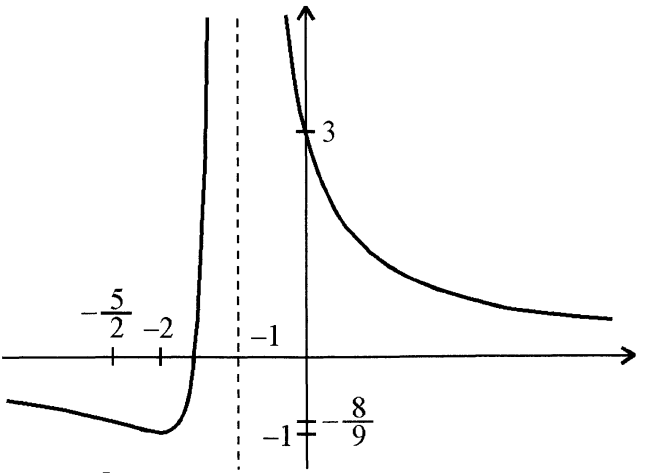
8. Értékkészlet:
$R_f = [-1;+\infty[$.

c) $R_f = [-2;2]$.



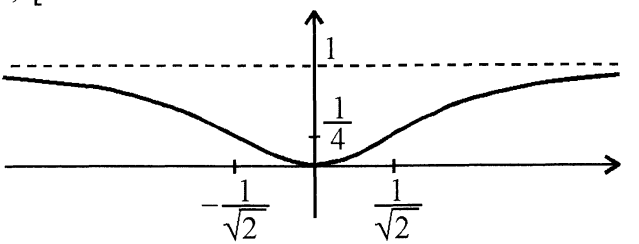
d) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^{\pm}$ $\lim\limits_{x\to -1^{\pm}} f(x) = +\infty$,

$$f'(x) = -2\frac{x+2}{(x+1)^3},\ f'(-2) = 0,\quad f''(x) = 4\frac{x+\frac{5}{2}}{(x+1)^4},\ f''\left(-\frac{5}{2}\right) = 0.$$

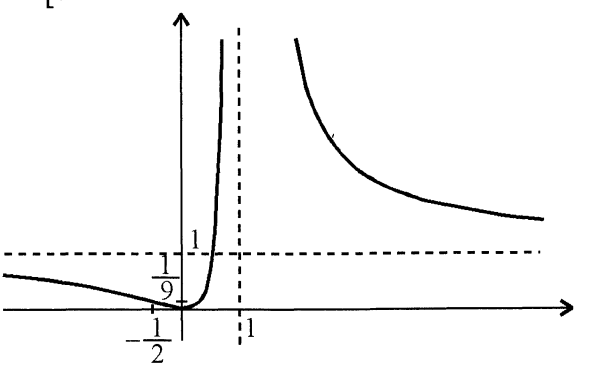


$R_f = [-1; +\infty[$.

e) $R_f = [0; 1[$.



f) $R_f = [0; +\infty[$.



g)1. Értelmezési tartomány:

$D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\} =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

2. Párosság:

$f(-x) = \dfrac{(-x-1)^3}{3(-x)^2} = \dfrac{(-x-1)^3}{3x^2}$, $f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)$, tehát a függvény nem páros és nem páratlan.

3. Határértékek:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{(x-1)^3}{3x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{3x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{3} = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} \dfrac{(x-1)^3}{3x^2} \underset{\left(\frac{-1}{0^+}\right)}{=} -\infty$.

4. Tengelymetszetek:

x-tm: $P_1(1;0)$, mert $(x-1)^3 = 0$, ha $x = 1$, y-tm nincs, mert $0 \notin D_f$.

5. Monotonitás:

$f'(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{3(x-1)^2 \cdot x^2 - (x-1)^3 \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{1}{3}\dfrac{x(x-1)^2(3x-2(x-1))}{x^4} =$

$= \dfrac{1}{3}\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$, $f'(x) = 0$, ha $x = 1$ vagy $x = -2$.

(Felhasználjuk, hogy $\dfrac{1}{3}(x-1)^2 > 0$, ha $x \neq 1$.)

	$x < -2$	-2	$-2 < x < 0$	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	–	+	0	+
$f(x)$	↑	P_2	↓	↑		↑

Lokális maximum: $P_2\left(-2;-\dfrac{9}{4}\right)$.

6. Konvexitás:

$f''(x) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x^3-3x+2}{x^3}\right)' = \dfrac{1}{3}\left(1-3x^{-2}+2x^{-3}\right)' = \dfrac{1}{3}\left(6x^{-3}-6x^{-4}\right) =$

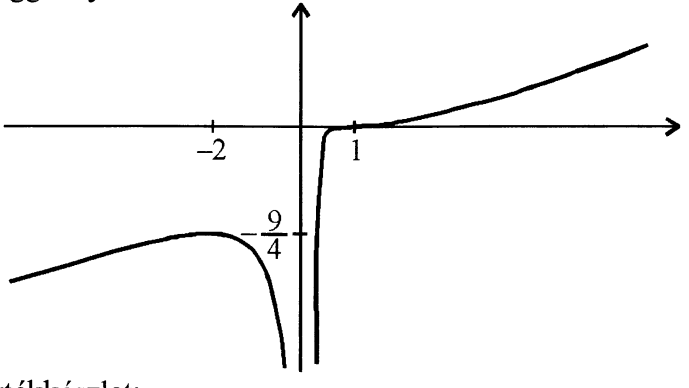
$= 2\dfrac{x-1}{x^4}$, $f''(x) = 0$, ha $x = 1$.

(Felhasználjuk, hogy $\dfrac{2}{x^4} > 0$, ha $x \in D_f$.)

	$x < 0$	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f''(x)$	–	–	0	+
$f(x)$	$\cap$	$\cap$	P_1	$\cup$

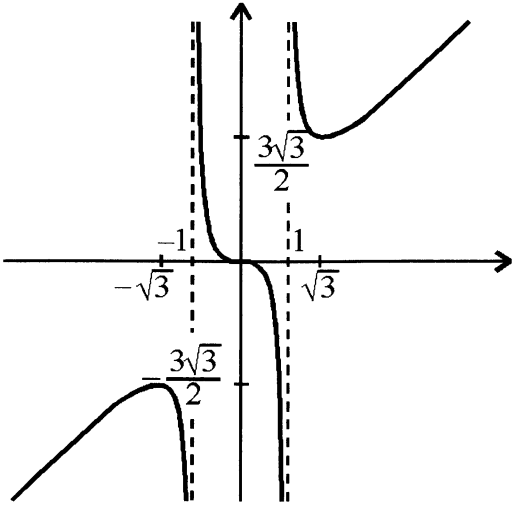
Inflexiós pont: $P_1(1;0)$.

7. Függvényábrázolás:

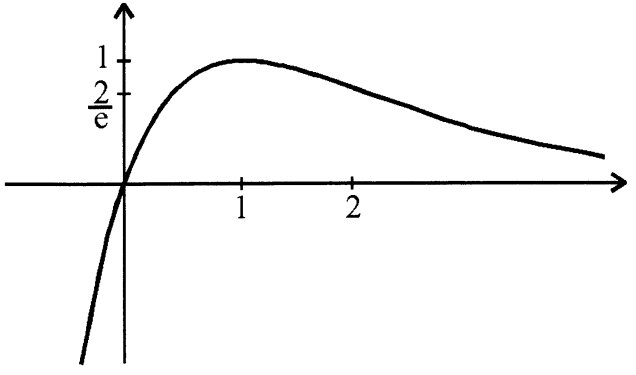


8. Értékkészlet:
$R_f = \mathbf{R}$.

h) $R_f = \mathbf{R}$.



i) $R_f =]-\infty;1]$.



j) 1. Értelmezési tartomány:

$D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\} =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

2. Párosság:

$f(-x) = (-x)\cdot e^{\frac{-1}{-x}} = -x\cdot e^{\frac{1}{x}}$, $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, tehát a függvény nem páros és nem páratlan.

3. Határértékek:

$$\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{\frac{-1}{x}} \underset{(-\infty\cdot 1)}{=} -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{\frac{-1}{x}} \underset{(+\infty\cdot 1)}{=} +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{-1}{x}} \underset{(0^+\cdot 0^+)}{=} 0^+,$$

$$\lim_{x\to 0^-} x\cdot e^{\frac{-1}{x}} \underset{(0^-\cdot +\infty)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-x^{-1}}}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^{-2}\cdot e^{-x^{-1}}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^-} \left(-e^{\frac{-1}{x}}\right) = -\infty.$$

4. Tengelymetszetek:

x-tm nincs, mert $x\cdot e^{\frac{-1}{x}} = 0$, ha $x = 0$, de $0 \notin D_f$,

y-tm nincs, mert $0 \notin D_f$.

5. Monotonitás:

$$f'(x) = e^{\frac{-1}{x}} + x\cdot e^{\frac{-1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2} = e^{\frac{-1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right), \quad f'(x) = 0, \text{ ha } x = -1.$$

(Felhasználjuk, hogy $e^{\frac{-1}{x}} > 0$, ha $x \in D_f$.)

	$x<-1$	-1	$-1<x<0$	$x>0$
$f'(x)$	+	0	–	+
$f(x)$	↑	P_1	↓	↑

Lokális maximum: $P_1(-1;-e)$.

6. Konvexitás:

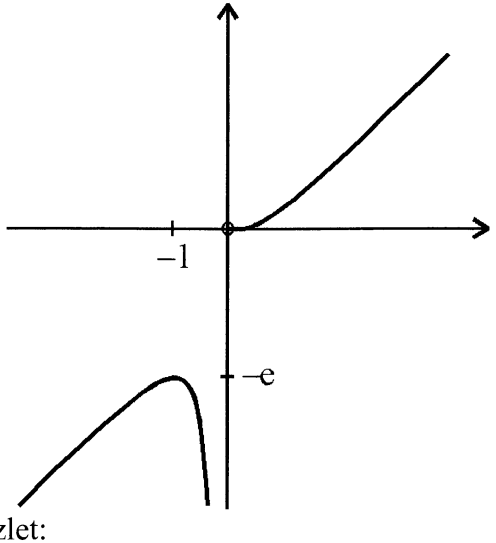
$$f''(x)=\left(e^{-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)+e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}-1\right)=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^3},\quad f''(x)\neq 0.$$

(Felhasználjuk, hogy $e^{-\frac{1}{x}}>0$, ha $x\in D_f$.)

	$x<0$	$x>0$
$f''(x)$	–	+
$f(x)$	∩	∪

7. Függvényábrázolás:



8. Értékkészlet:

$R_f=]-\infty;-e]\cup]0;+\infty[$.

k) $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{2-x}$ alakban vizsgáljuk a függvényt.

1. Értelmezési tartomány:

$D_f=\mathbf{R}\setminus\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.

2. Határértékek:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{2-x}\underset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{-1}=\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty,\quad \lim_{x\to2^-}\frac{e^{-x}}{2-x}\underset{\left(\frac{e^{-2}}{0^+}\right)}{=}+\infty,$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{e^{-x}}{2-x}\underset{\left(\frac{e^{-2}}{0^-}\right)}{=}-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{2-x}\underset{\left(\frac{0^+}{-\infty}\right)}{=}0^-.$$

3. Tengelymetszetek:

x-tm nincs, mert $e^{-x}\neq0$, y-tm: $P_1\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$, hiszen $f(0)=\dfrac{1}{2}$.

4. Monotonitás:

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}(2-x)-e^{-x}(-1)}{(2-x)^2}=\frac{e^{-x}(x-1)}{(2-x)^2},\quad f'(x)=0,\ \text{ha } x=1.$$

(Felhasználjuk, hogy $\dfrac{e^{-x}}{(2-x)^2}>0$, ha $x\in D_f$.)

	$x<1$	1	$1<x<2$	$x>2$
$f'(x)$	–	0	+	+
$f(x)$	↓	P_2	↑	↑

Lokális minimum: $P_2\left(1;\dfrac{1}{e}\right)$.

5. Konvexitás:

$$\left(e^{-x}(x-1)\right)'=-e^{-x}(x-1)+e^{-x}=e^{-x}(2-x),\ \left((2-x)^2\right)'=-2(2-x)$$

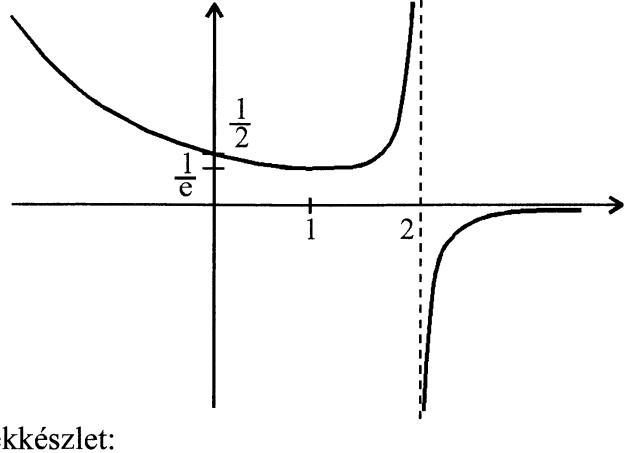
felhasználásával $f''(x)=\dfrac{e^{-x}(2-x)(2-x)^2+2e^{-x}(x-1)(2-x)}{(2-x)^4}=$

$$= \frac{e^{-x}(2-x)\left((2-x)^2+2(x-1)\right)}{(2-x)^4} = \frac{e^{-x}\left(x^2-2x+2\right)}{(2-x)^3}, \quad f''(x) \neq 0.$$

(Felhasználjuk, hogy $e^{-x}\left(x^2-2x+2\right) > 0$.)

	$x < 2$	$x > 2$
$f''(x)$	+	–
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

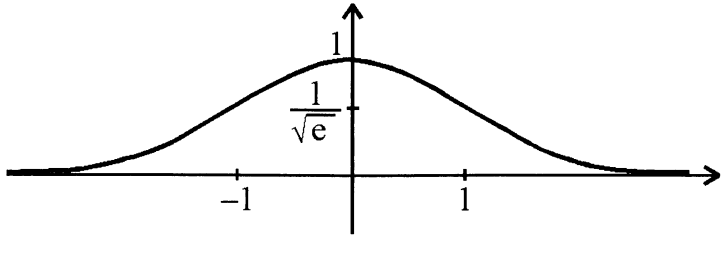
6. Függvényábrázolás:



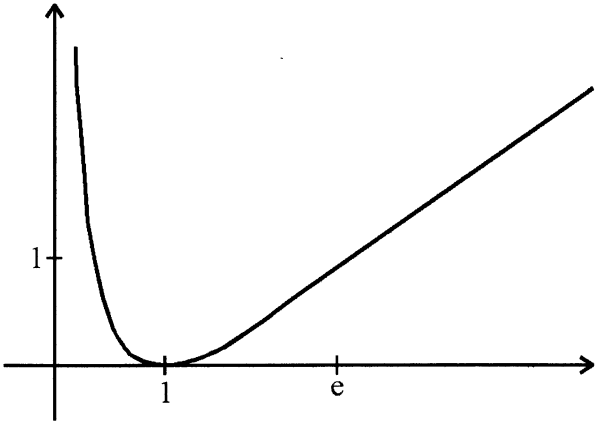
7. Értékkészlet:

$$R_f =]-\infty; 0[\cup \left[\frac{1}{e}; +\infty\right[.$$

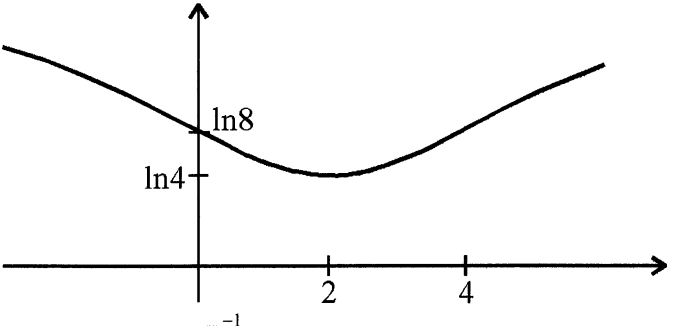
I) $R_f =]0;1]$. Megjegyezzük, hogy a függvény fontos szerepet játszik a valószínűségszámításban.



m) $R_f = [0; +\infty[$.



n) $R_f = [\ln 4, +\infty[$.



o) A függvényt $f(x) = \dfrac{x^{-1}}{\ln x}$ alakban vizsgáljuk.

1. Értelmezési tartomány:

$D_f = \mathbf{R}^+ \setminus \{1\} =]0;1[\cup]1; +\infty[$.

2. Határértékek:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{\ln x} \underset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+} = \frac{-x^{-2}}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^{-1}}{\ln x} \underset{\left(\frac{1}{0^-}\right)}{=} -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^{-1}}{\ln x} \underset{\left(\frac{1}{0^+}\right)}{=} +\infty, \quad \lim_{x\to \infty} \frac{x^{-1}}{\ln x} \underset{\left(\frac{0^+}{\infty}\right)}{=} 0^+.$$

3. Tengelymetszetek:

x-tm nincs, mert $x^{-1} \neq 0$, y-tm: nincs, mert $0 \notin D_f$.

4. Monotonitás:

$$f'(x)=\frac{-x^{-2}\cdot\ln x-x^{-1}\cdot x^{-1}}{(\ln x)^2}=\frac{-x^{-2}(\ln x+1)}{\ln^2 x}=-\frac{\ln x+1}{(x\cdot\ln x)^2},$$

$f'(x)=0$, ha $\ln x=-1$, azaz $x=\frac{1}{e}$.

(Felhasználjuk, hogy $(x\cdot\ln x)^2>0$, ha $x\in D_f$.)

	$0<x<\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}<x<1$	$x>1$
$f'(x)$	+	0	–	–
$f(x)$	↑	P_1	↓	↓

Lokális maximum: $P_1\left(\frac{1}{e};-e\right)$.

5. Konvexitás:

$$\left((x\cdot\ln x)^2\right)'=2(x\cdot\ln x)(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x})=2x\cdot\ln x\cdot(\ln x+1)$$

felhasználásával $f''(x)=-\dfrac{\frac{1}{x}(x\cdot\ln x)^2-2x\cdot\ln x(\ln x+1)^2}{(x\cdot\ln x)^4}=$

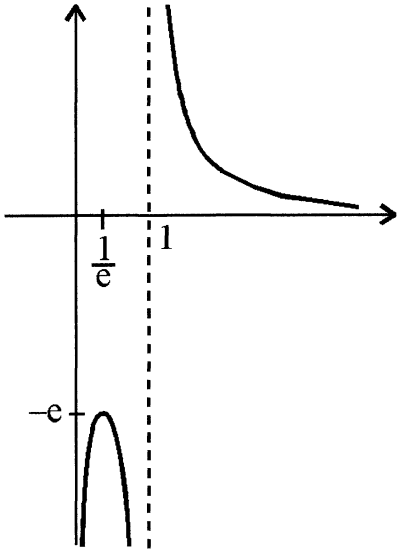
$$=-\frac{(x\cdot\ln x)\left(\ln x-2(\ln x+1)^2\right)}{(x\cdot\ln x)^4}=-\frac{\ln x-2(\ln^2 x+2\ln x+1)}{(x\cdot\ln x)^3}=$$

$$=\frac{2\ln^2 x+3\ln x+2}{(x\cdot\ln x)^3},\quad f''(x)\neq 0,\ \text{mert } 2a^2+3a+2\neq 0.$$

(Felhasználjuk, hogy $2\ln^2 x+3\ln x+2>0$.)

	$x<1$	$x>1$
$f''(x)$	–	+
$f(x)$	∩	∪

6. Függvényábrázolás:



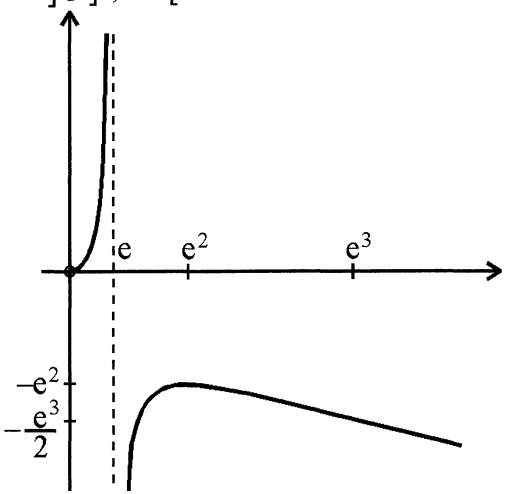
7. Értékkészlet:

$R_f =]-\infty; -e] \cup]0; +\infty[$.

p) $D_f = \mathbf{R}^+ \setminus \{e\}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0^+$ $\lim\limits_{x\to e^{\pm}} f(x) = \mp\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

$f'(x) = \dfrac{2-\ln x}{(1-\ln x)^2}$, $f'(e^2) = 0$, $f''(x) = \dfrac{3-\ln x}{x(1-\ln x)^3}$, $f''(e^3) = 0$.

$R_f =]-\infty; -e^2] \cup]0; +\infty[$.



q)1. Értelmezési tartomány:

$D_f = [2; +\infty[$.

2. Határértékek:

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} (3-x)\sqrt{x-2} \underset{(-\infty \cdot +\infty)}{=} -\infty$.

3. Tengelymetszetek:

x-tm: $P_1(2; 0), P_2(3; 0)$, hiszen $f(x) = 0$, ha $x = 2$, vagy $x = 3$,

y-tm nincs, mert $0 \notin D_f$.

4. Monotonitás:

$$f'(x) = -\sqrt{x-2} + (3-x)\frac{1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{-2(x-2)+(3-x)}{2\sqrt{x-2}} = \frac{-3x+7}{2\sqrt{x-2}},$$

$D_{f'} =]2; +\infty[, \quad f'(x) = 0$, ha $x = \frac{7}{3}$.

(Felhasználjuk, hogy $2\sqrt{x-2} > 0$, ha $x \in D_{f'}$.)

	$2 < x < \frac{7}{3}$	$\frac{7}{3}$	$x > \frac{7}{3}$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	↑	P_3	↓

Lokális maximum: $P_1\left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3\sqrt{3}}\right), \quad \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}38$.

5. Konvexitás:

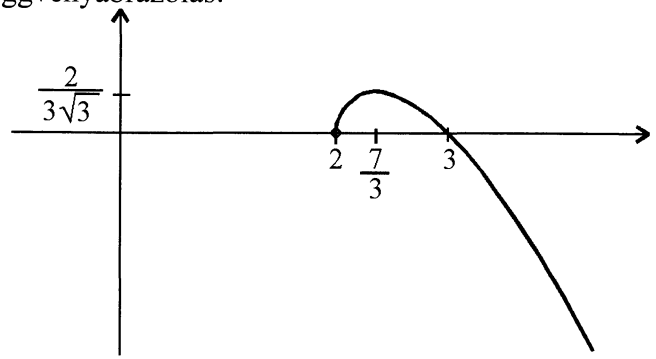
$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-3\sqrt{x-2} - (-3x+7)\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{x-2} = \frac{-6(x-2)-(-3x+7)}{4(x-2)\sqrt{x-2}} =$$

$$= \frac{-3x+5}{4(x-2)\sqrt{x-2}}, \quad D_{f''} =]2; +\infty[, \quad f''(x) \neq 0, \text{ mert } \frac{3}{5} \notin D_{f''}.$$

(Felhasználjuk, hogy $4(x-2)\sqrt{x-2} > 0$, ha $x \in D_{f''}$.)

	$x > 2$
$f''(x)$	–
$f(x)$	$\cap$

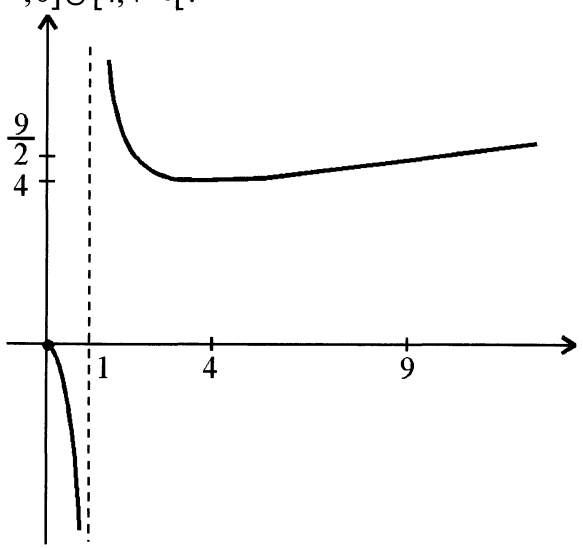
6. Függvényábrázolás:



7. Értékkészlet:

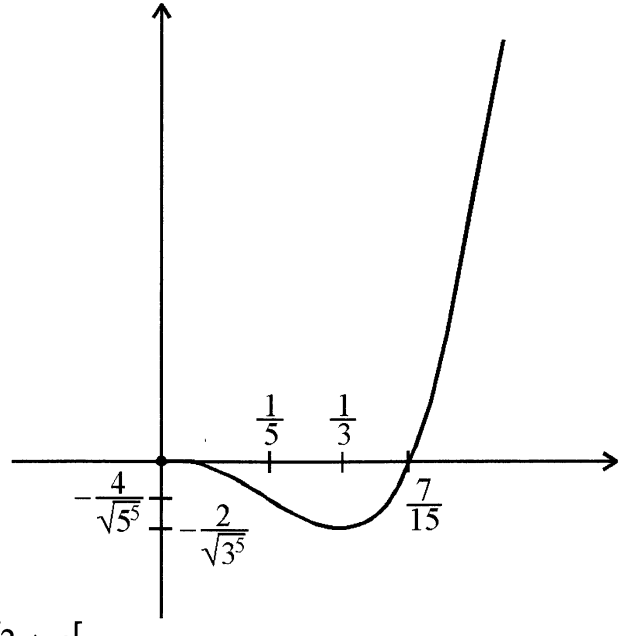
$$R_f = \left]-\infty; \frac{2}{3\sqrt{3}}\right].$$

r) $R_f =]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$.

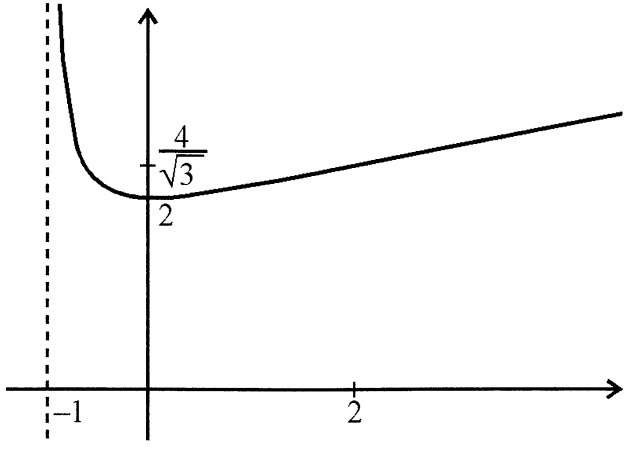


s) $D_f = [0;+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

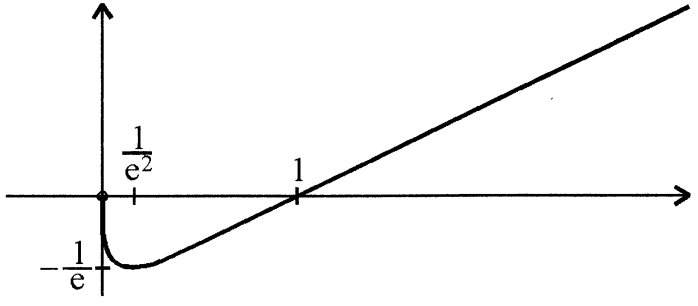
$f'(x) = \frac{35}{2}x^{\frac{3}{2}}(3x-1)$, $f''(x) = \frac{105}{4}x^{\frac{1}{2}}(5x-1)$, $R_f = \left[-\frac{2}{\sqrt{3^5}};+\infty\right[$.



t) $R_f = [2;+\infty[$.



u) $R_f = \left[-\frac{1}{e}; +\infty\right[$.



5.2.6.

a) Maximum: $f(0) = 1$, minimum: $f(-1) = 0$.

b) Maximum: $f(1) = e^2$, minimum: $f(0) = 0$. (Megjegyezzük, hogy a minimum értéke rögtön adódik az $x^2 \geq 0, e^{2x} > 0$ egyenlőtlenségek figyelembevételével.)

c) $\left[\frac{1}{e^2}; e\right] \subset D_f \quad f'(x) = (1 - \ln x) + x\left(-\frac{1}{x}\right) = -\ln x, \quad f'(1) = 0$.

A deriváltfüggvény segítségével monotonitásvizsgálatot végzünk a függvényen a megadott intervallum fölött.

	$\frac{1}{e^2} \leq x < 1$	1	$1 < x \leq e$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	↑	lok. max.	↓

A függvény menete alapján a maximum: $f(1) = 1$, a minimum lehetséges helyei: $x = \frac{1}{e^2}$, vagy $x = e$. Mivel $f(e) = 0 < \frac{3}{e^2} = f\left(\frac{1}{e^2}\right)$, ezért a minimum: $f(e) = 0$.

d) $f'(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{\left(x^2-2x+5\right)^3}}$, $f'(1)=0$, $f(0)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0^+$.

Maximum: $f(1)=\dfrac{1}{2}$, minimum nincs.

5.2.7.

a) $R_f=[3;+\infty[$. **b)** $]0;1[$.

c) A megadott intervallumon érvényes az $\ln x^2\equiv 2\ln x$ azonosság.

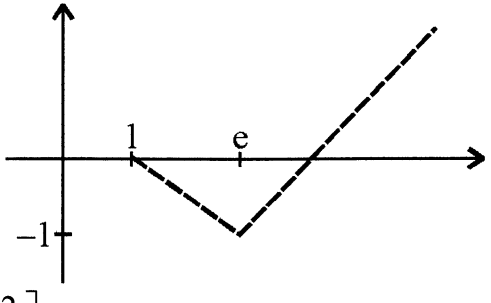
$[1;+\infty[\subset D_f$ $f'(x)=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}-2\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x}(\ln x-1)$, $f'(e)=0$.

A deriváltfüggvény segítségével monotonitásvizsgálatot végzünk a függvényen a megadott intervallum fölött.

	$1\le x<e$	e	$x>e$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	↓	lok. min.	↑

$f(1)=0$, $f(e)=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x\cdot(\ln x-2))=(+\infty\cdot+\infty)=+\infty$.

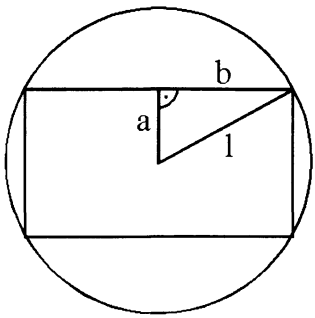
A függvény menetét vázolva, s felhasználva, hogy a függvény folytonos, értékkészlete a fenti adatokból leolvasható: $R_f=[-1;+\infty[$.



d) $R_f=\left[0;\dfrac{\ln 2}{2}\right]$.

e) $f'(x)=\dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}}$, $f'(x)>0$, $R_f=\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$.

5.2.8. Válasszuk a téglalap oldalainak felét a illetve b egységnek.



Ekkor nyilván $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ és $b = \sqrt{1-a^2}$ A téglalap területe: $T(a) = 2a \cdot 2b = 4a\sqrt{1-a^2}$. Vizsgáljuk meg a T(a) függvény menetét.

$$T'(a) = 4\left(\sqrt{1-a^2} + a \cdot \frac{-2a}{2\sqrt{1-a^2}}\right) = 4\left(\sqrt{1-a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{1-a^2}}\right) = 4\frac{1-2a^2}{\sqrt{1-a^2}}$$

A deriváltfüggvény zérushelye $0 < a < 1$ esetén $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

	$0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$
T′(a)	+	0	–
T(a)	↑	lok. max.	↓

Látszik, hogy az $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ helyen lokális és egyben abszolút maximuma van a területfüggvénynek. Ekkor $b = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tehát a négyzet esetében maximális a terület.

5.2.9. $P(r) = I^2 \cdot r = \left(\frac{U}{R+r}\right)^2 \cdot r = U^2 \frac{r}{(R+r)^2}$, $P'(R) = 0$.

Az $r = R$ helyen a P(r) függvénynek abszolút maximuma van.

5.2.10.

a) A profitfüggvény: $P(x) = R(x) - C(x) = -x^3 + 12x^2 - 21x - 25$, $x \geq 0$. A határprofitfüggvény: $MP = P'(x) = -3x^2 + 24x - 21$.

b) Egységnyi termelés növekedés esetén a többletköltséget a $MC = C'(x)$ függvény segítségével határozzuk meg az adott termelési szinten. $MC = \left(x^3 - 15x^2 + 76x + 25\right)' = 3x^2 - 30x + 76$. 2000 tonnás termelésnél a költségnövekedés $C'(2) = 28$, azaz 28000 pénzegység. 4000 tonnás termelésnél a költségnövekedés $C'(4) = 4$, azaz 4000 pénzegység.

c) $P'(x) = -3x^2 + 24x - 21 = 0$, $x_1 = 7$, $x_2 = 1$.

	$0 \leq x < 1$	1	$1 < x < 7$	7	$x > 7$
$P'(x)$	–	0	+	0	–
$P(x)$	↓	lok. min.	↑	lok. max	↓

Tehát 7000 tonnás termelés esetén lesz maximális a profit.

5.2.11. 10000 darab.

5.2.12.

a) 100 pénzegység. **b)** 500 darab.

6.EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK HATÁROZATLAN INTEGRÁLJAI

6.1. Alapintegrálokkal megoldható feladatok

6.1.1.

a) Az $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \in \mathbf{R},\ \alpha \neq -1)$ alapintegrált az $\alpha = 2$, $\alpha = 1$ és $\alpha = 0$ értékekre felírva azt kapjuk, hogy az x^2, x és 1 egy-egy primitív függvénye: $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^2}{2}$ és x. Mivel egy számmal szorzott függvény egy primitív függvényét úgy kapjuk meg, hogy a függvény egy primitív függvényét megszorozzuk a számmal, az előbbieket felhasználva nyilvánvaló, hogy a $3x^2$, 2x és 1 egy-egy primitív függvénye: x^3, x^2 és x. Tehát:

$$\int\left(3x^2 + 2x + 1\right)dx = x^3 + x^2 + x + C.$$

b) $$\frac{5x^4}{4} - \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^{-3}}{3} + C = \frac{5x^4}{4} - \frac{4x\sqrt{x}}{3} + \frac{1}{3x^3} + C.$$

c) $$\int \frac{\left(2\cdot\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}\right)^2}{x^2}\,dx = \int \frac{4x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{5}{6}} + x}{x^2}\,dx =$$

$$= \int\left(4x^{-\frac{4}{3}} - 4x^{-\frac{7}{6}} + \frac{1}{x}\right)dx = -12x^{-\frac{1}{3}} + 24x^{-\frac{1}{6}} + \ln|x| + C =$$

$$= -\frac{12}{\sqrt[3]{x}} + \frac{24}{\sqrt[6]{x}} + \ln|x| + C.$$

d) $$\frac{15x^{\frac{7}{5}}}{28} - \frac{5x^{\frac{13}{20}}}{13} - \frac{5x^{-\frac{1}{10}}}{2} + C = \frac{15x\sqrt[5]{x^2}}{28} - \frac{5\sqrt[20]{x^{13}}}{13} - \frac{5}{2\sqrt[10]{x}} + C.$$

e) Az $\int e^x dx = e^x + C$, az $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$ alapintegrálokat felhasználva a következő eredményt kapjuk:
$\int \left(2 \cdot e^x - 3\sin x\right) dx = 2 \cdot e^x + 3\cos x + C$.

f) $3 \cdot \frac{10^x}{\ln 10} + 5\sin x + C$.

g) $4\,\mathrm{sh}\, x - 3\,\mathrm{ch}\, x + C$.

h) $\int \frac{2^x - 7 \cdot 5^x}{3^x} dx = \int \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - 7 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x \right) dx =$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^x \frac{1}{\ln \frac{2}{3}} - 7 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x \frac{1}{\ln \frac{5}{3}}$.

i) Ha egy racionális törtfüggvény számlálója nem alacsonyabb fokú, mint a nevezője, akkor a racionális törtfüggvény felírható egy racionális egészfüggvény, azaz egy polinom és egy olyan racionális törtfüggvény összegeként, amelynek a számlálója már alacsonyabb fokú, mint a nevezője. Így:
$\frac{3 + x^2}{1 + x^2} = \frac{2 + 1 + x^2}{1 + x^2} = \frac{2}{1 + x^2} + 1$. Tehát:
$\int \frac{3 + x^2}{1 + x^2} dx = \int \left(2 \cdot \frac{1}{1 + x^2} + 1 \right) dx = 2\,\mathrm{arctg}\, x + x + C$.

j) $\frac{2x^3 + 3x^2 + 2x + 4}{1 + x^2} = \frac{2x\left(1 + x^2\right) + 3\left(1 + x^2\right) + 1}{1 + x^2} = 2x + 3 + \frac{1}{1 + x^2}$.
$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 2x + 4}{1 + x^2} dx = \int \left(2x + 3 + \frac{1}{1 + x^2} \right) dx =$
$= x^2 + 3x + \mathrm{arctg}\, x + C$.

k) $-x + \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + C$.

l) $-\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + C$.

m) Nyilvánvaló, hogy: $\frac{1-(1-x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - (1-x^2)$.

Így az alapintegrálok táblázatát felhasználva azt kapjuk hogy:

$$\int \frac{1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - (1-x^2)\right)dx =$$

$$= \arcsin x - x + \frac{x^3}{3} + C.$$

n) $-\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + 3\operatorname{arcsin} x + C$.

o) Ismert trigonometrikus azonosságok alapján a következőket írhatjuk:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Így az alapintegrálok táblázatát felhasználva azt kapjuk, hogy:

$$\int 4\operatorname{tg}^2 x\,dx = 4\int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = 4(\operatorname{tg} x - x) + C.$$

p) $-3\operatorname{ctg} x - \cos x + C$.

r) $\frac{2-\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{2-(\operatorname{ch}^2 x - 1)}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{3-\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{3}{\operatorname{ch}^2 x} - 1$. Így:

$$\int \frac{2-\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \int\left(\frac{3}{\operatorname{ch}^2 x} - 1\right)dx = 3\operatorname{th} x - x + C.$$

s) $x - \operatorname{cth} x + C$.

t) $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx = \int \frac{\sin x}{2}\,dx = -\frac{\cos x}{2} + C$.

u) $\frac{3}{2}\operatorname{ch} x + C$.

6.2. $\int f(ax+b)\,dx$ $(a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0)$ típusú feladatok

6.2.1.

a) Itt az $\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$ képlet használható az $f = x^{20}$, $a = 2$ és $b = 1$ választással. F az f egy primitív függvénye, tehát az $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ alapintegrált $\alpha = 20$-ra felírva azt kapjuk, hogy: $F = \frac{x^{21}}{21}$. Így:

$$\int (2x+1)^{20}\,dx = \frac{(2x+1)^{21}}{2 \cdot 21} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C.$$

b) $\frac{1}{9(1-x)^9} + C$.

c) $\int \frac{x+3}{x+2}\,dx = \int \left(\frac{x+2+1}{x+2}\right) dx = \int \left(1 + \frac{1}{x+2}\right) dx = x + \ln|x+2| + C$.

d) A számláló nem alacsonyabb fokú, mint a nevező. Ezért a számlálót elosztjuk a nevezővel. Először a számlálót és a nevezőt 2-vel megszorozva és a nevezőből (–1)-et kiemelve, majd célszerű átalakításokat végezve a következőt kapjuk:

$$\frac{x^2 - 3x + 4}{1 - 2x} = -\frac{1}{2}\frac{2x^2 - 6x + 8}{2x - 1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x(2x-1) - 5x + 8}{2x - 1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\frac{10x - 16}{2x - 1}\right) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\frac{5(2x-1) - 11}{2x - 1} = -\frac{1}{2}x +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(5 - \frac{11}{2x - 1}\right) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4} - \frac{11}{4} \cdot \frac{1}{2x - 1}.$$ Így:

$$\int\frac{x^2-3x+4}{1-2x}\,dx=\int\left(-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}-\frac{11}{4}\frac{1}{2x-1}\right)dx=$$

$$=-\frac{x^2}{4}+\frac{5}{4}x-\frac{11}{8}\ln|2x-1|+C,$$ ahol az utolsó tag integrálásánál az

$\int f(ax+b)\,dx=\frac{F(ax+b)}{a}+C$ képletet alkalmaztuk az $f=\frac{1}{x}$, $a=2$ és $b=-1$ választással.

e) $\frac{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}{3}+3(1-x)^{\frac{2}{3}}+C=\frac{(2x+3)\sqrt{2x+3}}{3}+3\cdot\sqrt[3]{(1-x)^2}+C.$

f) $\frac{\operatorname{tg}3x}{3}+C.$

g) $$\int\left(\frac{2}{1+4x^2}-\frac{1}{9x^2-1}+\frac{5}{\sqrt{1-16x^2}}\right)dx=$$

$$\int\left(2\cdot\frac{1}{1+(2x)^2}+\frac{1}{1-(3x)^2}+5\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}}\right)dx=\operatorname{arctg}2x+$$

$$+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+3x}{1-3x}\right|+\frac{5}{4}\arcsin 4x+C.$$

h) $$\int\left(\frac{1}{16+x^2}+\frac{3}{4-x^2}-\frac{2}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|-2\arcsin\frac{x}{3}+C.$$

i) $\frac{1}{15}\operatorname{arctg}\frac{5x}{3}+\frac{1}{12}\ln\left|\frac{4+3x}{4-3x}\right|-\frac{3}{7}\arcsin\frac{7x}{2}+C.$

j) $\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{3}\,x}{1-\sqrt{3}\,x}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{\frac{2}{5}}\,x+C.$

k) $\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{1+(x+2)^2}=\operatorname{arctg}(x+2)+C.$

l) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

m) $\arcsin(x-1)+C.$ **n)** $\arcsin\frac{x-3}{2\sqrt{3}}+C.$

6.2.2.

a) Egy lineáris függvény szinuszának, koszinuszának, szinuszhiperbolikuszának, és koszinuszhiperbolikuszának páros kitevős hatványait pl. az ún. linearizáló formulákkal integrálhatjuk. Most

$$\int\sin^2x\,dx=\int\frac{1-\cos2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin2x}{2}\right)+C.$$

b) $\frac{12x+8\sin2x+\sin4x}{32}+C.$ **c)** $\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}2x}{2}+x\right)+C.$

d) $\operatorname{sh}^4x=(\operatorname{sh}^2x)^2=\left(\frac{\operatorname{ch}2x-1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(\operatorname{ch}^2 2x-2\operatorname{ch}2x+1)=$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{ch}4x+1}{2}-2\operatorname{ch}2x+1\right)$. Így:

$$\int\operatorname{sh}^4x\,dx=\int\left(\frac{\operatorname{ch}4x}{8}-\frac{\operatorname{ch}2x}{2}+\frac{3}{8}\right)dx=\frac{\operatorname{sh}4x}{32}-\frac{\operatorname{sh}2x}{4}+\frac{3x}{8}+C.$$

e) $\int\frac{\left(1-e^{2x}\right)^2}{3e^x}=\int\frac{1-2e^{2x}+e^{4x}}{3e^x}dx==\frac{1}{3}\int\left(e^{-x}-2e^x+e^{3x}\right)dx=$

$=\frac{1}{3}\left(-e^{-x}-2e^x+\frac{e^{3x}}{3}\right)+C.$

f) $\frac{tg(1-3x)}{-3}+C.$ **g)** $-\frac{ctg(2x+5)}{2}+C.$

h) $2\,th\left(\frac{x}{2}+1\right)+C.$

i) Alkalmazzuk a $ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}-1$ azonosságot $\alpha=3x$-re!

$$ctg^2 3x\,dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 3x}-1\right)dx=-\frac{ctg3x}{3}-x+C.$$

j) $x-\frac{th4x}{4}+C.$

6.3. $\int[f(x)]^\alpha f'(x)dx\ \ (\alpha\in\mathbf{R},\ \alpha\neq-1)$ típusú feladatok

6.3.1.

a) A $2-3x^2$ deriváltja –6x. Ezt figyelembe véve az integrált a következő alakban írjuk fel:

$\int x\left(2-3x^2\right)^8dx=-\frac{1}{6}\int\left(2-3x^2\right)^8(-6x)dx$. Itt alkalmazhatjuk az

$\int f^\alpha f'dx=\frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ \ (\alpha\neq-1)$ képletet, amelyben most

$f=2-3x^2$ és $\alpha=8$. Így az integrál értéke:

$-\frac{1}{6}\frac{\left(2-3x^2\right)^{8+1}}{8+1}+C=-\frac{\left(2-3x^2\right)^9}{54}+C.$

b) $\frac{\left(4+2x^3\right)^{\frac{4}{3}}}{4}+C=\frac{\left(4+2x^3\right)\sqrt[3]{4+2x^3}}{4}+C.$

c) $-\frac{1}{9\left(1+x^3\right)^3}+C.$ **d)** $-\frac{\sqrt{1-x^4}}{2}+C.$

e) A sinx deriváltja cosx és a chx deriváltja shx. Így az $\int f^{\alpha} f' dx=\frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ képlet az első tagra az f = sinx és α = 2, a második tagra pedig az f = chx és α = 3 választásokkal alkalmazható. Tehát:

$$\int\left(\sin^2 x\cos x-2\mathrm{ch}^3 x\,\mathrm{sh}x\right)dx=\frac{\sin^3 x}{3}-2\cdot\frac{\mathrm{ch}^4 x}{4}+C=$$

$$=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\mathrm{ch}^4 x}{2}+C.$$

f) $$\int\left(\frac{\sin x}{\cos^4 x}+\frac{\mathrm{ch}\,x}{\sqrt{1+\mathrm{sh}\,x}}\right)dx=$$

$$=\int\left(-(\cos x)^{-4}(-\sin x)+(1+\mathrm{sh}\,x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{ch}\,x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3\cos^3 x}+2\sqrt{1+\mathrm{sh}x}+C.$$

g) A lineáris függvény szinuszának, koszinuszának, szinuszhiperbolikuszának és koszinuszhiperbolikuszának páratlan kitevős hatványait pl. úgy integrálhatjuk, hogy felírjuk az első hatványának és a maradó páros hatványának a szorzataként, majd a páros hatványt a négyzetes összefüggések segítségével a megfelelő másik függvényre írjuk át. Ebben a feladatban a $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ négyzetes összefüggést használhatjuk fel. Tehát:

$$\int\cos^3 dx=\int\cos^2 x\cdot\cos x\,dx=\int\left(1-\sin^2 x\right)\cos x\,dx=$$

$$= \int(\cos x - \sin^2 x \cos x)\,dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C,$$

ahol az integrálásnál a második tagban az $\int f^\alpha f'\,dx = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$ képletet alkalmaztuk az $f = \sin x$ és $\alpha = 2$ választással.

h) $\frac{\operatorname{ch}^3 x}{3} - \operatorname{ch} x + C.$

i) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x}\,dx = -\int(\operatorname{ctg}^5 x)\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = -\frac{\operatorname{ctg}^6 x}{6} + C.$

j) $\frac{\operatorname{th}^3 x}{3} + C.$

k) $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \int(\operatorname{tg}^2 x)\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int\left((\operatorname{tg}^2 x)\frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x\right)dx =$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

l) $-\frac{\operatorname{cth}^3 x}{3} - \operatorname{cth} x + x + C.$

m) $-\frac{2}{5}(1 - 2e^x)^{\frac{5}{4}} + C = -\frac{2}{5}(1 - 2e^x)\sqrt[4]{1 - 2e^x} + C.$

n) $\int \frac{(2 + e^{-x})^5}{e^x}\,dx = -\int(2 + e^{-x})^5(-e^{-x})\,dx = -\frac{(2 + e^{-x})^6}{6} + C.$

o) $-\frac{2}{(3 \cdot \ln 2)\left(3 - 2^{\frac{x}{2}}\right)^3} + C.$ **p)** $-\frac{(3 - 4 \cdot 10^x)^{11}}{44 \cdot \ln 10} + C.$

q) $\frac{\ln^4 x}{4}+C$.

r) $\frac{\ln^2 x}{2}+C$.

s) $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int(\ln x)^{-2}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{(\ln x)^{-2+1}}{-2+1}+C=-\frac{1}{\ln x}+C$.

t) $\frac{2}{3}\sqrt{2+3\cdot\ln x}+C$.

6.3.2.

a) $\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3}+C$.

b) $\frac{\operatorname{arctg}^2 2x}{4}+C$.

c) $\frac{3(\operatorname{arctg}x)^{\frac{4}{3}}}{4}+C=\frac{3\operatorname{arctg}x\sqrt[3]{\operatorname{arctg}x}}{4}+C$.

d) $-\frac{1}{3\operatorname{arctg}^3 x}+C$.

e) $\frac{\arcsin^5 3x}{15}+C$.

f) $\frac{\arcsin^2 x}{2}+C$.

g) $-\frac{1}{\arcsin x}+C$.

h) $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}\arcsin x}=\int(\arcsin x)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=2\sqrt{\arcsin x}+C$.

i) $-\frac{\arccos^4 x}{4}+C$.

j) $\frac{(3+2\operatorname{arctg}x)^6}{12}+C$.

6.4. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ típusú feladatok

6.4.1.

a) Az $1+x^2$ deriváltja 2x. Ezért az integrált a következő alakban írhatjuk fel:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx .$$

Most alkalmazhatjuk az $\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln|f| + C$ képletet, amelyen f helyére $(1+x^2)$-et kell írni. Tehát az integrál értéke: $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, ahol felhasználtuk, hogy $|1+x^2| = 1+x^2$, mivel az $1+x^2$ mindig pozitív.

b) $\int \frac{x-1}{x^2-2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+3)+C .$

c) $-\ln(1-\sin x)+C .$

d) $\frac{1}{3}\ln(2+3\operatorname{ch}x)+C .$

e) $\int \operatorname{ctg}x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + C .$

f) $\frac{1}{2}\ln \operatorname{ch}2x + C .$

g) $-\ln|2-e^x| + C .$

h) $\frac{2\cdot\ln(1+3^x)}{\ln 3} + C .$

i) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln|\ln x| + C .$

j) $-\frac{1}{2}\ln|3-2\ln x| + C .$

k) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctgx}} = \int \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\operatorname{arctgx}} dx = \ln|\operatorname{arctgx}| + C$.

l) $\ln|1+\operatorname{arcsinx}| + C$. **m)** $-\ln(\arccos x) + C$.

n) $-\frac{1}{3}\ln(4+3\operatorname{arcctgx}) + C$.

6.5. $\int f(g(x))g'(x)dx$ típusú feladatok

6.5.1.

a) Mivel a $-\frac{x^2}{2}$ deriváltja –x, legyen az

$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \quad (F' = f)$ képletben az $f = e^x$ és $g = -\frac{x^2}{2}$. Ekkor g' = –x és $F = e^x$. Így:

$$\int x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\int e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)dx = -e^{-\frac{x^2}{2}} + C.$$

b) $-\frac{\cos(1+2x^3)}{6} + C$.

c) Legyen az

$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \quad (F' = f)$ képletben $f = \frac{1}{1+x^2}$ és $g = x^2$. Ekkor $f(g(x)) = \frac{1}{1+x^4}$, $g' = 2x$ és $F = \operatorname{arctgx}$. Így:

$$\int \frac{x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctgx}^2 + C.$$

d) Legyen az $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \quad (F' = f)$ képletben

$f = \ln x$ és $g = \ln x$. Ekkor $f(g(x)) = \ln\ln x$, $g' = \frac{1}{x}$ és a 6.6.2. b) feladat megoldása alapján $F = x(\ln x - 1)$. Így:

$$\int \frac{\ln\ln x}{x}\,dx = \int (\ln\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx = (\ln x)(\ln\ln x - 1) + C.$$

e) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\cdot 3x^2\,dx = \arcsin x^3 + C.$

f) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = -\int e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = -e^{\frac{1}{x}} + C.$

6.6. Parciális integrálással megoldható feladatok

6.6.1.

a) Legyen a parciális integrálás $\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$ képletében $f' = e^{1-x}$ és $g = x$. Ekkor $f = -e^{1-x}$ és $g' = 1$. Így a feladat megoldása a következő:

$$\int x e^{1-x}\,dx = x(-e^{1-x}) - \int(-e^{1-x})\cdot 1\,dx = -x e^{1-x} - e^{1-x} + C =$$
$$= -e^{1-x}(x+1) + C.$$

b) $(x^2 - 2x + 3)e^x + C.$ **c)** $\frac{x\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$

d) $\int (x^2 + x)\sin x\,dx = (x^2 + x)(-\cos x) + \int (2x+1)\cos x\,dx =$
$= -(x^2 + x)\cos x + (2x+1)\sin x + 2\cos x + C =$
$= (2 - x^2 - x)\cos x + (2x+1)\sin x + C.$

e) $(2x+1)\operatorname{ch} x - 2\operatorname{sh} x + C.$

f) $\left(4x^2+6x+36\right)\operatorname{sh}\frac{x}{2}-\left(16x+12\right)\operatorname{ch}\frac{x}{2}+C.$

6.6.2.

a) Legyen a parciális integrálás $\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$ képletében $f' = x^2$ és $g = \ln x$. Ekkor $f = \frac{x^3}{3}$ és $g' = \frac{1}{x}$. Így:

$$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^3\ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2\,dx =$$

$$= \frac{x^3\ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C = \frac{x^3(3\ln x - 1)}{9} + C.$$

b) Gyakran a parciális integrálás képletét úgy alkalmazzuk, hogy az integrandus elé egy 1-es szorzót írunk és ezt választjuk f'-nek. Ebben a feladatban a parciális integrálás $\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$ képletében $f' = 1$ és $g = \ln x$, tehát $f = x$ és $g' = \frac{1}{x}$. Így:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C =$$

$$= x(\ln x - 1) + C.$$

c) $2\sqrt{x}\,(\ln x - 2) + C.$

d) $\int (2x+1)\ln^2 x\,dx = \left(x^2+x\right)\ln^2 x - 2\int (x+1)\ln x\,dx =$

$$= \left(x^2+x\right)\ln^2 x - 2\left(\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x - \int\left(\frac{x}{2}+1\right)dx\right) =$$

$$= \left(x^2+x\right)\ln^2 x - \left(x^2+2x\right)\ln x + \frac{x^2}{2} + 2x + C.$$

e) $\frac{\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x - x}{2} + C.$

f) $x\operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right) + C.$

g) Legyen először a parciális integrálás $\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$ képletében $f' = 3x^2$ és $g = \operatorname{arctgx}$. Ekkor $f = x^3$ és $g' = \frac{1}{1+x^2}$. Így:

$$\int 3x^2 \operatorname{arctgx}\,dx = x^3 \operatorname{arctgx} - \int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx .$$

A kapott racionális törtfüggvény számlálója nem alacsonyabb fokú, mint a nevezője, tehát elvégezzük az osztást:

$\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x(1+x^2)-x}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$. Ha az $\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln|f| + C$ képletben f helyére $(1+x^2)$-et írunk, akkor azt kapjuk, hogy a $\frac{2x}{1+x^2}$ egy primitív függvénye $\ln(1+x^2)$, vagyis az $\frac{x}{1+x^2}$ egy primitív függvénye $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Az elmondottakat felhasználva a következő eredményhez jutunk:

$$\int 3x^2 \operatorname{arctgx}\,dx = x^3 \operatorname{arctgx} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C .$$

h) $\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\operatorname{arctgx} - \frac{1}{2}\left(x - \operatorname{arctgx} - \ln(1+x^2)\right) + C .$

i) $\int \operatorname{arcsinx}\,dx = \int 1 \cdot \operatorname{arcsinx}\,dx = x \operatorname{arcsinx} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$$= x \operatorname{arcsinx} + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\,dx = x \operatorname{arcsinx} + \sqrt{1-x^2} + C .$$

j) $x \operatorname{arccos}3x - \frac{\sqrt{1-9x^2}}{3} + C .$

6.6.3.

a) Az $\int e^{ax+b} \cdot \sin(cx+d)\,dx$ és az $\int e^{ax+b} \cdot \cos(cx+d)\,dx$ (ahol a, b, c és d állandók) típusú integrálok egyikét parciálisan integrálva a másik típusú integrált kapjuk. Ezt – az első integrálásnál használt szereposztással – újra parciálisan integrálva az eredeti integrál egy számszorosához jutunk. Így a kapott egyenletből meghatározhatjuk az eredeti integrált.

Ebben a feladatban a parciális integrálás

$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$ képletében legyen $f' = e^x$ és $g = \sin 2x$.

Ekkor: $f = e^x$ és $g' = 2\cos 2x$.

Így:

$$\int e^x \sin 2x\,dx = e^x \sin 2x - 2\int e^x \cos 2x\,dx .$$

Most legyen a parciális integrálás felírt képletében $f' = e^x$ és $g = \cos 2x$. Ekkor: $f = e^x$ és $g' = -2\sin 2x$. Így:

$$\int e^x \cos 2x\,dx = e^x \cos 2x - \int e^x(-2\sin 2x)\,dx .$$

Ezt felhasználva az eredeti integrálra a következő egyenletet kapjuk:

$$\int e^x \sin 2x\,dx = e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4\int e^x \sin 2x\,dx .$$

Ebből az alábbi egyenlőséghez jutunk:

$$5\int e^x \sin 2x\,dx = e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + 5C ,$$

ahol a jobb oldalra egy állandót írtunk, hiszen a baloldal tartalmaz egy állandót. A célszerűség kedvéért ezt az állandót 5C alakban írtuk fel. Tehát a végeredmény:

$$\int e^x \sin 2x\,dx = \frac{e^x}{5}(\sin 2x - 2\cos 2x) + C .$$

b) $\dfrac{e^{2x+3}}{5}(2\cos x + \sin x) + C .$

6.7. Racionális törtfüggvények integrálása

6.7.1.

a) A $2x^2 - x - 1 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei $-\frac{1}{2}$ és 1. Így:

$2x^2 - x - 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1) = (2x+1)(x-1)$. Ezért a résztörtekre való felbontást a következő alakban kereshetjük:

$$\frac{x+2}{(2x+1)(x-1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-1},$$

mivel a felbontásban a (2x + 1) elsőfokú tényezőnek $\frac{A}{2x+1}$ és az x – 1 elsőfokú tényezőnek $\frac{B}{x-1}$ felel meg, ahol A és B állandók.

