1. fejezet

HALMAZOK

♣ *Halmaz, halmaz eleme*: definiálatlan alapfogalom. Jelölés: x eleme az X halmaznak: $x \in X$ (vagy $X \ni x$); y nem eleme az Y halmaznak: $y \notin Y$ (vagy $Y \not\ni y$).

♣ *Halmaz megadása*:

- elemeinek felsorolásával vagy a felsorolás érzékeltetésével, pl. $A = \{1, 2, 5\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$;
- megmondjuk, hogy milyen tulajdonságú dolgok az elemei, pl. B a 30 évnél fiatalabb magyar állampolgárok halmaza;
- adott halmazokból műveletekkel állítjuk elő, lásd később.

Az X *halmaz elemeinek számát* $|X|$ jelöli, pl. $|A| = 3$, $|\mathbb{N}| = \infty$.

♣ *Két halmaz egyenlő*, ha elemeik megegyeznek. Jelölés: $=$, pl.
$\{2, 5, 7\} = C \neq D = \{\text{10-nél kisebb prímszámok}\}$, mert $3 \in D$ és $3 \notin C$;
$\{\text{2003 számjegyei}\} = E = F = \{0, 2, 3\}$, mivel a halmazok minden elemét csak egyszer tüntetjük fel.

♣ *Üres halmaz* az a halmaz melynek nincsenek elemei, jelölése $\emptyset$. Pl. $G = \{\sin x - 5 = \cos x$ egyenlet valós gyökei$\}$ esetén $G = \emptyset$.

♣ 1. Definíció. Az X halmaz <u>része</u> az Y halmaznak, ha $\forall\, x \in X$ esetén $x \in Y$ is teljesül. ♢

Jelölés: $X \subset Y$ (vagy $Y \supset X$). Pl. Bármely X halmazra $X \subset X$, $\emptyset \subset X$.

2. Definíció. Az X halmaz <u>valódi része</u> az Y halmaznak, ha $X \subset Y$ és $X \neq Y$. ♢

Jelölés: $X \subset\!\!\neq Y$ (vagy $Y \neq\!\!\supset X$). Pl. $\mathbb{N} \subset\!\!\neq \mathbb{R}$ (persze $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ is igaz).

Részhalmazok megadása: valamely alaphalmazból bizonyos tulajdonságú elemek kiemelése. Ha X az alaphalmaz, τ a tulajdonság, Y a kapott részhalmaz:
$Y = \{x \in X \mid x \text{ elem } \tau \text{ tulajdonságú}\}$, pl. $H = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$.

♣ 3. Definíció. Az X és Y halmazok <u>metszetén (közös részén)</u> azt a halmazt értjük, melynek elemei X-nek és Y-nak is elemei. ♢

Jelölés: $X \cap Y$. A definíció újrafogalmazása: $X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ és } x \in Y\}$.

4. Definíció. Az X és Y halmazok <u>diszjunktak</u> ha $X \cap Y = \emptyset$. ♢

5. Definíció. Az X és Y halmazok <u>unióján (egyesítésén)</u> azt a halmazt értjük, melynek elemei X és Y közül legalább az egyiknek elemei. ♢

Jelölés: $X \cup Y$. A definíció újrafogalmazása: $X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ vagy } x \in Y\}$.

6. Definíció. Az X és Y halmazok (ilyen sorrendben vett) <u>különbségén</u> azt a halmazt értjük, melynek elemei elemei X-nek de nem elemei Y-nak. ♢

Jelölés: $X \setminus Y$. A definíció újrafogalmazása: $X \setminus Y = \{x \mid x \in X \text{ és } x \notin Y\}$.
Pl. $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$, $J = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$ esetén
$I \cap J = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$, $I \cup J = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\}$,
$I \setminus J = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\} \neq J \setminus I = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 5\}$.

♣ *Halmazok szemléltetése Venn-diagrammal*: a halmazokat sematikusan különböző síkidomokkal szemléltetjük, az elemeiket pontokkal vagy a nevükkel tüntetjük fel, amelyek a halmazhoz való tartozástól

függően a síkidomon belül vagy kívül vannak az ábrán. Előfordulhat, hogy egyszerűen a síkidom pontjait tekintjük a halmaz elemeinek.

♣ *Nevezetes számhalmazok.*
természetes számok: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$;
pozitív természetes számok: $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
egész számok: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$;
racionális számok: $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$;
valós számok: $\mathbb{R} = \{\text{racionális sorozatok határértékei}\}$;
pozitív ill. nemnegatív valós számok: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ill. $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$;
irracionális számok: $\mathbb{Q}^\star = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
komplex számok: $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ (lásd később).

♣ *Descartes-féle szorzat.*
7. Definíció. $\bigotimes$ Az X és Y halmazok Descartes-féle szorzatán azt a halmazt értjük, mely tartalmazza az az összes olyan rendezett párt, amely első tagja az X halmazból, a második tagja pedig az Y halmazból való. $\diamondsuit$

Jelölés: $X \times Y$. A definíció újrafogalmazása: $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$. Pl. $K = \{\oplus, \sqcup\}$, $L = \{0.1, \sqrt{2}, \pi/3\}$ esetén $K \times L = \{(\oplus, 0.1), (\oplus, \sqrt{2}), (\oplus, \pi/3), (\sqcup, 0.1), (\sqcup, \sqrt{2}), (\sqcup, \pi/3)\} \neq L \times K = \{(0.1, \oplus), (0.1, \sqcup), (\sqrt{2}, \oplus), (\sqrt{2}, \sqcup), (\pi/3, \oplus), (\pi/3, \sqcup)\}$.

8. Definíció. Az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ halmazok Descartes-féle szorzata

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n\}.$$

$\diamondsuit$

Az $\overbrace{X \times X \times \ldots \times X}^{n}$ Descartes-féle szorzat praktikus jelölése X^n, pl. $\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}^{n}$.

♣ *Halmazok ekvivalenciája, végtelen ill. véges halmazok.*
9. Definíció. Az X és Y halmazok ekvivalensek (azonos számosságúak) ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés (bijekció) létesíthető. $\diamondsuit$

Jelölés: $X \sim Y$. Pl. $\mathbb{N} \sim \{\text{pozitív páros számok}\} = M$ ill. $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^+$.

$$\begin{array}{lccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ M: & 2 & 4 & 6 & 8 & \ldots & 2n+2 & \ldots \end{array} \qquad \text{ill.} \qquad \begin{array}{lccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \mathbb{N}^+: & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n+1 & \ldots \end{array}$$

10. Definíció. Egy halmaz végtelen ha létezik vele ekvivalens valódi részhalmaza. Egy halmaz véges ha nem végtelen. $\diamondsuit$

Pl. $\mathbb{N}$ végtelen halmaz ($|\mathbb{N}| = \infty$), mert $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^+$, $\mathbb{N}^+ \subset\neq \mathbb{N}$, $\emptyset$ véges halmaz ($|\emptyset| = 0$).

11. Definíció. Az X halmaz megszámlálhatóan végtelen számosságú ha $X \sim \mathbb{N}$. $\diamondsuit$

Jelölés: $|X| = \aleph_0$

12. Tétel. $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ *(Az egész számok halmaza megszámlálhatóan végtelen számosságú).*

Bizonyítás.

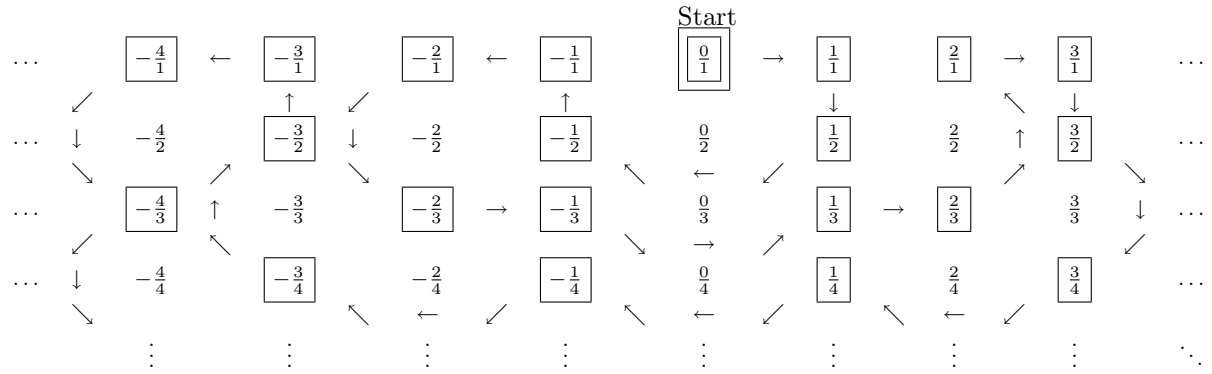
$$\begin{array}{lccccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \mathbb{Z}: & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \ldots & z_n & \ldots \end{array} \qquad \text{ahol} \qquad z_n = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{ha } n \text{ páros;} \\ \frac{n+1}{2} & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

■

Megjegyzés. Hogy egy adott X halmazról belássuk, hogy megszámlálhatóan végtelen számosságú, ahhoz elegendő megmutatni, hogy X elemei sorbarendezhetők. Ha ugyanis $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ az X halmaz egy sorbarendezése, akkor az $n \longleftrightarrow x_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ kölcsönösen egyértelmű leképezés biztosítja X és $\mathbb{N}$ ekvivalenciáját.

13. Tétel. $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ *(A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen számosságú).*

Bizonyítás. Meg kell adni egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{N}$ között. Az előző megjegyzés értelmében ehhez elég $\mathbb{Q}$ elemeit sorbarendezni. Készítsük el azt a táblázatot, amely az összes racionális számot tartalmazza (többször is): az első sorban az összes 1 nevezőjű tört található, a második sorban az összes 2 nevezőjű, stb.



A $0 = \frac{0}{1}$ számból kiindulva, a már elértek mellett a nyilak irányában haladva egyre kiterjedtebb részhez jutunk el a táblázatban. Bármely tört sorra kerül véges sok lépés után. Ha olyan racionális számhoz érünk amely már szerepelt (az egyszerűsíthető törtek vagy a 0 különböző alakjai) akkor azt egyszerűen kihagyjuk a felsorolásból és így abban minden racionális szám pontosan egyszer fog megjelenni. A táblázat bekeretezett elemei mutatják a sorbarendezett számokat. Az eljárás által szolgáltatott sorrend néhány első eleme:

$$0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -2, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, -3, -4, -\frac{4}{3}, \ldots$$

■

14. Tétel. $\mathbb{R} \not\sim \mathbb{N}$ *(A valós számok halmaza nem megszámlálhatóan végtelen számosságú).*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy $\mathbb{R} \sim \mathbb{N}$, azaz $\mathbb{R}$ elemei sorbarendezhetők. Vegyünk egy tetszőleges sorrendet amely a valós számokat végtelen tizedestört alakban tartalmazza: a k-adik szám n-edik tizedesjegyét a_{kn}-nel jelöltük, a tizedes vessző előtti, nem feltétlenül egy számjegyű részét e_k-val.

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= e_0.a_{01}a_{02}a_{03}\ldots a_{0n}\ldots \\
\alpha_1 &= e_1.a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n}\ldots \\
&\vdots \\
\alpha_k &= e_k.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\ldots a_{kn}\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Legyen $\beta = 0.b_1b_2b_3\ldots b_n\ldots$ végtelen tizedestört, amelynek jegyeire

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{ha } a_{i-1,i} \neq 1; \\ 2 & \text{ha } a_{i-1,i} = 1; \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ez garantálja, hogy bármely i esetén $\beta \neq \alpha_{i-1}$, ugyanis mindketten végtelen tizedestörtek, egymástól az i-edik tizedesjegyben különböznek. Következésképpen β nincs benne a felsorolásban, azaz mégsem lehet felsorolni $\mathbb{R}$ összes elemét. Tehát nem igaz az $\mathbb{R} \sim \mathbb{N}$ indirekt feltevés, azaz $\mathbb{R} \not\sim \mathbb{N}$. ■

15. Definíció. Az X halmaz kontinuum végtelen számosságú ha $X \sim \mathbb{R}$. ♢

16. Definíció. Az X halmaz nagyobb számosságú mint az Y halmaz, ha $X \not\sim Y$ és $\exists\, H \subset\neq X$ melyre $H \sim Y$. ♢

Jelölése: $|X| > |Y|$, pl. $|\mathbb{R}| > |\mathbb{Q}|$ hiszen $\mathbb{R} \not\sim \mathbb{Q}$ és $\mathbb{N} \subset\neq \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$.

♣ *A kontinuumhipotézis.*

Van-e olyan halmaz melynek számossága a megszámlálhatóan végtelen számosság és a kontinuum végtelen számosság közé esik (Cantor)? Sejtés (kontinuumhipotézis): nincs. A kérdés a mai napig eldöntetlen a Cantor által felépített halmazelméletben. Egyes axiomatikus halmazelméletek közül bizonyosakban igenlő a válasz, másokban nemleges.

2. fejezet

KOMPLEX SZÁMOK

♣ Az $x^2 = -1$ vagy az $x^2 + 2x + 2 = 0$ másodfokú egyenletek *nem megoldhatók a valós számok körében.*

Legyen i az az objektum, melyre $i^2 = -1$ és ugyanúgy számolunk vele mint más algebrai kifejezésekkel. Ekkor

$$(-1+i)^2 + 2(-1+i) + 2 = (1 - 2i + i^2) + (-2 + 2i) + 2 = 1 + i^2 = 1 + (-1) = 0\ ,$$

tehát $x = (-1 + i)$ gyöke az $x^2 + 2x + 2 = 0$ másodfokú egyenleteknek.

♣ *Komplex számok algebrai alakja:* $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1)$. $a = \mathcal{R}e(z)$ ill. $b = \mathcal{I}m(z)$ a z komplex szám *valós-* ill. *képzetes része.* Ha $b = 0$ akkor $z = a \in \mathbb{R}$, pl. $0 = 0 + 0i$.

Két algebrai alakban megadott komplex szám pontosan akkor *egyenlő* ha a valós és képzetes részeik is megegyeznek.

♣ *Műveletek algebrai alakban megadott komplex számokkal.* Legyen $z = a + bi$, $v = c + di$.

$z \pm v = (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$;

$z \cdot v = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$; ($z \cdot v$ röviden zv.)

$\frac{1}{v} = \frac{1}{c+di} = \frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i$;

$\frac{z}{v} = z \cdot \frac{1}{v}$;

$\sqrt{z} = x + yi$, melyre $(x + yi)^2 = z = a + bi$. Ebből az $x^2 - y^2 = a$, $2xy = b$ valós egyenletrendszerhez jutunk, melynek mindig két megoldása van ha $z \neq 0$. Továbbá $\sqrt{0} = 0$.

Pl. $z = 1 - i$, $v = 2 + 3i$ értékek mellett $z + v = 3 + 2i$, $z - v = -1 - 4i$, $zv = 5 + i$, $\frac{1}{z} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$, $\frac{z}{v} = -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$, $\sqrt{z}$-nek két értéke van: $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ és $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

♣ 17. Definíció. A $z = a + bi$ komplex szám konjugáltja a $\bar{z} = a - bi$ komplex szám. ♢

18. Definíció. A $z = a + bi$ komplex szám abszolút értéke a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nemnegatív valós szám. ♢

Pl. $z = -2 - i$-re $\bar{z} = -2 + i$, $|z| = \sqrt{5}$.

19. Tétel. *Bármely z és v komplex számokra*

1. $\overline{\bar{z}} = z$;
2. $\overline{z \pm v} = \bar{z} \pm \bar{v}$;
3. $\overline{z \cdot v} = \bar{z} \cdot \bar{v}$;
4. $v \neq 0$ *esetén* $\overline{z/v} = \bar{z}/\bar{v}$;
5. $|\bar{z}| = |z|$;
6. $|z \pm v| \leq |z| + |v|$;
7. $|z \cdot v| = |z| \cdot |v|$;
8. $v \neq 0$ *esetén* $|z/v| = |z|/|v|$;
9. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ *teljesül.*

Bizonyítás (csak 2., 5. és 9.) Legyen $z = a + bi$, $v = c + di$.

2. $\overline{z+v} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \bar{z}+\bar{v}$. $\overline{z-v} = \bar{z}-\bar{v}$ hasonlóan.

5. $|\bar{z}| = |a-bi| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |a+bi| = |z|$.

9. $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = (\sqrt{a^2+b^2})^2 = |z|^2$. ■

♣ *Komplex számok ábrázolása Gauss-féle számsíkon.*

konjugálás: tükrözés a valós ($\mathcal{R}e$) tengelyre,

abszolút érték: az origótól való távolság ($r = |z|$).

20. Definíció. A z komplex szám argumentumán azt a szöget értjük amellyel a $\mathcal{R}e$-tengelyt pozitív irányba el kell forgatni ahhoz, hogy az z irányába mutasson. ♢

Jelölés: $\arg(z)$.

♣ *Komplex számok trigonometrikus alakja.* $z = a + bi$-ből, a $\varphi = \arg(z)$ jelöléssel

$$r = \sqrt{a^2+b^2} \quad , \quad \left.\begin{array}{rcl} r\cos\varphi &=& a \\ r\sin\varphi &=& b \end{array}\right\}$$

alapján $r \in \mathbb{R}_0^+$ és $\varphi \in \mathbb{R}$ meghatározható (φ nem egyértelmű!). A trigonometrikus alak: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

A nemnulla $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ komplex számok akkor és csak akkor egyeznek meg ha

$$r_1 = r_2 \quad , \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

(A második feltétel fokban kifejezve: $\varphi_1 = \varphi_2 + 360°k$ $(k \in \mathbb{Z})$.)

♣ *Komplex számok átírása a különböző alakok között.*

Algebrai alakból trigonometrikusba: $z = a + bi \longrightarrow r = |z|$, $\varphi = \arg(z)$ és $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Trigonometrikus alakból algebraiba: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \longrightarrow a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ és $z = a + bi$.

♣ *Műveletek trigonometrikus alakban megadott komplex számokkal.* Legyen $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Összeadás (ill. kivonás) közvetlenül nem végezhető el: át kell írni az összeadandókat algebrai alakba, elvégezni az összeadást, majd az eredményt visszaírni trigonometrikus alakba.

