0 201996 000528

Dr. Leitold Adrien

LINEÁRIS ALGEBRA

PANNON EGYETEMI KIADÓ

1. AZ $\mathbb{R}^n$ VEKTORTÉR

1. tétel

Rendezett szám n-esek, műveletek

Jelölések: $\mathbb{R}$ valós számok halmaza

$\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ természetes számok halmaza

$\underline{n} := \{1,2,\dots,n\}$, ahol $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.

1.1. Definíció.

Az $f: \underline{n} \to \mathbb{R}$, $i \mapsto x_i$ típusú függvényeket valós számokból képzett rendezett n-eseknek nevezzük, és $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ -nel jelöljük. x_i-t a rendezett n-es i-dik komponensének hívjuk.

$\mathbb{R}^n$ jelöli a valós számokból képzett rendezett n-esek halmazát.

1.2. Állítás.

Legyen $x,y \in \mathbb{R}^n$. $x = y \iff x_i = y_i$, $i = 1,2,\dots,n$.

Bizonyítás:

Következik abból, hogy két függvény pontosan akkor egyenlő, ha értelmezési tartományuk megegyezik, és bármely értelmezési tartománybeli elemhez a függvények által hozzárendelt képelemek egyenlőek.

1.3. Definíció.

Legyen $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Az x és y rendezett n-esek összege:

$x+y := (x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \dots,\ x_n+y_n)$.

Az x rendezett n-es λ-szorosa:

$\lambda \cdot x := (\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \dots,\ \lambda x_n)$.

Megjegyzés.

A rendezett n-esek körében értelmezett fenti két művelet az analízisből ismeretes (függvények összeadására és skalárral való szorzására vonatkozó) ún. pontonkénti művelet.

Példa.

$x := (-2, 5, 4, 0, -3)$

$y := (1, 3, 0, -2, 7)$

Ekkor:

$x+y = (-1, 8, 4, -2, 4)$

$3x = (-6, 15, 12, 0, -9)$

$2x-y = 2x+(-1)y = (-5, 7, 8, 2, -13)$.

1.4. Állítás. Az $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ struktúra alaptulajdonságai

Bármely $a,b,c \in \mathbb{R}^n$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ esetén:

(V1) $a+b = b+a$

(V2) $(a+b)+c = a+(b+c)$

(V3) létezik olyan $o \in \mathbb{R}^n$ elem, melyre minden $a \in \mathbb{R}^n$ esetén $a+o = a$.
/o -t $\mathbb{R}^n$ nullelemének hívjuk./

(V4) Minden $a \in \mathbb{R}^n$ -hez létezik olyan $a' \in \mathbb{R}^n$, hogy $a+a' = o$.
/a' -t az "a" elem ellentettjének nevezzük./

(V5) $\lambda(a+b) = \lambda a+\lambda b$

(V6) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$

(V7) $(\lambda+\mu)a = \lambda a+\mu a$

(V8) $1\cdot a = a$.

Bizonyítás:

Használjuk fel a rendezett n-esek összegének ill. skalárszorosának értelmezését és a valós számok közötti műveletek tulajdonságait!

$\mathbb{R}^n$ nulleleme: $o = (0,0,\ldots,0)$, az $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ elem ellentettje az $a' = (-a_1,-a_2,\ldots,-a_n)$ elem.

Megjegyzés.

Mivel az $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ struktúra rendelkezik a vektorterekre jellemző (V1)-(V8) tulajdonságokkal (ld. később!), $\mathbb{R}^n$ -t (n-dimenziós valós) vektortérnek, vagy (n-dimenziós valós) koordinátatérnek, elemeit n-dimenziós vektoroknak is nevezzük.

1.5. Definíció.

Legyen $a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_k \in \mathbb{R}$.
A $\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\ldots+\lambda_ka_k$ vektort az $a_1,\ldots,a_k$ vektorok $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ skalárokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük. Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, akkor a lineáris kombinációt triviálisnak nevezzük.

Megjegyzések.

(1) Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$. H-beli elemek lineáris kombinációja a következőt jelenti: tetszőlegesen kiválasztott véges sok H-beli vektorból képzett lineáris kombináció.

(2) Triviális lineáris kombináció nullvektort ad. Másrészt, a nullvektor minden $H \subset \mathbb{R}^n$ vektorhalmazból kombinálható lineárisan (esetleg nem triviálisan is!).

Példák.

(1) Az $a_1 = (-5,0,1)$, $a_2 = (3,4,-2)$, $a_3 = (-1,1,1)$ vektoroknak a $-1,2,1$ skalárokkal vett lineáris kombinációja:
$(-1)\cdot(-5,0,1) + 2\cdot(3,4,-2) + 1\cdot(-1,1,1) = (10,9,-4)$

(2) Az $a_1 = (-2,1,3)$ és $a_2 = (1,0,1)$ vektorokból a $o \in \mathbb{R}^3$ vektor csak triviálisan állítható elő: $0\cdot a_1 + 0\cdot a_2 = (0,0,0)$.
A $v_1 = (5,-2,3)$ és $v_2 = (-10,4,-6)$ vektorokból $\mathbb{R}^3$ nulleleme nem triviálisan is előállítható: $2v_1 + 1v_2 = (0,0,0)$.

Lineáris függetlenség, függőség, rang

1.6. Definíció.

Az $a_1,\ldots,a_k$ vektorok lineárisan összefüggők, ha belőlük a nullvektor nem triviális lineáris kombinációval előállítható. Ellenkező esetben a vektorokat lineárisan függetleneknek nevezzük.
Egy vektorhalmaz lineárisan független, ha minden véges részhalmaza ilyen, ellenkező esetben pedig lineárisan összefüggő.

1.7. Megjegyzések.

(1) Nullvektort tartalmazó vektorhalmaz lineárisan összefüggő.

(2) Egy egyelemű vektorhalmaz pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha az egyetlen eleme nullvektor.

(3) Lineárisan független vektorok részhalmaza is lineárisan független.

(4) Lineárisan összefüggő vektorokhoz további vektorokat véve is lineárisan összefüggő vektorhalmazt kapunk.

(5) Az üres halmaz lineárisan független.

Példák.

(1) Tudva, hogy $\mathbb{R}^2$ elemei a sík helyvektoraival azonosíthatók, könnyen belátható, hogy $\mathbb{R}^2$-ben két vektor pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha egy egyenesre esik. Bármely három vagy annál több elemből álló vektorhalmaz $\mathbb{R}^2$-ben lineárisan összefüggő.

(2) Hasonlóan, $\mathbb{R}^3$ elemeit a tér helyvektoraival azonosítva, megállapíthatjuk, hogy két ill. három vektor pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha egy egyenesen ill. egy síkban helyezkedik el.
$\mathbb{R}^3$-ban a négy vagy annál több elemből álló vektorhalmazok lineárisan összefüggők.

1.8. Állítás.

Az $a_1,\dots,a_k$ vektorok pontosan akkor lineárisan összefüggők, ha valamelyikük előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás.

1./ Tegyük fel, hogy az $a_1,\dots,a_k$ vektorok lineárisan összefüggők. Ekkor létezik olyan lineáris kombináció, melyre:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = o, \quad \text{és létezik } i\text{: } \lambda_i \neq 0.$$

$$\text{Így } a_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} a_1 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} a_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} a_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} a_k ,$$

azaz a_i előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.

2./ Tegyük fel, hogy valamelyik vektor (legyen pl. a_i) előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként:

$$a_i = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{i-1} a_{i-1} + \alpha_{i+1} a_{i+1} + \dots + \alpha_k a_k .$$

Ekkor:

$$o = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{i-1} a_{i-1} + (-1)\cdot a_i + \alpha_{i+1} a_{i+1} + \dots + \alpha_k a_k ,$$

azaz a nullvektor előáll az $a_1,\dots,a_k$ vektorok nem triviális lineáris kombinációjaként, így $a_1,\dots,a_k$ lineárisan összefüggő.

1.9. Állítás.

Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ vektorhalmaz pontosan akkor lineárisan független, ha a vektortér bármely vektora legfeljebb egy féle képpen állítható elő H-beli elemek lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás: arra az esetre, ha $H = \{v_1,\dots,v_k\}$ véges.

1./ Legyenek a $v_1,\dots,v_k$ vektorok lineárisan függetlenek.
Indirekt módon tegyük fel, hogy az x vektor két féle képpen is előáll $v_1,\dots,v_k$ lineáris kombinációjaként:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \qquad (1)$$
$$x = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k \qquad (2)$$

(1)-ből kivonva (2)-t:

$$o = (\alpha_1-\beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_k-\beta_k)v_k$$

Mivel $v_1,\dots,v_k$ lineárisan függetlenek, belőlük a nullvektor csak triviálisan állítható elő, így

$$\alpha_i-\beta_i = 0, \quad i = 1,\dots,k$$
$$\alpha_i = \beta_i, \quad i = 1,\dots,k ,$$

azaz az x vektor kétféle előállítása ugyanaz.

2./ Ha a vektortér bármely eleme legfeljebb egy féle képpen állítható elő a $v_1,\dots,v_k$ vektorokból, akkor a nullvektor előállítása is csak egy féle képpen - mégpedig triviálisan - történhet, azaz $v_1,\dots,v_k$ lineárisan független.

A bizonyítás hasonló akkor is, ha H nem véges.

1.10. Definíció.

Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$. A H vektorhalmaz rangja r, ha H elemeiből kiválasztható r db lineárisan független vektor, de bármely r+1 db vektor már lineárisan összefüggő. Jelölés: r(H).

Megjegyzés.

Ha $H = \{o\}$, akkor $r(H) = 0$.
Ha H tartalmaz legalább egy o -tól különböző elemet, akkor $r(H) \geq 1$.

Példa.

$v_1 := (4,2,0)$
$v_2 := (1,0,-1)$
$v_3 := (5,2,3)$
$v_4 := (-2,5,7)$ $\qquad H := \{v_1,v_2,v_3,v_4\} \subset \mathbb{R}^3$

A H halmaz elemeit vizsgálva, a lineáris függetlenség definícióját alkalmazva könnyen ellenőrizhetjük, hogy pl. a v_1,v_2,v_3 vektorok lineárisan függetlenek. Ugyanis a

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = o$ vektoregyenlet a következő, komponensekre felírt egyenlőség-rendszerrel ekvivalens:

$$\left.\begin{aligned} 4\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 \quad\quad + 2\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

A fenti egyenletrendszernek egyetlen megoldása van a λ ismeretlenekre:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

vagyis a v_1,v_2,v_3 vektorokból a nullvektor csak triviálisan állítható elő, így ezek a vektorok lineárisan függetlenek.

Másrészt, tudjuk azt, hogy $\mathbb{R}^3$-ban bármely 4 elemből álló vektorhalmaz lineárisan összefüggő. Így a H vektorhalmaz rangja 3.

1.11. Állítás.

Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$.

(1) Ha $r(H) = r$, és $a_1,\dots,a_r \in H$ lineárisan függetlenek, akkor H minden eleme előáll $a_1,\dots,a_r$ lineáris kombinációjaként.

(2) Ha a H vektorhalmaz minden eleme előállítható r db rögzített $v_1,v_2,\dots,v_r \in \mathbb{R}^n$ vektor lineáris kombinációjaként, akkor $r(H) \leq r$.

Bizonyítás:

(1) Legyen $x \in H$.
Ha létezik olyan i index, hogy $x = a_i$, akkor $x = 0\cdot a_1 + \dots + 1\cdot a_i + \dots + 0\cdot a_r$, azaz x előáll az $a_1,\dots,a_r$ vektorok lineáris kombinációjaként.
Ha minden i-re: $x \neq a_i$, akkor tekintsük az $\{a_1,\dots,a_r,x\}$ vektorhalmazt. Ez lineárisan összefüggő, így elemeiből a nullvektor nem triviális módon előáll:

$$o = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r + \alpha x \qquad (*)$$

Ebben a nem triviális lineáris kombinációban $\alpha \neq 0$ kell hogy legyen, ellenkező esetben ugyanis a nullvektor előállna az $a_1,\dots,a_r$ vektorok nem triviális lineáris kombinációjaként, ami ellentmondana lineáris függetlenségüknek. Ha $\alpha \neq 0$, akkor (*)-ból x kifejezhető, azaz x előáll az $a_1,\dots,a_r$ vektorok lineáris kombinációjaként.

(2) A bizonyítást ld. később.

Megjegyzés.

Az 1.9. Állítás szerint az 1.11. Állítás (1) részében H minden eleme egyértelműen áll elő az $a_1,\dots,a_r$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Példa.

$v_1 := (1,-2,3,5)$ $\qquad$ $v_3 := (1,2,5,4)$

$v_2 := (0,4,2,-1)$ $\qquad$ $v_4 := (2,-8,4,11)$

$H := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

A v_1 és v_2 vektorok nyilvánvalóan lineárisan függetlenek, így $r(H) \geq 2$. Másrészt, H minden eleme előállítható v_1 és v_2 lineáris kombinációjaként:

$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$
$v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2$
$v_3 = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2$
$v_4 = 2 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2$

Az 1.11. Állítás (2) része szerint $r(H) \leq 2$. Így $r(H) = 2$.

2. tétel

Generátorrendszer, bázis, dimenzió

1.12. Definíció.

(1) Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$. G generátorrendszere az $\mathbb{R}^n$ vektortérnek, ha $\mathbb{R}^n$ minden vektora előállítható G-beli vektorok lineáris kombinációjaként.

(2) $\mathbb{R}^n$ bázisán lineárisan független generátorrendszert értünk.
A bázis elemeit bázisvektoroknak nevezzük.

Megjegyzés.

$\mathbb{R}^n$-ben létezik bázis.
$B := \{(1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)\}$

Könnyen megmutatható, hogy B lineárisan független vektorhalmaz és B elemeinek lineáris kombinációjával $\mathbb{R}^n$ bármely vektora előállítható. Ezt a bázist $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisának nevezzük.

1.13. Állítás. Steiniz-féle kicserélési tétel.

Legyen $L \subset \mathbb{R}^n$ lineárisan független, $G \subset \mathbb{R}^n$ generátorrendszer. Ekkor L minden v eleméhez található olyan $g \in G$ elem, hogy a $(L\setminus\{v\}) \cup \{g\}$ vektorhalmaz is lineárisan független.

Bizonyítás:

1./ Ha $L\setminus\{v\} = \emptyset$ (azaz ha L egyelemű), akkor G-ből bármely $g \neq o$ elemet választva (ilyen van!) a $(L\setminus\{v\}) \cup \{g\} = \{g\}$ vektorhalmaz lineárisan független.

2./ Ha $L\setminus\{v\} =: L' \neq \emptyset$ (azaz ha L nem egyelemű):
Indirekt bizonyítás: tegyük fel, hogy létezik olyan $v \in L$ elem, hogy a $(L\setminus\{v\}) \cup \{g\} = L' \cup \{g\}$ halmaz minden $g \in G$ elem esetén lineárisan összefüggő. Mivel $L' \subset L$ lineárisan független, így g lineárisan függ L' elemeitől, minden $g \in G$ -re (azaz bármely $g \in G$ esetén g előállítható L' elemeinek lineáris kombinációjaként). G generátorrendszer, így v előáll G-beli elemek lineáris kombinációjaként. De ekkor v előáll L' elemeinek lineáris kombinációjaként is.
Így $L = L' \cup \{v\}$ lineárisan összefüggő. Ellentmondás.

1.14. Következmény.

L-nek legfeljebb annyi eleme lehet mint G-nek. Jelekben: $|L| \leq |G|$.

1.15. Állítás.

$\mathbb{R}^n$ minden bázisa ugyanannyi elemből áll.

Bizonyítás.

Legyen B_1 és B_2 két bázis.
B_1 lineárisan független, B_2 generátorrendszer, így $|B_1| \leq |B_2|$.
B_2 lineárisan független, B_1 generátorrendszer, így $|B_2| \leq |B_1|$, tehát $|B_1| = |B_2|$.

1.16. Megjegyzések.

(1) $\mathbb{R}^n$-ben bármely bázis n tagú, ezt a számot az $\mathbb{R}^n$ vektortér dimenziójának nevezzük. Jelölés: $\dim(\mathbb{R}^n)$

(2) $\mathbb{R}^n$-ben bármely n tagú lineárisan független vektorhalmaz bázis.

(3) A $B \subset \mathbb{R}^n$ halmazra a következő állítások ekvivalensek:
(i) B bázis.
(ii) B maximális lineárisan független vektorhalmaz.
(iii) B minimális generátorrendszer.

1.17. Állitás.

Legyen $B = \{b_1,\dots,b_n\} \subset \mathbb{R}^n$ bázis.
Ekkor minden $x \in \mathbb{R}^n$ vektor egyértelműen előállitható a $b_1,\dots,b_n$ vektorok lineáris kombinációjaként:

$$x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n.$$

Az $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ számokat az x vektor B bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük. Jelölés: x i-dik koordinátája: $(x)_i = \alpha_i$.