Az egyenlőség mindkét oldalát (2x + 1)(x – 1)-gyel megszorozva a következő egyenlőséghez jutunk:

(*) $x + 2 = A(x-1) + B(2x+1)$.

Az első résztört nevezőjének zérus-helye a $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Ezt a (*) egyenlőségbe az x helyére behelyettesítve azt kapjuk, hogy:

$-\frac{1}{2} + 2 = A\left(-\frac{1}{2} - 1\right)$, mivel a B(2x + 1) tényező az $x = -\frac{1}{2}$ értékénél 0. Ebből A = –1.

A második résztört nevezőjének zérushelye 1. Ezt az x helyére behelyettesítve a következő egyenlőséghez jutunk:

$1 + 2 = B(2 \cdot 1 + 1)$, mivel az A(x – 1) tényező az x = 1-nél 0.

Így B = 1.

A kapott értékeket felhasználva az alábbi felbontást kapjuk:

$\frac{x+2}{(2x+1)(x-1)} = -\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{x-1}$. Így:

$$\int \frac{x+2}{(2x+1)(x-1)}\,dx = \int\left(-\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$= -\frac{\ln|2x+1|}{2} + \ln|x-1| + C.$$

b) $\dfrac{x^3-4x^2+2x}{x^2-5x+6} = \dfrac{x(x^2-5x+6)+x^2-4x}{x^2-5x+6} = x +$

$$+\frac{x^2-5x+6+x-6}{x^2-5x+6} = x+1+\frac{x-6}{x^2-5x+6} = x+1+\frac{4}{x-2}-\frac{3}{x-3}.$$

$$\int\frac{x^3-4x^2+2x}{x^2-5x+6}\,dx = \int\left(x+1+\frac{4}{x-2}-\frac{3}{x-3}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + 4\ln|x-2| - 3\ln|x-3| + C.$$

c) $3\ln|x| - 3\ln|1-x| - \ln|1+x| + C.$

d) $3\ln|x-2| - 2\ln|x-1| - \ln|x+3| + C.$

e) A résztörtekre való felbontást a következő alakban kereshetjük:

$$\frac{x^2+3x+7}{(x-3)(x+2)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+2},$$

mivel a felbontásban az $x-3$ elsőfokú tényezőnek $\dfrac{A}{x-3}$ felel meg, továbbá $(x+2)^2$ az $x+2$ elsőfokú tényező második hatványa, aminek a $\dfrac{B}{(x+2)^2}+\dfrac{C}{x+2}$ összeg felel meg. A felírt egyenlőség mindkét oldalát $(x-3)(x+2)^2$-nel megszorozva az alábbi egyenlőséget kapjuk:

(*) $x^2+3x+7 = A(x+2)^2 + B(x-3) + C(x+2)(x-3)$

Az eredeti tört $(x-3)(x+2)^2$ nevezőjének zérushelyei: 3 és –2. A (*) egyenlőségben x helyére 3-at behelyettesítve a következő egyenlőséghez jutunk:

$3^2 + 3\cdot 3 + 7 = A(3+2)^2,$

mivel a jobb oldalon szereplő másik két tag értéke x = 3-nál 0. Így 25 = 25A, azaz A = 1. Ezután a (*) egyenlőségben az x helyére a nevező másik zérushelyét a (–2)-t írjuk. Ekkor azt kapjuk, hogy:

$(-2)^2+3(-2)+7=B(-2-3)$,

mivel a jobb oldalon szereplő másik két tag értéke x = –2-nél. Így: 5 = –5B, azaz B = –1. A (*) egyenlőség baloldalán az x^2 együtthatója 1. A jobb oldalon az $A(x+2)^2$-ből Ax^2-et, $C(x+2)(x-3)$-ból Cx^2-et kapunk, így ezen az oldalon az x^2 együtthatója A + C. Tehát 1 = A + C. Az A értéke 1 volt. Ezért C = 0. A kapott értékeket felhasználva a felbontás a következő:

$\frac{x^2+3x+7}{(x-3)(x+2)^2}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x+2)^2}$. Tehát a végeredmény:

$$\int\frac{x^2+3x+7}{(x-3)(x+2)^2}\,dx=\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x+2)^2}\right)dx=\ln|x-3|+\frac{1}{x+2}+C.$$

f) $\ln|x-2|+\frac{1}{x+1}-\ln|x+1|+C$.

g) $\frac{3}{x}-2\ln|x|-\ln|x+1|+3\ln|x-1|+C$.

h) A résztörtekre való felbontást a következő alakban kereshetjük:

$$\frac{x^2+7x-1}{(x-1)^2(x+6)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x+6)^2}+\frac{D}{x+6}.$$

A végeredmény:

$$\int\frac{x^2+7x-1}{(x-1)^2(x+6)^2}\,dx=\frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x+6)^2}-\frac{1}{x+6}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{x-1}+\ln|x-1|+\frac{1}{x+6}-\ln|x+6|\right)+C.$$

i) A nevező az x és a nem felbontható $1+x^2$ tényezők szorzata. A résztörtekre való felbontást a következő alakban kereshetjük:

$$\frac{x^2+x+2}{x\left(1+x^2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2},$$

mivel az elsőfokú x tényezőnek $\frac{A}{x}$ és a nem felbontható $1 + x^2$ tényezőnek $\frac{Bx+C}{1+x^2}$ felel meg. Mindkét oldalt $x\left(1+x^2\right)$-tel megszorozva a következő egyenlőséget kapjuk:

(*) $x^2+x+2=A\left(1+x^2\right)+\left(Bx+C\right)x$.

Az eredeti $x\left(1+x^2\right)$ nevezőnek egy zérushelye van és ez a 0. Ezt az (*) egyenlőségbe helyettesítve az alábbi egyenlőséghez jutunk:

$0^2+0+2=A\left(1+0^2\right)$, vagyis A = 2.

Így a (*) egyenlőség a következő alakban írható fel:

$x^2+x+2=2\left(1+x^2\right)+\left(Bx+C\right)x$, azaz

$x^2+x+2=\left(B+2\right)x^2+Cx+2$.

A baloldalon az x^2 együtthatója 1, a jobb oldalon B + 2, tehát B = –1.

A baloldalon az x együtthatója 1, a jobb oldalon C, tehát C = 1.

A kapott értékeket felhasználva az alábbi felbontáshoz jutunk:

$\frac{x^2+x+2}{x^3+x}=\frac{2}{x}+\frac{-x+1}{1+x^2}$. Így:

$$\int\frac{x^2+x+2}{x^3+x}\,dx=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{-x+1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=2\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\operatorname{arctg}x+C.$$

j) $-\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln\left(x^2+4\right)-2\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.

k) A nevező az x^2 és a nem felbontható $1 + x^2$ tényezők szorzata. A résztörtekre való felbontást a következő alakban kereshetjük:

$$\frac{3x-2}{x^2\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+B}{x^2+1},$$

mivel a felbontásban a nevezőben szereplő x elsőfokú tényező második hatványának $\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}$ és a nem felbontható x^2+1 tényezőnek $\frac{Cx+D}{x^2+1}$ felel meg. Mindkét oldalt $x^2\left(x^2+1\right)$-tel megszorozva a következő egyenlőséget kapjuk:

(*) $3x-2=A\left(x^2+1\right)+Bx\left(x^2+1\right)+\left(Cx+D\right)x^2$.

A tört $x^2\left(x^2+1\right)$ nevezőjének egy zérushelye van a 0. Ezt a (*) egyenlőségbe behelyettesítve az alábbi egyenlőséghez jutunk:

$3\cdot 0-2=A\left(0^2+1\right)$,

mivel a jobb oldalon szereplő másik két tag értéke x = 0 estén 0. Tehát A = –2.

Így a (*) egyenlőség a következő alakban írható fel:

$3x-2=-2\left(x^2+1\right)+Bx\left(x^2+1\right)+\left(Cx+D\right)x^2$, vagyis

$3x-2=\left(B+C\right)x^3+\left(D-2\right)x^2+Bx-2$.

Itt a baloldalon az x együtthatója 3, a jobboldalon B, tehát B = 3. A baloldalon az x^3 együtthatója 0, a jobboldalon B + C, tehát B + C =0. Mivel B = 3, ebből C = –3. A baloldalon az x^2 együtthatója 0, a jobb oldalon D – 2. tehát D = 2.

A kapott értékeket felhasználva a következő felbontást írhatjuk fel:

$\frac{3x-2}{x^2\left(x^2+1\right)}=\frac{-2}{x^2}+\frac{3}{x}+\frac{-3x+2}{x^2+1}$. Így a végeredmény:

$$\int\frac{3x-2}{x^4+x^2}\,dx=\int\left(\left(-2\right)\frac{1}{x^2}+3\cdot\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}+2\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{2}{x}+3\ln|x|-\frac{3}{2}\ln\left(x^2+1\right)+2\operatorname{arctg}x+C.$$

l) $\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+4\right)+C$.

6.8. Integrálás helyettesítéssel

6.8.1.

a) Ha egy integrálban egy lineáris függvény különböző gyökei szerepelnek, és a lineáris függvénynek azt a gyökét vezetjük be új változónak, amelynek a gyökkitevője a szereplő gyökkitevők legkisebb közös többszöröse, akkor általában egy racionális törtfüggvény integráljához jutunk. Ebben a feladatban legyen:

$t = \sqrt{x+1}$, azaz $x = t^2 - 1$, tehát $dx = 2t\,dt$.

Ezeket az integrálba behelyettesítve azt kapjuk, hogy:

$$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx = \int\left(t^2-1\right)^2 t\cdot 2t\,dt = \int\left(t^4-2t^2+1\right)2t^2\,dt =$$

$$= 2\int\left(t^6-2t^4+t^2\right)dt = 2\left(\frac{t^7}{7}-2\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)+C =$$

$$= 2\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^7}{7}+\frac{2\left(\sqrt{x+1}\right)^5}{5}+\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3}\right)+C,$$ ahol az utolsó lépésben visszahelyettesítettük a t helyére a $\left(\sqrt{x+1}\right)$-et.

b) Legyen $\sqrt[3]{x} = t$, azaz $x = t^3$ és $dx = 3t^2$. Ekkor:

$$\int\frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}} = \int\frac{3t^2}{3t^3+t^2}\,dt = \int\frac{3}{3t+1}\,dt = \ln|3t+1|+C =$$

$$= \ln\left|3\cdot\sqrt[3]{x}+1\right|+C.$$

c) $2\left(\sqrt{x+4}-\ln\left|\frac{2+\sqrt{x+4}}{2-\sqrt{x+4}}\right|\right)+C.$ **d)** $x-2\left(\sqrt{x}-\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right)+C.$

e) $x+4\left(\sqrt{x-1}+\ln\left|\sqrt{x-1}-1\right|\right)+C.$ **f)** $3\left(\sqrt[3]{x}+\ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right|\right)+C.$

g) $\frac{4}{3}\ln\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)+C.$

h) $4\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+\ln\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}+1\right)+2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2\cdot\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt{3}}+C.$

i) $6\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{4}+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right)+C.$

j) $\ln x+\dfrac{6}{\left(1+\sqrt[12]{x}\right)^2}+\dfrac{12}{1+\sqrt[12]{x}}-12\cdot\ln\left(1+\sqrt[12]{x}\right)+C.$

6.8.2.

a) Legyen $t=e^x$. Ekkor: $e^{2x}=t^2$, $x=\ln t$ és $dx=\dfrac{dt}{t}$. Így:

$$\int\frac{dx}{e^{2x}-e^x}=\int\frac{1}{t^2-t}\cdot\frac{dt}{t}=\int\frac{dt}{t^2(t-1)}=\int\left(-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{t}-\ln|t|+\ln|t-1|+C=e^{-x}-x+\ln\left|e^x-1\right|+C.$$

b) $x-\ln\left(e^x+1\right)+\dfrac{1}{e^x+1}+C.$

c) Legyen $t=e^x$. Ekkor: $\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\dfrac{t-\frac{1}{t}}{2}=\dfrac{t^2-1}{2t}$ és $dx=\dfrac{dt}{t}$.

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sh}x}=\int\frac{2t}{t^2-1}\cdot\frac{dt}{t}=\int\frac{2}{t^2-1}dt=\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{1-e^x}{1+e^x}\right|+C=\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+C.$$

d) $x-\ln\left(1+e^x\right)+2\operatorname{arctg}e^{\frac{x}{2}}+C.$

e) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{3}\ln\left|e^x-1\right|-\dfrac{1}{6}\ln\left(e^x+2\right)+C.$ **f)** $\operatorname{ch}x+\ln\left|\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right|+C.$

6.8.3.

a) A sinx és cosx racionális törtfüggvényeit gyakran a $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítéssel célszerű integrálni. Ekkor $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Ezeket behelyettesítve azt kapjuk, hogy:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C,$$

ahol az utolsó lépésben visszaírtuk a t helyére a $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$-t.

b) $\ln\left|1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

c) $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{3} + C$.

d) $2\ln\left|1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \ln\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) + C$.

e) $\frac{4}{5}\ln\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{5\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1} + \frac{6}{5}\left(\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2} + \frac{x}{2}\right) + C$.

f) $\frac{4}{25}\ln\left|\frac{3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 8\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right| + \frac{3}{25}x + C$.

6.8.4.

a) Ha egy másodfokú kifejezés négyzetgyökét tartalmazó integrál teljes négyzetté való kiegészítés után $\sqrt{a^2 - (cx+d)^2}$ $(a, b, c \in \mathbf{R}$ és $a > 0)$ típusú kifejezést tartalmaz, akkor gyakran a cx + d = a·sint (vagy a cx + d = a·cost) helyettesítést célszerű alkalmazni. Ebben a feladatban legyen x = 2sint, ekkor dx = 2cost dt. Ezeket az integrálba behelyettesítve azt kapjuk, hogy:

$$\int \sqrt{4 - x^2}\,dx = \int \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t\,dt = \int 4\cos^2 t\,dt.$$

Most alkalmazva a

$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ ún. linearizáló formulát a következőhöz jutunk:

$$\int 4\cos^2 t\,dt = 2\int(1+\cos 2t)\,dt = 2\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C.$$

Ebből felhasználva, hogy $\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}$ és visszaírva az (x = 2 sint)-ből adódó $t = \arcsin\frac{x}{2}$ értéket, az alábbi eredményt kapjuk:

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx = 2\left(\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)+C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+C.$$

Megjegyezzük, hogy valójában kétszer is „csaltunk", mivel $\sqrt{4-4\sin^2 t} = 2|\cos t|$ és $\cos t = \pm\sqrt{1-\sin^2 t}$. A végeredmény mégis helyes, amiről differenciálással könnyű meggyőződni. Tehát arról van szó, hogy „a két csalás kiegyenlíti egymást", amit nem nehéz precízen is bizonyítani.

b) $5+4x-x^2 = 9-(x-2)^2$. Tehát, legyen $x-2 = 3\sin t$. Ekkor: $x = 2+3\sin t$ és $dx = 3\cos t\,dt$. Így:

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx = \int\frac{(2+3\sin t)^2}{3\cos t}\cdot 3\cos t\,dt =$$

$$= \int(4+12\sin t+9\sin^2 t)\,dt = \int\left(4+12\sin t+9\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= 4t-12\cos t+\frac{9}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)+C = \frac{17}{2}t-12\sqrt{1-\sin^2 t}-$$

$$-\frac{9}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}+C = \frac{17}{2}\arcsin\frac{x-2}{3}-\frac{(x+6)\sqrt{5+4x-x^2}}{2}+C.$$

Megjegyezzük, hogy néhány átalakítást a **6.8.4. a)** feladat megoldásánál elmondottak szerint végeztünk el.

c) $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\frac{(x+1)\sqrt{1-2x-x^2}}{2}+C$.

d) Legyen x = sint. Ekkor: dx = cost dt . Így:

$$\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx=\int\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt=\int\left(\frac{1}{\sin t}-\sin t\right)dt=$$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+\cos t+C=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}\right|+\sqrt{1-\sin^2 t}+C=$$

$$=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+\sqrt{1-x^2}+C.$$

Felhasználtuk, hogy a **6.8.3. a)** feladat megoldása alapján az $\frac{1}{\sin x}$ egy primitív függvénye $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. Felhasználtuk továbbá a következő egyenlőséget is: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1-\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$.

Megjegyezzük, hogy néhány átalakítást a **6.8.4. a)** feladat megoldásánál elmondottak szerint végeztünk el.

6.9. Vegyes feladatok

6.9.1.

a) $-\frac{5^{-x}}{\ln 5}-\frac{2^{-x}}{\ln 2}+C$.

b) –x–ctgx+C.

c) $\frac{\left(1+x^3\right)^{\frac{5}{3}}}{5}+C$.

d) $\ln|1+\ln x|+C$.

e) $x-\operatorname{th} x+C$.

f) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+8\right)+C$.

g) $-2\sqrt{\arccos x}+C$.

h) $-\dfrac{1}{4\left(3-\cos^2 x\right)^4}+C$.

i) $\dfrac{\operatorname{arctg}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2}+C$.

j) $\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2-6x+13\right)+\operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{2}+C$.

k) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\operatorname{sh}6x}{12}+C$.

l) $\int \operatorname{sh}^3 x\,dx=\int\left(\operatorname{ch}^2 x-1\right)\operatorname{sh}x\,dx=\int\left(\operatorname{ch}^2 x\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}x\right)dx=$

$=\dfrac{\operatorname{ch}^3 x}{3}-\operatorname{ch}x+C$.

m) A $\sin 2x=2\sin x\cos x$ és a $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ azonosságok alapján:

$\sin^2 x\,\cos^2 x=\dfrac{\sin^2 2x}{4}=\dfrac{1-\cos 4x}{8}$. Így:

$\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx=\dfrac{1}{8}\int\left(1-\cos 4x\right)dx=\dfrac{1}{8}\left(x-\dfrac{\sin 4x}{4}\right)+C$.

n) $\int \operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch}^3 x\,dx=\int\left(\left(\operatorname{sh}^2 x\right)\left(1+\operatorname{sh}^2 x\right)\operatorname{ch}x\right)dx=$

$=\int\left(\operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}^4 x\operatorname{ch}x\right)dx=\dfrac{\operatorname{sh}^3 x}{3}+\dfrac{\operatorname{sh}^5 x}{5}+C$.

o) $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx=\int\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)\operatorname{tg}x\,dx=\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln\left|\cos x\right|+C$.

p) $\ln\left|\operatorname{sh}x\right|-\dfrac{\operatorname{cth}^2 x}{2}+C$.

r) Legyen az $\int f\left(g(x)\right)g'(x)\,dx=F\left(g(x)\right)+C\quad\left(F'=f\right)$ képletben

$f = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ és $g = x^8$. Ekkor: $f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^{16}}}$, $g' = 8x^7$,

és $F(g(x)) = \arcsin x^8$. Így:

$$\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{16}}} \cdot 8x^7\,dx = \frac{\arcsin x^8}{8} + C.$$

s) Legyen az $\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C \quad (F' = f)$ képletben

$f = \frac{1}{1+x^2}$ és $g = \ln x$. Ekkor:

$f(g(x)) = \frac{1}{1+\ln^2 x}$, $g' = \frac{1}{x}$, $F = \operatorname{arctg} x$ és $F(g(x)) = \operatorname{arctg} \ln x$. Így:

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \int \frac{1}{1+\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \operatorname{arctg} \ln x + C.$$

t) $-2\cos\sqrt{x} + C$.

u) Legyen az $\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C \quad (F' = f)$ képletben

$f = \ln x$, $g = \operatorname{tg} x$. Ekkor:

$f(g(x)) = \ln \operatorname{tg} x$, $g' = \frac{1}{\cos^2 x}$ és a **6.6.2. b)** feladat megoldása szerint: $F = x(\ln x - 1)$, s ezért $F(g(x)) = (\operatorname{tg} x)(\ln \operatorname{tg} x - 1)$. Így:

$$\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx = (\operatorname{tg} x)(\ln \operatorname{tg} x - 1) + C.$$

6.9.2.

a) $$\int \frac{dx}{(x+1)(9x^2+6x+4)} = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(3x+2)^2} - \frac{3}{3x+2} \right) dx =$$

$$= \ln|x+1| - \frac{1}{3x+2} - \ln|3x+2| + C.$$

b) $\int \frac{dx}{x^4 - x^3} = \int \left(-\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) dx =$

$= \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} - \ln|x| + \ln|x-1| + C.$

c) $2\left(\sqrt{x} - 2\ln\left(2 + \sqrt{x}\right)\right) + C.$ **d)** $3\left(\frac{(1-x)^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{(1-x)^{\frac{4}{3}}}{4} \right) + C.$

e) $6\left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) \right) + C.$

f) $2\ln\left|\sqrt{x+1} - 1\right| - \ln(x+1) + C.$ **g)** $e^x - \ln\left(1 + e^x\right) + C.$

h) $x + \frac{2}{1+e^x} + C.$

6.9.3.

a) Legyen x = sint. Ekkor: dx = cost dt és $\sqrt{1-x^2} = \text{cost}$. Így:

$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dt}{\text{sint}} = \ln\left|\text{tg}\frac{t}{2}\right| + C$, ahol az utolsó lépésben a 6.8.3. a) feladat megoldásában felírt eredményt használtuk fel.

Mivel $\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$, azért a sint helyére visszaírva x-et a következő végeredményhez jutunk:

$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C.$

Megjegyezzük, hogy néhány átalakítást a 6.8.4. a) feladat megoldásánál elmondottak szerint végeztünk el.

b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1-\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{6}\left(\frac{x}{1-\sqrt{1-x^2}}\right)^3+C.$

c) $-\frac{x^2\cos 3x}{3}+\frac{2x\sin 3x}{9}+\frac{2\cos 3x}{27}+C.$

d) Legyen a parciális integrálás képletében $g = x + 1$ és $f' = 2^{-x}$. Így:

$$\int\frac{x+1}{2^x}dx=\int(x+1)2^{-x}\,dx=-\frac{(x+1)2^{-x}}{\ln 2}+\int\frac{2^{-x}}{\ln 2}dx=$$

$$=-\frac{x+1}{2^x\ln 2}-\frac{1}{2^x\ln^2 2}+C.$$

e) Legyen a parciális képletében $f' = x^{-2}$ és $g = \ln^2 x$. Így:

$$\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx=\int x^{-2}\ln^2 x\,dx=-\frac{\ln^2 x}{x}+2\int x^{-2}\ln x\,dx.$$

Újra parciálisan integrálunk az $f' = x^{-2}$ és a $g = \ln x$ szereposztással.

$$\int x^{-2}\ln x\,dx=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C_1.$$

Tehát a végeredmény:

$$\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx=-\frac{1}{x}\left(\ln^2 x+2\ln x+2\right)+C.$$

f) $\frac{1}{2}\left(x^4+x^2\right)\operatorname{arctg}x-\frac{x^3}{6}+C.$

g) Legyen a parciális integrálás képletében $f' = x^2$ és $g = \arccos 2x$.

Ekkor: $f=\frac{x^3}{3}$ és $g'=-\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$. Így:

$$\int x^2\arccos 2x\,dx=\frac{x^3}{3}\arccos 2x+\frac{2}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$$

Alakítsuk át a kapott integrandust!

$$\frac{x^3}{\sqrt{1-4x^2}} = -\frac{1}{4}\frac{\left(1-4x^2\right)x - x}{\sqrt{1-4x^2}} = -\frac{1}{4}\left(x\sqrt{1-4x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{32}\left(\left(1-4x^2\right)^{\frac{1}{2}}(-8x) - \left(1-4x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-8x)\right).$$

Mivel $\left(1-4x^2\right)' = -8x$, azért alkalmazhatjuk az

$\int f^\alpha f'\,dx = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ képletet az $f = 1-4x^2$ és az

$\alpha = \frac{1}{2}$, valamint az $\alpha = -\frac{1}{2}$ választásokkal. Tehát:

$$\int x^2 \arccos 2x\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos 2x + \frac{1}{48}\int\left(\left(1-4x^2\right)^{\frac{1}{2}}(-8x) - \left(1-4x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-8x)\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos 2x + \frac{\left(1-4x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{72} - \frac{\sqrt{1-4x^2}}{24} + C.$$

h) Parciálisan integrálunk.

$$\int x\arcsin(x-1)\,dx = \frac{x^2\arcsin(x-1)}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx$$

A kapott integrált pl. az $x - 1 = \sin t$ helyettesítéssel lehet kiszámolni. Így:

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx = \int\frac{(1+\sin t)^2}{\cos t}\cdot\cos t\,dt = \int\left(1+2\sin t+\sin^2 t\right)dt =$$

$$= \int\left(1+2\sin t+\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt = \int\left(\frac{3}{2}+2\sin t-\frac{\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{3}{2}t - 2\cos t - \frac{\sin 2t}{4} + C_1 = \frac{3}{2}t - 2\sqrt{1-\sin^2 t} - \frac{\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}}{2} + C_1.$$

Így – egyszerű átalakítások után – a feladat végeredménye:

$$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{4}\right)\arcsin(x-1)+\frac{(x+3)\sqrt{2x-x^2}}{4}+C.$$

Megjegyezzük, hogy néhány átalakítást a **6.8.4. a)** feladat megoldásánál elmondottak szerint végeztünk el.

i) $-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)+C.$

j) $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$. Parciális integrálással kapjuk, hogy:

$$\int e^x\cos 2x\,dx=\frac{e^x\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\int e^x\sin 2x\,dx=$$

$$=\frac{e^x\sin 2x}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^x\cos 2x}{2}-\frac{1}{2}\int e^x\cos 2x\,dx\right).$$

Ebből egyszerű átalakítások után következik, hogy:

$5\cdot\int e^x\cos 2x\,dx=e^x(2\sin 2x+\cos 2x)+C_1.$

Ezt felhasználva a feladat végeredménye:

$\frac{1}{2}x+\frac{e^x}{10}(2\sin 2x+\cos 2x)+C.$

k) $\frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$

l) $\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{3}+C.$

7.EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK HATÁROZOTT INTEGRÁLJAI

7.1. Alapintegrálokra és az $\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = [F(g(x))]_a^b$ $(F' = f)$ képlet speciális eseteire visszavezethető feladatok

7.1.1.

a) Az x^2 egy primitív függvénye $\frac{x^3}{3}$, a $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ egy primitív függvénye pedig $\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$. Így a Newton-Leibniz formula alapján:

$$\int_1^8 \left(x^2 - \sqrt[3]{x}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^8 = \frac{8^3}{3} - \frac{3}{4}\cdot 8^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{3}{4}\cdot 1^{\frac{4}{3}}\right) =$$

$$= \frac{512}{3} - 12 - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{1909}{12} \approx 159{,}08.$$

b) $\frac{\pi}{6}$. **c)** $\frac{\pi}{3}$. **d)** 1.

e) $\int_{sh1}^{sh2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]_{sh1}^{sh2} = \ln\left(sh2 + \sqrt{1+sh^2 2}\right) -$

$- \ln\left(sh1 + \sqrt{1+sh^2 1}\right) = \ln(sh2 + ch2) - \ln(sh1 + ch1) =$

$= \ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1$, ahol felhasználtuk, hogy

$1 + sh^2 x = ch^2 x$ és $shx + chx = e^x$. Egyszerűbben juthatunk célhoz, ha ismerjük az shx függvény inverzét, mert ekkor:

$$\int_{sh1}^{sh2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\left[\text{arsh}x\right]_{sh1}^{sh2}=2-1=1.$$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos x)\,dx=\frac{1}{2}\left[x-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

g) $\int_1^2\frac{dx}{2x-1}=\left[\frac{\ln|2x-1|}{2}\right]_1^2=\frac{\ln 3}{2}.$

h) $\int_0^{\ln 2}\frac{\left(2-e^x\right)^2}{e^{2x}}\,dx=\int_0^{\ln 2}\frac{4-4e^x+e^{2x}}{e^{2x}}\,dx=\int_0^{\ln 2}\left(4e^{-2x}-4e^{-x}+1\right)dx=$

$$=\left[4\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}-4\cdot\frac{e^{-x}}{-1}+x\right]_0^{\ln 2}=-\frac{1}{2}+\ln 2.$$

i) $\ln\frac{4}{3}.$

j) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^4\frac{x}{2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1+2\cos x+\cos^2 x\right)dx=$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1+2\cos x+\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left[x+2\sin x+\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{4\pi+9\sqrt{3}}{32}.$$

k) $\int_0^{\frac{1}{6}}\text{sh}^2 3x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{6}}(\text{ch}6x-1)\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\text{sh}6x}{6}-x\right]_0^{\frac{1}{6}}=\frac{\text{sh}1-1}{12}.$

l) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{\mathrm{ch}1}{3}} \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{9x^2-1}} = \left[\frac{\ln\left(3x+\sqrt{9x^2-1}\right)}{3}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{\mathrm{ch}1}{3}} = \frac{\ln(\mathrm{ch}1+\mathrm{sh}1)}{3} = \frac{1}{3}.$

m) $\frac{11}{2} + 7\cdot\ln 2.$

n) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{dx}}{x^2+4x+5} = \int\limits_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{dx}}{1+(x+2)^2} = \left[\operatorname{arctg}(x+2)\right]_{-2}^{-1} = \frac{\pi}{4}.$

o) $\frac{1}{3}\cdot\ln\frac{10}{7}.$

p) $\int\limits_{-4}^{-3} \frac{x}{(x+5)^4}\,\mathrm{dx} = \int\limits_{-4}^{-3}\left(\frac{1}{(x+5)^3} - \frac{5}{(x+5)^4}\right)\mathrm{dx} =$

$= \left[-\frac{1}{2(x+5)^2} + \frac{5}{3(x+5)^3}\right]_{-4}^{-3} = -\frac{13}{12}.$

r) $\int\limits_{1}^{2} \frac{x+2}{x^3+2x^2+x}\,\mathrm{dx} = \int\limits_{1}^{2} \frac{x+2}{x(x+1)^2}\,\mathrm{dx} = \int\limits_{1}^{2}\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1}\right)\mathrm{dx} =$

$= \left[2\cdot\ln|x| + \frac{1}{x+1} - 2\cdot\ln|x+1|\right]_1^2 = -\frac{1}{6} + 2\cdot\ln\frac{4}{3}.$

s) $\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\mathrm{dx}}{1-x^4} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1-x^2}\right)\mathrm{dx} =$

$= \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$

7.1.2.

a) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\,dx = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^{\sqrt{3}} = 1.$

b) $0.$ **c)** $\frac{1}{\text{shln}2} - \frac{1}{\text{shln}3} = \frac{7}{12}.$ **d)** $\frac{2}{3}.$ **e)** $\frac{\ln 10}{2}.$

f) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx =$

$= \left[\sqrt{x^2-1} - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = 1 + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{5}+2}.$

g) $\frac{8-5\sqrt{2}}{12}.$

h) $\text{ctg}^4 x = \text{ctg}^2 x \cdot \text{ctg}^2 x = \left(\text{ctg}^2 x\right)\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) =$

$= \left(\text{ctg}^2 x\right)\frac{1}{\sin^2 x} - \text{ctg}^2 x = \left(\text{ctg}^2 x\right)\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} + 1$. Így:

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \text{ctg}^4 x\,dx = \left[-\frac{\text{ctg}^3 x}{3} + \text{ctg}x + x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{27} + \frac{\pi}{6}.$

i) $\frac{1}{2 \cdot \ln 3}.$ **j)** $1 + \frac{\pi}{3}.$

7.1.3.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \text{tg}2x\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x} = -\frac{1}{2}\left[\ln|\cos 2x|\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\ln 2}{2}.$

b) $\ln 3.$

c) $\int_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+2x^2+2}\,dx = \frac{1}{4}\left[\ln\left(x^4+2x^2+2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{4}\cdot\ln\frac{5}{2}.$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx = -\left[\ln|\sin x+\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$

e) $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1-1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{2}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot$

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+x+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^1 =$$

$$= \frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

f) $\int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}\right)dx =$

$$= \left[\ln\left(x^2+1\right) + \operatorname{arctg} x - \ln|x+1|\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

g) Ha f egy primitív függvénye F, akkor $f(g(x))g'(x)$ egy primitív függvénye $F(g(x))$. Tehát, legyen $f = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ és $g = 2e^x$. Ekkor $F = \arcsin x$ és $g' = 2e^x$. Így:

$$\int_{-2\cdot\ln 2}^{-\frac{3}{2}\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{1-4e^{2x}}}\,dx = \frac{1}{2}\left[\arcsin\left(2e^x\right)\right]_{-2\cdot\ln 2}^{-\frac{3}{2}\ln 2} = \frac{\pi}{12}.$$

Megjegyezzük, hogy a $t = e^x$ helyettesítéssel talán könnyebb megoldani a feladatot.

h) 0. **i)** $e - 1$. **j)** $\frac{\pi}{12}$.

7.2. Parciális integrálással megoldható feladatok

7.2.1.

a) Legyen a parciális integrálás képletében $g = x$ és $f' = e^{-x}$. Ekkor: $g' = 1$ és $f = -e^{-x}$. Tehát:

$$\int_0^{\ln 2} x e^{-x}\,dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2}\left(-e^{-x}\right)dx = -\frac{\ln 2}{2} - \left[e^{-x}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1-\ln 2}{2}.$$

b) $\frac{1}{4}$. **c)** 4π.

d) $2(2\ln 4+1)\operatorname{sh}\ln 2 - 8\operatorname{ch}\ln 2 + 8 = -\frac{1}{2} + 6\ln 2$.

e) 0. **f)** $\frac{e^2-1}{4}$.

7.2.2.

a) Legyen a parciális integrálás képletében $f' = 1$ és $g = \ln(x+1)$.

Ekkor: $f = x$ és $g' = \frac{1}{x+1}$. Tehát:

$$\int_0^1 \ln(x+1)\,dx = \left[x\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx = \ln 2 - \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx =$$

$$= \ln 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = \ln 2 - \left[x - \ln|x+1|\right]_0^1 = \ln 4 - 1.$$

b) $-\frac{3}{4} + \ln 4$. **c)** $\frac{6+\sqrt{3}\,\pi}{12}$. **d)** $-\frac{7}{9} + 5\cdot\ln 2$.

e) $\int_0^{\sqrt{3}}\left(x-\sqrt{3}\right)\operatorname{arctgx}\,dx=\left[\frac{\left(x-\sqrt{3}\right)^2}{2}\operatorname{arctgx}\right]_0^{\sqrt{3}}-$

$$-\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{\left(x-\sqrt{3}\right)^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int_0^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\operatorname{arctgx}\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-1+\ln 4\right)-\frac{\pi}{3}.$$

f) $\frac{\pi-\ln 4}{8}$.

7.2.3.

a) Kétszer egymás után ugyanolyan szereposztással parciálisan integrálva az eredeti integrál egy számszorosához jutunk, s ebből már az integrál értéke felírható.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos x\,dx=\left[e^{2x}\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2e^{2x}\sin x\,dx=e^{\pi}+e^{-\pi}+$$

$$+2\left(\left[e^{2x}\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2e^{2x}\cos x\,dx\right)=e^{\pi}+e^{-\pi}-4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos x\,dx.$$ Így:

azt kapjuk, hogy:

$$5\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos x\,dx=e^{\pi}+e^{-\pi}=2\operatorname{ch}\pi,\ \text{s ebből:}\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos x\,dx=\frac{2\operatorname{ch}\pi}{5}.$$

b) $\frac{2}{5}e\left(1+e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$. **c)** $\frac{e^{\pi}-3}{4}$. **d)** $\frac{1}{10}\left(e^{3\pi+1}+e\right)$.

7.3. Helyettesítéssel megoldható feladatok

7.3.1.

a) Legyen $t=\sqrt{1+x}$, ekkor $x=t^2-1$, s ezért $dx = 2t\,dt$. Az új határok: $\sqrt{1+0}=1$ és $\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. Így az integrál:

$$\int_1^{\sqrt{2}}\left(t^2-1\right)\cdot t\cdot 2t\,dt = 2\int_1^{\sqrt{2}}\left(t^4-t^2\right)dt = 2\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{4\left(1+\sqrt{2}\right)}{15}.$$

b) $t=\sqrt[6]{x-1}$, $x=t^6+1$, $dx=6t^5\,dt$. Így az integrál:

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{t^3-t}{t^4-1}\cdot 6t^5\,dt = 6\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{t^6}{t^2+1}dt = 6\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\left(t^4-t^2+1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt =$$

$$= \frac{54\sqrt{3}-34\sqrt{2}}{5} - 2\pi + 6\operatorname{arctg}\sqrt{2}.$$

c) Legyen $e^x = t$. Ekkor: $x = \ln t$, s ezért $dx = \frac{dt}{t}$. Az új határok: $e^0 = 1$ és $e^{\frac{1}{2}\ln 3} = \sqrt{3}$. Így az integrál:

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t^2+2t}{t^2+1}\cdot\frac{dt}{t} = \int_1^{\sqrt{3}}\frac{t+2}{t^2+1}dt = \int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\frac{2t}{t^2+1}+2\cdot\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+2\operatorname{arctgt}\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{6}.$$

d) $e^x = t$, $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$. Így az integrál:

$$\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1+t}{2-t}\cdot\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\int_1^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2-t}+\frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{2}\left[-3\cdot\ln|2-t|+\ln|t|\right]_1^{\frac{3}{2}} = \ln\left(2\sqrt{3}\right).$$

e) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Így az integrál:

$$\int_0^1 \frac{1}{2-\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2-t+1} = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}.$$

f) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Így az integrál:

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{1}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

g) $x = 2\sin t$, $\sqrt{4-x^2} = 2|\cos t|$, $dx = 2\cos t\,dt$. Így az integrál:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t \cdot 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 2t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\,dt = \pi.$$

h) $x = \frac{\operatorname{sh} t}{2}$, $\sqrt{1+4x^2} = \operatorname{ch} t$, $dx = \frac{\operatorname{ch} t}{2}dt$. Így az integrál:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sh}^2 t}{8}dt = \frac{1}{16}\int_0^1 (\operatorname{ch} 2t - 1)\,dt = \frac{1}{16}\left(\frac{\operatorname{sh} 2}{2} - 1\right) = \frac{e^4 - 4e^2 - 1}{64e^2}.$$

i) $x = \operatorname{ch} t$, $\sqrt{(x-1)^3(x+1)} = |x-1|\sqrt{x^2-1} = |\operatorname{ch} t - 1||\operatorname{sh} t|$,
$dx = \operatorname{sh} t\,dt$. Így az integrál:

$$\int_0^2 (\operatorname{ch} t - 1)\operatorname{sh}^2 t\,dt = \int_0^2 \left(\operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch} t - \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2}\right)dt =$$

$$= \left[\frac{\mathrm{sh}^3 t}{3} - \frac{\mathrm{sh}2t}{4} + \frac{1}{2}t \right]_0^2 = \frac{\mathrm{sh}^3 2}{3} - \frac{\mathrm{sh}4}{4} + 1.$$

j) $t = \sqrt{e^x - 1}$, $x = \ln(1 + t^2)$, $dx = \frac{2t\,dt}{1+t^2}$. Így az integrál:

$$\int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt = [2(t - \mathrm{arctg}t)]_0^1 = \frac{4-\pi}{2}.$$

7.4. Vegyes feladatok

7.4.1.

a) $1 - \left(\mathrm{ch}\frac{\ln 2}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{9}$. **b)** $\frac{\pi}{6}$. **c)** $\frac{3}{8}\left(69^{\frac{2}{3}} - 4\right)$.

d) $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$. **e)** $\frac{\pi}{16}$. **f)** 0.

g) $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} \right) dx =$

$$= \left[\ln(x^2+1) - \ln(x^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{8} + \ln\frac{3}{2}.$$

h) Az integrál értéke: $[\mathrm{arctg}\ln x]_1^e = \frac{\pi}{4}$.

i) $\frac{1}{6} \cdot \ln\frac{2}{5}$. **j)** 7 + ln4.

k) $e^x = t$, $dx = \frac{dt}{t}$. Így az integrál értéke:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t+t^{-1}} \cdot \frac{dt}{t} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} = [\text{arctgt}]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{12}.$$

l) $-1+\frac{3}{2}\ln 3$. **m)** $-\frac{2}{5}\ln 12$.

n) $1+2\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin^2 x = \cos^2 x + 3\sin^2 x =$
$= (\cos^2 x)(1+3\text{tg}^2 x) = (\cos^2 x)\left(1+\left(\sqrt{3}\,\text{tgx}\right)^2\right)$. Tudjuk, hogy $f(g(x))g'(x)$ egy primitív függvénye $F(g(x))$, ahol F a f egy primitív függvénye. Legyen $f = \frac{1}{1+x^2}$ és $g = \sqrt{3}\,\text{tgx}$. Ekkor: F = arctgx és $g' = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}$. Ezeket felhasználva az integrál értéke a következő:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\left(\sqrt{3}\,\text{tgx}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\text{arctg}\left(\sqrt{3}\,\text{tg}\,x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Megjegyezzük, hogy a feladat megoldható a szokásos $t = \text{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítéssel is, de ez hosszadalmas és nehéz számoláshoz vezet.

o) $\frac{3\pi - 2 - \ln 16}{36}$.

p) $$\int_0^1 \frac{2^x+3^x}{e^x}\,dx = \int_0^1 \left(\left(\frac{2}{e}\right)^x + \left(\frac{3}{e}\right)^x\right)dx = \left[\frac{1}{\ln\frac{2}{e}} \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^x + \frac{1}{\ln\frac{3}{e}} \cdot \left(\frac{3}{e}\right)^x\right]_0^1 =$$
$$= \frac{e-2}{e(1-\ln 2)} + \frac{e-3}{e(1-\ln 3)}.$$

7.5. Határozott integrálok alkalmazásai

7.5.1.

a) Az $x^2-4x+5=0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív, ezért a megfelelő függvény minden x-re, s így $0 \le x \le 3$ esetén is pozitív. Tehát a görbe és az x tengely közti terület:

$$\int_0^3 \left(x^2-4x+5\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_0^3 = 6.$$

b) π. **c)** 1. **d)** $\dfrac{\operatorname{ch}(2\cdot\ln 3)-\operatorname{ch}(2\cdot\ln 2)}{2}=\dfrac{175}{144}$.

e) Az $x^2+x-2=0$ másodfokú egyenlet egyik gyöke –2, a másik 1. Ezért a megfelelő görbe a (–2; 1) intervallumban negatív, azon kívül pozitív. Így a kérdezett terület:

$$\int_0^2 \left|x^2+x-2\right| dx = \int_0^1 \left(-\left(x^2+x-2\right)\right)dx + \int_1^2 \left(x^2+x-2\right)dx = 3.$$

f) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \left|x\left(1-x^2\right)\right| dx = \int_{-2}^{-1} x\left(1-x^2\right)dx - \int_{-1}^{0} x\left(1-x^2\right)dx + \int_0^1 x\left(1-x^2\right)dx -$

$$- \int_1^3 x\left(1-x^2\right)dx = \frac{75}{4}.$$

g) $\dfrac{\left(3+4\sqrt{3}\right)\pi}{6}-3\cdot\ln 2$. **h)** $\dfrac{1+\ln^2 2}{2}$.

7.5.2.

a) Mivel az adott intervallumban $y=\sin t \ge 0$ és $\dot{x}=-2\sin t \le 0$, a kérdezett terület értéke a következő:

$$-\int_0^{\pi} y\dot{x}\,dt = \int_0^{\pi} (\sin t)(2\sin t)\,dt = \int_0^{\pi} (1-\cos 2t)\,dt = \left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi} = \pi.$$

b) 3π.

7.5.3.

a) A két görbe közös pontjainak abszcisszáit a $6x - x^2 - 7 = x - 3$ másodfokú egyenlet gyökei adják meg. Ezek 1 és 4. Az $1 \le x \le 4$ intervallumban $6x - x^2 - 7 \ge x - 3$, tehát a kérdezett terület:

$$\int_1^4 \left[6x - x^2 - 7 - (x-3)\right]dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_1^4 = \frac{9}{2}.$$

b) $18e^{-2} - 2$.

c) A két görbe közös pontjának abszcisszáit a $\operatorname{tg} x = \frac{2}{3}\cos x$ egyenlet gyökei adják meg. Az egyenletből – egyszerű átalakítások után – a $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ egyenlethez jutunk, amiből $\sin x = \frac{1}{2}$. Ennek az x = 0-hoz legközelebb eső gyöke $\frac{\pi}{6}$. A $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ intervallumban $\operatorname{tg} x \le \frac{2}{3}\cos x$, így a kérdezett terület a következő:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{2}{3}\cos x - \operatorname{tg} x\right)dx = \left[\frac{2}{3}\sin x + \ln\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

d) $$\int_{\frac{9}{25}}^{\frac{3}{4}} \left[x\sqrt{1-x} - (x^2 - x)\right]dx = \int_{\frac{4}{5}}^{\frac{1}{2}} (1-t^2)t(-2t)dt - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{\frac{9}{25}}^{\frac{3}{4}} =$$

$= 0{,}230805$.

7.5.4.

a) A kérdezett térfogat a következő:

$$\pi\int_{-2}^{2} y^2\,dx = \pi\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^2 dx = \pi\left[16x-\frac{8x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2} = \frac{512\pi}{15}.$$

b) $\frac{\pi}{2}\ln 3$.

c) $\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{3}{e^2}\right)$.

d) $\pi\int_{-\ln 2}^{\ln 2} ch^4 x\,dx = \pi\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\left(\frac{ch2x+1}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\left(ch^2 2x+2ch2x+1\right)dx =$

$$= \frac{\pi}{4}\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\left(\frac{ch4x+1}{2}+2ch2x+1\right)dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{sh(4\cdot\ln 2)}{8}+sh(2\cdot\ln 2)+\frac{3\cdot\ln 2}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{735}{128}+3\cdot\ln 2\right).$$

7.5.5.

a) $y' = 3x^{\frac{1}{2}}$, tehát az ívhossz az $s = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$ képlet alapján:

$$s = \int_0^{11}\sqrt{1+\left(3x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \frac{2}{27}\left[\left(1+9x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{11} = 74.$$

b) $s = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \left[\arcsin(x-1)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\pi}{6}$.

c) $\frac{3}{4}$.

d) $\frac{25}{3}$.

e) $\frac{40}{9}$.

f) 3 + ln2.

g) ln3.

h) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

7.5.6.

a) $\dot{x} = 2t,\ \dot{y} = \frac{1}{3} - 3t^2$. Így $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(3t^2 + \frac{1}{3}\right)^2$. Tehát:

$$s = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int_0^{\frac{1}{3}} \left(3t^2 + \frac{1}{3}\right) dt = \left[t^3 + \frac{t}{3}\right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{27}.$$

b) 10. **c)** $\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{sh}2}{4}$. **d)** $\sqrt{2}$.

e) $s = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{\left(6t^2 - 10t^4\right)^2 + \left(4\sqrt{15}\, t^3\right)^2}\, dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(6t^2 + 10t^4\right) dt = \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

f) $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(-3\cos^2 t \sin t\right)^2 + \left(3\sin^2 t \cos t\right)^2}\, dt = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} |\sin 2t|\, dt =$

$$= 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt = 6.$$

g) $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 2(1 - \cos t) = 4\sin^2 \frac{t}{2}$.

$$s = \int_0^{2\pi} 2\sin \frac{t}{2}\, dt = 8.$$

h) 1. **i)** $\frac{\pi^2}{2}$. **j)** $\frac{\pi^3}{3}$.

k) $s = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{\left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right)^2 + \cos^2 t}\, dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{ctg^2 t}\, dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} (-ctgt)\, dt =$

$= -\left[\ln\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} = \ln 2.$

7.5.7.

a) Legyen $n = 2k$, $h = \frac{b-a}{n}$ és $x_i = a + ik$ $(0 \le i \le n)$.

Ekkor a Simpson-formula a következő:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_o) + f(x_n) + 2\cdot\sum_{j=1}^{k-1} f(x_{2j}) + 4\cdot\sum_{j=1}^{k} f(x_{2j-1})\right).$$

Így ha $f = \frac{1}{x^2}$, $a = 1$, $b = 2$ és $n = 4$, akkor:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} \approx \frac{1}{12}\left(1 + \frac{1}{4} + 2\cdot\frac{4}{9} + 4\left(\frac{16}{25} + \frac{16}{49}\right)\right) \approx 0{,}50004.$$

Ha $n = 8$, akkor pedig:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} \approx \frac{1}{24}\left(1 + \frac{1}{4} + 2\left(\frac{64}{100} + \frac{64}{144} + \frac{64}{196}\right) + \right.$$

$$\left. + 4\left(\frac{64}{81} + \frac{64}{121} + \frac{64}{169} + \frac{64}{225}\right)\right) \approx 0{,}50003.$$

Megjegyezzük, hogy az integrál pontos értéke:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = 0{,}5.$$

b) $n = 4$ esetén: 1,14778; $n = 8$ esetén: 1,14779.

c) $n = 4$ esetén: 0,74686; $n = 8$ esetén: 0,74682.

7.5.8. A T idő alatt fejlődött Q hőmennyiség a következő:

$$Q = 24\int_0^T [I(t)]^2\,dt = 24\int_0^{\pi} [\sin(2t)]^2\,dt = 12\int_0^{\pi}(1-\cos 4t)dt = 12\pi .$$

7.5.9. Ha a folyadéknyomás alatt álló falfelületet alulról az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ görbe, felülről az $x = 0$ egyenes (a vízszint) határolja, akkor a falfelületre ható nyomóerő: $F = \gamma\int_0^h (y_1(x) - y_2(x))x\,dx$,

ahol h a felület mélypontjának a folyadéktükörtől való távolsága és γ a folyadék fajsúlya. Az adott értékekkel:

$y_1(x) = -y_2(x) = 3{,}4\cdot\sqrt{1-\frac{x}{10}}$ és $\gamma = 1000\frac{kg}{m^3}$. Így:

$$F = 6800\int_0^{10} x\cdot\sqrt{1-\frac{x}{10}}\,dx = 1{,}36\cdot 10^6\int_1^0 t^2(t^2-1)\,dt \approx 181300 .$$

7.5.10. Egyszerű hasonlóságból következik, hogy a kúp alakú homokrakás x magasságú metszetének sugara $r = 1{,}2(1-x)$. Így ebben a magasságban a homokrakás dx vastagságú elemének dG súlya közelítőleg a következő:

$dG = \text{fajsúly}\cdot\text{térfogat} = 2r^2\pi\,dx = 2{,}88\pi(1-x)^2\,dx$.

Tehát annak a munkának a nagysága, amellyel ezt az elemet a földről x magasságra lehet felemelni:

$$dW = dG\cdot x = 2{,}88\pi x(1-x)^2\,dx .$$

Így a keresett munka – amely ezen elemi munkák „összege” –:

$$W = 2{,}88\pi\int_0^1 x(1-x)^2\,dx = 2{,}88\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{2{,}88\pi}{12} \approx 0{,}75 .$$

7.6. Improprius integrálok

7.6.1.

a) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(-e^{-x}\right) - \left(-e^{-0}\right) = 0 + 1 = 1.$

b) 2.

c) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+x^2\right) - \ln 1\right).$

Mivel $\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+x^2\right) = +\infty$, az integrál divergens.

d) $-\frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{cth}(2\cdot\ln 2)\right) = \frac{1}{15}.$ **e)** 1.

f) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = -\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_2^{+\infty} = -\frac{1}{2}\left(\ln 1 - \ln 3\right) = \frac{\ln 3}{2}.$

g) $\frac{1}{36}.$

h) $\int_1^{+\infty} \frac{x+6}{x^3+3x}\,dx = \int_1^{+\infty}\left(\frac{2}{x} + \frac{-2x+1}{x^2+3}\right)dx =$

$$= \left[\ln\frac{x^2}{x^2+3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \ln 4.$$

i) 1. **j)** $\frac{\pi}{4}.$

k) Parciálisan integrálunk a $g = x$ és $f' = e^{-\frac{x}{2}}$ választással. Így

$$\int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \left[-2x e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(-2)e^{-\frac{x}{2}}\,dx =$$

$$= -2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(x e^{-\frac{x}{2}}\right) - \left[4e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty} = 0 - 4\cdot\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}} + 4 = 4.$$

Felhasználtuk, hogy a L'Hospital-szabály alapján:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x e^{-\frac{x}{2}}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}} = 0.$$

l) 7.

m) Mivel, $\left|e^{-x}\sin x\right| \le e^{-x}$ és az e^{-x}-nek a 0-tól a $+\infty$-ig vett improprius integrálja konvergens, azért az $e^{-x}\sin x$ megfelelő integrálja is konvergens és $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sin x = 0$. Hasonló állítások igazak $\left(e^{-x}\cos x\right)$-re is. Kétszer parciálisan integrálunk, majd rendezzük az egyenlőséget.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx = \left[-e^{-x}\sin x\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx = \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{+\infty} -$$

$$-\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx = 1 - \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx \text{. Tehát: } \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx = \frac{1}{2}.$$

n) $\sqrt{x} = t$. $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\left(1+t^3\right)^2} 2t\,dt = \frac{2}{3}\int_0^{+\infty}\left(1+t^3\right)^{-2}\left(3t^2\right)dt = -\frac{2}{3}\left[\frac{1}{1+t^3}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{3}.$

o) Legyen $\sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}} = t$. Ekkor az integrál:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t+t^2}\cdot\frac{2dt}{t} = 2\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{1+t}\right)dt = 2\left[-\frac{1}{t} + \ln\frac{1+t}{t}\right]_1^{+\infty} =$$

$$= 2\left(1 - \ln 2\right).$$

7.6.2.

a) e. **b)** $\frac{1}{2}$. **c)** $\operatorname{cth}(\ln 2)-1=\frac{2}{3}$.

d) Parciálisan integrálunk az $f'=1$ és g =arctgx választással. Így:

$$\int_{-\infty}^{0}\operatorname{arctgx}=\left[x\operatorname{arctgx}\right]_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}dx=-\lim_{x\to-\infty}\left(x\operatorname{arctgx}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_{-\infty}^{0}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-x\operatorname{arctgx}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{2x}-\operatorname{arctgx}\right)\right].$$

Itt a L'Hospital-szabály alapján:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$, tehát az $\left(\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{2x}-\operatorname{arctgx}\right)$ határértéke a $(-\infty)$-ben $\frac{\pi}{2}$, aminek x-szerese $(-\infty)$-hez tart. Így az integrál divergens.

e) $\frac{5}{4}e^{-2}$. **f)** $\frac{\pi}{2}$.

7.6.3.

a) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+4x^2}=\left[\frac{\operatorname{arctg}2x}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}2x-\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}2x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}.$$

(Felhasználtuk, hogy az $\dfrac{1}{1+4x^2}$ bármely [a, b] intervallumban integrálható és primitív függvénye $\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{2}$ bármely valós számra értelmezve van és korlátos.)

b) $\frac{\pi}{3}$.

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctgx}}}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctgx}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{3}\pi^{\frac{3}{2}}$.

d) Az $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2x$ egy primitív függvénye $\sqrt{1+x^2}$.

Ennek határértéke a $(+\infty)$-ben $+\infty$. Így, például a $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ integrál divergens, s ezért az eredeti integrál is divergens.

e) 4.

f) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$.

g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+2}\right)dx =$

$= \left[\ln\frac{x^2+1}{x^2+2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

h) Legyen $e^x = t$. Ekkor az integrál a következő:

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+2t)^3}\cdot\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{(1+2t)^2} - \frac{1}{(1+2t)^3}\right)dt = \frac{1}{8}.$$

Megjegyezzük, hogy az $1+2e^x = t$ helyettesítéssel egy kicsit egyszerűbb a számolás.

7.6.4.

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^1 = \lim_{x\to 1^-}\left(-2\sqrt{1-x}\right)+2 = 0+2 = 2$.

b) Ha $\sqrt{2-x}=t$, akkor az integrál: $\int_1^0 \frac{-2t}{(t^2+1)t}\,dt = -2[\text{arctgt}]_1^0 = \frac{\pi}{2}$.

c) Az $\frac{1}{1-x^2}$ egy primitív függvénye $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. Ennek az 1-ben a baloldali határértéke $+\infty$. Így az integrál divergens.

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \left[2\sqrt{\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \lim_{x\to 0^+}(2\cdot\sqrt{\sin x}) = 2-0=2$.

e) Ha $\sqrt{x}=t$, akkor az integrál: $\int_0^2 \frac{2t\,dt}{t^2+t} = 2[\ln(1+t)]_0^2 = 2\cdot\ln 3$.

f) Parciálisan integrálunk az $f'=1$ és $g=\ln x$ választással. Így:
$\int_0^1 \ln x\,dx = \int_0^1 1\cdot\ln x\,dx = [x\ln x]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x}\,dx = -1$, ahol felhasználtuk, hogy a L'Hospital-szabály alapján:

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

g) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{-1}^1 = \lim_{x\to 1^-}\arcsin x - \lim_{x\to -1^+}\arcsin x =$
$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi..$

h) Mivel a $\frac{1}{x\ln^2 x} = (\ln x)^{-2}\cdot\frac{1}{x}$ egy primitív függvénye $-\frac{1}{\ln x}$ és ennek az 1-ben a baloldali határértéke $+\infty$, az integrál divergens.

i) 0.

j) Az integrandus nevezője (–1)-nél 0, tehát:

$$\int_{-2}^{0}(x+1)^{-\frac{2}{3}}\,dx=\int_{-2}^{-1}(x+1)^{-\frac{2}{3}}\,dx+\int_{-1}^{0}(x+1)^{-\frac{2}{3}}=3\left[(x+1)^{\frac{1}{3}}\right]_{-2}^{-1}+$$

$$+3\left[(x+1)^{\frac{1}{3}}\right]_{-1}^{0}=3+3=6.$$

k) Az integrandus nevezője a $\frac{\pi}{2}$-nél 0, tehát:

$$\int_{0}^{\pi}\operatorname{tg}x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x}\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{\cos x}\,dx.$$

A $\frac{\sin x}{\cos x}$ egy primitív függvénye a $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban $-\ln\cos x$, amelynek a baloldali határértéke a $\frac{\pi}{2}$-nél $+\infty$, így az eredeti integrál divergens.

l) $\frac{6}{5}$.