$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1r_2(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)) = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.

$z_2 \neq 0$ esetén legyen $\frac{1}{z_2} = v = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, melyet $z_2v = 1$, részletezve

$$r_2r(\cos(\varphi_2+\varphi) + i\sin(\varphi_2+\varphi)) = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

alapján számolhatunk: $r = \frac{1}{r_2}$, $\varphi = -\varphi_2 + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Bármely k-ra ugyanazt a v komplex számot kapjuk. Vegyük a legegyszerűbb $k = 0$ esetet, tehát $v = \frac{1}{r_2}(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2))$.

Ha $z_2 \neq 0$ akkor $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$.

$n \in \mathbb{N}^+$ esetén $z_1^n = z_1^{n-1} \cdot z_1$, továbbá $z_1^0 = 1$. A szorzásokból: $z_1^n = r_1^n(\cos n\varphi_1 + i\sin n\varphi_1)$, $(n \in \mathbb{N})$. Ha $z_1 \neq 0$ akkor $z_1^{-n} = \frac{1}{z_1^n}$.

Pl. $z_1 = 2(\cos 340° + i\sin 340°)$, $z_2 = 3.5(\cos 100° + i\sin 100°)$. $z_1 \cdot z_2 = 7(\cos 440° + i\sin 440°) = 7(\cos 80° + i\sin 80°)$, $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{3.5}(\cos(-100°) + i\sin(-100°)) = \frac{2}{7}(\cos 260° + i\sin 260°)$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3.5}(\cos 240° + i\sin 240°)$, $z_1^{10} = 2^{10}(\cos 3400° + i\sin 3400°) = 1024(\cos 160° + i\sin 160°)$.

♣ *Gyökvonás trigonometrikus alakban megadott komplex számokból.* $n \in \mathbb{N}^+$, $z_1^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z_1} = v = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, tehát $v^n = z_1$, azaz

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1).$$

$r^n = r_1$ ill. $n\varphi = \varphi_1 + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ alapján $r = \sqrt[n]{r_1}$, $\varphi = \frac{\varphi_1+2k\pi}{n}$ adódik, de csak $k = 0, 1, \ldots, n-1$ egészekre kapunk különböző n-edik gyököket:

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1}\left(\cos\frac{\varphi_1+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_1+2k\pi}{n}\right) \quad , \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Pl. $\sqrt[4]{2(\cos 340^\circ + i \sin 340^\circ)}$ négy értéke:

$$\sqrt[4]{z}_1 = \begin{cases} \sqrt[4]{2}(\cos 85^\circ + i \sin 85^\circ) & (k = 0); \\ \sqrt[4]{2}(\cos 175^\circ + i \sin 175^\circ) & (k = 1); \\ \sqrt[4]{2}(\cos 265^\circ + i \sin 265^\circ) & (k = 2); \\ \sqrt[4]{2}(\cos 355^\circ + i \sin 355^\circ) & (k = 3). \end{cases}$$

3. fejezet

RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

♣ X, Y és Z nemüres halmazok.

21. Definíció. A $\varrho \subset X \times Y$ rendezett párokból álló halmazt relációnak nevezzük. ♢

Jelölés: $(x, y) \in \varrho$-t szokás $x\varrho y$-ként feltüntetni.

22. Definíció. A $\varrho \subset X \times Y$ reláció inverzén a $\tilde{\varrho} \subset Y \times X$,

$$\tilde{\varrho} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \varrho\}.$$

relációt értjük. ♢

23. Definíció. A $\varrho \subset X \times Y$ és $\eta \subset Y \times Z$ relációkkal értelmezett

$$\eta \circ \varrho = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists\, y \in Y, (x, y) \in \varrho\ ,\ (y, z) \in \eta\}$$

relációt a ϱ és η relációk összetételének, máképpen összetett relációnak hívjuk. ♢

Pl. Legyen $\mathbb{N}^2 \supset \varrho = \{(0,1), (0,2), (1,2)\}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \supset \eta = \{(0,-1), (2,-1)\}$. Ekkor $\mathbb{N}^2 \supset \tilde{\varrho} = \{(1,0), (2,0), (2,1)$; $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \supset \tilde{\eta} = \{(-1,0), (-1,2)\}$; $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \supset \eta \circ \varrho = \{(0,-1), (1,-1)\}$; $\mathbb{N}^2 \supset \varrho \circ \eta = \emptyset$.

♣ Legyen $\varrho \subset X^2$.

24. Definíció. A ϱ reláció

- reflexív, ha bármely $x \in X$ esetén $x\varrho x$;
- tranzitív, ha $x\varrho y$ és $y\varrho z$ teljesülése estén $x\varrho z$ következik, bármik is legyenek az $x, y, z \in X$ elemek;
- szimmetrikus, ha $x\varrho y$ teljesülése estén $y\varrho x$ következik, bármik is legyenek az $x, y \in X$ elemek;
- antiszimmetrikus, ha $x\varrho y$ és $y\varrho x$ teljesülése estén $x = y$ következik, bármik is legyenek az $x, y \in X$ elemek.

♢

25. Definíció. A ϱ reláció

- ekvivalenciareláció, ha reflexív, tranzitív és szimmetrikus;
- rendezési reláció, ha reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus.

♢

Pl. Legyen F a valaha élt vagy élő férfiak halmaza, $x \in F$ és $y \in F$ álljon relációban egymással, ha x apja y-nak. Ez a reláció nem reflexív (egy férfi nem apja önmagának), következésképpen nem ekvivalencia- és nem rendezési reláció. A tranzitivitás sem igaz (mert ha x apja y-nak és y apja z-nek akkor x nem apja, hanem nagyapja z-nek). A reláció nyilván nem szimmetrikus (ha x apja y-nak, akkor y nem apja x-nek). Furcsa módon az antiszimmetria teljesül, mert nincs olyan pár melyre $x\varrho y$ és $y\varrho x$ teljesülne, és egy halmaz elemeire bármely tulajdonság érvényes, ha kiderül róla, hogy az az üres halmaz.

Pl. $H = \{$síkbeli háromszögek$\}$, és egy $h_1\triangle$ relációban áll a $h_2\triangle$-gel ha hasonlóak, azaz geometriai jelöléssel élve: $h_1\triangle \sim h_2\triangle$. Nyilvánvalóan reflexív relációról van szó, mivel minden háromszög hasonló önmagához. A tranzitivitás is teljesül, hiszen $h_1\triangle \sim h_2\triangle$ és $h_2\triangle \sim h_3\triangle$ következménye, hogy $h_1\triangle \sim$

$h_3\triangle$ bármely $h_1\triangle$, $h_2\triangle$ és $h_3\triangle$-re is teljesült a két előfeltétel. A szimmetria adódik a geometriai szemléletből. Az eddigiek alapján a $\sim\subset H^2$ reláció ekvivalenciareláció. De $\sim$ nem rendezési reláció, mert $h_1\triangle \sim h_2\triangle$ és $h_2\triangle \sim h_1\triangle$ nem vonja maga után, hogy a h_1 és h_2 háromszögek megegyeznek.

♣ 26. Definíció. Az $f \subset X \times Y$ relációt függvénynek nevezzük ha bármely x-re teljesül, hogy xfy és xfz esetén $y = z$ (egyértelmű hozzárendelés). ♢

Jelölés: $f : X \to Y$ ($f \subset X \times Y$ helyett), $f(x) = y$ (xfy) helyett.

27. Definíció. Az $f : X \to Y$ függvénynek létezik inverze ha az $\tilde{f}$ reláció függvény. Ekkor $\tilde{f} : Y \to X$ az f függvény inverz függvénye. ♢

28. Tétel. *(bizonyítás nélkül) Ha $f \subset X \times Y$ ($f : X \to Y$) és $g \subset Y \times Z$ ($g : Y \to Z$) függvények, akkor a $g \circ f \subset X \times Z$ reláció is függvény.*

29. Definíció. Az előző tétel jelöléseit megtartva a $g\circ f : X \to Z$ függvényt az f és g függvények összetételének, röviden összetett függvénynek nevezzük. ♢

30. Definíció. Legyen $f : X \to Y$ függvény. Az X halmaz az f függvény indulási halmaza, az Y halmaz pedig f érkezési halmaza. ♢

31. Definíció. A $\mathcal{D}_f = \{x \in X \mid \exists\, y \in Y,\ y = f(x)\}$ halmazt az f függvény értelmezési tartományának, az $\mathcal{R}_f = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X,\ f(x) = y\}$ halmazt az f függvény értékkészletének hívjuk. ♢

32. Definíció. Legyen $f : X \to Y$ függvény, továbbá H olyan halmaz, melyre $H \cap \mathcal{D}_f \neq 0$. A $f|_H : H \cap \mathcal{D}_f \to Y \subset f$ függvényt az f függvény H halmazra való leszűkítésének nevezzük. (Nyilvánvaló, hogy $f|_H$ függvény.) ♢

Pl. $\eta \subset \mathbb{R}^2$, $\eta = \{(\sqrt{2}, 5), (\sqrt{2}, 2)\}$ reláció nem függvény, mert $\sqrt{2}\eta 5$ és $\sqrt{2}\eta 2$ de $5 \neq 2$. Ellenben $\varrho \subset \mathbb{R}^2$, $\varrho = \{(0, 2), (1, 2), (3, \pi)\}$ reláció függvény, mert egyértelmű hozzárendelés. Eszerint a második esetben használhatjuk a $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varrho(0) = 2$, $\varrho(1) = 2$, $\varrho(3) = \pi$ jelöléseket. A ϱ függvénynek nincs inverze, mert a $\tilde{\varrho} = \{(2, 0), (2, 1), (\pi, 3)\}$ reláció nem függvény ugyanis $2\tilde{\varrho}0$, $2\tilde{\varrho}1$ és $0 \neq 1$. Ha $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ akkor $\varrho|_H = \{(1, 2), (3, \pi)\}$ függvénynek létezik inverze, mégpedig $\widetilde{(\varrho|_H)} = \{(2, 1), (\pi, 3)\}$.

♣ 33. Definíció. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvényeket valós-valós függvényeknek nevezzük (röviden valós függvényeknek). ♢

34. Definíció. Az f függvény páros (páratlan), ha $\forall\ x \in \mathcal{D}_f$ esetén $-x \in \mathcal{D}_f$ és $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$). ♢

35. Definíció. Az f függvény periodikus ha $\exists\, p \in \mathbb{R}^+$, hogy $\forall\, x \in \mathcal{D}_f$ esetén $x + p \in \mathcal{D}_f$ és $f(x + p) = f(x)$. Ekkor p az f függvény periódusa. (Ha létezik legkisebb periódus, akkor azt szokás használni.) ♢

36. Definíció. Az f függvény alulról korlátos (felülről korlátos), ha $\exists\ K_a \in \mathbb{R}$ ($\exists\ K_f \in \mathbb{R}$) amelyre teljesül, hogy $\forall\, x \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(x) \geq K_a$ ($f(x) \leq K_f$). Egy f függvény korlátos, ha alulról és felülről is korlátos. ♢

Világos, hogy ha egy függvény pl. alulról korlátos, akkor végtelen sok alsó korlátja van, hiszen egy tetszőleges alsó korlátnál kisebb összes szám is alsó korlátja lesz. Ha lehet akkor a legnagyobb alsó korlát megadása a cél. (Felső korlátra analóg állítások teljesülnek.)

37. Definíció. Az f függvény monoton nő (szigorúan monoton nő, monoton csökken, szigorúan monoton csökken), ha $\forall\, x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_1) \geq f(x_2)$, $f(x_1) > f(x_2)$). (Ezen tulajdonságok bármely $H \subset \mathcal{D}_f$-en hasonlóan értelmezhetők.) ♢

♣ *Valós-valós függvények ábrázolása.* Két egymásra merőlege számegyenest tekintünk. A vízszintes tengely: *abszcissza* (másképp: *x-tengely*), a függőleges tengely *ordináta* (másképp: *y-tengely*). Ha $f(x_1) = y_1$ akkor az abszcissza tengelyen x_1, az ordináta tengelyen y_1 helyen húzunk párhuzamost a másik tengellyel, és a két egyenes metszéspontja lesz a grafikon $f(x_1) = y_1$-nek megfelelő pontja. Ha az összes $f(x) = y$, $x \in \mathcal{D}_f$ esetén végrehajtjuk a fenti utasításokat, akkor a kapott síkbeli ponthalmaz lesz az f függvény grafikonja.

A páros ill. páratlan függvény grafikonja szimmetrikus az ordináta tengelyre ill. az origóra. Periodikus függvénynél létezik egy olyan grafikondarab, amelyet végtelen sokszor szabályosan egymás mellé

téve megkaphatjuk a teljes grafikont. Az inverz függvény grafikonja megkapható az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenletű egyenesre való tükrözésével.

♣ *Nevezetes valós függvények.*

1. Konstans függvény. $c \in \mathbb{R}$ rögzített, $f(x) = c$. Tulajdonságai: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_f = \{c\}$.

2. Lineáris függvény. $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ rögzítettek, $f(x) = ax + b$. Tulajdonságai: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$. a a *meredekség* vagy *iránytangens*, b a *tengelymetszet*.

3. Másodfokú függvény. $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$ rögzítettek, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tulajdonságai: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_f$ az együtthatókból határozható meg.

4. n-edfokú polinomfüggvény. $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ rögzítettek, ($a_n \neq 0$ ha $n > 0$), $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Tulajdonságai: az előző három eset általánosítása, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, a többit lásd később.

5. Hatványfüggvény. $q \in \mathbb{Q}$ rögzített, $f(x) = x^q$. Pl. ha $q = 0$ akkor konstans függvényt, ha $q = 1$ akkor lineáris függvényt, ha $q = 2$ akkor másodfokú függvényt, ha $q \geq 3$ akkor magasabbfokú polinomfüggvényt, ha $q = -1$ akkor az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényt, ha $q = \frac{1}{2}$ akkor a négyzetgyök függvényt, ha $q = \frac{1}{3}$ akkor a köbgyök függvényt kapjuk, stb. Az értelezési tartomány q-tól függ, pl. $q = 0, 1, 2, \frac{1}{3}$ esetén $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $q = -1$ esetén $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $q = \frac{1}{2}$ esetén $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_0^+$. Ha q egész, akkor f páros vagy páratlan aszerint, hogy a szóban forgó egész szám páros vagy páratlan. Ha q páratlan egész szám reciproka akkor f szintén páratlan.

6. Exponenciális függvény. $a \in \mathbb{R}^+$ rögzített, $f(x) = a^x$. Tulajdonságai: $a = 1$ visszaadja a konstans 1 függvényt, $a \neq 1$ esetén $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}^+$.

7. Logaritmus függvény. $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ rögzített, $f(x) = \log_a x$. Tulajdonságai: a megfelelő exponenciális függvény inverze, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$, $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$.

8. Trigonometrikus függvények. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \operatorname{tg} x$, $j(x) = \operatorname{ctg} x$. Tulajdonságaik: $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathcal{D}_j = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $\mathcal{R}_f = \mathcal{R}_g = [-1, 1]$, $\mathcal{R}_h = \mathcal{R}_j = \mathbb{R}$. Mindegyik függvény periodikus, a legkisebb periódus f ill. g esetén 2π, h ill. j esetén π. Továbbá g páros, f és h páratlan.

9. Abszolút érték függvény.
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \geq 0; \\ -x & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$
Tulajdonságai: szakaszonként lineáris függvény, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}_0^+$. Páros függvény.

10. Dirichlet-függvény.
$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{ha } x \in \mathbb{Q}^\star. \end{cases}$$
Tulajdonságai: $\mathcal{D}_D = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_D = \{0, 1\}$. Periodikus függvény, nincs legkisebb periódusa. Páros függvény.

♣ *Többváltozós függvények.*

38. Definíció. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ függvényt n-változós függvénynek hívjuk. Ha $n = 1$ akkor (mint már ismert) valós-valós függvényről, míg $n \geq 2$ esetén többváltozós függvényről beszélünk. ♢

Az n változós függvények grafikonja az $(n+1)$ dimenziós térben van. Az általunk vizsgált kétváltozós függvények grafikonjai felületek, amelyek a szokásos (3 dimenziós) térben ábrázolhatók.

Pl. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ egy kétváltozós függvény, pl. $f(3, -1.5) = 3^2 + (-1.5)^2 = 11.25$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}_0^+$, a grafikon egy forgásparaboloid felület.

4. fejezet

POLINOMOK

♣ *Az előző fejezetnél általánosabb értelmezés.*

39. DEFINÍCIÓ. Adottak az $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ számok, $a_n \neq 0$ ha $n > 0$. A $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ függvényt komplex polinomfüggvénynek, röviden polinomnak hívjuk. Az $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ számok a polinom együtthatói, a_n a főegyüttható.♢

Az együtthatók általában a $\mathbb{C}$ halmazból valók, de speciálisan az $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ vagy $\mathbb{Z}$ részhalmazokhoz is tartozhatnak. Ekkor rendre komplex-, valós-, racionális- ill. egészegyütthatós polinomokról beszélünk, melyek halmazát rendre a $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x], \mathbb{Q}[x]$ ill. $\mathbb{Z}[x]$ szimbólumok jelölik.

40. DEFINÍCIÓ. A $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, $a_n \neq 0$ polinom fokszáma n, jelölése $deg(p(x)) = n$ vagy ha nem zavaró akkor $\deg(p) = n$. Ha a_n értékéről nincs kikötés, akkor a $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ polinom legfeljebb n-ed fokú, azaz $\deg(p) \leq n$. ♢

41. DEFINÍCIÓ. Legyen $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ egy pontosan n-edfokú polinom. Ekkor $\alpha \in \mathbb{C}$ esetén a $p(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0$ komplex számot a p polinom α helyen vett helyettesítési értékének nevezzük. Ha valamely α komplex számra $p(\alpha) = 0$, akkor α a p polinom gyöke. ♢

(Valósegyütthatós polinomnál a valós α gyök megadja a polinomfüggvény zérushelyeit.) Központi kérdés: egy adott polinom gyökeinek meghatározása.