Bizonyitás:

B generátorrendszer, igy az előállithatóság biztositott. B lineárisan független, ez az 1.9. Állitás szerint garantálja az egyértelműséget.

1.18. Megjegyzések.

(1) Vegyük észre, hogy $\mathbb{R}^n$ bármely vektorának a kanonikus bázisra vonatkozó koordinátái éppen a vektor komponenseivel egyenlők!

(2) Könnyen ellenőrizhetjük, hogy két vektort összeadva azoknak adott bázisra vonatkozó koordinátái összeadódnak, egy vektor λ-szorosának koordinátái pedig a vektor koordinátáinak λ-szorosai lesznek.

Példa.

(1) $v_1 := (1,1)$, $v_2 := (2,0)$, $v_3 := (0,-1)$

$H := (v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^2$

H generátorrendszer, ugyanis $\mathbb{R}^2$ minden eleme előállitható H elemeinek lineáris kombinációjával. H lineárisan összefüggő, tehát nem bázis.
$\mathbb{R}^2$ vektorainak előállitása H elemeiből nem egyértelmű. Például az
$x := (3,1)$ vektorra:

$x = 1\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 0\cdot v_3$
$x = 0\cdot v_1 + 1{,}5\cdot v_2 + (-1)\cdot v_3$
$x = (-1)\cdot v_1 + 2\cdot v_2 + (-2)\cdot v_3$
⋮
stb.

(2) $v_1 := (1,1)$, $v_2 := (1,0)$
$H := (v_1, v_2) \subset \mathbb{R}^2$

H generátorrendszer és lineárisan független, igy bázis $\mathbb{R}^2$-ben.
$x := (2,-1)$
$y := (0,5)$
$z := x+y = (2,4)$
$v := 3x = (6,-3)$

$x = -v_1 + 3v_2$, igy az x vektor H-ra vonatkozó koordinátái -1, 3.
$y = 5v_1 - 5v_2$, igy az y vektor H-ra vonatkozó koordinátái 5, -5.
$z = 4v_1 - 2v_2$, igy a z vektor H-ra vonatkozó koordinátái 4, -2.
$v = -3v_1 + 9v_2$, igy a v vektor H-ra vonatkozó koordinátái -3, 9.

1.19. Állitás. Elemi bázistranszformáció.

Legyen $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}^n$ bázis, $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq o$.
Ekkor létezik olyan i index, hogy a $B' = (B\setminus\{b_i\})\cup\{c\}$ is bázis $\mathbb{R}^n$-ben, és bármely $\mathbb{R}^n$-beli vektornak a B bázisra vonatkozó koordinátáiból (ismerve a c vektor B-re vonatkozó koordinátáit is) egyszerűen számolhatjuk a B'-re vonatkozó koordinátáit.

Bizonyitás:

Legyen $x \in \mathbb{R}^n$. Az x és c előállitása a B bázison legyen a következő:

$$x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n \qquad (1)$$

$$c = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \dots + \gamma_n b_n \qquad (2)$$

Mivel $c \neq o$, igy létezik olyan i index, hogy $\gamma_i \neq 0$. Ekkor a $B' = (B\setminus\{b_i\})\cup\{c\}$ vektorhalmaz lineárisan független, ellenkező esetben ugyanis c lineárisan függene $B\setminus\{b_i\}$ elemeitől, ami a bázison történő egyértelmű előállithatóság miatt ellentmondana (2)-nek, ahol feltettük, hogy $\gamma_i \neq 0$. Továbbá B' elemszáma megegyezik B elemszámával, igy B' bázis.
Ezután keressük az x vektor B'-re vonatkozó koordinátáit.
(2)-ből fejezzük ki b_i-t és a kapott kifejezést helyettesitsük be (1)-be.
Ekkor kapjuk:

$$x = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_{i-1} b_{i-1} + \lambda_i \left(\frac{1}{\gamma_i} c - \frac{\gamma_1}{\gamma_i} b_1 - \ldots \frac{\gamma_{i-1}}{\gamma_i} b_{i-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} b_{i+1} - \ldots - \frac{\gamma_n}{\gamma_i} b_n \right) + \lambda_{i+1} b_{i+1} + \ldots + \lambda_n b_n =$$

$$= \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_i}{\gamma_i} \gamma_1 \right) b_1 + \ldots + \left(\lambda_{i-1} - \frac{\lambda_i}{\gamma_i} \gamma_{i-1} \right) b_{i-1} +$$

$$+ \frac{\lambda_i}{\gamma_i} c + \left(\lambda_{i+1} - \frac{\lambda_i}{\gamma_i} \gamma_{i+1} \right) b_{i+1} + \ldots + \left(\lambda_n - \frac{\lambda_i}{\gamma_i} \gamma_n \right) b_n .$$

Ennek alapján a transzformációs szabály könnyen formulázható. A $b_i \leftrightarrow c$ bázisvektorcsere esetén az új koordináták $(\hat{\lambda}_j)$ a régi koordinátákból (λ_j) a következő módon nyerhetők:

$$\hat{\lambda}_j = \lambda_j - \frac{\lambda_i}{\gamma_i} \cdot \gamma_j \qquad j = 1, \ldots, n \quad j \neq i$$

$$\hat{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\gamma_i}$$

Megjegyzések.

(1) A könnyebb megjegyezhetőség kedvéért megadjuk az elemi bázistranszformációval számolható koordináták táblázatos elrendezését is. Ebben feltüntetjük a bázisból távozó (b_i), a bázisba belépő (c) és egy tetszőleges vektor (x) koordinátáit a két bázisra vonatkozóan. (A $\frac{\lambda_i}{\gamma_i}$ hányadost δ-val jelöljük.)

bázis	b_i	c	x
b_1	0	γ_1	λ_1
b_2	0	γ_2	λ_2
⋮	⋮	⋮	⋮
b_i	1	(ⓘ)	λ_i
⋮	⋮	⋮	⋮
b_n	0	γ_n	λ_n

bázis	b_1	c	x
b_1	$-\frac{\gamma_1}{\gamma_i}$	0	$\lambda_1 - \delta \cdot \gamma_1$
b_2	$-\frac{\gamma_2}{\gamma_i}$	0	$\lambda_2 - \delta \cdot \gamma_2$
⋮	⋮	⋮	⋮
c	$\frac{1}{\gamma_i}$	1	δ
⋮	⋮	⋮	⋮
b_n	$-\frac{\gamma_n}{\gamma_i}$	0	$\lambda_n - \delta \cdot \gamma_n$

A $\gamma_i \neq 0$ számot generáló elemnek szokás nevezni.

(2) Legyen B_1 és B_2 két bázis az $\mathbb{R}^n$ vektortérben. Ha egy $x \in \mathbb{R}^n$ vektor koordinátáit ismerjük a B_1 bázisra vonatkozóan, akkor x B_2-re vonatkozó koordinátáit elemi bázistranszformációk sorozatával határozhatjuk meg, lépésről lépésre kicserélve a két bázis vektorait. (Természetesen induláskor ismernünk kell a B_2 bázis vektorainak B_1-re vonatkozó koordinátáit is.)

Példák.

(1) $a_1 := (1,3,2)$ $\qquad x := (14,17,18)$
$a_2 := (2,1,5)$
$a_3 := (3,4,2)$

Bázist alkotnak-e az $\mathbb{R}^3$ térben az a_1, a_2, a_3 vektorok? Ha igen, akkor határozzuk meg az x vektor ezen bázisra vonatkozó koordinátáit!
Induló bázisként tekintsük $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisát. (A bázisvektorokat jelöljük e_1, e_2, e_3 -mal.)
Valamennyi vektornak a kanonikus bázisra vonatkozó koordinátái éppen a vektor komponenseivel egyenlőek. Ha a kanonikus bázis bázisvektorait lépésről lépésre ki tudjuk cserélni az a_1, a_2, a_3 vektorokkal, akkor ez lineáris függetlenségüket jelenti, vagyis azt, hogy a_1, a_2, a_3 bázist alkot az $\mathbb{R}^3$ térben.
Az induló táblázat:

bázis	a_1	a_2	a_3	c
e_1	(1)	2	3	14
e_2	3	1	4	17
e_3	2	5	2	18

Első lépésként vonjuk be a bázisba az a_1 vektort az e_1 helyére. (Ez megtehető, mert a megfelelő generálóelemnek választott koordináta nem nulla!)
Az új táblázat az a_1, e_2, e_3 vektorokból álló bázisra vonatkozóan tartalmazza a_2, a_3 és x koordinátáit:

bázis	a_2	a_3	x
a_1	2	3	14
e_2	-5	-5	-25
e_3	(1)	-4	-10

(A táblázatban a bázisba bekerült a_1 vektor triviálisan adódó koordinátáit nem tüntettük fel.)

A számításokat célszerű úgy végeznünk, hogy először a generáló elem sorát töltjük ki, így megkapjuk minden vektor "δ"-ját, ezután sorra kitöltjük az oszlopokat.

Látható, hogy következő lépésként pl. az e_3 vektort kicserélhetjük a_2-vel:

bázis	a_3	x
a_1	11	34
e_2	(-25)	-75
a_2	- 4	-10

Végül a_3-t is bevonva a bázisba:

bázis	x
a_1	1
a_3	3
a_2	2

Mivel a kanonikus bázis valamennyi bázisvektorát ki tudtuk cserélni az a_1, a_2, a_3 vektorokkal, így ezek bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-ban. Az x vektor előállítása ezen a bázison: $x = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3$, vagyis az x vektor $B = \{a_1, a_2, a_3\}$ bázisra vonatkozó koordinátái: 1,2,3.

(2) $a_1 := (1,2,4)$
$a_2 := (-3,1,2)$
$a_3 := (-2,3,6)$
$a_4 := (-1,5,10)$
$a_5 := (4,1,2)$
$H := \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

Állapítsuk meg a $H \subset \mathbb{R}^3$ vektorhalmaz rangját! Most is alkalmazhatjuk a bázistranszformációs eljárást. Indulásként valamennyi vektor koordinátáit a kanonikus bázisra vonatkozóan ismerjük. Nézzük meg, hogy H elemeiből hányat tudunk a bázisba bevonni (azaz hány lineárisan független találunk közöttük)!

Az induló táblázat:

bázis	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
e_1	(1)	-3	-2	-1	4
e_2	2	1	3	5	1
e_3	4	2	6	10	2

Az e_1 vektort a_1-gyel kicserélve az alábbi táblázatot kapjuk:

bázis	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	-3	-2	-1	4
e_2	(7)	7	7	-7
e_3	14	14	14	-14

Ezután a_2-t bevonva e_2 helyére:

bázis	a_3	a_4	a_5
a_1	1	2	1
a_2	1	1	-1
e_3	0	0	0

e_3-t nem lehet a_3, a_4, a_5 egyikével sem kicserélni, mivel a megfelelő koordináta mindhárom esetben nulla.

A kapott táblázatot az alábbi módon értékelhetjük:

Az a_1, a_2, e_3 vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-ban, így a_1, a_2 lineárisan független, ezért $r(H) \geq 2$.

Az a_3, a_4 és a_5 vektorok mindegyike előállítható a_1 és a_2 lineáris kombinációjaként:

$a_3 = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2$
$a_4 = 2 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2$
$a_5 = 1 \cdot a_1 + (-1) a_2$

így az 1.11. állítás (2) része szerint $r(H) \leq 2$.
Vagyis $r(H) = 2$.

3. tétel

Altér, generátum, direkt összeg

1.20. Definíció.

Legyen $V \subset \mathbb{R}^n$, $V \neq \emptyset$.
V altér $\mathbb{R}^n$-ben, ha bármely $a,b \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $a+b \in V$ és $\lambda \cdot a \in V$ is teljesül (azaz V zárt a vektorműveletekre).

1.21. Megjegyzések.

(1) Könnyen megmutatható, hogy ha az $\mathbb{R}^n$-beli összeadást és skalárral való szorzást V-re leszűkítjük, az 1.4. Állításban szereplő (V1)-(V8) tulajdonságok a V altérben is teljesülnek.

(2) $V = \{o\}$ és $V = \mathbb{R}^n$ is altér, ezeket nem valódi altereknek nevezzük. $\mathbb{R}^n$ többi alterét (ha van) valódi altérnek hívjuk.

(3) Az 1.12. Definícióval analóg módon értelmezhető a $V \subset \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerének és bázisának fogalma is. Rögzített V altér bármely bázisának elemszáma megegyezik, ezt a számot a V altér dimenziójának nevezzük.
Nyilván $0 \leq \dim(V) \leq n$, és $\dim(V) = r(V)$.

Példák.

(1) $\mathbb{R}$-ben csak nem valódi alterek vannak.

(2) $\mathbb{R}^2$-ben alterek:
a./ $\{o\}$ /0-dimenziós altér/
b./ Legyen $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq o$.
$V := \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{R}\}$ /1-dimenziós altér, origón átmenő egyenes/
c./ $\mathbb{R}^2$ /2-dimenziós altér/ .

(3) $\mathbb{R}^3$-ban alterek:
a./ $\{o\}$ /0-dimenziós altér/
b./ Legyen $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq o$.
$V := \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{R}\}$ /1-dimenziós altér, origón átmenő egyenes/
c./ Legyen $v,w \in \mathbb{R}^3$, $v,w \neq o$, v és w nem skalárszorosai egymásnak.
$V := \{\lambda v+\mu w | \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$ /2-dimenziós altér, origón átmenő sík/
d./ $\mathbb{R}^3$ /3-dimenziós altér/.

1.22. Definíció.

Legyen $A,B \subset \mathbb{R}^n$. Az A és B vektorhalmazok összege:
$A+B := \{a+b | a \in A, b \in B\}$.

Megjegyzés.

Analóg módon véges sok halmaz összege is értelmezhető.

1.23. Állítás.

Ha $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ alterek, akkor $V_1 \cap V_2$ és V_1+V_2 is altér $\mathbb{R}^n$-ben.

Bizonyítás.

1./ Legyen $a,b \in V_1 \cap V_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Ekkor $a,b \in V_1$. V_1 altér, így $a+b \in V_1$, $\lambda a \in V_1$.
Hasonlóan: $a,b \in V_2$. V_2 altér, így $a+b \in V_2$, $\lambda a \in V_2$.
Így $a+b \in V_1 \cap V_2$, $\lambda a \in V_1 \cap V_2$, azaz $V_1 \cap V_2$ zárt a vektorműveletekre, így maga is altér.

2./ Legyen $x_1,x_2 \in V_1 + V_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor létezik $a_1,a_2 \in V_1$ és $b_1,b_2 \in V_2$, melyekre $x_1 = a_1+b_1$ és $x_2 = a_2+b_2$.
Ekkor $x_1+x_2 = a_1+a_2+b_1+b_2$ és $\lambda x_1 = \lambda a_1+\lambda b_1$.
Mivel V_1 és V_2 altér, ezért $a_1+a_2 \in V_1$, $b_1+b_2 \in V_2$,
így $x_1+x_2 \in V_1+V_2$.
Hasonlóan: $\lambda a_1 \in V_1$, $\lambda b_1 \in V_2$, így $\lambda x_1 \in V_1+V_2$.
Tehát V_1+V_2 is zárt a vektorműveletekre, azaz altér.

Megjegyzés.

$V_1 \cap V_2$ a V_1 és V_2 által tartalmazott alterek közül a legbővebb, míg V_1+V_2 a V_1-t és V_2-t tartalmazó alterek közül a legszűkebb.

1.24. Állítás.

Legyen $a_1,\dots,a_k \in \mathbb{R}^n$. Ekkor a

$$V := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i=1,\dots,k \right\}$$

halmaz altér $\mathbb{R}^n$-ben. Ez az altér az $a_1,\dots,a_k$ vektorokat tartalmazó alterek közül a legszűkebb.

Bizonyítás.

1./ V az $a_1,\dots,a_k$ vektorokból lineárisan kombinálható vektorokat tartalmazza. Legyen $x,y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$$
$$y = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_k a_k$$

Ekkor

$$x+y = (\alpha_1+\beta_1)a_1 + \dots + (\alpha_k+\beta_k)a_k$$
$$\lambda x = (\lambda\alpha_1)a_1 + \dots + (\lambda\alpha_k)a_k$$

Vagyis $x+y$ és λx is előáll az $a_1,\dots,a_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, tehát $x+y \in V$ és $\lambda x \in V$.

Így V zárt a vektorműveletekre, vagyis altér.

2./ V a legszűkebb $a_1,\dots,a_k$ -t tartalmazó altér:

Legyen X tetszőlegesen választott, $a_1,\dots,a_k$ -t tartalmazó altér. Mivel X zárt a vektorműveletekre, kell, hogy tartalmazza $a_1,\dots,a_k$ tetszőleges lineáris kombinációit is, így $V \subset X$.