7.6.5.

a) $e^x=t$. $\int_{0}^{+\infty}\frac{2}{t+t^{-1}}\cdot\frac{dt}{t}=\left[2\operatorname{arctgt}\right]_{0}^{+\infty}=\pi$.

b) Ha $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, akkor $1+\sin x=1+\frac{2t}{1+t^2}=\frac{(t+1)^2}{1+t^2}$ és $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, továbbá az új határok: $\operatorname{tg}0=0$ és $\lim_{x\to\pi^-}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=+\infty$. Így az integrál:

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{2}{(t+1)^2}\,dt=\left[-\frac{2}{t+1}\right]_{0}^{+\infty}=2.$$

c) Legyen $e^{-x} = t$. Ekkor $dx = -\frac{dt}{t}$, az új határok pedig $e^{-0} = 1$ és $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$. Így az integrál értéke a következő:

$$\int_1^0 \frac{t}{1+t}\left(-\frac{dt}{t}\right) = -\left[\ln(1+t)\right]_1^0 = \ln 2.$$

Megjegyezzük, hogy az $\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ egy primitív függvénye: $-\ln(1+e^{-x})$ és ezt felhasználva is célhoz jutunk.

d) Ha $t = \sqrt{x-1}$, akkor az integrál: $\int_0^{+\infty} \frac{2t\,dt}{(1+t^2)\,t} = 2\left[\text{arctgt}\right]_0^{+\infty} = \pi$.

e) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-x} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-x} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2-x}$. Az $\frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ egy primitív függvénye a (0 ; 1) intervallumban $\ln\frac{1-x}{x}$, aminek a 0-ban a jobb oldali határértéke $+\infty$, így az eredeti integrál divergens.

f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[3]{\text{arctgx}}} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[3]{\text{arctgx}}} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[3]{\text{arctgx}}} =$

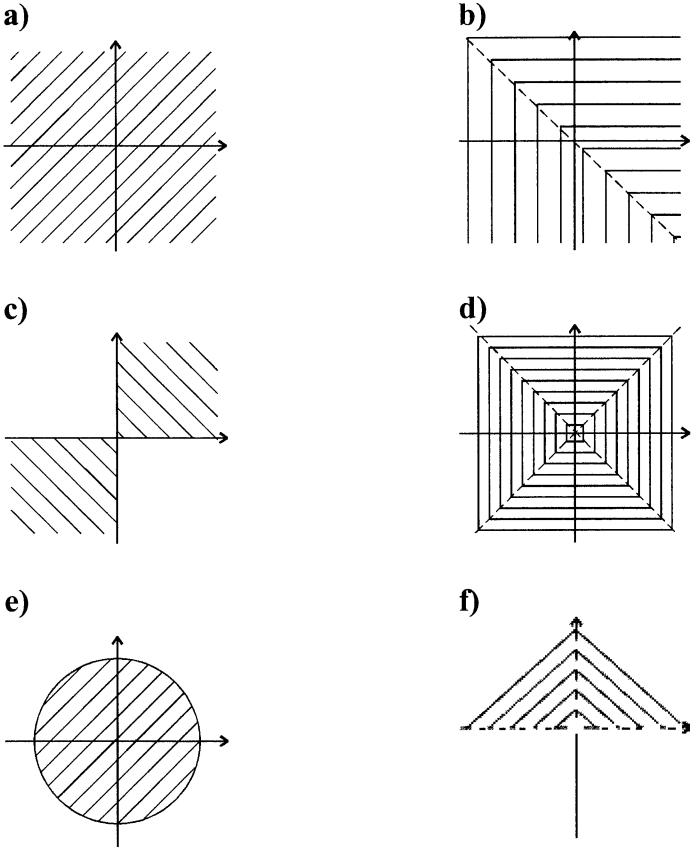
$$= \frac{3}{2}\left[\left(\text{arctgx}\right)^{\frac{2}{3}}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{3}{2}\left[\left(\text{arctgx}\right)^{\frac{2}{3}}\right]_0^{+\infty} = 0.$$

Megjegyezzük, hogy ha egy páratlan függvény integrálható a számegyenesen, akkor a számegyenesen vett integrálja 0.

8.KÉTVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK

8.1. Kétváltozós valós függvények értelmezése

8.1.1. A tartományokat a 8.1. ábrán ábrázoltuk.



8.1. ábra

a) $D_f = \mathbf{R}^2$.

b) $D_f = \{(x;y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \neq -x\}$.

c) $D_f = \{(x;y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x \geq 0 \text{ és } y \geq 0) \text{ vagy } (x \leq 0 \text{ és } y \leq 0)\}$.

d) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \neq 0$ miatt $D_f = \{(x;y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \neq \pm x\}$.

e) Négyzetgyök alatt csak nem negatív kifejezés állhat, ezért $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, azaz $x^2 + y^2 \leq 1$. $D_f = \{(x;y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Az $x^2 + y^2 \leq 1$ egyenlőtlenség ekvivalens a $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$ egyenlőtlenséggel, s ez utóbbi baloldalán álló kifejezés egy $P(x;y)$ pontnak az origótól való távolsága. Így az $x^2 + y^2 \leq 1$ feltétel az xy-sík origó középpontú egységsugarú körének belsejében és határán fekvő pontokra teljesül.

f) $D_f = \{(x;y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq 0, y > 0\}$.

8.1.2.

a) $f(P) = \lg c$, $f(Q) = \lg(a+b+c)$, $f(R) = 0$.

b) $f(Q) = 2$, P-ben és R-ben nincs értelmezve.

c) Az arccos t értelmezése miatt $-1 \leq t \leq 1$, ezért a $-1 \leq \frac{y}{x} \leq 1$ egyenlőtlenségeknek kell teljesülni. Tehát P-ben nincs értelmezve a függvény, a másik két helyen igen. Behelyettesítéssel:

$f(Q) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $f(R) = \arccos(-1) = \pi$.

d) $f(P) = f(R) = 0$, Q-ban nincs értelmezve.

8.2. Kétváltozós valós függvények differenciálszámítása

8.2.1. A parciális deriváltak kétféle jelölését vegyesen használjuk.

a) Mikor az egyik változó szerint deriválunk, a másikat konstansként kezeljük. Az egyváltozós valós függvények deriválási szabályait

alkalmazva: $f'_x(x;y)=\left(-x^3\right)'+3y\left(x^2\right)'-y^3(x)'=-3x^2+6xy-y^3$.
Hasonlóan: $f'_y(x;y)=3x^2-3xy^2$.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x;y)=-\dfrac{1}{8}$.

c) $g'_u(u;v)=(\ln 6)6^u\cdot v^6$, $g'_v(u;v)=6^{u+1}\cdot v^5$.

d) $V'_r(r;m)=\dfrac{2\pi m}{3}r$, $V'_m(r;m)=\dfrac{r^2\pi}{3}$.

e) $f(x;y)=(x-y)^{-1}$ alakban deriválunk.

$f'_x(x;y)=-(x-y)^{-2}\cdot(x-y)'_x=\dfrac{-1}{(x-y)^2}$, mert $(x-y)'_x=1$,

$f'_y(x;y)=-(x-y)^{-2}\cdot(x-y)'_y=\dfrac{1}{(x-y)^2}$, mert $(x-y)'_y=-1$.

f) $f'_x(x;y)=\dfrac{2y\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $f'_y(x,y)=\dfrac{2x\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

g) $\dfrac{\partial W}{\partial Q}(Q;C)=\dfrac{Q}{C}$, $\dfrac{\partial W}{\partial C}(Q;C)=-\dfrac{Q^2}{2C^2}$.

h) Mivel $\left(\dfrac{x}{y}\right)'_x=\left(\dfrac{1}{y}\cdot x\right)'_x=\dfrac{1}{y}$, $\left(\dfrac{x}{y}\right)'_y=\left(x\cdot y^{-1}\right)'_y=-xy^{-2}=-\dfrac{x}{y^2}$,

$z'_x(x;y)=\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2}+1$, $z'_y(x,y)=-\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{x}+1$.

i) Az $f(x;y)=x^y$ függvény x-re nézve hatványfüggvény, y-ra nézve exponenciális függvény. A parciális deriváltfüggvények ennek megfelelően: $f'_x(x;y)=y\cdot x^{y-1}$, $f'_y(x,y)=(\ln x)x^y$.

j) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\dfrac{-6x}{\sqrt{y^3-6x^2+2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\dfrac{3y^2}{2\sqrt{y^3-6x^2+2}}$.

k) $h'_u(u;v)=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{u}{v}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{u}{v}\right)'_u=\dfrac{v}{u^2+v^2}$,

$h'_v(u;v)=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{u}{v}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{u}{v}\right)'_v=\dfrac{-u}{u^2+v^2}$.

l) $f'_x(x;y)=(4y)^{3x}\cdot(\ln 4y)\cdot(3x)'_x=3(\ln 4y)(4y)^{3x}$,

$f'_y(x;y)=3x(4y)^{3x-1}\cdot(4y)'_y=12x(4y)^{3x-1}$.

m) $f'_x(x;y)=e^{xy}(1+xy)$, $f'_y(x;y)=x^2\cdot e^{xy}$.

n) Vegyük észre, hogy a függvény x-re nézve konstanssal szorzott, y-ra nézve pedig szorzatfüggvény.

$$z'_x(x;y)=\sqrt{y}\left(\lg\left(x^3+y^3\right)\right)'_x=\sqrt{y}\,\frac{\left(x^3+y^3\right)'_x}{(\ln 10)\left(x^3+y^3\right)}=\frac{3x^2\sqrt{y}}{(\ln 10)\left(x^3+y^3\right)},$$

$$z'_y(x;y)=\left(\sqrt{y}\right)'_y\lg\left(x^3+y^3\right)+\sqrt{y}\left(\lg\left(x^3+y^3\right)\right)'_y=\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\lg\left(x^3+y^3\right)+$$

$$+\sqrt{y}\,\frac{\left(x^3+y^3\right)'_y}{(\ln 10)\left(x^3+y^3\right)}=\frac{\lg\left(x^3+y^3\right)}{2\sqrt{y}}+\frac{3y^2\sqrt{y}}{(\ln 10)\left(x^3+y^3\right)}.$$

o) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x;y)=3^{-\frac{x}{y}}\left(-\dfrac{\ln 3}{y}\cdot\sin(\pi xy)+\pi y\cdot\cos(\pi xy)\right),$

$\dfrac{\partial g}{\partial y}(x;y)=3^{-\frac{x}{y}}\left(\dfrac{(\ln 3)x}{y^2}\cdot\sin(\pi xy)+\pi x\cdot\cos(\pi xy)\right).$

p) $f'_x(x;y)=\dfrac{1}{10y}\left(x\cdot\ln(10y-x)\right)_x'-(x)_x'=\dfrac{1}{10y}\left(1\cdot\ln(10y-x)+\right.$

$\left.+x\cdot\dfrac{(10y-x)_x'}{10y-x}\right)-1=\dfrac{1}{10y}\left(\ln(10y-x)-\dfrac{x}{10y-x}\right)-1,$

$f'_y(x;y)=\dfrac{x}{10}\left(y^{-1}\cdot\ln(10y-x)\right)_y'-(x)_y'=\dfrac{x}{10}\left(-y^{-2}\cdot\ln(10y-x)+\right.$

$\left.+y^{-1}\cdot\dfrac{(10y-x)_y'}{10y-x}\right)-0=\dfrac{x}{10}\left(-\dfrac{\ln(10y-x)}{y^2}+\dfrac{10}{y(10y-x)}\right).$

q) $f'_x(x;y)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{y}\left(-\dfrac{\operatorname{sh}(x+2y)}{2\sqrt{x^3}}+\dfrac{\operatorname{ch}(x+2y)}{\sqrt{x}}\right),$

$f'_y(x;y)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\operatorname{sh}(x+2y)}{2\sqrt{y}}+2\sqrt{y}\cdot\operatorname{ch}(x+2y)\right).$

r) $h'_x(x;y)=\dfrac{(\ln y)y^x\cdot\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 y^x}-2(\ln 5)xy\cdot\operatorname{th} y^x}{5^{x^2y}},$

$h'_y(x;y)=\dfrac{xy^{x-1}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 y^x}-(\ln 5)x^2\cdot\operatorname{th} y^x}{5^{x^2y}}.$

s) $f'_x(x;y)=y\cdot\operatorname{ch} y\cdot\operatorname{ch} x(\operatorname{sh} x)^{y\cdot\operatorname{ch} y-1},$

$f'_y(x;y)=(\ln\operatorname{sh} x)(\operatorname{sh} x)^{y\cdot\operatorname{ch} y}(\operatorname{ch} y+y\cdot\operatorname{sh} y).$

8.2.2.

a) $f_x'(P_0)=f_y'(P_0)=0$. **b)** $f_x'(P_0)=3e,\quad f_y'(P_0)=-3e$.

c) $f_x'(x;y)=\dfrac{-1}{\log_2^2(y^2-x)}\cdot\dfrac{-1}{(\ln 2)(y^2-x)}=\dfrac{1}{(\ln 2)(y^2-x)\log_2^2(y^2-x)}$,

$f_y'(x;y)=\dfrac{-1}{\log_2^2(y^2-x)}\cdot\dfrac{2y}{(\ln 2)(y^2-x)}=\dfrac{-2y}{(\ln 2)(y^2-x)\log_2^2(y^2-x)}$.

A P_0 pontban vett parciális deriváltakat a P_0 koordinátáinak behelyettesítésével kapjuk. Felhasználva, hogy $y_0^2-x_0=3^2-5=4$, és $\log_2^2 4=2^2=4$, kapjuk: $f_x'(5;3)=\dfrac{1}{16\ln 2}$, $f_y'(5;3)=-\dfrac{3}{8\ln 2}$.

d) $f_x'(P_0)=-\dfrac{\pi}{4}$, $f_y'(P_0)=\dfrac{1-\pi}{16}$.

8.2.3.

a) $df(x;y)=\dfrac{2xy^3}{3}dx+x^2y^2\,dy$, $df(P_0)=-\dfrac{2}{3}dx+dy$.

b) $df(x;y)=\dfrac{40\,dx}{3\cdot\sqrt[3]{(4x-3y)^2}}-\dfrac{10\,dy}{\sqrt[3]{(4x-3y)^2}}$, $df(P_0)=\dfrac{10}{3}dx-\dfrac{5}{2}dy$.

c) A teljes differenciál: $df(x;y)=f_x'(x;y)dx+f_y'(x;y)dy$. A P_0 pontban vett teljes differenciált pedig az $x=x_0=6$ és $y=y_0=3$ behelyettesítéssel kapjuk.

$$f_x'(x;y)=\frac{e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}\cdot x-1\cdot e^{\frac{x}{y}}}{x^2}=\frac{x-y}{x^2y}e^{\frac{x}{y}},\quad f_x'(P_0)=\frac{e^2}{36}.$$

$$f'_y(x;y)=\frac{1}{x}\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot x\left(-\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}},\quad f'_y(P_0)=-\frac{e^2}{9}.$$

Tehát $df(x;y)=\frac{x-y}{x^2y}e^{\frac{x}{y}}dx-\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}dy,\quad df(P_0)=\frac{e^2}{36}dx-\frac{e^2}{9}dy.$

8.2.4.

a) A P_0 pontban vett, α szöghöz tartozó iránymenti derivált:

$$f'_\alpha(P_0)=f'_x(P_0)\cdot\cos\alpha+f'_y(P_0)\cdot\sin\alpha.$$

$$f'_x(x;y)=3(2x-4xy+y)^2(2-4y),\quad f'_x\left(-\frac{1}{2};2\right)=-450,$$

$$f'_y(x;y)=3(2x-4xy+y)^2(-4x+1),\quad f'_y\left(-\frac{1}{2};2\right)=225.$$

Így $f'_\alpha(P_0)=(-450)\left(-\frac{1}{2}\right)+225\frac{\sqrt{3}}{2}=225\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

b) $-\frac{1}{2}$. **c)** 0.

d) $f'_x(x;y)=\cos y(\sin x)^{\cos y-1}\cdot\cos x,$

$$f'_y(x;y)=-(\ln\sin x)\sin y(\sin x)^{\cos y},\quad f'_\alpha(P_0)=-\frac{\sqrt{6}}{8}\left(1+\sqrt{3}\ln 2\right).$$

8.2.5.

a) $f''_{xx}(x;y)=42xy^2,\quad f''_{xy}(x;y)=f''_{yx}(x;y)=42x^2y,$

$f''_{yy}(x;y)=14x^3-6y^2.$

b) $f'_x(x;y)=\frac{1}{y}\cdot e^{\frac{x}{y}},\quad f'_y(x;y)=-\frac{x}{y^2}\cdot e^{\frac{x}{y}}.$

$$f''_{xx}(x;y)=\left(f'_x(x;y)\right)'_x=\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y}\cdot e^{\frac{x}{y}}=\frac{1}{y^2}\cdot e^{\frac{x}{y}}.$$

$$f''_{xy}(x;y)=\left(f'_x(x;y)\right)'_y=-\frac{1}{y^2}\cdot e^{\frac{x}{y}}+\frac{1}{y}\left(-\frac{x}{y^2}\right)e^{\frac{x}{y}}=-\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^3}(y+x).$$

$$f''_{xy}(x;y)=f''_{yx}(x;y)=-\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^3}(y+x).$$

$$f''_{yy}(x;y)=\left(f'_y(x;y)\right)'_y=\frac{2x}{y^3}\cdot e^{\frac{x}{y}}-\frac{x}{y^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right)e^{\frac{x}{y}}=\frac{x\cdot e^{\frac{x}{y}}}{y^4}(2y+x).$$

c) $f''_{uu}(u;v)=\dfrac{4v}{(u-v)^3}$, $f''_{uv}(u;v)=f_{vu}''(u;v)=-2\dfrac{(u+v)}{(u-v)^3}$,

$f''_{vv}(u;v)=\dfrac{4u}{(u-v)^3}$.

8.2.6.

a) A vegyes másodrendű parciális deriváltfüggvényt kétféle sorrendben is meghatározhatjuk. Itt először y-szerint célszerű deriválni.

$$f'_y(x;y)=x\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}=\left(\cos\frac{y}{x}\right)^{-2}.$$

$$f''_{yx}(x;y)=-2\left(\cos\frac{y}{x}\right)^{-3}\left(-\sin\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-2\frac{y\sin\frac{y}{x}}{x^2\cos^3\frac{y}{x}}.$$

P_0 koordinátáinak behelyettesítésével: $f''_{yx}(P_0)=0$.

b) $f''_{xy}(P_0)=4(1-\ln 2)\cdot\ln 2$.

8.2.7.

a) 0. **b)** -2.

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y)=xy^2\cdot e^{\frac{x^2y^2}{2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x;y)=x^2y\cdot e^{\frac{x^2y^2}{2}}$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=y^2\left(1+x^2y^2\right)e^{\frac{x^2y^2}{2}}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=x^2\left(1+x^2y^2\right)e^{\frac{x^2y^2}{2}}$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x;y)=xy\left(2+x^2y^2\right)e^{\frac{x^2y^2}{2}}$.

$\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\cdot\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=x^2y^2\left(3+2x^2y^2\right)e^{x^2y^2}$.

8.3. Kétváltozós valós függvények differenciálszámításának alkalmazásai

8.3.1. A feladatok megoldásánál az alábbi lépésekre az előttük álló számokkal fogunk hivatkozni.

(1) Felírjuk az elsőrendű parciális deriváltakra vonatkozó egyenletrendszert $\left(f'_x(x;y)=0;\ f'_y(x;y)=0\right)$.

(2) Az egyenletrendszert megoldjuk, és megállapítjuk a stacionárius pontokat (ezekben lehet szélsőértéke a függvénynek).

(3) Ha van stacionárius pont, akkor kiszámítjuk a másodrendű parciális deriváltakat.

(4) Pontonként ellenőrizzük az elégséges feltétel teljesülését. Megadjuk a lokális szélsőérték(ek)et.

a)(1) $f'_x(x;y)=2e^{x^2}+\left(5+2x-y\right)\cdot e^{x^2}\cdot 2x=0$,

$f'_y(x;y)=-e^{x^2}=0$.

(2) Az egyenletrendszernek nincs megoldása, hiszen a második egyenlet egyetlen x értékre sem teljesül. A függvénynek nincs szélsőértéke.

b)(1) $f'_x(x;y)=e^{xy}\cdot y=0$, $f'_y(x;y)=e^{xy}\cdot x=0$.

(2) $x=0$, $y=0$. A stacionárius pont: $P(0;0)$.

(3) $f''_{xx}(x;y)=y^2\cdot e^{xy}$, $f''_{xy}(x;y)=f''_{yx}(x;y)=e^{xy}+x\cdot y\cdot e^{xy}$, $f''_{yy}(x;y)=x^2\cdot e^{xy}$.

(4) $f'''_{xx}(0;0)=0$, $f''_{xy}(0;0)=f''_{yx}(0;0)=1$, $f''_{yy}(0;0)=0$.

Mivel $D(0;0)=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1<0$, ezért f-nek a $P(0;0)$ pontban nincs lokális szélsőértéke. A $P(0;0)$ pont nyeregpont.

c) (1) $f'_x(x;y)=-2x+4=0$, $f'_y(x;y)=-2y=0$.

(2) $x=2$, $y=0$. A stacionárius pont: $P(2;0)$.

(3) $f''_{xx}(x;y)=-2$, $f''_{xy}(x;y)=f''_{yx}(x;y)=0$, $f''_{yy}(x;y)=-2$.

(4) $f''_{xx}(2;0)=-2$, $f''_{xy}(2;0)=f''_{yx}(2;0)=0$, $f''_{yy}(2;0)=-2$.

Mivel $D(2;0)=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=4>0$, ezért f-nek a $P(2;0)$ pontban lokális szélsőértéke van, mégpedig $f''_{xx}(2;0)=-2<0$ miatt lokális maximuma van.

A lokális maximum értéke: $f(2;0)=9$.

d) A $P(-2;0)$ pontban lokális minimum van, amely értéke:

$$f(-2;0)=-\frac{2}{e}.$$

e) A $P\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$ pontban lokális minimum van, amely értéke:

$$f\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)=0.$$

f) A $P(1;1)$ pontban lokális minimum van, amely értéke: $f(1;1)=-1$. (A $Q(0;0)$ pont nyeregpont.)

g) (1) $f'_x(x;y)=-2x+2y=0$, $f'_y(x;y)=3y^2-8y+2x=0$.

(2) $x = 0, y = 0,$ és $x = 2, y = 2$.
A stacionárius pontok: $P_1(0;0)$, $P_2(2;2)$.

(3) $f''_{xx}(x;y) = -2$, $f''_{xy}(x;y) = f''_{yx}(x;y) = 2$, $f''_{yy}(x;y) = 6y - 8$.

(4) Mivel $D(0;0) = 12 > 0$ és $f''_{xx}(0;0) = -2 < 0$, ezért a $P_1(0;0)$ pontban lokális maximum van, amely értéke: $f(0;0) = 0$. Mivel $D(2;2) = -12 < 0$, ezért f-nek a $P_2(2;2)$ pontban nincs lokális szélsőértéke. A $P_2(2;2)$ pont nyeregpont.

h) A $P_1(1;1)$ és $P_2(-1;-1)$ pontokban lokális maximum van, amelyek értéke: $f(1;1) = f(-1;-1) = \frac{41}{4}$. (A $P_3(0;0)$ pont nyeregpont.)

i) A $P(0;0)$ pontban lokális maximuma van, amely értéke: $f(0;0) = 1$.

j) A $P_1(0;-1)$ pontban lokális maximum van, amely értéke: $f(0;-1) = 5$, a $P_2(4;3)$ pontban lokális minimum van, amely értéke: $f(4;3) = -59$. (A $P_3(0;3)$ és a $P_4(4;-1)$ nyeregpontok.)

k) $x \neq 0$, $y \neq 0$, a $P(5;2)$ pontban lokális minimum van, amely értéke: $f(5;2) = 30$.

l) (1) Mivel a logaritmusfüggvényeket pozitív valós számokra értelmezzük, ezért $x > 0$, $y > 0$.

$$f'_x(x;y) = 2x + y - \frac{4}{x} = 0, \quad f'_y(x;y) = x + 2y - \frac{10}{y} = 0.$$

(2) A második egyenletből: $x = \frac{10}{y} - 2y$, amelyet behelyettesítve az első egyenletbe a $3y^4 - 37y^2 + 100 = 0$ egyenletet kapjuk. Figyelembe véve az $x > 0$, $y > 0$ feltételeket, az egyenletrendszer megoldásaiból csak az $x = 1$, $y = 2$ felel meg.
A stacionárius pont: $P(1;2)$.

(3) $f''_{xx}(x;y)=2+\frac{4}{x^2}$, $f''_{xy}(x;y)=f''_{yx}(x;y)=1$, $f''_{yy}(x;y)=2+\frac{10}{y^2}$.

(4) Mivel $D(1;2)=26>0$ és $f''_{xx}(1;2)=6>0$, ezért a $P(1;2)$ pontban lokális minimum van, amely értéke: $f(1;2)=7-10\ln 2$.

m)(1) $f(x;y)=x-y-x^2y+xy^2$, $f'_x(x;y)=1-2xy+y^2=0$,
$f'_y(x;y)=-1-x^2+2xy=0$.

(2) Összeadva a két egyenletet: $y^2-x^2=0$, tehát $y=x$ vagy $y=-x$.
Az első egyenletbe való behelyettesítésükkel kapjuk, hogy az egyenletrendszer megoldásai: $x=1$, $y=1$ és $x=-1$, $y=-1$.
A stacionárius pontok: $P_1(1;1)$ és $P_2(-1;-1)$.

(3) $f''_{xx}(x;y)=-2y$, $f''_{xy}(x;y)=f''_{yx}(x;y)=-2x+2y$,
$f''_{yy}(x;y)=2x$.

(4) Mivel $D(1;1)=-4<0$, ezért nincs lokális szélsőérték a $P_1(1;1)$ pontban. A $P_1(1;1)$ pont nyeregpont.
Mivel $D(-1;-1)=-4<0$, ezért nincs lokális szélsőérték a $P_2(-1;-1)$ pontban. A $P_2(-1;-1)$ pont nyeregpont.

n)A $P_1\left(1;\frac{1}{2}\right)$ és a $P_1\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ pontokban lokális minimum van, amelyek értéke: $f\left(1;\frac{1}{2}\right)=f\left(-1;-\frac{1}{2}\right)=\frac{19}{4}$.
(A $P_3(0;0)$ pont nyeregpont.)

8.3.2. Minimális lesz a költség, ha az A jelű termékből 2000 tonnát, a B jelűből 3000 tonnát állítanak elő.

8.3.3.(1) A profit függvény: $P(x;y) = R(x;y) - C(x;y)$, így
$P(x;y)=-x^2+2xy-2y^2-4x+12y+5$.
$P'_x(x;y)=-2x+2y-4=0$, $P'_y(x;y)=2x-4y+12=0$.

(2) Az egyenletrendszer megoldása: $x = 2$, $y = 4$.
A stacionárius pont: $Q(2;4)$.

(3) $P''_{xx}(x;y) = -2$, $P''_{xy}(x;y) = P''_{yx}(x;y) = 2$, $P''_{yy}(x;y) = -4$.

(4) Mivel $D(2;4) = 4 > 0$ és $P''_{xx}(2;4) = -2 < 0$, ezért a $P(2;4)$ pontban lokális maximum van. Maximális lesz a profit, ha az A jelű termékből 2000 tonnát, a B jelűből 4000 tonnát állítanak elő.

8.3.4. A felület $P(0;0;-1)$ pontja van legközelebb az origóhoz.

8.3.5. Jelölje x, y az alaplap éleit és z a tartály magasságát méterben. A tartály felülete: $F(x;y) = xy + 2xz + 2yz$. A tartály térfogata: $xyz = 4$. Tehát az $F(x;y) = xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}$ kétváltozós függvény lokális minimumát keressük.

(1) $F'_x(x;y) = y - \frac{8}{x^2} = 0$, $F'_y(x;y) = x - \frac{8}{y^2} = 0$.

(2) Az egyenletrendszer megoldása: $x = 0$, $y = 0$ és $x = 2$, $y = 2$. A feladat geometriai tartalmából következik, hogy a stacionárius pont: $P(2;2)$.

(3) $F''_{xx}(x;y) = \frac{16}{x^3}$, $F''_{xy}(x;y) = F''_{yx}(x;y) = 1$, $F''_{yy}(x;y) = \frac{16}{y^3}$.

(4) Mivel $D(2;2) = 3 > 0$ és $F''_{xx}(2;2) = 2 > 0$, ezért a $P(2;2)$ pontban lokális minimum van. Tehát azon négyzetalapú tartályhoz kell a legkevesebb anyag, amelynek az alapélei 2 méter, magassága 1 méter hosszúak.

8.3.6.

a) Az átfogó c hosszát a következő kétváltozós függvénnyel számítjuk: $c(a;b) = \sqrt{a^2 + b^2}$. Az abszolút hiba becslésére az alábbi képletet használjuk: $|\Delta c| \approx |c'_a(a_0;b_0)| \cdot |\Delta a| + |c'_b(a_0;b_0)| \cdot |\Delta b|$, ahol a_0 és b_0 a mért értékek, Δa és Δb pedig a mérési hibák. Az adatok cm-ben: $a_0 = 5$; $b_0 = 12$; $|\Delta a| = 0{,}1$; $|\Delta b| = 0{,}2$.

$$c'_a(a;b)=\frac{2a}{2\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad c'_a(a_0;b_0)=\frac{5}{13}.$$

$$c'_b(a;b)=\frac{2b}{2\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad c'_a(a_0;b_0)=\frac{12}{13}.$$

Így az abszolút hiba: $|\Delta c|\approx\frac{5}{13}\cdot 0{,}1+\frac{12}{13}\cdot 0{,}2\approx 0{,}22$. Mivel a mért adatokkal számolt érték: $c(a_0;b_0)=13$, a mérés relatív hibája:

$$\delta c=\frac{|\Delta c|}{|c(a_0;b_0)|}\approx\frac{0{,}22}{13}\approx 0{,}017.\ (1{,}7\ \%.)$$

b) $|\Delta T|\approx 1{,}1;\quad \delta T\approx 0{,}037$.

c) $(\mathrm{tg}\beta)(a;b)=\frac{b}{a},\quad (\mathrm{tg}\beta)'_a(a;b)=-\frac{b}{a^2},\quad (\mathrm{tg}\beta)'_b(a;b)=\frac{1}{a},$

$$|\Delta(\mathrm{tg}\beta)|=\left|-\frac{12}{25}\right|\cdot|0{,}1|+\left|\frac{1}{5}\right|\cdot|0{,}2|\approx 0{,}088;\quad \delta(\mathrm{tg}\beta)=0{,}037.$$

8.3.7. $R=\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}\approx 2{,}536$; $|\Delta R_1|=|\Delta R_2|=0{,}05$ a kerekítés miatt. $|\Delta R|\approx 0{,}026$. Tehát $R=2{,}54\pm 0{,}03\,\Omega$. A kiinduló adatok egy tizedesjegyre kerekítve vannak megadva, így a számolt adatot is elég ekkora pontossággal megadni: $R=2{,}5\,\Omega$, vagy $R=2{,}6\,\Omega$.

8.3.8. $\rho=524\pm 9\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

8.3.9.

a) A véges növekmények tétele szerint $\Delta f(x;y)\approx f'_x(x_0;y_0)\cdot\Delta x+f'_y(x_0;y_0)\cdot\Delta y$, ahol $P_0(x_0;y_0)$ egy a $P(x;y)$ ponthoz közeli olyan pont, ahol a függvényérték könnyen számítható, s $\Delta f(x;y)=f(x;y)-f(x_0;y_0)$ illetve $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$. Legyen $P_0(3;2)$ ez a kiinduló pont. Ekkor

$f(P_0)=\ln(3^2-2^3)=0$. A további adatok:

$\Delta x=3{,}02-3=0{,}02;\quad \Delta y=1{,}96-2=-0{,}04$.

$$f'_x(x;y)=\frac{2x}{x^2-y^3},\quad f'_x(P_0)=\frac{6}{1}=6.$$

$$f'_y(x;y)=\frac{-3y^2}{x^2-y^3},\quad f'_y(P_0)=\frac{-12}{1}=-12.$$

Így $\Delta f(P)\approx 6\cdot 0{,}02+(-12)\cdot(-0{,}04)=0{,}6$, s végül:

$f(P)\approx f(P_0)+\Delta f(P)=0+0{,}6=0{,}6$.

b) $f(-1{,}98;3{,}01)\approx 37{,}22$.

8.4. Kétváltozós valós függvények integrálszámítása

8.4.1.

a) Amikor az egyik változó szerint integrálunk, a másikat konstansként kezeljük. Ha mindkét változó határa konstans, akkor tetszőleges sorrendben számolhatjuk a kettős integrált.

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)dy\right)dx=\int_{-1}^{1}\left[y-\frac{x}{3}y-\frac{y^2}{8}\right]_{-2}^{2}dx=4\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{x}{3}\right)dx=8.$$

b) $\frac{3}{2}$.

c) $\frac{1}{3}\ln 5$.

d) Itt az integrálást célszerű x-szerint kezdeni.

$$\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{2}\frac{1+xy}{1-y}dx\right)dy=\int_{-1}^{0}\frac{1}{1-y}\left[x+y\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2}dy=\int_{-1}^{0}\frac{1}{1-y}\big((2+2y)-$$

$$-(0+0)\big)dy=\int_{-1}^{0}\frac{2+2y}{1-y}dy=-2\int_{-1}^{0}\frac{y+1}{y-1}dy=-2\int_{-1}^{0}\left(1+\frac{2}{y-1}\right)dy=$$

$$=-2\left[y+2\ln|y-1|\right]_{-1}^{0}=-2\big((0+0)-(-1+2\ln 2)\big)=4\ln 2-2.$$

e) $\ln 2$.

f) Itt az integrálást célszerű y-szerint kezdeni.

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left(\int_{0}^{1} \underbrace{x^3 \cdot e^{x^2 y}}_{f(ay+b)}\, dy\right)dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} x^3\left[\frac{e^{x^2 y}}{x^2}\right]_0^1 dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} x\left(e^{x^2}-1\right)dx =$$

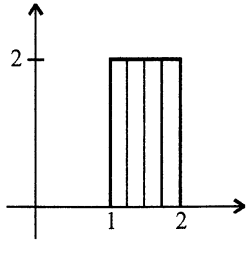
$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left(\underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{x^2}\cdot 2x\right)}_{f(g(x))\cdot g'(x)} - x\right)dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[e^{x^2} - x^2\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(e^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}\right) - (e-1)\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{e} - e + \frac{3}{4}\right).$$

8.4.2.

a) 1. **b)** 1.

c) $T = \left\{(x;y) \,\middle|\, 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\right\}$.



$$\int_1^2\left(\int_0^2 \frac{x}{(x+y)^2}\, dy\right)dx = \int_1^2 x\left[-\frac{1}{x+y}\right]_0^2 dx = \int_1^2 -x\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= \int_1^2\left(-\frac{x}{x+2}+1\right)dx = \int_1^2\left(-\left(1-\frac{2}{x+2}\right)+1\right)dx = 2\int_1^2 \frac{1}{x+2}dx =$$

$$= 2\left[\ln|x+2|\right]_1^2 = 2(\ln 4 - \ln 3) = 2\ln\frac{4}{3}.$$

8.4.3.

a) A T tartomány az x-tengelyre nézve normális. Ezért az integrálást y-szerint kell kezdeni, a megadott határok között. (8.2.a. ábra.)

$$\int_0^{\sqrt{3}}\left(\int_0^{\operatorname{arctg} x}\frac{54y}{1+x^2}\,dy\right)dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{54}{1+x^2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\operatorname{arctg} x}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{27}{1+x^2}\left(\operatorname{arctg}^2 x-0\right)dx$$

$$=27\int_0^{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}^2 x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=27\left[\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}=9\left(\left(\frac{\pi}{3}\right)^3-0^3\right)=\frac{\pi^3}{3}.$$

b) $\frac{3}{8}$.

c) A T tartomány egy origó középpontú, 2 egység sugarú körtartomány az xy-síkon. Ez az x-tengelyre (és az y-tengelyre) nézve normáltartomány, melyet határaival így is megadhatunk:

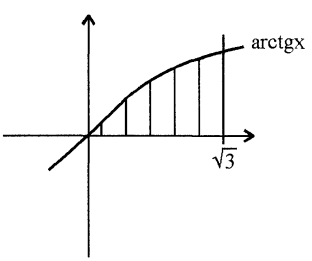
$$T=\left\{(x;y)\,\middle|\,-2\le x\le 2,\ -\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}.$$ (8.2.b.ábra.)

$$\int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(3x-4y)dy\right)dx=\int_{-2}^{2}6x\sqrt{4-x^2}\,dx=0.$$

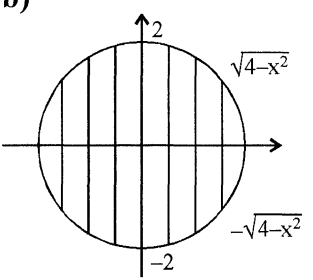
d) $\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}$.

e) $8-4\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$.

a)



b)



8.2. ábra

8.4.4.

a) $\frac{3\pi^2}{8}+\frac{1}{2}$.

b) Az ABC háromszögtartomány az x-tengelyre nézve normális, ahol y alsó határa az AB egyenes, felső határa pedig az AC egyenes. Ezek egyenleteinek felírásához például az $y-y_0=m(x-x_0)$ képletet használhatjuk, ahol m az egyenes meredeksége, $P_0(x_0;y_0)$ pedig egy pontja. (8.3.a. ábra.)

AB: $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-\frac{4}{16}=-\frac{1}{4}$; $y+9=-\frac{1}{4}(x+2)$; $y=-\frac{1}{4}x-\frac{19}{2}$.

AC: $m=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$; $y+9=\frac{3}{4}(x+2)$; $y=\frac{3}{4}x-\frac{15}{2}$.

$$\int_{-2}^{14}\left(\int_{-\frac{1}{4}x-\frac{19}{2}}^{\frac{3}{4}x-\frac{15}{2}}(x+8y)\,dy\right)dx=-5376.$$

c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2e^2}$.

d) $2+8\ln\frac{3}{4}$.

e) A tartomány egy tengelypárhuzamos derékszögű háromszögtartomány, ez mindkét tengelyre nézve normáltartomány. Mivel az integrálást y-szerint egyszerűbb elkezdeni, válasszuk ezt a sorrendet. A CB egyenes egyenlete az ábráról leolvasható: $y=-x+2$, mert a meredeksége $m=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{\frac{3}{2}-2}{\frac{1}{2}-0}=-1$, és az y-tengelyt 2-nél metszi. Így $T=\left\{(x;y)\,\middle|\,0\le x\le\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\le y\le -x+2\right\}$. (8.3.b. ábra.)

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\frac{3}{2}}^{-x+2}\frac{2y}{\left(y^2-x^2\right)^2}\,dy\right)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\frac{3}{2}}^{-x+2}\underbrace{\left(y^2-x^2\right)^{-2}}_{(f(y))^{\alpha}}\cdot\underbrace{2y}_{f'(y)}\,dy\right)dx=$$

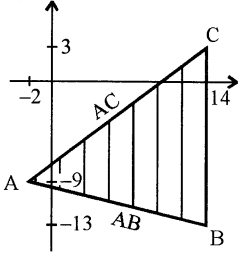
$$= -\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{y^2 - x^2} \right]_{\frac{3}{2}}^{-x+2} dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{(-x+2)^2 - x^2} - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - x^2} \right) dx =$$

$$= -\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{-4x+4} - \frac{1}{\frac{9}{4} - x^2} \right) dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-1} dx + \frac{4}{9} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}x\right)^2} \right) dx =$$

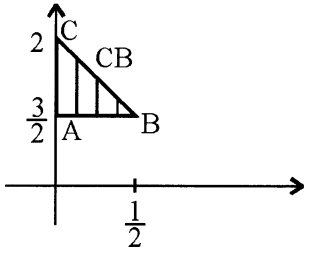
$$= \frac{1}{4} \left[\ln|x-1| \right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{1 + \frac{2}{3}x}{1 - \frac{2}{3}x} \right| \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left(\ln \frac{1}{2} - 0 \right) + \frac{1}{3} (\ln 2 - 0) =$$

$$= -\frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 2 = \frac{1}{12} \ln 2 .$$

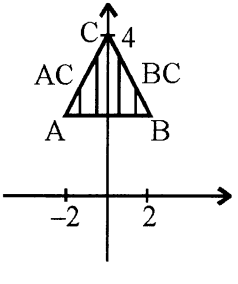
a)



b)



c)



8.3. ábra

f) $T=\left\{(x;y)\middle|\, 0\le x\le 4,\ x\le y\le x+1\right\}$.

$$\int_0^4\left(\int_x^{x+1}\left(\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{3}{2}\underbrace{\left(y^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2y}_{(f(y))^{\alpha}\cdot f'(y)}\right)dy\right)dx=$$

$$=\int_0^4\left(\frac{e^x}{1+e^x}+(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right)dx=\ln\left(\frac{1+e^4}{2}\right)+\frac{242}{5}.$$

8.4.5.

a) $\frac{1}{12}+\frac{1}{6}e^6-\frac{1}{4}e^4$.

b) Az ABC háromszög az y-tengelyre nézve normáltartomány, ahol x alsó határa az AC egyenes, felső határa pedig a BC egyenes. Az AC egyenes egyenlete: $y=2x+4$, azaz $x=\frac{y-4}{2}$, a BC egyenesé pedig $y=-2x+4$, azaz $x=\frac{4-y}{2}$. (8.3.c. ábra.)

$$T=\left\{(x;y)\middle|\,\frac{y-4}{2}\le x\le\frac{4-y}{2},\ 2\le y\le 4\right\}.$$

$$\int_2^4\left(\int_{\frac{y-4}{2}}^{\frac{4-y}{2}}\frac{x^2}{y^2}dx\right)dy=\int_2^4\frac{1}{y^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{y-4}{2}}^{\frac{4-y}{2}}dx=\frac{1}{3}\int_2^4\frac{1}{y^2}\left(\left(\frac{4-y}{2}\right)^3-\left(\frac{y-4}{2}\right)^3\right)dy=$$

$$=\frac{1}{3\cdot 8}\int_2^4\frac{1}{y^2}\left((4-y)^3+(4-y)^3\right)dy=\frac{2}{24}\int_2^4\frac{1}{y^2}\left(64-48y+12y^2-y^3\right)dy=$$

$$=\frac{1}{12}\int_2^4\left(\frac{64}{y^2}-\frac{48}{y}+12-y\right)dy=\frac{1}{12}\left[-\frac{64}{y}-48\ln|y|+12y-\frac{y^2}{2}\right]_2^4=$$

$$=\frac{1}{12}\left((-16-48\ln 4+48-8)-(-32-48\ln 2+24-2)\right)=\frac{17}{6}-4\ln 2.$$

Felhasználtuk, hogy $\ln 4=\ln 2^2=2\ln 2$.

c) $\int_1^{\sqrt{3}}\left(\int_y^{2y}\frac{2}{1+(y-x)^2}\,dx\right)dy=\int_1^2-2\left[\operatorname{arctg}(y-x)\right]_y^{2y}dy=\int_1^{\sqrt{3}}\underset{f'(y)}{2}\cdot\underset{g(y)}{\operatorname{arctg}\,y}\,dy=$

$=\left[2y\cdot\operatorname{arctg}\,y\right]_1^{\sqrt{3}}-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2y}{1+y^2}dy=2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\right)-\ln 2.$

d) $\frac{e^4}{8}+\frac{1}{24}$. **e)** $2\left(\sqrt{7}-2\right)\ln 2$.

8.4.6.

a) 1. **b)** 0.

c) A T tartomány az x-tengelyre nézve normáltartomány.

$T=\left\{(x;y)\,\middle|\,-1\le x\le 1,\ x^2\le y\le 4\right\}$. (8.4.a. ábra.)

$\int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{4}\frac{x-1}{(y+1)^2}dy\right)dx=\int_{-1}^{1}(1-x)\left[\frac{1}{y+1}\right]_{x^2}^{4}dy=\int_{-1}^{1}(1-x)\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$

$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{5}-\frac{x}{5}-\frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{1+x^2}\right)dx=\left[\frac{x}{5}-\frac{x^2}{10}-\operatorname{arctg}\,x+\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\right]_{-1}^{1}=$

$=\left(\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}\right)-\left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\ln 2}{2}\right)\right)=\frac{2}{5}-\frac{\pi}{2}.$

d) $\int_0^{\ln 3}\left(\int_1^{e^x}4y\cdot\operatorname{sh}x\,dy\right)dx=4\int_0^{\ln 3}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\frac{1}{2}\left(e^{2x}-1\right)dx=$

$=\int_0^{\ln 3}\left(e^{3x}-2e^x+e^{-x}\right)dx=\frac{16}{3}$. (8.4.b. ábra.)

8.4.7.

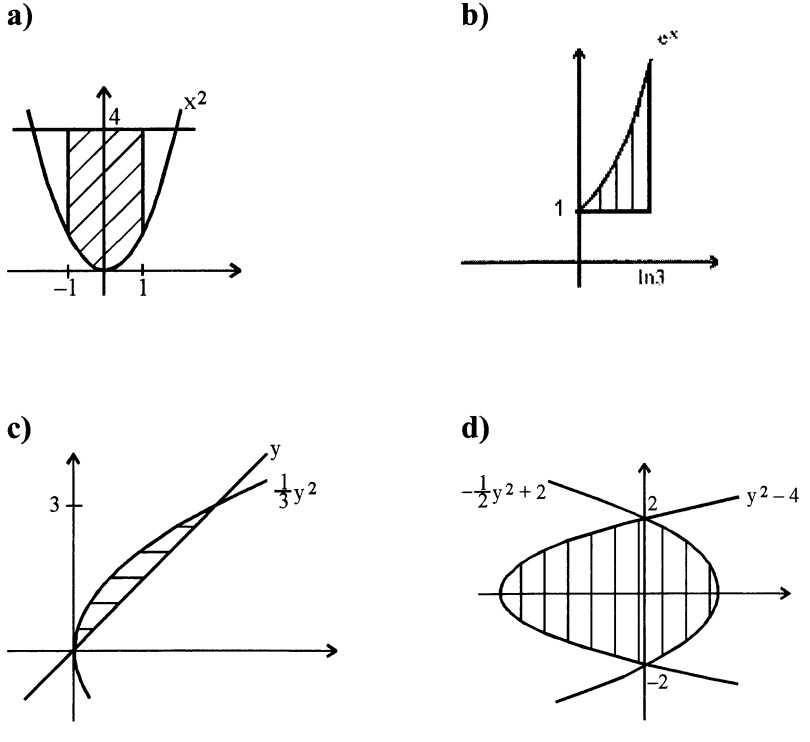
a) A tartomány az y-tengelyre nézve normáltartomány. A két görbe metszéspontjainak y-koordinátáit az $y=\frac{1}{3}y^2$ egyenlet gyökei adják:

$y = 0$ illetve $y = 3$. $T = \left\{ (x;y) \middle| \frac{1}{3}y^2 \le x \le y,\ 0 \le y \le 3 \right\}$.

$$\int_0^3 \left(\int_{\frac{y^2}{3}}^{y} y \cdot e^x \, dx \right) dy = \int_0^3 y \cdot \left[e^x \right]_{\frac{y^2}{3}}^{y} dy = \int_0^3 \left(y \cdot e^y - y \cdot e^{\frac{y^2}{3}} \right) dy =$$

$$= \left[y \cdot e^y \right]_0^3 - \int_0^3 e^y dy - \frac{3}{2} \int_0^3 \underbrace{e^{\frac{y^2}{3}} \cdot \frac{2}{3} y}_{f(g(y)) \cdot g'(y)} dy = \left(3e^3 - 0 \right) - \left[e^y \right]_0^3 - \frac{3}{2} \left[e^{\frac{y^2}{3}} \right]_0^3 =$$

$$= 3e^3 - \left(e^3 - 1 \right) - \frac{3}{2} \left(e^3 - 1 \right) = \frac{1}{2} e^3 + \frac{5}{2}. \quad \text{(8.4.c. ábra.)}$$

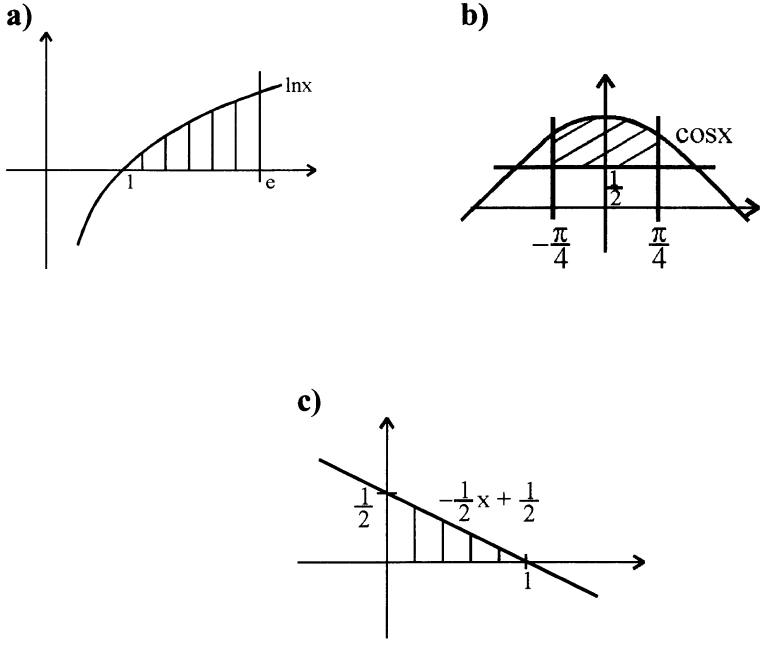


8.4. ábra

b) $\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\ln 2$. **c)** $\frac{7}{72}-\frac{1}{2}\ln^2 2-\frac{1}{24}\ln 2$.

d) $\int_{-2}^{2}\left(\int_{y^2-4}^{-\frac{y^2}{2}+2}1\,dx\right)dy=16$. (8.4.d. ábra.) Megjegyezzük, hogy egy tartományon az $f(x;y)=1$ függvény kettős integráljának geometriai jelentése (a tartomány feletti térfogat mellett) a tartomány területe.

8.4.8. A tartományokat a 8.5. ábrán rajzoltuk meg.



8.5. ábra

a) $\int_1^e \left(\int_0^{\ln x} \left(\frac{2y}{x} - 1 \right) dy \right) dx = \int_1^e \left[\frac{y^2}{x} - y \right]_0^{\ln x} dx = \int_1^e \left(\frac{\ln^2 x}{x} - \ln x \right) dx =$

$= \int_1^e (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} dx - \int_1^e 1 \cdot \ln x = \left[\frac{(\ln x)^3}{3} \right]_1^e - [x \cdot \ln x]_1^e + \int_1^e 1 dx =$

$= \left(\frac{1}{3} - 0 \right) - (e - 0) + [x]_1^e = \frac{1}{3} - e + (e - 1) = -\frac{2}{3}.$

Az integrálás határaiból leolvasható az integrálási tartomány: $T = \{(x;y) | 1 \le x \le e,\ 0 \le y \le \ln x\}$, mely az x-tengelyre nézve normáltartomány. Ábrázoljuk az $y = 0$, $y = \ln x$, $x = 1$, $x = e$ görbéket, majd a tartományt.

b) 0. **c)** $\frac{3}{8}$.

8.4.9.

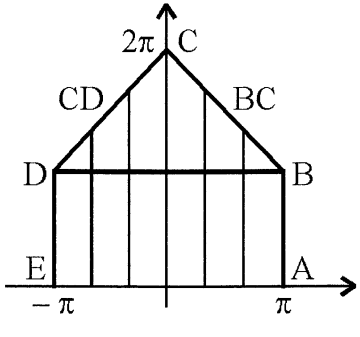
a) Érdemes a tartományt az y-tengelyre nézve normáltartományok egyesítéseként felírni, mert akkor az egyik tartomány téglalap lesz.

$T_{ABCDE} = T_{ABDE} \cup T_{BCD}$, ahol

$T_{ABDE} = \{(x;y) | -\pi \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi\}$,

$T_{BCD} = \{(x;y) | y - 2\pi \le x \le 2\pi - y,\ \pi \le y \le 2\pi\}$.

Utóbbihoz felhasználtuk a CD illetve BC egyenesek egyenleteit: $y = x + 2\pi$, azaz $x = y - 2\pi$, illetve $y = -x + 2\pi$, azaz $x = 2\pi - y$.



$$\iint_{T_{ABCDE}} f(x;y)\,dT = \int_0^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\sin y\cdot\cos x\,dx\right)dy + \int_{\pi}^{2\pi}\left(\int_{y-2\pi}^{2\pi-y}\sin y\cdot\cos x\,dx\right)dy =$$

$$\int_0^{\pi}\sin y\cdot[\sin x]_{-\pi}^{\pi}dy + \int_{\pi}^{2\pi}\sin y\cdot[\sin x]_{y-2\pi}^{2\pi-y}dy = \int_0^{\pi}\sin y(0-0)dy +$$

$$+\int_{\pi}^{2\pi}\sin y(\sin(2\pi-y)-\sin(y-2\pi))dy = 0+\int_{\pi}^{2\pi}\sin y(-\sin y-\sin y)dy =$$

$$= -2\int_{\pi}^{2\pi}\sin^2 y\,dy = -2\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1-\cos 2y}{2}dy = \int_{\pi}^{2\pi}(\cos 2y-1)dy =$$

$$= \left[\frac{\sin 2y}{2}-y\right]_{\pi}^{2\pi} = (0-2\pi)-(0-\pi) = -\pi\,.$$

Felhasználtuk, hogy az $f(y)=\sin y$ függvény 2π szerint periodikus és páratlan.

b) 912.

9. KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

9.1. Alapfogalmak

9.1.1.

a) A differenciálegyenlet harmadrendű, mert benne az ismeretlen függvény legmagasabb deriváltjának rendje három. Lineáris is, mert $f_n(x)\cdot y^{(n)}+\ldots+f_1(x)\cdot y'+f_0(x)\cdot y=g(x)$ alakú. $(n=3.)$

b) Másodrendű, lineáris. **c)** Negyedrendű, nem lineáris.

9.1.2.

a) Az $f(x)$ nem megoldás, mert behelyettesítve nem teszi igazzá a differenciálegyenletet. A $g(x)$ megoldás, mert

$$(-2\cos 2x)^2+(-\sin 2x)(4\sin 2x)=4(\cos^2 2x-\sin^2 2x)=4\cos 4x$$

b) Az $f(x)$ nem megoldás, a $g(x)$ megoldás.

9.1.3. Az alábbi megoldásokban és a továbbiakban sem vizsgáljuk a megoldásfüggvények értelmezési tartományát.

a) Ennek a differenciálegyenletnek az általános megoldását háromszori integrálással határozhatjuk meg. Legyen $y=y(x)$.

$$y'''(x)=1,\ y''(x)=\int 1\,dx=x+C,\ y'(x)=\int(x+C)dx=\frac{x^2}{2}+Cx+D,$$

$$y(x)=\int\left(\frac{x^2}{2}+Cx+D\right)dx=\frac{x^3}{6}+C\frac{x^2}{2}+Dx+E,\ \text{ahol } C,D,E\in\mathbf{R}.$$

Az $y(x)$ függvény valóban megoldása a differenciálegyenletnek, erről deriválással meggyőződhetünk. A differenciálegyenlet harmadrendű, ezért $y(x)$ általános megoldás, hiszen három független

paramétert tartalmaz. Tehát: $y_á(x)=\frac{x^3}{6}+C\frac{x^2}{2}+Dx+E$.

A kezdeti feltételeket felhasználva:

$y(0)=0+C\cdot 0+D\cdot 0+E=E=1$, így $E=1$,

$y'(0)=0+C\cdot 0+D=D=0$, így $D=0$,

$y''(0)=0+C=C=-1$, így $C=-1$.

Az így kiszámolt konstansok értékét az általános megoldásba helyettesítve kapjuk a kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldást: $y_p(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+1$.

b) $y_á(x)=-4\cos\frac{x}{2}+Cx+D$, $y_p(x)=-4\cos\frac{x}{2}+Cx+4$.

c) $y_á(x)=\ln\left(1+e^x\right)+C$, $y_p(x)=\ln\left(1+e^x\right)-\ln 2=\ln\frac{1+e^x}{2}$.

9.2. Elsőrendű differenciálegyenletek

9.2.1.

a) A megoldás menete: y' helyébe az y-nak x-szerinti deriváltjának másik jelét, $\frac{dy}{dx}$-et írunk, majd ezt valódi törtként kezelve külön oldalra rendezzük a változókat. Így mindkét oldalon egy-egy integrandust kapunk, s integrálunk.

$\frac{dy}{dx}=2xy^2$, $\frac{1}{y^2}dy=2x\,dx$, $(y\neq 0)$, $\int\frac{1}{y^2}dy=\int 2x\,dx$, ebből

$-\frac{1}{y}+C_1=x^2+C_2$, ahol $C_1,C_2\in\mathbf{R}$. A $C_2-C_1=C$ bevezetésével

$-\frac{1}{y}=x^2+C$, ahol $C\in\mathbf{R}$, azaz $y_á(x)=-\frac{1}{x^2+C}$. (Ez a módszer valóban megoldást ad, s az egyetlen paraméter miatt ez általános megoldás.) A kezdeti feltétel behelyettesítésével:

$y(1)=-\frac{1}{1+C}=-\frac{1}{2}$, azaz $1+C=2$, $C=1$. Így $y_p(x)=-\frac{1}{x^2+1}$.