♣ *A gyökök száma, gyöktényezős alak.*

42. Tétel. *Legyen $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ egy pontosan n-edfokú polinom, $n > 0$, továbbá $\alpha \in \mathbb{C}$. Ekkor létezik $q(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg(q) = n - 1$, melyre*

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) + p(\alpha).$$

Bizonyítás. $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, $a_n \neq 0$. $p(x) - p(\alpha) = (a_n x^n + \ldots + a_0) - (a_n\alpha^n + \ldots + a_0) = a_n(x^n - \alpha^n) + \ldots + a_1(x - \alpha) = (x - \alpha)\left(a_n(x^{n-1} + x^{n-2}\alpha + \ldots + \alpha^{n-1}) + \ldots + a_1\right) = (x - \alpha) \cdot q(x)$, $\deg(q) = n - 1$. Innen adódik az állítás. ■

Következmény. *Ha α gyöke a $p(x)$ polinomnak, $deg(p) = n > 0$, akkor $p(x) = (x - \alpha) \cdot q(x)$ alakú, ahol $\deg(q) = n - 1$.*

Bizonyítás. Az előző tételből közvetlenül látható, hiszen $p(\alpha) = 0$. ■

43. Tétel. *(Algebra alaptétele (AAT), nem bizonyítjuk.) Minden legalább elsőfokú polinomnak van gyöke.*

Következmény. *Egy pontosan n-edfokú polinomnak $n \geq 1$ esetén pontosan n gyöke van.*

Bizonyítás. AAT és az azt megelőző tétel miatt $\exists\ \alpha_1 \in \mathbb{C}$, $\exists\ p_1(x) \in \mathbb{C}[x]$ amelyekre $p(\alpha_1) = 0$, $p(x) = (x - \alpha_1)p_1(x)$, ahol $\deg(p_1) = n - 1$. Ha $n - 1 > 0$ akkor az előző gondolatmenetet alkalmazva $p_1(x)$-re $\exists\ \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $\exists p_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ amelyekre $p_1(\alpha_2) = 0$, $p_1(x) = (x - \alpha_2)p_2(x)$, ahol $\deg(p_2) = n - 2$. A fenti lépéseket összesen n-szer végrehajtva az a_n konstans polinomhoz jutunk: $p_{n-1}(x) = (x - \alpha_n) \cdot a_n$. Összesítve $p(x)$ *gyöktényezős alakját* kapjuk:

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_n).$$

Világos, hogy az α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gyökök között lehetnek azonosak, emiatt a "pontosan n gyök" kifejezés úgy értendő, hogy a többszörösen előforduló gyököket pontosan annyiszor számoljuk ahányszor a fenti felírásban szerepel (multiplicitással). ■

Pl. A $p(x) = x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$ polinomnak két egyszeres multiplicitású különböző valós gyöke van, a $q(x) = x^2 = (x-0)(x-0)$ polinomnak a 0 kétszeres multiplicitású gyöke, az $r(x) = x^2+1 = (x - i)(x + i)$ polinomnak két egyszeres multiplicitású különböző komplex gyöke van. A középiskolás megfogalmazás rendre "két valós gyök", "egy valós gyök", "nincs valós gyök" volt a diszkrimináns alapján.

♣ *Horner-elrendezés.*
$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}[x]$, $n > 0$, $a_n \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$p(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = (\ldots(a_n\alpha + a_{n-1})\alpha + \ldots + a_1)\,\alpha + a_0$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_0
α	a_n	$a_n\alpha + a_{n-1}$	$(a_n\alpha + a_{n-1})\alpha + a_{n-2}$	$\ldots$	$p(\alpha)$

Pl. $p(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1 = ((2x - 1)x + 2)x - 1$, (Jelmagyarázat: *gy* -gyök; *ngy* -nem gyök.)

	2	-1	2	-1	
-2	2	-5	12	-25	$p(-2) = -25 \neq 0 \Rightarrow\ -2\ ngy$
$\frac{1}{2}$	2	0	2	0	$p(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow\ \frac{1}{2}\ gy$
0	2	-1	2	-1	$p(0) = -1 \neq 0 \Rightarrow\ 0\ ngy$

Megjegyzések.

1. A Horner-táblázatban kapott számok nem csak $p(\alpha)$-t, hanem a $p(x) = (x-\alpha)q(x)+p(\alpha)$ előállításban $q(x)$ együtthatóit is tartalmazzák. Az előző példából: $p(x) = (x + 2)(2x^2 - 5x + 12) - 25$.

2. Ha $p(x)$ valamely együtthatója 0, azt is fel kell tüntetni a táblázat felső sorában. Pl. $p(x) = x^2 - 5$ esetén a felső sor: $1 \quad 0 \quad -5$.

♣ *Gyökök meghatározása speciális esetekben.*
Elsőfokú polinomok. $\deg(p) = 1$, $p(x) = a_1x + a_0$ $(a_1 \neq 0)$ esetén a $p(x)$ polinom egyetlen gyöke az $a_1x + a_0 = 0$ egyenlet megoldásából: $-\frac{a_0}{a_1}$. A gyöktényezős alak: $p(x) = a_1(x + \frac{a_0}{a_1})$.

Másodfokú polinomok. $\deg(p) = 2$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ $(a_2 \neq 0)$ esetén a $p(x)$ polinomnak két gyöke van (a multiplicitást is figyelembe véve), melyeket az $a_2x^2+a_1x+a_0 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásával lehet pontosan megadni. Ha a két gyök x_1 és x_2, akkor a gyöktényezős alak: $p(x) = a_2(x - x_1)(x - x_2)$.

Racionális együtthatós polinomok racionális gyökei. $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ gyökei megegyeznek azon $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinom gyökeivel, melyet úgy kapunk, hogy $p(x)$ együtthatói nevezőinek legkisebb közös többszörösével beszorozzuk $p(x)$-et.

44. Tétel. *(Nem bizonyítjuk.) Legyen* $q(x) = b_nx^n + \ldots + b_0 \in \mathbb{Z}[x]$, $n > 0$, $b_n \neq 0$. *Ha* $x_0 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, p *és* $0 \neq q$ *egészek relatív prímek és* $q(x_0) = 0$ *akkor* p *osztója* b_0*-nak és* q *osztója* b_n*-nek.*

Pl. $p(x) = x^4-\frac{3}{2}x^3-3x^2-4x-\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}[x]$ gyökei megegyeznek $q(x) = 2\cdot p(x) = 2x^4-3x^3-6x^2-8x-3 \in \mathbb{Z}[x]$ gyökeivel. $q(x)$ minden $x_0 = \frac{p}{q}$ racionális gyökére teljesül, hogy $p| -3$ és $q|2$, azaz $p = \pm1, \pm3$ lehet, $q = \pm1, \pm2$ lehet. A szóbajöhető 8 eset: $x_0 = \pm1, \pm3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$.

	2	-3	-6	-8	-3	
-1	2	-5	-1	-7	4	$q(-1) = 4 \neq 0 \Rightarrow\ -1\ ngy$
1	2	-1	-7	-15	-18	$q(1) = -18 \neq 0 \Rightarrow\ 1\ ngy$
-3	2	-9	21	-71	210	$q(-3) = 210 \neq 0 \Rightarrow\ -3\ ngy$
3	2	3	3	1	0	$q(3) = 0 \Rightarrow\ 3\ gy\ \Rightarrow\ q(x) = (x - 3)(2x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$;

Innen a $q_1(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ egészegyütthatós polinommal számolunk tovább. $q_1(x)$ racionális gyökei $x_0 = \pm1, \pm\frac{1}{2}$ lehetnek. Mivel $q_1(x)$ minden együtthatója pozitív, ezért a negatív számokat kell csak ellenőrizni.

	2	3	3	1	
-1	2	1	2	-1	$q_1(-1) = -1 \neq 0 \Rightarrow\ -1\ ngy$
$-\frac{1}{2}$	2	2	2	0	$q_1(-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow\ -\frac{1}{2}\ gy\ \Rightarrow\ q_1(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x+2);$

$q_2(x) = x^2 + x + 1$ gyökeit a megoldóképlettel meghatározzuk. A fentiek alapján $q(x)$-nek (és $p(x)$-nek) 4 különböző gyöke van, amelyből kettő racionális $(3, -\frac{1}{2})$, kettő komplex gyök $(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\ i)$. A gyöktényezős alak:

$$q(x) = 2\,(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\ i\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\ i\right).$$

5. fejezet

SOROZATOK

♣ 45. Definíció. Az $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt valós számsorozatnak nevezzük. ♢

Ha $|\mathcal{D}_x| = \infty$ akkor végtelen valós számsorozatról beszélünk (továbbiakban röviden sorozat, és a függvényjelölésről áttérünk a hagyományos sorozatjelölésre). A sorozatok megadása történhet az első néhány tagjának felsorolásával (ha ez nem félreérthető), az általános tag megadásával, vagy rekurzív módon. Pl.

1.

$$\{a\}_{n=0}^{\infty} : \begin{cases} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \mathbb{R}: & \smile & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots \end{cases} \quad vagy \quad \smile, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \quad vagy \quad a_n = \frac{1}{n}.$$

a_n egy végtelen valós számsorozat, az első néhány tagja: a_0 nincs értelmezve, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ...

2.

$$b_n = \sqrt{10 - n^2}$$

egy véges valós számsorozat, ugyanis $b_0 = \sqrt{10}$, $b_1 = 3$, $b_2 = \sqrt{6}$, $b_4 = 1$ és $n \geq 4$ esetén $\sqrt{10 - n^2}$ nem valós szám.

3.

$$c_n = (-1)^n.$$

$c_0 = 1$, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$, ... vagy rövidebb felsorolással: $1, -1, 1, -1, \dots$ végtelen valós számsorozat, egyben mértani sorozat is: kezdőelem 1, kvociens -1.

(Mértani sorozat: $x_0, q \in \mathbb{R}$ adottak, az általános tag rekurzív megadása $x_n = x_{n-1} \cdot q$ $(n \geq 1)$).

4.

$$d_n = n.$$

Az első tagok: $0, 1, 2, 3, 4, \dots$. Végtelen valós számsorozst, egyben számtani sorozat: kezdőelem 0, differencia 1.

(Számtani sorozat: $x_0, d \in \mathbb{R}$ adottak, az általános tag rekurzív megadása $x_n = x_{n-1} + d$ $(n \geq 1)$).

5.

$$e_n = (-1)^n \cdot n.$$

Az előző két sorozat szorzata: $0, -1, 2, -3, 4, -5, \dots$.

6.

$$f_n = \frac{2n}{n-2}.$$

$n = 2$-re nincs értelmezve: $0, -2, \smile, 6, 4, \frac{10}{3}, 3, \frac{14}{5}, \dots$. (Itt nehéz lenne felismerni a sorozatot az első néhány tag alapján.)

7.

$$g_n = 0.$$

Ez a konstans 0 sorozat: $0, 0, 0, 0, 0 \dots$.

8.
$$h_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$
Az első néhány tag: $\smile, 2, 2.25, 2.37, 2.44, \ldots$ (részletesen lásd később).

9.
$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}\ , \quad \varphi_0 = 0\ ,\ \varphi_1 = 1$$
az ún. Fibonacci sorozat, megadása rekurzív módon történt. Az első néhány tag: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$.

♣ *Sorozatok monotonitása.* A függvényekre vonatkozó definícióból következik, hogy egy x_n sorozat szigorúan monoton nő (monoton nő, szigorúan monoton csökken, monoton csökken) ha $\forall\ n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n < x_{n+1}$ ($x_n \le x_{n+1}$, $x_n > x_{n+1}$, $x_n \ge x_{n+1}$). Amennyiben bizonyos indexű tagokra a sorozat nincs értelmezve, akkor értelemszerűen a szomszédokat hasonlítjuk össze. Jelölés: $\uparrow$ ($\nearrow$, $\downarrow$, $\searrow$). Előfordulhat, hogy valamelyik tagtól fogva vizsgáljuk a monotonitást, vagy az valamelyik tagtól fogva érvényes csak. Ilyenkor azt szoktuk mondani, hogy a szóban forgó tulajdonság *"egy idő után"* teljesül ($\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ hogy $\forall\ n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ esetén...). Az "egy idő után" kifejezést nem kizárólag a monotonitásnál használjuk, hanem más tulajdonságok kapcsán is alkalmazzunk ezt a terminológiát.

Pl. $a_n \downarrow$; c_n egyik sem; $d_n \uparrow$; e_n egyik sem; f_n egyik sem, de a harmadik tagtól fogva: $f_n \downarrow$, $(n \ge 3)$; $g_n \searrow$ és $g_n \nearrow$.

46. Tétel. *A $h_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat szigorúan monoton nő.*

Bizonyítás. Be kell látni, hogy bármely n indexre $h_n < h_{n+1}$, amely $\sqrt[n+1]{h_n} = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < 1+\frac{1}{n+1} = \sqrt[n+1]{h_{n+1}}$-ből következik. Az egyenlőtlenségnél igazolásánál a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget használtuk fel.
$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 1} < \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}.$$
■

♣ *Sorozatok korlátossága.* A függvények korlátosságára vonatkozó definíciók változtatás nélkül használhatók a sorozatokra.

Pl. a_n korlátos, $K_a = 0$, $K_f = 1$. c_n is korlátos, $K_a = -1$, $K_f = 1$. d_n felülről nem, de alulról korlátos $K_a = 0$. e_n egyik oldalról sem korlátos. f_n korlátos, $K_a = -2$, $K_f = 6$. g_n nyilvánvalóan korlátos, $K_a = K_f = 0$.

47. Tétel. *A $h_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Mivel a h_n sorozat pozitív tagú így alulról nyilván korlátos, pl. $K_a = 0$. A korlátossághoz még a felülről korlátosságot kell belátni. Megmutatjuk, ismét a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget felhasználva, hogy $h_n < 4$, ami ekvivalens az $\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1$ állítással.
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right) < \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+2}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+2}{n+2}\right)^{n+2} = 1.$$
■

♣ *Sorozatok konvergenciája.*

48. Definíció. $A \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Az A pont ε sugarú <u>környezetén</u> az $]A-\varepsilon\ ,\ A+\varepsilon[$ nyílt intervallumot értjük. A ∞-nek ($-\infty$-nek) valamely ε sugarú környezetén az $\left]\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right[$ $\left(\right]-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\left[\right)$ intervallumot értjük. ♢

Jelölés: $k_\varepsilon(A)$ ill. $k_\varepsilon(\infty)$ ($k_\varepsilon(-\infty)$). A számegyenesen az A pont ε sugarú környezetében olyan x pontok helyezkednek el, melyek ε-nál közelebb vannak A-hoz, azaz $|x-A| < \varepsilon$.

49. Definíció. Az x_n sorozat <u>határértéke</u> az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$-ra a sorozat tagjai egy idő után az A szám ε sugarú környezetében vannak. A határértékkel rendelkező sorozatokat <u>konvergensnek</u> mondjuk, a nem konvergens sorozatokra a <u>divergens</u> elnevezést használjuk. ♢

Jelölés a sorozat határértékére: $x_n \to A$ vagy $\lim_{n\to\infty} x_n = A$. A konvergencia szimbólumokkal megfogalmazva: x_n <u>határértéke</u> $A \in \mathbb{R}$ ha $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$-re $x_n \in k_\varepsilon(A)$ (azaz $|x_n - A| < \varepsilon$) teljesül. Nyilvánvaló pl. , hogy a konstans $x_n = c$ sorozat konvergens és határértéke c, mert $|x_n - c| = 0 < \varepsilon$ bármely n-re és pozitív ε-ra igaz. A 0-hoz tartó sorozatokra a *nullsorozat* elnevezést is használjuk.

50. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Ha egy sorozat konvergens, akkor a határértéke egyértelmű.*

51. Tétel. $\frac{1}{n} \to 0$.

Bizonyítás. A definíció alapján igazoljuk. Be kell látni, hogy bármely pozitív ε-hoz létezik n_0 küszöbindex, hogy bármely $n > n_0$ esetén $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Tegyük fel, hogy ε tetszőlegesen rögzített, ekkor megkeressük a legkisebb n_0-t, hogy a nála nagyobb n indexekre $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ teljesüljön.

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tehát n_0-t úgy választjuk meg, hogy a nála nagyobb n-ek $\frac{1}{\varepsilon}$-nál is nagyobbak legyenek. ■

52. Tétel. *A $c_n = (-1)^n$ sorozat divergens.*

Bizonyítás. Belátjuk – a definíció alapján –, hogy c_n semelyik valós számhoz sem tart. Indirekt tegyük fel, hogy $\exists\, A \in \mathbb{R}$, melyre $c_n \to A$.

Mivel a sorozat értékkészlete a -1 és az 1 számokból áll, így könnyű lenne olyan pozitív valós ε számot mondani, hogy a sorozat egy tagja sincs benne az A szám ε sugarú környezetében, ha A különbözne (-1)-től és 1-től. Tehát $A = 1$ vagy $A = -1$ lehet csak.

Ha $A = 1$ (vagy $A = -1$) akkor A-nak pl. az $\varepsilon = 0.5$ sugarú környezetén kívül bármely n_0 küszöbindextől fogva lesz tagja a sorozatnak. Ez ellentmond a feltett konvergenciának, azaz a c_n sorozat divergens. ■

53. Tétel. *Ha $-1 < c < 1$, $c \in \mathbb{R}$ akkor $c^n \to 0$.*

Bizonyítás. Meg kell mutatni, hogy bármely pozitív ε-ra egy bizonyos idő után $|c^n - 0| < \varepsilon$ teljesül.

$$|c^n - 0| = |c|^n < \varepsilon \Longleftrightarrow n \lg |c| < \lg \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |c|} = \log_{|c|} \varepsilon,$$

mivel $|c| < 1$ miatt $\lg |c| < 0$. ■

Általában sorozatok konvergenciájának bizonyítására a definíció nehezen alkalmazható. Ezért jól használható tételekre van szükség.