Megjegyzés.

V -t az $a_1,\dots,a_k$ vektorok által generált altérnek, röviden $a_1,\dots,a_k$ generátumának (vagy lineáris lezártjának) nevezzük.

Jelölés: $\mathcal{L}(a_1,\dots,a_k)$.

1.25. Definíció.

$\mathbb{R}^n$ direkt összege a $V_1,V_2,\dots,V_k \subset \mathbb{R}^n$ altereknek, ha $\mathbb{R}^n$ minden vektora pontosan egyféleképpen állítható elő $v_1+v_2+\dots+v_k$ alakban ($v_i \in V_i$, $i=1,\dots,k$).

Jelölés: $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$.

1.26. Állítás.

$\mathbb{R}^n$ pontosan akkor direkt összege a $V_1,\dots,V_k$ altereknek, ha összege ezeknek, és ha bármely $i \in \underline{k}$ esetén $V_i \cap (V_1 + \dots + V_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_k) = \{o\}$.

Bizonyítás: k=2 -re, azaz: $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \iff \mathbb{R}^n = V_1+V_2$ és $V_1 \cap V_2 = \{o\}$.

1./ Tegyük fel, hogy $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$. Ekkor nyilvánvaló, hogy $\mathbb{R}^n = V_1+V_2$. Legyen $x \in V_1 \cap V_2$. Az $x = x+o$ ($x \in V_1$, $o \in V_2$) és az $x = o+x$ ($o \in V_1$, $x \in V_2$) felbontásokat tekintve, és felhasználva, hogy ha $\mathbb{R}^n$ direkt összege V_1-nek és V_2-nek, akkor x egyértelműen bontható fel V_1 és V_2-beli vektorok összegére, kapjuk, hogy $x=o$ kell hogy fennálljon. Így $V_1 \cap V_2 = \{o\}$.

2./ Tegyük fel, hogy $\mathbb{R}^n = V_1+V_2$ és $V_1 \cap V_2 = \{o\}$.
Ekkor bármely $x \in \mathbb{R}^n$ vektor felírható V_1 és V_2-beli vektorok összegeként. Tegyük fel, hogy ez két féle képpen is megtehető:

(1) $x = a_1+b_1$, $\quad a_1 \in V_1$, $b_1 \in V_2$

(2) $x = a_2+b_2$, $\quad a_2 \in V_1$, $b_2 \in V_2$.

(1)-ből (2)-t kivonva és rendezve:

$$\underbrace{a_1 - a_2}_{\in V_1} = \underbrace{b_2 - b_1}_{\in V_2} \in V_1 \cap V_2$$

A feltétel értelmében $V_1 \cap V_2 = \{o\}$, így $a_1-a_2 = o$, $b_2-b_1 = o \iff$
$\iff a_1=a_2$, $b_1=b_2$, azaz a két felbontás ugyanaz.
Így bármely $x \in \mathbb{R}^n$ vektor pontosan egyféleképpen bontható fel V_1 és V_2-beli vektorok összegére, azaz $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$.

1.27. Definíció.

(1) Legyen $a,v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq o$.
Az $\mathcal{L}(v) = \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{R}\}$ alteret origón átmenő, v irányvektorú egyenesnek, míg az $\{a\}+\mathcal{L}(v) = \{a+\lambda v | \lambda \in \mathbb{R}\}$ halmazt az "a" ponton átmenő, v irányvektorú egyenesnek hívjuk.

(2) Legyenek $v_1,\ldots,v_k \in \mathbb{R}^n$ lineárisan független vektorok.
Az $\mathcal{L}(v_1,\ldots,v_k) \subset \mathbb{R}^n$ alteret origón átmenő k-dimenziós hipersíknak hívjuk.
$a \in \mathbb{R}^n$ esetén az $\{a\} + \mathcal{L}(v_1,\ldots,v_k) \subset \mathbb{R}^n$ halmazt az "a" ponton átmenő, k-dimenziós hipersíknak nevezzük.

Példák.

(1) a./ Legyen $V_1 \subset \mathbb{R}^3$ origón átmenő sík, V_2 pedig origón átmenő egyenes, $V_2 \not\subset V_1$. Ekkor $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.
b./ Legyen $V_1, V_2, V_3 \subset \mathbb{R}^3$ három különböző origón átmenő egyenes.
Ekkor $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.

(2) $V_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \ z = 0\}$
/x-y koordinátasík/

$V_2 := \{\lambda\cdot(1,1,1) | \lambda \in \mathbb{R}\}$
/origón átmenő, (1,1,1) irányvektorú egyenes/.

V_1 és V_2 alterek $\mathbb{R}^3$-ban, és $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.

$b_1 := (1,0,0)$

$b_2 := (1,1,0)$

$B_1 = \{b_1,b_2\}$ bázis V_1-ben.

$b_3 := (1,1,1)$.

$B_2 = \{b_3\}$ bázis V_2-ben.
Ekkor $B = B_1 \cup B_2 = [b_1,b_2,b_3\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ban.
$v := (4,5,3)$
Bontsuk fel v -t V_1 és V_2-beli összetevőkre!
Ehhez először határozzuk meg v B-re vonatkozó koordinátáit!
$\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisának vektorait jelöljük e_1,e_2,e_3 -mal!

bázis	b_1	b_2	b_3	v
$e_1=b_1$	1	1	1	4
e_2	0	(1)	1	5
e_3	0	0	1	3

bázis	b_3	v
b_1	0	-1
b_2	1	5
e_3	(1)	3

bázis	v
b_1	-1
b_2	2
b_3	3

Tehát $v = -b_1 + 2b_2 + 3b_3$.
$x = -b_1 + 2b_2 = (1,2,0) \in V_1$
$y = 3b_3 = (3,3,3) \in V_2$.
Így v kívánt felbontása:
$v = x+y = (1,2,0) + (3,3,3)$.

Végül a fejezet végén lássuk az 1.11. Állítás (2) részének bizonyítását:
Legyen $V = \mathcal{L}(v_1,v_2,\ldots,v_r)$. Ekkor $H \subset V$.
A $G = \{v_1,v_2,\ldots,v_r\}$ halmaz nyilván generátorrendszere a V altérnek.
Így, ha $L \subset H$ lineárisan független vektorhalmaz, akkor $|L| \leq |G| = r$, amiből az állítás következik.

2. $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ TÍPUSÚ LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK, n x m -ES MÁTRIXOK

Lineáris leképezések, mátrixok 4. tétel

2.1. Definíció.

(1) Az $\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ típusú függvényt lineáris leképezésnek nevezzük, ha bármely $x,y \in \mathbb{R}^m$ vektorra és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárra

$\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$ (additivitás)

$\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \cdot \mathcal{A}(x)$ (homogenitás)

teljesül.

m=n esetben lineáris transzformációról beszélünk.

(2) Az $\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés magtere a $o \in \mathbb{R}^n$ vektor ősképe:

$\ker(\mathcal{A}) := \mathcal{A}^{-1}(o) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \mathcal{A}(x) = o\}$.

Az $\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés képtere:

$\mathrm{im}(\mathcal{A}) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in \mathbb{R}^m : \mathcal{A}(x) = y\}$.

2.2. Megjegyzések.

(1) Bármely $\mathcal{A}$ lineáris leképezésre: $\mathcal{A}(o) = o$, így $o \in \ker(\mathcal{A})$.

(2) Ha $\mathcal{A}$ lineáris, akkor az additivitásból és a homogenitásból adódóan:

$\mathcal{A}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 \mathcal{A}(v_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(v_2) + \ldots + \lambda_k \mathcal{A}(v_k)$.

(3) Bármely $H \subset \mathbb{R}^m$ és $K \subset \mathbb{R}^n$ alterek esetén

$\mathcal{A}(H)$ altér $\mathbb{R}^n$-ben

$\mathcal{A}^{-1}(K)$ altér $\mathbb{R}^m$-ben,

így speciálisan $\mathrm{im}(\mathcal{A})$ altere $\mathbb{R}^n$-nek, $\ker(\mathcal{A})$ altere $\mathbb{R}^m$-nek.

2.3. Állítás.

Legyen $\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ tetszőlegesen választott bázis $\mathbb{R}^m$-ben. $\mathcal{A}$-t egyértelműen meghatározzák a bázisvektorokon felvett értékei, azaz elegendő az $\mathcal{A}(e_1), \ldots, \mathcal{A}(e_m)$ képvektorokat ismernünk, hogy bármely $x \in \mathbb{R}^m$ esetén $\mathcal{A}(x)$-t meghatározhassuk.

Bizonyítás:

x előállítása az E bázison legyen a következő:

$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_m e_m$

$\mathcal{A}$ linearitása miatt

$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m) = \alpha_1 \mathcal{A}(e_1) + \ldots + \alpha_m \mathcal{A}(e_m)$.

2.4. Definíció.

(1) Az $f: \underline{n} \times \underline{m} \to \mathbb{R}$, $(i,j) \mapsto a_{ij}$ típusú függvényeket n x m -es mátrixoknak nevezzük és a következő módon jelöljük:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} = A = (a_{ij})$$

a_{ij}-t a mátrix (i,j) -dik elemének nevezzük.

A fenti elrendezést tekintve beszélünk mátrix sorairól ill. oszlopairól, adott sorban ill. oszlopban lévő elemeket tekintve mátrix sorvektoráról ill. oszlopvektoráról.

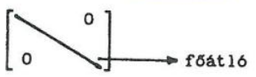
(2) Az n x 1 -es mátrixokat oszlopvektornak, az 1 x n -es mátrixokat sorvektornak is szokás nevezni.

(3) Az n x m -es A mátrix transzponáltján azt az m x n -es mátrixot értjük, melynek (j,i)-edik eleme az A mátrix (i,j)-edik elemével egyenlő.

Jelölés: A^T.

(4) Az n x n -es mátrixokat kvadratikus (négyzetes) mátrixoknak nevezzük.

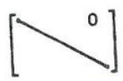
Az $A = (a_{ij})$ kvadratikus mátrix diagonális, ha $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$ -re.



Az $A = (a_{ij})$ kvadratikus mátrix felsőháromszög mátrix, ha $a_{ij} = 0$, $\forall i > j$ -re.



Az $A = (a_{ij})$ kvadratikus mátrix alsóháromszög mátrix, ha $a_{ij} = 0$, $\forall i < j$ -re.



Az $A = (a_{ij})$ kvadratikus mátrix szimmetrikus, ha $A = A^T$.

További speciális mátrixok:

Nullmátrix: olyan mátrix, melynek minden eleme 0.
Jelölés: 0.

Egységmátrix: olyan diagonális mátrix, melyre $a_{ii} = 1$, $i=1,\dots,n$. Jelölés: E.

Lineáris leképezés mátrixa

Legyen $\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés.
$E = \{e_1,\dots,e_m\}$ bázis $\mathbb{R}^m$-ben, $F = \{f_1,\dots,f_n\}$ bázis $\mathbb{R}^n$-ben. Legyen $x \in \mathbb{R}^m$, x előállítása az E bázison a következő: $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m$.
A 2.3. Állítás alapján láttuk, hogy $\mathcal{A}(x)$ meghatározható, ha ismerjük $\mathcal{A}(e_1)$-t, ..., $\mathcal{A}(e_m)$-t.

Kérdés: Hogyan kaphatjuk meg $\mathcal{A}(x)$ F-re vonatkozó koordinátáit, ha ismerjük $\mathcal{A}(e_1),\dots,\mathcal{A}(e_m)$ F-re vonatkozó koordinátáit, illetve x E -re vonatkozó koordinátáit?

$\mathcal{A}(e_1)$ előállítása az F bázison:
$$\mathcal{A}(e_1) = \alpha_{11}f_1 + \alpha_{21}f_2 + \dots + \alpha_{n1}f_n .$$
$\mathcal{A}(e_2)$ előállítása az F bázison:
$$\mathcal{A}(e_2) = \alpha_{12}f_1 + \alpha_{22}f_2 + \dots + \alpha_{n2}f_n .$$
$$\vdots$$
$\mathcal{A}(e_m)$ előállítása az F bázison:
$$\mathcal{A}(e_m) = \alpha_{1m}f_1 + \alpha_{2m}f_2 + \dots + \alpha_{nm}f_n .$$

Ekkor:
$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m) = \lambda_1\mathcal{A}(e_1) + \dots + \lambda_m\mathcal{A}(e_m) = \lambda_1(\alpha_{11}f_1 + \dots + \alpha_{n1}f_n) + \dots + \lambda_m(\alpha_{1m}f_1 + \dots + \alpha_{nm}f_n) =$$
$$= (\lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{12} + \dots + \lambda_m\alpha_{1m})f_1 + (\lambda_1\alpha_{21} + \lambda_2\alpha_{22} + \dots + \lambda_m\alpha_{2m})f_2 + \dots + (\lambda_1\alpha_{n1} + \lambda_2\alpha_{n2} + \dots + \lambda_m\alpha_{nm})f_n .$$

Célszerű a koordináták alábbi elrendezése:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}$$

↑ x E-re vonatkozó koordinátái
↑ $\mathcal{A}(e_m)$ F-re vonatkozó koordinátái
↑ $\mathcal{A}(e_2)$ F-re vonatkozó koordinátái
↑ $\mathcal{A}(e_1)$ F-re vonatkozó koordinátái

2.5. Definíció.
Legyen $\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés.
$E = \{e_1,\dots,e_m\} \subset \mathbb{R}^m$, $F = \{f_1,\dots,f_n\} \subset \mathbb{R}^n$ bázisok.

Az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés E-F bázisokra vonatkozó mátrixán azt az nxm -es mátrixot értjük, amelynek j -edik oszlopában az $\mathcal{A}(e_j) \in \mathbb{R}^n$ vektor F-re vonatkozó koordinátái találhatók. Jelölés: $M(\mathcal{A})$, A_{E-F}, A.

2.6. Megjegyzések.

(1) Másképpen fogalmazva: Az A_{E-F} mátrix α_{ij} eleme az $\mathcal{A}(e_j)$ vektor F bázisra vonatkozó i-dik koordinátája.

(2) Vegyük észre, hogy $\mathcal{A}(x)$ F-re vonatkozó i-edik koordinátáját úgy kaphatjuk meg, hogy az A_{E-F} mátrix i-edik sorában lévő elemeket az x E-re vonatkozó megfelelő koordinátáival összeszorozzuk és a kapott szorzatokat összeadjuk.

(3) Az $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció esetén, ugyanazt a B bázist rögzítve az értelmezési tartományban és a képelemek vektorterében, az A_{B-B} mátrixot röviden az $\mathcal{A}$ transzformáció B bázisra vonatkozó mátrixának nevezzük és A_B-vel jelöljük.

2.7. Definíció.

Legyen $x,y \in \mathbb{R}^n$. $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n)$.
Az x és y vektorok skaláris szorzatán az $x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \in \mathbb{R}$ számot értjük. Jelölés: $\langle x,y \rangle$.

2.8. Megjegyzés.

Eszerint az $\mathcal{A}(x)$ vektor F bázisra vonatkozó i-dik koordinátája az A_{E-F} mátrix i-edik sorának elemeiből felépülő vektornak és az x E-re vonatkozó koordinátáit tartalmazó vektornak a skaláris szorzata.

Példák.