Megjegyezzük, hogy a differenciálegyenletnek a levezetés során kizárt $y(x)=0$ is megoldása, ez szinguláris megoldás.

b) $\ln|y|=\frac{x^2}{2}+C_1$, $(y\neq 0)$, $|y|=e^{\frac{x^2}{2}+C_1}=e^{\frac{x^2}{2}}\cdot e^{C_1}=C_2\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$, ahol $C_2=e^{C_1}>0$. Ebből $y=C_2e^{\frac{x^2}{2}}$ vagy $y=-C_2e^{\frac{x^2}{2}}$, ahol $C_2\in\mathbf{R}^+$.

Így $y=Ce^{\frac{x^2}{2}}$, ahol $C\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, hiszen C_2 végigfut a pozitív valós számokon, $-C_2$ a negatív valós számokon. Behelyettesítéssel kapjuk, hogy a $C=0$ $(y=0)$ választás is megoldást ad, tehát: $y=Ce^{\frac{x^2}{2}}$, ahol $C\in\mathbf{R}$.

c) $y_á=(x^2+C)^2$, $y_p=x^4$ illetve $y_p=(x^2-2)^2$.

d) $y_á=\pm\sqrt{\frac{x^2}{Cx^2+1}}$, nincs megfelelő partikuláris megoldás.

e) $\frac{dy}{dx}\sin x=y\ln y$, $\int\frac{1}{y\ln y}dy=\int\frac{1}{\sin x}dx$, $\ln|\ln y|=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\ln C_1$, ahol $C_1>0$. (A baloldali integrál $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakú, a jobboldalit a $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$-es helyettesítéssel integrálhatjuk.) A valós konstanst felvehetjük $\ln C_1$ alakban, mert az $f(x)=\ln x$ függvény értékkészlete a valós számok halmaza. Azért célszerű ezt megtennünk, mert akkor a logaritmus-azonosságokat felhasználva egyszerűbb alakra hozhatjuk az összefüggést:

$\ln|\ln y| = \ln C_1 \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$, $|\ln y| = C_1 \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$ $(C_1 > 0)$ a logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt. Ebből a b) feladatban részletezettek alapján $\ln y = C \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $C \in \mathbf{R}$ következik. (A $C = 0, y = 1$ választás is megoldás. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy itt a két abszolút érték jel elhagyása miatt további megoldások is léteznek, ezek leírása viszont már nagyon nehézkessé teszi a megoldást.) Így $y = e^{C \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$, $C \in \mathbf{R}$.

f) A differenciálegyenlet átrendezve: $y' = -\frac{1+y^2}{2y \cdot x}$, tovább alakítva: $\frac{2y}{1+y^2}dy = -\frac{1}{x}dx$. Ennek megoldása: $1+y^2 = \frac{C}{x}$, $y = \pm\sqrt{\frac{C}{x} - 1}$.

g) $y = \operatorname{tg} \ln C\sqrt{1+x^2}$, $C > 0$. **h)** $y = \ln\left(C - e^{-x}\right)$.

9.2.2.

a) Az elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletek speciális szétválasztható változójú differenciálegyenletek. Megoldásuk tehát a változók szétválasztásával és integrálással történhet.

$$x\frac{dy}{dx} = 3y, \quad \frac{1}{y}dy = \frac{3}{x}dx, \quad \int\frac{1}{y}dy = \int\frac{3}{x}dx, \quad \ln|y| = 3\ln|x| + \ln C_1,$$

ahol $C_1 > 0$. Így $|y| = C_1|x|^3$, $y = Cx^3$, $C \in \mathbf{R}$.

Érdemes megjegyezni a megoldásfüggvény alábbi alakját. Az $y' + p(x) \cdot y = 0$ alakú elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenlet általános megoldása: $y_{á} = Ce^{-P(x)}$, ahol $P(x)$ a $p(x)$ függvénynek egy primitív függvénye, és C tetszőleges valós szám. Ennek alkalmazásához a differenciálegyenletet a megfelelő alakra kell hozni:

$y' - \frac{3}{x} \cdot y = 0$, így $p(x) = -\frac{3}{x}$, ebből $P(x) = -3\ln|x|$. Így

$y_{á}(x) = C_1 e^{3\ln|x|} = C_1 e^{\ln|x|^3} = C_1|x|^3$, azaz $y = Cx^3$, $C \in \mathbf{R}$.

b) $y = Ce^{-\frac{x^3}{3}}$. **c)** $y = C\sin x$.

d) $p(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$, $P(x) = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$, $y = C \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

9.2.3.

a) Lineáris inhomogén differenciálegyenletek általános megoldását az egyenlethez tartozó homogén differenciálegyenlet (a továbbiakban röviden homogén egyenlet) általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege adja. ($y_{i,á} = y_{h,á} + y_{i,p}$.)

1. A homogén egyenlet: $y' - \frac{1}{x+1}y = 0$. Ezt a változók szétválasztásával megoldva:

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1}y$, $\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x+1}dx$, $\int\frac{1}{y}dy = \int\frac{1}{x+1}dx$,

$\ln|y| = \ln|x+1| + \ln C_1 = \ln C_1|x+1|$, $C_1 > 0$, $|y| = C_1|x+1|$.

Így $y_{h,á} = C(x+1)$, $C \in \mathbf{R}$.

2. Az állandó variálásának módszere szerint ekkor az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását $y_{i,p} = k(x)\cdot(x+1)$ alakban keressük. Ekkor $y'_{i,p} = k'(x)\cdot(x+1) + k(x)$. Ezeket az inhomogén egyenletbe helyettesítjük.

$k'(x)\cdot(x+1) + k(x) - \frac{1}{x+1}\cdot k(x)\cdot(x+1) = x^2 - 1$.

Ha jól dolgozunk, a $k(x)$-et tartalmazó tagok összege 0. Ezután

$k'(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - 1$.

A $k(x)$ függvény a $k'(x)$ primitív függvénye, pl. $k(x)=\frac{x^2}{2}+x$.

Így $y_{i,p}=k(x)\cdot(x+1)=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)(x+1)=x\left(\frac{x}{2}+1\right)(x+1)$.

3. $y_{i,á}=C(x+1)+x\left(\frac{x}{2}+1\right)(x+1)=(x+1)\left(C+\frac{x^2}{2}+x\right)$.

b) $y=Ce^{2x}-x-\frac{1}{2}$.

c) $y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x}\cos\frac{x}{2}$.

1. $y_{h,á}=C_1e^{-\ln|x|}=C_1\cdot\frac{1}{e^{\ln|x|}}=C_1\cdot\frac{1}{|x|}$, $y_{h,á}=\frac{C}{x}$.

2. $y_{i,p}=\frac{k(x)}{x}$, $k'(x)=\cos\frac{x}{2}$, $k(x)=2\sin\frac{x}{2}$.

3. $y_{i,á}=\frac{1}{x}\left(C+2\sin\frac{x}{2}\right)$.

d) $y=Ce^{-x}+\frac{e^{2x}}{3}-e^{-2x}$.

e) $y=\frac{1}{x^2}\left(C+\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right)$.

f) $y=\left(1+x^2\right)\left(C+\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x\right)$.

g) $y'+\frac{1}{x^2}y=\frac{1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x$.

1. $y'+\frac{1}{x^2}y=0$. A 10.2.2.a) feladatban leírt képletet használva:

$p(x)=\frac{1}{x^2}$, $P(x)=-\frac{1}{x}$, $y_{h,á}=Ce^{-P(x)}=Ce^{\frac{1}{x}}$.

2. $y_{i,p}=k(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}$, $y'_{i,p}=k'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}+k(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$.

Ezeket az inhomogén egyenletbe helyettesítve:

$k'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}-k(x)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}\cdot k(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x$, azaz

$k'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x$, $k'(x)=\frac{1}{x}\cdot\ln x$.

Érdemes megjegyezni, hogy ha $y_{i,p}=k(x)\cdot r(x)$ alakú, akkor ebben a lépésben mindig az $k'(x)=\frac{q(x)}{r(x)}$ egyenlethez jutunk, ahol $q(x)$ az $y'+p(x)\cdot y=q(x)$ alakra hozott differenciálegyenlet jobboldala.

$k'(x)=\underset{(f(x))^{\alpha}\cdot f'(x)}{\ln x\cdot\frac{1}{x}}$, $k(x)=\frac{\ln^2 x}{2}$, $y_{i,p}=\frac{\ln^2 x}{2}\cdot e^{\frac{1}{x}}$.

3. $y_{i,á}=e^{\frac{1}{x}}\left(C+\frac{\ln^2 x}{2}\right)$.

h) $y=\operatorname{tg}x\left(C+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right)$.

i) 1. $y_{h,á}=C_1e^{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}=C\cdot\frac{1+x}{1-x}$.

2. $k'(x)=\frac{1-x}{1+x}=-\left(1-\frac{2}{x+1}\right)$, $k(x)=-x+2\ln|x+1|$.

3. $y_{i,á}=\frac{1+x}{1-x}\left(C-x+2\ln|x+1|\right)$.

j) $y = \frac{C}{\sqrt{x}} + 1 - \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

k) $y = Ce^{-\sin x} + \frac{1}{2}e^{x^2-\sin x}$.

l) $y = e^{\frac{1}{x^2}}\left(C - x\ln x + x\right)$.

m) $y = \frac{C}{\ln x} + \frac{\ln x}{2}$.

n) A differenciálegyenletet a szokásos alakra rendezzük:

$$xy' + y(x-1) = -x^3, \quad y' + y\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -x^2.$$

1. $y' + y\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0, \quad P(x) = x - \ln|x|, \quad y_{h,á} = Cx \cdot e^{-x}$.

2. $y_{i,p} = k(x) \cdot x \cdot e^{-x}$, $k'(x) = -x \cdot e^{x}$. Parciális integrálással:

$k(x) = e^{x}(1-x), \quad y_{i,p} = e^{x}(1-x) \cdot x \cdot e^{-x} = x(1-x) = x - x^2$.

3. $y_{i,á} = Cx \cdot e^{-x} + x(1-x)$.

9.2.4.

a) $y = -12\sqrt{x} + \frac{2}{5}x^3$.

b)1. $y_{h,á} = C_1 e^{\ln|\cos x|} = C\cos x$.

2. $k'(x) = -2\cos^2 x = -(1 + \cos 2x), \quad k(x) = -x - \frac{\sin 2x}{2}$.

3. $y_{i,á} = \cos x\left(C - x - \frac{\sin 2x}{2}\right)$.

4. $C = 1, \quad y_p = (\cos x) \cdot \left(1 - x - \frac{\sin 2x}{2}\right)$.

c) $y = (x-2)\ln|\ln x|$.

d) $y = \frac{1 - \operatorname{ch} x}{x - e} + \operatorname{sh} x$.

e) 1. $y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0, \quad y_{h,á} = C \cdot \frac{1-x}{1+x}$.

2. $y_{i,p} = k(x) \cdot \frac{1-x}{1+x}, \quad k'(x) = (1-x^2) \cdot \frac{1+x}{1-x} = (1+x)^2,$

$k(x) = \frac{(1+x)^3}{3}, \; y_{i,p} = \frac{(1+x)^2(1-x)}{3}$.

3. $y_{i,á} = C \cdot \frac{1-x}{1+x} + \frac{(1+x)^2(1-x)}{3}$.

4. $C = -\frac{1}{3}, \; y_p = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1-x}{1+x} + \frac{(1+x)^2(1-x)}{3}$.

f) 1. $y' + y = 0, \quad p(x) = 1, \quad P(x) = x, \quad y_{h,á} = Ce^{-x}$.

2. $y_{i,p} = k(x) \cdot e^{-x}, \quad k'(x) = \frac{\sin x}{e^{-x}} = e^x \cdot \sin x$.

A $k(x)$ meghatározásához $k'(x)$-et kétszer parciálisan integráljuk, majd átrendezéssel adódik a határozatlan integrál.

$\int \underset{f'(x)}{e^x} \cdot \underset{g(x)}{\sin x}\,dx = e^x \cdot \sin x - \int \underset{f'(x)}{e^x} \cdot \underset{g(x)}{\cos x} = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x -$

$- \int e^x \cdot \sin x\,dx$. Azaz $2\int e^x \cdot \sin x\,dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x + c_1$,

$\int e^x \cdot \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c$. Például a $c = 0$ választással megkapjuk $k'(x)$-nek egy primitív függvényét. (Az integrálási konstanst ebben a lépésben le kell rögzíteni, mert egy elsőrendű differenciálegyenlet partikuláris megoldása nem tartalmazhat szabadon választható konstanst.) Tehát:

$k(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x), \quad y_{i,p} = k(x) \cdot e^{-x} = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$.

3. $y_{i,á} = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$.

4. $y(0) = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} = C \cdot 1 + \frac{1}{2}(0-1), \quad C = 1$. Így a kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás: $y_p = e^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$. (Érdemes

összehasonlítani ezt a megoldást a 10.2.5.a) példa megoldásával.)

g) $y = \sqrt{1+x^2}\left(x - \operatorname{arctg} x - 2\right)$. **h)** $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\sin^2 x}$.

i) $y = 1 - (e+1)e^{-\sin x}$.

j) 1. $p(x) = \frac{-3}{x^2+x-2} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1}$, $-P(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$,

$y_{h,á} = C\frac{x-1}{x+2}$.

2. $k'(x) = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$, $k(x) = x + 3\ln|x-1|$.

3. $y_{i,á} = \frac{x-1}{x+2}\left(C + x + 3\ln|x-1|\right)$.

4. $y_p = \frac{x-1}{x+2}\left(x + 3\ln|x-1| - 6\right)$.

9.2.5.

a) A megoldás szerkezete megegyezik az előző feladatokban alkalmazott szerkezettel, csak más módszereket alkalmazunk az $y_{h,á}$ és $y_{i,p}$ megoldások számítására.

1. A homogén egyenlet: $y' + y = 0$. Az ennek megfelelő elsőfokú karakterisztikus egyenlet: $\lambda + 1 = 0$, melynek megoldása: $\lambda_0 = -1$. Ha az elsőrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének gyöke λ_0, akkor megoldása: $y = Ce^{\lambda_0 x}$. Így itt $y_{h,á} = Ce^{-x}$.

2. A próbafüggvény módszer alapján $q(x) = \sin x$ miatt az inhomogén egyenletnek $y_{i,p} = A\sin x + B\cos x$ alakban keressük a megoldását. Ekkor $y'_{i,p} = A\cos x - B\sin x$. Ezt a két kifejezést az inhomogén egyenletbe helyettesítve:

$(A\sin x + B\cos x) + (A\cos x - B\sin x) = \sin x$, rendezve:
$(A - B)\sin x + (A + B)\cos x = \sin x$. Az egyenletben szereplő két függvény együtthatóit összehasonlítva:
$\sin x:\ A - B = 1, \quad \cos x:\ A + B = 0$.

Az A, B-re kapott egyenletrendszert megoldjuk: $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$.

Visszahelyettesítve: $y_{i,p} = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$.

3. $y_{i,á} = Ce^{-x} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$.

(Érdemes összehasonlítani ezt a megoldást a 10.2.4.f) példa megoldásával.)

b) $y = Ce^{2x} - 2x - 1$.

c) 1. $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$, $y_{h,á} = Ce^{-\frac{x}{2}}$.

2. $y_{i,p} = Ae^{2x} + Be^{-x}$, $y'_{i,p} = 2Ae^{2x} - Be^{-x}$,
$5Ae^{2x} - Be^{-x} = 10e^{2x} + 10e^{-x}$, $A = 2,\ B = -10$.

3. $y_{i,á} = Ce^{-\frac{x}{2}} + 2e^{2x} - 10e^{-x}$.

d) $y = Ce^{4x} - \cos 3x + \frac{3}{4}\sin 3x - \frac{1}{2}$.

9.2.6.

a) A huroktörvény szerint $U - U_L - U_R = 0$, ahol $U_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot i'$ és $U_R = R \cdot i$. Tehát a differenciálegyenlet $U - Li' - Ri = 0$, azaz $Li' + Ri = U$. A megadott adatokkal: $0{,}8 \cdot i' + 0{,}4 \cdot i = 12$.

b) $i(t) = 30\left(1 - e^{-0{,}5t}\right)$.

9.3. Másodrendű differenciálegyenletek

9.3.1.

a) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$.

b) Az állandó együtthatójú másodrendű lineáris homogén differenciálegyenlet általános megoldását a (másodfokú) karakterisztikus egyenletének gyökeinek segítségével kaphatjuk, mely itt:
$\lambda^2 + 5\lambda = \lambda(\lambda + 5) = 0$. Ennek gyökei: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -5$.
Két különböző valós gyök esetén az általános megoldás, mely két szabadon választható független paramétert tartalmaz:
$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{-5x} = C_1 + C_2 e^{-5x}$.

c) $y = C_1 + C_2 e^{-\frac{x}{4}}$.

d) $y = C_1 e^{3x} + C_2 x \cdot e^{3x}$.

e) A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$, ennek diszkriminánsa $D = 4 - 40 = -36$ negatív. Az egyenletnek így nincsenek valós gyökei, a komplex gyökök:
$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 \pm 6j}{2} = -1 \pm 3j$, hiszen $\sqrt{-36} = 6\sqrt{-1}$, és $\sqrt{-1}$ értéke j vagy $-j$.
Ha a karakterisztikus egyenletnek $\alpha \pm \beta j$ a komplex gyökei, akkor az általános megoldás: $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.
Itt $\alpha = -1, \beta = 3$, tehát $y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.
(Megjegyzés: a $\beta = -3$ választás is helyes.)

f) $\lambda^2 + 4 = 0$, $\lambda^2 = -4$, $\lambda = 0 \pm 2j$, $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

9.3.2.

a) $y = C_1 e^{\frac{x}{3}} + C_2 e^{-\frac{x}{3}} - 4$.

b) $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x} - \frac{x}{2} - \frac{5}{24}$.

c) 1. $y'' + y = 0, \quad \lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda = \pm j, \quad y_{h,á} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

2. $y_{i,p} = Ax^2 + Bx + C$. (Ügyeljen arra, hogy a próbafüggvény nem hiányos polinom akkor sem, ha a differenciálegyenlet jobboldalán álló zavarófüggvény az volt!)

$A = 3, \quad B = 0, \quad C = -6, \quad y_{i,p} = 3x^2 - 6.$

3. $y_{i,á} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 3x^2 - 6.$

d) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + 8e^{\frac{x}{2}}.$

e) 1. $5y'' + y' = 0, \quad 5\lambda^2 + \lambda = \lambda(5\lambda + 1) = 0, \quad \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = -\frac{1}{5}.$

Így $y_{h,á} = C_1 + C_2 e^{-\frac{x}{5}}.$

2. Ha az egyenlet jobboldalán álló zavarófüggvény több függvény összege, akkor a próbafüggvényt tagonként állítjuk elő, természetesen különböző paraméterekkel.

Így itt: $y_{i,p} = Ae^x + B\cos x + C\sin x$. A deriváltak:

$y'_{i,p} = Ae^x - B\sin x + C\cos x, \quad y''_{i,p} = Ae^x - B\cos x - C\sin x.$

$5y'' + y = 5(Ae^x - B\cos x - C\sin x) + (Ae^x - B\sin x + C\cos x) =$

$= 6Ae^x + (C - 5B)\cos x + (-B - 5C)\sin x = 18e^x - 5\cos x.$

A szereplő függvények együtthatóinak összehasonlításával:

$e^x : 6A = 18, \ A = 3, \quad \cos x : C - 5B = -5, \quad \sin x : -B - 5C = 0.$

A két utóbbi egyenletből: $B = \frac{25}{26}, \ C = -\frac{5}{26}.$

Így $y_{i,p} = 3e^x + \frac{25}{26}\cos x - \frac{5}{26}\sin x.$

3. $y_{i,á} = y_{h,á} + y_{i,p} = C_1 + C_2 e^{-\frac{x}{5}} + 3e^x + \frac{25}{26}\cos x - \frac{5}{26}\sin x.$

f) $y = C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \sin\frac{x}{2} + 17e^{-x} - 5e^{2x}.$

g) $y = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{3}{2}x + C_2 \sin\frac{3}{2}x\right) - 20x^2 - 16x + \frac{24}{5}$.

h) $y = C_1 e^{-9x} + C_2 e^{-x} + \frac{28}{13}\sin\frac{x}{2} - \frac{16}{13}\cos\frac{x}{2}$.

i) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 2\cos x - 2x$.

j) 1. $\lambda_{1,2} = -1, \quad y_{h,á} = C_1 e^{-x} + C_2 x \cdot e^{-x}$.

2. $y_{i,p} = A\cos 2x + B\sin 2x, \quad A = 2, \; B = -1$.

3. $y_{i,á} = C_1 e^{-x} + C_2 x \cdot e^{-x} + 2\cos 2x - \sin 2x$.

k)1. $\lambda_{1,2} = \pm 2j, \quad y_{h,á} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

2. Mivel $-\text{sh}3x = -\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2} = -\frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{-3x}$, ezért

$y_{i,p} = Ae^{3x} + Be^{-3x}, \quad A = -\frac{1}{26}, \; B = \frac{1}{26}$.

3. $y_{i,á} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{26}e^{3x} + \frac{1}{26}e^{-3x}$.

l) 1. $\lambda_1 = 5, \; \lambda_2 = -2, \quad y_{h,á} = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x}$.

2. Mivel $2e^x \cdot \text{sh}x = 2e^x \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{2x} - 1$, ezért

$y_{i,p} = Ae^{2x} + B, \quad A = -\frac{1}{12}, \; B = \frac{1}{10}$.

3. $y_{i,á} = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{12}e^{2x} + \frac{1}{10}$.

m)1. $y'' + y = 0, \quad \lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda^2 = -1, \quad \lambda_{1,2} = \pm j$.

$y_{h,á} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

2. $y_{i,p} = (Ax + B)e^{-x}$ a zavarófüggvény alakjából.

$y'_{i,p} = Ae^{-x} - (Ax+B)e^{-x}$, $y''_{i,p} = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + (Ax+B)e^{-x}$.

Különválasztva az e^{-x} és $x \cdot e^{-x}$ függvényeket:

$y_{i,p} = Ax \cdot e^{-x} + Be^{-x}$, $y''_{i,p} = Ax \cdot e^{-x} + (B-2A)e^{-x}$.

Ebből $y'' + y = 2Ax \cdot e^{-x} + (2B-2A)e^{-x} = x \cdot e^{-x} + e^{-x}$.

$x \cdot e^{-x} : 2A = 1, \quad A = \frac{1}{2}, \qquad e^{-x} : 2B - 2A = 1, \quad B = 1.$

Így $y_{i,p} = \left(\frac{x}{2} + 1\right)e^{-x}$.

3. $y_{i,á} = y_{h,á} + y_{i,p} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \left(\frac{x}{2} + 1\right)e^{-x}$.

n) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + (6x^2 + 18x + 21)e^{x}$.

o) $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x} - \frac{8}{10}e^{x} \cdot \sin x - \frac{1}{10}e^{x} \cdot \cos x$.

p) $y = C_1 + C_2 e^{2x} + \left(3x + \frac{42}{5}\right)\cos x + \left(6x - \frac{6}{5}\right)\sin x$.

9.3.3.

a) $y = -\cos\frac{3}{2}x - \sin\frac{3}{2}x$. **b)** $y = Ce^{-2x} + 1 - C$.

c) 1. $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2, \quad y_á = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$.

2. $y_á(0) = C_1 + C_2 = 1$.

$y'_á = C_1 e^{x} + 2C_2 e^{2x}, \quad y'_á(0) = C_1 + 2C_2 = 0$.

A két egyenletből: $C_1 = 2, \ C_2 = -1, \quad y_p = 2e^{x} - e^{2x}$.

d) 1. $-y'' + 4y' - 5y = 0, \quad -\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0,$

$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{-2} = \frac{-4 \pm 2j}{-2} = 2 \pm (-1)j = 2 \pm j$.

$y_{h,á} = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

2. $y_{i,p} = Ax^2 + Bx + C + De^{2x}$,

$y'_{i,p} = 2Ax + B + 2De^{2x}$, $\quad y''_{i,p} = 2A + 4De^{2x}$.

A behelyettesítést a jobboldalon szereplő függvények együtthatóinak alábbi táblázatos elrendezésével megkönnyíthetjük:

	x^2	x	1	e^{2x}
$-y''$			$-2A$	$-4D$
$4y'$		$8A$	$4B$	$8D$
$-5y$	$-5A$	$-5B$	$-5C$	$-5D$

A három sort összeadva: $-y'' + 4y' - 5y = (-5A)x^2 +$

$+ (8A - 5B)x + (-2A + 4B - 5C) + (-D)e^{2x} = 25x^2 + e^{2x}$.

$x^2 : A = -5$, $\quad x : B = -8$, $\quad 1 : C = -\dfrac{22}{5}$, $\quad e^{2x} : D = -1$.

Így $y_{i,p} = -5x^2 - 8x - \dfrac{22}{5} - e^{2x}$.

3. $y_{i,á} = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - 5x^2 - 8x - \dfrac{22}{5} - e^{2x}$.

4. $y(0) = C_1 - \dfrac{22}{5} - 1 = 0$, $\quad C_1 = \dfrac{27}{5}$.

$y_p = e^{2x}\left(\dfrac{27}{5}\cos x + C \sin x\right) - 5x^2 - 8x - \dfrac{22}{5} - e^{2x}$.

(Megjegyzés: Ha nincs két konstans, akkor felesleges a paraméter indexelése. Legyen $C_2 = C$.)

e) $y = -\dfrac{1}{2}e^{-x} - \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x$.

9.3.4.

a) A gyökökből: $y_{h,á} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. A próbafüggvényt a $q(x)$ alakjából következtetjük ki : $y_{i,p} = Ae^{2x} + Bx + C$. Azonban össze-

hasonlítva a tagokat a homogén általános megoldás tagjaival, látjuk, hogy az Ae^{2x} tag rezonál (szerkezetében megegyezik a C_1e^{2x} taggal). Ekkor ennek a rezonáló tagnak az x-szeresével kell próbálkozni: $y_{i,p} = Ax \cdot e^{2x} + Bx + C$. Ez már rezonanciamentes.

b) $y = Ax \cdot e^{4x} + Bx$.

c) $y = A\cos x + B\sin x + Cx^2 + Dx$.
(Megjegyzés: Polinomnak minden tagját szorozzuk x-szel, noha csak a konstans tagja rezonálhat.)

d) $y_{h,á} = C_1e^x + C_2x \cdot e^x$.
A q(x) alakjából: $y_{i,p} = Ae^{-x}$, amely rezonál, hiszen szerkezetében megegyezik a homogén általános megoldás egyik tagjával. A következő próbálkozásunk, $y_{i,p} = Ax \cdot e^{-x}$ pedig a másik taggal rezonál. Ilyenkor az eredeti próbafüggvényt x^2-tel kell szorozni. $y_{i,p} = Ax^2 \cdot e^{-x}$. Ez már rezonanciamentes.

e) $y = Ax^2 \cdot e^{4x} + Be^{-4x}$. **f)** $y = Ax \cdot \cos x + Bx \cdot \sin x$.

g) $y_{h,á} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$.
$\left(y_{i,p} = A\cos 3x + B\sin 3x\right)$, $y_{i,p} = Ax \cdot \cos 3x + Bx \cdot \sin 3x$.

h) $y = Ax \cdot e^x \cdot \sin x + Bx \cdot e^x \cdot \cos x$.

9.3.5.

a)1. $y'' - 5y' + 6y = 0$, $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.
$y_{h,á} = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

2. $\left(y_{i,p} = Ae^{2x} + Be^{3x} + C\right)$. A rezonancia miatt:
$y_{i,p} = Ax \cdot e^{2x} + Bx \cdot e^{3x} + C$.
$y'_{i,p} = Ae^{2x} + 2Ax \cdot e^{2x} + Be^{3x} + 3Bx \cdot e^{3x}$.

$y''_{i,p} = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Ax \cdot e^{2x} + 3Be^{3x} + 3Be^{3x} + 9Bx \cdot e^{3x}$.

A behelyettesítést táblázattal végezzük:

	$x \cdot e^{2x}$	e^{2x}	$x \cdot e^{3x}$	e^{3x}	1
y''	4A	4A	9B	6B	
$-5y'$	$-10A$	$-5A$	$-15B$	$-5B$	
6y	6A		6B		6C

$y'' - 5y' - 6y = -Ae^{2x} + Be^{3x} + 6C = 3e^{2x} - 5e^{3x} + 6$.

$e^{2x} : -A = 3, \quad A = -3, \quad e^{3x} : B = -5, \quad 1 : 6C = 6, \quad C = 1$.

$y_{i,p} = -3x \cdot e^{2x} - 5x \cdot e^{3x} + 1$.

3. $y_{i,á} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - 3x \cdot e^{2x} - 5x \cdot e^{3x} + 1$.

b) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{3}{2} x \cdot e^{-x} + 2x - \frac{4}{3}$.

c) $y = C_1 + C_2 e^{-\frac{3}{2}x} - 2\sin\frac{x}{2} - 6\cos\frac{x}{2} + 2x$.

d)1. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{3}, \quad y_{h,á} = C_1 + C_2 e^{\frac{1}{3}x}$.

2. $\left(y_{i,p} = Ax + B\right), \quad y_{i,p} = Ax^2 + Bx, \quad A = -1, \; B = 1$.

3. $y_{i,á} = C_1 + C_2 e^{\frac{x}{3}} - x^2 + x$.

e) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{1}{6} x \left(\sin 3x + \cos 3x\right)$.

f) $y = C_1 + C_2 e^{2x} - 2\cos x - 4\sin x + x^2 + x$.

g)1. $-y'' - 6y' + 7y = 0, \quad -\lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = -7$.

$y_{h,á} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-7x}$.

2. Mivel $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x}$, ezért a próbafüggvény:

$\left(y_{i,p} = Ae^{x} + Be^{-x} + C\right)$, $y_{i,p} = Ax \cdot e^{x} + Be^{-x} + C$.

$y'_{i,p} = Ae^{x} + Ax \cdot e^{x} - Be^{-x}$, $y''_{i,p} = 2Ae^{x} + Ax \cdot e^{x} + Be^{-x}$.

Behelyettesítve:

$-y'' - 6y' + 7y = -\left(2Ae^{x} + Ax \cdot e^{x} + Be^{-x}\right) -$

$-6\left(Ae^{x} + Ax \cdot e^{x} - Be^{-x}\right) + 7\left(Ax \cdot e^{x} + Be^{-x} + C\right) = -8Ae^{x} +$

$+12Be^{-x} + 7C = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x} + 1.$ $A = -\frac{1}{16}$, $B = -\frac{1}{24}$, $C = \frac{1}{7}$.

$y_{i,p} = -\frac{1}{16}x \cdot e^{x} - \frac{1}{24}e^{-x} + \frac{1}{7}$.

3. $y_{i,á} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-7x} - \frac{1}{16}x \cdot e^{x} - \frac{1}{24}e^{-x} + \frac{1}{7}$.

h) $y_{i,á} = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + 2x \cdot e^{\frac{x}{2}} - x^2$.

i) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + x^3 + x + 2x \cdot e^{-x}$.

j) $y = C_1 e^{2x} + C_2 x \cdot e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} + x + 1$.

k)1. $y'' + 8y' + 16y = 0$, $\lambda_{1,2} = 4$, $y_{h,á} = C_1 e^{4x} + C_2 x \cdot e^{4x}$.

2. $q(x) = 4\operatorname{ch} 4x = 2e^{4x} + 2e^{-4x}$ miatt:

$y_{i,p} = Ax^2 \cdot e^{4x} + Be^{-4x}$, $A = 1$, $B = \frac{1}{32}$.

3. $y_{i,á} = C_1 e^{4x} + C_2 x \cdot e^{4x} + x^2 \cdot e^{4x} + \frac{1}{32}e^{-4x}$.

l) $y = C_1 e^{-x} + C_2 x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} - 4\cos 2x - 3\sin 2x$

m)1. $y''-3y'=0,\quad \lambda_1=0,\ \lambda_2=3,\quad y_{h,á}=C_1+C_2e^{3x}.$

2. $y_{i,p}=Ae^{x}+\left(Bx^2+Cx\right)e^{3x},\quad A=-1,\ B=1,\ C=1.$

3. $y_{i,á}=C_1+C_2e^{3x}-e^{x}+\left(x^2+x\right)e^{3x}.$

9.3.6.

a) $y=1-e^{-2x}+2x^3-3x^2+2x.$

b)1. $y''-6y'=0,\quad \lambda^2-6\lambda=0,\quad \lambda_1=0,\ \lambda_2=6,\quad y_{h,á}=C_1+C_2e^{6x}.$

2. $\left(y_{i,p}=A+B\sin x+C\cos x\right),\quad y_{i,p}=Ax+B\sin x+C\cos x.$

$y'_{i,p}=A+B\cos x-C\sin x,\qquad y''_{i,p}=-B\sin x-C\cos x.$

$y''-6y'=\left(-B\sin x-C\cos x\right)-6\left(A+B\cos x-C\sin x\right)=$

$=-6A+\left(6C-B\right)\sin x+\left(-6B-C\right)\cos x=12+37\sin x.$

$1:-6A=12,\ A=-2,\quad \sin x:6C-B=37,\ \cos x:-6B-C=0,$

$B=-1,\ C=6.$ Behelyettesítve: $y_{i,p}=-2x-\sin x+6\cos x.$

3. $y_{i,á}=C_1+C_2e^{6x}-2x-\sin x+6\cos x.$

4. A kezdeti feltételeket helyettesítjük: $y(0)=C_1+C_2+6=2.$

$y'_{i,á}=6C_2e^{6x}-2-\cos x-6\sin x,\quad y'(0)=6C_2-2-1=0.$

A két konstansra kapott egyenletrendszert megoldjuk:

$6C_2=2,\quad C_1+C_2=-4,\qquad C_2=\frac{1}{2},\quad C_1=-\frac{9}{2}.$

Végül: $y_p=-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}e^{6x}-2x-\sin x+6\cos x.$

c) $y=C-Ce^{3x}+x\cdot e^{3x}-3x.$

d)1. $y''-5y'+6y=0,\quad \lambda^2-5\lambda+6=0,\quad \lambda_1=2,\ \lambda_2=3,$

$y_{h,á}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}.$

2. $\left(y_{i,p}=Ae^{2x}+B\sin x+C\cos x\right).$ A rezonancia miatt:

$y_{i,p}=Ax\cdot e^{2x}+B\sin x+C\cos x.$ Ez már rezonanciamentes.

$y'_{i,p}=Ae^{2x}+2Ax\cdot e^{2x}+B\cos x-C\sin x.$

$y'_{i,p} = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Ax \cdot e^{2x} - B\sin x - C\cos x.$

	$x \cdot e^{2x}$	e^{2x}	$\sin x$	$\cos x$
y''	4A	4A	$-B$	$-C$
$-5y'$	$-10A$	$-5A$	5C	$-5B$
6y	6A		6B	6C

$y'' - 5y' + 6y = -Ae^{2x} + (5C + 5B)\sin x + (-5B + 5C)\cos x =$

$= -3e^{2x} + 10\sin x.$ $\quad e^{2x} : -A = -3, \quad A = 3,$

$\sin x : 5C + 5B = 10, \quad \cos x : -5B + 5C = 0, \quad B = C = 1.$

Behelyettesítve: $y_{i,p} = 3x \cdot e^{2x} + \sin x + \cos x.$

3. $y_{i,á} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + 3x \cdot e^{2x} + \sin x + \cos x.$

4. $y(0) = C_1 + C_2 + 1 = 0, \quad C_1 = C, \; C_2 = -(1 + C).$

Így $y_p = Ce^{2x} - (1 + C)e^{3x} + 3x \cdot e^{2x} + \sin x + \cos x.$

e) $y = -3\cos x + C\sin x + x \cdot \sin x.$

f) $y = -\cos 2x + \frac{7\pi}{8}\sin 2x + \frac{1}{2}x \cdot \sin 2x - \frac{1}{4}x \cdot \cos 2x.$

g)1. $y_{h,á} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}.$

2. $(y_{i,p} = Ae^{x} + Be^{-x} + Cx + D), \quad y_{i,p} = Ax \cdot e^{x} + Be^{-x} + Cx + D.$

$-Ae^{x} + 6Be^{-x} + 2Cx + (2D - 3C) = 12e^{x} + 12e^{-x} + 12x.$

$y_{i,p} = -12x \cdot e^{x} + 2e^{-x} + 6x + 9.$

3. $y_{i,á} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} - 12x \cdot e^{x} + 2e^{-x} + 6x + 9.$

4. $C_1 + C_2 = -11, \quad 2C_1 + C_2 = 8.$

$y_p = 19e^{2x} - 30e^{x} - 12x \cdot e^{x} + 2e^{-x} + 6x + 9.$

h)1. $\lambda_{1,2} = \pm 1, \quad y_{h,á} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}.$

2. $(y_{i,p} = (Ax + B)e^{x}), \quad y_{i,p} = (Ax^2 + Bx)e^{x} = Ax^2 \cdot e^{x} + Bx \cdot e^{x}.$

$A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, $y_{i,p} = \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x$.

3. $y_{i,á} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x$.

4. $C_1 = C_2 = 0$, $y_p = \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x$.

9.3.7.

a) A huroktörvényből $U - U_R - U_L - U_C = 0$, ahol $U_R = R \cdot i$, $U_L = L \cdot \frac{di}{dt}$, $U_C = \frac{1}{C} \cdot Q$ és $U = U_0 \cdot \sin \omega t$. Így a differenciálegyenlet: $U_0 \cdot \sin \omega t = L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \cdot Q$, ahol $\frac{dQ}{dt} = i$. Ez utóbbi összefüggést figyelembe véve deriváljuk t-szerint az egyenletet, hogy csak az i(t) függvény legyen ismeretlen. Így i(t)-re egy állandó együtthatójú másodrendű lineáris differenciálegyenletet kapunk.

$U_0 \omega \cdot \cos \omega t = L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i$, azaz a megadott adatokkal:

$10676 \cos 314t = 0{,}5 \cdot i'' + 40 \cdot i' + 40000 \cdot i$.

b) Kissé hosszadalmas számolás után, az együtthatókat kerekítve: $i = e^{-40t}(C_1 \cos 280t + C_2 \sin 280t) - 0{,}41 \cos 314t + 0{,}55 \sin 314t$.

10. LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ

10.1. Laplace- és inverz Laplace-transzformált

10.1.1.

a) $\bar{f}(s)=\frac{2}{s-9}+\frac{3\cdot 7!}{s^8}-\frac{2}{s}$. **b)** $\bar{f}(s)=\frac{9}{s+12}+\frac{21}{s^2+49}-\frac{1}{2s^2}$.

c) $\bar{f}(s)=\frac{3}{s}-\frac{2s}{s^2+64}+\frac{6}{2s+1}$. **d)** $\bar{f}(s)=\frac{2}{s^2-36}-\frac{5s}{s^2-9}$.

e) $\bar{f}(s)=\frac{R}{L}\cdot\frac{1}{s+\omega}+\frac{1}{C}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

f) $\bar{f}(s)=\frac{2e}{s}+\frac{s+1}{(s+1)^2-25}=\frac{2e}{s}+\frac{s+1}{s^2+2s-24}$.

vagy felhasználjuk, hogy ch5t kifejezhető exponenciális függvénnyel:

$f(t)=2e+e^{-t}\cdot\frac{e^{5t}+e^{-5t}}{2}=2e+\frac{1}{2}e^{4t}+\frac{1}{2}e^{-6t}$ és ekkor

$\bar{f}(s)=\frac{2e}{s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+6}=\frac{2e}{s}+\frac{1}{2s-8}+\frac{1}{2s+12}$.

Ez az eredmény látszólag különbözik a korábbiakban kapottól, de közös nevezőre hozás után a két eredmény formailag is megegyezik.

g) $\bar{f}(s)=\frac{24}{(s-3)^5}$. **h)** $\bar{f}(s)=\frac{6}{9(s-3)^2-4}+\frac{6s+2}{3(s+\frac{1}{3})^2-75}$.

i) $\bar{f}(s)=\frac{s-5}{(s-5)^2+4}+\frac{36}{(s+1)^2+81}\left(=\frac{s-5}{s^2-10s+29}+\frac{36}{s^2+2s+82}\right)$.

j) f(t)-t a linearizáló képlettel átalakítjuk először, hogy olyan függvényeket kapjunk, amelyek képletét megtaláljuk a táblázatban:

$$f(t)=\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t\ ,$$

$$\bar{f}(s)=\frac{1}{2s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4}=\frac{s^2+4-s^2}{2s\left(s^2+4\right)}=\frac{2}{s\left(s^2+4\right)}\ .$$

k) A hatványfüggvénnyel szorzott függvény Laplace-transzformációs képletét fogjuk alkalmazni n = 1 esetén.

$L[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}$, kiszámítjuk az első deriváltját:

$$\left(\left(s^2+1\right)^{-1}\right)'=-\frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}\ ,$$

$$\bar{f}(s)=(-1)^1\cdot\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'=-\left(-\frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}\right),\qquad \bar{f}(s)=\frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}\ .$$

l) $$f(t)=\sin t\cdot\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t,\qquad \bar{f}(s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4}=\frac{1}{s^2+4}\ .$$

m) f(t)-ben az sht függvényt kifejezzük exponenciális függvényekkel, $\sin^2 t+\cos^2 t$ helyébe pedig az ismert összefüggés alapján 1-t írunk.

A műveletek elvégzése után:

$$f(t)=4e^t\cdot\cos 3t-4e^{-t}\cdot\cos 3t+1\ ,$$

$$\bar{f}(s)=\frac{4s-4}{(s-1)^2+9}-\frac{4s+4}{(s+1)^2+9}+\frac{1}{s}$$

$$\left(=\frac{4s-4}{s^2-2s+10}-\frac{4s+4}{s^2+2s+10}+\frac{1}{s}\right).$$

n) $$\bar{f}(s)=\frac{2}{s^3}+\frac{4}{4s-3}+\frac{20}{25s^2-4}\ .$$

10.1.2.

a) $\bar{f}(s)=e^{-5s}\cdot\frac{6}{s^4}$. **b)** $\bar{f}(s)=e^{-3s}\cdot\frac{1}{s^2+1}$.

c) f(t)-t először átalakítjuk, hogy kiolvashassuk, hogy melyik függvényre kell az eltolási tételt alkalmazni:

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad t<2\\ \cos 3(t-2), & \text{ha} \quad t\geq 2.\end{cases}$$

Látható, hogy a cos3t függvény van 2 egységgel pozitív irányba eltolva, így

$$\bar{f}(s)=e^{-2s}\cdot\frac{s}{s^2+9}\ .$$

10.1.3.

a) $f(t)=2e^{8t}+\sin 2t-5$. **b)** $f(t)=\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}e^{-7t}-8\operatorname{ch}2t$.

c) $\bar{f}(s)$-t két tört összegére bontjuk:

$$\bar{f}(s)=2\cdot\frac{s}{s^2+5}+\frac{3}{s^2+5}\ .$$

Az első tagról már látjuk, hogy $\frac{s}{s^2+a^2}$ alakú. A második tag pedig az $\frac{a}{s^2+a^2}$ képlethez hasonló alakú, a nevezőből a-ra $\sqrt{5}$-t kapunk. A tört számlálójából a 3-at kiemeljük és ezután a törtet $\frac{1}{\sqrt{5}}$-tel és $\sqrt{5}$-tel is szorozzuk, ekkor már a visszatranszformáláshoz megfelelő alakú lesz.

$$\bar{f}(s)=2\cdot\frac{s}{s^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}+\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{s^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}\ ,$$

$$f(t)=2\cos\sqrt{5}t+\frac{3}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t\ .$$

d) $\bar{f}(s)=\frac{1}{8}\cdot\frac{15}{s^2-\frac{50}{8}}+\frac{1}{63}\cdot\frac{12}{s^2+\frac{28}{63}}$.

A nevezőbeli törteket egyszerűsítjük, majd az a^2-nek megfelelő tagból kiolvassuk a-t és ezeket előállítjuk a számlálókban a megfelelő számokkal való szorzással és osztással.

$$\bar{f}(s)=\frac{3}{4}\cdot\frac{\frac{5}{2}}{s^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\frac{2}{7}\cdot\frac{\frac{2}{3}}{s^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2},$$

$$f(t)=\frac{3}{4}\operatorname{sh}\frac{5}{2}t+\frac{2}{7}\sin\frac{2}{3}t\ .$$

e) Ha a nevezőben $s^2+bs+c\ \ (b\neq 0)$ kifejezés áll, akkor a nevezőt teljes négyzetté egészítjük ki, majd az exponenciális függvénnyel szorzott függvény képlete alkalmazható.

$$\bar{f}(s)=\frac{6}{\left(s-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}=4\cdot\frac{\frac{3}{2}}{\left(s-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2},$$

$$f(t)=4e^{\frac{5}{2}t}\cdot\operatorname{sh}\frac{3}{2}t\left(=4e^{\frac{5}{2}t}\cdot\frac{e^{\frac{3}{2}t}-e^{-\frac{3}{2}t}}{2}=2e^{4t}-2e^{t}\right).$$

f) $f(t)=\frac{1}{2}t^3+e^{-t}\cdot\operatorname{ch}2t\left(=\frac{1}{2}\left(t^3+e^{t}+e^{-3t}\right)\right)$.

g) $f(t)=5t\cdot e^{-2t}$.

h) $f(t)=e^{-3t}\cdot\sin t+\frac{1}{2}t^2\cdot e^{3t}$.

i) A nevezőt teljes négyzetté egészítjük ki: $\bar{f}(s)=\frac{s-10}{(s-9)^2+1}$.

Az exponenciális függvénnyel szorzott függvény képletét akkor alkalmazhatjuk, ha a számlálóban is az s helyén s – 9 áll, ezért két tört összegére bontjuk:

$$\bar{f}(s)=\frac{s-9}{(s-9)^2+1}-\frac{1}{(s-9)^2+1}, \qquad f(t)=e^{9t}\cdot\cos t-e^{9t}\cdot\sin t.$$

j) Ha a Laplace-transzformált olyan valódi racionális törtfüggvény, amely nevezője legalább harmadfokú polinom, akkor a törtet részstörtek összegére bontjuk.

$$\bar{f}(s)=\frac{15s-15}{s(s+3)(s+5)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{s+5},$$

$A=-1,\quad B=10,\quad C=-9.$

$$\bar{f}(s)=-\frac{1}{s}+\frac{10}{s+3}-\frac{9}{s+5}, \qquad f(t)=-1+10e^{-3t}-9e^{-5t}.$$

k) $f(t)=-2t+\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\sqrt{2}t$.

l) $\bar{f}(s)$-t részstörtek összegére bontjuk:

$$\bar{f}(s)=\frac{s^2+18}{s^3(s^2+9)}=\frac{A}{s^3}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s}+\frac{Ds+E}{s^2+9}.$$

Mindkét oldalt megszorozzuk $s^3(s^2+9)$-cel:

$$s^2+18=A(s^2+9)+Bs(s^2+9)+Cs^2(s^2+9)+s^3(Ds+E).$$

Válasszuk s-nek a nevező valós gyökét:

$s=0$: $18=9A$, ahonnan $A=2$.

Hasonlítsuk össze az s hatványok együtthatóit:

s^4: $0=C+D$,

s^3: $0=B+E$,

s^2: $1=A+9C$, ahonnan $C=-\frac{1}{9}$,

az első egyenlet alapján $D=\frac{1}{9}$.

s: $0=9B$, ahonnan $B=0$, a második egyenlet alapján $E=0$.

$$\bar{f}(s)=\frac{2}{s^3}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{9}\cdot\frac{s}{s^2+9}, \qquad f(t)=t^2-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cos 3t.$$

m) $f(t)=-\frac{1}{2}t^2-\frac{2}{9}+\frac{1}{9}e^{-3t}+\frac{1}{9}e^{3t}\left(=-\frac{1}{2}t^2-\frac{2}{9}+\frac{2}{9}ch3t\right)$.

n) $\bar{f}(s)$-t résztörtekre bontjuk:

$$\bar{f}(s)=\frac{15}{s(s^2-2s+5)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2-2s+5},$$

$A=3,\quad B=-3,\quad C=6$.

$$\bar{f}(s)=\frac{3}{s}-3\frac{s-1}{(s-1)^2+4}+\frac{3}{2}\frac{2}{(s-1)^2+4},$$

$$f(t)=3-3e^t\cdot\cos 2t+\frac{3}{2}e^t\cdot\sin 2t\ .$$

10.2. Lineáris differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval

10.2.1. A feladatok megoldásánál a továbbiakban az alábbi lépésekre az előttük álló számokkal fogunk hivatkozni.

(1) A differenciálegyenlet mindkét oldalának képezzük a Laplace-transzformáltját, és behelyettesítjük a kezdeti feltétel(ek)ben adott érték(ek)et.

(2) Kifejezzük az ismeretlen függvény Laplace-transzformáltját.

(3) Elvégezzük a visszatranszformáláshoz szükséges átalakításokat.

(4) Inverz Laplace-transzformációval meghatározzuk a keresett partikuláris megoldást.

a) (1) $s\bar{y}-4+3\bar{y}=-\frac{8}{s-5}$.

(2) $\bar{y}(s+3)=-\frac{8}{s-5}+4$, ahonnan $\bar{y}=\frac{4s-28}{(s+3)(s-5)}$.

(3) $\frac{4s-28}{(s+3)(s-5)}=\frac{A}{s+3}+\frac{B}{s-5}$

Mindkét oldalt megszorozzuk $(s+3)(s-5)$-tel:

$4s-28=A(s-5)+B(s+3)$.

$s = -3$: $\quad -40 = -8A$, ahonnan $A = 5$.
$s = 5$: $\quad -8 = 8B$, ahonnan $B = -1$.

Így $\bar{y} = \dfrac{5}{s+3} - \dfrac{1}{s-5} = 5 \cdot \dfrac{1}{s+3} - \dfrac{1}{s-5}$.

(4) $y = 5e^{-3x} - e^{5x}$.

b) $y = e^{3x} + 5e^{-3x} - e^{-2x}$.

c) $y = -5x - 1 + 2e^{5x}$.

d)(1) $s\bar{y} + 2\bar{y} = \dfrac{40}{s^2+16}$.

(2) $\bar{y} = \dfrac{40}{(s+2)(s^2+16)}$.

(3) $\dfrac{40}{(s+2)(s^2+16)} = \dfrac{A}{s+2} + \dfrac{Bs+C}{s^2+16}$

$A = 2, \quad B = -2, \quad C = 4.$

Így $\bar{y} = 2 \cdot \dfrac{1}{s+2} - 2 \cdot \dfrac{s}{s^2+16} + \dfrac{4}{s^2+16}$.

(4) $y = 2e^{-2x} - 2\cos 4x + \sin 4x$.

e) $y = -\dfrac{3}{5}e^{-3x} + \dfrac{3}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\sin x$.

f) $y = 2x + 1 - 2e^{-x} - 6e^{x} + 7e^{2x}$.

g)(1) $s\bar{y} - \bar{y} = \dfrac{4}{(s+1)^2}$.

(2) $\bar{y} = \dfrac{4}{(s-1)(s+1)^2}$.

(3) $\dfrac{4}{(s-1)(s+1)^2} = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{(s+1)^2} + \dfrac{C}{s+1}$

$A = 1, \quad B = -2, \quad C = -1.$

Így $\bar{y} = \frac{1}{s-1} - 2 \cdot \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}$.

(4) $y = e^x - 2x \cdot e^{-x} - e^{-x}$.

h)(1) $s\bar{y} + 2\bar{y} = 17 \cdot \frac{s-2}{(s-2)^2+1}$.

(2) $\bar{y} = \frac{17s-34}{(s+2)(s^2-4s+5)}$.

(3) $\frac{17s-34}{(s+2)(s^2-4s+5)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2-4s+5}$

$A = -4, \quad B = 4, \quad C = -7.$

Így $\bar{y} = -\frac{4}{s+2} + \frac{4s-7}{s^2-4s+5} =$

$= -4 \cdot \frac{1}{s+2} + 4 \cdot \frac{s-2}{(s-2)^2+1} + \frac{1}{(s-2)^2+1}$.

(4) $y = -4e^{-2x} + 4e^{2x} \cdot \cos x + e^{2x} \cdot \sin x$.

i) $y = \frac{2}{3} + x \cdot e^{3x} - \frac{8}{3}e^{3x}$.

10.2.2. A feladatok megoldásánál a 10.2.1.-ben bevezetett jelöléseket használjuk.

a)(1) $s^2 \cdot \bar{y} - 1 + 9\bar{y} = \frac{9}{s}$.

(2) $\bar{y}(s^2+9) = \frac{9}{s} + 1$, tehát $\bar{y} = \frac{s+9}{s(s^2+9)}$.

(3) $\frac{s+9}{s(s^2+9)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+9}$.

Mindkét oldalt megszorozzuk $s(s^2+9)$-cel:

$s + 9 = A(s^2+9) + (Bs+C)s$.

$s = 0$: $9 = 9A$, ahonnan $A = 1$.

s^2: $0 = A + B$, ahonnan $B = -1$.

s: $1 = C.$

Így $\bar{y} = \frac{1}{s} + \frac{-s+1}{s^2+9} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{s^2+9}$.

(4) $y = 1 - \cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x$.

b) $y = e^{3x} + \sin 2x$.

c) $y = x + 1 - 3e^{-x} + 2e^{-2x}$.

d) $y = e^{2x} - 2e^{-x} + e^{-2x}$.

e) $y = 2e^{x} - 2x - 2$.

f) (1) $s^2\bar{y} - 6s\bar{y} + 9\bar{y} = \frac{25}{s+2}$.

(2) $\bar{y} = \frac{25}{(s+2)(s-3)^2}$.

(3) $\frac{25}{(s+2)(s-3)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s-3)^2} + \frac{C}{s-3}$

$A = 1, \quad B = 5, \quad C = -1.$

Így $\bar{y} = \frac{1}{s+2} + \frac{5}{(s-3)^2} - \frac{1}{s-3}$.

(4) $y = e^{-2t} + 5t \cdot e^{3t} - e^{3t}$.

g) $y = 17 - e^{-4x} - 16\cos x - 4\sin x$.

h) $y = t - \frac{5}{4} + \frac{8}{3}e^{-t} - \frac{5}{12}e^{-4t}$.

i) (1) $s^2\bar{y} - 2s - 3 + 3(s\bar{y} - 2) - 4\bar{y} = \frac{3}{s^2-9}$.

(2) $\bar{y} = \dfrac{2s^3 + 9s^2 - 18s - 78}{(s-3)(s+3)(s+4)(s-1)}$.

(3) $\dfrac{2s^3 + 9s^2 - 18s - 78}{(s-3)(s+3)(s+4)(s-1)} = \dfrac{A}{s-3} + \dfrac{B}{s+3} + \dfrac{C}{s+4} + \dfrac{D}{s-1}$

$A = \dfrac{1}{28}, \quad B = \dfrac{1}{8}, \quad C = -\dfrac{2}{7}, \quad D = \dfrac{17}{8}$.

Így $\bar{y} = \dfrac{1}{28} \cdot \dfrac{1}{s-3} + \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{1}{s+3} - \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{1}{s+4} + \dfrac{17}{8} \cdot \dfrac{1}{s-1}$.

(4) $y = \dfrac{1}{28} e^{3x} + \dfrac{1}{8} e^{-3x} - \dfrac{2}{7} e^{-4x} + \dfrac{17}{8} e^{x}$.

j) $y = \dfrac{1}{3} t^3 + 2 + 2e^{-t}$.

k) $y = e^{2x} - \cos\sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}\,x$.

l) $y = -6 + e^{-4x} + 2e^{-x} + 3e^{2x}$.

m) $y = 2e^{x} - \dfrac{5}{4} e^{-2x} - \dfrac{3}{4}\cos 2x - \dfrac{9}{4}\sin 2x$.

n)(1) $s^2\bar{y} + 4s\bar{y} + 4\bar{y} = \dfrac{25}{s-3}$.

(2) $\bar{y} = \dfrac{25}{(s-3)(s+2)^2}$.

(3) $\dfrac{25}{(s-3)(s+2)^2} = \dfrac{A}{s-3} + \dfrac{B}{(s+2)^2} + \dfrac{C}{s+2}$

$A = 1, \quad B = -5, \quad C = -1.$

Így $\bar{y} = \dfrac{1}{s-3} - \dfrac{5}{(s+2)^2} - \dfrac{1}{s+2}$.

(4) $y = e^{3x} - 5x \cdot e^{-2x} - e^{-2x}$.

o) **(1)** $s^2\bar{y} - 6s\bar{y} + 9\bar{y} = \dfrac{6}{(s-3)^3}$.

(2) $\bar{y}(s^2 - 6s + 9) = \dfrac{6}{(s-3)^3}$, tehát $\bar{y} = \dfrac{6}{(s-3)^5}$.

(3) A számlálóban 4! = 24-et kell előállítani:

$\bar{y} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{24}{(s-3)^5}$.

(4) $y = \dfrac{1}{4} e^{3x} \cdot x^4$.

p) **(1)** $s^2\bar{y} + 2s\bar{y} + 5\bar{y} = \dfrac{13}{s-2}$.

(2) $\bar{y}(s^2 + 2s + 5) = \dfrac{13}{s-2}$, tehát $\bar{y} = \dfrac{13}{(s-2)(s^2 + 2s + 5)}$.

(3) $\dfrac{13}{(s-2)(s^2 + 2s + 5)} = \dfrac{A}{s-2} + \dfrac{Bs + C}{s^2 + 2s + 5}$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $(s-2)(s^2 + 2s + 5)$-tel:

$13 = A(s^2 + 2s + 5) + (Bs + C)(s - 2)$.

$s = 2$: $13 = 13A$, ahonnan $A = 1$.

s^2: $0 = A + B$, ahonnan $B = -1$.

s: $0 = 2A - 2B + C$, ahonnan $C = -4$.

Így $\bar{y} = \dfrac{1}{s-2} - \dfrac{s+4}{s^2 + 2s + 5} = \dfrac{1}{s-2} - \dfrac{s+4}{(s+1)^2 + 4}$.