54. Tétel. *Legyenek x_n és y_n sorozatok, továbbá $c \in \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $x_n \to A$ és $y_n \to B$. Ezen feltételek mellett*

1. *$x_n \pm y_n$ is konvergens és $x_n \pm y_n \to A \pm B$;*
2. *$c \cdot x_n$ is konvergens és $c \cdot x_n \to c \cdot A$;*
3. *$x_n \cdot y_n$ is konvergens és $x_n \cdot y_n \to A \cdot B$;*
4. *$B \neq 0$ esetén $\frac{x_n}{y_n}$ is konvergens és $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{A}{B}$;*
5. *$c \geq 0$ esetén vagy $c < 0$ és $A \neq 0$ esetén $|x_n|^c$ is konvergens és $|x_n|^c \to |A|^c$.*

Bizonyítás. (Csak az első állítást igazoljuk.) Legyen adott egy pozitív ε. Mivel x_n és y_n is konvergens ezért létezik olyan n_x, hogy minden $n > n_x$ esetén $|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$, továbbá olyan n_y, hogy minden $n > n_y$ esetén $|y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. $n_0 = \max\{n_x, n_y\}$-nál nagyobb n indexekre

$$|(x_n \pm y_n) - (A \pm B)| = |(x_n - A) \pm (y_n - B)| \leq |x_n - A| + |y_n - B| < \varepsilon.$$

■

Pl. Legyen $j_n = \frac{n^2+n+1}{2n^2+7}$, amely $n \neq 0$ esetén (ez a feltétel a konvergenciát nem befolyásolja) megegyezik az

$$\frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{7}{n^2}}$$

sorozattal. Az előző tételt és a $\frac{1}{n} \to 0$ tényt többször felhasználva $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \cdot 0 = 0$, $\frac{7}{n^2} = 7 \cdot \frac{1}{n^2} \to 7 \cdot 0 = 0$, $\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2} \to (1 + 0) + 0 = 1$ (számláló), $2 + \frac{7}{n^2} \to 2 + 0 = 2$ (nevező), végül $j_n \to \frac{1}{2}$.

55. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Legyen $p(x)$ és $q(x)$ két valósegyüttható polinom, $q(x)$ nem a konstans 0 polinom. A $\frac{p(n)}{q(n)}$ sorozatnak*

- *0 a határértéke* $\deg(p) < \deg(q)$ *esetén;*
- *a főegyütthatók hányadosa a határértéke* $\deg(p) = \deg(q)$ *esetén;*
- *nincs valós határértéke (nem konvergens) ha* $\deg(p) > \deg(q)$.

56. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Ha az x_n sorozat monoton és korlátos, akkor x_n konvergens. (Ekkor a határérték meghatározása külön feladat.)*

57. Tétel. *A $h_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens.*

Bizonyítás. Korábban már megmutattuk, hogy h_n szigorúan monoton nő és korlátos. Az előző tételből következik, hogy h_n konvergens. ■

h_n határértéke egy a 2 és a 3 közötti irracionális szám, egy nevezetes konstans, melynek jelölésére az e szimbólumot használjuk: $h_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \approx 2.718281828....$ Segítségével a fontos e^x exponenciális függvényt valamint az $\ln x = \log_e x$ ún. természetes alapú logaritmusfüggvényt értelmezzük. További fontos függvények az ún: *hiperbolikusz függvények*: $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (szinusz hiperbolikusz); $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (koszinusz hiperbolikusz).

58. Definíció. Legyen x_n adott sorozat. Az y_n sorozatot x_n részsorozatának nevezzük, ha az megkapható az x_n sorozat bizonyos tagjainak (véges sok, vagy végtelen sok tag) elhagyásával. ♢

59. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Ha y_n az x_n konvergens sorozat egy végtelen részsorozata, akkor y_n is konvergens és határértéke megegyezik x_n határértékével.*

60. Tétel. $k_n = \sqrt[n]{5} \to 1$.

Bizonyítás. Világos, hogy pozitív n-ekre $\sqrt[n+1]{5} < \sqrt[n]{5}$, tehát $k_n \downarrow$. Mivel k_n pozitív tagú, így alulról korlátos. Felülről is korlátos, hiszen szigorúan monoton csökkenő. Mindezekből, egy korábbi tétel alapján következik, hogy k_n konvergens. Most még a határértékét kell meghatározni.

Tegyük fel, hogy $\sqrt[n]{5} \to A$. Mivel $\sqrt[2n]{5}$ a k_n sorozat egy végtelen részsorozata, ezért $\sqrt[2n]{5} \to A$. Másrészt

$$\sqrt[2n]{5} = \sqrt{\sqrt[n]{5}} \to \sqrt{A}.$$

Az $A = \sqrt{A}$ egyenlet gyökei $A = 0$ és $A = 1$. $A = 0$ nem lehet a keresett határérték, mert $k_n > 1$. ■

61. Tétel. *(Rendőr-elv, bizonyítás nélkül) Legyenek x_n, y_n és v_n olyan sorozatok, melyekre teljesülnek az alábbiak. $x_n \to A$, $y_n \to A$ és valamely n indextől fogva $x_n \le v_n \le y_n$. Ekkor $v_n \to A$.*

62. Tétel. $l_n = \frac{3^n}{n!} \to 0$.

Bizonyítás. Legyen x_n a konstans 0 sorozat, tehát bármely n-re $x_n < l_n$ teljesül. Az $y_n = \frac{9}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$ sorozatra $n \ge 5$ esetén teljesül, hogy

$$l_n = \frac{3^n}{n!} = \frac{3^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n} < \frac{3^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^{n-3}} = \frac{9}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} = y_n \to 0.$$

Mivel az x_n és y_n sorozatok mindegyike nullsorozat, továbbá $n \ge 5$ esetén $x_n < l_n < y_n$, ezért a rendőr-elv szerint $l_n \to 0$. ■

63. Definíció. Az x_n sorozat ∞-hez ($-\infty$-hez) tart ha bármely $K \in \mathbb{R}$ esetén egy idő múlva $x_n > K$ ($x_n < K$) teljesül. Ekkor az x_n sorozat határértéke ∞ ($-\infty$) (bár divergens).♢

Jelölés: $x_n \to \infty$ vagy $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ($x_n \to -\infty$ vagy $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$). Szimbólumokkal leírva: x_n tart ∞-hez (ill. $-\infty$-hez) ha $\forall\, K \in \mathbb{R}$ esetén $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$-re $x_n > K$ (ill. $x_n < K$) teljesül.

64. Tétel. $1 < c \in \mathbb{R}$ *esetén* $c^n \to \infty$.

Bizonyítás. Legyen $K \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen rögzítve. Igazolni kell, hogy elég nagy n értékekre $c^n > K$. Ha $K \le 0$ akkor ez triviális, pozitív K mellett pedig világos, hogy $n > \frac{\ln K}{\ln c}$ már jó lesz. ■

65. Tétel. $m_n = \sqrt[n]{n!} \to \infty$.

Bizonyítás. Először teljes indukcióval belátjuk, hogy $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$ ha $n > 0$. $n = 1$-re igaz az állítás, hiszen $1! = 1 > \frac{1}{e} \approx 0.37$. Tegyük most fel, hogy $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Megmutatjuk hogy $(n+1)! > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$.

$$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n = \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \frac{n^n e}{(n+1)^n} = \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

A lépések során felhasználtuk az indukciós feltételt, ill. azt a tényt, hogy az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat szigorúan monoton nőve tart e-hez, tehát $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$.

Tetszőleges K-ra kell igazolni, hogy egy idő után $\sqrt[n]{n!} > K$. Ha $K > 0$ akkor $n > e \cdot K$-ra $K < \frac{n}{e} < \sqrt[n]{n!}$ teljesül, egyébként $K < \sqrt[n]{n!}$ triviálisan igaz mert m_n pozitív tagú. ■

♣ *Műveletek konvergens és divergens sorozatok között.*

A táblázatok első oszlopában és első sorában különböző típusú számsorozatokat írtunk, a típusok azonosítása a határértékük alapján történik, kivéve az utolsó, divergens ($\pm\infty$-hez sem tartó) sorozatot. A táblázat belsejében a megfelelő művelettel összekapcsolt sorozatok határértéke található, a ? azt jelenti, hogy pusztán ennyi információ birtokában nem tudunk egyértelmű választ adni a kérdésre. Pl. a "$0 \cdot \infty$" típus esetén többféle végeredmény is lehet: $\frac{1}{n} \cdot n^2 \to \infty$, $-\frac{1}{n} \cdot n^2 \to -\infty$, $\frac{1}{n} \cdot 2n \to 2$, $\frac{1}{n^3} \cdot n \to 0$, $(-1)^n \frac{1}{n} \cdot n^2$ divergens.

$+$	c_2	∞	$-\infty$	*div.*
c_1	$c_1 + c_2$	∞	$-\infty$	*div.*
∞		∞	?	?
$-\infty$			$-\infty$	?
div.				?

$-$	c_2	∞	$-\infty$	*div.*
c_1	$c_1 - c_2$	$-\infty$	$+\infty$	*div.*
∞	∞	?	∞	?
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	?
div.	*div.*	?	?	?

$\cdot$	$c_2 > 0$	$c_2 < 0$	0	∞	$-\infty$	*div.*
$c_1 > 0$	$c_1 \cdot c_2$	$c_1 \cdot c_2$	0	∞	$-\infty$	*div.*
$c_1 < 0$		$c_1 \cdot c_2$	0	$-\infty$	∞	*div.*
0		0	0	?	?	?
∞				∞	$-\infty$	?
$-\infty$					∞	?
div.						?

$\div$	$c_2 > 0$	$c_2 < 0$	0	∞	$-\infty$	*div.*
$c_1 > 0$	$\frac{c_1}{c_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	0	∞	$-\infty$	*div.*
$c_1 < 0$	$\frac{c_1}{c_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	0	$-\infty$	∞	*div.*
0	?	?	?	?	?	?
∞	0	0	0	?	?	?
$-\infty$	0	0	0	?	?	?
div.	?	?	?	?	?	?

♣ *Nevezetes sorozatok határértéke (összefoglalás).*

1. $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. $\frac{c}{n} \to 0$ (Spec. $c = 1$ biz.)
2. $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. $\left(1+\frac{c}{n}\right)^n \to e^c$. (Spec. $c = 1$ biz.)
3. $c \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. $\sqrt[n]{c} \to 1$. (Spec. $c = 5$ biz.)
4. $\sqrt[n]{n} \to 1$.
5. $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. $\frac{c^n}{n!} \to 0$. (Spec. $c = 3$ biz.)
6. $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ha $c \le -1$ akkor c^n divergens. (Spec. $c = -1$ biz.) Egyébként
$$c^n \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{ha } |c| < 1\ ; \\ 1 & \text{ha } c = 1; \\ \infty & \text{ha } c > 1\ . \end{cases} \qquad (Biz.)$$
7. $\sqrt[n]{n!} \to \infty$. (Biz.)
8. $p(x) = a_k x^k + \ldots a_0 \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(p(x)) = k > 0$, $a_k \neq 0$.
$$p(n) \longrightarrow \begin{cases} \infty & \text{ha } a_k > 0\ ; \\ -\infty & \text{ha } a_k < 0\ . \end{cases}$$

6. fejezet

VÉGTELEN SOROK

♣ Legyen $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ végtelen számsorozat, ún. *generáló sorozat.*

66. Definíció. Az $x_0 + x_1 + \ldots + x_n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$ objektumot végtelen sornak hívjuk. ♢

67. Definíció. A $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ sor n-edik részletösszegén a sort generáló x_n sorozat első n tagjának összegét értjük. Jelölés: s_n. ($s_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$.) ♢

68. Definíció. Egy sor konvergens ha a részletösszegek sorozata konvergens, egyébként divergens. A részletösszegek sorozatának $h \in \mathbb{R}$ határértékét vagy a $\pm\infty$-t a sor összegének nevezzük. Jelölés: $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = h$ ill. $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \pm\infty$. ♢

Megjegyzések. A sorok értelmezésében szereplő $k = 0$ feltétel a szükségleteknek megfelelően módosítható. Ha a generáló x_n sorozat nincs minden természetes számra értelmezve, akkor az ilyen indexű tagokokat el kell hagyni a sor értelmezésénél valamint a megfelelő részletösszegekből is.

Pl. Legyen a generáló sorozat $a_n = 1$, a konstans 1 sorozat. A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} 1$ sor n-edik részletösszege $s_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1 \to \infty$, tehát a vizsgált sor divergens, a sor összege ∞.

Egy másik generáló sorozat legyen $b_n = (-1)^n$ (azaz a $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ sorozat). A részletösszegek sorozata: $s_0 = b_0 = 1$, $s_1 = b_0 + b_1 = 1 + (-1) = 0$, $s_2 = 1 + (-1) + 1 = 1$, $s_3 = 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0$, tehát s_n az $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ sorozat, amely divergens, így a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sor is divergens, a sornak nincs összege.

69. Tétel. *Legyen $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$. A $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ végtelen mértani sor konvergens ha $|q| < 1$, ekkor a sor összege $\frac{1}{1-q}$. Ha $q \geq 1$, akkor a sor divergens és összege ∞. Ha $q \leq -1$ akkor a sor divergens, összege nem létezik.*

Bizonyítás. A $q = \pm 1$ eseteket a fenti példában elemeztük. Tegyük fel most, hogy $q \neq \pm 1$.

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q}.$$

Ha $|q| < 1$ akkor $q^{n+1} \to 0$ tehát $s_n \to \frac{1}{1-q}$. Ha $q > 1$ akkor $q^{n+1} \to \infty$ tehát $s_n \to \infty$. Ha $q < -1$ akkor q^{n+1} divergens, emiatt a vizsgált sor is. ■

70. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ sor konvergens, akkor $x_n \to 0$.*

Megjegyzések. Ez a tétel lehetőséget ad egy sor divergenciájának bizonyítására, ugyanis ha megmutatjuk, hogy a sort generáló sorozat nem nullsorozat, akkor ebből következik a sor divergenciája.

Az állítás visszafelé nem igaz, tehát $x_n \to 0$ nem vonja maga után a generált $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ sor konvergenciáját. Pl. $\frac{1}{n} \to 0$, de az ún. harmonikus sor: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergens (lásd később). Egy újabb feltétellel kiegészítve viszont igaz a megfordítás is.

71. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Ha az x_n sorozat váltakozó előjelű, $|x_n| \searrow$ és $x_n \to 0$, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ sor konvergens.*

A tételben szereplő tulajdonságú sorokat *Leibniz-típusú* sornak nevezzük. Pl. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \ln 2$.

♣ *Pozitív tagú sorok.*

72. Tétel. *(Összehasonlító kritériumok, bizonyítás nélkül.) Tegyük fel, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ és $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ sorok pozitív tagúak és bizonyos indextől fogva $x_n \leq y_n$ teljesül.*

1. *Majoráns kritérium: Ha $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ konvergens, akkor $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ is konvergens.*
2. *Minoráns kritérium: Ha $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ divergens akkor, $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ is divergens.*

73. Tétel. *A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ harmonikus sor divergens.*

Bizonyítás. Legyen $a_n = n$ a pozitív természetes számok sorozata ($n > 0$), b_n pedig az a sorozat amelyet úgy kapunk, hogy a_n-ben a kettő hatványait meghagyjuk, a nem kettő hatványokat pedig kicseréljük a náluk nagyobb kettő hatványok legkisebbikével:

$$\begin{array}{lccccccccccccccc} a_n: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 16 & 17 & \dots & 32 & 33 & \dots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ b_n: & 1 & 2 & 4 & 4 & 8 & 8 & 8 & 8 & 16 & \dots & 16 & 32 & \dots & 32 & 64 & \dots \end{array}$$

Mivel $0 < a_n \leq b_n$ ezért $y_n = \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{b_n} = x_n > 0$. Ha belátjuk, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ sor divergens, akkor a minoráns kritérium miatt a $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ harmonikus sor is divergens.

Tekintsük a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ sor s_n részletösszeg sorozatának s_{2^m} részsorozatát ($0 < n = 2^m$). Pl. $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1.5$, $s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2$, $s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 2.5$, stb. Könnyű észrevenni, hogy $s_{2^m} = 1 + 0.5 \cdot m \to \infty$, emiatt $s_n \to \infty$. ■

74. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Bármely pozitív ϵ esetén a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\epsilon}}$ ún. hiperharmonikus sor konvergens.*

Pl. $\epsilon = 1$ mellett $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\epsilon = 3$ mellett $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

75. Tétel. *(Hányados- és gyökkritériumok, bizonyítás nélkül) Legyen $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ pozitív tagú sor. Ha egy bizonyos indextől fogva valamely q értékre $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q < 1$ vagy $\sqrt[n]{x_n} \leq q < 1$ teljesül, akkor $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ konvergens. Ha egy idő után valamely q értékre $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq q > 1$ vagy $\sqrt[n]{x_n} \geq q > 1$ teljesül, akkor $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ divergens.*

A tétel következménye, hogy az $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ ill. $\sqrt[n]{x_n}$ sorozatok konvergenciája lehetőséget nyújt következtetések levonására. Ha valamelyik határérték 1-nél kisebb akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ sor konvergens, ha 1-nél nagyobb akkor divergens.

Pl. A generáló sorozat $x_n = \frac{n^n}{n!}$, és $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ konvergenciáját vizsgáljuk.

A végeredmény megadása a gyökkritériumból bonyolultnak tűnik, mert $\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, melyben a számláló és a nevező is végtelenhez tart. Ezen az úton csak n és $\sqrt[n]{n!}$ konvergenciájának összehasonlítása adhatna helyes végeredményt.

A hányadoskritérium alapján

$$\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e > 1,$$

tehát az eredeti $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ sor divergens.

7. fejezet

KAMATSZÁMÍTÁS

Jelölje P a kamatlábat, A a betett összeget, $\mathcal{K}$ a kamatot és $\mathcal{T}$ a tőkét.