1./ $\mathcal{A}$ legyen az az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú leképezés, amely egy $\mathbb{R}^3$-beli vektorhoz (helyvektor!) hozzárendeli annak az x-y síkra vonatkozó tükörképét, azaz $\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3) := (x_1,x_2,-x_3)$.

a./ Ellenőrizzük, hogy $\mathcal{A}$ lineáris!
Legyen $x = (x_1,x_2,x_3)$, $y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Ekkor
$\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}((x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3)) = (x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ -x_3-y_3)$
$\mathcal{A}(x)+\mathcal{A}(y) = \mathcal{A}(x_1,x_2,x_3) + \mathcal{A}(y_1,y_2,y_3) = (x_1,x_2,-x_3) +$
$+ (y_1,y_2,-y_3) = (x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ -x_3-y_3)$.
Így $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$.
$\mathcal{A}(\lambda x) = \mathcal{A}((\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)) = (\lambda x_1,\lambda x_2,-\lambda x_3)$
$\lambda\cdot\mathcal{A}(x) = \lambda\cdot\mathcal{A}((x_1,x_2,x_3)) = \lambda(x_1,x_2,-x_3) = (\lambda x_1,\lambda x_2,-\lambda x_3)$
Így $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda\cdot\mathcal{A}(x)$,
vagyis $\mathcal{A}$ valóban lineáris leképezés.

b./ Az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés magtere: $\ker(\mathcal{A}) = \{o\}$,
képtere: $\mathrm{im}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^3$.

c./ Adjuk meg az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés kanonikus bázisokra vonatkozó mátrixát!
Legyen $E = \{e_1,e_2,e_3\}$ a kanonikus bázis $\mathbb{R}^3$-ban.
$\mathcal{A}(e_1) = \mathcal{A}((1,0,0)) = (1,0,0)$

$\mathcal{A}(e_2) = \mathcal{A}((0,1,0)) = (0,1,0)$
$\mathcal{A}(e_3) = \mathcal{A}((0,0,1)) = (0,0,-1)$
Az $\mathcal{A}(e_1)$, $\mathcal{A}(e_2)$, $\mathcal{A}(e_3)$ képvektoroknak a kanonikus bázisra vonatkozó koordinátái éppen a megfelelő komponensekkel egyenlők, így a keresett mátrix:

$$A_{E-E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2./ $\mathcal{A}$ legyen az az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ típusú leképezés, amely egy $\mathbb{R}^2$-beli vektorhoz (helyvektor!) hozzárendeli annak x tengelyre eső vetületét, azaz $\mathcal{A}(x_1,x_2) := (x_1,0)$.

a./ Ellenőrizzük, hogy $\mathcal{A}$ lineáris!
Legyen $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Ekkor:
$\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}((x_1+y_1,\ x_2+y_2)) = (x_1+y_1,0)$
$\mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y) = \mathcal{A}((x_1,x_2)) + \mathcal{A}((y_1,y_2)) = (x_1,0) +$
$+ (y_1,0) = (x_1+y_1,0)$.
Így $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$
$\mathcal{A}(\lambda x) = \mathcal{A}((\lambda x_1,\lambda x_2)) = (\lambda x_1,0)$
$\lambda\cdot\mathcal{A}(x) = \lambda\cdot\mathcal{A}((x_1,x_2)) = \lambda\cdot(x_1,0) = (\lambda x_1,0)$
Így $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda\cdot\mathcal{A}(x)$.
Vagyis $\mathcal{A}$ valóban lineáris leképezés.

b./ Az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés magtere:
$\ker(\mathcal{A}) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\} = \{(0,x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$.
Az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés képtere:
$\mathrm{im}(\mathcal{A}) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\} = \{(x_1,0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$.

c./ Adjuk meg $\mathcal{A}$ kanonikus bázisokra vonatkozó mátrixát!
Legyen $E = \{e_1,e_2\}$ a kanonikus bázis $\mathbb{R}^2$-ben.
$\mathcal{A}(e_1) = \mathcal{A}((1,0)) = (1,0)$
$\mathcal{A}(e_2) = \mathcal{A}((0,1)) = (0,0)$.

Az $\mathcal{A}(e_1)$, $\mathcal{A}(e_2)$ képvektoroknak a kanonikus bázisra vonatkozó koordinátái éppen a megfelelő komponensekkel egyenlők, így a keresett mátrix:

$$A_{E-E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. tétel

Műveletek lineáris leképezésekkel, mátrixokkal

2.9. Definíció.

Legyenek $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ típusú leképezések, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ összegén a következő leképezést értjük:

$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(x) := \mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$-re.

Az $\mathcal{A}$ leképezés λ-szorosa:

$(\lambda \cdot \mathcal{A})(x) := \lambda \cdot \mathcal{A}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$-re.

2.10. Állítás.

Ha $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineárisak, $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ és $\lambda \cdot \mathcal{A}$ is lineáris leképezés.

Bizonyítás:

$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(x+y) = \mathcal{A}(x+y)+\mathcal{B}(x+y) = \mathcal{A}(x)+\mathcal{A}(y)+\mathcal{B}(x)+\mathcal{B}(y) =$
$= (\mathcal{A}+\mathcal{B})(x)+(\mathcal{A}+\mathcal{B})(y)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^m$ esetén.

$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\alpha x) = \mathcal{A}(\alpha x)+\mathcal{B}(\alpha x) = \alpha \cdot \mathcal{A}(x)+\alpha \cdot \mathcal{B}(x) = \alpha(\mathcal{A}(x)+\mathcal{B}(x)) =$
$= \alpha(\mathcal{A}+\mathcal{B})(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén.

$(\lambda\mathcal{A})(x+y) = \lambda \cdot \mathcal{A}(x+y) = \lambda(\mathcal{A}(x)+\mathcal{A}(y)) = \lambda \cdot \mathcal{A}(x)+\lambda \cdot \mathcal{A}(y) =$
$= (\lambda\mathcal{A})(x)+(\lambda\mathcal{A})(y)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^m$ esetén.

$(\lambda\mathcal{A})(\alpha x) = \lambda \cdot \mathcal{A}(\alpha x) = \lambda \cdot \alpha \cdot \mathcal{A}(x) = \alpha \cdot (\lambda\mathcal{A})(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén.

2.11. Állítás.

Legyenek $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineárisak, $\lambda \in \mathbb{R}$.
$E = \{e_1,\dots,e_m\} \subset \mathbb{R}^m$, $F = \{f_1,\dots,f_n\} \subset \mathbb{R}^n$ bázisok.

Jelölje az $\mathcal{A}$ ill. a $\mathcal{B}$ lineáris leképezés E-F bázisokra vonatkozó mátrixait $M(\mathcal{A}) = (\alpha_{ij})$ ill. $M(\mathcal{B}) = (\beta_{ij})$. Ekkor az $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ lineáris leképezés E-F bázisokra vonatkozó mátrixa:

$$M(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = (\alpha_{ij}+\beta_{ij})$$

illetve a $\lambda\mathcal{A}$ lineáris leképezés E-F bázisokra vonatkozó mátrixa:

$$M(\lambda\mathcal{A}) = (\lambda\alpha_{ij}).$$

Bizonyítás:

Az $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ lineáris leképezés mátrixának i-edik sorában, j-edik oszlopában az $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(e_j)$ vektor F-re vonatkozó i-edik koordinátája található:
$((\mathcal{A}+\mathcal{B})(e_j))_i = (\mathcal{A}(e_j) + \mathcal{B}(e_j))_i = (\mathcal{A}(e_j))_i + (\mathcal{B}(e_j))_i = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$.
A $\lambda\mathcal{A}$ lineáris leképezés mátrixának i-edik sorában, j-edik oszlopában a $(\lambda\mathcal{A})(e_j)$ vektor F-re vonatkozó i-edik koordinátája található:

$$((\lambda\mathcal{A})(e_j))_i = (\lambda\mathcal{A}(e_j))_i = \lambda(\mathcal{A}(e_j))_i = \lambda \cdot \alpha_{ij}$$

A fenti állítás indokolja az alábbi mátrixműveletek bevezetését:

2.12. Definíció.

Ha A és B n×m -es mátrixok, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

A és B összegén az

$A + B := (a_{ij}+b_{ij})$ mátrixot,

az A mátrix λ-szorosán a

$\lambda A := (\lambda a_{ij})$ mátrixot értjük.

2.13. Megjegyzés.

A 2.11. Állítás és a 2.12. Definíció szerint

$M(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = M(\mathcal{A}) + M(\mathcal{B})$,

$M(\lambda\mathcal{A}) = \lambda \cdot M(\mathcal{A})$.

2.14. Állítás.

Legyenek $\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}: \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezések. Ekkor az $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^n$ leképezés lineáris.

Bizonyítás:

A fenti típusú lineáris leképezéseknek létezik a jelzett összetétele.

$(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(x+y) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x+y)) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x)+\mathcal{B}(y)) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x))+$
$+ \mathcal{A}(\mathcal{B}(y)) = (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(x)+(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(y), \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^\ell$ esetén.

$(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(\lambda x) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\lambda x)) = \mathcal{A}(\lambda\mathcal{B}(x)) = \lambda \cdot \mathcal{A}(\mathcal{B}(x)) =$
$= \lambda \cdot (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^\ell, \ \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

A továbbiakban legyenek $G = \{g_1,\dots,g_\ell\} \subset \mathbb{R}^\ell$, $E = \{e_1,\dots,e_m\} \subset \mathbb{R}^m$, $F = \{f_1,\dots,f_n\} \subset \mathbb{R}^n$ bázisok. Az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés E-F bázisokra vonatkozó mátrixa legyen $M(\mathcal{A}) = (\alpha_{ij})$ /nxm -es mátrix/. A $\mathcal{B}$ lineáris leképezés G-E bázisokra vonatkozó mátrixa legyen $M(\mathcal{B}) = (\beta_{jk})$ /mxℓ -es mátrix/.

Kérdés: Mi lesz az $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ lineáris leképezés G-F bázisokra vonatkozó mátrixa? $M(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) = ?$

$$M(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) = (((\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(g_k))_i) = ((\mathcal{A}(\mathcal{B}(g_k)))_i)$$

A 2.8. Megjegyzés alapján az $\mathcal{A}(\mathcal{B}(g_k))$ vektor F bázisra vonatkozó i-edik koordinátája az $M(\mathcal{A})$ mátrix i-edik sorvektorának és a $\mathcal{B}(g_k)$ vektor E bázisra vonatkozó koordinátáiból álló vektornak - ez éppen az $M(\mathcal{B})$ mátrix k-adik oszlopvektora - a skaláris szorzata. Vagyis: az $M(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})$ mátrix (i,k)-adik eleme nem más, mint az $M(\mathcal{A})$ mátrix i-edik sorvektorának és az $M(\mathcal{B})$ mátrix k- adik oszlopvektorának a skaláris szorzata.
Ennek alapján indokolt az alábbi definíció bevezetése:

2.15. Definíció.

Legyen $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\cdot 1} \\ \vdots \\ a_{n} \end{bmatrix}$ nxm -es,

$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1\ell} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \dots & b_{m\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_\ell \end{bmatrix}$ mxℓ -es mátrix.

Az A és B mátrixok szorzatán az

$A \cdot B := (\langle a_i, b_k \rangle) = \left[\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \right]$ nxℓ -es mátrixot értjük.

Példa.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

Végezzük el az alábbi mátrix műveleteket!

2A - B , A · C , C · A

$2A - B = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 4 & 10 & 8 \\ -6 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 10 \\ -10 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

A · C nem létezik.

$C \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 25 & 19 \\ 12 & 30 & 24 \end{bmatrix}$

2.16. Megjegyzések.

(1) A fentiek alapján $M(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) = M(\mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{B})$.

(2) Ha adott az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés E-F bázisokra vonatkozó mátrixa (ld. a 2.5. Definíció jelöléseit), akkor bármely $x \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén $\mathcal{A}(x)$ F-re vonatkozó koordinátáit (oszlopvektorként, azaz $n \times 1$ -es mátrixként felírva) megkaphatjuk, ha az $\mathcal{A}$ mátrixát összeszorozzuk az x vektor E bázisra vonatkozó koordinátáit tartalmazó oszlopvektorral.

(3) Egy $m \times n$ -es A mátrixnak és egy $n \times 1$ -es x oszlopvektornak a szorzata nem más, mint A oszlopvektorainak x elemeivel vett lineáris kombinációja (oszlopvektorként felírva):

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \cdot a_1 + \dots + x_n \cdot a_n .$$

Példák.

1./ Az $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés értékeit ismerjük $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisának bázisvektorain:

$\mathcal{A}((1,0,0)) := (1,2)$

$\mathcal{A}((0,1,0)) := (1,0)$

$\mathcal{A}((0,0,1)) := (0,-1)$

a./ Adjuk meg $\mathcal{A}((x,y,z))$ -t:

$\mathcal{A}((x,y,z)) = x \cdot \mathcal{A}((1,0,0)) + y \cdot \mathcal{A}((0,1,0)) + z \cdot \mathcal{A}((0,0,1)) =$

$= x(1,2) + y(1,0) + z(0,-1) = (x+y,\ 2x-z)$

b./ B_1 legyen $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisa.

$B_2 := \{(-1,0),\ (1,1)\}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben.

Határozzuk meg az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés B_1-B_2 bázisokra vonatkozó mátrixát! Az $A_{B_1-B_2}$ mátrix oszlopvektorai az $\mathcal{A}((1,0,0))$, $\mathcal{A}((0,1,0))$, $\mathcal{A}((0,0,1))$ képvektorok B_2-re vonatkozó koordinátái. Ezeket bázistranszformációval határozhatjuk meg. Jelölje e_1 és e_2 $\mathbb{R}^2$ kanonikus bázisának elemeit, míg b_1 és b_2 a B_2 bázis vektorait.

Az induló táblázat:

bázis	b_1	b_2	a_1	a_2	a_3
e_1	(-1)	1	1	1	0
e_2	0	1	2	0	-1

(a_1, a_2, a_3-mal a B_1-beli bázisvektorok képét jelöltük.)

Két transzformációs lépést végrehajtva:

bázis	b_2	a_1	a_2	a_3
b_1	-1	-1	-1	0
e_2	(1)	2	0	-1

bázis	a_1	a_2	a_3
b_1	1	-1	-1
b_2	2	0	-1

Így

$$A_{B_1-B_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

c./ Adjuk meg az $y = \mathcal{A}((1,1,1))$ vektor B_2-re vonatkozó koordinátáit!

$$y_{B_2} = A_{B_1-B_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Az (1,1,1) vektor B_1-re vonatkozó koordinátái a komponenseivel egyenlők.)

2./ Tekintsük az $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \mapsto (y, -2x, x-y)$ lineáris leképezést.

a./ Adjuk meg az $\mathcal{A}$ leképezés kanonikus bázisokra vonatkozó mátrixát!

$\mathcal{A}(1,0) = (0,-2,1)$

$\mathcal{A}(0,1) = (1,0,-1)$

Így a kanonikus bázisokra vonatkozó mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b./ $B_1 := \{(1,1),\ (0,-1)\}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben

$B_2 := \{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,0)\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ban.

$x := (3,1)$

Adjuk meg az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés B_1-B_2 bázisokra vonatkozó mátrixát és határozzuk meg az $\mathcal{A}(x)$ B_2-re vonatkozó koordinátáit!
Jelölje b_1, b_2 a B_1-beli bázisvektorokat! Először számoljuk ki az $\mathcal{A}(b_1)$, $\mathcal{A}(b_2)$, $\mathcal{A}(x)$ vektorok kanonikus bázisra vonatkozó koordinátáit!

$$\mathcal{A}(b_1) = A \cdot b_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}(b_2) = A \cdot b_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}(x) = A \cdot x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Az $\mathcal{A}(b_1)$, $\mathcal{A}(b_2)$, $\mathcal{A}(x)$ vektorok B_2-re vonatkozó koordinátáit bázistranszformációval határozhatjuk meg.
Jelölje e_1, e_2, e_3 az $\mathbb{R}^3$-beli kanonikus bázis elemeit, c_1, c_2, c_3 pedig a B_2 bázis elemeit.
Az induló táblázat:

bázis	c_1	c_2	c_3	$\mathcal{A}(b_1)$	$\mathcal{A}(b_2)$	$\mathcal{A}(x)$
$c_3=e_1$	1	1	1	1	-1	1
e_2	1	(1)	0	-2	0	-6
e_3	1	0	0	0	1	2

Két transzformációt végrehajtva:

bázis	c_1	$\mathcal{A}(b_1)$	$\mathcal{A}(b_2)$	$\mathcal{A}(x)$
c_3	0	3	-1	7
c_2	1	-2	0	-6
e_3	(1)	0	1	2

bázis	$\mathcal{A}(b_1)$	$\mathcal{A}(b_2)$	$\mathcal{A}(x)$
c_3	3	-1	7
c_2	-2	-1	-8
c_1	0	1	2

Tehát az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés B_1-B_2 bázisokra vonatkozó mátrixa:

$$A_{B_1\text{-}B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathcal{A}(x)$ vektor B_2-re vonatkozó koordinátái:

$$\mathcal{A}(x)_{B_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Megjegyezzük, hogy az $\mathcal{A}(x)$ vektor B_2-re vonatkozó koordinátáit úgy is megkaphatjuk, ha az $A_{B_1\text{-}B_2}$ mátrixot megszorozzuk az x vektor B_1-re vonatkozó koordinátáit tartalmazó oszlopvektorral. Mivel $x = 3b_1+2b_2$, így $x_{B_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, tehát

$$\mathcal{A}(x)_{B_2} = A_{B_1\text{-}B_2} \cdot x_{B_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

2.17. Állítás.

Legyen $A = (a_{ij})$ $n \times m$ -es mátrix. Legyenek $E \subset \mathbb{R}^m$ és $F \subset \mathbb{R}^n$ bázisok. Tekintsük azt az $\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ leképezést, amely az $x \in \mathbb{R}^m$ vektorhoz (x E-re vonatkozó i-edik koordinátáját α_i-vel jelöljük) hozzárendeli azt a $z \in \mathbb{R}^n$ vektort (z F-re vonatkozó j-edik koordinátáját γ_j-vel jelöljük), hogy

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$ teljesüljön.

Ekkor $\mathcal{A}$ lineáris, és az $\mathcal{A}$ lineáris leképezésnek az E-F bázisokra vonatkozó mátrixa éppen A.