A második tagot a visszatranszformálás előtt átalakítjuk:

$$\bar{y} = \frac{1}{s-2} - \frac{(s+1)+3}{(s+1)^2 + 4} = \frac{1}{s-2} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{(s+1)^2 + 4}.$$

(4) $y = e^{2x} - e^{-x} \cdot \cos 2x - \dfrac{3}{2} e^{-x} \cdot \sin 2x$.

q) $y = -12x \cdot e^{-2x} - 9e^{-2x} + 8e^{-x} + e^{2x}$.

r) $y = 1 - e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x$.

s) (1) $s^2\bar{y} - s - 1 + 4(s\bar{y} - 1) + 4\bar{y} = \dfrac{8}{s+2}$.

(2) $\bar{y}(s^2 + 4s + 4) = \dfrac{8}{s+2} + s + 5$, tehát

$$\bar{y} = \frac{s^2 + 7s + 18}{(s+2)^3}.$$

(3) $$\frac{s^2 + 7s + 18}{(s+2)^3} = \frac{A}{(s+2)^3} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+2}.$$

Mindkét oldalt megszorozzuk $(s+2)^3$-nal:

$s^2 + 7s + 18 = A + B(s+2) + C(s+2)^2$.

$s = -2$: $8 = A$.

s^2: $1 = C$.

s: $7 = B + 4C$, ahonnan $B = 3$.

Így $\bar{y} = \dfrac{8}{(s+2)^3} + \dfrac{3}{(s+2)^2} + \dfrac{1}{s+2}$.

Az első és második tag számlálójában előállítjuk a megfelelő konstansokat:

$$\bar{y} = 4 \cdot \frac{2}{(s+2)^3} + 3 \cdot \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+2}.$$

(4) $y = 4x^2 \cdot e^{-2x} + 3x \cdot e^{-2x} + e^{-2x}$.

t) (1) $s^2\bar{y} - \bar{y} = \dfrac{8}{s^2} + \dfrac{24}{s-1}$.

(2) $$\bar{y} = \frac{24s^2 + 8s - 8}{s^2(s-1)^2(s+1)}.$$

(3) $$\frac{24s^2 + 8s - 8}{s^2(s-1)^2(s+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{s-1} + \frac{E}{s+1}$$

$A = -8$, $B = 0$, $C = 12$, $D = -2$, $E = 2$.

Így $\bar{y} = -8 \cdot \frac{1}{s^2} + 12 \cdot \frac{1}{(s-1)^2} - 2 \cdot \frac{1}{s-1} + 2 \cdot \frac{1}{s+1}$.

(4) $y = -8x + 12x \cdot e^x - 2e^x + 2e^{-x}$.

u) $y = e^{3x} - e^{2x} \cdot \cos x - e^{2x} \cdot \sin x$.

10.2.3. (1) $s^2\bar{y} - sy(0) - y'(0) + 3(s\bar{y} - y(0)) = \frac{1}{s-1}$.

Legyen $y(0) = a$, $y'(0) = b$ $(a, b \in \mathbf{R})$!

$\bar{y}(s^2 + 3s) = \frac{1}{s-1} + as + b + 3as$

(2) $\bar{y} = \frac{1 + as(s-1) + b(s-1) + 3a(s-1)}{s(s+3)(s-1)} =$

$= \frac{as^2 + (2a+b)s + 1 - 3a - b}{s(s+3)(s-1)}$.

(3) $\frac{as^2 + (2a+b)s + 1 - 3a - b}{s(s+3)(s-1)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+3} + \frac{A_3}{s-1}$.

Mindkét oldalt megszorozzuk $s(s+3)(s-1)$-gyel:

$as^2 + (2a+b)s + 1 - 3a - b = A_1(s+3)(s-1) + A_2 s(s-1) + A_3 s(s+3)$.

$s = 0$: $1 - 3a - b = -3A_1$, ahonnan $A_1 = \frac{3a + b - 1}{3}$.

$s = -3$: $9a - 6a - 3b + 1 - 3a - b = 12A_2$, ahonnan $A_2 = \frac{1 - 4b}{12}$.

$s = 1$: $a + 2a + b + 1 - 3a - b = 4A_3$, ahonnan $A_3 = \frac{1}{4}$.

Így $\bar{y} = \frac{3a + b - 1}{3} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1 - 4b}{12} \cdot \frac{1}{s+3} + \frac{1}{4} \frac{1}{s-1}$.

(4) $y = \frac{3a + b - 1}{3} + \frac{1 - 4b}{12} \cdot e^{-3x} + \frac{1}{4} e^x$.

Bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$\frac{3a+b-1}{3}=C_1,\quad \frac{1-4b}{12}=C_2.$$

Az általános megoldás tehát:

$$y=C_1+C_2e^{-3x}+\frac{1}{4}e^{x}.$$

10.2.4. $i(t)=0{,}5\left(1-e^{-8t}\right)$.

10.2.5. **(1)** $x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=2.$

$$s^2\overline{x}-2+5s\overline{x}+\overline{x}=0.$$

(2) $\overline{x}=\dfrac{2}{(s-s_1)(s-s_2)}$, ahol

$$s_1=\frac{-5+\sqrt{21}}{2}\approx 0{,}2087;\quad s_2=\frac{-5-\sqrt{21}}{2}\approx -4{,}7913.$$

(3) $$\frac{2}{(s-s_1)(s-s_2)}=\frac{A}{s-s_1}+\frac{B}{s-s_2}$$

$$A=\frac{2}{\sqrt{21}}\approx 0{,}4364;\quad B=-\frac{2}{\sqrt{21}}\approx -0{,}4364.$$

Így $\overline{x}=\dfrac{2}{\sqrt{21}}\cdot\dfrac{1}{s-s_1}-\dfrac{2}{\sqrt{21}}\cdot\dfrac{1}{s-s_2}$.

(4) $x(t)=0{,}4364\left(e^{-0{,}2087t}-e^{-4{,}7913t}\right)$.

11. VÉGTELEN SOROK

11.1. Számsorok

11.1.1.

a) A számsor általános tagja egyszerűsíthető:

$$a_n = \frac{n+2}{n^2+3n+2} = \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1}.$$

A részletösszegek sorozatának első három eleme:

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{2},$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6},$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3 = \frac{5}{6} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}.$$

A konvergencia szükséges feltétele teljesül, mert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

b) $s_1 = 2$, $s_2 = \frac{14}{5}$, $s_3 = \frac{78}{25}$.

A konvergencia szükséges feltétele teljesül.

c) A részletösszegek sorozatának első három eleme:

$$s_1 = 2\frac{\sqrt{19}-1}{\sqrt{5}+1},$$

$$s_2 = 2\frac{\sqrt{19}-1}{\sqrt{5}+1}\left(1+\frac{\sqrt{19}-1}{\sqrt{5}+1}\right),$$

$$s_3 = 2\frac{\sqrt{19}-1}{\sqrt{5}+1}\left(1+\frac{\sqrt{19}-1}{\sqrt{5}+1}\left(1+\frac{\sqrt{19}-1}{\sqrt{5}+1}\right)\right).$$

A konvergencia szükséges nem feltétele nem teljesül, mert

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{19}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^n=\infty, \text{ mivel } \frac{\sqrt{19}-1}{\sqrt{5}+1}>1.$$

d) $s_1=0$, $s_2=\frac{8}{10}$, $s_3=\frac{121}{70}$.

A konvergencia szükséges feltétele nem teljesül, mert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}-3^{-n+1}}{3^{n-1}+3^{-n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{3^{2n-2}}}{1+\frac{1}{3^{2n-2}}}=1.$$

e) $s_1=1+\sqrt{2}$, $s_2=1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $s_3=3+2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

A konvergencia szükséges feltétele nem teljesül.

f) $s_1=\sqrt{3}-\sqrt{5}$, $s_2=2+\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{6}$, $s_2=2+\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{7}$.

A konvergencia szükséges feltétele teljesül.

11.1.2.

a) A geometriai sor kvóciense pozitív, és $q=\frac{5}{7}<1$, ezért konvergens. Összege: $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}3\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}=\lim_{N\to\infty}3\frac{1-\left(\frac{5}{7}\right)^N}{1-\frac{5}{7}}=\frac{21}{2}$.

b) Tekintsük a $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ geometriai sort, amelynek kvóciense pozitív, és $q=\frac{3}{5}<1$, ezért konvergens. Első tagja 1, összege pedig

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{3}{5}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5}{2}.$$

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 1+\frac{3}{5}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$, tehát a $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ sor, a $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ sorból, az első két tag elhagyásával jött létre, ezért a $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ sor is konvergens.

Mivel $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{3}{5}+\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = \frac{8}{5}+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{3}{5}\right)^n$, a sor összege: $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{8}{5} = \frac{5}{2}-\frac{8}{5} = \frac{9}{10}$.

c) Írjuk fel a sor tagjait az alábbi módon:

$\frac{3^n+7^n}{21^n} = \frac{1}{7^n}+\frac{1}{3^n}$.

Írjuk fel a sor N-edik részletösszegét:

$s_N = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{7^n}+\frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{7^n}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{3^n}$.

A jobboldalon álló összegek rendre az $\frac{1}{7}$ és $\frac{1}{3}$ kvóciensű geometriai sorok N-edik részletösszegei. Képezve mindkét oldalon a határátmenetet, a sor összegét kapjuk:

$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{3^n+7^n}{21^n} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7^{n-1}}+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{6}+\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

d) Divergens. **e)** Divergens.

f) Konvergens, $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}+1}\right)^n = \frac{\sqrt{50}+\sqrt{10}+10}{2}$.

11.1.3.

a) Tekintsük a sor $\frac{2}{(n+1)(n+2)}$ általános tagját.

Minden, $n \geq 0$ egész szám esetén

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2},$$

ezért a sor N-edik részletösszegét megadhatjuk ilyen alakú általános taggal is. Ez részletesen, az áttekinthetőség céljából az egyes tagokat zárójelbe téve:

$$s_N = (2-1) + \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{N+1} - \frac{2}{N+2}\right),$$

Mivel az első és az utolsó kivételével, minden szám összeadandóként is és kivonandóként is szerepel, ezért összevonás után

$$s_N = 2 - \frac{2}{N+2}.$$

A sor összege a részletösszegek sorozatának határértéke:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \lim_{N\to\infty} \left(2 - \frac{2}{N+2}\right) = 2.$$

b) Mivel $n \geq 1$, ezért $n+2 \neq 0$, így a sor általános tagját egyszerűsíthetjük. A kapott általános tag két parciális tört összege:

$$\frac{3}{n(n+4)} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4}\right).$$

Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4}\right)$ sort, és az előző feladatban alkalmazott módszerrel kiszámítjuk az összegét.

$$s_N = \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{N+4}$$

Az így felírt részletösszegek sorozatának határértéke a sor összege:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4}\right) = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{N+4}\right) = \frac{25}{12}.$$

Mivel a megvizsgált sor konvergens, ezért tagjait egy adott, valós számmal sorozva is konvergens sor adódik. Ennek határértékét

úgy kapjuk meg, hogy a megvizsgált sor határértékét megszorozzuk a valós számmal:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{3n+6}{n(n+2)(n+4)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{25}{12}=\frac{25}{16}.$$

c) $s=\frac{11}{18}$.

d) $s=\frac{3}{4}$.

e) $s=\frac{167}{144}$.

f) $s=-3$.

11.1.4.

a) Leibniz-féle sor, mert a sor tagjainak abszolút értékeiből képzett sorozat monoton csökkenve tart nullához:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0.$$

A Leibniz-féle sorok konvergensek.

b) A sor divergens, mert nem elégíti ki a konvergencia szükséges feltételét: $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n(n+2)}{2n+1}\neq 0$.

c) Alkalmazzuk a $\cos n\pi=(-1)^n$ összefüggést! A sor konvergens.

d) Alkalmazva, hogy $\sin\frac{3\pi}{2}=-1$ és minden, $n\geq 0$ egész szám esetén

$$\frac{n!}{(n+2)!}=\frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

a konvergens

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+2)!}\sin^n\frac{3\pi}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}$$

sort kapjuk.

e) Konvergens.

f) Konvergens.

11.1.5.

a) A D'Alembert-féle hányadoskritériumot alkalmazva,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3(n+1)}{5^{n+1}}}{\frac{3n}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5n}=\frac{1}{5}<1,\text{ tehát konvergens.}$$

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3}>1$, tehát divergens.

c) Divergens.

d) A Cauchy-féle gyökkritériumot alkalmazva,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2}{(n+3)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}}{n+3}=0<1,\text{ tehát konvergens.}$$

e) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{2n-1}>1$, tehát divergens.

f) Konvergens.

11.2. Hatványsorok

11.2.1.

a) $x_1=0{,}5$ és $x_2=3$ behelyettesítésével is pozitív tagú számsort kapunk, amelyekre alkalmazhatjuk a D'Alembert-féle hányados-kritériumot:

$\lim_{n\to\infty}\frac{0{,}5^{n+1}(n+2)}{0{,}5^n(n+3)}=0{,}5<1$, tehát konvergens az $x_1=0{,}5$ helyen.

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+2)}{3^n(n+3)}=3>1$, tehát divergens az $x_2=3$ helyen.

b) $x_1 = 1$ behelyettesítésével váltakozó előjelű sort kapunk, amely tagjainak abszolút értékeiből képzett sorozat nem nullához tart, hanem végtelenhez, ezért itt a hatványsor divergens. $x_2 = 5$ behelyettesítésével pozitív tagú sort kapunk, amelyről a D'Alembert-féle hányadoskritériummal megállapítható, hogy divergens, ezért a hatványsor itt is divergens.

c) Az $x_1 = 2$ helyen konvergens, az $x_2 = 6$ helyen divergens.

d) Az $x_1 = 0{,}5$ és az $x_2 = 0{,}25$ helyen is konvergens.

e) $x_1 = 2$ és $x_2 = 2e$ esetén is alkalmazzuk a D'Alembert-féle hányadoskritériumot. Az első esetben a határérték $\frac{2}{e} < 1$, a második esetben pedig 2. Ezért a hatványsor az $x_1 = 2$ helyen konvergens, az $x_2 = 2e$ helyen pedig divergens.

f) Az $x_1 = 0{,}1$ helyen konvergens, az $x_2 = 10$ helyen divergens.

11.2.2.

a) Mivel $f(x) = 2^x$ legalább háromszor differenciálható az $x_0 = 1$ helyen, ezért a $T_3(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ felírható.

$f(x) = 2^x$ $\qquad$ $f(1) = 2$

$f'(x) = 2^x \ln 2$ $\qquad$ $f'(1) = 2\ln 2$

$f''(x) = 2^x \ln^2 2$ $\qquad$ $f''(1) = 2\ln^2 2$

$f'''(x) = 2^x \ln^3 2$ $\qquad$ $f'''(1) = 2\ln^3 2$

A fentiek alapján: $T_3(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{2\ln^n 2}{n!}(x-1)^n$.

b) Mivel a függvény legalább háromszor differenciálható a megadott helyen, ezért itt felírható a harmadrendű Taylor-polinomja.

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2} \qquad f(e)=\frac{1}{e^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3} \qquad f'(e)=-\frac{1}{e^3}$$

$$f''(x)=\frac{6\ln x-5}{x^4} \qquad f''(e)=\frac{1}{e^4}$$

$$f'''(x)=\frac{26-24\ln x}{x^5} \qquad f'''(e)=\frac{2}{e^5}$$

$$T_3(x)=\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e^3}(x-e)+\frac{1}{2e^4}(x-e)^2+\frac{1}{3e^5}(x-e)^3.$$

c) Mivel $n=2k+1$ esetén $f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, ahol $k=0;1;2;...$, ezért a harmadrendű Taylor-polinom csak másodfokú:

$$T_3(x)=1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

d) $T_3(x)=5(x-1)+20(x-1)^2+35(x-1)^3$.

e) $T_3(x)=e+2(x-e)+\frac{1}{2e}(x-e)^2-\frac{1}{6e^2}(x-e)^3$.

f) $T_3(x)=e-2e(x+1)+3e(x+1)^2-\frac{10e}{3}(x+1)^3$.

11.2.3.

a) Alkalmazva az ismert,

$$\sin u=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}u^{2n+1}, \text{ ha } u\in\mathbf{R},$$

összefüggést, és az $u=3x$ helyettesítést, a megadott függvény $x_0=0$ körüli Taylor-sora:

$$\frac{1}{2}\sin 3x = \frac{1}{2}\sin u = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n u^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n+1} x^{2n+1}}{2(2n+1)!}.$$

Mivel minden $u \in \mathbf{R}$ esetén $\sin u = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} u^{2n+1}$, ezért a kapott sor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén előállítja a függvényt.

b) Alkalmazzuk a $\sin 2x \cos x = \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)$ azonosságot, és az **a)** feladat megoldásának eredményét! A jobboldalon álló függvények összegének Taylor-sora, a két függvény Taylor-sorának összege. Mivel a két függvényt minden $x \in \mathbf{R}$ esetén előállítja a Taylor-sora, ezért kiemelés után, a keresett Taylor-sor:

$$\sin 2x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (3^{2n+1}+1)}{2\,(2n+1)!} x^{2n+1}, \text{ ha } x \in \mathbf{R}.$$

c) Alkalmazva az $u = -x$ helyettesítést, és felhasználva, hogy

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}u^n, \text{ ha } u \in \mathbf{R},$$

kapjuk a megadott függvény nulla körüli Taylor-sorát:

$$\frac{2}{e^x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{n!}x^n, \text{ ha } x \in \mathbf{R}.$$

d) $x^3 e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^{n+3}$, ha $x \in \mathbf{R}$.

e) $\cos x^3 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{6n}$, ha $x \in \mathbf{R}$.

f) A megadott függvényt felírhatjuk

$$f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{4}\right)}$$

alakban. Legyen $u = -\frac{x^2}{4}$, és alkalmazzuk az ismert

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \text{, ha } |u| < 1$$

összefüggést. Ekkor

$$\frac{1}{4+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+4}} x^{2n} .$$

Mivel $u = -\frac{x^2}{4}$ és $|u| < 1$, ezért a Taylor-sora $|x| < 2$ esetén állítja elő a függvényt.

g) $f'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$ és $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n+1} x^{2n}$, ha $|x| < \frac{1}{2}$.

A derivált függvény Taylor-sorát tagonként integrálva kapjuk a megadott függvény Taylor-sorát:

$$\operatorname{arc\,tg} 2x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n+1} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n+1} \int_0^x t^{2n} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1} \text{, ha } |x| < \frac{1}{2}.$$

h) $f(x) = \ln(2-x) = \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \ln 2 + g(x)$ átalakítás után,

$$g'(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = f'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n \text{, ha } |x| < 2.$$

Tagonként integrálva a $g'(x)$ Taylor-sorát:

$$g(x) = -\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} t^n dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} x^{n+1} \text{, ha } |x| < 2.$$

A megadott függvény Taylor-sora tehát:

$$\ln(2-x) = \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} x^{n+1} \text{, ha } |x| < 2.$$

i) Az $f(x)=x^2\ln(x+2)=x^2\left(\ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)=x^2\left(\ln 2+g(x)\right)$ átalakítás után kapjuk, hogy

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}x^{n+1},\ \text{ha}\ |x|<2.$$

A megadott függvény Taylor-sora:

$$x^2\ln(x+2)=x^2\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}x^{n+3},\ \text{ha}\ |x|<2.$$

j) $\lg(1-2x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{\ln 10^{n+1}}x^{n+1},\ \text{ha}\ |x|<\frac{1}{2}.$

k) $\sqrt[3]{5-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}\frac{(-1)^n}{5^{n-\frac{1}{3}}}x^n,\ \text{ha}\ |x|<5.$

l) $2x\arccos(-x)=\pi x+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n\frac{2}{n+1}x^{2n+2},\ \text{ha}\ |x|<1.$

11.2.4.

a) A függvény értéke az $x_1=-0{,}1$ helyen, az $x_0=0$ körüli Taylor-formula alapján:

$$f(-0{,}1)=e^{-0{,}1}=1-0{,}1+\frac{0{,}1^2}{2}-\frac{0{,}1^3}{6}+\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}0{,}1^4.$$

Ebben $1-0{,}1+\frac{0{,}1^2}{2}-\frac{0{,}1^3}{6}=\frac{5429}{6000}$ az $e^{-0{,}1}$ közelítő értéke. Az ún. Lagrange-féle maradéktag, $\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}0{,}1^4$ – ahol $-0{,}1<\xi<0$, – pedig a közelítő érték hibája.

Mivel $-0{,}1 < \xi < 0$ esetén, $\left|f^{(4)}(\xi)\right| < 1$, ezért a közelítő érték hibája legfeljebb $\frac{1}{24} \cdot 10^{-4}$.

b) A közelítő érték $\frac{16723}{16200}$, a hiba legfeljebb $\frac{1}{24} \cdot 10^{-4}$.

c) Mivel $n = 2k+1$ esetén $f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, ahol $k = 0;1;2;\ldots$, ezért a negyedrendű Taylor-formula alapján, a közelítő érték $\frac{14701}{15000}$, a hiba legfeljebb $\frac{4}{45} \cdot 10^{-6}$.

d) Alkalmazható a **11.2.3. g)** feladat eredménye. A közelítő érték $\frac{148}{775}$, a hiba legfeljebb $\frac{1}{12} \cdot 10^{-4}$.

11.2.5.

a) Mivel $\lim\limits_{x \to 0 \pm 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$, ezért $\lim\limits_{\delta \to 0} \int\limits_{\delta}^{0,2} \frac{\sin 2x}{x} dx = \int\limits_{0}^{0,2} f(x)\,dx$ – ahol

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0, \\ 2, & \text{ha} \quad x = 0. \end{cases}$$

Képezzük a függvény Taylor-sorát, amelyet tagonként integrálunk:

$$\int\limits_{0}^{0,2} \left(2 - \frac{8x^2}{6} + \frac{32x^4}{120} - \frac{128x^6}{5040} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n}}{(2n+1)!} \right) dx$$

A határozott integrál eredménye a

$$0{,}4 - \frac{0{,}4^3}{3 \cdot 6} + \frac{0{,}4^5}{5 \cdot 120} - \frac{0{,}4^7}{7 \cdot 5040} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 2^{2n+1} \, 0{,}2^{2n+1}}{(2n+1) \cdot (2n+1)!}$$

váltakozó előjelű, abszolút értékben monoton és nullához tartó sorozatot képező tagokból álló, ezért konvergens számsor. Az el-

ső három tag összegének a sor összegétől való eltérése kisebb, mint a negyedik tag abszolút értéke.

Tehát a határozott integrál közelítő értéke:

$$\int_0^{0,2} \frac{\sin 2x}{x}\,dx \approx 0,4 - \frac{0,4^3}{18} + \frac{0,4^5}{600} = \frac{492384}{2250000},$$

a közelítő érték hibája pedig kisebb, mint

$$\frac{1024}{441}\cdot 10^{-7} < 2,4\cdot 10^{-7}.$$

b) Az integrandus nulla körüli Taylor-sorának határozott integrálja:

$$\int_0^{0,3}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\right)dx =$$

$$= 0,3 - \frac{0,3^3}{3} + \frac{0,3^5}{5\cdot 2!} - \frac{0,3^7}{7\cdot 3!} + \sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^n 0,3^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!}.$$

A határozott integrál közelítő értéke az első három tag összege:

$$\frac{291243}{1000000}.$$

A közelítő érték hibája kisebb, mint a negyedik tag abszolút értéke: $\frac{729}{14}\cdot 10^{-7}$.

11.2.6.

a) Mivel minden $x \in \mathbf{R}$ esetén $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$, ezért

$$\int_0^{0,2} e^{-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{0,2} x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}0,2^{2n+1}.$$

Ha $n \geq 3$, akkor $\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}0,2^{2n+1}\right| < 3,05\cdot 10^{-7}$, így az integrál közelítő értéke $\sum_{n=0}^{2}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}0,2^{2n+1} = 0,197365$, amelynek a pontos értéktől való eltérése kisebb, mint 10^{-6}.

b) Az integrál közelítő értéke

$$\int_{0,1}^{0,2}\frac{e^{-x}-1}{x}dx \approx \sum_{n=1}^{4}\frac{(-1)^n}{n\cdot n!}(0{,}2^n-0{,}1^n)=-0{,}092873,$$

amelynek a pontos értéktől való eltérése kisebb, mint 10^{-6}, mert $\frac{0{,}2^5-0{,}1^5}{5\cdot 5!}<5{,}2\cdot 10^{-7}$.

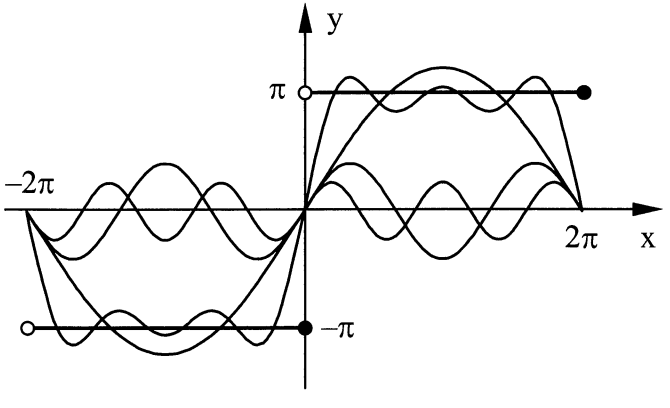
c) Az integrál közelítő értéke $0{,}223845$, amelynek a pontos értéktől való eltérése kisebb, mint $5{,}04\cdot 10^{-7}<10^{-6}$.

d) Az integrál közelítő értéke $0{,}493108$, amelynek a pontos értéktől való eltérése kisebb, mint $2{,}2\cdot 10^{-7}<10^{-6}$.

11.3. Fourier-sorok

11.3.1.

a) A megadott függvény páratlan, ezért $a_0=0$, és minden pozitív egész szám esetén, $a_n=0$.



$$b_n=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-2\pi}^{0}(-\pi)\sin\frac{nx}{2}dx+\int_{0}^{2\pi}\pi\sin\frac{nx}{2}dx\right)=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{2\pi\cos\frac{nx}{2}}{n}\right]_{-2\pi}^{0} + \left[\frac{-2\pi\cos\frac{nx}{2}}{n}\right]_{0}^{2\pi}\right) =$$

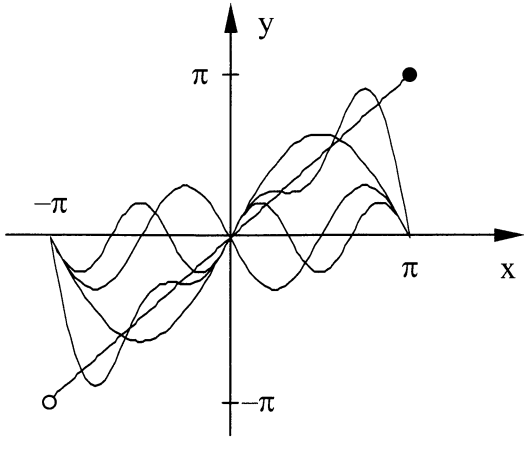
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi\cos n\pi}{n} - \frac{2\pi\cos n\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{2(1-\cos n\pi)}{n}.$$

Mivel $\cos n\pi = (-1)^n$, ezért $a_2 = a_4 = 0$. A sor első három, nullától különböző Fourier-együtthatójú tagjának összege:

$$4\sin\frac{x}{2} + \frac{4}{3}\sin\frac{3x}{2} + \frac{4}{5}\sin\frac{5x}{2}.$$

b) A megadott függvény páratlan, ezért $a_0 = 0$, és minden pozitív egész szám esetén, $a_n = 0$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2(-1)^n}{n}.$$

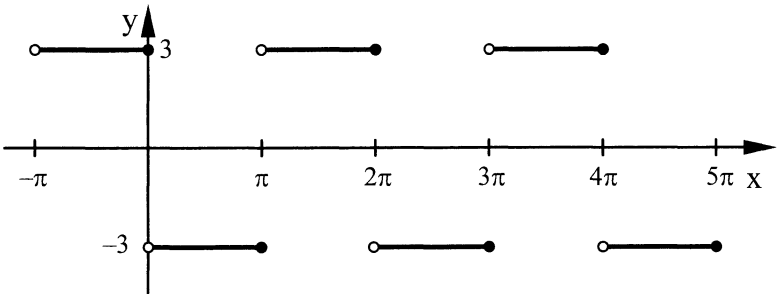


A sor egyik tagjának sem nulla a Fourier-együtthatója. Az első három tag összege:

$$2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x.$$

11.3.2.

a)



A függvény páratlan, ezért $a_0 = 0$, $a_n = 0$ és $b_n \neq 0$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 3\sin nx\,dx - \int_{0}^{\pi} 3\sin nx\,dx \right) = \frac{-6}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\,dx =$$

$$= \frac{6}{n\pi}\left[\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{6(\cos n\pi - 1)}{n\pi}.$$

Mivel $\cos n\pi = (-1)^n$, ezért a Fourier-együttható:

$$b_n = \frac{6\left((-1)^n - 1\right)}{n\pi},$$

tehát minden páros indexű együttható nulla.

A megadott függvény Fourier-sora:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6\left((-1)^n - 1\right)}{n\pi} \sin nx\,,\ \text{ha}\ x \neq m\pi,\ \text{ahol}\ m = 0;\pm1;\pm2;\ldots,$$

illetve a páros rendű, harmonikus összetevők nélkül felírva:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{12}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x\,,\ \text{a fenti feltétel mellett.}$$

A függvény szakadási helyei az $x_s = m\pi$ $(m = 0;\pm1;\pm2;\ldots)$ alakú valós számok. Ezeken a helyeken az $f(x)$ bal- és jobboldali határértékének számtani közepe, és a Fourier-sorából, ugyanezeken a helyeken képzett számsor összege egyenlő.

A függvénygrafikon alapján, a határértékek számtani közepe:

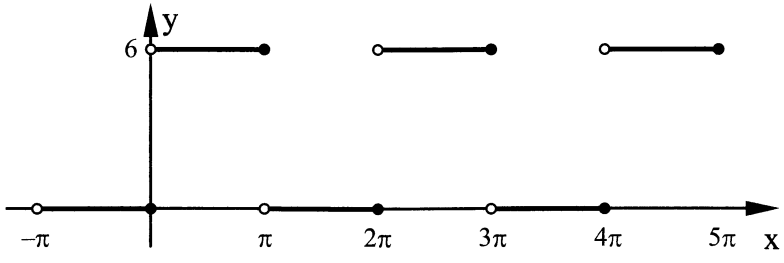
$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_s^-} f(x) + \lim_{x \to x_s^+} f(x) \right) = \frac{1}{2}(3-3) = 0.$$

Mivel minden $m = 0;\pm1;\pm2;\ldots$ esetén $\sin(n \cdot m \cdot \pi) = 0$, ezért a számsor csupa 0 összeadandóból áll, tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6\left((-1)^n - 1\right)}{n\pi} \sin(n \cdot m \cdot \pi) = 0 .$$

b) Legyen $g(x) = -3$, akkor $h(x) = f(x) + g(x)$ páratlan függvény:

$$h(x) = \begin{cases} -3, & \text{ha} \quad -\pi < x \le 0, \\ 3, & \text{ha} \quad 0 < x \le \pi. \end{cases}$$



A h(x) függvény páratlan, ezért $a_0 = 0$, $a_n = 0$ és

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 3 \sin nx \, dx = \frac{6\left(1 - (-1)^n\right)}{n\pi}.$$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6\left(1 - (-1)^n\right)}{n\pi} \sin nx ,$$

és mivel $f(x) = h(x) - g(x)$, ezért

$$f(x) = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6\left(1 - (-1)^n\right)}{n\pi} \sin nx \text{, ha } x \neq m\pi \ (m = 0;\pm1;\pm2;\ldots).$$

Megjegyezzük, hogy h(x) az **a)** feladatbeli függvénynek mínusz egyszerese, ezért

$$f(x) = 3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{12}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x \text{, a fenti feltétel mellett.}$$

Az $x_s = m\pi$ $(m = 0;\pm1;\pm2;\ldots)$ alakban megadott szakadási helyen, a függvény bal- és jobboldali határértéke számtani közepének, és a Fourier-sorából, ugyanezen a helyen alkotott számsor összegének egyenlősége:

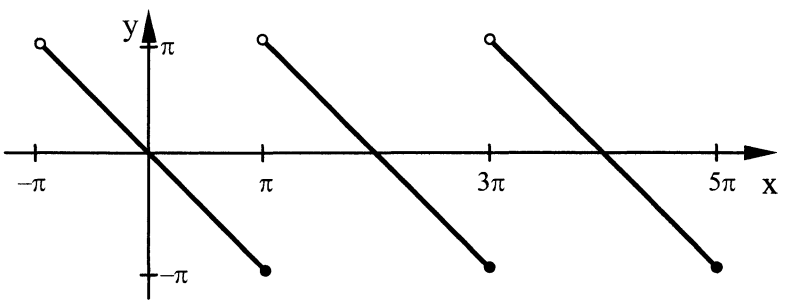
$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_s^-} f(x)+\lim_{x\to x_s^+} f(x)\right)=\frac{1}{2}(0+6)=3,$$

illetve

$$3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi}\sin(n\cdot m\cdot\pi)=3.$$

c) Az $f(x)$ függvény páratlan, ezért $a_0=0$, $a_n=0$ és

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-x)\sin nx\,dx=\frac{2(-1)^n}{n}.$$

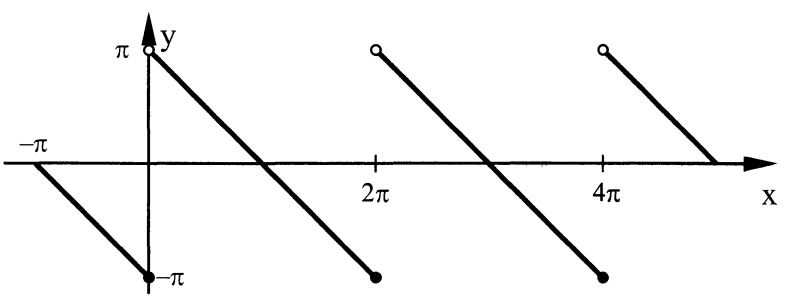


$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n}\sin nx\text{, ha } x\neq(2m+1)\pi\ (m=0;\pm1;\pm2;\ldots).$$

A függvény szakadási helyei: $x_s=(2m+1)\pi$ $(m=0;\pm1;\pm2;\ldots)$,

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_s^-} f(x)+\lim_{x\to x_s^+} f(x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n}\sin(n\cdot(2m+1)\cdot\pi))=0.$$

d)



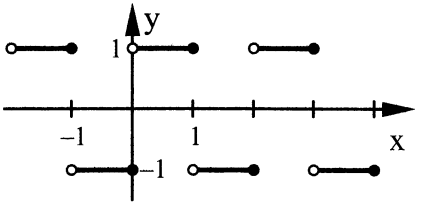
Az $f(x)$ függvény páratlan, ezért $a_0=0$, $a_n=0$ és $b_n\neq0$.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx\,,\ \text{ha}\ x\neq 2m\pi\ (m=0;\pm1;\pm2;\ldots).$$

A függvény szakadási helyei: $x_s=2m\pi\ (m=0;\pm1;\pm2;\ldots)$,

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_s^-}f(x)+\lim_{x\to x_s^+}f(x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin(2\cdot n\cdot m\cdot\pi)=0\,.$$

e) A függvény páratlan, ezért $a_0=0$, $a_n=0$ és $b_n\neq 0$.



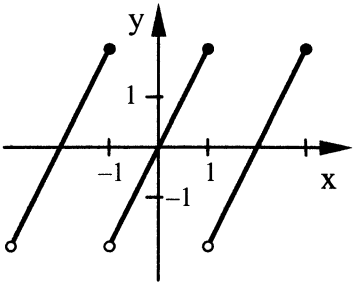
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi}\sin n\pi x\,,$$

ha $x\neq 0;\pm1;\pm2;\ldots$.

A függvény szakadási helyei: $x_s=0;\pm1;\pm2;\ldots$,

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_s^-}f(x)+\lim_{x\to x_s^+}f(x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi}\sin(n\cdot\pi\cdot x_s)=0\,.$$

f)



Az $f(x)$ függvény páratlan, ezért $a_0=0$, $a_n=0$ és $b_n\neq 0$.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x\,,\ \text{ha}$$

$x\neq 2m+1\ (m=0;\pm1;\pm2;\ldots)$.

A függvény szakadási helyei: $x_s=2m+1\ (m=0;\pm1;\pm2;\ldots)$,

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_s^-}f(x)+\lim_{x\to x_s^+}f(x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n\pi}\sin(n\cdot\pi\cdot(2m+1))=0\,.$$

11.3.3.

a) Legyen $g(x) = -3$, és tekintsük az alábbi páratlan, periodikus függvényt:

$$h(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha} \quad -1 < x \le 0, \\ -x^2, & \text{ha} \quad 0 < x \le 1, \end{cases} \quad \text{és} \quad h(x) = h(x+2).$$

Ennek a függvénynek az esetében $a_0 = 0$, $a_n = 0$ és

$$b_n = 2\int_0^1 (-x^2)\sin n\pi x\,dx = \frac{2(-1)^n}{n\pi} + \frac{4\left(1-(-1)^n\right)}{n^3\pi^3}.$$

Mivel $f(x) = h(x) - g(x)$, ezért az adott függvény Fourier-sora

$$f(x) = 3 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{n\pi} + \frac{4\left(1-(-1)^n\right)}{n^3\pi^3}\right)\sin n\pi x, \text{ ha } x \neq \pm 1; \pm 3; \ldots.$$

b) A megadott függvény páratlan, ezért $a_0 = 0$, $a_n = 0$. $n \ge 2$ esetén, alkalmazva a $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$ trigonometrikus azonosságot,

$$b_n = \int_{-0,5}^{0,5} 2\sin\pi x \sin n\pi x\,dx = \int_{-0,5}^{0,5}\left(\cos(n-1)\pi x - \cos(n+1)\pi x\right)dx.$$

Integrálás és azonos átalakítások után, $b_n = \frac{4n}{(1-n^2)\pi}\cos\frac{n\pi}{2}$.

$n = 1$ és $-0,5 < x \le 0,5$ esetén $\cos(n-1)\pi x \equiv 1$, így

$b_1 = \int_{-0,5}^{0,5}\left(1 - \cos 2\pi x\right)dx = 1$. A függvény Fourier-sora:

$$f(x) = \sin\pi x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{4n}{(1-n^2)\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\sin n\pi x,$$

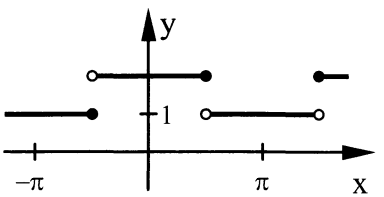
ha $x \neq 0,5 + m$ $(m = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$.

c) A **b)** és a **11.3.2. f)** feladat megoldása alapján, – ha $x \neq 0,5 + m$ $(m = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$, – a függvény Fourier-sora:

$$f(x)=\left(\frac{2}{\pi}-1\right)\sin\pi x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{\pi}\left(\frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{(n^2-1)}-\frac{(-1)^n}{n}\right)\sin n\pi x\,.$$

11.3.4.

a)



Mivel a függvény páros, ezért $b_n=0$.

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}1dx\right)=\frac{3}{2}$$

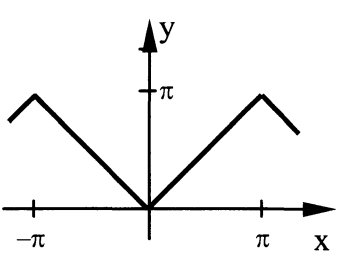
$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos nx\,dx\right)=\frac{2(2+\cos n\pi)}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

A megadott függvény Fourier-sora:

$$f(x)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(2+\cos n\pi\right)}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos nx\,,$$

ha $x\neq\frac{\pi}{2}+m\pi$ $(m=0;\pm1;\pm2;\ldots)$.

b)



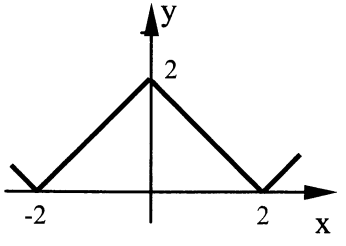
A függvény páros, ezért $a_0=\frac{\pi}{2}$,

$a_n=\frac{2\left((-1)^n-1\right)}{n^2\pi}$ és $b_n=0$.

A függvény Fourier-sora:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^n-1\right)}{n^2\pi}\cos nx\,.$$

c)



A függvény páros, ezért $a_0 = 1$,

$a_n = \frac{4\left(1-(-1)^n\right)}{n^2\pi^2}$ és $b_n = 0$.

A függvény Fourier-sora:

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left(1-(-1)^n\right)}{n^2\pi^2} \cos\frac{n\pi x}{2}.$$

11.3.5.

a) A függvény páros, ezért $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 e^x dx = \frac{e^2-1}{2},$$

$$a_n = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 e^x \cos\frac{n\pi x}{2} dx = \left[\frac{e^x\left(\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{n\pi x}{2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)}{1+\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{4}{4+n^2\pi^2}\left(e^2\cos n\pi - 1\right) = \frac{4\left((-1)^n e^2 - 1\right)}{4+n^2\pi^2}.$$

A megadott függvény Fourier-sora:

$$f(x) = \frac{e^2-1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left((-1)^n e^2 - 1\right)}{4+n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}.$$

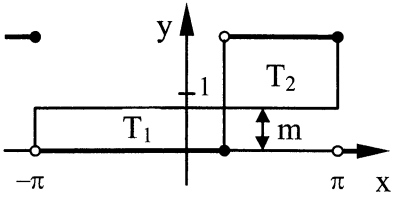
b) $$f(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{2}\left(2n\sin\frac{n\pi}{2} - \cos\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi(4n^2-1)}\cos 2n\pi x,$$

ha $x \neq \frac{1+2m}{4}$ $(m = 0;\pm1;\pm2;\ldots)$.

c) $$f(x) = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}.$$

11.3.6.

a)



A függvény nem páros és nem páratlan, ezért $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$ és $b_n \neq 0$. a_0 értéke a T_1=T_2, azaz az $1{,}25 \cdot \pi \cdot m = 0{,}75 \cdot \pi \cdot (2-m)$ egyenlet megoldásaként is kiszámítható: $a_0 = m = 0{,}75$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 2\cos nx\,dx = -\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{4},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 2\sin nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{4} - \cos n\pi\right).$$

A függvény Fourier-sora:

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(-\sin\frac{n\pi}{4}\cos nx + \left(\cos\frac{n\pi}{4} - \cos n\pi\right)\sin nx\right),$$

ha $x \neq \frac{\pi}{4} + 2m\pi$ és $x \neq \pi + 2m\pi$ $(m = 0;\pm1;\pm2;\ldots)$.

Csak „szinuszos” tagokkal kifejezve:

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx + \varphi_n),$$

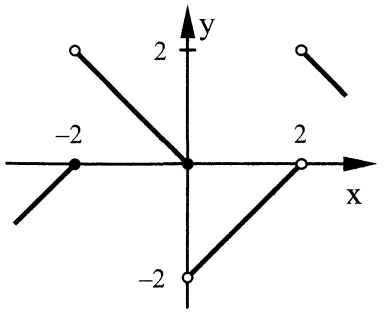
ha $x \neq \frac{\pi}{4} + 2m\pi$ és $x \neq \pi + 2m\pi$ $(m = 0;\pm1;\pm2;\ldots)$,

ahol

$$c_n = \sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}} = \frac{2\sqrt{2}}{n\pi}\sqrt{1 - \cos n\pi\cos\frac{n\pi}{4}} \quad \text{és}$$

$$\varphi_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{a_n}{b_n} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{4}}.$$

b)



A függvény nem páros, nem páratlan.

$a_0 = 0$,

$a_n = \dfrac{4(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2}$,

$b_n = \dfrac{2(\cos n\pi - 1)}{n\pi}$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$

ha $x \neq 0;\pm 2;\pm 4;\ldots$.

Mivel

$$c_n = \sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}} = \sqrt{1 + n^2\pi^2}\,\frac{4(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2} \quad \text{és}$$

$$\varphi_n = \operatorname{arctg}\frac{a_n}{b_n} = \operatorname{arctg}\frac{2}{n\pi},$$

így a sor csak „szinuszos” tagokkal:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{1 + n^2\pi^2}\,\frac{4(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{2} + \operatorname{arctg}\frac{2}{n\pi}\right),$$

ha $x \neq 0;\pm 2;\pm 4;\ldots$.

11.3.7.

a) $$a_0 = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (1 + x^2)\,dx + \int_1^2 1\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 1\,dx + \int_0^1 x^2\,dx\right),$$

$$a_n = \int_0^1 (1 + x^2)\cos n\pi x\,dx + \int_1^2 \cos n\pi x\,dx = \int_0^1 x^2\cos n\pi x\,dx \quad \text{és}$$

$$b_n = \int_0^1 (1 + x^2)\sin n\pi x\,dx + \int_1^2 \sin n\pi x\,dx = \int_0^1 x^2\sin n\pi x\,dx.$$

Kiszámítva az egyes integrálokat, a Fourier-együtthatók:

$a_0 = \frac{7}{6}$, $a_n = (-1)^n \frac{2}{n^2\pi^2}$ és $b_n = \frac{(-1)^n(2-n^2\pi^2)-2}{n^3\pi^3}$.

A függvény Fourier-sora:

$$f(x) = \frac{7}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x + \frac{(-1)^n(2-n^2\pi^2)-2}{n^3\pi^3}\sin n\pi x\right),$$

ha $x \neq \pm 1;\pm 3;\pm 5;\ldots$.

A Fourier-sor, csak „szinuszos" tagokkal:

$f(x) = \frac{7}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x + \varphi_n)$, ha $x \neq \pm 1;\pm 3;\pm 5;\ldots$, ahol

$$c_n = \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2} = \frac{\sqrt{8(1-(-1)^n) + n^2\pi^2(n^2\pi^2 + 4(-1)^n)}}{n^3\pi^3} \text{ és}$$

$$\varphi_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{a_n}{b_n} = \operatorname{arc\,tg}\frac{2n\pi}{2(1-(-1)^n) - n^2\pi^2}.$$

b) $$f(x) = \frac{2+\sqrt{2}}{2\pi} - \frac{1}{4\pi}\cos x + \frac{3\pi+2}{8\pi}\sin x +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

ha $x \neq \frac{\pi}{4} + 2m\pi$ $(m = 0;\pm 1;\pm 2;\ldots)$, ahol

$$a_n = -\frac{\sqrt{2}(-1)^n + n\sin\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{n\pi}{4}}{\sqrt{2}\,\pi(n^2-1)} \text{ és } b_n = \frac{n\cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}}{\sqrt{2}\,\pi(n^2-1)}.$$

A függvény Fourier-sorának másik alakja:

$$f(x) = \frac{2+\sqrt{2}}{2\pi} + \frac{\sqrt{9\pi^2+12\pi+8}}{8\pi}\sin\left(x - \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3\pi+2}\right) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} c_n \sin(nx + \varphi_n),$$

ha $x \neq \frac{\pi}{4} + 2m\pi$ $(m = 0;\pm 1;\pm 2;\ldots)$, ahol

$$c_n = \frac{\sqrt{3 + n^2 + 2\sqrt{2}(-1)^n\left(n\sin\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{n\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}\,\pi(n^2-1)} \quad \text{és}$$

$$\varphi_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}(-1)^n + n\sin\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{n\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4} - n\cos\frac{n\pi}{4}}.$$

c) $f(x) = \frac{9}{4\pi} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\cos\pi x + \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\right)\sin\pi x +$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n\cos n\pi x + b_n\sin n\pi x\right),$$

ha $x \neq \frac{1}{3} + 2m$ $(m = 0;\pm1;\pm2;\ldots)$, ahol

$$a_n = -\frac{3\left(2(-1)^n + \mu_2 + n\sqrt{3}\mu_1\right)}{2\pi(n^2-1)} \quad \text{és} \quad b_n = -\frac{3(\mu_1 - n\mu_2)}{2\pi(n^2-1)}.$$

A függvény Fourier-sorának másik alakja:

$$f(x) = \frac{9}{4\pi} + \frac{\sqrt{39 + 64\pi^2 + 48\sqrt{3}\pi}}{8\pi}\sin\left(\pi x - \operatorname{arctg}\frac{16\sqrt{3}\pi - 18}{64\pi^2 - 27}\right) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} c_n\sin\left(n\pi x + \varphi_n\right),$$

ha $x \neq \frac{1}{3} + 2m$ $(m = 0;\pm1;\pm2;\ldots)$, ahol

$$c_n = \frac{3\sqrt{5 + n^2(2-\mu_4) + n\left(\sqrt{3}-1\right)\mu_3 + 2(-1)^n\left(n2\sqrt{3}\mu_1 - \mu_2\right)}}{2\pi\left(n^2-1\right)},$$

$$\varphi_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{3\left(2(-1)^n + n\sqrt{3}\mu_1 + \mu_2\right)}{\mu_1 - n\mu_2}.$$

A Fourier-együtthatókat és az eltolási szöget meghatározó kifejezésekben használt jelölések:

$$\mu_1 = \sin\frac{n\pi}{3},\ \mu_2 = \cos\frac{n\pi}{3},\ \mu_3 = \sin\frac{2n\pi}{3} \text{ és } \mu_4 = \cos\frac{2n\pi}{3}.$$

11.3.8.

a) A grafikonnal megadott függvény esetében elsőként a függvény képletét kell felírni. Mivel a grafikon szakaszokból áll, ezért egy-egy egyenes egyenletét határozzuk meg, figyelemmel a folytonosságra, a szakaszok végpontjában.

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & \text{ha} \quad -\pi < x \le 0, \\ -\pi, & \text{ha} \quad 0 < x \le \pi, \end{cases} \text{ és } f(x) = f(x + 2\pi),$$

ahol 2π a függvény periódusa. A függvény nem páros, nem páratlan.

A Fourier-együtthatókat a két intervallumon vett integrálok összegeként kell kiszámítani:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\,dx + \int_{0}^{\pi}(-\pi)\,dx\right) = -\frac{\pi}{4},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi}(-\pi)\cos nx\,dx\right) = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi}(-\pi)\sin nx\,dx\right) = \frac{(-1)^n - 2}{n}.$$

(A két utóbbi Fourier-együttható esetében, az első integrál értékét a parciális integrálás módszerével számítottuk ki, és a tömörség céljából, a $\cos n\pi = (-1)^n$ azonosságot alkalmaztuk az együtthatók megadásában.)

A kiszámított együtthatókkal, a függvény Fourier-sora:

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx + \frac{(-1)^n - 2}{n}\sin nx\right),$$

ha $x \neq m\pi$ $(m = 0;\pm1;\pm2;\ldots)$.

b) A függvény:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{3}x, & \text{ha} \quad 0<x\le 3,\\ 8-\dfrac{4}{3}x, & \text{ha} \quad 3<x\le 6,\end{cases} \qquad \text{és } f(x)=f(x+6).$$

A Fourier-együtthatók kiszámítása:

$$a_0=\frac{1}{6}\left(\int_0^3\frac{4}{3}x\,dx+\int_3^6\left(8-\frac{4}{3}x\right)dx\right)=2.$$

$$a_n=\frac{1}{3}\left(\int_0^3\frac{4}{3}x\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_3^6\left(8-\frac{4}{3}x\right)\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right)=\frac{8\left((-1)^n-1\right)}{(n\pi)^2}.$$

$b_n=0$, mert a függvény páros.

A függvény Fourier-sora: $f(x)=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\left((-1)^n-1\right)}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{3}$.

c) A függvény:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x, & \text{ha} \quad 0<x\le 2,\\ 0, & \text{ha} \quad 2<x\le 4,\end{cases} \qquad \text{és } f(x)=f(x+4).$$

A megadott függvény Fourier-sora:

$$f(x)=\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\left((-1)^n-1\right)}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{3(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right),$$

ha $x\neq\pm2;\pm6;\pm10;\ldots$.

d) A függvény:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{7}{\pi}x, & \text{ha} \quad 0<x\le\pi,\\ 7, & \text{ha} \quad \pi<x\le 2\pi,\\ 21-\dfrac{7}{\pi}x, & \text{ha} \quad 2\pi<x\le 3\pi,\\ 0, & \text{ha} \quad 3\pi<x\le 4\pi,\end{cases} \qquad \text{és } f(x)=f(x+4\pi)$$

A Fourier-együtthatókat a három intervallumon vett integrálok összegeként számítjuk ki:

$$a_0 = \frac{1}{4\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{7}{\pi}x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi}7\,dx + \int_{2\pi}^{3\pi}\left(21-\frac{7}{\pi}x\right)dx\right)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{7}{\pi}x\cos\frac{nx}{2}dx + \int_{\pi}^{2\pi}7\cos\frac{nx}{2}dx + \int_{2\pi}^{3\pi}\left(21-\frac{7}{\pi}x\right)\cos\frac{nx}{2}dx\right)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{7}{\pi}x\sin\frac{nx}{2}dx + \int_{\pi}^{2\pi}7\sin\frac{nx}{2}dx + \int_{2\pi}^{3\pi}\left(21-\frac{7}{\pi}x\right)\sin\frac{nx}{2}dx\right).$$

A Fourier-együtthatók:

$$a_0 = \frac{7}{2},\ a_n = \frac{14\left((-1)^n-1\right)}{(n\pi)^2} \text{ és } b_n = \frac{28(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

A megadott függvény Fourier-sora tehát:

$$f(x) = \frac{7}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{14\left((-1)^n-1\right)}{(n\pi)^2}\cos\frac{nx}{2} + \frac{28(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{nx}{2}\right).$$

12. LINEÁRIS PROGRAMOZÁS

12.1. Lineáris egyenlőtlenségek grafikus megoldása

12.1.1. A feladatok grafikus megoldását a 12.1. ábrán mutatjuk be. Részletes magyarázatot az a) feladatnál adunk.

a) 1. lépés: Ábrázoljuk az $x_1 + x_2 = 12$ egyenlet megoldását adó egyenest. Például az origó segítségével kiválasztjuk az első egyenlőtlenség megoldását adó félsíkot: $0 + 0 \leq 12$, ezért ez az origót tartalmazó félsík és az egyenes pontjai.

2. lépés: A második egyenlőtlenség megoldását az $x_1 = 2$ és $x_1 = 8$ egyenesek között „sáv" adja.

3. lépés: A harmadik egyenlőtlenség megoldását az $x_2 = 3$ és $x_2 = 8$ egyenesek közötti „sáv" adja.

4. lépés: A fenti rész-megoldáshalmazok közös része adja az egyenlőtlenségrendszer megoldását, amelyet a határoló szakaszok megvastagításával jelöltünk ki az ábrán.

5. lépés: A csúcspontok leolvashatók az ábráról, illetve a két egyenes egyenlete segítségével határozzuk meg.

12.2. A lineáris programozás alapfeladata

12.2.1.

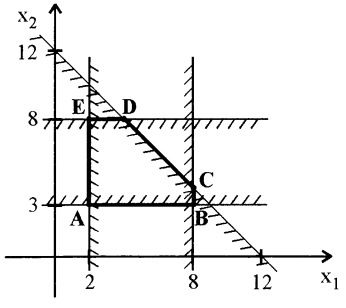
a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq 6, \\ -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &\leq -1, \\ -x_2 + x_3 &\leq 3, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0, \\ (2x_1 - 3x_2 + x_3) &\to \max. \end{aligned}$$

b)

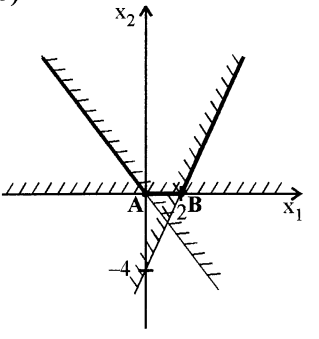
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &\leq 10, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &\leq -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &\leq 2, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &\leq -2, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0, \\ (3x_1 - x_2 + 4x_3) &\to \max. \end{aligned}$$

a)



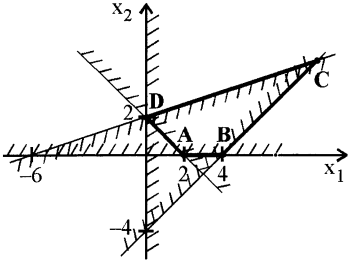
Csúcspontok: A(2;3), B(8;3), C(8;4), D(4;8), E(2;8)

b)



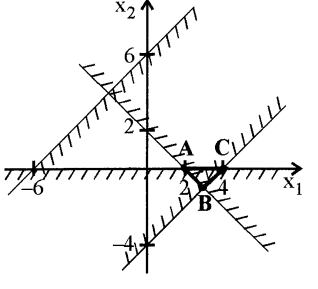
Csúcspontok: A(0;0), B(2;0)

c)



Csúcspontok: A(2;0), B(4;0), C(9;5), D(0;2)

d)



Csúcspontok: A(2;0), B(3;–1), C(4;0)

12.1. ábra

12.2.2. Jelölje x_i az A_i termékből gyártandó mennyiséget, i=1,2,3,4!
Fogalmazzuk meg jelöléseinkkel a feltételeket!
A feladat matematikai modellje:

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 100,$$
$$3x_2 + 2x_3 + x_4 = 120,$$
$$2x_1 + 4x_4 \le 80,$$
$$x_1 - x_2 - x_3 \ge 0,$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0,$$
$$(15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 17x_4) \to \max.$$

12.3. Kétváltozós lineáris programozási feladat grafikus megoldása

12.3.1.

a) 1. lépés: A feltételrendszer L megoldáshalmazát a 12.1.1. a) feladat megoldásában ismertetett módon kapjuk meg. Az L halmaz azon pontjait keressük, amelyekben a célfüggvény maximális, illetve minimális értéket vesz fel.

2. lépés: Ábrázoljuk az $x_1 + x_2 = k$ egyenest olyan k értékkel, hogy az egyenesnek és az L halmaznak legyen közös pontja! Válasszuk például a $k = 4$ értéket! Az egyenest szaggatott vonallal rajzoljuk meg. Az egyenest egyik irányba önmagával párhuzamosan eltolva k érték nő, míg a másik irányba tolva csökken.