♣ *Egyszerű kamat*

Egy éves kamatidő mellett

$$\mathcal{K} = A \cdot \frac{P}{100} \quad , \quad \mathcal{T} = A + A \cdot \frac{P}{100} = A\left(1 + \frac{P}{100}\right) = A \cdot r,$$

ahol $r = 1 + \frac{P}{100}$ az ún. *kamattényező*. Kamatszámításnál az évet 360 naposnak, a hónapokat 30 naposnak veszik, tehát $k \leq 360$ nap elteltével

$$\mathcal{K} = A \cdot \frac{P}{100} \cdot \frac{k}{360} \quad , \quad \mathcal{T} = A + A \cdot \frac{P}{100} \cdot \frac{k}{360} = A\left(1 + \frac{P}{100} \cdot \frac{k}{360}\right).$$

♣ *Kamatos kamat*

Bevezetve a $\mathcal{T}_0 = A$ jelölést, az n-edik év végén

$$\mathcal{T}_n = A \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n = \mathcal{T}_0 \cdot r^n \quad , \quad \mathcal{K}_n = \mathcal{T}_n - \mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_0\left(\left(1 + \frac{P}{100}\right)^n - 1\right).$$

Diszkontálásnál

$$A = \frac{\mathcal{T}_n}{\left(1 + \frac{P}{100}\right)^n} = \frac{\mathcal{T}_n}{r^n} = \mathcal{T}_n \cdot v^n,$$

ahol $v = \frac{1}{r} = \frac{100}{100+P}$ az ún. *diszkonttényező*. Az $1 - \frac{D}{100} = v$ egyenlőségből a D *diszkontlábra* $D = 100(1-v) = \frac{100P}{100+P}$ adódik.

♣ *Folytonos kamatozás*

Ha évente m-szer történik tőkésítés évi P, és alkalmankénti $\frac{Q}{m}$ kamatlábbal, akkor

$$\mathcal{T}_1 = A \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right) = A \cdot \left(1 + \frac{Q}{100m}\right)^m.$$

Legyen $p = \frac{P}{100}$, $q = \frac{Q}{100}$. Ekkor $1 + p = \left(1 + \frac{q}{m}\right)^m$. m minden határon túl történő növelésével $\left(1 + \frac{q}{m}\right)^m \to e^q$. Tehát $1 + p = e^q$ alapján $p = e^q - 1$, azaz

$$P = 100\left(e^q - 1\right) = 100\left(e^{\frac{Q}{100}} - 1\right).$$

Q-t *nominális kamatlábnak* nevezik, mely adott m esetén az $\sqrt[m]{1+p} = 1 + \frac{q}{m}$ egyenlőség átalakításával:

$$Q = 100m\left(\sqrt[m]{1 + \frac{P}{100}} - 1\right).$$

Folytonos kamatozásnál az $1 + p = e^q$ egyenlőségből

$$Q = 100 \ln\left(1 + \frac{P}{100}\right).$$

♣ *Járadékszámítás*

Gyűjtőjáradék. Tegyük fel, hogy a mindig ugyanakkora A összegű befizetés a kamatidő lejártakor történik. Időközben a P kamatláb nem változik.

$$\mathcal{T}_n = A\left(1+\frac{P}{100}\right)^n + A\left(1+\frac{P}{100}\right)^{n-1} + \ldots + A\left(1+\frac{P}{100}\right) = A\left(1+\frac{P}{100}\right)\frac{\left(1+\frac{P}{100}\right)^n - 1}{\left(1+\frac{P}{100}\right)-1},$$

amely $\mathcal{T}_n = Ar\frac{r^n-1}{r-1}$ alakban is felírható. Innen $A = \frac{r-1}{r}\frac{\mathcal{T}_n}{r^n-1}$.

Törlesztőjáradék. Tegyük fel, hogy B összegű kölcsönt veszünk fel P kamatláb mellett. A felvett összeget n évig törlesztjük évi A összeg befizetésével.

$$Av + Av^2 + \ldots + Av^n = B \implies B = Av\frac{v^n-1}{v-1} \implies A = \frac{v-1}{v}\frac{B}{v^n-1}.$$

Pl. Mekkora összeget kell évente a bankba helyezni évi 7%-os kamatláb mellett, hogy 5 év múlva kétmillió forint álljon a rendelkezésre?

$r = 1.07$, $n = 5$ mellett $A = \frac{0.07}{1.07}\cdot\frac{2000000}{1.07^5-1} = 325029.34$. Ennyit kell évenként a bankba tenni.

8. fejezet

VALÓS FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

♣ *Előkészítés*

Legyen az $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sorozat minden tagja eleme az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény értelmezési tartományának. Ekkor az $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ sorozatot az eredeti sorozat és az f függvény segítségével hoztuk létre, ezért *függvényértékek sorozatának* hívjuk.

Az $\frac{1}{n}$, $-\frac{1}{n}$ és $(-1)^n\frac{1}{n}$ sorozatok közös tulajdonsága, hogy mindegyikük a 0-hoz konvergál. Abban viszont különböznek, hogy $\frac{1}{n} \downarrow$ (felülről tart nullához), $-\frac{1}{n} \uparrow$ (alulról tart zérushoz), $(-1)^n\frac{1}{n}$ pedig "cikkcakkban" közelíti a 0-t.

76. Definíció. Az x_n sorozat balról tart (jobbról tart) $A \in \mathbb{R}$-hez, ha $x_n \to A$ és egy idő után $x_n \leq A$ ($x_n \geq A$). $\diamondsuit$

Jelölés: $x_n \to A^-$ ($x_n \to A^+$) vagy $\lim_{n\to\infty} x_n = A^-$ ($\lim_{n\to\infty} x_n = A^+$). Világos, hogy ha $x_n \to A^-$ vagy $x_n \to A^+$ akkor $x_n \to A$ (lásd definíció első feltétele). Pl. $\frac{1}{n} \to 0^+$, $-\frac{1}{n} \to 0^-$, $(-1)^n\frac{1}{n} \to 0$, de $(-1)^n\frac{1}{n} \not\to 0^+$, $(-1)^n\frac{1}{n} \not\to 0^-$. Tehát sorozatok határértékének jelölésére az A, A^+, A^-, ∞, $-\infty$ szimbólumokat használjuk ($A \in \mathbb{R}$).

♣ *Halmazok torlódási pontja*

77. Definíció. Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ rögzített halmaz, A valós szám. A H halmaz torlódási pontja A, (∞, $-\infty$) ha van olyan H-beli x_n sorozat (azaz bármely n-re $x_n \in H$), melynek határértéke A, (∞, $-\infty$), és az első esetben $x_n \neq A$. $\diamondsuit$

Egy H halmaz torlódási pontjainak jelölése: T_H.

78. Tétel. *1.* $T_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$*;*

2. Ha $a < b \in \mathbb{R}$*, akkor* $I =]a,b[$ *vagy* $I = [a,b[$ *vagy* $I =]a,b]$ *vagy* $I = [a,b]$ *esetén* $T_I = [a,b]$*;*

3. Ha $a \in \mathbb{R}$*, akkor* $I =]-\infty,a[$ *vagy* $I =]-\infty,a]$ *esetén* $T_I =]-\infty,a]$*, míg* $I =]a,\infty[$ *vagy* $I = [a,\infty[$ *esetén* $T_I = [a,\infty[$*.*

4. $a \in \mathbb{R}$ *esetén* $T_{\{a\}} = \emptyset$*.*

Bizonyítás.

1. Bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén van olyan valós számsorozat, amelynek tagjai különböznek c-től és a sorozat határértéke c. Pl. $c + \frac{1}{n}$. Ebből következik, hogy bármely c torlódási pontja $\mathbb{R}$-nek. Nyilvánvalóan vannak ∞-hez ill. $-\infty$-hez tartó valós sorozatok is.

2. Ez első ponthoz analóg gondolatmenet teljesül az összes olyan c valós számra is, melyre $a < c < b$. Tehát $c \in]a,b[$ torlódási pontja bármelyik felsorolt I-nek. a szintén torlódási pontja I-nek, mivel $a + \frac{b-a}{n} \to a^+$ és bármely n-re $a + \frac{b-a}{n} \neq a$. Hasonlóan $b \in T_I$, hiszen $b - \frac{b-a}{n} \to b^-$ és $b - \frac{b-a}{n} \neq b$. Végül $c < a$ vagy $c > b$ esetén c nem torlódási pontja I-nek, mert c-nek van olyan elegendően kicsi sugarú környezete amely diszjunkt I-hez, tehát egyetlen I-beli sorozat sem tarthat c-hez.

3. Az előző két pont logikáját alkalmazva látható, hogy az állítás igaz.

4. Csak a jöhet szóba a $H = \{a\}$ halmaz torlódási pontjaként, de H-beli x_n sorozat csak egy van, a konstans a sorozat. Erre viszont nem teljesül, hogy $x_n \neq a$, azaz a sem torlódási pontja $\{a\}$-nak. ■

♣ *Függvények határértéke*

79. Definíció. Legyen f adott függvény és jelölje α az A, A^+, A^-, ∞, $-\infty$ határértékek valamelyikét. Feltesszük, hogy $\alpha = A, A^+, A^-$ esetén $A \in T_{\mathcal{D}_f}$, míg $\alpha = \infty, -\infty$ esetén $\infty, -\infty \in T_{\mathcal{D}_f}$. Legyen továbbá β a B, B^+, B^-, ∞, $-\infty$ határértékek valamelyike. Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke α-ban β, ha bármely α-hoz tartó értelmezési tartománybeli x_n sorozatra $f(x_n) \to \beta$ teljesül, ahol az α-ra vonatkozó első három esetben $x_n \neq A$. ♢

Jelölés: $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$.

Ha $\alpha = A^+$ akkor szokás jobboldali határértékről, $\alpha = A^-$ esetén pedig baloldali határértékről beszélni.

80. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Megtartva az előző definíció jelöléseit, ha egy függvénynek α-ban van határértéke, akkor az egyértelmű.*

Pl. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$ vizsgálatánál $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $\alpha = \infty$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $T_{\mathcal{D}_f} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, tehát bárhol tekinthetjük a szóban forgó függvény határértékét (így a ∞-ben is mert $\infty \in T_{\mathcal{D}_f}$). Ha $x_n \to \infty$, akkor $f(x_n) = \frac{\sin x_n}{x_n} \to 0$, ugyanis

$$0 \leq \left|\frac{\sin x_n}{x_n}\right| = \frac{|\sin x_n|}{|x_n|} = \frac{|\sin x_n|}{x_n} \leq \frac{1}{x_n} \to 0\,.$$

A rendőr-elv szerint bármely $x_n \to \infty$ esetén $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 0$. Tehát $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Fontos ismerni, hogy a fenti függvény határértéke $\alpha = 0$-ban is létezik: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (nem bizonyítjuk).

Pl. Vizsgáljuk meg, hogy mit mondhatunk a $g(x) = \frac{1}{x}$ függvény határértékéről a 0 pontban. $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $T_{\mathcal{D}_g} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, amiből következik, hogy van értelme a határérték origóban való vizsgálatának. Tekintsük az $x_n = \frac{1}{n}$ értelmezési tartománybeli sorozatot. $g(x_n) = \frac{1}{1/n} = n \to \infty$. Viszont az $y_n = -\frac{1}{n}$ értelmezési tartománybeli sorozatra $g(y_n) = \frac{1}{-1/n} = -n \to -\infty$. A kapott két különböző eredmény miatt a $g(x) = \frac{1}{x}$ függvénynek nincs határértéke a 0-ban. Ellenben belátható, hogy bármely $x_n \to 0$, $x_n > 0$ esetén $g(x_n) \to \infty$. Ez azt jelenti, hogy $g(x)$-nek a ∞ jobboldali határértéke a 0-ban: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$. Hasonlóan adódik, hogy $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Pl. A $\lim_{x\to A} D(x)$ határérték egyetlenegy $A \in \mathbb{R}$ mellett sem létezik.

$\mathcal{D}_D = \mathbb{R}$, tehát $T_{\mathcal{D}_D} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Ebből következik, hogy $D(x)$ határértékét bármely A valós szám esetén vizsgálhatjuk. Ha az A-hoz tartó x_n sorozat racionális számokból áll, akkor $D(x_n)$ a konstans 1 sorozat, melynek határértéke 1. Másrészt az A számhoz tartó irracionális x_n sorozatok esetén $D(x_n)$ a konstans 0 sorozat, melynek határértéke 0. Mivel különböző értelmezési tartománybeli sorozatokra a függvényértékek sorozatának határértéke különbözik, ezért a $\lim_{x\to A} D(x)$ határérték nem létezik.

Pl. $\lim_{x\to -2} \ln x =?$ $\mathcal{D}_{\ln x} = \mathbb{R}^+$, az értelmezési tartomány torlódási pontjainak halmaza $\mathbb{R}_0^+$. Mivel ennek -2 nem eleme, ezért azt mondjuk, hogy -2-ben nem is vizsgáljuk a határérték kérdését.

81. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Függvények számszorosára, összegére, különbségére, szorzatára, hányadosára vonatkozó határértéktételek valamely rögzített α mellett ugyanúgy teljesülnek mint sorozatok számszorosának, összegének, különbségének, szorzatának, hányadosának határértékére.*

Pl. $\lim_{x\to\alpha} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to\alpha} f(x) + \lim_{x\to\alpha} g(x)$, feltéve, hogy a szóban forgó határértékek léteznek.

♣ *Függvények lokális (pontbeli) és globális folytonossága*

82. Definíció. (lokális folytonosság) Adott f függvény, továbbá $a \in \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy f folytonos a-ban, ha minden a-hoz tartó értelmezési tartománybeli x_n sorozatra $f(x_n) \to f(a)$. ♢

83. Definíció. $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ adott halmaz. Az f függvény folytonos a H halmazon, ha $H \subset \mathcal{D}_f$ és f a H halmaz bármely pontjában folytonos. ♢

84. Definíció. (globális folytonosság) Az f függvény folytonos, ha $\mathcal{D}_f$-en folytonos. ♢

Pl. Legyen $f(x) = x^2$. Mivel $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ezért bármely valós a számra felvethető a lokális folytonosság kérdése. Tetszőleges $x_n \to a$ sorozatra $f(x_n) = x_n^2 \to a^2 = f(a)$, tehát az $f(x) = x^2$ függvény az értelmezési tartományának bármely pontjában folytonos, így (globálisan is) folytonos.

Pl. A $g(x) = \frac{1}{x}$ függvény értelmezési tartománya az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmaz. $a \neq 0$ esetén bármely $x_n \to a$ sorozatra $g(x_n) = \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a} = g(a)$, amiből az következik, hogy g folytonos a-ban. Mivel ez minden értelmezési tartománybeli a-ra igaz, így g folytonos. $0 \notin \mathcal{D}_g$, így a 0-ban fel sem vetődik a folytonosság kérdése.

Pl. Legyen most

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0; \\ 1.73 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Ez a függvény abban különbözik az előzőtől, hogy a 0-ban is értelmezve van. De ott nem folytonos, mert pl. $x_n = \frac{1}{n}$ esetén $h(x_n) = \frac{1}{1/n} = n \to \infty \neq 1.73 = h(0)$. Világos, hogy ha bármely más valós szám állna az 1.73 helyén, akkor sem lenne h folytonos a 0-ban.

85. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Folytonos függvények számszorosa, összege, különbsége, szorzata, hányadosa is folytonos.*

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az előbb felsorolt műveletekkel kapott függvények esetén megváltozhat az értelmezési tartomány!

Be lehet látni, hogy a polinomfüggvények, a hatványfüggvények, az exponenciális függvények, a logaritmusfüggvények, a trigonometrikus függvények és az abszolút érték függvény is folytonos. Ellenben a Dirichlet-függvény sehol sem folytonos.

86. Tétel. *Legyen f folytonos függvény. Ekkor bármely A pontra, mely benne van f értelmezési tartományában ugyanakkor torlódási pontja f értelmezési tartományának, teljesül, hogy* $\lim_{x\to A} = f(A)$.

Bizonyítás. A-ban lehet vizsgálni a határértéket, mert $A \in T_{\mathcal{D}_f}$. Mivel f folytonos $A \in \mathcal{D}_f$-ben ezért bármely $x_n \to A$ sorozatra $f(x_n) \to f(A)$, amely éppen az állítást igazolja. ■

Pl. Az előző tétel miatt nagyon egyszerű kiszámítani a $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2}{x+1}$ határértéket. Ugyanis a függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, ennek torlódási pontjainak halmaza $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ és a 2 valós szám mindegyik halmaznak eleme. A szóban forgó függvény két folytonos függvény (polinomfüggvények) hányadosa, így maga is folytonos. Az előző tétel szerint a határérték megegyezik a helyettesítési értékkel: $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2}{x+1} = \frac{2^2-2}{2+1} = \frac{2}{3}$.

Bonyolultabb a helyzet, ha a $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-2}{x+1}$ határértéket vizsgáljuk. Ennek van értelme, hiszen az előbb láttuk, hogy az értelmezési tartomány torlódási pontjainak halmaza a lehető legbővebb, annak a -1 is eleme. A bonyodalmat az okozza, hogy a -1 nincs benne az értelmezési tartományban, így a határérték kiszámításánál nem tudjuk figyelembe venni a vizsgált függvény folytonosságát. Az

$$\frac{x^2-2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

átalakítás után a következőt lehet mondani. $\lim_{x\to -1} x-1 = -2$ mivel az $x-1$ képlettel megadott lineáris függvény bármely valós számra folytonos. Másrészt $\lim_{x\to -1} \frac{1}{x+1}$ nem létezik, de $\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1} = \infty$ és $\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty$. A határértékek összegére vonatkozó tétel szerint az eredeti függvénynek is csak bal és jobboldali határértéke van a -1-ben:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-2}{x+1} = \infty \quad , \quad \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-2}{x+1} = -\infty \, .$$

9. fejezet

A DIFFERENCIÁLHÁNYADOS

♣ *Bevezető példák az érintőegyenesre*

1. Határozzuk meg az $f(x) = 2\sqrt{x}$ függvény grafikonjának $x_0 = 2$ abszcisszájú pontjához húzott érintőegyenes egyenletét!

Legyen a keresett egyenes egyenlete $y = mx + b$, és közelítsük az érintőt szelőkkel. Egy közelítő szelő egyenlete $y = m_s x + b_s$. A szelő meredeksége $m_s = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, és ha a szelő tart az érintőhöz, akkor a szelő meredekség az érintő meredekségéhez:

$$m = \lim_{x\to x_0} m_s = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{x_0}}{x-x_0} = 2\lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Az $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + b$ egyenletű egyenes átmegy a $P(2, 2\sqrt{2})$ koordinátájú ponton, tehát $2\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}2 + b$, ahonnan $b = \sqrt{2}$. Tehát a keresett érintő egyenlete $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$.