Bizonyítás:

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$, $x,y \in \mathbb{R}^m$ tetszőlegesen választott. x és y E-re vonatkozó koordinátáit jelöljük α_i-vel és β_i-vel /i=1,...,m/. Ekkor az $x+y$ vektor E-re vonatkozó koordinátái $\alpha_i+\beta_i$, a λx vektor E-re vonatkozó koordinátái pedig $\lambda\alpha_i$ /i=1,...,m/.

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy

$$A\begin{bmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_m+\beta_m\end{bmatrix} = A\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix} + A\cdot\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{bmatrix}, \qquad \text{és}$$

$$A\begin{bmatrix}\lambda\alpha_1\\ \vdots\\ \lambda\alpha_m\end{bmatrix} = \lambda\cdot A\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}.$$

így az $\mathcal{A}(x+y)$ vektor F-re vonatkozó koordinátái egyenlőek az $\mathcal{A}(x)+\mathcal{A}(y)$ vektor F-re vonatkozó koordinátáival, ezért $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$, illetve az $\mathcal{A}(\lambda x)$ vektor F-re vonatkozó koordinátái egyenlőek a $\lambda\mathcal{A}(x)$ vektor F-re vonatkozó koordinátáival, ezért $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda\cdot\mathcal{A}(x)$. Tehát $\mathcal{A}$ lineáris.

Legyen e_k az E bázis k-dik bázisvektora. Ekkor e_k E-re vonatkozó koordinátái: $0,0,\dots,\underset{\uparrow}{1},0,\dots,0$.

k-adik

Mivel

$$A\cdot\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{1k}\\ \vdots\\ a_{nk}\end{bmatrix},$$ ezért az $\mathcal{A}(e_k)$ vektor F bázisra

vonatkozó koordinátái éppen az A mátrix k-adik oszlopában álló elemek, azaz az $\mathcal{A}$ leképezés E-F bázisokra vonatkozó mátrixa éppen A.

2.18. Megjegyzések.

(1) A 2.5. Definíció és a 2.17. Állítás alapján az $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ típusú lineáris leképezések és az n×m -es mátrixok között (az $E \subset \mathbb{R}^m$, $F \subset \mathbb{R}^n$ bázisok rögzítése után) kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

(2) Láttuk, hogy lineáris leképezések összegéhez (lll. lineáris leképezés skalárszorosához) tartozó mátrix éppen a leképezések mátrixainak összege (a leképezés mátrixának skalárszorosa). Lineáris leképezések kompozíciójának mátrixa pedig a leképezések mátrixainak szorzatával egyenlő (ld. a 2.13. és a 2.16. (1) Megjegyzéseket). Ezen állítások fordítottja is igaz.
Két azonos méretű mátrix összegéhez rendelt lineáris leképezés a mátrixokhoz tartozó lineráis leképezések összege, mátrix skalárszorosához rendelt lineáris leképezés a mátrixhoz tartozó lineáris leképezés skalárszorosa, illetve két mátrix szorzatához rendelt lineáris leképezés a mátrixokhoz tartozó lineáris leképezések kompozíciója.

(3) A (2) megjegyzésből következik, hogy a lineáris leképezések közötti műveletek tulajdonságai igazak a megfelelő mátrixműveletekre is.
Néhány példa:

(i) Leképezések közötti összeadás kommutatív és asszociatív, ugyanez igaz a mátrixok összeadására:
Ha A,B,C azonos méretű mátrixok, akkor
A+B = B+A kommutatív
(A+B)+C = A+(B+C) asszociatív

(ii) Leképezések kompozíciója mint művelet nem kommutatív, így a mátrixszorzás sem kommutatív, általában $A\cdot B \neq B\cdot A$.

(iii) Leképezések kompozíciója asszociatív, azaz ha az $\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}\circ\mathcal{C})$ összetétel létezik, akkor az $(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})\circ\mathcal{C}$ is létezik, és $\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}\circ\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\circ\mathcal{B})\circ\mathcal{C}$.
Így a mátrixszorzás is asszociatív, ha az A(BC) szorzat létezik, akkor az (AB)C szorzat is létezik és A(BC) = (AB)C.

(iv) Érdekes megjegyezni, hogy a mátrixszorzás nullosztós művelet, azaz léteznek olyan A,B nem nullmátrixok, melyekre $A \cdot B = 0$.

Pl.:
$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Példák. Speciális lineáris leképezések és mátrixaik

(1) identikus leképezés

$id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n , \quad x \mapsto x$

Bármely $B \subset \mathbb{R}^n$ bázisra vonatkozó mátrixa (ld. 2.6. (3) Megjegyzést): $M(id_{\mathbb{R}^n}) = E$.

(2) k-adik projekció (vetítő) függvény

$pr_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1,\dots,x_k,\dots,x_n) \mapsto x_k$

A kanonikus bázisokra vonatkozó mátrixa:

$M(pr_k) = [0,\dots,0,\underset{\uparrow}{1},0,\dots,0]$

k-adik

(3) k-adik injekció (beágyazás) függvény

$in_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (0,\dots,0,\underset{\uparrow}{x},0,\dots,0)$

k-adik

A kanonikus bázisokra vonatkozó mátrixa:

$$M(in_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \to \text{k-adik}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a fenti leképezések között fennáll az alábbi kapcsolat:

$$id_{\mathbb{R}^n} = in_1 \circ pr_1 + in_2 \circ pr_2 + \dots + in_n \circ pr_n$$

6. tétel

Lineáris leképezés és mátrix rangja

2.19. Definíció.

Az $\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés rangján a képtér dimenzióját értjük:

$$r(\mathcal{A}) := \dim(\mathrm{im}(\mathcal{A})).$$

2.20. Definíció.

Az A nxm -es mátrix rangján az A mátrix oszlopvektoraiból álló vektorhalmaz rangját értjük. Jelölés: r(A).

2.21. Állítás.

Legyen az $\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés valamely rögzített bázisokra vonatkozó mátrixa A. Ekkor $r(\mathcal{A}) = r(A)$.

Bizonyítás:

Az $\mathbb{R}^m$ -ben rögzített bázis elemeit jelöljük $e_1,\dots,e_m$-mel! Láttuk, hogy az $\mathcal{A}(e_1),\dots,\mathcal{A}(e_m)$ vektorok - amiknek az $\mathbb{R}^n$-beli bázisra vonatkozó koordinátáiból épülnek fel A oszlopvektorai - az $\mathcal{A}$ leképezés képterét generálják. Ezért ezeknek egy maximális lineárisan független részhalmaza bázisa $\mathrm{im}(\mathcal{A})$-nak. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy $\mathrm{im}(\mathcal{A})$ dimenziója megegyezik A oszlopvektorainak rangjával, azaz $r(\mathcal{A}) = r(A)$.

Megjegyzés.

Ugyanazon lineáris leképezés különböző bázisokhoz tartozó mátrixainak rangja azonos.

2.22. Állítás.

Bármely mátrixban a mátrix oszlopvektorainak a rangja megegyezik a sorvektorok rangjával, így

$$r(A) = r(A^T).$$

(nem bizonyítjuk.)

Lineáris transzformáció és kvadratikus mátrix inverze

2.23. Állítás.

Az $\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés pontosan akkor injektív, ha $\ker(\mathcal{A}) = \{o\}$.

Bizonyítás:

1./ Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ injektív. Ekkor egyetlen vektor lehet csak $\mathbb{R}^m$-ben, amelyhez $\mathcal{A}$ o-t rendel, ez pedig $\mathbb{R}^m$ nulleleme. Vagyis $\ker(\mathcal{A}) = \{o\}$.

2./ Tegyük fel, hogy $\ker(\mathcal{A}) = \{o\}$.
Legyen $x,y \in \mathbb{R}^m$, melyre $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y)$. Ekkor $\mathcal{A}(x)-\mathcal{A}(y) = \mathcal{A}(x-y) = o$.
A feltétel miatt $x-y = o$, így $x = y$, azaz $\mathcal{A}$ injektív.

2.24. Állítás.

Legyen $\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ injektív lineáris leképezés, $L = \{a_1,\dots,a_k\} \subset \mathbb{R}^m$ lineárisan független vektorhalmaz. Ekkor az $L' = \{\mathcal{A}(a_1),\dots,\mathcal{A}(a_k)\}$ vektorhalmaz lineárisan független $\mathbb{R}^n$ -ben.
(Injektív lineáris leképezés lineárisan független vektorhalmazt lineárisan független vektorhalmazba visz át.)

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathcal{A}(a_i) = o$. Ekkor $\mathcal{A}$ linearitása miatt:

$$o = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathcal{A}(a_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{A}(\lambda_i a_i) = \mathcal{A}\left[\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i\right].$$

Mivel $\mathcal{A}$ injektív, így $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = o$ kell hogy teljesüljön, ami az $L = \{a_1,\dots,a_k\}$ vektorhalmaz függetlensége miatt $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ -t eredményez, így az $L' = \{\mathcal{A}(a_1),\dots,\mathcal{A}(a_k)\}$ vektorhalmaz is lineárisan független.

2.25. Állítás.

Legyen az $\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés ráképezés ($\mathrm{im}(\mathcal{A})=\mathbb{R}^n$), továbbá $G=\{a_1,\dots,a_k\}$ generátorrendszer $\mathbb{R}^m$ -ben. Ekkor a $G' = \{\mathcal{A}(a_1),\dots,\mathcal{A}(a_k)\}$ vektorhalmaz generátorrendszer $\mathbb{R}^n$ -ben.
(Ha egy lineáris leképezés ráképezés, akkor generátorrendszert generátorrendszerbe visz át.)

Bizonyítás:

Mivel $\mathcal{A}$ ráképezés, bármely $y \in \mathbb{R}^n$ esetén létezik olyan $x \in \mathbb{R}^m$, hogy $\mathcal{A}(x) = y$ fennálljon. x előállítható G -beli elemek lineáris kombinációjával: $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$.

Ekkor $y = \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{A}(\lambda_i a_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathcal{A}(a_i)$, vagyis G' generálja y -t, bármely $y \in \mathbb{R}^n$ esetén. Így G' generátorrendszer $\mathbb{R}^n$ -ben.

2.26. Következmény.

A 2.24. és 2.25. Állítások alapján lineáris bijekció bázist bázisba visz át.

2.27. Megjegyzések.

(1) Ha az $\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés injektív, akkor $\mathcal{A}$ $\mathbb{R}^m$ bázisát is lineárisan független vektorhalmazba viszi át, amiből következik, hogy $n \geq m$ kell hogy fennálljon.
Speciálisan: az $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció pontosan akkor injektív, ha $\dim(\mathrm{im}(\mathcal{A})) = n$, azaz ha $\mathcal{A}$ ráképezés.
Így az $\mathcal{A}$ lineáris transzformációra az alábbi állítások ekvivalensek:

(i) $\mathcal{A}$ injektív
(ii) $\mathcal{A}$ ráképezés
(iii) $\mathcal{A}$ bijekció.

(2) Ha az $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció injektív, akkor az inverze is $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ típusú lineáris transzformáció.

(3) Ha az $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció injektív, akkor (mivel $\mathcal{A}$ ráképezés is):

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n},$$

ahol $\mathcal{A}^{-1}$ az $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció inverzét jelöli.
Innen rögtön kapjuk, hogy $\mathcal{A}$ és $\mathcal{A}^{-1}$ rögzített bázisra vonatkozó mátrixai között az alábbi kapcsolat áll fenn:

$$M(\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^{-1}) = M(\mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}^{-1}) = M(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) = E$$
$$M(\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A}) = M(\mathcal{A}^{-1}) \cdot M(\mathcal{A}) = M(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) = E$$

(Ugyanazt a bázist rögzítettük $\mathrm{dom}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^n$-ben és $\mathrm{im}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^n$-ben!)

2.28. Állítás.

Legyen A nxn -es kvadratikus mátrix. Ha a B és C nxn -es mátrixokra fennáll, hogy

$$A \cdot B = C \cdot A = E, \quad \text{akkor} \quad B = C.$$

Bizonyítás:

Az $A \cdot B = C \cdot A = E$ egyenlőséget felhasználva:

$$B = E \cdot B = (CA)B = C(AB) = C \cdot E = C$$

2.29. Definíció.

Az A nxn -es kvadratikus mátrixot invertálhatónak nevezzük, ha létezik olyan A^{-1}-el jelölt nxn -es mátrix, hogy

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Ekkor A^{-1} -t az A mátrix inverzének nevezzük.

2.30. Megjegyzések.

(1) A korábbiak alapján nyilvánvaló, hogy ha az $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció invertálható, akkor

$$M(\mathcal{A}^{-1}) = (M(\mathcal{A}))^{-1}.$$

(2) Mivel lineáris transzformációk és kvadratikus mátrixok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létezik, így ha az A nxn -es mátrix invertálható, akkor a hozzá rendelhető $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció (ld. 2.17. Állítás) is invertálható.

(3) Egy A nxn -es kvadratikus mátrix pontosan akkor invertálható, ha $r(A) = n$.

(4) Tudjuk, ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ invertálható, $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ létezik, akkor $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ is invertálható, és

$$(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})^{-1} = \mathcal{B}^{-1} \circ \mathcal{A}^{-1}.$$

Így mátrixokra is igaz az alábbi állítás:
Ha az A és B nxn -es mátrixok invertálhatóak, akkor $A \cdot B$ is invertálható, és

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Mátrix inverzének a meghatározása:

Jelöljük az $A = [a_1 \dots a_n]$ $n \times n$ -es invertálható mátrix keresett inverzét $B = [b_1 \dots b_n]$ -vel. Ekkor $A \cdot B = E$, azaz

$$A \cdot [b_1 \dots b_n] = [e_1 \dots e_n],$$

ami az $Ab_1 = e_1$, $Ab_2 = e_2, \dots, Ab_n = e_n$ egyenlőségeket jelenti.

Vagyis az inverz mátrix i-edik oszlopvektora (b_i) a kanonikus bázis i-edik bázisvektorának (e_i-nek) az $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$ bázisra vonatkozó koordinátáit tartalmazza.
(Az $a_1, \dots, a_n$ vektorok valóban bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben, mert A invertálhatósága esetén $r(A) = n$.)
Ezeket a koordinátákat bázistranszformációval meghatározhatjuk.

Példa.

Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét!

Jelöljük a_1, a_2, a_3-mal A oszlopvektorait, e_1, e_2, e_3-mal a kanonikus bázis vektorait.
Induláskor ismerjük az a_1, a_2, a_3 vektorok e_1, e_2, e_3 bázisvektorokra vonatkozó koordinátáit, meg kell határoznunk az e_1, e_2, e_3 vektorok a_1, a_2, a_3 vektorokra vonatkozó koordinátáit.

Az induló táblázat:

bázis	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
e_1	(1)	2	3	1	0	0
e_2	2	4	5	0	1	0
e_3	3	5	6	0	0	1

Sorra bevonva A oszlopvektorait a bázisba:

bázis	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
a_1	2	3	1	0	0
e_2	0	-1	-2	1	0
e_3	-1	(-3)	-3	0	1

bázis	a_2	e_1	e_2	e_3
a_1	1	-2	0	1
e_2	(1/3)	-1	1	-1/3
a_3	1/3	1	0	-1/3

bázis	e_1	e_2	e_3
a_1	1	-3	2
a_2	-3	3	-1
a_3	2	-1	0

Így az A mátrix inverze:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: Tetszőleges kvadratikus mátrixból indulva ha a teljes transzformáció nem hajtható végre, akkor a mátrix nem invertálható. ($r(A) < n$).

Áttérés új bázisra

2.31. I. Probléma:

Legyen $\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, E_1 és E_2 bázisok $\mathbb{R}^m$-ben, F_1 és F_2 bázisok $\mathbb{R}^n$-ben.

Kérdés: Ha ismerjük az $\mathcal{A}$ leképezés E_1-F_1 bázisokra vonatkozó mátrixát ($A_{E_1-F_1}$), hogyan kaphatjuk meg ebből az $\mathcal{A}$ leképezés E_2-F_2 bázisokra vonatkozó mátrixát ($A_{E_2-F_2}$)?

Nyilván igaz az $\mathcal{A} = id_{\mathbb{R}^n} \circ \mathcal{A} \circ id_{\mathbb{R}^m}$ egyenlőség, így a megfelelő bázisok rögzítése után $M(\mathcal{A}) = M(id_{\mathbb{R}^n}) \cdot M(\mathcal{A}) \cdot M(id_{\mathbb{R}^m})$ áll fenn.

$$\mathbb{R}^m_{E_2} \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^m}} \mathbb{R}^m_{E_1} \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathbb{R}^n_{F_1} \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^n}} \mathbb{R}^n_{F_2}$$

Rögzítsük most számunkra célszerűen a fenti ábrának megfelelően az egyes terekben a bázisokat.