3. lépés: $z = x_1 + x_2 > 4$ esetén kaphatunk maximális értéket. Ezt a félsíkot kiválasztjuk és az egyenest eltoljuk az L halmaz ezen félsíkbeli legtávolabbi pontjáig. Látható, hogy bármely távolságnál még messzebb is eltolható az egyenes úgy, hogy van közös pontja az L halmazzal. A célfüggvény nem korlátos az L halmazon. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a feladatnak nincs optimális megoldása.

4. lépés: $z = x_1 + x_2 < 4$ esetén kaphatunk minimális értéket, ekkor az egyenest a másik irányba kell tolni. Az L halmaz ezen félsíkbeli legtávolabbi pontja a P csúcspont. A feladat egyetlen optimális megoldását tehát a P pont adja, amely koordinátái leolvashatók az ábráról: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Az optimális célfüggvényérték: $z_{min} = 2$. (12.2. a. ábra)

b) A z_1 célfüggvény esetén a feladat optimális megoldását a P_1 pont adja: $x_1 = \frac{70}{11}$, $x_2 = \frac{24}{11}$, $z_{1\max} = \frac{116}{11}$.

A z_2 célfüggvény esetén végtelen sok optimális megoldás van: a $P_1\left(\frac{70}{11}; \frac{24}{11}\right)$ és $P_2(2; 0)$ pontokat összekötő szakasz pontjai, $z_{2min} = -6$. (12.2. b. ábra)

c) A z_1 célfüggvény esetén nincs optimális megoldás az L halmazon, z_2 célfüggvény esetén az optimális megoldást a $P\left(\frac{5}{3};\frac{16}{3}\right)$ pontból induló, L-et határoló félegyenes pontjai adják, $z_{2\min} = -40$. (12.2. c. ábra)

d) A z_1 célfüggvény esetén a feladat optimális megoldását a P_1 pont adja: $x_1 = \frac{14}{3}$, $x_2 = \frac{4}{3}$, $z_{1\max} = \frac{82}{3}$.
A z_2 célfüggvény esetén az optimális megoldást a P_2 pont adja: $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{14}{3}$, $z_{2\min} = -\frac{50}{3}$. (12.2. d. ábra)

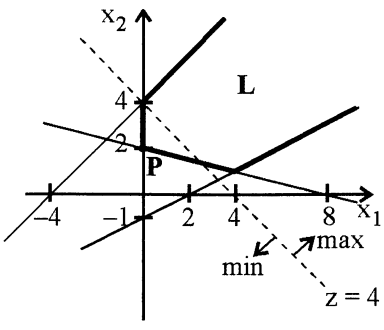
e) A z_1 célfüggvény esetén a feladat optimális megoldását a P_1 pont adja: $x_1 = 12$, $x_2 = 7$, $z_{1\max} = 201$.
A z_2 célfüggvény esetén végtelen sok optimális megoldás van: a $P_2(2; 0)$, $P_3\left(\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right)$ pontokat összekötő szakasz pontjai, $z_{2\min} = 12$. (12.2. e. ábra)

f) A z_1 célfüggvény esetén végtelen sok optimális megoldás van: a $P_1(0; 1)$, $P_2(3; 0)$ pontokat összekötő szakasz pontjai, $z_{1\max} = -6$.
A z_2 célfüggvény esetén az optimális megoldást a P_3 pont adja: $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $z_{2\min} = -25$. (12.2. f. ábra)

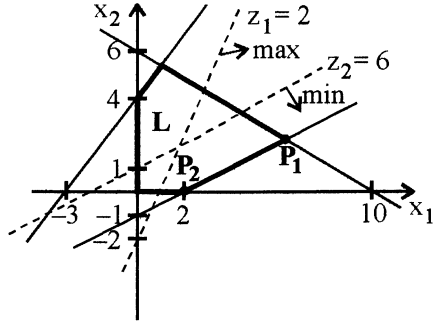
g) A z_1 célfüggvény esetén a feladat optimális megoldását a P pont adja: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $z_{1\min} = 6$.
A z_2 célfüggvény esetén nincs optimális megoldás az L halmazon. (12.2. g. ábra)

h) A z_1 célfüggvény esetén végtelen sok optimális megoldás van: a $P_1(1; 3)$, $P_2(2; 2)$ pontokat összekötő szakasz pontjai, $z_{1\min} = 12$.
A z_2 célfüggvény esetén az optimális megoldást a P_3 pont adja: $x_1 = 1$, $x_2 = 6$, $z_{2\max} = 8$. (12.2. h. ábra)

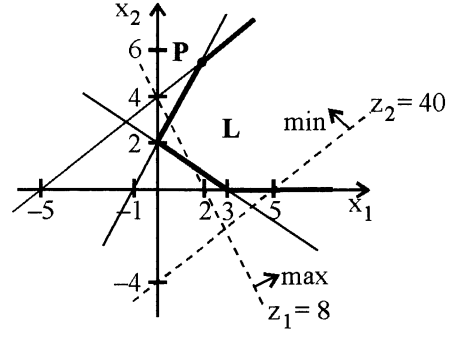
a)


x2
x1
L
P
4
2
–4
–1
2
4
8
max
min
z = 4

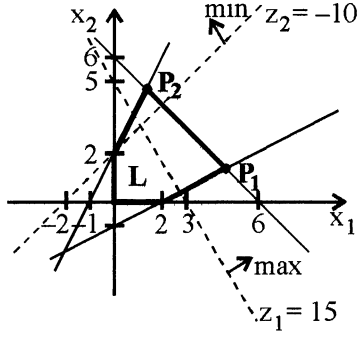
b)


x2
x1
z1 = 2
max
z2 = 6
min
L
P2
P1
6
4
1
–3
–1
2
10
–2

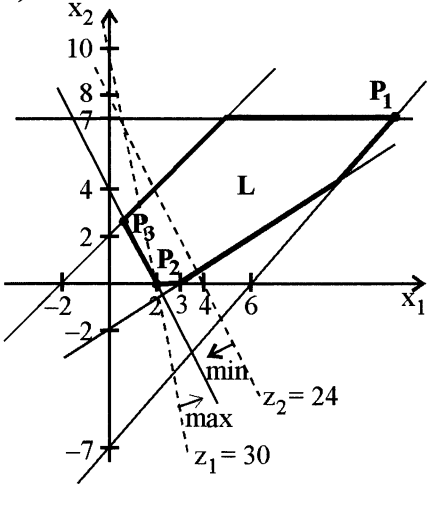
c)


x2
x1
P
L
min
z2 = 40
6
4
2
–5
–1
2
3
5
–4
max
z1 = 8

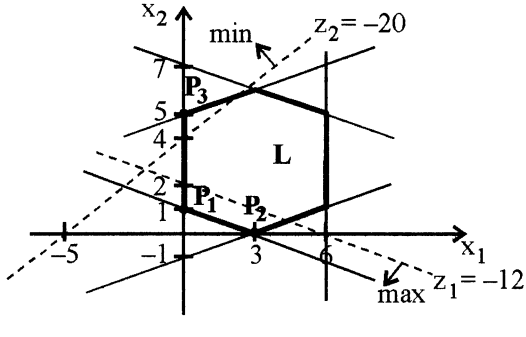
d)


x2
x1
min
z2 = –10
P2
P1
L
6
5
2
–2
–1
2
3
6
max
z1 = 15

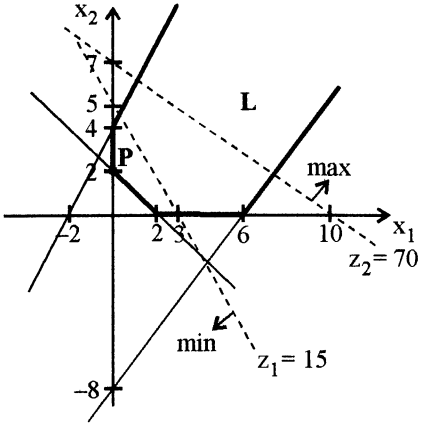
e)


x2
x1
P1
L
P3
P2
10
8
7
4
2
–2
2
3
4
6
–2
min
z2 = 24
max
–7
z1 = 30

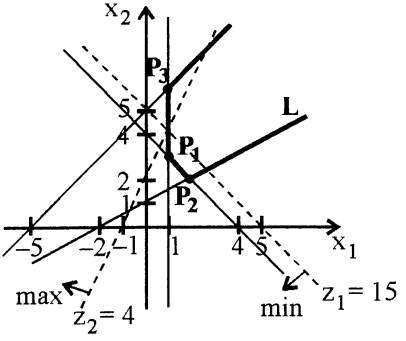
f)


x2
x1
min
z2 = –20
P3
L
P1
P2
7
5
4
2
1
–5
–1
3
6
max
z1 = –12

g)



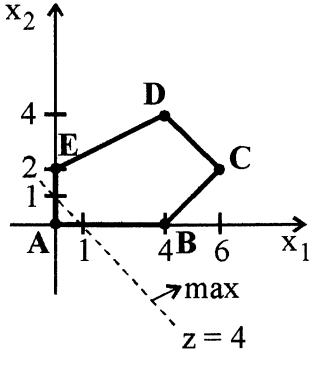
h)



12.2. ábra

12.3.2.

$$-x_1 + 2x_2 \le 4,$$
$$x_1 + x_2 \le 8,$$
$$x_1 - x_2 \le 4,$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0,$$
$$z = (4x_1 + 4x_2) \to \max.$$



A feladatnak végtelen sok optimális megoldása van, a C(6; 2) és D(4; 4) pontok által meghatározott szakasz pontjai, $z_{max} = 32$.

12.3.3. Jelölje:

x_1: A bánya üzemeltetési ideje (óra)

x_2: B bánya üzemeltetési ideje (óra)

A feladat matematikai modellje:

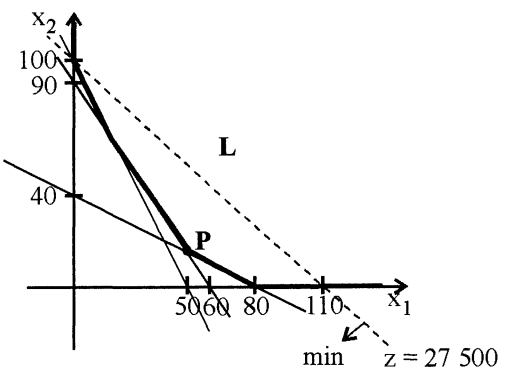
$$2x_1 + x_2 \geq 100,$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 180,$$

$$3x_1 + 6x_2 \geq 240,$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0,$$

$$z = (250x_1 + 275x_2) \rightarrow \min .$$



A költség minimális lesz, ha az A bányát 50 óra, a B bányát 15 óra hosszat üzemeltetik.

13. VEKTORANALÍZIS

13.1. Vektor-skalár függvények

13.1.1.

a) Egy vektor-skalár függvény deriváltja, a koordinátafüggvények deriváltjaival, mint koordinátafüggvényekkel meghatározott, vektor-skalár függvény. A megadott függvény deriváltja:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (\sin t + t\cos t)\mathbf{i} + (\cos t - t\sin t)\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathbf{k}.$$

b) $\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{4t}{1-t^4}\mathbf{i} + (3^t \ln 3 + 1)\mathbf{j} + \frac{1}{t\ln 2}\mathbf{k}.$

c) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (3t^2 - 3)\mathbf{i} + \frac{1}{\cos^2 t}\mathbf{j} + \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\mathbf{k}.$

d) A szorzat deriválási szabályát alkalmazva, az

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = -\frac{1}{\operatorname{th}^2 t}\,\frac{1}{\operatorname{eh}^2 t}\left((\operatorname{sh} 2t)\mathbf{i} + (\operatorname{ch} 2t)\mathbf{j} + (\operatorname{cth} t)\mathbf{k}\right) +$$
$$+ \frac{1}{\operatorname{th} t}\left((2\operatorname{ch} 2t)\mathbf{i} + (2\operatorname{sh} 2t)\mathbf{j} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 t}\mathbf{k}\right)$$

vektor-skalár függvény adódik. Azonos átalakítás után,

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{4\operatorname{ch} 2t \operatorname{ch} t - 2\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}\mathbf{i} + \frac{\operatorname{ch} 4t - 2\operatorname{ch} 2t}{\operatorname{ch} 2t - 1}\mathbf{j} - \frac{4\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} 2t - 1}\mathbf{k}.$$

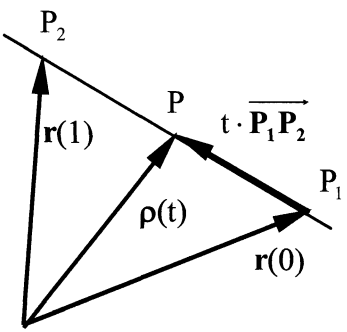
e) $\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{2t}{1+\left(1+t^2\right)^2}\mathbf{i} + (2te^t + t^2e^t)\mathbf{j} + \frac{3t^2+2}{\sqrt{t^3+2t}}\mathbf{k}.$

f) $\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{2t-1}{2\sqrt{t^2-t}}\left(\left(t^2 - \sqrt[4]{t}\right)\mathbf{i} + \left(t^3 - \sqrt[3]{t}\right)\mathbf{j} + \left(t^2 - \sqrt{t}\right)\mathbf{k}\right) +$

$$+\sqrt{t^2-t}\left(\left(2t-\frac{1}{4\sqrt[4]{t^3}}\right)\mathbf{i}+\left(3t^2-\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\right)\mathbf{j}+\left(2t-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\mathbf{k}\right).$$

13.1.2.

a) Az $\mathbf{r}(0)=\mathbf{j}$ a $P_1(0;1;0)$, az $\mathbf{r}(1)=\mathbf{i}+\mathbf{k}$ pedig a $P_2(1;0;1)$ pont helyvektora. A P_1 és P_2 pontokat összekötő szakasz egyenesének irányvektora legyen a $\overrightarrow{P_1P_2}=\mathbf{r}(1)-\mathbf{r}(0)=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ vektor.



Ekkor, – amint azt az ábra mutatja, – a P_1P_2 szakasz bármelyik pontjának $\rho(t)$ helyvektora megadható $\rho(t)=\mathbf{r}(0)+t\cdot\overrightarrow{P_1P_2}$ alakban, ahol $0\le t\le 1$.

A szakasz paraméteres egyenletrendszere tehát:

$$\left.\begin{aligned}x&=t\\y&=1-t\\z&=t\end{aligned}\right\},\ \text{ahol } 0\le t\le 1.$$

A két pont távolsága, az irányvektor hossza: $|\mathbf{r}(1)-\mathbf{r}(0)|=\sqrt{3}$.

b)

$$\left.\begin{aligned}x&=1+t\\y&=-3+t\\z&=2t\end{aligned}\right\},\ \text{ahol } 0\le t\le 1 \text{ és } |\mathbf{r}(1)-\mathbf{r}(0)|=\sqrt{6}.$$

c)

$$\left.\begin{aligned}x&=t\\y&=1-t\\z&=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\end{aligned}\right\},\ \text{ahol } 0\le t\le 1 \text{ és } |\mathbf{r}(t_2)-\mathbf{r}(t_1)|=\frac{\sqrt{8+\pi^2}}{2}.$$

d)

$$\left.\begin{aligned} x &= (\ln 2)t \\ y &= \frac{\pi}{4}t \\ z &= -1+t \end{aligned}\right\}, \text{ ahol } 0 \le t \le 1 \text{ és } |\mathbf{r}(1)-\mathbf{r}(0)| = \frac{\sqrt{(\ln 16)^2+\pi^2+16}}{4}.$$

13.1.3.

a) Az érintő irányvektora az $\dot{\mathbf{r}}(t) = 3t^2\mathbf{i} + (2t-3)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ deriváltfüggvény értéke a $t_0 = 2$ helyen. Ezért az irányvektor: $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(2) = 12\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Az érintési pont helyvektora $\mathbf{r}(2) = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Az érintő paraméteres egyenletrendszere:

$x = -3 + 12t$, $y = -2 + t$, $z = 4 + 2t$.

b) $\mathbf{r}(2) = e^2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ és $\dot{\mathbf{r}}(2) = -e^2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, így az érintő paraméteres egyenletrendszere:

$x = e^2 - e^2 t$, $y = 1$, $z = 2t$.

c) $x = \dfrac{2e^2}{e^2+1} + \dfrac{4e^2}{(e^2+1)^2}t$, $y = \dfrac{2e^2}{e^2-1} - \dfrac{4e^2}{(e^2-1)^2}t$, $z = \dfrac{1}{\ln 2}t$.

d) $x = \dfrac{\ln 2}{2} + t$, $y = -\dfrac{\pi^2 \ln 2}{32} - \dfrac{\pi \ln 16 - \pi^2}{16}t$, $z = \dfrac{\pi}{4} + t$.

13.1.4.

a) A vektor-skalár függvény deriváltja: $\dot{\mathbf{r}}(t) = 5t^4\mathbf{i} + \sqrt{10}t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

A derivált abszolút értéke: $|\mathbf{r}(t)| = \sqrt{25t^8 + 10t^4 + 1} = 5t^4 + 1$,

mert a négyzetgyökjel alatt teljes négyzet áll. Tehát a térgörbe ívhossza:

$$s = \int_1^2 (5t^4 + 1)\,dt = \left[t^5 + t\right]_1^2 = (2^5 + 2) - (1 + 1) = 32.$$

b) A megadott függvény deriváltja: $\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{3}{t}\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

A derivált abszolút értéke: $|\mathbf{r}(t)| = \sqrt{\frac{9}{t^2} + 36t^2 + 36} = 3\left(2t + \frac{1}{t}\right)$,

mert a négyzetgyökjel alatt teljes négyzet áll. Tehát a térgörbe ívhossza:

$$s = \int_{\sqrt{e}}^{e} 3\left(2t + \frac{1}{t}\right)dt = \left[3t^2 + 3\ln t\right]_{\sqrt{e}}^{e} = \frac{3(2e^2 - 2e + 1)}{2}.$$

c) A derivált függvény: $\dot{\mathbf{r}}(t) = -3\sin t\mathbf{i} + 3\cos t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, ennek abszolút értéke pedig $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = 3\sqrt{2}$. A térgörbe ívhossza:

$$s = \int_{0}^{\pi} 3\sqrt{2}\,dt = 3\sqrt{2}\,\pi.$$

d) $s = \frac{\sqrt{3}}{\ln 8}$.

e) $s = \frac{2e-3}{2}$.

f) $s = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{2\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,2t}{\mathrm{sh}^2\,2t}dt = \left[-\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{sh}\,2t}\right]_{\ln 2}^{\ln 4} = \left[-\frac{2\sqrt{2}\,e^{2t}}{e^{4t}-1}\right]_{\ln 2}^{\ln 4} = \frac{104\cdot\sqrt{2}}{255}$.

g) $\dot{\mathbf{r}}(t)$ kiszámítása előtt célszerű az $\frac{e^t}{e^{2t}+1} = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,t}$ azonosságot alkalmazni! Az ívhossz: $s = \frac{\sqrt{2}\pi}{12}$.

h) $s = \frac{1498}{15} + \ln\frac{16}{9}$.

i) $s = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

j) $s = \sqrt{3}$.

k) $s = 1 + \ln\frac{3}{2}$.

l) $s = \dfrac{e^6 - e^{-10}}{4}$.

13.1.5. A megadott függvény deriváltjának abszolút értéke:

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{\left(-\frac{t^2}{\left(1+t^3\right)^4}\right)^2 + \left(t^2\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}t^2}{\left(1+t^3\right)^2}\right)^2} = t^2 + \frac{t^2}{\left(1+t^3\right)^4}.$$

A P_1 és P_2 pontokat összekötő térgörbe ívhossza:

$$s = \int_0^1 \left(t^2 + \frac{t^2}{\left(1+t^3\right)^4}\right) dt = \frac{31}{72}.$$

A P_1 és P_2 pontok helyvektorai a függvény $t_1 = 0$ és $t_2 = 1$ helyen vett helyettesítési értékei:

$$P_1\left(\frac{1}{9};0;\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \text{ és } P_2\left(\frac{1}{72};\frac{1}{3};\frac{\sqrt{2}}{6}\right).$$

A pontok távolsága:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{\left(\frac{1}{72}-\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{913}}{72}.$$

Az ívhossz és a távolság aránya pedig $\dfrac{\dfrac{31}{72}}{\dfrac{\sqrt{913}}{72}} = \dfrac{31}{\sqrt{913}} \approx 1{,}026$.

13.1.6.

a) A vektor-skalár függvény deriváltjának abszolút értéke:

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{\left(e^t\right)^2 + \left(2e^{2t}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{8e^{2t}+1}{4}.$$

Ennek a primitív függvénye:

$$\int \frac{8e^{2t}+1}{4} dt = e^{2t} + \frac{t}{4} + C.$$

Ha $-1 \le t \le 0$, akkor az ívhossz $s_1 = \int_{-1}^{0} |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,dt = \frac{5}{4} - \frac{1}{e^2}$.

$0 \le t \le 1$ esetén pedig $s_2 = \int_{0}^{1} |\dot{\mathbf{r}}(t)| = e^2 - \frac{3}{4}$.

Az ívhosszak aránya: $\frac{s_1}{s_2} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{e^2}}{e^2 - \frac{3}{4}} = \frac{5e^2 - 4}{4e^4 - 3e^2} \approx 1{,}4862$.

b) $\frac{s_1}{s_2} = \frac{1}{43} \approx 2{,}326 \cdot 10^{-2}$. **c)** $\frac{s_1}{s_2} = \frac{1}{2}$.

d) Az egyes koordinátafüggvények deriváltját és azok négyzetét célszerű külön-külön kiszámítani. Így az

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}\arcsin t} + 4t^2 \arcsin t,$$

amely összegként, az integrálás szempontjából könnyen áttekinthető. Kiszámítva a két görbedarab ívhosszát, arányuk

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{36\ln\frac{3}{2} + \pi\left(3\sqrt{2}-1\right) - 2\left(9\sqrt{3}-10\sqrt{2}\right)}{36\ln\frac{4}{3} + 3\pi\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) - 2\left(10\sqrt{2}-11\right)} \approx 0{,}5341.$$

13.1.7. A csavarvonal egy teljes körülfordulásának ívhossza:

$$s_{cs} = \int_{0}^{2\pi} |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,dt = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2 + \lambda^2}\,dt = 2\pi\sqrt{r^2+\lambda^2}.$$

A henger alapkörének kerülete $s_k = 2\pi r$.

A csavarvonal hosszának az alapkör kerületéhez viszonyított aránya tehát $\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{r^2}}$.

13.1.8. A huzal középvonala az egyes rétegekben $r_1 = 40{,}7$ mm, $r_2 = 42{,}3$ mm és $r_3 = 43{,}9$ mm sugáron helyezkedik el. A menetemelkedés mindhárom rétegben a huzal átmérője, azaz $\lambda = 1{,}4$ mm. Mindhárom rétegben 100-100 menet van. Használjuk az előző feladat egyik részeredményét, a sugár és a menetemelkedés függvényében, a csavarvonal hosszára kapott összefüggést! Ezzel a szükséges huzal hossza:

$$L = 200\pi\left(\sqrt{r_1^2+\lambda^2}+\sqrt{r_2^2+\lambda^2}+\sqrt{r_3^2+\lambda^2}\right)+240 =$$

$$= 80033{,}43 \text{ mm} \approx 80{,}03 \text{ m}.$$

13.2. Skalár-vektor függvények

13.2.1.

a) A kétváltozós, valós függvény teljes differenciálja:

$$df(x;y) = f'_x(x;y)\,dx + f'_y(x;y)\,dy.$$

A parciális deriváltak:

$$f'_x(x;y) = -y\sin xy \text{ és } f'_y(x;y) = -x\sin xy.$$

A megadott függvény teljes differenciálja:

$$df(x;y) = -y\cdot(\sin xy)dx - x(\sin xy)dy.$$

b) A parciális deriváltak:

$$f'_x(x;y) = \frac{2(x-y)}{(x-y)^2\ln 2} \text{ és } f'_y(x;y) = \frac{2(x-y)(-1)}{(x-y)^2\ln 2}.$$

Egyszerűsítés után, a teljes differenciál:

$$df(x;y) = \frac{2}{(x-y)\ln 2}dx + \frac{2}{(y-x)\ln 2}dy.$$

c) $$df(x;y) = \frac{y(x^2-y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2+x^2y^2}dx + \frac{x(y^2-x^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2+x^2y^2}dy.$$

d) $$df(x;y) = -\frac{2x\,\mathrm{ch}(1-x^2)}{\mathrm{ch}(1-y^2)}dx + \frac{2y\,\mathrm{sh}(1-x^2)\,\mathrm{sh}(1-y^2)}{\mathrm{ch}^2(1-y^2)}dy.$$

e) $df(x;y) = y3^{(x-1)y}(\ln 3)dx + (x-1)3^{(x-1)y}(\ln 3)dy$.

f) $df(x;y) = (x+3)(2x-1)(x^2-x)^{y+2}dx +$
$+(x^2-x)^{y+3}\left(\ln(x^2-x)\right)dy$.

13.2.2.

a) A kétváltozós, valós függvény iránymenti deriváltja:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = f'_x(x;y)\cos\alpha + f'_y(x;y)\sin\alpha .$$

A parciális deriváltak:

$f'_x(x;y) = 2x\cos(x^2+y^3)$ és $f'_y(x;y) = 3y^2\cos(x^2+y^3)$.

A megadott függvény iránymenti deriváltja:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 2x\left(\cos(x^2+y^3)\right)\cos\alpha + 3y^2\left(\cos(x^2+y^3)\right)\sin\alpha .$$

b) A parciális deriváltak:

$f'_x(x;y) = 2^{x^2(1-y^2)}(\ln 2)2x(1-y^2)$ és

$f'_y(x;y) = 2^{x^2(1-y^2)}(\ln 2)x^2(-2y)$.

A parciális deriváltakból

$2^{x^2(1-y^2)}(\ln 2)\,x\,2 = x(\ln 2)2^{1+x^2(1-y^2)}$

kiemelhető. Így az iránymenti derivált:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 2^{1+x^2(1-y^2)}\,x(\ln 2)\left((1-y^2)\cos\alpha - xy\sin\alpha\right).$$

c) A kiszámított parciális deriváltak egyszerűsítése és kiemelés után, az iránymenti derivált:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{1}{(x+y)\sqrt{2xy+y^2}}(-y\cos\alpha + x\sin\alpha) .$$

d) $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = \dfrac{e^{x-\sqrt{y}}}{tg^2\,x}(tg\,y)\left(tg\,x - \dfrac{1}{\cos^2 y}\right)\cos\alpha +$

$$+\frac{e^{x-\sqrt{y}}\left(4\sqrt{y}-\sin 2y\right)}{4\sqrt{y}\,\mathrm{tg}\,x\cos^2 y}\sin\alpha\,.$$

e) $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}=\dfrac{2e^{2x}-(1+y)e^{x(1-y)}}{\left(e^{y}-e^{-xy}\right)^2+e^{2x}}\cos\alpha-\dfrac{e^{x+y}+xe^{x(1-y)}}{\left(e^{y}-e^{-xy}\right)^2+e^{2x}}\sin\alpha\,.$

f) $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}=\left(\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}}{x}+\dfrac{\dfrac{y}{x^2}\ln\dfrac{y}{x}}{\cos^2\dfrac{y}{x}}\right)\cos\alpha-\left(\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}}{y}+\dfrac{\ln\dfrac{y}{x}}{x\cos^2\dfrac{y}{x}}\right)\sin\alpha\,.$

13.2.3.

a) A kétváltozós, valós függvény gradiense a $P_0(x_0;y_0)$ helyen:

$\mathrm{grad}\,f\big|_{P_0}=\left(f'_x(x_0;y_0);\,f'_y(x;_0;y_0)\right)$.

Az egyes parciális deriváltak és értékük a $P_0(-1;2)$ helyen:

$f'_x(x;y)=2x+2y$ és $f'_y(x;y)=2x+2y$,

$f'_x(-1;2)=2$ és $f'_y(-1;2)=2$.

A megadott függvény gradiense a $P_0(-1;2)$ helyen:

$\mathrm{grad}\,f\big|_{P_0}=(2;2)$.

b) Az egyes parciális deriváltak és értékük a $P_0\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right)$ helyen:

$f'_x(x;y)=\dfrac{(\cos x+x\sin x)\sin y}{y\cos^2 x}$ és $f'_y(x;y)=\dfrac{x(y\cos y-\sin y)}{y^2\sin x}$,

$f'_x\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{18+\pi\sqrt{3}}{6\pi}$ és $f'_y\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi-3\sqrt{3}}{2\pi}$.

A megadott függvény gradiense a $P_0\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right)$ helyen:

$$\operatorname{grad} f\big|_{P_0} = \left(\frac{18+\pi\sqrt{3}}{6\pi}; \frac{\pi-3\sqrt{3}}{2\pi}\right).$$

c) $\operatorname{grad} f\big|_{P_0} = \left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

d) $\operatorname{grad} f\big|_{P_0} = (0;1)$.

e) $\operatorname{grad} f\big|_{P_0} = (1;0)$.

f) $\operatorname{grad} f\big|_{P_0} = \left(-\frac{3}{8\ln 2}; \frac{23}{16\ln 2}\right)$.

13.2.4.

a) Az egyenes meredeksége: $m = \frac{f'_y(x_0;y_0)}{f'_x(x_0;y_0)}$, ha $f'_x(x_0;y_0) \neq 0$.

A parciális deriváltak és értékük a $P_0(1;1)$ helyen:

$f'_x(x;y) = 2x$ és $f'_x(x_0;y_0) = 2$, $f'_y(x;y) = -2y$ és

$f'_y(x_0;y_0) = -2$.

Az egyenes meredeksége: $m = -1$.

b) $m = -\frac{\sqrt{3}}{8}$.

c) A parciális deriváltak kiszámítása előtt alkalmazzuk az

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, ha $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq 1$, $c \neq 1$,

azonosságot, így a megadott függvény felírható

$f(x;y) = \frac{x(\ln y)^2}{y(\ln x)^2}$, ha $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$, alakban.

Az egyenes meredeksége: $m = -1$.

13.2.5.

a) A kétváltozós, valós függvény iránymenti deriváltja a $P_0(x_0;y_0)$ helyen, egy α szöggel meghatározott irány esetén:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{P_0} = f'_x(x_0;y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0;y_0)\sin\alpha .$$

A megadott kétváltozós, valós függvény parciális deriváltjai és értékük a $P_0\left(1;\sqrt{2}\right)$ helyen:

$$f'_x(x;y) = \frac{\pi(y^2-x^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cos\frac{\pi x}{x^2+y^2},\ f'_x(x_0;y_0) = \frac{\pi}{50} \text{ és}$$

$$f'_y(x;y) = -\frac{2xy\pi}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cos\frac{\pi x}{x^2+y^2},\ f'_y(x_0;y_0) = \frac{\pi\sqrt{2}}{25}.$$

Az iránymenti derivált a $P_0\left(1;\sqrt{2}\right)$ helyen, $\alpha = 30°$ szög esetén:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{P_0} = \frac{\pi\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)}{100}.$$

b) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{P_0} = -\dfrac{11\sqrt{2}}{8\sqrt{3}}.$ **c)** $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{P_0} = \dfrac{1+2\sqrt{3}}{10} - \left(1-\sqrt{3}\right)\operatorname{sh} 4.$

13.2.6.

a) Ha $u = |\mathbf{v}|\cos\alpha$, $v = |\mathbf{v}|\sin\alpha$, – ahol $|\mathbf{v}| \neq 0$, – akkor $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ az egyik irányvektora a $P_0(x_0;y_0)$ ponton átmenő, α irányszögű egyenesnek. Ezért egy kétváltozós, valós függvény iránymenti deriváltja a P_0 pontban, a $\mathbf{v}$ vektor által meghatározott irány esetén:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{P_0} = f'_x(x_0;y_0)\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} + f'_y(x_0;y_0)\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

A megadott függvény iránymenti derivált értéke:

$$\left.\frac{\alpha f}{\partial \alpha}\right|_{P_0} = \frac{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right)}{4}.$$

b) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{P_0} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}.$ **c)** $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{P_0} = \dfrac{1+4e+\sqrt{3}(3+4e)}{8e}.$

13.2.7.

a) Egy megadott pontban, a kétváltozós, valós függvény iránymenti deriváltjának értéke, a pontbeli gradiensvektor irányában a legnagyobb:

$$\max_{0\le\alpha<2\pi}\left.\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right|_{P_0}=f'_x(x_0;y_0)\frac{f'_x(x_0;y_0)}{\sqrt{\left(f'_x(x_0;y_0)\right)^2+\left(f'_y(x_0;y_0)\right)}}+$$

$$+f'_y(x_0;y_0)\frac{f'_y(x_0;y_0)}{\sqrt{\left(f'_x(x_0;y_0)\right)^2+\left(f'_y(x_0;y_0)\right)}}=\left|\operatorname{grad} f\right|_{P_0}\Big|.$$

Az iránymenti derivált legnagyobb értéke: $\max\limits_{0\le\alpha<2\pi}\left.\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right|_{P_0}=\frac{5}{2}$.

b) $\max\limits_{0\le\alpha<2\pi}\left.\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right|_{P_0}=\sqrt{2}$.

c) $\max\limits_{0\le\alpha<2\pi}\left.\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right|_{P_0}=1$.

13.2.8.

a) Az $\mathbf{n}=-f'_x(x_0;y_0)\mathbf{i}-f'_y(x_0;y_0)\mathbf{j}+\mathbf{k}$ vektor merőleges a felületre, mégpedig a felületnek abban a $Q_0(x_0;y_0;z_0)$ pontjában, ahol $z_0=f(x_0;y_0)$.

Az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$x=x_0-f'_x(x_0;y_0)\cdot t$, $y=y_0-f'_y(x_0;y_0)\cdot t$, $z=z_0+t$.

A megadott függvény parciális deriváltjai és ezek értékei:

$f'_x(x;y)=x^2-2xy$, $f'_y(x;y)=2xy-x^2$ és

$f'_x(2;-1)=5$, $f'_y(2;-1)=-8$.

A függvény értéke $z_0=f(2;-1)=6$.

A kiszámított értékeket behelyettesítve, a megadott pontban, a felületre merőleges egyenes paraméteres egyenletrendszere tehát:

$x=2-5t$, $y=-1+8t$, $z=6+t$.

b) $x=2+\left(9\ln 3-12-\frac{1}{e}\right)t$, $y=3+\left(6+\frac{1}{e}-8\ln 2\right)t$, $z=\frac{1-e}{e}+t$.

c) A függvény és parciális deriváltjai értékének kiszámításához, a szögfüggvényekre vonatkozó azonosságokat alkalmazva, az adódik, hogy

$f(x;y)=\dfrac{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}$, ennek alapján $z_0=1$,

$f'_x(x;y)=\dfrac{2\cos 2y}{\cos(2x+2y)-1}$, ennek alapján $f'_x\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{4}\right)=0$,

$f'_y(x;y)=\dfrac{2\cos 2x}{\cos(2x+2y)-1}$, ennek alapján $f'_y\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{4}\right)=4-2\sqrt{3}$.

A megadott pontban, a felületre merőleges egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$x=\dfrac{\pi}{3},\ y=\dfrac{\pi}{4}+\left(2\sqrt{3}-4\right)t,\ z=1+t.$

d) $x=1+\dfrac{2e\left(2-(e^2-1)^2\right)}{(e^2+1)^2}t,\ y=-1+\dfrac{(e^2-1)^2-4e}{(e^2+1)^2}t,$

$z=\dfrac{1-2e-e^2}{e^2+1}+t.$

13.2.9.

a) Az $\mathbf{n}=-f'_x(x_0;y_0)\mathbf{i}-f'_y(x_0;y_0)\mathbf{j}+\mathbf{k}$ vektor normálvektora a felület $Q_0(x_0;y_0;z_0)$ pontbeli érintősíkjának. Az érintősík egyenlete:

$-f'_x(x_0;y_0)(x-x_0)-f'_y(x_0;y_0)(y-y_0)+(z-z_0)=0$.

A parciális derivált függvények és értékeik a megadott helyen:

$f'_x(x;y)=2x,\ f'_y(x;y)=-\dfrac{1}{1-y^2}$ és $f'_x(1;1)=2,\ f'_y(1;1)=-\dfrac{1}{2}$.

A függvény értéke pedig $z_0=f(1;1)=\dfrac{4-\pi}{4}$.

A kiszámított értékeket behelyettesítve, a megadott pontbeli érintősík egyenlete:

$-2(x-1)+\dfrac{1}{2}(y-1)+\left(z-\dfrac{4-\pi}{4}\right)=0$.

Azonos átalakítás után:
$8x-2y-4z=2+\pi$.

b) $\frac{\pi+2\sqrt{3}}{6}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi+2\sqrt{3}}{6}(y-1)+\left(z-\frac{\pi}{12}\right)=0$.

Azonos átalakítás után:
$\left(\pi+2\sqrt{3}\right)x-\left(\pi+2\sqrt{3}\right)y+6z=\sqrt{3}$.

c) $4(5-7\ln 2)x-3(7-5\ln 3)y+49z=54+15\ln 3-56\ln 2$.

d) A parciális deriváltak kiszámítása előtt elvégezve a kivonást, az

$$f(x;y)=\frac{2x^y y^x}{y^{2x}-x^{2y}}-1$$

alak adódik. Kiszámítva a szükséges adatokat, az érintősík egyenlete:
$20(2-\ln 2)x-10y-9z=17-20\ln 2$.

e) $-6\sqrt{3}x+9\sqrt{3}(\ln 3)y+4z=6\sqrt{3}(1+3\ln 3)$.

f) A logaritmus azonosságának alkalmazásával, a parciális deriválás előtt, célszerű a függvényt az
$f(x;y)=\ln(\pi-y)-\ln\cos(x+y)$
alakban felírni.
Az érintősík egyenlete:

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{18-5\pi\sqrt{3}}{15\pi}\left(y-\frac{\pi}{6}\right)+\left(z-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0.$$

13.2.10.

a) A $\left.\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right|_{P_0}=f'_x(x_0;y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0;y_0)\sin\alpha$ iránymenti derivált minden, tetszőleges szög esetén akkor és csak akkor nulla, ha van olyan x_0, y_0, hogy $f'_x(x_0;y_0)=0$ és $f'_y(x_0;y_0)=0$. Meg kell oldani tehát a

$2x-4=0$

$8y+8=0$

egyenletrendszert. A megoldás $x_0=2$, $y_0=-1$, tehát $P_0(2;-1)$.

Mivel $f'_x(x_0;y_0)=0$ és $f'_y(x_0;y_0)=0$, ezért az érintősík normálvektora $\mathbf{n}=\mathbf{k}$.. Mivel $z_0=1$, ezért az érintősík egyenlete: $z-1=0$.

b) $P_0(-1;1)$ és $z-3=0$. **c)** $P_0(0;-1)$ és $z-4=0$.

d) $P_0(-2;-3)$ és $z-2=0$.

13.2.11.

a) A skalár-vektor függvény teljes differenciálja:

$$du(x;y;z)=\frac{\partial}{\partial x}u(x;y;z)\,dx+\frac{\partial}{\partial y}u(x;y;z)\,dy+\frac{\partial}{\partial z}u(x;y;z)\,dz.$$

A megadott függvény parciális deriváltjai:

$\frac{\partial}{\partial x}u(x;y;z)=yz\operatorname{ch}xyz$, $\frac{\partial}{\partial y}u(x;y;z)=xz\operatorname{ch}xyz$ és

$\frac{\partial}{\partial z}u(x;y;z)=xy\operatorname{ch}xyz$.

A feladatbeli függvény teljes differenciálja:

$du(x;y;z)=yz(\operatorname{ch}xyz)dx+xz(\operatorname{ch}xyz)dy+xy(\operatorname{ch}xyz)dz$.

b) $du(x;y;z)=\dfrac{y+z}{x(x+y+z)}dx+\dfrac{x+z}{y(x+y+z)}dy+\dfrac{x+y}{z(x+y+z)}dz$.

c) $du(x;y;z)=2^{x+y+z}(\ln 2)(dx+dy+dz)$.

d) A parciális deriválás után, az egyes összeadandókból a

$$k(x;y;z) = -\frac{\dfrac{\ln(x^2+yz)}{1+(xyz)^2} + \dfrac{\operatorname{arcctg} xyz}{x^2+yz}}{\left(\ln(x^2yz)\right)^2}$$

közös szorzótényező kiemelhető. Ennek kiemelése után, a teljes differenciál:

$$du(x;y;z) = k(x;y;z)\left((2x+yz)dx + (z+xz)dy + (y+xy)dz\right).$$

e) A közös szorzótényezőt kiemelve, a teljes differenciál:

$$du(x;y;z) = -\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}(xdx + ydy + zdz).$$

f) $$du(x;y;z) = \frac{1+\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(xdx + ydy + zdz).$$

13.2.12.

a) A Hamilton-operátorral való szorzás során, a „vektor szorzása valós számmal" módjára járunk el: a megfelelő koordináták szorzatainak összegét képezzük, ahol az összeadandó szorzatok a vektor-skalár függvény egyes parciális deriváltjai lesznek.

$$\nabla u(\mathbf{r}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x+z)(1+y)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(x+z)(1+y)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(x+z)(1+y)\mathbf{k}$$

$$\nabla u(x;y;z) = (1+y)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (1+y)\mathbf{k}.$$

b) $$\nabla u(x;y;z) = (yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k})\operatorname{tg}\frac{x}{yz} + \left(\frac{1}{x}\mathbf{i} - \frac{1}{y}\mathbf{j} - \frac{1}{z}\mathbf{k}\right)\frac{x^2}{\cos^2\dfrac{x}{yz}}.$$

c) $$\nabla u(x;y;z) = -\frac{2xy}{\left(x^2+z^2\right)^{y+1}}\mathbf{i} - \frac{\ln(x^2+z^2)}{\left(x^2+z^2\right)^{y}}\mathbf{j} - \frac{2yz}{\left(x^2+z^2\right)^{y+1}}\mathbf{k}.$$

d) $\nabla u(x;y;z) = \dfrac{x}{x^2+y^2z^2}\left(\dfrac{yz}{x}\mathbf{i} - z\mathbf{j} - y\mathbf{k}\right).$

e) $\nabla u(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|\left(\dfrac{3\ln|\mathbf{r}|}{2}+1\right)\mathbf{r}.$

f) $\nabla u(\mathbf{r}) = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|\arcsin|\mathbf{r}|} - \dfrac{2|\mathbf{r}|\mathbf{r}}{\left(1+|\mathbf{r}|^2\right)\left(\arcsin|\mathbf{r}|\right)^2}.$

13.2.13.

a) A skalár-vektor függvény gradiense, a függvénynek és a Hamilton-operátornak, a „vektor szorzása valós számmal" módjára kiszámítandó szorzata: $\operatorname{grad} u(\mathbf{r}) = \nabla u(\mathbf{r})$.

$$\operatorname{grad} u(\mathbf{r}) = \frac{6\left(|\mathbf{r}|+2\right)}{|\mathbf{r}|}\mathbf{r}.$$

b) $\operatorname{grad} u(\mathbf{r}) = -\dfrac{2}{|\mathbf{r}|\left(|\mathbf{r}|-1\right)^3}\mathbf{r}.$ **c)** $\operatorname{grad} u(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{|\mathbf{r}|\left(|\mathbf{r}|+1\right)^2}\mathbf{r}.$

d) $\nabla u(\mathbf{r}) = \dfrac{(y^2-x^2+z^2)}{(yz)^{-1}|\mathbf{r}|^4}\mathbf{i} + \dfrac{(x^2-y^2+z^2)}{(xz)^{-1}|\mathbf{r}|^4}\mathbf{j} + \dfrac{(x^2+y^2-z^2)}{(xy)^{-1}|\mathbf{r}|^4}\mathbf{k}$

13.2.14.

a) A megadott függvény, azonos átalakítás után,

$$u(x;y;z) = \frac{1}{2} + e^{-2xyz}$$

alakban írható fel. Ennek parciális deriváltjait kiszámítva és a közös tényezőt kiemelve, a függvény gradiense:

$\operatorname{grad} u(\mathbf{r}) = -2e^{-2xyz}(xz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k})$.

Behelyettesítve a megadott vektor koordinátáit, a gradiens vektor az $\mathbf{r}_0(-1;0;1)$ helyen:

$$\operatorname{grad} u\big|_{\mathbf{r}_0} = 2\mathbf{j}.$$

b) A megadott skalár-vektor függvény gradiense:

$$\operatorname{grad} u(\mathbf{r}) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(12-(x^2+y^3+z^4)\right)^2}}(2x\mathbf{i}+3y^2\mathbf{j}+4z^3\mathbf{k}).$$

A gradiens vektor az $\mathbf{r}_0(2;-1;-1)$ helyen:

$$\operatorname{grad} u\big|_{\mathbf{r}_0} = -\frac{1}{3}\mathbf{i}-\frac{1}{4}\mathbf{j}-\frac{1}{3}\mathbf{k}.$$

c) $\operatorname{grad} u\big|_{\mathbf{r}_0} = \frac{7}{18}\mathbf{i}+\frac{1}{4}\mathbf{j}-\frac{5}{3}\mathbf{k}.$

d) $\operatorname{grad} u\big|_{\mathbf{r}_0} = \frac{3\pi-4\sqrt{3}}{12}\mathbf{i}+\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{12}\mathbf{j}-\frac{3\pi+4\sqrt{3}}{12}\mathbf{k}.$

e) A parciális deriváltak kiszámítása szempontjából célszerűen, a függvényt azonosan átalakítva, az

$u(\mathbf{r}) = -\log_3(|\mathbf{r}|+1)-\log_3(|\mathbf{r}|^2+4)$,

áttekinthetőbb alakot kapjuk és ebből az alakból számítjuk ki a parciális deriváltakat.

A függvény gradiense:

$$\operatorname{grad} u(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|^2+|\mathbf{r}|}+\frac{2}{|\mathbf{r}|^2+4}\right)\mathbf{r}.$$

Az $|\mathbf{r}_0| = \sqrt{3}$ és $\mathbf{r}_0(1;1;1)$ behelyettesítése után, a gradiens vektor:

$$\operatorname{grad} u\big|_{\mathbf{r}_0} = -\frac{33-7\sqrt{3}}{42\ln 3}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}).$$

f) $\operatorname{grad} u\big|_{\mathbf{r}_0} = \frac{4(2-\pi)}{\pi^2}\mathbf{i}.$

13.2.15.

a) Az abszolút hiba becslése:

$$|\Delta u(\mathbf{r}_0)| \approx \left|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\mathbf{r}_0}\right| \cdot |\Delta x_0| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\mathbf{r}_0}\right| \cdot |\Delta y_0| + \left|\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{\mathbf{r}_0}\right| \cdot |\Delta z_0|,$$

a relatív hibáé pedig:

$$\delta u(\mathbf{r}_0) \approx \frac{|\Delta u(\mathbf{r}_0)|}{|u(\mathbf{r}_0)|}.$$

A megadott függvény egyes parciális deriváltjai, illetve értékeik:

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x;y;z) = 4x^3,\ \frac{\partial}{\partial y}u(x;y;z) = -3y^2 \text{ és } \frac{\partial}{\partial x}u(x;y;z) = 2z,$$

illetve

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\mathbf{r}_0} = 32,\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\mathbf{r}_0} = -24 \text{ és } \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{\mathbf{r}_0} = 8.$$

Az abszolút hiba becslése: $|\Delta u(\mathbf{r}_0)| \approx \frac{5}{2}$.

A függvényérték abszolút értéke: $|u(\mathbf{r}_0)| = 16\sqrt{2}$.

A relatív hiba becslése: $\delta u(\mathbf{r}_0) \approx \frac{5\sqrt{2}}{64} \approx 0{,}1105$.

b) $|\Delta u(\mathbf{r}_0)| \approx \frac{7 \cdot 2^6 \cdot (2+\ln 2)}{100}$ és $\delta u(\mathbf{r}_0) \approx \frac{7 \cdot (2+\ln 2)}{200} \approx 0{,}0943$.

c) $|\Delta u(\mathbf{r}_0)| \approx \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot \ln 3}{300}$ és $\delta u(\mathbf{r}_0) \approx \frac{3 \cdot e \cdot \ln 3}{100 \cdot (1+\ln 3)} \approx 0{,}0427$.

d) $|\Delta u(\mathbf{r}_0)| \approx \frac{21{,}6+\sqrt{3}\,\pi}{9}$ és $\delta u(\mathbf{r}_0) \approx \frac{21{,}6+\sqrt{3}\,\pi}{180} \approx 0{,}1502$.

e) $|\Delta u(\mathbf{r}_0)| \approx 1{,}18$ és $\delta u(\mathbf{r}_0) \approx 0{,}059$.

13.2.16. Az impedanciának a mérési eredményekből kiszámított értéke:

$Z_0 = \sqrt{5{,}6^2 + (2 \cdot \pi \cdot 49{,}8 \cdot 7{,}2)^2} \approx 6{,}036\,\Omega$.

Az egyes mérési eredmények abszolút hibái:

$h_{LA} = \frac{2 \cdot 10}{100} = 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{H}$, $h_{RA} = \frac{5 \cdot 10}{100} = 0{,}5\,\Omega$ és $h_{fA} = 0{,}6\,\mathrm{Hz}$.

A $Z = \sqrt{R^2 + (2 \cdot \pi \cdot f \cdot L)^2}$ függvény egyes változók szerinti parciális deriváltjai és azok értékei az $(L_0; R_0; f_0)$ helyen:

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot L \cdot f^2}{\sqrt{R^2 + (2 \cdot \pi \cdot f \cdot L)^2}} \text{ és } \frac{\partial Z}{\partial L}(L_0; R_0; f_0) \approx 117 \frac{1}{s};$$

$$\frac{\partial Z}{\partial R} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (2 \cdot \pi \cdot f \cdot L)^2}} \text{ és } \frac{\partial Z}{\partial R}(L_0; R_0; f_0) \approx 0{,}928;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial f} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot L^2 \cdot f}{\sqrt{R^2 + (2 \cdot \pi \cdot f \cdot L)^2}} \text{ és } \frac{\partial Z}{\partial f}(L_0; R_0; f_0) \approx 0{,}0169\,\Omega\mathrm{s}.$$

Az impedancia abszolút hibája:

$$h_{ZA} = \left|\frac{\partial Z}{\partial L}(L_0; R_0; f_0)\right| \cdot |h_{LA}| + \left|\frac{\partial Z}{\partial R}(L_0; R_0; f_0)\right| \cdot |h_{RA}| +$$
$$+ \left|\frac{\partial Z}{\partial f}(L_0; R_0; f_0)\right| \cdot |h_{fA}| = 0{,}498\,\Omega.$$

Az impedancia relatív hibája pedig:

$$h_Z = \frac{h_{ZA} \cdot 100}{Z_0} = 8{,}25\%.$$

13.3. Vektor-vektor függvények

13.3.1.

a) A ∇ szimbolikus vektor és egy vektor-vektor függvény skaláris szorzása során, – a vektorok esetében alkalmazott szorzási művelet helyett, – a ∇ vektor megfelelő koordinátája szerint, az egyes koordinátafüggvények parciális deriváltját képezzük. A kapott parciális deriváltakat – ugyanúgy, mint két vektor skaláris szorzásánál, – összeadjuk.

$$\nabla \mathbf{v}(x; y; z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \sqrt{yz}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2 \sqrt{z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{x} yz^2\right) =$$
$$= 2\left(x\sqrt{yz} + xy\sqrt{z} + \sqrt{x} yz\right).$$

b) $\nabla \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{tg} xyz\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos(x+y+z)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\sin(x+y-z)\right) =$

$$= \frac{yz}{\cos^2 xyz} - \sin(x+y+z) - \cos(x+y-z).$$

c) $\nabla \mathbf{v}(x;y;z) = -\frac{ye^{-x}}{z} - \frac{ze^{-y}}{x} - \frac{xe^{-z}}{y}.$

d) $\nabla \mathbf{v}(x;y;z) = \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{xy}{z}.$

e) $\nabla \mathbf{v}(x;y;z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + 2y + 3z\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$

f) $\nabla \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{x - z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2} - \frac{y}{\left(1+x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

13.3.2.

a) Egy vektor-vektor függvény divergenciája a ∇ szimbolikus vektor és a függvény skaláris szorzataként számítható ki, azaz $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla \mathbf{v}(\mathbf{r})$.

A megadott függvény divergenciáját tehát

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(x;y;z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y+z}{x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+z}{y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x+y}{z}\right)$$

alakban számítjuk ki. A parciális deriválást elvégezve, a divergencia tehát a

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(x;y;z) = -\frac{y+z}{x^2} - \frac{x+z}{y^2} - \frac{x+y}{z^2}$$

skalár-vektor függvény.

b) A harmadik koordinátafüggvény parciális deriválása előtt alkalmazzuk a $\log_z x = \frac{\ln x}{\ln z}$ azonosságot!

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(x;y;z) = 2^x (\ln 2)(\log_y z) + \frac{2^z}{y \ln x} - \frac{2^y \ln x}{z(\ln z)^2}.$$

c) $\operatorname{div} \mathbf{v}(x;y;z) = z(x+y)^{z-1} + x(y+z)^{x-1} + y(x+z)^{y-1}$.

d) Parciális deriválás, összevonás és egyszerűsítés után:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(x;y;z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}.$$

Mivel a nevezőben a vektor abszolút értékének a négyzete áll, ezért a divergencia tömör alakban felírva:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r}|^2}.$$

e) $$\operatorname{div} \mathbf{v}(x;y;z) = \frac{x \operatorname{ch}\sqrt{x^2+y^2+z^2} + y \operatorname{sh}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\operatorname{ch}^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

f) $$\operatorname{div} \mathbf{v}(x;y;) = \frac{(x+y+z)\left(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

13.3.3.

a) A vektormező forrásmentes, ha az azt meghatározó vektor-vektor függvény divergenciája az azonosan nulla skalár-vektor függvény. Kiszámítjuk tehát a megadott függvény divergenciáját:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(x;y;z) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3+3xy^2-2xz) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y+y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2).$$

A divergencia a kiszámított parciális deriváltakkal felírva:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(x;y;z) = (3x^2+3y^2-2z) - (3x^2+3y^2) + 2z.$$

Az összevonások elvégzése után kapjuk, hogy
$\operatorname{div}\mathbf{v}(x;y;z)=\mathbf{0}$,
ezért a vektormező forrásmenetes.

b) Nem forrásmentes. **c)** Forrásmentes.

d) Részletesen felírva az egyes koordinátafüggvényeket, illetve a parciális deriváltjaikat:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{\ln(x^2+y^2+z^2)}\right)=\frac{2\ln(x^2+y^2+z^2)-\dfrac{4x^2}{(x^2+y^2+z^2)}}{\left(\ln(x^2+y^2+z^2)\right)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{\ln(x^2+y^2+z^2)}\right)=\frac{2\ln(x^2+y^2+z^2)-\dfrac{4y^2}{(x^2+y^2+z^2)}}{\left(\ln(x^2+y^2+z^2)\right)^2} \text{ és}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2z}{\ln(x^2+y^2+z^2)}\right)=\frac{2\ln(x^2+y^2+z^2)-\dfrac{4z^2}{(x^2+y^2+z^2)}}{\left(\ln(x^2+y^2+z^2)\right)^2}.$$

Ezek összege a vektor-vektor függvény divergenciája. Az összeg, azonos átalakítások után:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}(x;y;z)=\frac{6\ln(x^2+y^2+z^2)-4}{\left(\ln(x^2+y^2+z^2)\right)^2},$$

illetve tömör alakban

$$\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r})=\frac{12\ln|\mathbf{r}|-4}{\left(2\ln|\mathbf{r}|\right)^2}.$$

Mivel ez nem egy azonosan nulla skalár-vektor függvény, ezért a vektormező nem forrásmentes.

13.3.4.

a) A Hamilton-operátor és a vektor-vektor függvény vektoriális szorzása során, a determináns elemeinek szorzatát, a koordináta-függvény parciális deriváltjaként értelmezzük.

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^3y^2z & xy^3z^2 & x^2yz^3 \end{vmatrix}$$

A determináns kifejtése:

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2yz^3\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(xy^3z^2\right)\right) -$$

$$- \mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2yz^3\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(x^3y^2z\right)\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(xy^3z^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3y^2z\right)\right).$$

A kiszámított vektoriális szorzat:

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \left(x^2z^3 - 2xy^3z\right)\mathbf{i} - \left(2xyz^3 - x^3y^2\right)\mathbf{j} + \left(y^3z^2 - 2x^3yz\right)\mathbf{k}.$$

b) Alkalmazzuk a különböző alapú logaritmusokra vonatkozó azonosságot, így a megadott függvény

$$\mathbf{v}(x;y;z) = \frac{\ln y}{\ln x}\mathbf{i} + \frac{\ln z}{\ln y}\mathbf{j} + \frac{\ln x}{\ln z}\mathbf{k}$$

alakú lett. A vektoriális szorzatot kiszámítva,

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{z\ln y}\mathbf{i} - \frac{1}{x\ln z}\mathbf{j} - \frac{1}{y\ln x}\mathbf{k}.$$

c) $$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{x+z}\mathbf{i} + \frac{1}{x+y}\mathbf{j} + \frac{1}{y+z}\mathbf{k} +$$

$$+ \frac{x}{(y+z)^2}\mathbf{i} + \frac{y}{(x+z)^2}\mathbf{j} + \frac{z}{(x+y)^2}\mathbf{k}.$$

d) A determináns:

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x\sqrt{x^2+y^2+z^2} & y\sqrt{x^2+y^2+z^2} & z\sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{vmatrix}.$$

A determinánst kifejtve kapjuk, hogy

$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

e) $\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\left(\frac{\cos xz}{y^2} + \frac{y\cos yz}{x}\right)\mathbf{i} +$

$$+\left(\frac{z\sin xz}{y} + \frac{\cos xy}{z^2}\right)\mathbf{j} - \left(\frac{\sin yz}{x^2} + \frac{x\cos xy}{z}\right)\mathbf{k}.$$

f) $\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

13.3.5.

a) A vektor-vektor függvény rotációja a ∇ szimbolikus vektor és a vektor-vektor függvény vektoriális szorzatának eredményeként adódó vektor-vektor függvény.