2. Legyen az f függvény folytonos egy $x_0 \in \mathcal{D}_f$ pont valamely környezetében és a grafikonján tekintsünk egy, az $(x_0, f(x_0))$ ponton átmenő egyenest. Ha ennek meredeksége m, akkor az egyenes egyenlete $y = m(x - x_0) + f(x_0)$. Ebből következik, hogy egy adott x abszcisszánál az egyenes és a függvénygrafikon megfelelő pontjainak függőleges irányú eltérése $h(x) = m(x - x_0) + f(x_0) - f(x)$ lesz. Közelítsünk most x-szel x_0 felé, tehát $x \to x_0$ vagy másképp $x - x_0 \to 0$. Könnyű látni, hogy ekkor a $h(x)$ eltérés, függetlenül m értékétől(!), nullához tart. A lehetséges m meredekségű egyenesek közül az az m_e meredekségű lesz az érintő, melyre még $\frac{h(x)}{x-x_0}$ is 0-hoz tart midőn $x \to x_0$. Ekkor

$$\frac{h(x)}{x-x_0} = \frac{m_e(x-x_0)+f(x_0)-f(x)}{x-x_0} = m_e - \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to 0,$$

azaz $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m_e$.

♣ 87. Definíció. Legyen az f függvény $x_0 \in \mathcal{D}_f$ egy környezetében értelmezve. Ha a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

véges határérték létezik, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 pontban differenciálható (vagy deriválható) és a szóban forgó határérték az f függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosa (vagy deriváltja). ♢

Jelölés: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$. Például $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x_0 = 2$ esetén $f'(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. A definícióban a határérték jel (lim) után álló függvényt *különbségihányados-függvénynek* nevezzük.

A differenciálhányados szemléletes jelentései:

- $f'(x_0)$ megadja az $f(x)$ függvény grafikonjának x_0 abszcisszájú pontjába húzott érintőegyenes meredekségét.
- $f'(x_0)$ megadja egy egyenes mentén mozgó pont x_0 időpillanathoz tartozó pillanatnyi sebességét, ha $f(x)$ a megtett utat írja le az eltelt idő függvényében.

88. Tétel. *Az $f(x) = |x|$ függvény nem deriválható az $x_0 = 0$ pontban.*

Bizonyítás. A $\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ határértéket kell vizsgálni. Jobboldali határértéke létezik, mivel pozitív x-ekre $\frac{|x|}{x}=1$, és $\lim_{x\to 0^+}1=1$. Baloldali határértéke is van, hiszen negatív x-ekre $\frac{|x|}{x}=-1$, és $\lim_{x\to 0^-}-1=-1$. Mivel a két eredmény nem egyezik meg, ezért a vizsgált határérték nem létezik, tehát f nem deriválható az $x_0=0$ pontban. ■

Az előző tétel azt mutatja, hogy ha egy függvény folytonos valamely x_0 pontban, akkor ez még nem garantálja, hogy f differenciálható is x_0-ban. A megfordítása viszont igaz, íme:

89. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Ha az f függvény deriválható x_0-ban, akkor f folytonos is x_0-ban.*

90. Definíció. Legyen f adott függvény. Azt az f' függvényt, amely azokon a helyeken van értelmezve ahol f differenciálható, és minden ilyen helyhez a pontbeli differenciálhányadost rendeli hozzá, az f függvény differenciálhányados-függvényének (vagy deriváltfüggvényének) nevezzük. ♢

Jelölés: $f'(x)$ vagy röviden f'. Ha nem félreérthető, akkor f'-re használjuk a rövidebb "derivált" elnevezést is.

Pl. Az $f(x)=c$ konstans függvény deriváltja az $f'(x)=0$ konstans függvény, ugyanis bármely x_0 esetén

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}0=0.$$

Pl. Az $f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ lineáris függvény deriváltja az $f'(x)=a$ konstans függvény, ugyanis bármely x_0 esetén

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(ax+b)-(ax_0+b)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}a=a.$$

♣ *Differenciálási szabályok*

91. Tétel. *Tegyük fel, hogy az f és g valós függvények deriválhatók az x_0 pontban. Legyen $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor a $c\cdot f$, $f\pm g$, $f\cdot g$, továbbá $g(x_0)\neq 0$ esetén $\frac{1}{g}$ és $\frac{f}{g}$ is differenciálhatók x_0-ban, és*

- $(c\cdot f)'(x_0)=c\cdot f'(x_0)$;
- $(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$;
- $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$;
- $g(x_0)\neq 0$ *esetén* $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ *ill.* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Bizonyítás.

- $$\lim_{x\to x_0}\frac{(cf)(x)-(cf)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{cf(x)-cf(x_0)}{x-x_0}=c\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=cf'(x_0).$$
- $$\lim_{x\to x_0}\frac{(f\pm g)(x)-(f\pm g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)\pm g(x))-(f(x_0)\pm g(x_0))}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\pm\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0).$$
- $$\lim_{x\to x_0}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,g(x)+f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$
- $$\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0}=-\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)};$$

$\left(\frac{f}{g}\right) = f\cdot\frac{1}{g}$ miatt $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

■

92. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Ha a g függvény deriválható az x_0 pontban és f deriválható a $g(x_0)$ pontban, akkor $f\circ g$ is deriválható x_0-ban és $(f\circ g)'(x_0) = (f'\circ g)(x_0)\cdot g'(x_0)$.*

93. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Ha a szigorúan monoton növő vagy csökkenő f függvény deriválható az $\tilde{f}(x_0)$ pontban és $\left(f'\circ\tilde{f}\right)(x_0)\neq 0$, akkor $\tilde{f}$ is deriválható az x_0 helyen és $\left(\tilde{f}\right)'(x_0) = \frac{1}{\left(f'\circ\tilde{f}\right)(x_0)}$.*

Az alábbi, deriváltfüggvényekre vonatkozó tétel az előző 3 tétel közvetlen következménye.

94. Tétel. $(c\cdot f)' = c\cdot f'$; $(f\pm g)' = f'\pm g'$; $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$; $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$; $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$; $(f\circ g)' = (f'\circ g)\cdot g'$; $\left(\tilde{f}\right)' = \frac{1}{f'\circ\tilde{f}}$.

♣ *Nevezetes függvények deriváltjai*

95. Tétel. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\operatorname{tg}^2(x)$, $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1-\operatorname{ctg}^2(x)$, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Bizonyítás. Az első állítás igazolásához szükség lesz a $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ trigonometrikus azonosságra. Bármely x_0 valós számra

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} = \lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2} = 1\cdot\cos x_0 = \cos x_0.$$

A következő három állítás a deriválási szabályokból látható be.

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x+\pi) = -\sin x.$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x - (-\sin^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\operatorname{tg}^2 x.$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - (\cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1-\operatorname{ctg}^2 x.$$

Végül az inverz függvény deriválási szabályát használjuk.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

■

96. Tétel. $(e^x)' = e^x$, $a\in\mathbb{R}^+$ *esetén* $(a^x)' = a^x\ln a$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, *továbbá* $a\in\mathbb{R}^+$ *és* $a\neq 1$ *esetén* $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$. *Végül* $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

Bizonyítás. Az első állítást nem igazoljuk. A második:

$$(a^x)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = \left(e^{x\ln a}\right)\ln a = a^x\ln a.$$

A harmadik részben felhasználjuk, hogy $\ln x$ az e^x inverze (a negyedikben pedig egy logaritmikus azonosságot).

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \quad , \quad (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}.$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \operatorname{ch} x \quad , \quad (\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \operatorname{sh} x.$$

■

97. Tétel. *Tetszőleges $n \in \mathbb{R}$ esetén* $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Bizonyítás.

$$(x^n)' = \left(e^{n \ln x}\right)' = e^{n \ln x} \cdot n\frac{1}{x} = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1}.$$

■

♣ *Magasabbrendű deriváltak*

Egy f valós függvény f' deriváltja szintén valós függvény, így f'-t is megpróbálhatjuk deriválni. Ha $(f')'$ létezik, akkor ez az eredeti függvény második deriváltja lesz. A magasabbrendű deriváltak jelölésére rendre az f'', f''', stb. $f^{(n)}$ szimbólumokat használjuk (az utóbbi esetben a zárójel az n-edik hatványtól való megkülönböztetésre szolgál).

98. Definíció. Egy függvény 0-adik deriváltjának magát f-et tekintjük. Egyébként bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$. ♢

Pl. Legyen $f(x) = (x - x_0)^k$, ahol $x_0 \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}^+$ rögzítettek. Ekkor $f'(x) = k(x - x_0)^{k-1}$, $f''(x) = k(k-1)(x - x_0)^{k-2}$, stb. A k-adik derivált egy konstans függvény: $f^{(k)}(x) = k!$, és minden további derivált a konstans 0 függvényt adja: $f^{(k+1)}(x) = f^{(k+2)}(x) = \ldots = 0$.

10. fejezet

A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

♣ *Érintőegyenes egyenletének meghatározása*

Az f függvény x_0 abszcisszájú pontjához húzott érintőegyenes egyenlete

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

(Lásd az előző fejezet bevezető példáját, ill. a pontbeli differenciálhányados szemléletes jelentését.)

♣ *Határértékszámítás: a L'Hospital-szabály*

99. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Legyen $A \in \mathbb{R}$ és jelölje α az A, A^+, A^-, ∞, $-\infty$ szimbólumok valamelyikét. Legyen továbbá f és g két, az α hely valamely környezetében – α-tól esetlegesen eltekintve – értelmezett és ott deriválható függvény. Ha f és g mindegyike 0-hoz vagy $\pm\infty$-hez tart midőn $x \to \alpha$, akkor*

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

feltéve, ha a második határérték létezik.

Megjegyzés. Bizonyos feladatok megoldása a L'Hospital-szabály többszöri alkalmazását kívánja (a tételben szereplő ún. $\frac{0}{0}$ ill. $\frac{\infty}{\infty}$ esetekben). Sokszor a $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 1^0, 0^0, ∞^0 típusú határértékfeladatok megoldása – a feladat megfelelő átalakítása után – is a L'Hospital-szabállyal lehetséges.

A következő példákban a $\frac{0}{0}$ és $0\cdot\infty$ esetek fordulnak elő.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} \left(= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6}\right) = \frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)\ln(x-1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1^+} -(x-1) = 0.$$

♣ *Lokális szélsőértékek, monotonitás vizsgálata*

100. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $x_0 \in \mathcal{D}_f$ pont lokális maximumhelye (lokális minimumhelye) és $f(x_0)$ a lokális maximuma (lokális minimuma), ha létezik x_0-nak olyan értelmezési tartománybeli környezete, hogy bármely e környezetben levő x pontra $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$) áll fenn. ♢

A lokális maximumot és minimumot közös néven *lokális szélsőértéknek*, a lokális maximumhelyet és minimumhelyet *lokális szélsőértékhelynek* nevezzük.

101. Tétel. *(Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, nem bizonyítjuk) Ha az f függvény differenciálható az x_0 pontban és f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van akkor $f'(x_0) = 0$.*

102. Definíció. Az x_0 pont stacionárius pontja az f függvénynek, ha $f'(x_0) = 0$. ♢

Az előző tétel azt mondja ki, hogy differenciálható függvény lokális szélsőértékhelye csak stacionárius pont lehet. Másképp fogalmazva a stacionárius hely létezése szükséges feltétele a lokális szélsőértékhely létezésének. De nem elégséges feltétele, mert nem minden stacionárius pont lesz lokális szélsőértékhely, pl. $f(x) = x^3$ esetén $f'(0) = 0$, de a függvénynek a 0-ban nincs lokális szélsőértéke.

103. Tétel. *(Lokális szélsőérték létezésének egyik elégséges feltétele, nem bizonyítjuk) Ha az f függvény az x_0 pontban kétszer deriválható és $f'(x_0) = 0$ mellett $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$) is teljesül, akkor f-nek az x_0 pontban lokális maximuma (minimuma) van.*

További elégséges feltétel adható a monotonitás fogalmának segítségével, amelyhez egy, a monotonitásra vonatkozó tételre van szükség.

104. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Ha az f függvény valamely $]a, b[$ intervallum minden pontjában differenciálható, és $\forall\, x \in]a, b[$ esetén $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), akkor f szigorúan monoton nő (csökken) $]a, b[$-n.*

105. Tétel. *(Lokális szélsőérték létezésének másik elégséges feltétele, nem bizonyítjuk) Ha az f függvény az x_0 pont egy környezetében deriválható és $f'(x_0) = 0$ esetén a derivált x_0-ban $+-$ ($-+$) előjelváltó, akkor f-nek az x_0 pontban lokális maximuma (minimuma) van.*

Tehát a lokális szélsőértékek megkereséséhez először meg kell oldani az $f'(x) = 0$ egyenletet. Ezután minden egyes gyökről (stacionárius pontról) külön-külön, alkalmazva a lokális szélsőértékek létezésének elégséges feltételére vonatkozó két tétel valamelyikét, el kell dönteni, hogy az lokális szélsőértékhely vagy nem. Külön probléma lehet a szóban forgó f függvény felírása akkor, ha az szövegesen, vagy feltételekkel van megadva.

Pl. Az $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$ függvény első deriváltja $f'(x) = 6x^2 - 2x - 4$. Két stacionárius pont van: $x = -\frac{2}{3}$ ill. $x = 1$, itt *lehetnek csak* lokális szélsőértékhelyek. $f''(x) = 12x - 2$, tehát $f''(-\frac{2}{3}) = -10 < 0$, $f''(1) = 10 > 0$. Eszerint a függvénynek $x = -\frac{2}{3}$ lokális maximumhelye, $x = 1$ pedig lokális minimumhelye. Ugyanerre a következtetésre jutunk a monotonitás vizsgálatával: ha $x \in]-\infty, -\frac{2}{3}[$ akkor $f'(x) > 0$, ha $x \in]-\frac{2}{3}, 1[$ akkor $f'(x) < 0$ és ha $x \in]1, \infty[$ akkor $f'(x) > 0$. Azaz az első derivált $x = -\frac{2}{3}$-ban $+-$ előjelváltó, így itt lokális maximumhelye van, $x = 1$-ben $-+$ előjelváltó tehát itt lokális minimumhelye van. A lokális maximum $f(-\frac{2}{3}) = \frac{125}{27}$, a lokális minimum $f(1) = 0$.

♣ *Szöveges szélsőértékfeladatok*

A gyakorlati problémák során a vizsgált függvények – melyeket sokszor a problémamegoldónak kell meghatároznia – gyakran csak valamilyen intervallumon vannak értelmezve. Ráadásul nem a lokális, hanem az abszolút maximum ill. minimum kiszámítása a cél.

106. Tétel. *(Weierstrass-tétel, bizonyítás nélkül) Zárt intervallumon folytonos függvény felveszi az abszolút maximumát és minimumát.*

A tétel garantálja az abszolút szélsőértékhelyek létezését, de nem ad felvilágosítást azok elhelyezkedéséről. Az abszolút szélsőértékek meghatározásához egyrészt a lokális szélsőértékeket kell kiszámolni az adott intervallumon, majd össze kell hasonlítani őket az intervallum két végpontjában felvett helyettesítési értékkel. Ezek alapján az abszolút szélsőértékhelyeket és szélsőértékeket már könnyű megadni.

♣ *Inflexiós pontok, konvexitás ill. konkavitás vizsgálata*

107. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvény szigorúan konvex (konvex, szigorúan konkáv, konkáv) az $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$ intervallumon, ha bármely $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$ esetén

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \begin{matrix} < \\ (\leq) \\ (>) \\ (\geq) \end{matrix} \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

♢

108. Definíció. Az f függvény inflexiós pontja $x_0 \in \mathcal{D}_f$, ha x_0-ban a függvény szigorú konvexitásból szigorú konkavitásba vált vagy fordítva. ♢

109. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Ha az f függvény valamely $[a, b]$ intervallum minden pontjában kétszer deriválható, és $\forall\, x \in [a, b]$ esetén $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), akkor f szigorúan konvex (szigorúan konkáv) $[a, b]$-n.*

110. Tétel. *(Inflexiós pont létezésének szükséges feltétele, nem bizonyítjuk) Ha az f függvény kétszer differenciálható az x_0 pont valamely környezetében és f-nek x_0-ban inflexiós pontja van akkor $f''(x_0) = 0$.*

111. Tétel. *(Inflexiós pont létezésének elégséges feltétele, nem bizonyítjuk) Ha az f függvény az x_0 pontban háromszor deriválható és $f''(x_0) = 0$ mellett $f'''(x_0) \neq 0$ is teljesül, akkor f-nek x_0 inflexiós pontja.*

Pl. Az előző példát folytatva $f''(x) = 12x - 2 = 0$-ból $x = \frac{1}{6}$ következik, itt *lehet csak* inflexiós pont. Ha $x < \frac{1}{6}$, akkor $f''(x) < 0$, azaz a függvény konkáv. Ha $x > \frac{1}{6}$ akkor $f''(x) > 0$ tehát a függvény konvex. Ebből következik, hogy $x = \frac{1}{6}$ inflexiós pont. Ugyanerre a következtetésre jutunk $f'''(x) = 12$, $f'''(\frac{1}{6}) = 12 > 0$ alapján is.

♣ *Függvényelemzés*

Adott f függvény elemzésének lépései. (Páros vagy páratlan függvény esetén elég a függvényt $\mathbb{R}_0^+$-n (vagy $\mathbb{R}_0^-$-n) elemezni, periodikus függvénynél elegendő egy legrövidebb periodust (ha létezik) vizsgálni.)

1. A $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartomány meghatározása.
2. Tengelymetszetek kiszámolása. Az $f(x) = 0$ egyenlet megoldása megadja a vízszintes tengelymetszete(ke)t, $0 \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(0)$ a függőleges tengelymetszetet. (A vízszintes tengelymetszetek meghatározása nehézségekbe ütközhet, gyakran közelítő módszer használatos.)
3. Határértékek vizsgálata a kritikus helyeken (Általában az értelmezési tartomány azon torlódási pontjainak halmazában, melyek magában az értelmezési tartományban nincsenek benne, pl. $\pm\infty$-ben. A módszereket lásd korábban.)
4. Lokális szélsőértékhelyek, monotonitás vizsgálata (lásd előbb).
5. Inflexiós pontok, konvexitás ill. konkavitás vizsgálata (lásd előbb).
6. Grafikon felrajzolása, értékkészlet megállapítása.