$id_{\mathbb{R}^n}$ F_1-F_2 bázisokra vonatkozó mátrixát jelöljük X-szel. Ennek oszlopvektorai az F_1 bázis bázisvektorainak F_2-re vonatkozó koordinátáiból állnak.

$id_{\mathbb{R}^m}$ E_2-E_1 bázisokra vonatkozó mátrixát jelöljük Y-nal. Ennek oszlopvektorai az E_2 bázis bázisvektorainak E_1-re vonatkozó koordinátáiból állnak.

Így az $\mathcal{A}$ leképezés E_2-F_2 bázisokra vonatkozó mátrixát az alábbi módon kaphatjuk:

$$A_{E_2-F_2} = X \cdot A_{E_1-F_1} \cdot Y$$

2.32. II. Probléma:

Legyen $\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció, E és F bázisok $\mathbb{R}^n$-ben.

Kérdés: Ha ismerjük az $\mathcal{A}$ transzformáció E bázisra vonatkozó mátrixát (A_{E-E}), hogyan kaphatjuk meg ebből az F bázisra vonatkozó mátrixot (A_{F-F})?

Hasonlóan az előbbiekhez, nyilván igaz az $\mathcal{A} = id_{\mathbb{R}^n} \circ \mathcal{A} \circ id_{\mathbb{R}^n}$ egyenlőség, így a megfelelő bázisok rögzítése után $M(\mathcal{A}) = M(id_{\mathbb{R}^n}) \cdot M(\mathcal{A}) \cdot M(id_{\mathbb{R}^n})$ áll fenn.

$$\mathbb{R}^n_{F} \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^n}} \mathbb{R}^n_{E} \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathbb{R}^n_{E} \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^n}} \mathbb{R}^n_{F}$$

A fenti ábrának megfelelően rögzítsük a bázisokat az egyes terekben.

$id_{\mathbb{R}^n}$ F-E bázisokra vonatkozó mátrixát jelöljük X-szel. Ennek oszlopvektorai az F bázis bázisvektorainak E-re vonatkozó koordinátáiból állnak.

$id_{\mathbb{R}^n}$ E-F bázisokra vonatkozó mátrixát jelöljük Y-nal. Ennek oszlopvektorai az E bázis bázisvektorainak F-re vonatkozó koordinátáiból állnak. Nyilván $Y = X^{-1}$.

Így az $\mathcal{A}$ transzformáció F bázisra vonatkozó mátrixát az alábbi módon kaphatjuk:

$$A_{F-F} = X^{-1} \cdot A_{E-E} \cdot X$$

Példák.

(1) Legyen az $\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ típusú lineáris leképezés kanonikus bázisokra vonatkozó mátrixa

$$A_{E_1-F_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(E_1 jelöli $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisát, F_1 jelöli $\mathbb{R}^2$ kanonikus bázisát.)
$E_2 := \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ban
$F_2 := \{(1,1), (1,0)\}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben.

Határozzuk meg az $\mathcal{A}$ leképezés E_2-F_2 bázisokra vonatkozó mátrixát!
Határozzuk meg először $id_{\mathbb{R}^2}$ F_1-F_2 bázisokra vonatkozó mátrixát. Ehhez ismernünk kell az F_1 bázis vektorainak F_2-re vonatkozó koordinátáit:

bázis	a_1	$a_2=e_1$	e_2
$a_2=e_1$	1	1	0
e_2	(1)	0	1

bázis	e_1	e_2
a_2	1	-1
a_1	0	1

(e_1, e_2 az F_1 elemeit, a_1, a_2 az F_2 elemeit jelöli.)
A keresett mátrix:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ezután határozzuk meg az $id_{\mathbb{R}^3}$ leképezés E_2-E_1 bázisokra vonatkozó mátrixát. Ehhez ismernünk kell az E_2 bázis vektorainak E_1-re vonatkozó koordinátáit. Mivel E_1 a kanonikus bázis $\mathbb{R}^3$-ban, így ezek a koordináták a megfelelő vektorkomponensekkel egyenlőek. Így

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathcal{A}$ leképezés E_2-F_2 bázisokra vonatkozó mátrixa:

$$A_{E_2-F_2} = X \cdot A_{E_1-F_1} \cdot Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) Legyen az $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció kanonikus bázisra (E) vonatkozó mátrixa

$$A_E = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$F := \{(1,1,1), (2,-1,0), (1,0,-1)\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ban.
Határozzuk meg az $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció F-re vonatkozó mátrixát!
Az $id_{\mathbb{R}^3}$ leképezés F-E bázisokra vonatkozó mátrixa F elemeinek E-re vonatkozó koordinátáit tartalmazza:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg X inverzét!
(E elemeit e_1, e_2, e_3-mal, F elemeit f_1, f_2, f_3-mal jelöljük.)

bázis	f_1	f_2	f_3	e_1	e_2	e_3
e_1	1	2	(1)	1	0	0
e_2	1	-1	0	0	1	0
e_3	1	0	-1	0	0	1

bázis	f_1	f_2	e_1	e_2	e_3
f_3	1	2	1	0	0
e_2	(1)	-1	0	1	0
e_3	2	2	1	0	1

bázis	f_2	e_1	e_2	e_3
f_3	3	1	-1	0
f_1	-1	0	1	0
e_3	4	1	-2	1

bázis	e_1	e_2	e_3
f_3	1/4	1/2	-3/4
f_1	1/4	1/2	1/4
f_2	1/4	-1/2	1/4

Így $X^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \end{bmatrix}$

Az $\mathcal{A}$ transzformáció F bázisra vonatkozó mátrixa:

$$A_F = X^{-1} A_E X = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. tétel

Lineáris egyenletrendszerek

Tekintsük az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismeretlenekre vonatkozó alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$A = [a_1 \ \ldots \ a_n] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ m×n -es együtthatómátrix,

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ m×1 -es oszlopvektor, $$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ n×1 -es oszlopvektor.

Ekkor a (*) egyenletrendszer az alábbi tömör formában adható meg:

$$Ax = b \qquad (**)$$

b=o esetén homogén: b≠o esetben inhomogén egyenletrendszerről beszélünk. Tekintsük azt az $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú lineáris leképezést, amelynek a kanonikus bázisokra vonatkozó mátrixa A.
Ekkor az Ax=b lineáris egyenletrendszer ekvivalens az $\mathcal{A}(x)=b$ egyenlőséggel.

2.33. Definíció.

Az Ax=b egyenletrendszert megoldhatónak nevezzük, ha létezik olyan $x \in \mathbb{R}^n$ vektor, amely az egyenletrendszert kielégíti.

2.34. Állítás.

Pontosan akkor létezik olyan $x \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre $\mathcal{A}(x)=b$ (vagyis pontosan akkor megoldható az Ax=b lineáris egyenletrendszer), ha $b \in \mathrm{im}(\mathcal{A})$.

Bizonyítás: nyilvánvaló.

2.35. Állítás.

Az Ax=b lineáris egyenletrendszer pontosan akkor megoldható, ha $r(A) = r\{a_1,\dots,a_n\} = r\{a_1,\dots,a_n,b\}$. (Azt az m×n+1 -es mátrixot, melynek oszlopvektorai $a_1,\dots,a_n,b$, az egyenletrendszer kibővített mátrixának nevezzük, és [A,b] -vel jelöljük.)

Bizonyítás:

Az Ax=b e.r. megoldható $\iff b \in \mathcal{L}(a_1,\dots,a_n) \iff$
$r(A) = r\{a_1,\dots,a_n\} = r(a_1,\dots,a_n,b) = r([A,b])$.

Lineáris egyenletrendszer megoldása

Tegyük fel, hogy az Ax=b lineáris egyenletrendszer megoldható. Ekkor $r(A) = r([A,b]) =: k$. Válasszuk az indexelést úgy, hogy az $a_1,\dots,a_k$ vektorok lineárisan függetlenek legyenek (ez egy maximális lineárisan független rendszer).
Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$B = [a_1,\dots a_k], \quad R = [a_{k+1},\dots a_n], \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}, \quad x_R = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ekkor az egyenletrendszer a

$$B\,x_B + R\,x_R = b \qquad \text{alakban írható.}$$

Az R mátrix oszlopvektorai és b előállítható az $a_1,\dots,a_k$ vektorok lineáris kombinációjaként:

$$a_{k+1} = B\cdot d_{k+1}, \quad \dots \quad, a_n = B\cdot d_n, \qquad b = B\cdot d\,.$$

Legyen $D = [d_{k+1}\dots d_n]$, így az egyenletrendszer a

$$B\,x_B + B\cdot D\,x_R = B\cdot d\,, \qquad \text{vagy az ezzel ekvivalens}$$

$$B(x_B + D\,x_R - d) = o \qquad \text{alakban írható.}$$

Tudjuk, hogy B oszlopvektorai lineárisan függetlenek, így belőlük a nullvektor csak triviálisan állítható elő, vagyis:

$$x_B + Dx_R - d = o.$$

Innen:

$$x_B = d - Dx_R$$

vagyis az Ax=b egyenletrendszert kielégítő x vektor komponensei között a fenti egyenlőségnek fenn kell állnia.
x_R komponenseit szabad, x_B komponenseit kötött ismeretleneknek nevezzük, utalva arra, hogy x_R komponenseit szabadon választva, a fenti összefüggéssel kaphatjuk meg x_B komponenseinek értékét.

Megjegyzés: az algoritmus során az is kiderül, ha egy lineáris egyenletrendszer nem oldható meg (ilyenkor $r\{a_1,\dots,a_n\} < r\{a_1,\dots,a_n,b\}$).

Példák.

(1) Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Induló táblázat:

bázis	a_1	a_2	a_3	a_4	b
e_1	2	-1	1	3	3
e_2	(1)	1	2	0	3
e_3	1	3	4	-2	5

Bázistranszformációval megkeressük az A együtthatómátrix oszlopvektorainak egy maximális lineárisan független részrendszerét.

bázis	a_2	a_3	a_4	b
e_1	-3	(-3)	3	-3
a_1	1	2	0	3
e_3	2	2	-2	2

bázis	a_2	a_4	b
a_3	1	-1	1
a_1	-1	2	1
e_3	0	0	0

A táblázatból leolvasható:

$r(A) = r([A,b]) = 2$, az egyenletrendszer megoldható.

$B = [a_3\ a_1]$, $R = [a_2\ a_4]$, $x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$, $x_R = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$,

$d_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $d_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, azaz $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ és $d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Tehát x_2, x_4 szabadon választható, a hozzájuk tartozó x_3, x_1 értékeket pedig az

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

összefüggéssel kaphatjuk meg.

Vagyis:

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 - x_2 + x_4 \\ x_1 &= 1 + x_2 - 2x_4. \end{aligned}$$

Így az egyenletrendszer megoldáshalmaza:

$$M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2,x_4 \in \mathbb{R},\ x_1 = 1+x_2-x_4,\ x_3=1-x_2+x_4\}$$

Általában az $\{a_1,\dots,a_n\}$ vektorhalmaznak több maximális lineárisan független részrendszere is létezik. Ebben a példában ilyen az $\{a_2,a_1\}$ is. Ebben az esetben az ismeretlenek között az alábbi összefüggéseket kaphatjuk:

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 - x_3 + x_4 \\ x_1 &= 2 - x_3 - x_4 \end{aligned}$$

Így az egyenletrendszer megoldáshalmaza az alábbi formában is megadható:

$$M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3,x_4 \in \mathbb{R},\ x_1=2-x_3-x_4,\ x_2=1-x_3+x_4\ \}.$$

(2) Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 4x_2 + 4x_3 - 4x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 &= -3 \end{aligned}$$

Induló táblázat:

bázis	a_1	a_2	a_3	a_4	b
e_1	3	(1)	4	2	1
e_2	0	4	4	-4	1
e_3	-1	1	0	-2	-3

bázis	a_1	a_3	a_4	b
a_2	3	4	2	1
e_2	-12	-12	-12	-3
e_3	(-4)	-4	-4	-4

bázis	a_3	a_4	b
a_2	1	-1	-2
e_2	0	0	9
a_1	1	1	1

Látható, hogy az A együtthatómátrix oszlopvektorai között csak 2 db lineárisan független van, vagyis $r(A) = 2$, ugyanakkor b -t még be lehetne vonni a bázisba, vagyis $r([A,b]) = 3$. Így az egyenletrendszer nem oldható meg.

2.36. Állítás.

Az $Ax=o$ homogén lineáris egyenletrendszer (ill. a vele ekvivalens $\mathcal{A}(x)=o$ egyenlőség) mindig megoldható és

$$M = \ker(\mathcal{A}),$$

ahol $M \subset \mathbb{R}^n$ jelöli az egyenletrendszert kielégítő $x \in \mathbb{R}^n$ vektorok halmazát (megoldáshalmaz).

Bizonyítás: nyilvánvaló.

Következmény.

Az $Ax=o$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben. (Mégpedig n-k-dimenziós alteret, ahol $k=r(A)$.)

2.37. Definíció.

Az $Ax=o$ egyenletrendszer $x=o$ megoldását triviális megoldásnak nevezzük.

2.38. Állítás.

Az $Ax=o$ homogén lineáris egyeneltrendszernek csak triviális megoldása van $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$.

Bizonyítás:

Az e.r.-nek csak triviális megoldása van $\Leftrightarrow$ $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = o$ pontosan akkor áll fenn, ha $x_1 = \ldots = x_n = 0 \Leftrightarrow \{a_1,\ldots,a_n\}$ lineárisan független $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$.

2.39. Következmény:

Az $Ax=o$ homogén lineáris egyenletrendszernek létezik triviálistól különböző megoldása $\Leftrightarrow$ $r(A) < n$.

2.40. Állítás.

Tekintsük az $Ax=b$ inhomogén lineáris egyenletrendszert, tegyük fel, hogy ez megoldható. A megoldáshalmazt jelöljük M -mel.
Ekkor

$$M = M_0 + \{x_0\} = \ker(\mathcal{A}) + \{x_0\},$$

ahol $M_0 = \ker(\mathcal{A})$ az $Ax=o$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza, x_0 pedig az $Ax=b$ inhomogén egyenletrendszer egy tetszőleges megoldása.

Bizonyítás:

1./ Legyen $x_h \in M_0 = \ker(\mathcal{A})$. Ekkor x_h+x_0 kielégíti az inhomogén egyenletrendszert, ugyanis:

$$\mathcal{A}(x_h+x_0) = \mathcal{A}(x_h) + \mathcal{A}(x_0) = o + b = b.$$

Így

$$\ker(\mathcal{A}) + \{x_0\} \subset M.$$

2./ Legyen x az inhomogén egyenletrendszer egy tetszőlegesen választott megoldása. Ekkor $x-x_0$ kielégíti a homogén egyenletrendszert:

$$\mathcal{A}(x-x_0) = \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x_0) = b-b = o.$$

Így az inhomogén egyenletrendszer bármely x megoldása felírható $x = (x-x_0) + x_0$ alakban, ahol $x-x_0 \in \ker(\mathcal{A})$. Vagyis:

$$M \subset \ker(\mathcal{A}) + \{x_0\}.$$

Tehát $M = \ker(\mathcal{A}) + \{x_0\}$.

Következmények.

(1) Az $Ax=b$ inhomogén egyeneltrendszer megoldáshalmaza a $\ker(\mathcal{A})$ altér eltoltja.

(2) 2.38. - 2.40. alapján:
Az $Ax=b$ inhomogén egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha megoldható, és ha $r(A) = n$.
Az $Ax=b$ inhomogén egyenletrendszernek pontosan akkor van végtelen sok megoldása, ha megoldható és ha $r(A) < n$.

Négyzetes mátrix és lineáris transzformáció determinánsa

2.41. Definíció.

Legyen A $n\times n$ -es kvadratikus mátrix. Az A mátrix a_{ij} elemhez tartozó A_{ij} részmátrixán azt az $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrixot értjük, amelyet az A mátrixból annak i-edik sorát és j-edik oszlopát elhagyva kapunk. $(1 \le i,j \le n)$.

2.42. Definíció.

(1) Ha $A = [a_{11}]$ 1×1 -es mátrix, akkor az A mátrix determinánsán a $\det(A) = a_{11} \in \mathbb{R}$ számot értjük.

(2) Ha $A = (a_{ij})$ $n\times n$ -es mátrix $(n \ge 2)$, akkor az A mátrix determinánsa:

$$\det(A) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \det(A_{1j})$$

Megjegyzések.

(1) A definícióban a mátrix determinánsát az első sorának elemeiből és a hozzájuk tartozó részmátrixok determinánsaiból számoltuk, azaz a determinánst "az első sor szerint fejtettük ki".