A megadott függvény esetében, ez

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{yz} & \frac{1}{xz} & \frac{1}{xy} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{1}{xy^2} + \frac{1}{xz^2}\right)\mathbf{i} - \left(-\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{yz^2}\right)\mathbf{j} + \left(-\frac{1}{x^2z} + \frac{1}{y^2z}\right)\mathbf{k} =$$

$$= \left(\frac{1}{xz^2} - \frac{1}{xy^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{yz^2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{y^2z} - \frac{1}{x^2z}\right)\mathbf{k}.$$

b) A determináns:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2^{-x+y} & 8^{-y+z} & 4^{x-z} \end{vmatrix}$$

A determinánst kifejtve, a rotáció:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -8^{-y+z}(\ln 8)\mathbf{i} - 4^{x-z}(\ln 4)\mathbf{j} - 2^{-x+y}(\ln 2)\mathbf{k}.$$

c) $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \big(\operatorname{ch}(y-z)\big)\mathbf{i} + \big(\operatorname{sh}(x+z)\big)\mathbf{j} - \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(x-y)}\mathbf{k}$.

d) $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

13.3.6.

a) Egy vektor-vektor függvény által meghatározott vektormező örvénymentes, ha a függvény rotációja egyenlő az azonosan nulla vektor-vektor függvénnyel.
Célszerű az egyes koordinátafüggvények parciális deriváltjait külön-külön kiszámítani.

$$\frac{\partial}{\partial x}v_2(x;y;z) = 2x(\cos y)(\ln z),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}v_3(x;y;z) = \frac{2x\sin y}{z},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}v_1(x;y;z) = 2x(\cos y)(\ln z),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}v_3(x;y;z) = \frac{x^2\cos y}{z},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}v_1(x;y;z) = \frac{2x\sin y}{z} \text{ és}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}v_2(x;y;z) = \frac{x^2\cos y}{z}.$$

A rotáció vektor első koordinátafüggvénye

$$\frac{\partial}{\partial y}v_3(x;y;z) - \frac{\partial}{\partial z}v_2(x;y;z) = \frac{x^2\cos y}{z} - \frac{x^2\cos y}{z} = 0,$$

de ugyancsak nulla a második és a harmadik koordinátafüggvény is, ezért
$\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$,
tehát a vektormező örvénymentes.

b) A rotáció kiszámításának determinánsa:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{1}{x^2yz} & \dfrac{1}{xy^2z} & \dfrac{1}{xyz^2} \end{vmatrix}$$

A determináns kifejtése:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \left(-\frac{1}{xy^2z^2} + \frac{1}{xy^2z^2}\right)\mathbf{i} -$$

$$-\left(-\frac{1}{x^2yz^2} + \frac{1}{x^2yz^2}\right)\mathbf{j} + \left(-\frac{1}{x^2y^2z} + \frac{1}{x^2y^2z}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0},$$

tehát a vektormező örvénymentes.

c) Nem örvénymentes. **d)** Örvénymentes.

13.3.7.

a) Mivel $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, ezért a megadott skalár-vektor függvény gradiense:

$$\operatorname{grad} u(\mathbf{r}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{k}.$$

Látható, hogy

$\mathbf{v}(x;y;z) = \operatorname{grad} u(\mathbf{r})$,

ezért a skalár-vektor függvény potenciálfüggvénye a vektor-vektor függvénynek.

b) $\operatorname{grad} u(x;y;z) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{xy}{e^z}\right)\mathbf{i} + \left(\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{xy}{e^z}\right)\mathbf{j} + \left(\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{xy}{e^z}\right)\mathbf{k}$.

A parciális deriváltakat kiszámítva kapjuk, hogy

$\operatorname{grad} u(x;y;z) = \dfrac{y}{e^z}\mathbf{i} + \dfrac{x}{e^z}\mathbf{j} - \dfrac{xy}{e^z}\mathbf{k}$. Mivel

$\mathbf{v}(x;y;z) = \operatorname{grad} u(x;y;z)$,

ezért a skalár-vektor függvény potenciálfüggvénye a vektor-vektor függvénynek.

c) A parciális deriváltak kiszámítása után látható, hogy ugyan

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x;y;z) = v_1(x;y;z) \text{ és}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u(x;y;z) = v_3(x;y;z),$$

de

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x;y;z) = -v_2(x;y;z),$$

ezért

$$\mathbf{v}(x;y;z) \neq \operatorname{grad} u(x;y;z),$$

tehát a skalár-vektor függvény nem potenciálfüggvénye a vektor-vektor függvénynek.

d) Potenciálfüggvénye.

13.3.8.

a) A skalár-vektor függvény gradiense:

$$\operatorname{grad} u(x;y;z) = \frac{2x}{y-\sqrt{z}}\mathbf{i} - \frac{x^2}{\left(y-\sqrt{z}\right)^2}\mathbf{j} + \frac{x^2}{2\sqrt{z}\left(y-\sqrt{z}\right)^2}\mathbf{k}.$$

A kapott vektor-vektor függvény divergenciája:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u(x;y;z) = \frac{2}{y-\sqrt{z}} + \frac{2x^2}{\left(y-\sqrt{z}\right)^3} + \frac{x^2\left(3\sqrt{z}-y\right)}{4\sqrt{z^3}\left(y-\sqrt{z}\right)^3}.$$

Mivel $u(x;y;z)$ potenciálfüggvénye a $\operatorname{grad} u(x;y;z) = \mathbf{v}(x;y;z)$ vektor-vektor függvénynek, ezért

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u(x;y;z) = \operatorname{rot}\mathbf{v}(x;y;z) = \mathbf{0}.$$

b) A megadott skalár-vektor függvény

$$u(x;y;z) = \frac{1}{\sqrt[6]{x^2+y^2+z^2}}$$

alakban is felírható. Gradiensének koordinátafüggvényei:

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x;y;z) = -\frac{x}{3\sqrt[6]{\left(x^2+y^2+z^2\right)^7}} = v_1(x;y;z),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x;y;z) = -\frac{y}{3\sqrt[6]{\left(x^2+y^2+z^2\right)^7}} = v_2(x;y;z) \text{ és}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u(x;y;z) = -\frac{z}{3\sqrt[6]{\left(x^2+y^2+z^2\right)^7}} = v_3(x;y;z).$$

Kiemelés után, a gradiens:

$$\operatorname{grad}(x;y;z) = -\frac{1}{3\sqrt[6]{\left(x^2+y^2+z^2\right)^7}}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}).$$

Mivel a nevezőben $3\sqrt[3]{|\mathbf{r}|^7}$ áll és $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, ezért

$$\operatorname{grad}u(\mathbf{r}) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{|\mathbf{r}|^7}}\mathbf{r}.$$

A gradiens divergenciája:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}u(x;y;z) = \frac{\partial}{\partial x}v_1(x;y;z) + \frac{\partial}{\partial y}v_2(x;y;z) + \frac{\partial}{\partial z}v_3(x;y;z).$$

A parciális deriváltak összegét egyszerűbb alakra hozva, és alkalmazva, hogy $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, a gradiens divergenciája:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}u(\mathbf{r}) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{|\mathbf{r}|^7}}.$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}u(\mathbf{r}) = \mathbf{0}.$$

c) $\operatorname{grad}u(\mathbf{r}) = \frac{3}{|\mathbf{r}|}\mathbf{r}$, $\operatorname{div}\operatorname{grad}u(\mathbf{r}) = \frac{6}{|\mathbf{r}|}$ és $\operatorname{rot}\operatorname{grad}u(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

d) $\operatorname{grad}u(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{1-|\mathbf{r}|^2}}{|\mathbf{r}|-|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$, $\operatorname{div}\operatorname{grad}u(\mathbf{r}) = \frac{|\mathbf{r}|\sqrt{1-|\mathbf{r}|^2}}{\left(1-|\mathbf{r}|^2\right)^2}$ és

$\operatorname{rot}\operatorname{grad}u(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

13.3.9.

a) A vektor-vektor függvényt lokalizáljuk, azaz a vektor-skalár függvény koordinátafüggvényeit behelyettesítjük a vektor-vektor függvény megfelelő független változói helyébe:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = \left(\sqrt{t}+t\right)\mathbf{i} + \left(t^2+t\right)\mathbf{j} + \left(t^2+\sqrt{t}\right)\mathbf{k},$$

Eredményül egy vektor-skalár függvény kaptunk.

A megadott vektor-skalár függvény deriváltja:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = 2t\mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Kiszámítjuk a lokalizált vektor-vektor függvény és a vektor-skalár függvény deriváltjának skaláris szorzatát. Eredményül a

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t) = \left(\sqrt{t}+t\right)2t + \left(t^2+t\right)\frac{1}{2\sqrt{t}} + \left(t^2+\sqrt{t}\right)$$

egyváltozós, valós függvényt kapjuk, amelyet integrálunk a megadott határok között:

$$\int_0^1 \left(3t^2 + \frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\right)dt = 3.$$

b) A lokalizált vektor-vektor függvény:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{t^2+2t+1}\left(t\mathbf{i} + \sqrt{2t}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right).$$

Vegyük észre, hogy a négyzetgyökvonás elvégezhető!

A vektor-skalár függvény deriváltja:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2t}}\mathbf{j}.$$

A két vektor-skalár függvény skaláris szorzatát kell integrálni a megadott határok között.

$$\int_1^2 \left(\left(t^2+t\right)\mathbf{i} + \sqrt{2t}(t+1)\mathbf{j} + (t+1)\mathbf{k}\right)\left(\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2t}}\mathbf{j}\right)dt =$$

$$= \int_1^2 \left(t^2+2t+1\right)dt = \frac{19}{3}.$$

c) $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{e^{2t}+1+2e^t}} \left(\left(e^t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \sqrt{2e^t}\mathbf{k} \right) \left(e^t\mathbf{i} + \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{2}}\mathbf{k} \right) \right) dt$

Azonos átalakítások után,

$\int_0^{\ln 2} e^t \, dt = 1.$

d) $\frac{7+17\ln 2-5\ln 3}{2}$.

e) Az integrál értéke nulla, mert a vektor-vektor függvény rotációja nulla, és zárt görbe mentén kell integrálni.

f) $\frac{18+3\sqrt{3}(\pi-8)+2\pi(8-3\sqrt{2})}{48}$.

13.3.10.

a) A P_1P_2 szakasz paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 1+t \\ z &= 1+t \end{aligned}\right\}, \text{ ha } 0 \le t \le 1.$$

Ha a szakasz egyenletrendszerét

$\mathbf{r}(t) = (1+t)\mathbf{i} + (1+t)\mathbf{j} + (1+t)\mathbf{k}$

alakúra átírjuk, akkor jól látható, hogy ez képezi azt a görbét, amelyen integrálnunk kell. (Megjegyezzük, hogy ha az egyenes irányvektorának kezdő- és végpontja a szakasz kezdő- végpontja, akkor minden esetben $0 \le t \le 1$.)

A továbbiakban ugyanúgy kell eljárni, mint egyéb esetben: a vektor-vektor függvényt lokalizáljuk, majd kiszámítjuk a skaláris szorzatot. (A skaláris szorzat kiszámítása során vegyük észre, hogy a vektor-skalár függvény deriváltját az irányvektor koordinátái alkotják.) A vonalmenti integrál:

$$\int_0^1 (6+3t)\,dt = \frac{15}{2}.$$

b) $\pi^2 \int_0^1 \left(\frac{t}{18}\cos\frac{\pi t}{6} + \frac{t}{12}\sin\frac{\pi t}{3} + \frac{t^2}{24} \right) dt = \frac{9\left(11\sqrt{3}-16\right)+\pi(\pi+3)}{72}.$

c) $\frac{12\ln 2 - 5}{3}$.

d) $2e(1+e) + \frac{2}{e}\left(\frac{5}{e} - 3\right) + \frac{19}{3}$.

e) $\frac{1}{2}\ln\frac{17}{14}$.

f) $\frac{15}{4} - \ln 2$.

13.3.11.

a) Mivel az integrál értéke a két szakaszon vett integrál összegeként adható meg, és ennek kiszámítása hosszadalmas, ezért célszerű megvizsgálni, hogy a vektormező konzervatív-e vagy nem. Ha konzervatív, akkor az integrál értéke csak a kezdő és végponttól függ, azaz rövidebb számolással, a P_1 pontból a P_3 pontba vezető szakaszon integrálva oldható meg a feladat.

A vektor-vektor függvény rotációja:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(x;y;z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{2x}{yz} & -\frac{x^2}{y^2 z} & -\frac{x^2}{yz^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{y^2 z^2} - \frac{x^2}{y^2 z^2} \right)\mathbf{i} - \left(-\frac{2x}{yz^2} + \frac{2x}{yz^2} \right)\mathbf{j} + \left(-\frac{2x}{y^2 z} + \frac{2x}{y^2 z} \right)\mathbf{k} = \mathbf{0},$$

tehát a vektormező konzervatív, ezért a P_1 pontból a P_3 pontba vezető szakaszon integrálva határozzuk meg a megoldást.

A vektor-skalár függvény:

$\mathbf{r}(t) = (2+t)\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, és $0 \le t \le 1$.

A vektor-vektor függvényt lokalizáljuk, és skaláris szorzatát képezzük az irányvektorral, mivel az egyben $\dot{\mathbf{r}}(t)$ is.

Az integrál értéke tehát:

$$\int_0^1 \frac{4+2t}{3}\,dt = 3\,.$$

b) A vektor-vektor függvény rotációja nem nulla, ezért a két szakaszon külön-külön kell kiszámítani a vonalmenti integrálok értékét. Ezek összege:

$$\frac{195\ln 2 - 107\ln 3 - 58}{16}\,.$$

13.3.12.

a) A törött-vonal kezdő- és végpontja egybeesik, ezért – a hosszadalmas és felesleges számítások elkerülése érdekében, – célszerű megvizsgálni, hogy a vektormező örvénymentes-e vagy nem. A vektor-vektor függvény rotációja:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(x;y;z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{y^2\cos x}{e^z} & \dfrac{2y\sin x}{e^z} & -\dfrac{y^2\sin x}{e^z} \end{vmatrix} = \mathbf{0}\,,$$

tehát a vektormező örvénymentes. Ezért a vektor-vektor függvénynek, a megadott zárt görbén vett vonalmenti integrálja nulla.

b) Mivel a törött-vonal zárt és a vektormező örvénymentes, ezért ezen, a vektor-vektor függvény vonalmenti integrálja nulla.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1. Eseményalgebra

14.1.1.

a) $A_1 + A_2 + A_3$. **b)** $A_1A_2A_3$. **c)** $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

d) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

e) $A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$.

f) $A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1A_2A_3$
$\left(= A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3\right)$.

g) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 +$
$+ A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$ $\left(= \overline{A_1A_2A_3} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3\right)$.

14.1.2.

a) $A \subset B$.

b) $AB + A\overline{B} = A = \left(A + B\right) - B = \left(A + B\right)\overline{B} = A\overline{B}$, tehát $AB = 0$.

c) $A\overline{B} = 0$.

d) $A + B = A + B + A\overline{B} = AB + A\overline{B} = A$, ugyanígy $A + B = B$.
Tehát $A = B$.

14.1.3.

a) $\overline{A}\,\overline{B} = \overline{A + B} = \overline{\overline{A}} = A$, azaz $A + B = \overline{A}$, tehát $A = 0$ és $B = I$.

b) $A = B = 0$. **c)** A tetszőleges és $B = I$.

14.1.4. Alkalmazzuk az összeg ellentettjére vonatkozó $\overline{C+D}=\overline{C}\,\overline{D}$ azonosságot a $C=\overline{X+A}$ és $D=\overline{X+\overline{A}}$ eseményekre! Használjuk fel, hogy $\overline{\overline{D}}=D$, majd végezzük el tagonként a szorzást! Ekkor:

$$\overline{B}=\overline{\overline{X+A}+\overline{X+\overline{A}}}=\left(X+A\right)\left(X+\overline{A}\right)=XX+X\overline{A}+AX+A\overline{A}=$$
$$=X+X\left(A+\overline{A}\right)+0=X+XI=X+X=X.$$

14.1.5.

a) $A+AB=\left(A\overline{B}+AB\right)+AB=A\overline{B}+AB=A$.

b) $\overline{A\overline{B}+\overline{A}B+\overline{A}\,\overline{B}}=\left(\overline{A}+B\right)\left(A+\overline{B}\right)\left(A+B\right)=AB$.

c) $AB-AC=AB\overline{AC}=AB\left(\overline{A}+\overline{C}\right)=AB\overline{C}=A\left(B-C\right)$.

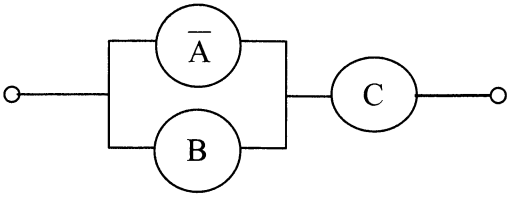
d) $C-C\left(A+B\right)=C\,\overline{C\left(A+B\right)}=C\left(\overline{C}+\overline{A+B}\right)=C\left(\overline{A+B}\right)$.

e) $A-\left\{A-\left[B-\left(B-C\right)\right]\right\}=A\,\overline{A\overline{B}\overline{\overline{B}\overline{C}}}=A\left(\overline{A}+B\overline{\overline{B}\overline{C}}\right)=$
$=AB\left(\overline{B}+C\right)=ABC$.

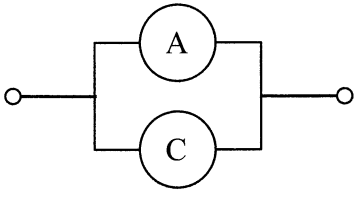
f) $\left(A+B\right)\left(A+C\right)\left(B+C\right)=\left(A+AC+AB+BC\right)\left(B+C\right)=$
$=AB+AC+ABC+AC+AB+ABC+BC+ABC=$
$=AB+AC+BC$.

14.1.6.

a) $\left(A+B+C\right)\left(\overline{A}+B\right)\left(\overline{B}+C\right)=\left(\overline{A}+B\right)C$.



b) $AB + C + (\overline{A} + \overline{B}\,\overline{C})(A + CD) = A + C$.



14.2. Valószínűségek kombinatorikus kiszámítási módja

14.2.1.

a) $A + \overline{A} = I, \quad P(A) + P(\overline{A}) = 1, \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

b) $AB + A\overline{B} = A, \quad P(AB) + P(A\overline{B}) = P(A)$,
$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$.

c) $A + B = B + A\overline{B}, \quad P(A + B) = P(B) + P(A\overline{B}) =$
$= P(B) + P(A) - P(AB)$.

d) $P(A + B + C) = P[(A + B) + C] = P(A + B) + P(C) - P[(A + B)C] =$
$= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$.

14.2.2.

a) $\frac{1}{6}$. **b)** $\frac{1}{3}$. **c)** $\frac{5}{6}$. **d)** $\frac{1}{2}$.

14.2.3.

a) Az összes esetek száma: $6 \cdot 6 = 36$. Ha az egyik kockán 6-os van, akkor a másikon az 1, 2, …,6 számok bármelyike lehet, így 12 esetet kapnánk, de ekkor azt az esetet, amikor mind a két kockán 6-os áll kétszer vennénk számításba. tehát csak 11 olyan eset van amikor legalább az egyik kockán 6-os áll, s ezért az eredmény $\frac{11}{36}$.

Megjegyzések:
Könnyebb a megfelelő esemény ellentettjének a valószínűségét kiszámítani, hiszen annak az eseménynek az ellentettje, hogy legalább az egyik kockán 6-os áll az, hogy egyik kockán sem áll 6-os, vagyis mind a két kockán az 1, 2, …,5 számok valamelyike áll. Így a keresett valószínűség: $1-\frac{5\cdot 5}{6\cdot 6}=\frac{11}{36}$. Ez a gondolatmenet alkalmazható akárhány kocka esetén is. Annak a valószínűsége, hogy n kockát egyszerre feldobva legalább az egyiken 6-os áll: $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Két kocka esetén felhasználhatjuk a 14.2.1. c) feladatban felírt képletet is. Jelölje A azt az eseményt, hogy az egyik, B az, hogy a másik kockán 6-os áll. Ekkor az idézett képlet alapján:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}.$$

b) $\frac{7}{36}$. **c)** $\frac{5}{36}$. **d)** $\frac{1}{6}$. **e)** $\frac{7}{36}$.

14.2.4.

a) $\frac{15}{16}$. **b)** $\frac{13}{16}$.

c) Mivel a pénzdarab szabályos, annak a valószínűsége, hogy több írást dobunk, mint fejet ugyanannyi, mint annak a valószínűsége, hogy több fejet dobunk, mint írást. A megfelelő események egymást kizárják és összegük a biztos esemény, hiszen nem dobhatunk ugyanannyi fejet, mint írást. Így a kérdezett valószínűség: $\frac{1}{2}$.

d) $\frac{13}{32}$. **e)** $\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$.

14.2.5. $\dfrac{\binom{12}{5}}{\binom{20}{5}} = \dfrac{33}{646} \approx 0{,}05$.

14.2.6. Jelöljék A, B és C rendre azokat az eseményeket, hogy egy oktatónak van nyelvvizsgája angolból, németből és oroszból.

a) $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(AB) + P(AC) + P(BC) -$

$- P(ABC) = 1 - \dfrac{305}{400} + \dfrac{90}{400} - \dfrac{4}{400} = \dfrac{181}{400} \approx 0{,}45$.

b) $P(\overline{A}\,\overline{B}C) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) - P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) =$

$= 1 - \dfrac{220}{400} + \dfrac{45}{400} - \dfrac{181}{400} = \dfrac{11}{100} = 0{,}11$.

c) $P(AB\overline{C}) = P(AB) - P(ABC) = \dfrac{45}{400} - \dfrac{4}{400} = \dfrac{41}{400} \approx 0{,}1$.

14.2.7. 32 lapból 3-at $\binom{32}{3} = 4960$-féleképpen lehet kiválasztani.

a) A kihúzott három lap színeloszlása négyféle lehet, aszerint, hogy melyik szín nem szerepel közöttük. A színek hasonló szerepe miatt e négy esetnek megfelelő valószínűségek egyenlők. Ha a 32 lap közül úgy húzunk ki három lapot, hogy az egyik piros, a másik makk és a harmadik tök, akkor mindegyiket nyolc lap közül választhatjuk ki, tehát az ilyen kihúzások száma 8^3. Így a kérdezett valószínűség: $\dfrac{4 \cdot 8^3}{4960} = \dfrac{64}{155} \approx 0{,}41$.

b) Ha a kihúzott három lap között van a piros ász, akkor a másik két lapot a maradó 31 lap közül választhatjuk ki. Az ilyen esetek száma: $\binom{31}{2} = 465$. Ha a piros ász nincs a kihúzott három lap kö-

zött, akkor a következő három lehetőség van. A kihúzott három lap között van:

(i) egy piros lap, ami nem ász és egy ász, ami nem piros, valamint egy olyan lap, ami nem piros és nem is ász – az ilyen esetek száma: $7 \cdot 3 \cdot 21 = 441$ –;

(ii) egy piros lap, ami nem ász és két ász, ami nem piros – az ilyen esetek száma: $7 \cdot 3 = 21$ –;

(iii) két piros lap, amelyek egyike sem ász és egy ász, ami nem piros – az ilyen esetek száma: $\binom{7}{2} \cdot 3 = 63$.

Így a keresett valószínűség:

$$\frac{465 + 441 + 21 + 63}{4960} = \frac{99}{496} \approx 0{,}2 .$$

Megjegyzés:

Egy másik megoldási módszer a következő. Legyen A az az esemény, hogy a kihúzott három lap között van piros lap és B az az esemény, hogy van ász. Ekkor:

$$P(AB) = 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) + P(\overline{A}\,\overline{B}) = 1 - \frac{\binom{24}{3}}{\binom{32}{3}} - \frac{\binom{28}{3}}{\binom{32}{3}} + \frac{\binom{21}{3}}{\binom{32}{3}} .$$

14.2.8. Az összes esetek száma: 6^4.

a) $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} = \dfrac{5}{18}$.

b) $\dfrac{5^2 \cdot 6}{6^4} = \dfrac{25}{216}$.

c) Az az esemény, hogy lesz két 6-os egymás után, felbontható a következő három egymást kizáró esemény összegére.

(i) Az első két dobás 6-os; az ilyen esetek száma 36.

(ii) Az első dobás nem 6-os és a második és a harmadik dobás 6-os; az ilyen esetek száma: $5 \cdot 6 = 30$.

(iii) A második dobás nem 6-os és a harmadik és a negyedik dobás 6-os; az ilyen esetek száma: $6 \cdot 5 = 30$.

Így annak a valószínűsége, hogy nem lesz két 6-os egymás után:

$$1-\frac{36+30+30}{6^4}=\frac{25}{27}.$$

Egy másik megoldási módszer a következő:

Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik és az (i+1)-edik dobás 6-os. Ekkor annak a valószínűsége, hogy nem lesz két 6-os egymás után:

$$P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3)=1-P(A_1)-P(A_2)-P(A_3)+P(A_1A_2)+$$
$$+P(A_1A_3)+P(A_2A_3)-P(A_1A_2A_3)=$$
$$=1-3\cdot\frac{6^2}{6^4}+\frac{6}{6^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{6}{6^4}-\frac{1}{6^4}=\frac{25}{27}.$$

d) 4^4 olyan eset van, amikor mind a négy kockán álló szám legfeljebb 4. Ezekből le kell vonni azt a 3^4 esetet, amikor mind a négy kockán álló szám legfeljebb 3, mert ilyenkor a maximum 4-nél kisebb lesz. Így a kérdezett valószínűség: $\frac{4^4-3^4}{6^4}=\frac{175}{1296}\approx 0{,}135$.

e) A megfelelő esemény felbontható a következő három egymást kizáró esemény összegére.

(i) Az első dobás 6-os és a következő három dobás közül legalább az egyik 1-es. Ekkor a három dobásra 6^3 lehetőség van, ebből 5^3 nem jó, tehát a megfelelő esetek száma $6^3-5^3=91$.

(ii) Az első dobás nem 6-os és nem 1-es, a második dobás 6-os és a maradó két dobás közül legalább az egyik 1-es. Az ilyen esetek száma $4\cdot 11=44$.

(iii) Az első két dobás nem 6-os és nem 1-es, a harmadik dobás 6-os és a negyedik 1-es. Az ilyen esetek száma $4\cdot 4=16$.

Így a kérdezett valószínűség: $\frac{91+44+16}{6^4}=\frac{151}{1296}\approx 0{,}117$.

Egy másik megoldási módszer a következő:

Nyilvánvaló, hogy elég kiszámolni annak a valószínűségét, hogy dobunk 1-est is és 6-ost is, majd ezt a valószínűséget 2-vel kell elosztani. Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy dobunk 1-est és A_6 azt az eseményt, hogy dobunk 6-ost. Ekkor annak a valószínűsége, hogy dobunk 1-est is és 6-ost is:

$$P(A_1A_6) = 1 - P(\overline{A}_1) - P(\overline{A}_6) + P(\overline{A}_1\,\overline{A}_6) =$$

$$= 1 - 2 \cdot \frac{5^4}{6^4} + \frac{4^4}{6^4} = \frac{151}{648},$$

amit 2-vel elosztva az előző megoldásban kapott eredményhez jutunk.

14.2.9. A10 golyó bármelyikét beletehetjük az 5 doboz bármelyikébe, ezért az összes esetek száma: $5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5 = 5^{10}$. Az első dobozba a 10 golyó közül bármelyik kettőt beletehetjük, majd a másodikba a maradó 8 golyó közül tehetünk kettőt, a harmadikba az így maradó 6 golyó közül tehetünk kettőt, a negyedikbe 4 golyó közül tehetünk kettőt, s végül a maradó két golyót az ötödik dobozba teszszük bele. Az elmondott esetek száma: $\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2} = \frac{10!}{2^5}$. Így a kérdezett valószínűség: $\frac{10!}{2^5 \cdot 5^{10}} \approx 0{,}01$.

14.2.10. Rakjunk le 10 egyforma golyót és négy egyforma függőleges szakaszt egy sorba. Ezek 14 helyet foglalnak. 10 helyen van golyó, 4 helyen függőleges szakasz és ezekkel jellemezhetők a 10 golyónak az 5 különböző dobozba való elhelyezései. Például a következő sorozat annak felel meg, hogy az első dobozban nincs golyó, a másodikban három, a harmadikban kettő, a negyedikben egy és az ötödikben négy golyó van:

$$|\,O\,O\,O\,|\,O\,O\,|\,O\,|\,OOOO.$$

A 14 helyből a 4 függőleges szakaszt $\binom{14}{4}$-féleképpen lehet kiválasztani, a többi helyre kerül a 10 golyó.

Így a kérdezett valószínűség: $\frac{1}{\binom{14}{4}} = \frac{1}{1001} \approx 0{,}001$.

14.2.11.

a) $1-\frac{2\cdot 5!}{6!}=\frac{2}{3}$.

b) $\frac{4!}{6!}=\frac{1}{30}$.

14.3. Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel

14.3.1. Itt a visszatevés nélküli mintavétel

$$\frac{\binom{s}{k}\binom{m-s}{n-k}}{\binom{m}{n}} \quad (k=0,1,2,\ldots,n)$$

képletében $m=100$, $s=5$, $n=10$ és $k=3$, tehát a valószínűség:

$$\frac{\binom{5}{3}\binom{95}{7}}{\binom{100}{10}}\approx 0{,}006\,.$$

14.3.2.

a) $\frac{\binom{8}{2}\binom{24}{2}}{\binom{32}{4}}\approx 0{,}21$.

b) $1-\frac{\binom{28}{4}}{\binom{32}{4}}\approx 0{,}43$.

c) $\frac{\binom{24}{4}+\binom{8}{1}\binom{24}{3}}{\binom{32}{4}}\approx 0{,}1$.

14.3.3. $\dfrac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5).$

14.3.4.

a) Itt a visszatevéses mintavétel $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \ (k = 0, 1, ..., n)$ képletében $p = \frac{5}{8}$, $n = 10$, és $k = 3$.

Tehát a valószínűség: $\binom{10}{3}\left(\frac{5}{8}\right)^3\left(\frac{3}{8}\right)^7 \approx 0{,}03$.

b) Annak az eseménynek az ellentettje, hogy legalább egy fehér golyót húzunk az, hogy nem húzunk fehér golyót, vagyis mind a 10 húzásnál piros golyót húzunk, tehát a kérdezett valószínűség: $1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{10} \approx 0{,}99$.

c) Akkor húzunk több piros golyót, mint fehéret, ha legalább hatszor, vagyis 6-szor, 7-szer, 8-szor, 9-szer, vagy 10-szer húzunk piros golyót. Így a visszatevéses mintavétel képlete alapján a kérdéses valószínűség a következő: $\sum_{k=6}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{5}{8}\right)^k\left(\frac{3}{8}\right)^{10-k}$.

14.3.5. A visszatevés nélküli mintavételhez kevés adatunk van, ezért – feltételezve, hogy a tranzisztorok száma nagy – a visszatevéses mintavétel képletével számolunk (ld. a jelöléseket a 14.3.4. feladat megoldásánál), amelyben most n=10, p=0,03 és k=2,

tehát a valószínűség: $\binom{10}{2} 0{,}03^2\, 0.97^8 \approx 0{,}03$.

14.3.6.

a) A visszatevés nélküli mintavétel esetén (ld. a jelöléseket a 14.3.1. feladat megoldásánál) a várható érték: $\frac{ns}{m}$, a szórásnégyzet pedig $\frac{ns}{m}\left(1-\frac{s}{m}\right)\frac{m-n}{m-1}$. Így a megadott adatok alapján a következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\frac{5s}{m}=2, \quad \frac{5s}{m}\left(1-\frac{s}{m}\right)\frac{m-5}{m-1}=\frac{2}{3}.$$

Ebből: $m=10$ és $s=4$.

A minta akkor tartalmaz legfeljebb 2 selejtes alkatrészt, ha 0, 1, vagy 2 selejtes alkatrészt tartalmaz, tehát a kiszámított adatokkal a visszatevés nélküli mintavétel képlete alapján a kérdezett valószínűség a következő:

$$\frac{\binom{6}{5}}{\binom{10}{5}}+\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{4}}{\binom{10}{5}}+\frac{\binom{4}{2}\binom{6}{3}}{\binom{10}{5}}=\frac{31}{42}\approx 0{,}74.$$

b) A visszatevéses mintavétel esetén (ld. a jelöléseket a 14.3.4. feladat megoldásánál), a várható érték np, a szórásnégyzet pedig np(1–p). Tehát a megadott adatok alapján a következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$np=2, \quad np(1-p)=\frac{2}{3}.$$

Ebből: $n=3$ és $p=\frac{2}{3}$.

Így a minta 3 elemű, tehát annak az eseménynek az ellentettje, hogy a minta legfeljebb 2 selejtes alkatrészt tartalmaz az, hogy a minta 3 selejtes alkatrészt tartalmaz. Ezért a visszatevéses mintavétel képlete alapján a kérdezett valószínűség a következő:

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{19}{27}.$$

14.4. Feltételes valószínűség és függetlenség

14.4.1. A feltételes valószínűség definíciójából és az adott valószínűségekből felírhatjuk a következő egyenlőségeket:

$$\frac{1}{4}=P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=4\cdot P(AB) \quad \text{és} \quad \frac{1}{2}=P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Így $P(AB)=\frac{1}{16}$ és $P(B)=\frac{1}{8}$. Tehát:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{5}{16}.$$

$$P(\overline{A}\mid\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A+B})}{1-P(B)}=\frac{1-P(A+B)}{1-P(B)}=\frac{1-\frac{5}{16}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{11}{14}.$$

14.4.2. Az AB_1 esemény akkor következik be, ha csak az egyik kockán áll 6-os. Ilyen eset 10 van. 30 olyan eset van, amikor a két kockán különböző szám áll. Így:

$$P(A\mid B_1)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}.$$

Az AB_2 eseménynek a (6;6), (6;2), (6;4), (2;6) és (4;6) számpárok felelnek meg. A B_2 esemény akkor következik be, ha a dobott számok összege 2, 4, 6, 8, 10 vagy 12. Az ennek megfelelő esetek száma: 1 + 3 + 5 + 5 +3 + 1 =18. Így:

$$P(A\mid B_2)=\frac{5}{18}.$$

Az AB_3 eseménynek a (6;4) és (4;6) számpárok, a B_3 eseménynek a (4;4), (4;5), (4;6), (5;4) és (6;4) számpárok felelnek meg. Így:

$$P(A\mid B_3)=\frac{2}{5}.$$

14.4.3. Legyen A az az esemény, hogy a kihúzott golyó piros, B_1 az, hogy az első urnából húzunk és B_2 az, hogy a második urnából húzunk.

a) A teljes valószínűség tétele alapján:

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)=\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{49}{80}\approx 0{,}61.$$

b) $P(B_1|A)=\dfrac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\dfrac{\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{49}{80}}=\dfrac{24}{49}\approx 0{,}49.$

Megjegyezzük, hogy itt valójában a Bayes-tétel legegyszerűbb esetét írtuk fel.

14.4.4. A teljes valószínűség tétele alapján a kérdezett valószínűség:

$$0{,}98\cdot\frac{6}{10}+0{,}99\cdot\frac{3}{10}+0{,}995\cdot\frac{1}{10}=0{,}9845.$$

14.4.5. A teljes valószínűség tétele alapján a kérdezett valószínűség:

$$1\cdot\frac{1}{6}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{6}+\frac{8}{16}\cdot\frac{1}{6}+\frac{13}{32}\cdot\frac{1}{6}+\frac{21}{64}\cdot\frac{1}{6}=\frac{77}{128}\approx 0{,}6.$$

14.4.6. $\binom{4}{2}\dfrac{86\cdot 85\cdot 10\cdot 9}{96\cdot 95\cdot 94\cdot 93}\approx 0{,}05.$

14.4.7. Jelölje B_i azt az eseményt, hogy az oktató az i-edik teremben tartózkodik (i=1, 2, 3, 4, 5). A kérdezett feltételes valószínűség a következő:

$$P(B_5|\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3\overline{B}_4)=\frac{P(B_5\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3\overline{B}_4)}{P(\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3\overline{B}_4)}=\frac{P(B_5)}{P(\overline{B_1+B_2+B_3+B_4})}=$$

$$=\frac{P(B_5)}{1-P(B_1+B_2+B_3+B_4)}=\frac{\frac{p}{5}}{1-4\cdot\frac{p}{5}}=\frac{p}{5-4p}.$$

14.4.8. $1\cdot\frac{1}{4}+\frac{49}{50}\cdot\frac{1}{6}+\frac{48}{50}\cdot\frac{1}{12}+\frac{47}{50}\cdot\frac{5}{12}+\frac{46}{50}\cdot\frac{1}{12}\approx 0{,}96$.

14.4.9. $\frac{1}{32}=P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}=P(AC)=P(A)P(C)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$.
$\frac{1}{8}=P(BC)\neq P(B)P(C)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}$.

14.4.10. $P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B)=$
$=(1-P(A))P(B)=P(\overline{A})P(B)$;
$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})-P(\overline{A}B)=P(\overline{A})-P(\overline{A})P(B)=P(\overline{A})(1-P(B))=$
$=P(\overline{A})P(\overline{B})$.

14.4.11. $1-0{,}85\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}39$.

14.4.12. $\frac{\binom{960}{15}}{\binom{1000}{15}}\cdot\frac{\binom{960}{15}}{\binom{1000}{15}}\approx 0{,}29$.

14.5. Diszkrét valószínűségi változók és nevezetes eloszlások

14.5.1. $P(\xi=k)=\binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad (k=0,1,2,3,4)$.

14.5.2.

a) $p^3+3p^2q+3pq^2+q^3=(p+q)^3=1$. (p paraméterű 3-adrendű binomiális eloszlás.)

b) $\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)^{10}\neq 1$. (Nem eloszlás.)

c) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}e^{-2}=e^2\cdot e^{-2}=1$. (2 paraméterű Poisson-eloszlás.)

d) $\sum_{k=0}^{4}\frac{\binom{6}{k}\binom{14}{4-k}}{\binom{20}{4}}=1$ (Visszatevés nélküli mintavétel képlete vagy hipergeometrikus eloszlás: m = 20, s = 5, n = 4; a jelölések megtalálhatók például a 14.3.1. feladat megoldásánál.)

e) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

f) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1$. ($\frac{1}{3}$ paraméterű geometriai eloszlás.)

14.5.3. Binomiális eloszlásról van szó: n = 10, k =4 és p = 0,49. Tehát a kérdezett valószínűség:

$$\binom{10}{4}0{,}49^4\,0{,}51^6\approx 0{,}21.$$

14.5.4.

a) $\sum_{k=3}^{20}\binom{20}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{20-k}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{20}-\frac{20}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{19}-\frac{190}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{18}\approx 0{,}96$.

b) $\sum_{k=3}^{5}\binom{20}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{20-k}\approx 0{,}28$.

14.5.5.

a) $\binom{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 0{,}16$.

b $\sum_{k=2}^{5}\binom{5}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$ $\left(=1-\left(\frac{5}{6}\right)^5-\left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0{,}2\right)$.

c) $\sum_{i=0}^{2}\binom{5}{2i}\left(\frac{1}{2}\right)^5$ $\left(=\frac{1}{2}\right)$.

14.5.6.

a) $\binom{15}{5}0{,}6^5 \cdot 0{,}4^{10} \approx 0{,}02$.

b) $\sum_{k=0}^{4}\binom{15}{k}0{,}6^k \cdot 0{,}4^{15-k} \approx 0{,}01$.

c) $\sum_{k=2}^{15}\binom{15}{k}0{,}6^k \cdot 0{,}4^{15-k}$ $\left(=1-0{,}4^{15}-15\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4^{14} \approx 1.\right)$

14.5.7. Azt a legkisebb n pozitív egész számot kell megkeresni, melyre: $\left(\frac{5}{6}\right)^n + n\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \le \frac{1}{2}$. A keresett érték n=10.

14.5.8. A Poisson-eloszlás paramétere a beérkező hívások átlagos száma, tehát 5. Így a Poisson-eloszlás képlete alapján a válaszok:

a) $\frac{5^2}{2!}e^{-5} \approx 0{,}08$. **b)** $\sum_{k=0}^{3}\frac{5^k}{k!}e^{-5} \approx 0{,}27$. **c)** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{k!}e^{-5} = 1-e^{-5} \approx 0{,}99$.

14.5.9. Az egy oldalra eső sajtóhibák átlagos száma: $\frac{100}{400} = \frac{1}{4}$. Így 20 oldalra átlagosan 5 sajtóhiba jut, tehát a Poisson-eloszlás paramétere 5. Ezért a Poisson-eloszlás képlete alapján, annak a valószínűsége, hogy 20 oldalon nem lesz sajtóhiba: $e^{-5}\ (\approx 0{,}01)$.

14.5.10. $100e^{-0{,}16} \approx 85$.

14.5.11. A feltételek alapján feltehetjük, hogy ξ Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Mivel 5000 óra alatt átlagosan 10 gép romlik el, a Poisson-eloszlás paramétere 10. Így a Poisson-eloszlás képlete alapján:

$$P(\xi = k) = \frac{10^k}{k!}e^{-10} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

tehát a kérdezett valószínűség: $P(\xi \le 5) = \sum_{k=0}^{5} \frac{10^k}{k!}e^{-10} \approx 0{,}067$.

14.5.12.

a) Annak a valószínűsége, hogy egy dobás nem 6-os $\frac{5}{6}$. Az első 5 dobás egyike sem 6-os, aminek a valószínűsége a – a függetlenség miatt – $\left(\frac{5}{6}\right)^5$. Így annak a valószínűsége, hogy a hatodik dobás lesz először 6-os: $\left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}07$.

b) Ha a hatodik dobásnál dobunk másodszor 6-ost, akkor az első öt dobásnál pontosan egyszer dobunk 6-ost. Ez a 6-os dobás az első öt dobás bármelyike lehet, tehát annak a valószínűsége, hogy a hatodik dobásnál dobunk másodszor 6-ost:

$$5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \approx 0{,}07.$$

c) Ha a hatodik dobásnál dobunk harmadszor 6-ost, akkor az első öt dobásnál pontosan kétszer dobunk 6-ost. Ez a két 6-os dobás az első öt dobás bármelyike lehet, tehát annak a valószínűsége, hogy a hatodik dobásnál dobunk harmadszor 6-ost:

$$\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\approx 0{,}03\,.$$

14.5.13.

a) Annak a valószínűsége, hogy az első k–1 dobás nem 6-os: $\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ és annak a valószínűsége, hogy a k-adik dobás 6-os, $\frac{1}{6}$,

így: $P(\xi=k)=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}\quad(k=1,2,3,\ldots)$.

b) $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2i-1}\frac{1}{6}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^{i}=\frac{1}{5}\cdot\frac{25}{36}\cdot\frac{1}{1-\frac{25}{36}}=\frac{5}{11}$.

c) Annak a valószínűsége, hogy az első k–1 dobás között pontosan egy 6-os van: $(k-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}\cdot\frac{1}{6}$ és annak a valószínűsége, hogy a k-adik dobás 6-os: $\frac{1}{6}$. Így:

$$P(\eta=k)=(k-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\quad(k=2,3,\ldots).$$

14.5.14.

a) A visszatevés nélküli mintavétel képlete alapján (a jelölések megtalálhatók a 14.3.1. feladat megoldásánál):

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{\binom{21}{k}\binom{7}{10-k}}{\binom{28}{10}} \quad (k = 3, 4, \ldots, 10).$$

Ebből felírhatók a megfelelő valószínűségek és meg lehet nézni, hogy melyik valószínűség a legnagyobb. Egyszerűbb és általánosítható is a következő megoldás. Vizsgáljuk meg a $\frac{p_k}{p_{k-1}}$ hányadost! Egyszerű számolással kapjuk, hogy:

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{(22-k)(11-k)}{k(k-3)} = 1 + \frac{232-30k}{k(k-3)}.$$

Ebből látható, hogy:

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} > 1, \text{ ha } 4 \le k \le 7 \text{ és } \frac{p_k}{p_{k-1}} < 1, \ 7 < k \le 10.$$

Tehát a p_7 a legnagyobb, s ezért ξ a 7-et veszi fel a legnagyobb valószínűséggel.

b) Most a visszatevéses mintavétel képlete alapján (a jelölések megtalálhatók a 14.3.1. feladat megoldásánál):

$$p_k = P(\xi = k) = \binom{10}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{10-k} \quad (k = 0, 1, \ldots, 10).$$

$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{3(11-k)}{k} = 1 + \frac{33-4k}{k}$. Ebből következik, hogy:

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} > 1, \text{ ha } 1 \le k \le 8 \text{ és } \frac{p_k}{p_{k-1}} < 1, \ 8 < k \le 10.$$

Tehát a p_8 a legnagyobb, s ezért ξ a 8-at veszi fel a legnagyobb valószínűséggel.

Megjegyzés. Itt is kiszámolhatók a megfelelő valószínűségek és látható, hogy melyik valószínűség a legnagyobb, de az adott megoldási módszer minden esetben sokkal kevesebb számolással adja meg a feladat eredményét.

14.5.15. Ha a kihúzott öt szám közül k a legnagyobb, akkor a maradó négy számot a k-nál kisebb számok közül kell kiválasztani, tehát:

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{k-1}{4}}{\binom{90}{5}} \quad (k = 5, 6, \ldots, 90).$$

Ha a kihúzott öt szám közül k a legkisebb, akkor a maradó négy számot a k-nál nagyobb számok közül kell kiválasztani, tehát:

$$P(\eta = k) = \frac{\binom{90-k}{4}}{\binom{90}{5}} \quad (k = 1, 6, \ldots, 86).$$

14.5.16. $k=[\lambda]$, ahol a szögletes zárójel a λ egész részét jelöli.

14.6. Eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény

14.6.1.

a) $F(x)$ felírható a következő alakban: $F(x) = 1 - \frac{1}{1+e^x}$. Az e^x és így az $1 + e^x$ is szigorúan monoton növekvő, ezért az $1 + e^x$ reciproka szigorúan monoton csökkenő és ennek a (-1)-szerese szigorúan monoton növekvő, amihez 1-et hozzáadva ismét szigorúan monoton növekvő függvényt kapunk. Így $F(x)$ szigorúan monoton növekvő. $F(x)$ folytonos, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ és $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Tehát $F(x)$ teljesíti annak a tételnek a feltételeit, amelyből következik, hogy $F(x)$ eloszlásfüggvény. Ha $F(x)$-nek van sűrűségfüggvénye, akkor a sűrűségfüggvény:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$

(Megjegyezzük, hogy van olyan általános tétel, amelyből következik, hogy ennek az $F(x)$ függvénynek van sűrűségfüggvénye).

Mivel F(x) folytonos, $P(\xi > 0) = 1 - F(0) = \frac{1}{2}$ és

$$P(\ln 2 \le \xi \le \ln 3) = F(\ln 3) - F(\ln 2) = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}.$$

b) Teljesülnek az eloszlásfüggvény tulajdonságai. A sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & \text{ha} \quad -1 < x < 1, \\ 0, & \text{máshol.} \end{cases}$$

$$P\left(|\xi| < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}, \quad P\left(\xi \ge \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{6}, \quad P(-2 < \xi < 0) = \frac{1}{2}.$$

c) Teljesülnek az eloszlásfüggvény tulajdonságai. A sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < 0, \\ \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & \text{ha} \quad x \ge 0. \end{cases}$$

$$P(\xi \ge \sigma) = e^{-\frac{1}{2}}, \quad P\left(\frac{\sigma}{2} < \xi < 2\sigma\right) = e^{-\frac{1}{8}} - e^{-2}.$$

d) Teljesülnek az eloszlásfüggvény tulajdonságai. A sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x_o^3}{x^4}, & \text{ha} \quad x > x_o, \\ 0, & \text{ha} \quad x \le x_o. \end{cases}$$

$$P(\xi < 2x_o) = \frac{7}{8}, \quad P(0 < \xi < x_o^2) = 1 - \frac{1}{x_o^3}.$$

e) Teljesülnek az eloszlásfüggvény tulajdonságai. A sűrűségfüggvény:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad x<1,\\ \dfrac{2}{(x+1)^2}, & \text{ha} \quad x\geq 1.\end{cases}$$

$$P(\xi>2)=\frac{2}{3},\ P(0<\xi<3)=\frac{1}{2}.$$

14.6.2.

a) Ha F(x) eloszlásfüggvény, akkor $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$ és $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg}x=\pm\frac{\pi}{2}$, tehát:

$$A-B\cdot\frac{\pi}{2}=0$$

$$A+B\cdot\frac{\pi}{2}=1.$$

Ebből $A=\frac{1}{2}$ és $B=\frac{1}{\pi}$. A kapott $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x$ függvény szigorúan monoton növekvő és folytonos. Így teljesülnek az eloszlásfüggvény tulajdonságai.

b) $A=B=\frac{1}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$, tehát A = 1. F(x) a 0-ban balról folytonos, tehát A + B = 0. Így B = –1.

d) Az eloszlásfüggvény balról folytonos, tehát:

$$0=\lim_{x\to-1^-}F(x)=F(-1)=A+B\cdot\arcsin(-1)=A+B\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$A+B\cdot\frac{\pi}{2}=A+B\cdot\arcsin 1=\lim_{x\to1^-}F(x)=F(1)=1.$$

A kapott egyenletrendszerből: $A=\frac{1}{2}$ és $B=\frac{1}{\pi}$. Ezzel az A és B értékkel felírt F(x) függvény teljesíti az eloszlásfüggvény tulajdonságait.

e) A = 1 és B = –1. **f)** A = 0 és B= 1. **g)** A = 0 és B= 3.

14.6.3.

a) $f(x)>0$ és $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \left[\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x\right]_{-\infty}^{+\infty} =$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

Így teljesülnek a sűrűségfüggvény tulajdonságai.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{x} \frac{du}{\pi(1+u^2)} = \left[\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} u\right]_{-\infty}^{x} =$$

$$=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x.$$

b) $f(x)\ge 0$ és

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{\lambda x}\right]_{0}^{+\infty} = 1.$$

Tehát teljesülnek a sűrűségfüggvény tulajdonságai.

Ha $x\le 0$, akkor $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = 0$, mert u < 0 esetén f(u) = 0.

Ha x > 0, akkor $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{0} f(u)\,du + \int_{0}^{x} f(u)\,du =$

$$=\int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda u}\,du = = \left[-e^{-\lambda u}\right]_{0}^{x} = -e^{-\lambda x}-(-1),$$

mert u < 0 esetén f(u) = 0 és $u\ge 0$ esetén $f(u)=\lambda e^{-\lambda u}$. Tehát:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & \text{ha} \quad x>0,\\ 0, & \text{ha} \quad x\le 0.\end{cases}$$

c) Teljesülnek a sűrűségfüggvény tulajdonságai.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad x\le 1,\\ 1-\dfrac{1}{x}, & \text{ha} \quad x>1.\end{cases}$$

d) $f(x)\ge 0$ és $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx+\int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx+\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx=$

$$=\int\limits_{0}^{1}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_0^1=1.$$

Így teljesülnek a sűrűségfüggvény tulajdonságai.

Ha $x\le 0$, akkor $F(x)=0$, mert $u<0$ esetén $f(u)=0$.

Ha $0<x\le 1$, akkor $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(u)\,du=\int\limits_{-\infty}^{0} f(u)\,du+\int\limits_{0}^{x} f(u)\,du=$

$$=\int\limits_{0}^{x}\left(u+\frac{1}{2}\right)du=\left[\frac{u^2}{2}+\frac{1}{2}u\right]_0^x=\frac{x^2+x}{2},$$

mert $u<0$ esetén $f(u)=0$ és $u\ge 0$ esetén $f(u)=u+\dfrac{1}{2}$.

Ha $x>1$, akkor $F(x)=1$.

e) Teljesülnek a sűrűségfüggvény tulajdonságai.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad x\le\dfrac{\pi}{12},\\ 2\sin 2x-1, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{12}<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 1, & \text{ha} \quad x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

14.6.4. $f(x) \geq 0$ és

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{c}^{3} \frac{x-c}{3-c}\,dx + \int_{3}^{c+1} 1\,dx + \int_{c+1}^{4} \frac{4-x}{3-c}\,dx =$$

$$= \left[\frac{(x-c)^2}{2(3-c)}\right]_c^3 + [x]_3^{c+1} + \left[\frac{(4-x)^2}{-2(3-c)}\right]_{c+1}^4 =$$

$$= \frac{3-c}{2} + c - 2 + \frac{3-c}{2} = 1.$$

14.6.5.

a) A sűrűségfüggvény integrálja a számegyenesen 1. Így:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{2}^{+\infty} \frac{c}{x^3}\,dx = \left[-\frac{c}{2x^2}\right]_2^{\infty} = \frac{c}{8}.$$

Tehát c = 8. Ezzel a c-vel felírt f(x) függvény nem negatív. Tehát f(x) valóban sűrűségfüggvény.

Ha $x < 2$, akkor $f(x) = 0$, tehát $x \leq 2$ esetén $F(x) = 0$.

Ha $x > 2$, akkor:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{2} f(u)\,du + \int_{2}^{x} f(u)\,du = \int_{2}^{x} \frac{8}{u^3}\,du = \left[-\frac{4}{u^2}\right]_2^x =$$

$$= -\frac{4}{x^2} + 1.$$ Így:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leq 2, \\ 1 - \dfrac{4}{x^2}, & \text{ha} \quad x > 2. \end{cases}$$

b) $$\int_{4}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\int_{4}^{+\infty} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \frac{1}{3}\left[\ln\frac{x-1}{x+2}\right]_4^{+\infty} = \frac{\ln 2}{3}.$$

Tehát $c = \dfrac{3}{\ln 2}$.

Ha $x \leq 4$, akkor $F(x) = 0$. Ha $x > 4$, akkor:

$$F(x) = \int_{4}^{x} \frac{3}{\ln 2} \cdot \frac{1}{u^2+u-2}\,du = \frac{1}{\ln 2}\left[\ln\frac{u-1}{u+2}\right]_u^x = 1 + \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln\frac{x-1}{x+2}.$$

c) $c = 1$ és

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \le 0, \\ 1-(x+1)e^{-x}, & \text{ha} \quad x > 0. \end{cases}$$

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[e^{x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-e^{-x}\right]_{0}^{+\infty} = 2.$

Így $c = \frac{1}{2}$. Ha $x \le 0$, akkor:

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} e^{-|u|}\,du = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} e^{u}\,du = \frac{1}{2} e^{x}$. Ha $x > 0$, akkor:

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} e^{-|u|}\,du = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^{u}\,du + \int_{0}^{x} \frac{1}{2} e^{-u}\,du = 1 - \frac{1}{2} e^{-x}.$

e) $c = \frac{3}{14}$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \le 0, \\ \dfrac{(x+1)^{\frac{3}{2}} - 1}{7}, & \text{ha} \quad 0 < x \le 3, \\ 1, & \text{ha} \quad x > 3. \end{cases}$$

f) Alkalmazzuk a $\sqrt{x} = u$ helyettesítést. Ekkor $x = u^2$, tehát $dx = 2u\,du$. Így:

$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{2\pi}$, ahol először azt használtuk fel, hogy e^{-u^2} páros függvény, tehát a számegyenesen vett integrálja a 0-tól $+\infty$-ig vett integráljának a kétszerese, továbbá $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2}$ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye, s ezért a számegyenesen vett integrálja 1. Tehát $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Ha $x \le 0$, akkor az eloszlásfüggvény $F(x) = 0$.

Ha $x > 0$, akkor alkalmazva a $\sqrt{u} = t$ helyettesítést, azt kapjuk, hogy:

$$F(x)= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-u}\, du = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2}\, dt = 2\left(\Phi\left(\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2}\right).$$

(Ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.)

g) Parciális integrálással kapjuk, hogy:

$$\int_1^e x \ln x\, dx = \left[\frac{x^2 \ln x}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{1+e^2}{4}, \text{ tehát } c = \frac{4}{1+e^2}.$$

Ha $1 < x \le e$, akkor:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)\, du = \int_1^x \frac{4}{1+e^2}\, u \cdot \ln u\, du = \frac{4}{1+e^2}\left[\frac{u^2 \ln u}{2} - \frac{u^2}{4}\right]_1^x =$$

$$= \frac{x^2(2\ln x - 1)+1}{1+e^2}. \text{ Így:}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 1, \\ \dfrac{x^2(2\ln x - 1)+1}{1+e^2}, & \text{ha } 1 < x \le e, \\ 1, & \text{ha } x > e. \end{cases}$$

h) Parciális integrálással kapjuk, hogy:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos x\, dx = \left[x \arccos x\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} - \left[\sqrt{1-x^2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}. \text{ Így } c = \frac{2}{\pi}.$$

Ha $x \le -\frac{1}{2}$, akkor $F(x) = 0$.

Ha $-\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}$, akkor

$$F(x)=\int_{-\frac{1}{2}}^{x}\frac{2}{\pi}\arccos u\,du=\frac{2}{\pi}\left[u\arccos u-\sqrt{1-u^2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{x}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ha $x>\frac{1}{2}$, akkor $F(x)=1$.

i) Legyen a parciális integrálás

$\int_a^b f'g\,dx=[fg]_a^b-\int_a^b fg'\,dx$ képletében $f'=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ és $g=x$.

Ekkor $f=-e^{-\frac{x^2}{2}}$ és $g'=1$. Így:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\left[-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Mivel $xe^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}$, a L'Hospital szabály alapján:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{xe^{\frac{x^2}{2}}}=0.$$

Az $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ függvény a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye, tehát:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=1,\ \text{így}\ \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\sqrt{2\pi}.$$

Az elmondottak alapján: $c=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ és $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}u^2e^{-\frac{u^2}{2}}\,du=$

$$=-x\cdot\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}+\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du=-x\varphi(x)+\Phi(x),$$

ahol $\varphi(x)$ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye és $\Phi(x)$ pedig az eloszlásfüggvénye.