♣ *Taylor-polinomok*

Az ismert $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ határérték szemléletesen azt jelenti, hogy $\sin x \approx x$ ha $x \approx 0$. Alakítsuk át a határértékre vonatkozó eredményt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$ formára. Ezt úgy is lehet értelmezni, hogy $\sin x$ és x különbsége olyan kicsi, hogy 0-hoz tartó x-szel elosztva a hányados még mindig 0-hoz tart. A L'Hospital-szabály kétszeri alkalmazásával könnyen belátható, hogy $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$, de $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$. Az utóbbi eredmény szerint $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$ ha $x \approx 0$. Másrészt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3} = 0$, sőt belátható, hogy $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4} = 0$. Az eljárást folytatva

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{5x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + x}{20x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 1}{60x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{120x} = \frac{1}{120}.$$

Innen ismét felírható egy $\sin x$-t közelítő, immár ötödfokú polimon, stb.

Ezután függvényeknek adott intervallumon való polinomokkal történő közelíthetőségét vizsgáljuk. Szükség lesz az alábbi tételre.

112. Tétel. *(Lagrange-féle középértéktétel, bizonyítás nélkül) Legyen az f függvény folytonos $[a,b]$-n és deriválható $]a,b[$-n. Ekkor $\exists\, \eta \in]a,b[$, melyre*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\eta).$$

Az $f(b) = f(a)$ speciális esetben az ún. Rolle tételt kapjuk, azaz $\exists\, \eta \in]a,b[$, melyre $f'(\eta) = 0$.

113. Tétel. *(Taylor tétel) Legyen f az $]a,b[$ intervallumon $(n+1)$-szer deriválható függvény, melyre teljesül még, hogy $f, f', \ldots, f^{(n)}$ folytonosak $[a,b]$-n. Legyen továbbá $x_0 \in [a,b]$ rögzített. Ekkor tetszőleges $x \in [a,b]$, $x \neq x_0$ esetén létezik olyan x és x_0 közötti η szám, melyre*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Az előző képletet Taylor-formulának, a jobb oldali összeg utolsó tagját Lagrange-féle maradéktagnak nevezik.

Bizonyítás. Jelölje $T_n(x)$ az $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ n-edfokú ún. Taylor-polinomot. Nyilvánvalóan $T_n^{(n+1)}(x)$ a konstans 0 függvény. Azt kell belátni, hogy bármely, a feltételeknek megfelelő x-hez létezik olyan η, hogy

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Tekintsük a $g(x) = f(x) - T_n(x) - c(x-x_0)^{n+1}$ függvényt, ahol c egy később, az adott szituációnak megfelelően megválasztandó konstans. $g(x)$-re teljesül, hogy $g(x_0) = 0, g'(x_0) = 0, \ldots, g^{(n)}(x_0) = 0$.

Válasszuk az $\eta_0 \in [a,b]$, $\eta_0 \neq x_0$ értékhez a $c = \frac{f(\eta_0)-T_n(\eta_0)}{(\eta_0-x_0)^{n+1}}$ konstansot, azaz

$$g(x) = f(x) - T_n(x) - \frac{f(\eta_0) - T_n(\eta_0)}{(\eta_0 - x_0)^{n+1}}(x-x_0)^{n+1}.$$

Világos, hogy $g(x_0) = 0$ mellett $g(\eta_0) = 0$ is igaz, ezért Rolle tétele alkalmazható a $[\eta_0, x_0]$ vagy $[x_0, \eta_0]$ intervallumra. Létezik tehát η_0 és x_0 között egy η_1-gyel jelölt szám, melyre $g'(\eta_1) = 0$. Ez, valamint a már megállapított $g'(x_0) = 0$ tény lehetővé teszi Rolle tételének újbóli alkalmazását a η_1 és x_0 intervallumhatárokra. Létezik a kettő között olyan η_2 szám, hogy $g''(\eta_2) = 0$. Hasonlóan tovább haladva, végül arra a következtetésre jutunk, hogy η_n és x_0 között (és persze η_0 és x_0 között) létezik η_{n+1}, melyre $g^{(n+1)}(\eta_{n+1}) = 0$. Legyen $\eta = \eta_{n+1}$, ekkor átrendezve a

$$0 = g^{(n+1)}(\eta) = f^{(n+1)}(\eta) - \frac{f(\eta_0) - T_n(\eta_0)}{(\eta_0 - x_0)^{n+1}}(n+1)!$$

egyenlőséget, az alábbi eredményt kapjuk:

$$f(\eta_0) - T_n(\eta_0) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(\eta_0 - x_0)^{n+1}.$$

Mivel $\eta_0 \neq x_0$ tetszőleges volt az $[a,b]$ intervallumból, ezért η_0-t x-szel kicserélve a tétel állításához jutunk. ■

Pl. $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, stb. Legyen $x_0 = 0$ és $[a,b] = [0, \frac{\pi}{2}]$. Ekkor $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, stb. Tehát pl.

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{\cos \eta_x}{5040}x^7 \quad , \quad (\eta_x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]).$$

Mivel a $[0, \frac{\pi}{2}]$-beli x értékekre $\left|\frac{\cos \eta_x}{5040}x^7\right| \leq 0.005$, ezért

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \right) \right| < 0.005 \, .$$

A Taylor polinomok felhasználása mindennapos, ugyanis a zsebszámológépek, számítógépek a különböző függvények helyettesítési értékeinek pontos megadása helyett az őket közelítő Taylor-polinom helyettesítési értékét számolják ki (Horner-elrendezéssel).

11. fejezet

HATVÁNYSOROK

♣ 114. DEFINÍCIÓ. Legyenek $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós számok. Ekkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ formát hatványsornak hívjuk. ♢
(Értelmezhettük volna a hatványsorokat általánosabban is, adott $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$.)

115. DEFINÍCIÓ. A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hatványsor konvergenciatartományán (konvergenciahalmazán) azon valós α számok halmazát értjük, amelyekre a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \alpha^k$ végtelen (numerikus) sor konvergens. ♢

A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots$ hatványsor konvergenciatartományát KT jelöli. Nyilvánvaló, hogy $0 \in KT$, hiszen a hatványsorban x helyére 0-t írva a kapott numerikus sor összege a_0. Pl. a $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$ hatványsor bármely rögzített α-ra mértani sor 2α kvócienssel, ugyanis

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \alpha^k = \sum_{k=0}^{\infty} (2\alpha)^k.$$

Ez akkor és csak akkor konvergens, ha $|2\alpha| < 1$, azaz $|\alpha| < \frac{1}{2}$. Innen $KT =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ következik.

116. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Egy hatványsor konvergenciatartománya olyan intervallum, melynek a közepén a 0 helyezkedik el. Részletezve: $KT = \mathbb{R}$ vagy $KT = \{0\}$ vagy valamely $a \in \mathbb{R}^+$ esetén KT az $]-a, a[$, $]-a, a]$, $[-a, a[$, $[-a, a]$ intervallumok valamelyike.*

117. DEFINÍCIÓ. Egy hatványsor konvergenciatartománya hosszának felét konvergenciasugárnak hívjuk.♢

A konvergenciasugár jelölése: R. Az előző tétel szerint $R = \infty$ vagy $R = 0$ vagy valamely pozitív a-ra $R = a$. Ha egy hatványsor konvergenciasugarát meg tudjuk határozni, akkor – a harmadik esetben az intervallum végpontjaitól eltekintve (amikor a végpontokat külön kell vizsgálni) – a konvergenciahalmaz azonnal felírható. Az alábbi tétel a numerikus sorokra vonatkozó gyök- ill. hányadoskritérium következménye.

118. Tétel. *(Speciális eset, bizonyítás nélkül) A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hatványsor konvergenciasugara*

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

feltéve ha a szóban forgó határérték létezik.

A konvergenciasugár első formulával való felírása Cauchy-Hadamard tétel néven ismeretes. Pl. a $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$ hatványsor esetén $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|2^n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Ugyanerre jutunk $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n}{2^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}$ alapján is. Mivel $\alpha = \pm\frac{1}{2}$ esetén $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \alpha^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left(\pm\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1)^k$ nem konvergens, így $KT =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Az eddigiek lehetőséget nyújtanak az alábbi függvény értelmezésére.

Legyen adott a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hatványsor KT konvergenciatartománnyal. Rendeljük hozzá KT minden α eleméhez a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \alpha^k$ numerikus sor összegét. Ez egy KT értelmezési tartományú valós f függvényt ad meg, melyet – α-ról az x független változóra áttérve – jelölhetünk a következő módon is:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (x \in KT).$$

119. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) A* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *és* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ *hatványsorok konvergenciasugarai megegyeznek. Ha* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *és* $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k x^{k-1} (= \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1})$ *akkor a konvergenciatartományok belsejében* $g = f'$.

A tétel lényegében azt fejezi ki, hogy hatványsorokat formálisan, tagonként lehet deriválni, és közben a konvergenciasugár nem változik (a konvergenciatartomány a végpontok miatt változhat).

A továbbiakban azt tűzzük ki célul, hogy megkeressük és megvizsgáljuk azokat a hatványsorokat, melyek nevezetes függvényeket állítanak elő.

Korábban már szerepelt, hogy egy Taylor-polinom és a Lagrange-féle maradéktag összege bizonyos feltételek teljesülése esetén előállítja a kiindulási függvényt egy adott intervallumon:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Ha az $\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ maradéktag a 0-hoz tart midőn $n \to \infty$, akkor rögzített x esetén az

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

numerikus sor részletösszegei $f(x)$-hez konvergálnak. Miután x tetszőlegesen választható a vizsgált intervallumban, így

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots.$$

A jobb oldali hatványsor, melyet *Taylor-sornak* nevezünk a konvergenciatartományának pontjaiban előállítja a bal oldalon szereplő függvényt. Amennyiben $x_0 = 0$, akkor az ún. *Maclaurin-féle sort* kapjuk:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + \ldots.$$

A most végiggondolt lépések igazolják az alábbi tételt.

120. Tétel. *Ha az* f *függvény végtelen sokszor deriválható az* $]a, b[$ *intervallumon és a deriváltak folytonosak* $[a, b]$*-n, továbbá* $x_0 \in [a, b]$ *rögzített, akkor minden* $x \in [a, b]$, $x \neq x_0$ *esetén*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots,$$

feltéve, hogy a Taylor-formula Lagrange-féle maradéktagja n *növekedésével a 0-hoz tart.*

A tétel tehát akkor alkalmazható, ha a Lagrange-féle maradéktag a 0-hoz tart. Ezt garantálja pl. ha a deriváltak korlátosak, pontosabban fogalmazva $\exists\, K \in \mathbb{R}$, hogy bármely $x \in [a, b]$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $|f^{(n)}(x)| \leq K$. Ugyanis a feltételek alapján

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leq K\ \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0.$$

121. Tétel. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\ ,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\ ,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\ .$$

Bizonyítás. Az előző tételt használjuk $x_0 = 0$ mellett.

Az e^x függvény folytonos ($\mathcal{D}_{e^x} = \mathbb{R}$), összes deriváltja önmaga (tehát a deriváltak is mindenhol folytonosak), $e^0 = 1$. Bármely $[-a, a]$ intervallumban a deriváltak korlátosak: $e^x \leq e^a$ $(x \in [-a, a])$. Mivel a tetszőleges volt, ezért bármely x esetén igaz a konvergencia. Pl. $x = 1$ esetén $e = 1 + 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$.

A $\sin x$ és $\cos x$ folytonos függvények értelmezési tartománya az $\mathbb{R}$ halmaz, $\sin' x = \cos x$, $\cos' x = -\sin x$, $-\sin' x = -\cos x$, $-\cos' x = \sin x$. Teljesül továbbá, hogy $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ és bármely x-re $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$. (A $\cos x$-re vonatkozó állítást bizonyíthattuk volna a hatványsorok deriválására vonatkozó tétel alapján is.) ■

12. fejezet

KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK PARCIÁLIS DERIVÁLTJAI

♣ 122. Definíció. Az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pont $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sugarú környezetén azon $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontok halmazát értjük, melynek elemeire $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \varepsilon$. ♢

A környezet jelölése: $k_\varepsilon(x_0, y_0)$, vagy ha a sugár nagysága nem fontos, akkor $k(x_0, y_0)$. Egy ilyen környezet az (x_0, y_0) pont körüli (ε sugarú) nyílt körlemezt jelent a síkon.

123. Definíció. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény értelmezési tartományában tekintsünk egy olyan (x_0, y_0) pontot melynek valamely környezetére $k(x_0, y_0) \subset \mathcal{D}_f$. Ekkor az

$$f_{(x)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad f_{(x)}(x) = f(x, y_0)$$

függvényt az f függvény x változója szerinti, (x_0, y_0) ponthoz tartozó parciális függvényének nevezzük. Hasonlóan értelmezhetjük az

$$f_{(y)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad f_{(y)}(y) = f(x_0, y)$$

függvényt is, amely az f függvény y változója szerinti, (x_0, y_0) ponthoz tartozó parciális függvénye. ♢

A parciális függvények definícióban használt jelölése nem tükrözi azt, hogy azok melyik (x_0, y_0) ponthoz tartoznak, ezért mindig ügyelni kell arra, hogy ez nyilvánvaló legyen.

124. Definíció. Ha az $f_{(x)}(x)$ függvény deriválható az x_0 helyen, akkor a derivált értékét az f függvény (x_0, y_0) pontbeli, x változó szerinti parciális deriváltjának nevezzük. Amennyiben $f_{(y)}(y)$ deriválható az y_0 pontban, akkor a derivált értéke az f függvény (x_0, y_0) pontbeli, y változó szerinti parciális deriváltja lesz. ♢

Jelölés: $f'_x(x_0, y_0)$ ill. $f'_y(x_0, y_0)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ill. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

125. Definíció. Az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartományának minden olyan pontjához, ahol létezik az x változó szerinti (y változó szerinti) parciális derivált, rendeljük hozzá a pontbeli parciális derivált értékét. Ez a hozzárendelés egy kétváltozós függvényt ad meg, melyet az f függvény x változó szerinti (y változó szerinti) parciális deriváltfüggvényének hívunk. ♢

Jelölés: $f'_x(x, y)$ ill. $f'_y(x, y)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ill. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Rövidebben írva: f'_x ill. f'_y vagy $\frac{\partial f}{\partial x}$ ill. $\frac{\partial f}{\partial y}$.

126. Definíció. A $\operatorname{grad} f = (f'_x, f'_y)$ vektort, melynek komponensei kétváltozós függvények, az f függvény gradiensfüggvényének (röviden gradiensének) nevezzük. ♢

127. Definíció. $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ stacionárius pontja f-nek, ha $(\operatorname{grad} f)(x_0, y_0) = (0, 0)$. ♢

Pl. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (-1, 2)$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_{(x)}(x) - f_{(x)}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x^2 + 4) - (x_0^2 + 4)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0 = -2 = f'_x(-1, 2),$$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f_{(y)}(y) - f_{(y)}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{(1 + y^2) - (1 + y_0^2)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} (y + y_0) = 2y_0 = 4 = f'_y(-1, 2).$$

$f'_x(x, y) = 2x$, $f'_y(x, y) = 2y$, $\operatorname{grad} f = (2x, 2y)$, $(\operatorname{grad} f)(-1, 2) = (-2, 4) \neq (0, 0)$, tehát $(-1, 2)$ nem stacionárius pont.

Összefoglalva, parciálás deriválás során ha az egyik változó szerint deriválunk, akkor a másik változót konstansnak tekintjük.

♣ *Magasabbrendű parciális deriváltak*

A fenti definíciókból világosan kitűnik, hogy egy kétváltozós függvény parciális deriváltjai is kétváltozós függvények. Ha egy parciális deriválással kapott függvényt valamelyik változója szerint tovább deriválunk, akkor az eredeti függvény egy másodrendű parciális deriváltját kapjuk. Ilymódon négy másodrendű parciális deriválthoz juthatunk, az ún. homogén másodrendű parciális deriváltfüggvényekhez: $(f'_x)'_x = f''_{xx}$, $\left(f'_y\right)'_y = f''_{yy}$; illetve az ún. vegyes másodrendű parciális deriváltfüggvényekhez: $(f'_x)'_y = f''_{xy}$, $\left(f'_y\right)'_x = f''_{yx}$. Másik jelöléssel: $f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Pl. $f(x,y) = x^2 + y^2$ esetén $f''_{xx}(x,y) = 2 = f''_{yy}(x,y)$ és $f''_{xy}(x,y) = 0 = f''_{yx}(x,y)$ konstans függvények.

Ha $f(x,y) = \ln(e^x + y)$ akkor

$$f'_x(x,y) = \frac{e^x}{e^x + y} \quad , \quad f'_y(x,y) = \frac{1}{e^x + y} \, ,$$

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{ye^x}{(e^x + y)^2} \quad , \quad f''_{yy}(x,y) = -\frac{1}{(e^x + y)^2} \quad , \quad f''_{xy}(x,y) = -\frac{e^x}{(e^x + y)^2} = f''_{yx}(x,y) \, .$$

128. Tétel. *Ha az (x_0, y_0) pont valamely környezetében f''_{xy} és f''_{yx} léteznek és (x_0, y_0)-ban folytonosak, akkor $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.*

A tétel lényegében azt mondja ki, hogy a kétváltozós függvények egy széles osztályánál a vegyes másodrendű parciális deriváltak megegyeznek, a deriválás sorrendje tehát felcserélhető. Annak igazolására, hogy teljes általánosságban $f''_{xy}(x_0, y_0) \neq f''_{yx}(x_0, y_0)$, tekintsük az alábbi példát.