(2) Speciálisan $n=2$ -re: az $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ mátrix determinánsa

$$\det(A) = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}.$$

(3) Az $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ mátrix determinánsa:

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$
$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

(4) Belátható, hogy egy $n\times n$ -es mátrix determinánsa mindig $n!$ tagból álló összeg, amelynek minden egyes tagja olyan (megfelelő előjellel ellátott) n tényezős szorzat, amely a mátrix minden sorából és minden oszlopából pontosan egy elemet tartalmaz:

$$a_{1\pi(1)}\cdot a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)},$$

ahol $\pi(1),\ldots,\pi(n)$ az $1,\ldots,n$ számok egy permutációját jelöli. Ezen szorzat előjele a π permutáció előjelével $(\operatorname{sign}(\pi))$ egyezik meg (ez $+1$, ha a permutációban az ún. előzések száma páros, és -1, ha az előzések száma páratlan).
Így egy $n\times n$ -es A mátrix determinánsa az alábbi formában is megadható:

$$\det(A) = \sum_{\pi} \operatorname{sign}(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)},$$

ahol az összegzés az $1,\ldots,n$ számok összes permutációjára kiterjed.

2.43. Állítás.

Legyen $A = (a_{ij})$ nxn -es mátrix. Az A mátrix determinánsát bármelyik sor vagy oszlop szerint kifejtve megkaphatjuk, azaz:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

/i-edik sor szerinti kifejtés/, illetve

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

/j-edik oszlop szerinti kifejtés/.
(nem bizonyítjuk.)

Következmények:

(1) $\det(A^T) = \det(A)$

(2) A determináns tulajdonságai egyformán igazak a mátrix soraira és a mátrix oszlopaira megfogalmazva.

Példa.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki az A mátrix determinánsát
a./ a definíció alapján; b./ a harmadik oszlop szerinti kifejtéssel!

a./ $\det(A) = 1\cdot\det\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - (-3)\cdot\det\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 2\cdot\det\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$

$= 1\cdot(3\cdot0-(-5)\cdot1) - (-3)\cdot(4\cdot0-(-5)\cdot2) + 2\cdot(4\cdot1-3\cdot2) =$

$= 5 + 30 - 4 = 31$.

b./ $\det(A) = 2\cdot\det\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - (-5)\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 0\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} =$

$= 2\cdot(4\cdot1-3\cdot2) - (-5)(1\cdot1-(-3)\cdot2) + 0 = -4 + 35 = 31$.

2.44. Állítás.

Az nxn -es A mátrix két tetszőleges oszlopát felcserélve a mátrix determinánsa előjelet vált.

Bizonyítás:

Legyen B az a mátrix, amelyben A i-dik és i+1 -edik oszlopát megcseréltük. Az A mátrix determinánsát az i-dik oszlop, a B mátrix determinánsát az i+1 -edik oszlop szerint kifejtve rögtön kapjuk, hogy $\det(B) = -\det(A)$.
Tehát szomszédos oszlopok felcserélésekor a determináns előjelet vált. Két tetszőleges oszlop felcserélése mindig páratlan számú szomszédos oszlopcserék egymásutánjával érhető el. Jelöljük ezek számát k-val. Eközben a determináns értéke k-szor vált előjelet, és így k páratlan volta miatt előjelet vált.

2.45. Következmény:

(1) Ha a mátrixban található két azonos sor vagy oszlop, akkor a determináns értéke 0.

(2) Ha az $A = [a_1 \dots a_n]$ négyzetes mátrix valamely oszlopának elemeit egy másik oszlop elemeihez tartozó részmátrixok determinánsaival szorozzuk, és ezeket váltakozó előjellel véve összeadjuk, akkor 0-t kapunk:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} \det(A_{ip}) = 0, \quad \text{ha} \quad k \neq p.$$

A felírt összeg ugyanis annak a B mátrixnak a determinánsa, amelynek oszlopvektorai:

$$b_j = \begin{cases} a_j & , \text{ ha } j \neq p \\ a_k & , \text{ ha } j = p. \end{cases}$$

Így B-nek a k-adik és p-edik oszlopvektora megegyezik, ezért $\det(B) = 0$.

2.46. Állítás.

Ha az A mátrix j-edik oszlopvektorát két vektor összegére bontjuk fel ($a_j = a_j' + a_j''$), akkor az A mátrix determinánsa két mátrix determinánsának az összegeként kapható meg az alábbi módon:

$$\det([a_1 \dots a_j \dots a_n]) = \det([a_1 \dots a_j' \dots a_n]) + \det([a_1 \dots a_j'' \dots a_n]).$$

Bizonyítás:

Fejtsük ki A determinánsát a j-edik oszlop szerint:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} (a_{ij}' + a_{ij}'') \det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}' \det(A_{ij}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}'' \det(A_{ij}) ,$$ így éppen a kívánt felbontást kaptuk.

2.47. Állítás.

Ha az A mátrix j-edik oszlopvektorát $a_j = \lambda \cdot a_j'$ alakban ($\lambda \in \mathbb{R}$) állítjuk elő, akkor az A mátrix determinánsa a következő módon kapható:

$$\det([a_1 \dots \lambda a_j' \dots a_n]) = \lambda \cdot \det([a_1 \dots a_j' \dots a_n]) .$$

Bizonyítás: hasonlóan az előzőhöz.

Következmény:

Ha egy mátrixban valamely oszlophoz (vagy sorhoz) hozzáadjuk egy másik oszlop (vagy sor) λ-szorosát, akkor a mátrix determinánsának az értéke nem változik.
(A mátrix ilyen átalakítását elemi oszlop- (vagy sor) átalakításnak nevezzük.)

Példa.

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az A mátrix determinánsát!
A kifejtés előtt elemi sorátalakításokat végzünk, ez a determináns értékét nem változtatja meg. Célszerű a második sor háromszorosát az első sorból kivonni és egyidejűleg a második sor kétszeresét a harmadik sorhoz hozzáadni. Az így kapott mátrixot az első oszlopa szerint kifejtve egyetlen másodrendű determináns értékét kell kiszámolnunk.

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 2 \end{bmatrix}\right) = (-1)\cdot\det\left(\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= - (-4+36) = - 32$$

2.48. Állítás. Szorzás-tétel.

Legyenek A és B $n \times n$ -es mátrixok. Ekkor

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

(nem bizonyítjuk!)

2.49. Állítás.

Legyen A invertálható mátrix. Ekkor

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} .$$

Bizonyítás:

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(E) = 1,$$

innen az állítás adódik.

2.50. Állítás.

Legyen $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ típusú lineáris transzformáció, E és F pedig legyenek bázisok $\mathbb{R}^n$ -ben. Jelölje A_{E-E} az $\mathcal{A}$ transzformáció E bázisra vonatkozó mátrixát, A_{F-F} pedig az $\mathcal{A}$ transzformáció F bázisra vonatkozó mátrixát. Ekkor

$$\det(A_{E-E}) = \det(A_{F-F})$$

Bizonyítás:

A 2.32. II. Probléma kapcsán láttuk, hogy létezik olyan X nxn -es mátrix, melyre

$$A_{F-F} = X^{-1} \cdot A_{E-E} \cdot X \qquad \text{áll fenn.}$$

Így a 2.48.-2.49. Állításokat felhasználva:

$$\det(A_{F-F}) = \det(X^{-1} \cdot A_{E-E} \cdot X) = \det(X^{-1}) \cdot \det(A_{E-E}) \cdot \det(X) =$$

$$= \frac{1}{\det(X)} \det(A_{E-E}) \cdot \det(X) = \det(A_{E-E}).$$

2.51. Definíció.

Az előző állítás jogossá teszi az alábbi definíciót: Lineáris transzformáció determinánsán tetszőlegesen választott bázisra vonatkozó mátrixának determinánsát értjük.

2.52. Megjegyzés.

Mivel lineáris transzformációk és kvadratikus mátrixok között rögzített bázis esetén kölcsönösen egyértelmű kapcsolat van, és mivel minden lineáris transzformációnak a determinánsa bármely bázisra vonatkozó mátrixának a determinánsával egyenlő, így a kvadratikus mátrixok determinánsára vonatkozó tulajdonságok lineáris transzformációk determinánsára is igazak (pl.a 2.48.-2.49. Állítások analóg módon lineáris transzformációk determinánsára is megfogalmazhatók).

2.53. Állítás. Cramer-szabály.

Tekintsük az $Ax=b$ lineáris egyenletrendszert, ahol most A nxn -es mátrix, $A = [a_1 \dots a_n]$.
Legyen $D = \det(A)$, $D_k = \det([a_1 \dots a_{k-1}\ b\ a_{k+1} \dots a_n])$ $(k=1,\dots,n)$.
Ekkor

$$D \cdot x_k = D_k \qquad (k=1,\dots,n).$$

Bizonyítás:

Mivel $Ax = a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = b,$ így a determináns tulajdonságait (2.44.-2.47. Állítások) felhasználva:

$$D_k = \det([a_1 \dots a_{k-1} \sum_{i=1}^{n} x_i a_i\ a_{k+1} \dots a_n]) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \det([a_1 \dots a_{k-1} a_i a_{k+1} \dots a_n]) =$$

$$= x_k \cdot \det([a_1 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots a_n]) = x_k \cdot \det(A) = x_k \cdot D \qquad (k=1,\dots,n).$$

2.54. Következmények:

(1) Ha $D = \det(A) \neq 0$, akkor az $Ax=b$ lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható, és a megoldás k-adik komponensére:

$$x_k = \frac{D_k}{D} .$$

(2) Ha $D=0$ és valamely k-ra $D_k \neq 0$, akkor az $Ax=b$ lineáris egyenletrendszer nem oldható meg.

(3) Ha $D=0$ és $D_k=0$ minden $k=1,\ldots,n$ -ra, akkor az $Ax=b$ lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.
(Ebben az esetben Cramer szabálya nem ad módszert a megoldások megkeresésére.)

(4) Az $Ax=o$ homogén lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha $D=\det(A) = 0$.

Példa.

Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Cramer-szabállyal!

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 19 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 &= -9 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Az együtthatómátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Az A mátrix determinánsát elemi sorátalakítások után az első oszlop szerint kifejtve számoljuk:

$$D = \det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -4 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}\right) = 1\cdot\det\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7 & -4 & 11 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & 4 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix}\right) = -1(10\cdot(-6)-4\cdot 6) = -(-84) = 84 \neq 0,$$

így az egyenletrendszer egyértelműen megoldható.
Ezután a D_1-D_4 determinánsokat számoljuk:

$$D_1 = \det\left(\begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 & -3 \\ 19 & -2 & 3 & -4 \\ -9 & 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 8 & 7 & -3 \\ 11 & 10 & 11 & -4 \\ -5 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= 1\cdot\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 11 & 10 & 11 \\ -5 & -2 & -5 \end{bmatrix}\right) = 168$$

Hasonlóan:

$$D_2 = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 & -3 \\ 1 & 19 & 3 & -4 \\ 3 & -9 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = -252$$

$$D_3 = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 19 & -4 \\ 3 & 4 & -9 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 420$$

$$D_4 = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 19 \\ 3 & 4 & -1 & -9 \\ -2 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}\right) = 84 .$$

Igy az ismeretlenek:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{168}{84} = 2, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-252}{84} = -3,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{420}{84} = 5, \qquad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{84}{84} = 1.$$

2.55. Állítás.

Legyen A nxn -es kvadratikus mátrix.
$\det(A) = 0 \iff A$ oszlopvektorai lineárisan összefüggők.

Bizonyítás:

$\det(A) = 0 \iff Ax = o$ e.r.-nek van a triviálistól különböző megoldása $\iff r(A) < n \iff A$ oszlopvektorai lineárisan összefüggők.

2.56. Következmény:

(1) Az A mátrix oszlopvektorai lineárisan függetlenek $\iff \det(A) \neq 0$.

(2) Az A nxn -es mátrixra az alábbi állítások ekvivalensek:
(i) A oszlopvektorai lineárisan függetlenek.
(ii) $r(A) = n$.
(iii) A invertálható.
(iv) $\det(A) \neq 0$.

2.57. Definíció.

Az $A=(a_{ij})$ nxn -es mátrix ($n \geq 2$) klasszikus adjungáltjának nevezzük azt a $D = (d_{ij})$ nxn -es mátrixot, melyre $d_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$. Jelölése: adj(A).

2.58. Állítás.

Legyen az $A = (a_{ij})$ olyan kvadratikus mátrix, amelynek a determinánsa nem 0. Ekkor A inverze az alábbi módon számolható:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A) .$$

Bizonyítás:

Tekintsük az $\frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A) \cdot A$ szorzatot, ennek (i,j) -edik elemét a 2.43. Állítást és a 2.45. (2) Következményt felhasználva az alábbi módon számolhatjuk:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\det(A)} \cdot (-1)^{i+k} \cdot \det(A_{ki}) \cdot a_{kj} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{kj} \det(A_{ki}) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A) = 1 , & \text{ha } i=j \\ \frac{1}{\det(A)} \cdot 0 = 0 , & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

Így $\frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A) \cdot A = E$, azaz $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A)$.

Példa.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az A mátrix a./ klasszikus adjungáltját; b./ inverzét!

a./

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ -\det\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \\ \det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} .$$

b./ Az A mátrix determinánsa az első oszlop szerint kifejtve:
$\det(A) = (3 \cdot 3 - 4 \cdot 4) - (2 \cdot 3 - 3 \cdot 4) + (2 \cdot 4 - 3 \cdot 3) =$
$= -7 + 6 - 1 = -2.$

Az A mátrix ivnerze:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A) = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,5 & -3 & 0,5 \\ -0,5 & 0 & 0,5 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \end{bmatrix} .$$

3. ABSZTRAKT VEKTORTEREK

A vektortér fogalmának általánosítása

3.1. Definíció.

Legyen Γ egy test, V egy halmaz, és adottak a $+: V\times V \to V$ és a $\cdot: \Gamma\times V \to V$ típusú műveletek, melyekre az alábbi tulajdonságok érvényesek: Bármely $a,b,c \in V$, $\lambda,\mu \in \Gamma$ esetén:

(V1) $a+b = b+a$

(V2) $(a+b)+c = a+(b+c)$

(V3) létezik olyan $o \in V$ elem, melyre minden $a \in V$ esetén $a+o = a$.
/o -t V nullelemének hívjuk./

(V4) minden $a \in V$ -hez létezik olyan $a' \in V$, hogy $a+a' = o$.
/a' -t az "a" elem ellentettjének nevezzük./

(V5) $\lambda\cdot(a+b) = \lambda\cdot a + \lambda\cdot b$

(V6) $\lambda\cdot(\mu a) = (\lambda\mu)\cdot a$

(V7) $(\lambda+\mu)\cdot a = \lambda\cdot a + \mu\cdot a$

(V8) $1\cdot a = a$, ahol 1 a Γ test egységelemét jelöli.

Ekkor V-t a Γ test feletti vektortérnek, V elemeit vektoroknak, Γ elemeit skalároknak nevezzük. $\Gamma = \mathbb{R}$ esetén valós, $\Gamma = \mathbb{C}$ esetén komplex vektortérről beszélünk.

3.2. Megjegyzés.

Az 1. fejezetben (ld. 1.4. Állítás) láttuk, hogy $\mathbb{R}^n$ az értelmezett összeadással és skalárral való szorzással valós vektortér.

3.3. Állítás.

Legyen V Γ feletti vektortér. Jelölje $o \in V$ a vektortér nullelemét, 0 a Γ test nullelemét, 1 a Γ test egységelemét.
Ekkor az alábbi állítások igazak:

(1) V -ben a nullelem egyértelmű, azaz pontosan egy olyan $o \in V$ létezik, hogy $\forall a \in V$ -re: $a+o = a$ teljesül.

(2) $\forall \lambda \in \Gamma : \lambda\cdot o = o$.

(3) $\forall a \in V : 0\cdot a = o$.

(4) V -ben az ellentett egyértelmű, azaz minden $a \in V$ -hez pontosan egy olyan $a' \in V$ elem létezik, melyre $a+a' = o$.

(5) $\forall a \in V$: $a' = (-1)\cdot a$.

(6) $\lambda\cdot a = o \iff \lambda=0$ vagy $a=o$.

(7) $\lambda\cdot a = \mu\cdot a \iff \lambda=\mu$ vagy $a=o$.

Bizonyítás.

(1) Tegyük fel, hogy o és o' is nullelem V -ben.
Ekkor $o = o+o' = o'+o = o'$, tehát $o = o'$, azaz a nullelem egyértelmű.

(2) $\lambda\cdot o = \lambda\cdot(o+o) = \lambda o + \lambda o$.
Mindkét oldalhoz hozzáadva a λo elem ellentettjét (jel: $(\lambda o)'$):

$$\underbrace{\lambda o + (\lambda o)'}_{o} = \lambda o + \underbrace{\lambda o + (\lambda o)'}_{o} = \lambda o + o = \lambda o,$$

így $o = \lambda o$.