14.7. Várható érték és szórás

14.7.1. Jelölje ξ az egy sorsjegyre jutó nyereményt! Ekkor

$$M(\xi)=\frac{1}{50000}\cdot 100000+\frac{10}{50000}\cdot 10000+\frac{1000}{50000}\cdot 500=14.$$

Így egy jegy ára legyen $14\cdot 1{,}5$ Ft = 21 Ft.

14.7.2. ξ binomiális eloszlású valószínűségi változó: n = 5 és $p=\frac{1}{6}$. Tehát, $M(\xi)=np=\frac{5}{6}$ és $D(\xi)=\sqrt{np(1-p)}=\frac{5}{6}$.

Jelölje az η_i valószínűségi változó az i-edik dobásnál dobott számot (i = 1, 2, 3, 4, 5). Ekkor $\eta=\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4+\eta_5$. Így:

$$M(\eta)=M(\eta_1)+M(\eta_2)+M(\eta_3)+M(\eta_4)+M(\eta_5)=$$
$$=5\cdot M(\eta_1)=5\cdot 3{,}5=17{,}5.$$
$$D^2(\eta)=D^2(\eta_1)+D^2(\eta_2)+D^2(\eta_3)+D^2(\eta_4)+D^2(\eta_5)=$$
$$=5\cdot D^2(\eta_1)=5\cdot\frac{91}{6}=\frac{455}{6}.$$ Tehát $D(\eta)\approx 8{,}71$.

Megjegyezzük, hogy az η eloszlását nehéz felírni és azután abból nehéz a várható értéket és a szórást kiszámolni.

14.7.3. Jelölje ξ a kihúzott golyók számát! A $\{\xi=k\}$ $(k=1,2,\ldots,7)$ esemény akkor következik be, ha az első (k – 1) húzásnál fehér és a k-adik húzásnál piros golyót húzunk. A megfelelő valószínűségek:

$$P(\xi=1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5};\quad P(\xi=2)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{15};$$
$$P(\xi=3)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{1}{6};\quad P(\xi=4)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{2}{21};$$

$$P(\xi=5)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{1}{21};$$

$$P(\xi=6)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{105};$$

$$P(\xi=7)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}=\frac{1}{210};$$

Ebből egyszerű számolással a következő eredményeket kapjuk.

$$M(\xi)=\sum_{k=1}^{7}k\cdot P(\xi=k)=\frac{11}{5}.\quad M(\xi^2)=\sum_{k=1}^{7}k^2\,P(\xi=k)=\frac{33}{5}\text{ és így}$$

$$D(\xi)=\sqrt{M(\xi^2)-(M(\xi))^2}=\frac{2\sqrt{11}}{5}\approx 1{,}33.$$

14.7.4. Jelölje ξ a kihúzott golyók számát! A $\{\xi=k\}$ $(k=1,2,...)$ esemény akkor következik be, ha az első $(k-1)$ húzásnál fehér és a k-adik húzásnál piros golyót húzunk. Ennek a valószínűsége:

$$P(\xi=k)=\left(\frac{6}{10}\right)^{k-1}\frac{4}{10}=\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}.\text{ Így}$$

$$M(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}. \qquad (1)$$

Szorozzuk meg az (1) egyenlőség mindkét oldalát $\frac{3}{5}$-el! Ekkor:

$$\frac{3}{5}M(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{k}=\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}. \qquad (2)$$

Mivel $k\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}-(k-1)\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}=\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}$, az (1) egyenlőségből a (2)-t kivonva azt kapjuk, hogy $\frac{2}{5}M(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}$.

A mértani sorozat összegképlete alapján a jobb oldal értéke 1, így

$$M(\xi)=\frac{5}{2}.$$

Megjegyezzük, hogy egy másik megoldási módszer található a 14.7.6. feladat megoldásánál.

14.7.5. Pista nyereségének a várható értéke $\frac{1508}{595}\,\text{Ft} \approx 2{,}53\,\text{Ft}$, tehát neki előnyösebb a játék. A játék akkor lesz igazságos ha Gábor a 100 Ft helyett $\frac{579920}{6327} \approx 91{,}66\,\text{Ft}$-ot fizet Pistának.

14.7.6. $\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k\,x^{k-1} = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty} k\,x^k$. Ebből:

$\sum_{k=1}^{\infty} k\,x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$. Így a várható érték: $M = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2.$

Megjegyezzük, hogy egy másik megoldási módszer található a 14.7.4. feladat megoldásánál.

14.7.7.

a) $M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = \int_{1}^{+\infty} x \cdot \frac{3}{x^4}\,dx = \left[-\frac{3}{2x^2}\right]_1^{+\infty} = \frac{3}{2}.$

$M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{1}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{3}{x^4}\,dx = \left[-\frac{3}{x}\right]_1^{+\infty} = 3.$

$D(\xi) = \sqrt{M(\xi^2) - (M(\xi))^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87.$

Megjegyezzük, hogy, ha $x < 0$ esetén $f(x) = 0$, akkor az $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx$ integrál akkor és csak akkor abszolút konvergens, ha konvergens.

b) $M(\xi) = 1$ és $D(\xi) = 1$.

c) $M(\xi) = 2$ és $D(\xi) = \sqrt{2}$.

d) $M(\xi)=\frac{7}{12}\approx 0{,}58$ és $D(\xi)=\frac{\sqrt{11}}{12}\approx 0{,}28$.

e) $M(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx=\int_{1}^{\infty} x\cdot\frac{2}{x^3}\,dx=\left[-\frac{2}{x}\right]_1^{\infty}=2$.

Megjegyezzük, hogy, ha $x<0$ esetén $f(x)=0$, akkor az $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx$ integrál akkor és csak akkor abszolút konvergens, ha konvergens.

$$M(\xi^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,f(x)\,dx=\int_{1}^{\infty} x^2\cdot\frac{2}{x^3}\,dx=\left[2\cdot\ln x\right]_1^{\infty}.$$

Mivel $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, ez az improprius integrál divergens, tehát a szórás nem létezik.

f) $M(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}\,dx=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_{-\infty}^{+\infty}$.

Mivel $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+x^2\right)=+\infty$, ez az improprius integrál divergens, tehát a várható érték nem létezik. Ekkor nem létezik a szórás sem.

g) $M(\xi)=\int_{0}^{1}\frac{4x}{\pi\left(1+x^2\right)}\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1=\frac{2\cdot\ln 2}{\pi}\approx 0{,}441$.

$$M(\xi^2)=\int_{0}^{1}\frac{4x^2}{\pi\left(1+x^2\right)}\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{4}{\pi}\left[x-\operatorname{arctg}x\right]_0^1=$$

$$=\frac{4}{\pi}-1.\quad D(\xi)=\sqrt{\frac{4}{\pi}-1-\left(\frac{2\cdot\ln 2}{\pi}\right)^2}\approx 0{,}280.$$

h) Mivel az $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-|x|}\,dx$ improprius integrál konvergens és f(x) páros függvény, a várható érték $M(\xi) = 0$.

$$M(\xi^2) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|}\,dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx = 2\,.\ \text{Így } D(\xi) = \sqrt{2}\,.$$

i) Mivel létezik a várható érték és f(x) páros függvény, a várható érték $M(\xi) = 0$.

$$M(\xi^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cdot\cos t\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\,.\ \text{Így } D(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\,.$$

j) $$M(\xi) = \int_0^1 x \arccos x\,dx = \left[\frac{x^2\cdot\arccos x}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cdot\cos t\right) dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\,dt = \frac{\pi}{8} \approx 0{,}393\,.$$

$$M(\xi^2) = \int_0^1 x^2 \arccos x\,dx = \left[\frac{x^3\cdot\arccos x}{3}\right]_0^1 + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^3 t}{\cos t}\cdot\cos t\right) dx = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\sin t\,dt = \frac{2}{9}\,.$$

$$D(\xi) = \sqrt{\frac{4}{9} - \left(\frac{\pi}{8}\right)^2} \approx 0{,}261\,.$$

k) $M(\xi)=\frac{\pi-2}{2}\approx 0{,}571$ és $D(\xi)=\sqrt{3\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{3}{2}-\left(\frac{\pi-2}{2}\right)^2}\approx 0{,}157$.

l) $M(\xi)=2$ és $D(\xi)=\sqrt{\frac{e^2-7}{2}}\approx 0{,}441$.

m) $M(\xi)=\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{4x+9}}\,dx=\int_3^5\left(\frac{t^2-9}{4t}\cdot\frac{t}{2}\right)dt=\frac{11}{6}\approx 1{,}83$.

$M(\xi^2)=\int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{4x+9}}\,dx=\int_3^5\frac{(t^2-9)^2}{32}\,dt=\frac{47}{10}$.

$D(\xi)=\frac{\sqrt{1205}}{30}\approx 1{,}16$.

n) $M(\xi)=\int_0^{+\infty} x\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\approx 0{,}798$.

Megjegyezzük, hogy, ha $x<0$ esetén $f(x)=0$, akkor az $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx$ integrál akkor és csak akkor abszolút konvergens, ha konvergens.

$M(\xi^2)=\int_0^{+\infty} x^2\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=2\int_0^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=$

$=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=1$, ahol felhasználtuk, hogy az $x^2\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ páros függvény és a standard normális eloszlás szórása 1. Így $D(\xi)=\sqrt{M(\xi^2)-(M(\xi))^2}=\sqrt{1-\frac{2}{\pi}}\approx 0{,}603$.

o) Mivel ξ várható értéke létezik és f(x) páros függvény $M(\xi) = 0$.

$$\sqrt{2\pi}\cdot M\left(\xi^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}x^3\cdot\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx=-\left[x^3e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}+$$

$$+3\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=3\cdot\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx=3\cdot\sqrt{2\pi}.$$

Tehát $D(\xi)=\sqrt{3}$.

14.7.8.

a) $M(\eta)=1$ és $D(\eta)=2$.

b) $M(\eta)=M(2\xi+1)=2M(\xi)+1=\frac{2}{\lambda}+1$.

$D(\eta)=D(2\xi+1)=2D(\xi)=\frac{2}{\lambda}$.

14.8. Nevezetes folytonos eloszlások

14.8.1.

a) A $\{|\xi|>0{,}2\}$ esemény a $\{\xi<-0{,}2\}$ és a $\{\xi>0{,}2\}$ egymást kizáró események összege. Így: $P(|\xi|>0{,}2)=P(\xi<-0{,}2)+P(\xi>0{,}2)$.

Mivel a ξ eloszlásfüggvénye folytonos:
$P(\xi<-0{,}2)=F(-0{,}2)$ és $P(\xi>0{,}2)=1-F(0{,}2)$.

Az m várható értékű, és σ szórású normális eloszlás F(x) eloszlásfüggvénye és a standard normális eloszlás $\Phi(x)$ eloszlásfüggvénye között az alábbi összefüggés áll fenn: $F(x)=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$.

Most m = 0 és $\sigma = 0{,}1$. Tehát:

$$F(-0{,}2)=\Phi\left(\frac{-0{,}2-0}{0{,}1}\right)=\Phi(-2)\text{ és }F(0{,}2)=\Phi\left(\frac{0{,}2-0}{0{,}1}\right)=\Phi(2).$$

A normális eloszlás eloszlásfüggvényére fennáll a
$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$, összefüggés, tehát $\Phi(-2)=1-\Phi(2)$.

Az elmondottakat összefoglalva azt kapjuk, hogy:
$P(|\xi| > 0{,}2) = 2 - 2\Phi(2)$.

Számológép vagy táblázat segítségével felírhatjuk, hogy
$\Phi(2) = 0{,}9772$. Így: $P(|\xi| > 0{,}2) = 2 - 2 \cdot 0{,}9772 = 0{,}0456$.

Ezután a második kérdésre adjuk meg a választ.
$0{,}0668 = P(\xi \geq x) = 1 - F(x)$. Ebből az előzőekben felhasznált összefüggések alapján a következő egyenlőséghez jutunk:

$$\Phi\left(\frac{x-0}{0{,}1}\right) = 0{,}9332.$$

Ismét számológép vagy táblázat segítségével felírhatjuk, hogy
$\Phi(1{,}5) = 0{,}9332$. Tehát $\frac{x}{0{,}1} = 1{,}5$. Így $x = 0{,}15$.

b) $\sigma = 2$ és $P(|\xi| \leq 2) = \Phi(1{,}5) + \Phi(0{,}5) - 1 = 0{,}6247$.

c) $$0{,}0228 = F(12) = \Phi\left(\frac{12 - 4\sigma}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4\sigma - 12}{\sigma}\right).$$

$$\frac{4\sigma - 12}{\sigma} = 2; \quad 4\sigma - 12 = 2\sigma; \quad \sigma = 6 \text{ és } m = 4\sigma = 24.$$

d) $m = 0$ és $P(|\xi| > 1) = 2(1 - \Phi(0{,}5)) = 0{,}6170$.

e) $m = 0$, $\sigma = 1$ és $P(|\xi| < 0{,}5) = 2\Phi(0{,}5) - 1 = 0{,}3830$.

14.8.2. Jelölje a ξ valószínűségi változó a mérési hibát!

a) $P(\xi \geq 0{,}5) = 1 - \Phi(0{,}5) = 0{,}3085$.

b) $$P(|\xi| \leq 0{,}2) = P(-0{,}2 \leq \xi \leq 0{,}2) = \Phi(0{,}2) - \Phi(-0{,}2) =$$
$$= 2\Phi(0{,}2) - 1 = 0{,}1586.$$

14.8.3. Jelölje az F(x) eloszlásfüggvényű ξ valószínűségi változó a flakonokba töltött mosószer mennyiségét és σ a szórását!

$$0{,}9876 = P(0{,}98 < \xi < 1{,}02) = F(1{,}02) - F(0{,}98) = \Phi\left(\frac{1{,}02-1}{\sigma}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{0{,}98-1}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{0{,}02}{\sigma}\right) - 1 \text{ . Ebből:}$$

$$\Phi\left(\frac{0{,}02}{\sigma}\right) = 0{,}9938;\ \frac{0{,}02}{\sigma} = 2{,}5;\ \sigma = 0{,}008 \text{ liter .}$$

14.8.4. Jelölje az F(x) eloszlásfüggvényű ξ valószínűségi változó a repülőgép repülési magasságának a légifolyosó közepétől való eltérését!

$$P(|\xi| \le 50) = P(-50 \le \xi \le 50) = F(50) - F(-50) = \Phi\left(\frac{50-20}{50}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{-50-20}{50}\right) = \Phi(0{,}6) - \Phi(-1{,}4) = \Phi(0{,}6) + \Phi(1{,}4) - 1 = 0{,}6449 .$$

14.8.5. Jelölje az F(x) eloszlásfüggvényű és σ szórású ξ valószínűségi változó a gyártmány mérethibáját!

$$0{,}1336 = P(|\xi| > 12) = P(\xi < -12) + P(\xi > 12) = F(-12) + 1 - F(12) =$$

$$= \Phi\left(-\frac{12}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{12}{\sigma}\right) = 2 - 2\Phi\left(\frac{12}{\sigma}\right) \text{ . Ebből:}$$

$$\Phi\left(\frac{12}{\sigma}\right) = 0{,}9332;\quad \frac{12}{\sigma} = 1{,}5;\quad \sigma = 8 \text{ . Tehát:}$$

$$P(|\xi| < 10) = 2\Phi\left(\frac{10}{8}\right) - 1 = 0{,}7888 .$$

14.8.6. Jelölje az F(x) eloszlásfüggvényű ξ valószínűségi változó a termék hosszát!

$$0{,}2881 = P(0{,}5m < \xi < m) = F(m) - F(0{,}5m) =$$

$$= \Phi(0) - \Phi\left(\frac{-0{,}5m}{4}\right) = \Phi(0{,}125m) - 0{,}5;$$

$$0{,}125m = 0{,}8;\quad m = 6{,}4 \text{ cm .}$$

$$P(\xi > 2m) = P(\xi > 12{,}8) = 1 - F(12{,}8) = 1 - \Phi\left(\frac{12{,}8 - 6{,}4}{4}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(1{,}6) = 0{,}0548.$$

14.8.7. Jelölje az F(x) eloszlásfüggvényű, m várható értékű és σ szórású ξ valószínűségi változó a lécek hosszát!

$$0{,}3085 = P(\xi < 143) = F(143) = \Phi\left(\frac{143 - m}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{m - 143}{\sigma}\right);$$

$$\Phi\left(\frac{m - 143}{\sigma}\right) = 0{,}6915; \quad \frac{m - 143}{\sigma} = 0{,}5;$$

$$m = 0{,}5\sigma + 143 \qquad (1)$$

$$0{,}1587 = P(\xi > 146) = 1 - F(146) = 1 - \Phi\left(\frac{146 - m}{\sigma}\right);$$

$$\Phi\left(\frac{146 - m}{\sigma}\right) = 0{,}8413; \quad \frac{146 - m}{\sigma} = 1;$$

$$m = 146 - \sigma \qquad (2)$$

(1) és (2)-ből: m = 144 és σ = 2.

$$P(143{,}5 < \xi < 144{,}5) = F(144{,}5) - F(143{,}5) = \Phi\left(\frac{144{,}5 - 144}{2}\right) -$$

$$- \Phi\left(\frac{143{,}5 - 144}{2}\right) = \Phi(0{,}25) - \Phi(-0{,}25) = 0{,}1974.$$

14.8.8. A sűrűségfüggvény: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{ha} \quad 1 < x < 4, \\ 0, & \text{máshol.} \end{cases}$

Az eloszlásfüggvény: $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \le 1, \\ \frac{x-1}{3}, & \text{ha} \quad 1 < x \le 4, \\ 1, & \text{ha} \quad x > 4. \end{cases}$

A várható érték: $M(\xi) = 2{,}5$. A szórás: $D(\xi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

14.8.9. Tudjuk, hogy ha ξ az (a;b) intervallumon egyenletes eloszlású, akkor:

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2} \quad \text{és} \quad D^2(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Így a feladat feltételei alapján a következő egyenletrendszert írhatjuk fel: $a + b = 8$; $(b-a)^2 = 48$,

amelyből $a = 4 - 2\sqrt{3}$, $b = 4 + 2\sqrt{3}$.

Tehát a ξ sűrűségfüggvénye f(x) a következő:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{3}}, & \text{ha } 4 - 2\sqrt{3} < x < 4 + 2\sqrt{3}, \\ 0, & \text{máshol.} \end{cases}$$

Az eloszlásfüggvény F(x) pedig:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \le 4 - 2\sqrt{3}, \\ \frac{x - (4 - 2\sqrt{3})}{4\sqrt{3}}, & \text{ha} \quad 4 - 2\sqrt{3} < x \le 4 + 2\sqrt{3}, \\ 1, & \text{ha} \quad x > 4 + 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Végül $P(3 < \xi < 5) = F(5) - F(3) = \frac{5 - (4 - 2\sqrt{3})}{4\sqrt{3}} - \frac{3 - (4 - 2\sqrt{3})}{4\sqrt{3}} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}29.$$

14.8.10.

a) Annak a valószínűsége, hogy ξ értékének első tizedes jegye a 3-as: $P(0{,}3 \le \xi < 0{,}4) = 0{,}1$.

b) Mivel a (0;1) intervallumban ugyanannyi szám van amelynek az első tizedes jegye a 3-as, mint amelynek az ötödik tizedes jegye a 3-as, annak a valószínűsége, hogy ξ értékének az ötödik tizedes-jegye a 3-as szintén 0,1.

14.8.11. Minden esetben először felírjuk az η valószínűségi változó F(x) eloszlásfüggvényét, majd ezt deriválva kapjuk meg az f(x) sűrűségfüggvényét. Az F(x) felírásához a ξ valószínűségi változó E(u) eloszlásfüggvényét használjuk fel, amely a következő:

$$E(u)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad u \le -1,\\ \dfrac{u+1}{2}, & \text{ha} \quad -1 < u \le 1,\\ 1, & \text{ha} \quad u > 1.\end{cases}$$

a) $F(x)=P(\eta < x)=P(2\xi-1 < x)=P\left(\xi < \dfrac{x+1}{2}\right).$

Ez a – ξ eloszlásfüggvényét felhasználva – a következő alakban írható fel:

$$P\left(\xi < \frac{x+1}{2}\right)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad \dfrac{x+1}{2} \le -1,\\ \dfrac{\dfrac{x+1}{2}+1}{2}, & \text{ha} \quad -1 < \dfrac{x+1}{2} \le 1,\\ 1, & \text{ha} \quad \dfrac{x+1}{2} > 1.\end{cases}$$

Tehát egyszerű rendezés után megkapjuk az F(x)-et, majd ezt deriválva f(x)-et:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad x \le -3,\\ \dfrac{x+3}{4}, & \text{ha} \quad -3 < x \le 1,\\ 1, & \text{ha} \quad x > 1.\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & \text{ha} \quad -3 < x < 1,\\ 0, & \text{máshol.}\end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy a kapott eredmény azt mutatja, hogy η egyenletes eloszlású a (–3;1) intervallumon.

b) $F(x) = P(\eta < x) = P(|\xi| < x) = P(-x < \xi < x) = E(x) - E(-x)$,
ha $0 < x \le 1$. $F(x) = 0$, ha $x \le 0$, továbbá $F(x) = 1$, ha $x > 1$.

Mivel $0 < x \le 1$ esetén $E(x) - E(-x) = \frac{x+1}{2} - \frac{-x+1}{2} = x$,

a felírtak alapján: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 0 < x < 1, \\ 0, & \text{máshol.} \end{cases}$

Megjegyezzük, hogy a kapott eredmény azt mutatja, hogy η egyenletes eloszlású a $(0;1)$ intervallumon.

c) $F(x) = P(\eta < x) = P(\xi^2 < x) = P(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) =$
$E(\sqrt{x}) - E(-\sqrt{x})$, ha $0 < x \le 1$. $F(x) = 0$, ha $x \le 0$,
továbbá $F(x) = 1$, ha $x > 1$.

Mivel $0 < x \le 1$ esetén $E(x) - E(-x) = \frac{\sqrt{x}+1}{2} - \frac{-\sqrt{x}+1}{2} = \sqrt{x}$,

a felírtak alapján: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}, & \text{ha} \quad 0 < x < 1, \\ 0, & \text{máshol.} \end{cases}$

d) $F(x) = P(\eta < x) = P(\arcsin\xi < x) = P(\xi < \sin x) = E(\sin x)$,
ha $-\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}$. $F(x) = 0$, ha $x \le -\frac{\pi}{2}$,

továbbá $F(x) = 1$, ha $x > \frac{\pi}{2}$.

Ha $-\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}$, akkor $E(x) = \frac{1+\sin x}{2}$, tehát:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{2}, & \text{ha} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{máshol.} \end{cases}$$

14.8.12. Jelölje a várakozási időt a λ paraméterű exponenciális eloszlású ξ valószínűségi változó. Ekkor $0{,}1 = P(\xi > 3) = e^{-3\lambda}$, tehát $e^{-\lambda} = \sqrt[3]{0{,}1}$ és így $P(\xi < 1) = 1 - e^{-\lambda} = 1 - \sqrt[3]{0{,}1} \approx 0{,}536$.

14.8.13. Az $\{\eta > x\}$ esemény azt jelenti, hogy mind a 10 alkatrész élettartama x-nél nagyobb. Annak a valószínűsége, hogy egy m paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó x-nél nagyobb e^{-mx}. Mivel az alkatrészek élettartamai egymástól függetlenek, a megfelelő események valószínűségeit össze lehet szorozni, tehát ha F(x) jelöli az η eloszlásfüggvényét, akkor:

$$F(x) = 1 - P(\eta > x) = 1 - e^{-m_1 x} \cdot e^{-m_2 x} \cdot \ldots \cdot e^{-m_{10} x} =$$
$$= 1 - e^{-(m_1 + m_2 + \ldots + m_{10})x}, \text{ ha } x > 0 \text{ és } F(x) = 0, \text{ ha } x \le 0.$$

Így az η is exponenciális eloszlású valószínűségi változó, amelynek a paramétere: $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_{10}$. Tehát az exponenciális eloszlás ismert tulajdonságait felhasználva azt kapjuk, hogy az η sűrűségfüggvénye 0, ha $x<0$ és $m \cdot e^{-mx}$, ha $x>0$. Várható értéke és szórása is $\frac{1}{m}$.

15. MATEMATIKAI STATISZTIKA

15.1. A statisztikai minta jellemzői

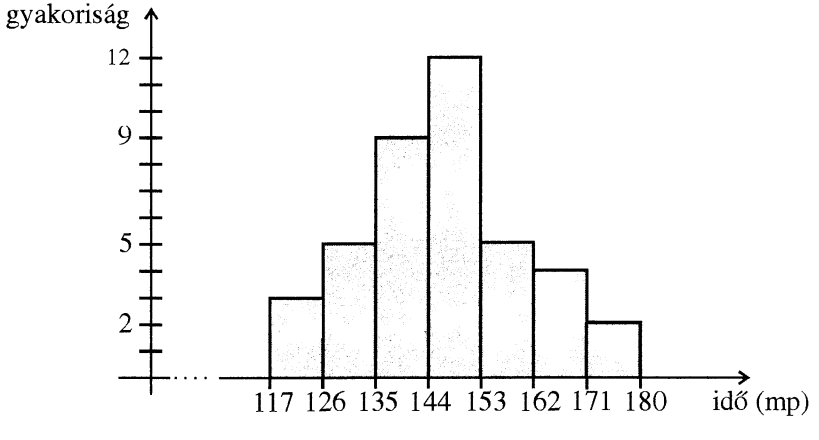
15.1.1. Vonalak húzásával számoljuk össze egy segédtáblázatban az egyes osztályokba eső adatok számát!

Magasság (cm)	Vonalak
$119 \leq h < 124$	|
$124 \leq h < 129$	||||
$129 \leq h < 134$	|||||||
$134 \leq h < 139$	|||||
$139 \leq h \leq 144$	|||

A gyakorisági eloszlás:

Magasság (cm)	Osztályközép	Gyakoriság
119 – 124	121,5	1
124 – 129	126,5	4
129 – 134	131,5	7
134 – 139	136,5	5
139 – 144	141,5	3

15.1.2.



15.1.3.

a) $\overline{X} = 4{,}1\dot{6}$; $S_n \approx 2{,}409$.

b) $\overline{X} = 7{,}1\dot{6}$; $S_n \approx 2{,}409$.

15.1.4.

a)

X_i	15	16	17	18	19
f_i	1	4	5	4	2

$N = \sum_{i=1}^{5} f_i = 16$; $\sum_{i=1}^{5} f_i X_i = 274$; $\sum_{i=1}^{5} f_i X_i^2 = 4712$.

A megfelelő képletekbe való behelyettesítéssel:

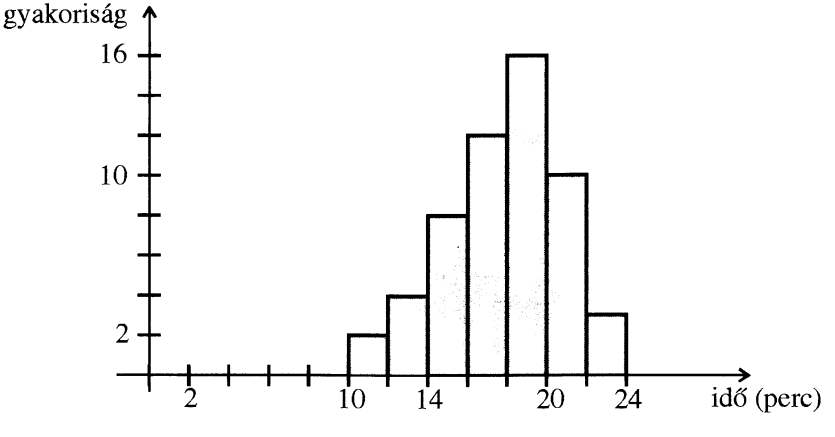
$\overline{X} = 17{,}125$; $S_n^2 = 1{,}234375$; $S_n \approx 1{,}111$.

b) $N = \sum_{i=1}^{6} f_i = 15$; $\sum_{i=1}^{6} f_i X_i = 80$; $\sum_{i=1}^{6} f_i X_i^2 = 524$.

A megfelelő képletbe való behelyettesítéssel:

$\overline{X} = 5{,}\dot{3}$; $S_n^2 = 6{,}4\dot{8}$; $S_n \approx 2{,}547$.

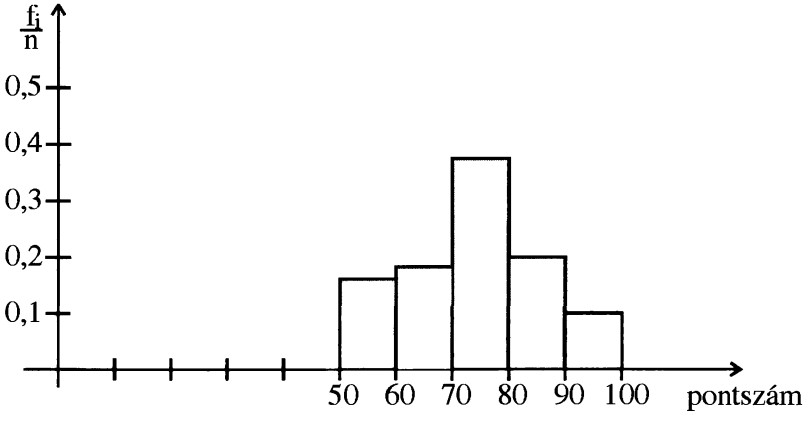
15.1.5. $\overline{X} \approx 17{,}8$; tehát átlagosan 18 perc körüli idő alatt érnek be az iskolába.



15.1.6.

Pontszám	X_i	f_i	f_iX_i
50 – 60	55	15	825
60 – 70	65	18	1170
70 – 80	75	37	2775
80 – 90	85	20	1700
90 – 100	95	10	950
$\sum$		100	7420

$\overline{X} = \frac{7420}{100} = 74{,}2$. Tehát a matematika szigorlaton átlagosan 74,2 pontot értek el a legalább elégségesre vizsgázó hallgatók.



15.1.7. Jelölje $N = \sum_{i=1}^{5} f_i = 100$.

Osztályok	X_i	f_i	f_iX_i	$f_iX_i^2$
61 – 63	62	5	310	19220
63 – 65	64	18	1152	73728
65 – 67	66	42	2772	182952
67 – 69	68	27	1836	124848
69 – 71	70	8	560	39200
$\sum$		100	6630	439948

$$\overline{X} = \frac{6630}{100} = 66{,}3; \quad S_n^2 = \frac{1}{100} \cdot 439948 - 66{,}3^2 = 3{,}79; \quad S_n \approx 1{,}95.$$

$$S_n^{*2} = \frac{1}{99}\left(439948 - 100 \cdot 66{,}3^2\right) \approx 3{,}828; \quad S_n^* \approx 1{,}96.$$

15.1.8. $\sum_{i=1}^{5} f_i X_i = 31695; \quad \sum_{i=1}^{5} f_i X_i^2 = 734312{,}5.$

$\overline{X} \approx 22{,}23; \quad S_n^* \approx 4{,}6; \quad C_V \approx 0{,}2.$

A szállóvendégek átlagéletkora 22 év, és közepes változékonyság állapítható meg az életkorukban.

15.1.9. Az átlagos szénatermés hektáronként 70,4 q, a szórás 21,3 q.

15.2. Konfidenciaintervallum várható értékre

15.2.1. $p = 0{,}05; \quad \Phi(u_p) = 1 - \frac{p}{2} = 0{,}975; \quad u_p = 1{,}96.$

A konfidenciahatárok:

$$\overline{X} - u_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 14 - 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}} \approx 12{,}04$$

$$\overline{X} + u_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 14 + 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}} \approx 15{,}96$$

A konfidenciaintervallum: (12,04; 15,96).

15.2.2. (1) $\overline{X} - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{200}} = 8{,}182$ (2) $\overline{X} + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{200}} = 8{,}298$

Adjuk össze (1)-et és (2)-t: $2\overline{X} = 16{,}48.$

Tehát a minta átlaga: $\overline{X} = 8{,}24.$

Vonjuk ki (2)-ből (1)-t:

$2 \cdot 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{200}} = 0{,}116$, ahonnan $\sigma \approx 0{,}42.$

Tehát a szórás közelítően 0,42 .

Határozzuk meg a 98 %-os konfidenciaintervallumot!

$p = 0{,}02$; $\Phi(u_p) = 0{,}99$; $u_p = 2{,}32$.

$u_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 2{,}32 \cdot \frac{0{,}42}{\sqrt{200}} \approx 0{,}0689$.

A konfidenciaintervallum: (8,171; 8,309).

15.2.3. (172,31; 173,33). (Nagy minta volt!)

15.2.4. Nagy minta ($n \geq 30$) van, ezért normális eloszlással közelíthetünk.

$\Phi(t_p) = 0{,}985$; $t_p = 2{,}17$; $\sigma = 1{,}2$; $t_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 0{,}238$.

A konfidenciaintervallum: (8,162; 8,638).

15.2.5. (4,7; 5,56). (Kis minta volt!)

15.2.6. Legalább 97 elemű mintát kell venni.

15.3. Statisztikai próbák

15.3.1. Ebben a feladatban egymintás u-próbát alkalmazunk.

a) Kétoldali próbát alkalmazunk.

$p = 0{,}01$; $\Phi(u_p) = 1 - \frac{p}{2} = 0{,}995$; a kritikus érték: $u_p = 2{,}58$.

A próbastatisztika: $u = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - m_o}{\sigma_o} = 4 \cdot \frac{197 - 200}{3} = -4$.

Mivel $|u| = 4 > u_p = 2{,}58$; ezért a H_o hipotézist 1 %-os szignifikanciaszinten elvetjük.

b) $u \approx -0{,}7$; a H_o hipotézist 5 %-os szignifikanciaszinten elfogadjuk.

c) Egyoldali próbát alkalmazunk.

$p = 0{,}05$; $\Phi(u_p) = 1 - p = 0{,}95$; a kritikus érték: $u_p = 1{,}64$.

A próbastatisztika: $u = \sqrt{81}\,\frac{15 - 15{,}4}{2{,}3} \approx -1{,}565$.

Mivel $u \approx -1{,}565 > -u_p = -1{,}64$; ezért 5 %-os szignifikanciaszinten elfogadjuk a H_o hipotézist.

d) $u \approx 3{,}536$; a H_o hipotézist 1 %-os szignifikanciaszinten elvetjük.

15.3.2. $H_o : m_o = 1600$; $H_1 : m_o \neq 1600$; $u = -2{,}5$; így5 %-os szignifikanciaszinten H_o-t elvetjük, a villanykörték élettartama megváltozott. Az 5 %-os szignifikanciaszint azt jelenti, hogy 0,05 annak a valószínűsége, hogy helytelenül döntöttünk H_o elvetésekor.

15.3.3. $H_o : m_o = 1506{,}5$ kg; $H_1 : m_o > 1506{,}5$ kg.
Egyoldali próbát alkalmazunk.
$u_p = 1{,}64$; $u \approx 2{,}488$; $u \approx 2{,}488 > u_p = 1{,}64$.
A H_o hipotézist 5 %-os szignifikanciaszinten elvetjük. A minta alapján feltételezhetjük tehát, hogy a gép túlsúlyos bálákat állít elő.

$p = 0{,}01$; $u_p = 2{,}58$; $u_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 0{,}311$.

A konfidenciaintervallum: (1506,49; 1507,11).

15.3.4.

a) A cipók 10,6 %-a lesz 475 grammnál kevesebb tömegű és 6,7 %-a 530 grammnál nagyobb tömegű.

b) Egyoldali u-próbát kellett alkalmaznunk, $u = -2{,}5$. 5 %-os szinten szignifikáns az eltérés, ezért feltételezhetjük, hogy a teljes készletnél csökkent a tömeg átlagos értéke.

15.3.5. Ebben a feladatban egymintás t-próbát alkalmazunk.

a) Egyoldali próbát alkalmazunk, nagy minta miatt a kritikus érték meghatározásánál közelíthetünk normális eloszlással.

$S_n^2 = \frac{9694{,}6}{64} \approx 151{,}48$, $\hat{\sigma} \approx S_n \approx 12{,}31$.

$p = 0{,}02$; $\Phi(t_p) = 1 - p = 0{,}98$; a kritikus érték: $t_p = 2{,}06$.

A próbastatisztika: $t = \frac{1997 - 2000}{12{,}31} \cdot \sqrt{64} \approx -1{,}95$.

$t \approx -1{,}95 > -t_p = -2{,}06$, tehát 2 %-os szinten nincs szignifikáns eltérés, ezért a H_o hipotézist elfogadjuk.

b) Kétoldali t-próbát alkalmazunk.

$S_n^2 \approx 0{,}000336$, $S_n \approx 0{,}0183$.

A próbastatisztika: $t \approx \frac{1{,}978 - 2}{0{,}0183}\sqrt{9} \approx -3{,}601$.

$p = 0{,}01$; $t_p = 3{,}25$ (szabadságfok: 9).

$|t| \approx 3{,}601 > t_p = 3{,}25$, tehát 1 %-os szinten az eltérés szignifikáns, ezért a H_o hipotézist elvetjük.

c) $t \approx 2{,}152$; a H_o hipotézist 5 %-os szignifikanciaszinten elvetjük.

15.3.6. $t \approx -0{,}84$; 5 %-os szinten megállapíthatjuk, hogy a tojásszállítmány nem tér el szignifikánsan a 7 grammtól.

15.3.7. $H_o : m_o = 500$; $H_1 : m_o < 500$; $p = 0{,}05$; szabadságfok: 9; $t_p = 1{,}833$; $t \approx -2{,}35$. Mivel $t \approx -2{,}35 < -t_p = -1{,}833$; ezért a H_o hipotézist 5 %-os szignifikanciaszinten elvetjük, tehát a gépről feltételezhetjük, hogy kevesebbet tölt az üvegekbe.

15.3.8. Ebben a feladatban kétmintás u-próbát alkalmazunk.

a) Kétoldali próbát alkalmazunk.

$p = 0{,}05$; $u_p = 1{,}96$;

$$u = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{5400 - 6000}{\sqrt{\frac{900^2}{100} + \frac{1000^2}{100}}} \approx -4{,}46.$$

$|u| \approx 4{,}46 > u_p = 1{,}96$, tehát 5 %-os szinten szignifikáns különbség van a két alapsokaság m_1 és m_2 várható értéke között, ezért a H_o hipotézist elvetjük.

b) Egyoldali próbát alkalmazunk, $u \approx 1{,}32$; tehát 5 %-os szinten nincs szignifikáns eltérés m_1 és m_2 között, a H_o-t elfogadjuk.

c) Egyoldali próbát alkalmazunk, $u \approx -1{,}402$; tehát 2%-os szinten nincs szignifikáns eltérés m_1 és m_2 között, ezért a H_o hipotézist elfogadjuk.

15.3.9. Ebben a feladatban kétmintás t-próbát alkalmazunk.

a) Kétoldali próbát alkalmazunk, $t \approx 2{,}423$; a H_0 hipotézist 2 %-os szignifikanciaszinten elvetjük, az eltérés szignifikáns.

b) Egyoldali próbát alkalmazunk, a nagy minta miatt a kritikus érték meghatározásánál normális eloszlással közelíthetünk.

$\overline{X} = 110;\ S_1^2 = 121;\ \overline{Y} = 115;\ S_2^2 = 81;$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n_1 \cdot S_1^2 + n_2 \cdot S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{72 \cdot 121 + 68 \cdot 81}{72 + 68 - 2} \approx 103{,}04;$$

$\sigma \approx 10{,}15;\ t_p = 2{,}32;$

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{110 - 115}{10{,}15 \cdot \sqrt{\frac{1}{72} + \frac{1}{68}}} \approx -2{,}913.$$

Mivel $t \approx -2{,}913 < -t_p = -2{,}32$; ezért a H_0 hipotézist 1 %-os szignifikanciaszinten elvetjük, feltételezhetjük, hogy $m_1 < m_2$.

15.3.10. Kétmintás u-próbát alkalmazunk.

$H_o : m_1 = m_2;\ H_1 : m_1 \neq m_2.$

$p = 0{,}05;\quad u_p = 1{,}96;$

$$u = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \approx -2{,}49.$$

$|u| \approx 2{,}49 > u_p = 1{,}96$; tehát 5 %-os szinten szignifikáns az eltérés, ezért a H_0 hipotézist elvetjük.

15.3.11. Kétmintás t-próbát alkalmazunk.

$H_o : m_1 = m_2;\ H_1 : m_1 < m_2;\ p = 0{,}05;$

szabadságfok: 15; $t_p = 1{,}753;\ \sigma \approx 2{,}329;$

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \approx -1{,}13.$$

Mivel $t \approx -1{,}13 > -t_p = -1{,}753$, ezért a H_o hipotézist elfogadjuk, feltételezhetjük tehát hogy az A egyetemen a sportoló fiúk nem alacsonyabbak, mint a B egyetemen sportolók.

15.3.12. χ^2-próbát alkalmazunk.

$$H_o : p_i = \frac{1}{6} \quad i = 1, 2, ..., 6.$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i}$$

$np_i = 200$, ezért $\chi^2 = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{6} (f_i - 200)^2 = 1{,}41$;

$p = 0{,}05$; szabadságfok: $6 - 1 = 5$; $\chi_p^2 = 11{,}07$.

Mivel $\chi^2 = 1{,}41 < \chi_p^2 = 11{,}07$; ezért a H_o hipotézist 5 %-os szignifikanciaszinten elfogadjuk, tehát a kockát szabályosnak tekinthetjük.

15.3.13. $H_o : p_i = \frac{1}{12} \quad i = 1, 2, ..., 12$.

$\chi^2 \approx 10$; $p = 0{,}05$; szabadságfok: 11; $\chi_p^2 = 19{,}675$.

A H_o hipotézist 5 %-os szignifikanciaszinten elfogadjuk, tehát nincs szignifikáns eltérés a várható 12 paraméterű egyenletes eloszlástól.

15.3.14. $\chi^2 = 4{,}5$; a H_o hipotézist 5 %-os szignifikanciaszinten elvetjük, tehát feltételezhetjük, hogy az érme nem szabályos.

15.3.15. Jelentse ξ a négy érme feldobásánál a fejdobások számát!

H_o: A ξ változó $n=4$, $p=0{,}5$ paraméterű binomiális eloszlású.

$$p_k = P(\xi = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$\chi^2 = 4{,}367$; $p = 0{,}05$; szabadságfok:4; $\chi_p^2 = 9{,}488$.

Mivel $\chi^2 = 4{,}367 < \chi_p^2 = 9{,}488$; ezért a H_o hipotézist 5 %-os szignifikanciaszinten elfogadjuk, tehát feltételezhetjük, hogy az

érmék szabályosak.

15.3.16. $\overline{X} = 2{,}3$;

H_o: az eloszlás $\lambda = 2{,}3$ paraméterű Poisson-eloszlás.

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{e^{-2,3} \cdot (2,3)^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8 vagy több
np_k	10	23,1	26,5	20,3	11,7	5,4	2,1	0,7	0,2

Az utolsó négy értéket összevonjuk, mert $np_k > 10$ nem teljesül (így 6 osztály lesz csak).

$\chi^2 \approx 4{,}275$; $p = 0{,}05$; szabadságfok:4; $\chi_p^2 = 9{,}49$.

Mivel $\chi^2 = 4{,}275 < \chi_p^2 = 9{,}49$; ezért a H_o hipotézist 5 %-os szignifikanciaszinten elfogadjuk, tehát a Poisson-eloszlás feltételezhető.

15.3.17. H_o: a hibaeloszlás m=0, σ=5 paraméterű normális eloszlású.

A normális eloszlást a megfelelő intervallumokon diszkrét eloszlással helyettesítjük:

$$p_i = P(4(i-5) < \delta \le 4(i-4)) = \Phi\left(\frac{4(i-4)}{5}\right) - \Phi\left(\frac{4(i-5)}{5}\right)$$

$i = 1, 2, \ldots, 8$

Tehát

$p_1 = \Phi(-2{,}4) - \Phi(-3{,}2) = (1 - 0{,}9918) - (1 - 0{,}9993) = 0{,}0075$;

$p_2 = \Phi(-1{,}6) - \Phi(-2{,}4) = 0{,}0466$; $p_3 = 0{,}1571$; $p_4 = 0{,}2881$;

$p_5 = 0{,}2881$; $p_6 = 0{,}1571$; $p_7 = 0{,}0466$; $p_8 = 0{,}0075$.

A próbastatisztika: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{8} \frac{(f_i - 1500p_i)^2}{1500p_i}$.

i	f_i	$1500p_i$	$(f_i - 1500p_i)^2$	$\frac{(f_i - 1500p_i)^2}{1500p_i}$
1	17	11,25	33,06	2,94
2	63	69,90	47,61	0,68
3	254	235,65	336,72	1,43
4	446	432,15	191,82	0,44
5	422	432,15	103,02	0,24
6	208	235,65	764,52	3,24
7	71	69,90	1,21	0,02
8	19	11,25	60,06	5,34
Σ	1500			$\chi^2 = 14,33$

$npi = 1500p_i > 10$ minden i-re, tehát a közelítés biztos jó lesz.
$p = 0,01$; szabadságfok : $8 - 1 = 7$; $\chi_p^2 = 18,475$.

Mivel $\chi^2 = 14,33 < \chi_p^2 = 18,475$; ezért a H_o hipotézist 1%-os szignifikanciaszinten elfogadjuk, a hibaeloszlást normális eloszlásúnak tekinthetjük, azaz feltételezhetjük, hogy a gép jól működött.

15.4. Lineáris korreláció és a regressziós egyenes

15.4.1.

a)

k	x_k	y_k	x_k^2	$x_k y_k$	y_k^2
1	1	1	1	1	1
2	3	2	9	6	4
3	4	4	16	16	16
4	6	4	36	24	16
5	8	5	64	40	25
6	9	7	81	63	49
7	11	8	121	88	64
8	14	9	196	126	81
Σ	56	40	524	364	256

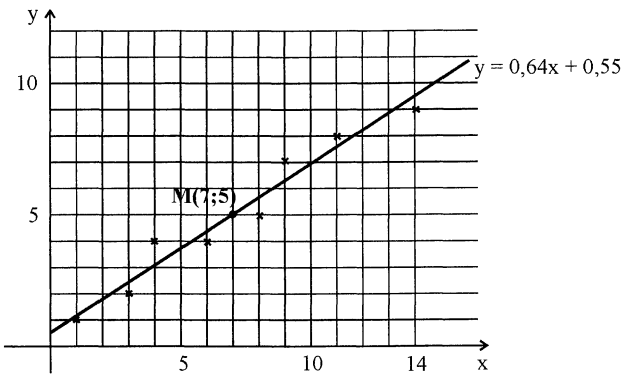
$$\overline{X} = \frac{56}{8} = 7; \quad \overline{Y} = \frac{40}{8} = 5;$$

$$Q_x = \sum_{k=1}^{8} x_k^2 - n \cdot \overline{X}^2 = 524 - 8 \cdot 49 = 132;$$

$$Q_{xy} = \sum_{k=1}^{8} x_k y_k - n \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y} = 364 - 8 \cdot 7 \cdot 5 = 84;$$

$$a = \frac{Q_{xy}}{Q_x} = \frac{84}{132} \approx 0{,}64; \qquad b = \overline{Y} - a \cdot \overline{X} \approx 0{,}55.$$

Így a regressziós egyenes egyenlete: y = 0,64x +0,55.



b) A regressziós egyenes egyenlete: 0,186x + 11,704.

c) $\overline{X} = 84{,}58\dot{3}; \quad \overline{Y} = 46{,}08\dot{3}; \quad n = 12.$

$$Q_x = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - n\overline{X}^2 \approx 4814{,}9167;$$

$$Q_{xy} \approx \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - n \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y} \approx 2113{,}4167;$$

$$a = \frac{Q_{xy}}{Q_x} \approx 0{,}4389; \qquad b = \overline{Y} - a \cdot \overline{X} \approx 8{,}9597.$$

A regressziós egyenes egyenlete (y az x függvényeként):
y = 0,44x + 8,96.

$$Q_y = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 - n\overline{Y}^2 \approx 1322{,}9167;$$

$a = \frac{Q_{xy}}{Q_y} \approx 1{,}5975$; $\quad b = \overline{X} - a \cdot \overline{Y} \approx 10{,}9652$.

A regressziós egyenes egyenlete (x az y függvényeként):
x = 1,6y +10,97.

15.4.2.

a) $r \approx 0{,}823$. Szoros pozitív korreláció van.

b) $r \approx 0{,}9899$. Nagyon szoros pozitív korreláció van.

c) $\overline{X} = \frac{225}{6} = 37{,}5$; $\quad \overline{Y} = \frac{361}{6} = 60{,}1\dot{6}$;

$Q_x = 8875 - 6 \cdot 37{,}5^2 = 437{,}5$;

$Q_{xy} = 12905 - 6 \cdot 37{,}5 \cdot 60{,}1\dot{6} = -632{,}5$;

$Q_y = 22641 - 6 \cdot 60{,}1\dot{6}^2 = 920{,}8\dot{3}$;

$r = \frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_x \cdot Q_y}} \approx -0{,}9965$. Nagyon szoros negatív korreláció van.

d) $r \approx 0{,}8374$. Szoros pozitív korreláció van.

15.4.3.

a) $\overline{X} = 5$; $\quad \overline{Y} = 14{,}41$; $\quad n = 10$.

$Q_x = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - n\overline{X}^2 = 13{,}2$; $\quad Q_y = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 - n \cdot \overline{Y}^2 = 21{,}789$;

$Q_{xy} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - n \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y} = 13{,}7$.

$r = \frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_x \cdot Q_y}} \approx 0{,}81$. Szoros lineáris korreláció van.

b) $a = \frac{Q_{xy}}{Q_x} \approx 1{,}04$; $\quad b = \overline{Y} - a \cdot \overline{X} \approx 9{,}22$.

A regressziós egyenes egyenlete: y = 1,04x+9,22.

c) 4 hetes súly: $x = 5$ kg;
8 hetes súly: $y \approx 1{,}04 \cdot 5 + 9{,}22 \approx 14{,}42$ kg.

15.4.4.

a) $r \approx 0{,}919$. Szoros lineáris korreláció van.

b) A regressziós egyenes egyenlete: $y = 5{,}76x - 17{,}83$.

15.4.5.

a) A regressziós egyenes egyenlete: $y = 0{,}66x + 29{,}13$.

b) A matematika dolgozata várhatóan 92 pontos lenne.

15.4.6.

a) $r \approx 0{,}82$. Szoros pozitív korreláció van a talaj humusztartalma és a burgonya terméseredménye között.

b) A regressziós egyenes egyenlete: $y = 0{,}12x - 20{,}46$.

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ **3**

1. KOMPLEX SZÁMOK **5**
1.1. Komplex számok ábrázolása 5
1.2. Áttérés a komplex szám egyes alakjai között 6
1.3. Műveletek különféle alakú komplex számokkal 7
1.4. Vegyes feladatok 9

2. LINEÁRIS ALGEBRA **13**
2.1. Mátrixok 13
2.2. Determinánsok 16
2.3. Lineáris egyenletrendszerek 17

3. VEKTORGEOMETRIA **22**
3.1. Alapfogalmak, alapműveletek 22
3.2. Vektorok szorzása 23
3.3. Vektorok geometriai alkalmazása 25

4. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK **28**
4.1. Sorozatok 28
4.2. Egyváltozós valós függvények elemi vizsgálata 29

5. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA **34**
5.1. Differenciálhányados és deriváltfüggvény 34
5.2. A differenciálszámítás alkalmazásai 37

6. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK HATÁROZATLAN INTEGRÁLJAI **42**
6.1. Alapintegrálokkal megoldható feladatok 42

6.2. $\int f(ax+b)\,dx$ $(a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0)$ típusú feladatok 43
6.3. $\int [f(x)]^{\alpha} f'(x)\,dx$ $(\alpha \in \mathbf{R}, \alpha \neq -1)$ típusú feladatok 44
6.4. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ típusú feladatok 45
6.5. $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$ típusú feladatok 46
6.6. Parciális integrálással megoldható feladatok 46
6.7. Racionális törtfüggvények integrálása 47
6.8. Integrálás helyettesítéssel 47
6.9. Vegyes feladatok 49

7. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK HATÁROZOTT INTEGRÁLJAI 51

7.1. Alapintegrálokra és az $\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = [F(g(x))]_a^b$ 51
7.2. Parciális integrálással megoldható feladatok 53
7.3. Helyettesítéssel megoldható feladatok 54
7.4. Vegyes feladatok 54
7.5. Határozott integrálok alkalmazásai 55
7.6. Improprius integrálok 58

8. KÉTVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK 61

8.1. Kétváltozós valós függvények értelmezése 61
8.2. Kétváltozós valós függvények differenciálszámítása 62
8.3. Kétváltozós valós függvények differenciálszámításának alkalmazásai 64
8.4. Kétváltozós valós függvények integrálszámítása 66

9. KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK .. 70

9.1. Alapfogalmak 70
9.2. Elsőrendű differenciálegyenletek 70
9.3. Másodrendű differenciálegyenletek 73

10. LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ 76
10.1. Laplace és inverz Laplace-transzformált 76
10.2. Lineáris differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval 77

11. VÉGTELEN SOROK 80
11.1. Számsorok 80
11.2. Hatványsorok 81
11.3. Fourier-sorok 83

12. LINEÁRIS PROGRAMOZÁS 88
12.1. Lineáris egyenlőtlenségek grafikus megoldása 88
12.2. Lineáris programozás alapfeladata 88
12.3. Kétváltozós lineáris programozási feladat grafikus megoldása 90

13. VEKTORANALÍZIS 92
13.1. Vektor-skalár függvények 92
13.2. Skalár-vektor függvények 95
13.3. Vektor-vektor függvények 100

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS 106
14.1. Eseményalgebra 106
14.2. Valószínűségek kombinatorikus kiszámítási módja 108
14.3. Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel 110
14.4. Feltételes valószínűség és függetlenség 111
14.5. Diszkrét valószínűségi változók és nevezetes eloszlások 113
14.6. Eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény 116
14.7. Várható érték és szórás 120
14.8. Nevezetes folytonos eloszlások 123

15. MATEMATIKAI STATISZTIKA 126
15.1. A statisztikai minta jellemzői 126
15.2. Konfidenciaintervallum várható értékre 128
15.3. Statisztikai próbák 129
15.4. Lineáris korreláció, regressziós egyenes 134

MEGOLDÁSOK 139

1. KOMPLEX SZÁMOK 141
1.1. Komplex számok ábrázolása 141
1.2. Áttérés a komplex szám egyes alakjai között 145
1.3. Műveletek különféle alakú komplex számokkal 148
1.4. Vegyes feladatok 153

2. LINEÁRIS ALGEBRA 161
2.1. Mátrixok 161
2.2. Determinánsok 166
2.3. Lineáris egyenletrendszerek 168

3. VEKTORGEOMETRIA 179
3.1. Alapfogalmak, alapműveletek 179
3.2. Vektorok szorzása 181
3.3. Vektorok geometriai alkalmazása 184

4. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK 189
4.1. Sorozatok 189
4.2. Egyváltozós valós függvények elemi vizsgálata 191

5. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA 203
5.1. Differenciálhányados és deriváltfüggvény 203
5.2. A differenciálszámítás alkalmazásai 212

6. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK HATÁROZATLAN INTEGRÁLJAI 235
6.1. Alapintegrálokkal megoldható feladatok 235
6.2. $\int f(ax+b)dx \quad (a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0)$ típusú feladatok 238
6.3. $\int [f(x)]^{\alpha} f'(x)dx \quad (\alpha \in \mathbf{R}, \alpha \neq -1)$ típusú feladatok 241

6.4. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ típusú feladatok 245
6.5. $\int f(g(x))g'(x)dx$ típusú feladatok 246
6.6. Parciális integrálással megoldható feladatok 247
6.7. Racionális törtfüggvények integrálása 251
6.8. Integrálás helyettesítéssel 256
6.9. Vegyes feladatok 260

7. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK HATÁROZOTT INTEGRÁLJAI 267

7.1. Alapintegrálokra és az $\int_a^b f(g(x))\,g'(x)dx = [F(g(x))]_a^b$ 267
7.2. Parciális integrálással megoldható feladatok 272
7.3. Helyettesítéssel megoldható feladatok 274
7.4. Vegyes feladatok 276
7.5. Határozott integrálok alkalmazásai 278
7.6. Improprius integrálok 284

8. KÉTVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK 291

8.1. Kétváltozós valós függvények értelmezése 291
8.2. Kétváltozós valós függvények differenciálszámítása 292
8.3. Kétváltozós valós függvények differenciálszámításának alkalmazásai 299
8.4. Kétváltozós valós függvények integrálszámítása 305

9. KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK 316

9.1. Alapfogalmak 316
9.2. Elsőrendű differenciálegyenletek 317
9.3. Másodrendű differenciálegyenletek 327

10. LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ 338

10.1. Laplace- és inverz Laplace-transzformált 338
10.2. Lineáris differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval 343

11. VÉGTELEN SOROK 352
11.1. Számsorok 352
11.2. Hatványsorok 357
11.3. Fourier-sorok 365

12. LINEÁRIS PROGRAMOZÁS 381
12.1. Lineáris egyenlőtlenségek grafikus megoldása 381
12.2. A lineáris programozás alapfeladata 381
12.3. Kétváltozós lineáris programozási feladat grafikus megoldása 383

13. VEKTORANALÍZIS 388
13.1. Vektor-skalár függvények 388
13.2. Skalár-vektor függvények 394
13.3. Vektor-vektor függvények 407

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS 421
14.1. Eseményalgebra 421
14.2. Valószínűségek kombinatorikus kiszámítási módja 423
14.3. Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel 429
14.4. Feltételes valószínűség és függetlenség 432
14.5. Diszkrét valószínűségi változók és nevezetes eloszlások 434
14.6. Eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény 440
14.7. Várható érték és szórás 449
14.8. Nevezetes folytonos eloszlások 455

15. MATEMATIKAI STATISZTIKA 463
15.1. A statisztikai minta jellemzői 463
15.2. Konfidenciaintervallum várható értékre 466
15.3. Statisztikai próbák 467
15.4. Lineáris korreláció és a regressziós egyenes 473