Pl. Az

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{ha } x^2 + y^2 > 0; \\ 0 & \text{ha } x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

függvény értelemzési tartománya $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$. Legyen $(x_0, y_0) = (0,0)$, itt a parciális függvények konstans függvények: $f_{(x)}(x) = f_{(y)}(y) = 0$, melyek megfelelő változó szerinti deriváltja is a konstans 0 függvény. Tehát $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. Az origótól eltérő helyen a parciális deriváltakat a szokásos módon kell kiszámolni, tehát azt kapjuk, hogy

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{ha } x^2 + y^2 > 0; \\ 0 & \text{ha } x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad , \quad f'_y(x,y) = \begin{cases} x\frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{ha } x^2 + y^2 > 0; \\ 0 & \text{ha } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Legyen $g(x,y) = f'_x(x,y)$ és $h(x,y) = f'_y(x,y)$, továbbá a parciális függvényeiket tekintsük ismét az $(x_0, y_0) = (0,0)$ helyen.

$$g_{(y)}(y) = \begin{cases} -y & \text{ha } y \neq 0; \\ 0 & \text{ha } y = 0 \end{cases} \quad , \quad h_{(x)}(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \neq 0; \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Egyszerűsítés után $g_{(y)}(y) = -y$, valamint $h_{(x)}(x) = x$, melyek a 0-ban deriválhatók: $g'_y(0) = f''_{xy}(0,0) = -1 \neq h'_x(0) = f''_{yx}(0,0) = 1$.

♣ *n-változós függvények*

A kétváltozós függvényekhez hasonlóan lehet értelmezni a parciális függvények, a pontbeli parciális deriváltak, a parciális deriváltfüggvények, a magasabbrendű parciális deriváltak fogalmát tetszőleges n-változós függvényekre is. A vegyes másodrendű parciális deriváltakra vonatkozó tétel is kiterjeszthető $2 \leq m$-edrendű vegyes parciálisokra.

Pl. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^3y^2 + z\ln x$. Ekkor grad $f = (3x^2y^2 + \frac{z}{x}, 2x^3y, \ln x)$,

$$f''_{xx} = 6xy^2 - \frac{z}{x^2} \, , \; f''_{yy} = 2x^3 \, , \; f''_{zz} = 0 \, , \; f''_{xy} = f''_{yx} = 6x^2y \, , \; f''_{xz} = f''_{zx} = \frac{1}{x} \, , \; f''_{yz} = f''_{zy} = 0 \, .$$

13. fejezet

PARCIÁLIS DERIVÁLTAK ALKALMAZÁSA

♣ *Hibaszámítás*

129. DEFINÍCIÓ. Ha valamely A mennyiség közelítő értéke az a mennyiség, akkor az $|A-a|$ számot az a szám (A-ra vonatkozó) abszolút hibájának hívjuk. ♢

Mivel a gyakorlatban az abszolút hiba sokszor meghatározhatatlan, pontos kiszámítása lehetetlen, ezért jó közelítésére törekszünk.

130. DEFINÍCIÓ. Az a mennyiség (A-ra vonatkozó) abszolút hibakorlátjának nevezzük a $\Delta a \geq |A-a|$ számot. ♢

A hibakorlát gyakran előre adott, mivel a mérőműszereken előre feltüntetett pontossággal lehet mérni. A $\Delta a \geq |A-a|$ formula átalalkítható $a-\Delta a \leq A \leq a+\Delta a$ alakra.

131. DEFINÍCIÓ. A $\delta a \geq \frac{\Delta a}{|a|}$ számot ($a \neq 0$) az a szám (A-ra vonatkozó) relatív hibakorlátjának hívjuk. ♢

Pl. A π szám egyik szokásos közelítése 3.14. Ismert, hogy $|\pi - 3.14| < 0.1$, tehát 3.14-nek a π-re vonatkozó egy abszolút hibakorlátja 0.1 (ennél jobb hibakorlátot is adhattunk volna). Ekkor a relatív hibakorlát pl. $0.032 \geq \frac{0.1}{3.14}$.

Tegyük fel, hogy egy függvény helyettesítési értékét szeretnénk egy bizonyos helyen meghatározni, de csak a helynek egy közelítését ismerjük. Mit mondhatunk ekkor a felvett függvényérték közelítéséről?

Egyváltozós függvényeknél jó lehetőséget nyújt a $\Delta f = |f(A)-f(a)|$ mennyiség közelítésére f elsőfokú $T_1(A) = f(a) + f'(a)(A-a)$ Taylor-polinomja. Tehát

$$\Delta f = |f(A)-f(a)| \approx |T_1(A)-f(a)| = |f'(a)(A-a)| \leq |f'(a)|\,\Delta a.$$

A többváltozós függvények Taylor-polinomjából analóg eredményt nyerhetünk.

Legyen adott egy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény, továbbá közelítse az értelmezési tartományában levő $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ pontot az értelmezési tartomány $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pontja, ahol a közelítés koordinátánkénti abszolút hibakorlátjait a $(\Delta a_1, \Delta a_2, \ldots, \Delta a_n)$ vektor tartalmazza. Ekkor a $\Delta f = |f(A_1, A_2, \ldots, A_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)|$ mennyiségre

$$\Delta f \approx \left|f'_{x_1}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right| \Delta a_1 + \left|f'_{x_2}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right| \Delta a_2 + \ldots + \left|f'_{x_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right| \Delta a_n.$$

Pl. Az USA-ban a pénz M keresletét egy bizonyos időszakban az

$$M(x,r) = 0.14x + \frac{76.03}{(r-2)^{0.84}} \quad (r > 2)$$

függvény írja le, ahol x az éves nemzeti jövedelem és r az éves szintű kamatláb. A vizsgált időszak egy adott évében a nemzeti jövedelem 320\$ $\pm$5\$, a kamatláb pedig 4.1\$ $\pm$0.5% volt. Adjunk becslést az adott évben a pénz keresletére!

$M'_x = 0.14$, $M'_r = -\frac{63.87}{(r-2)^{1.84}}$, $M(320, 4.1) = 85.57$.

$$\Delta M \approx 0.14 \cdot 5 + \frac{63.87}{2.1^{1.84}} \cdot 0.5 = 8.85,$$

tehát a kereslet: $M \pm \Delta M = 85.57 \pm 8.85$.

♣ *Szélsőértékszámítás*

132. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ pontban lokális minimuma (lokális maximuma) van, ha létezik (x_0, y_0)-nak olyan $k(x_0, y_0) \subset \mathcal{D}_f$ környezete, hogy $\forall\ (x, y) \in k(x_0, y_0)$ esetén $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ $(f(x, y) \leq f(x_0, y_0))$. ♢

Pl. $f(x, y) = x^2 + y^2$-nek a $(0, 0)$ pontban lokális minimuma van, mert bármely origótól különböző (x, y) pontra $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$.

A következő tétel azt fejezi ki, hogy csak stacionárius pontban lehet lokális szélsőérték.

133. Tétel. *(kétváltozós függvények lokális szélsőértéke létezésének szükséges feltétele) Ha egy kétváltozós f függvény egy (x_0, y_0) pontban mindkét változója szerint deriválható és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'_x(x_0, y_0) = 0$ és $f'_y(x_0, y_0) = 0$.*

Bizonyítás. Ha a függvénynek (x_0, y_0)-ban lokális szélsőértéke van, akkor ott a parciális fügvényeinek is lokális szélsőértéke kell, hogy legyen. Az egyváltozós függvények lokális szélsőértékeire vonatkozó szükséges feltételből következik, hogy a bizonyítandó tétel igaz. ■

134. Tétel. *(kétváltozós függvények lokális szélsőértéke létezésének elégséges feltétele, nem bizonyítjuk) Tegyük fel, hogy egy kétváltozós f függvény parciális deriváltjai folytonosak f egy (x_0, y_0) stacionárius pontjának valamely környezetében. Legyen $D(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - f''_{xy}(x_0, y_0) f''_{yx}(x_0, y_0)$.*

Ha $D(x_0, y_0) < 0$ akkor f-nek (x_0, y_0)-ban nincs lokális szélsőértéke. Ha $D(x_0, y_0) > 0$ akkor f-nek (x_0, y_0)-ban lokális szélsőértéke van, mégpedig $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ esetén lokális minimum, $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ esetén lokális maximum.

Pl. Legyen $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = x^2 - y^2$. Megoldva az

$$\left.\begin{array}{rcrcl} f'_x & = & 2x & = & 0 \\ f'_y & = & 2y & = & 0 \end{array}\right\} \quad \textit{ill.} \quad \left.\begin{array}{rcrcl} g'_x & = & 2x & = & 0 \\ g'_y & = & -2y & = & 0 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszereket, mindkét esetben egyetlen stacionárius pontot kapunk: $(x_0, y_0) = (0, 0)$-t. Mindkét függvény esetében itt lehet tehát lokális szélsőérték. A második parciális deriváltak konstans függvények lesznek: $f''_{xx} = g''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = g''_{xy} = 0$, $f''_{yx} = g''_{yx} = 0$, $f''_{yy} = 2$, $g''_{yy} = -2$. Az első esetben bármely (x_0, y_0) pontra $D(x_0, y_0) = 4 > 0$, vagyis az origóban lokális szélsőértéke van f-nek, mégpedig $f''_{xx}(0, 0) = 2 > 0$ miatt lokális minimum. A második esetben viszont bármely (x_0, y_0) pontra $D(x_0, y_0) = -4 < 0$, tehát az origóban nincs lokális szélsőértéke g-nek (így sehol sincs).

♣ *Lineáris regresszió (a szélsőértékszámítás alkalmazása)*

Adott a síkon $n \geq 2$ pont, melyek nem esnek ugyanarra a függőleges egyenesre. Keressük azt az egyenest, amely a "legközelebb megy" a pontokhoz. Ha a pontokat rendre az (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) koordinátákkal adjuk meg ($\exists\ i \neq j$ hogy $x_i \neq x_j$), akkor az összes $y = mx + b$ egyenletű egyenes közül azt tekintjük a pontokhoz legközelebbinek, melyre $F(m, b) = \sum_{i=1}^n (mx_i + b - y_i)^2$ minimális lesz.

Először meghatározzuk a stacionárius pontokat. Ehhez az

$$\left.\begin{array}{rcrcl} F'_m & = & \sum_{i=1}^n 2(mx_i + b - y_i)x_i & = & 2\sum_{i=1}^n (mx_i^2 + bx_i - x_i y_i) \quad = \quad 0 \\ F'_b & = & \sum_{i=1}^n 2(mx_i + b - y_i) & = & 2\sum_{i=1}^n (mx_i + b - y_i) \quad = \quad 0 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldani. Rendezzük át a kapott egyenleteket

$$\left.\begin{array}{rcrcl} m\sum_{i=1}^n x_i^2 & + & b\sum_{i=1}^n x_i & = & \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ m\sum_{i=1}^n x_i & + & bn & = & \sum_{i=1}^n y_i \end{array}\right\}$$

alakra. Bevezetve az $\bar{x}$ ill. $\bar{y}$ jelölést a pontok első ill. második koordinátáinak átlagára, a második egyenletből $b = \bar{y} - m\bar{x}$ adódik. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe, rendezés után

$$m = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

következik. Itt a nevező nem lehet 0, ugyanis

$$n\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 > 0,$$

mivel a feltételek szerint létezik legalább két pont, melyek első koordinátái különbözőek. Tehát egy stacionárius pont van:

$$m_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \quad , \quad b_0 = \bar{y} - m\bar{x}.$$

Most meg kell vizsgálni, hogy az egyetlen szóbajöhető helyen valóban van-e lokális minimum. Miután

$$F''_{mm} = 2\sum_{i=1}^n x_i^2 > 0 \quad , \quad F''_{bb} = 2n \quad , \quad F''_{mb} = F''_{bm} = 2\sum_{i=1}^n x_i \ ,$$

így $D(m_0, b_0) = 4n\sum_{i=1}^n x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$, amelyről épp az előbb láttuk be, hogy pozitív. Tehát (m_0, b_0)-ban lokális minimuma van F-nek.

Tehát a fenti feltételek mellett minden esetben egyértelműen létezik a legjobb egyenes.

Pl. Legyen $n = 5$, a pontok koordinátáit az alábbi táblázat tartalmazza.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	1	2	2	3

Kiszámolva a $\sum_{i=1}^5 x_i = 15$, $\bar{x} = 3$, $\sum_{i=1}^5 y_i = 9$, $\bar{y} = 1.8$, $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 55$, $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 32$ értékeket, ezekből $m_0 = 0.5$, $b_0 = 0.3$ következik. Tehát a megadott 5 ponthoz legközelebb eső egyenes egyenlete $y = 0.5x + 0.3$.

14. fejezet

KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE, FOLYTONOSSÁGA

♣ *Határérték*

135. Definíció. Az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$ típusú sorozatokat síkbeli pontsorozatoknak hívjuk, vagy más néven kétdimentiós vektorsorozatoknak. ♢

Megadásuk két valós számsorozattal, az ún. *koordinátasorozatokkal* történik: $\bar{\mathbf{a}}_n = (x_n, y_n)$. Pl. $\bar{\mathbf{a}}_n = \left(\frac{n^2+1}{n+1}, (n+3)^3\right)$.

136. Definíció. Egy síkbeli $\bar{\mathbf{a}}_n = (x_n, y_n)$ pontsorozat konvergens, ha az x_n és y_n koordinátasorozatok mindegyike konvergens. Egyébként a pontsorozat divergens. Konvergens esetben a pontsorozat határértéke az a pont lesz, melynek koordinátáihoz a koordinátasorozatok tartanak. ♢ .

Jelölés $\lim_{n\to\infty} \bar{\mathbf{a}}_n = \bar{\mathbf{a}}$, ahol $\bar{\mathbf{a}} = (A, B)$ és $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim_{n\to\infty} y_n = B$.

137. Definíció. Az $(\hat{x}, \hat{y})$ pont torlódási pontja a $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaznak, ha van olyan H-beli $(x_n, y_n) \neq (\hat{x}, \hat{y})$ pontsorozat, amely $(\hat{x}, \hat{y})$-hoz tart. ♢

Hasonlóan értelmezhető torlódási pontnak $(\hat{x}, \pm\infty)$, $(\pm\infty, \hat{y})$ ill. $(\pm\infty, \pm\infty)$ is. A H halmaz torlódási pontjai halmazának jelölése: T_H.

138. Definíció. Legyen adott az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, valamint $(\alpha, \beta) \in T_{\mathcal{D}_f}$ torlódási pont (tehát $(\alpha, \beta) = (\hat{x}, \hat{y})$ vagy $(\hat{x}, \pm\infty)$ vagy $(\pm\infty, \hat{y})$) vagy $(\pm\infty, \pm\infty)$). Jelölje továbbá γ az $A \in \mathbb{R}$, vagy ∞ vagy $-\infty$ szimbólumok valamelyikét.

Azt mondjuk, hogy f határértéke (α, β)-ban γ, ha bármely (α, β)-hoz tartó értelmezési tartománybeli (x_n, y_n) sorozatra, melynek tagjaira a megfelelő esetben $(x_n, y_n) \neq (\hat{x}, \hat{y})$ is teljesül, igaz lesz, hogy $f(x_n, y_n) \to \gamma$. ♢

Jelölés: $\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} f(x, y) = \gamma$.

♣ *Polárkoordináták*

Az x, y Descartes-féle koordinátájú síkbeli pont polárkoordinátái (r, φ) $(0 \leq r,\ 0 \leq \varphi < 2\pi)$, ahol $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

♣ *Folytonosság*

139. Definíció. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt folytonosnak nevezzük az $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathcal{D}_f$ pontban, ha bármely $(\hat{x}, \hat{y})$-hoz tartó értelmezési tartománybeli (x_n, y_n) pontsorozatra teljesül, hogy $f(x_n, y_n) \to f(\hat{x}, \hat{y})$. ♢

140. Definíció. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $H \subset \mathcal{D}_f$ halmazon, ha annak minden pontjában folytonos. Az f függvény folytonos, ha $\mathcal{D}_f$-n folytonos. ♢

Megjegyzés. Az egyváltozós függvényekhez hasonlóan egy folytonos függvény határértéke az értelmezési tartomány egy torlódási pontjában (amely persze magában az értelmezési tartományban is benne van) megegyezik a helyettesítési értékével. A kétváltozós polinom-, hatvány-, exponenciális-, logaritmus- és trigonometrikus függvények is ugyanúgy folytonosak.

Pl. $f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$. Legyen először $(\alpha, \beta) = (1, -2)$. Tekintsük azokat az (x_n, y_n) pontsorozatokat,

melyek koordinátasorozataira $x_n \to 1$ és $y_n \to -2$ teljesül ($x_n \neq 1, y_n \neq -2$). Ekkor

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n^3 + y_n^3}{x_n^2 + y_n^2} \to \frac{1^3 + (-2)^3}{1^2 + (-2)^2} = -\frac{7}{5} \quad azaz \quad \lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = -\frac{7}{5}.$$

A folytonosságot felhasználva rögtön felírhattuk volna, hogy $\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = f(1,-2) = -\frac{7}{5}$.

Legyen most $(\alpha, \beta) = (0,0)$. Az előző módszer azért nem vezet eredményre, mert $f(x_n, y_n) = \frac{x_n^3+y_n^3}{x_n^2+y_n^2}$ egy $\frac{0}{0}$ típusú határérték, melyről az általános $x_n \to 0$ és $y_n \to 0$ koordinátasorozatok esetén nem tudunk mondani semmit. A függvény folytonossága sem használható fel, mivel $(0,0) \notin \mathcal{D}_f$. Térjünk át a polárkoordináta-rendszerre. Ennek az az előnye, hogy az origóhoz való tartás könnyen megfogalmazható: $r \to 0$.

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{r^3 \cos^3 \varphi + r^3 \sin^3 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = r(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) \to 0$$

mivel $\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi$ korlátos és $r \to 0$. Tehát $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$.

Ha $(\alpha, \beta) = (-\infty, -\infty)$, akkor $f(x_n, y_n) = \frac{x_n^3+y_n^3}{x_n^2+y_n^2}$ egy $\frac{-\infty}{\infty}$ típusú határérték, melyről az $x_n \to -\infty$ és $y_n \to -\infty$ koordinátasorozatok esetén általánosan nem tudunk megállapítani semmit. Térjünk át a polárkoordináta-rendszerre. De most $r \to \infty$ és $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$.

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{r^3 \cos^3 \varphi + r^3 \sin^3 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = r(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) \to -\infty$$

mivel a megadott szögtartományban $\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi$ negatív ($\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$), továbbá $r \to \infty$. Tehát $\lim_{(x,y)\to(-\infty,-\infty)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = -\infty$.