(3) $0\cdot a = (0+0)\cdot a = 0\cdot a + 0\cdot a$
Mindkét oldalhoz $0\cdot a$ ellentettjét (jel: $(0\cdot a)'$) adva:

$$\underbrace{0\cdot a + (0\cdot a)'}_{o} = 0\cdot a + \underbrace{0\cdot a + (0\cdot a)'}_{o} = 0\cdot a + o = 0\cdot a,$$

így $o = 0\cdot a$.

(4) Tegyük fel, hogy az $a \in V$ elemnek a' és a'' is ellentettje. Ekkor:
$a + a' = o$ (*)
és $a + a'' = o$.
(*)-ban adjunk mindkét oldalhoz a'' -t:
$(a+a') + a'' = o + a'' = a''$ (**)
Felhasználva az összeadás kommutativitását és asszociativitását az alábbiakat kapjuk:
$(a+a') + a'' = a'' + (a+a') = (a''+a) + a' = (a+a'') + a' = o + a' = a'$,
ami (**) alapján az $a' = a''$ egyenlőséget eredményezi, azaz az ellentett egyértelmű.

(5) Mivel tudjuk, hogy az ellentett elem egyértelmű, elég megmutatni, hogy $(-1)\cdot a$ ellentettje "a"-nak:
$a + (-1)\cdot a = 1\cdot a + (-1)\cdot a = (1+(-1))\cdot a = 0\cdot a = o$.

(6) 1./ Tegyük fel, hogy $\lambda \cdot a = o$.

Ha $\lambda = 0$, akkor készen vagyunk.

Ha $\lambda \neq 0$, akkor

$$a = 1 \cdot a = (\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda) \cdot a = \frac{1}{\lambda}(\lambda \cdot a) = \frac{1}{\lambda} \cdot o = o.$$

Vagyis: Ha $\lambda \cdot a = o$, akkor $\lambda = 0$ vagy $a = o$.

2./ Ha $\lambda = 0$, akkor (3) alapján $\forall a \in V$ -re $\lambda \cdot a = o$.

Ha $a = o$, akkor (2) alapján $\forall \lambda \in \Gamma$ -ra $\lambda \cdot a = o$.

Így: Ha $\lambda = 0$ vagy $a = o$, akkor $\lambda \cdot a = o$.

(7) $\lambda \cdot a = \mu \cdot a \iff \lambda a + (\mu a)' = \lambda a + (-1)(\mu a) =$

$= \lambda a - \mu a = (\lambda - \mu)a = o \iff \lambda - \mu = 0$ vagy $a = o \iff \lambda = \mu$ vagy $a = o$.

3.4. Példák.

(1) $\mathbb{C}^n$: komplex számokból képzett rendezett n-esek halmaza, a komponensenkénti összeadással és skalárral való szorzással.

$\Gamma = \mathbb{R}$ esetén (a skalárok valósak) $\mathbb{C}^n$ valós vektortér, $\Gamma = \mathbb{C}$ esetén (a skalárok komplexek) $\mathbb{C}^n$ komplex vektortér.

Nulleleme: $(0,0,\ldots,0)$. A $(z_1,z_2,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n$ vektor ellentettje: $(-z_1,-z_2,\ldots,-z_n)$.

(2) $\mathbb{R}^{n\times m}$: valós számokból képzett $n\times m$ -es mátrixok halmaza, a megismert mátrixösszeadással és skalárral való szorzással (ld. 2.12. Definíció) valós vektortér.

Nulleleme: $n\times m$ -es nullmátrix. Az $A = (a_{ij})$ mátrix ellentettje: $A' = (-a_{ij})$. Hasonlóan értelmezhető $\mathbb{C}^{n\times m}$ is, ami $\Gamma = \mathbb{R}$ esetén valós, $\Gamma = \mathbb{C}$ esetén komplex vektortér.

(3) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) := \{\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \mathcal{A}$ lineáris$\}$.

$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ típusú lineáris leképezések halmaza a pontonkénti összeadással és skalárral való szorzással (ld. 2.9. Definíció) valós vektortér.

Nulleleme: $\mathcal{O}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto o$

($\mathbb{R}^m$ minden eleméhez $\mathbb{R}^n$ nullelemét rendeli.)

Az $\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés ellentettje az $\mathcal{A}': \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \mathcal{A}'(x) := -\mathcal{A}(x)$ leképezés.

Hasonlóan értelmezhető $\mathcal{L}(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^n)$ is, ami $\Gamma = \mathbb{C}$ esetén komplex vektortér.

(4) $P_{\mathbb{R}}$: valós együtthatós polinomok halmaza, a pontonkénti összeadással és valós számmal való szorzással valós vektortér.

Nulleleme az azonosan nulla polinom.

A $p:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ polinom ellentettje a $p':\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -a_0-a_1x-a_2x^2-\ldots-a_nx^n$ polinom.

(5) $P^n_{\mathbb{R}}$: legfeljebb n-edfokú, valós együtthatós polinomok halmaza, a pontonkénti összeadással és valós számmal való szorzással valós vektortér.

Nullelem és ellentett megegyezik az előzővel. Hasonlóan értelmezhető $P_{\mathbb{C}}$ és $P^n_{\mathbb{C}}$ is, melyek $\Gamma = \mathbb{C}$ esetben komplex vektorterek.

(6) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: valós számokból álló (végtelen) sorozatok halmaza az elemenkénti összeadással és valós számmal való szorzással valós vektortér.

Nulleleme: konstans nullsorozat. Az $a = (a_n)$ sorozat ellentettje: $a' := (-a_n)$. Hasonlóan értelmezhető $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ is, amely $\Gamma = \mathbb{C}$ esetben komplex vektortér.

(7) $\mathbb{R}^I := \{f: I \to \mathbb{R}\}$ az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett valós értékű függvények halmaza.

$C(I) := \{f: I \to \mathbb{R} | f$ folytonos$\}$ az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett valós értékű folytonos függvények halmaza.

$D(I) := \{f: I \to \mathbb{R} | f$ differenciálható$\}$ az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett valós értékű differenciálható függvények halmaza.

$S(I) := \{f: I \to \mathbb{R} | f$ integrálható$\}$ az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett valós értékű integrálható függvények halmaza.

Nyilván $D(I) \subset C(I) \subset S(I) \subset \mathbb{R}^I$.

Az $\mathbb{R}^I$, $C(I)$, $D(I)$ és $S(I)$ halmazok mindegyikében értelmezzük a függvények pontonkénti összeadását és valós számmal való szorzását. E műveletekkel a fenti halmazok mindegyike valós vektortér. Mindegyik vektortérben a nullelem: $o: I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$, az f függvény ellentettje az $f': I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -f(x)$ függvény.

(8) Legyen $H \neq \emptyset$ halmaz, X a Γ test feletti vektortér.
$V := \{f \mid f: H \to X\}$. V-ben az összeadást és a Γ-beli skalárral való szorzást a függvények pontonkénti összeadásával és skalárral való szorzásával értelmezzük.
Ekkor V Γ feletti vektortér.
V-nek a nulleleme:
$0: H \to X$, $h \mapsto o$, ahol o az X vektortér nulleleme.
Az $f \in V$ függvény ellentettje:
$f': H \to X$, $h \mapsto f(h)'$, ahol $f(h)' \in X$ az $f(h) \in X$ vektor X-beli ellentettje.

(9) Legyen $H \neq \emptyset$ halmaz, $x \in H$ rögzített.
$V := \{f \mid f \in H \to \mathbb{R},\ x \in \mathrm{dom}(f)\}$. V-ben az összeadást és a valós számmal való szorzást a függvények megfelelő pontonkénti műveleteivel értelmezzük. Könnyen ellenőrizhető, hogy V nem vektortér, ugyanis nem létezik minden V-beli elemnek ellentettje (a 3.1. Definíció (V4) feltétele nem teljesül).

(10) $V := \{x\}$ egyelemű halmaz, Γ tetszőlegesen választott test.
Értelmezzük V-ben a következő műveleteket!
$+: V \times V \to V$, $(x,x) \mapsto x+x := x$
$\cdot: \Gamma \times V \to V$, $(\alpha,x) \mapsto \alpha \cdot x := x$
Ekkor a $(V,+,\cdot)$ struktúra Γ feletti vektortér, melyet triviális vektortérnek nevezünk.
Nulleleme: x, az x elem ellentettje: $x' = x$.

Legyen V Γ test feletti vektortér. Az 1. fejezetben leírtakkal analóg módon értelmezhető V-beli vektorok lineáris kombinációja ($\mathbb{R}^n$ helyett V-t, R helyett Γ-t tekintve), a lineáris függetlenség, összefüggőség, vektorhalmaz rangja, generátorrendszer és bázis fogalma (ld. 1.5., 1.6., 1.10. és 1.12. Definíciókat). Ugyancsak igazak (változatlan bizonyítással) az 1.8., 1.9., 1.11. és 1.13. Állítások analógjai is.

3.5. Állítás.

Minden vektortérnek van bázisa, és adott vektortérben az összes bázis megegyező tagszámú.

Bizonyítás: (végesen generált vektortérre, azaz ha a vektortérnek van véges generátorrendszere)

Legyen a V vektortér egy generátorrendszerre a $G = \{a_1, \ldots, a_k\}$ vektorhalmaz. Tekintsük ennek egy maximális lineárisan független részhalmazát, ami nyilván bázisa lesz V-nek. V minden bázisa ugyanannyi elemből áll: ugyanúgy bizonyítható, mint az 1.15. Állítás.

3.6. Definíció.

A végesen generált V vektortér bázisainak közös tagszámát a vektortér dimenziójának nevezzük. Jel: dim(V).
Ha egy vektortérnek van véges bázisa, akkor véges dimenziósnak mondjuk, különben végtelen dimenziós vektortérről beszélünk.

3.7. Megjegyzések.

(1) Véges dimenziós vektorterekben érvényes az 1.17. Állítás analógja, így ilyenkor beszélhetünk egy vektor adott bázisra vonatkozó koordinátáiról, illetve új bázisra vonatkozó koordináták számolására használhatjuk a bázistranszformációs eljárást (ld. 1.19. Állítás).

(2) A 3.4. (10) Példában értelmezett triviális vektortér bázisa definíció szerint az üres halmaz legyen, így a triviális vektortérnek van bázisa, de nincs bázisvektora, így az 0-dimenziós.

Példák.

(1) Tekintsük az $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vektortér alábbi elemeit:
$a_1 := 1, 1, 1, 1, \ldots$
$a_2 := 0, 1, 1, 1, \ldots$
$a_3 := 0, 0, 1, 1, \ldots$
$a_4 := 0, 0, 0, 1, \ldots$
$H := \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

Lineárisan független vagy lineárisan összefüggő a $H \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vektorhalmaz? Nézzük meg, hogy az a_1, a_2, a_3, a_4 sorozatokból milyen lineáris kombinációval lehet az $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vektortér nullvektorát (a konstans nullsorozatot) előállítani!

A $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 = o$ egyenlőségből a
$\lambda_1 = 0$
$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0$

$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = 0$

egyenletek adódnak, ami azt mutatja, hogy az a_1,a_2,a_3,a_4 sorozatokból csak a triviális lineáris kombináció ($\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$) állítja elő a nullsorozatot. Így a H vektorhalmaz lineárisan független.

(2) Tekintsük a $P_{\mathbb{R}}$ vektortér alábbi elemeit:

$p_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1$

$p_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x$

$\vdots$

$p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n$

$\vdots$

Ellenőrizhető, hogy a $p_0,p_1,\ldots,p_n,\ldots$ polinomok lineárisan függetlenek a $P_{\mathbb{R}}$ vektortérben.

(3) a./ Az $\mathbb{R}^{n\times m}$ vektortér n·m -dimenziós, ugyanis könnyen megmutatható, hogy a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \ \ldots, \ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

(n·m db mátrix)

mátrixok lineárisan függetlenek, ugyanakkor generálják a vektorteret, így bázist alkotnak az $\mathbb{R}^{n\times m}$ vektortérben.

b./ A $P^n_{\mathbb{R}}$ vektortér n+1 -dimenziós, ugyanis a

$p_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1$

$p_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x$

$p_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$

$\vdots$

$p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n$ polinomok bázist alkotnak $P^n_{\mathbb{R}}$ -ben.

c./ $P_{\mathbb{R}}$; $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^I$, C(I), D(I), S(I) végtelen dimenziós vektorterek.

(4) Legyenek $q_1:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$; $q_2:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+1$; $q_3:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2+x+1$ polinomok. $B := \{q_1,q_2,q_3\}$. Bázist alkotnak-e a $P^2_{\mathbb{R}}$ vektortérben a q_1,q_2,q_3 polinomok? Ha igen, akkor adjuk meg a $p:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x^2+2x-4$ polinom B-re vonatkozó koordinátáit!

Legyenek p_0,p_1,p_2 a (2) b. példában szereplő polinomok;
$B' := \{p_0,p_1,p_2\}$. B' bázisa a $P^2_{\mathbb{R}}$ vektortérnek, és minden polinomnak a B'-re vonatkozó koordinátái éppen az együtthatói lesznek. Így induló bázisként B' -t tekintve az alábbi táblázatot írhatjuk fel:

bázis	q_1	q_2	q_3	p
$p_0=q_1$	1	1	1	-4
p_1	0	(1)	1	2
p_2	0	0	1	3

Ezután két transzformációt végrehatjva:

bázis	q_3	p
q_1	0	-6
q_2	1	2
p_3	(1)	3

bázis	p
q_1	-6
q_2	-1
q_3	3

B' elemeit sorban ki tudtuk cserélni B elemeivel, így a
$B = \{q_1,q_2,q_3\}$ vektorhalmaz bázist alkot a $P^2_{\mathbb{R}}$ vektortérben.
A p polinom B bázisra vonatkozó koordinátái: -6, -1, 3.

Absztrakt vektortér altere az 1.20. Definícióval analóg módon értelmezhető, $\mathbb{R}^n$ helyett tetszőlegesen választott vektorteret véve.
Az 1.21. (1) Megjegyzés alapján rögtön kapjuk, hogy egy vektortér alterei maguk is vektorterek.
Megjegyezzük, hogy az. 1.22. és 1.25. Definíciók, valamint az 1.23., 1.24., 1.26. Állítások (változatlan bizonyítással) szintén általánosíthatók bármely vektortérre.

Példák.

(1) Bármely rögzített $n \in \mathbb{N}$ -re $P^n_{\mathbb{R}}$ altér a $P_{\mathbb{R}}$ vektortérben.

(2) Az $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vektortérben alteret alkotnak a korlátos sorozatok, a korlátos sorozatok vektorterében alteret alkotnak a konvergens sorozatok, a konvergens sorozatok vektorterében alteret alkotnak a nullához konvergáló sorozatok.

(3) A D(I), C(I), S(I), $\mathbb{R}^I$ vektorterek egymás alterei a
$D(I) \subset C(I) \subset S(I) \subset \mathbb{R}^I$ tartalmazási relációnak megfelelően.

Megjegyezzük még; hogy $\mathbb{R}^I$ viszont altere a 3.4. (8) Példában értelmezett V vektortérnek.

V → W típusú lineáris leképezések

A 2. fejezetben $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ típusú lineáris leképezésekkel foglalkoztunk. $\mathbb{R}^m$ és $\mathbb{R}^n$ helyett két tetszőlegesen választott, azonos test feletti vektorteret véve a lineáris leképezés fogalma is általánosítható:

3.8. Definíció.

Legyenek V és W azonos test (Γ) feletti vektorterek.

(1) Az $\mathcal{A}: V \to W$ típusú függvényt lineáris leképezésnek nevezzük, ha bármely $x,y \in V$ vektorra és bármely $\lambda \in \Gamma$ skalárra:

$\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$ (additivitás)

$\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \cdot \mathcal{A}(x)$ (homogenitás)

teljesül.

V = W esetben lineáris transzformációról beszélünk.

(2) Az $\mathcal{A}: V \to W$ lineáris leképezés magtere a $o \in W$ vektor ősképe.

$\ker(\mathcal{A}) := \mathcal{A}^{-1}(o) = \{x \in V \mid \mathcal{A}(x) = o\}$.

Az $\mathcal{A}: V \to W$ lineáris leképezés képtere:

$\mathrm{im}(\mathcal{A}) := \{y \in W \mid \exists x \in V: \mathcal{A}(x) = y\}$.

(3) Véges dimenziós vektorterek közötti lineáris leképezés rangján a képtér dimenzióját értjük:

$r(\mathcal{A}) := \dim(\mathrm{im}(\mathcal{A}))$.

Egy $\mathcal{A}$ lineáris leképezés nullitásán a magtér dimenzióját értjük:

$n(\mathcal{A}) := \dim(\ker(\mathcal{A}))$.

Példák.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az alábbi leképezések lineárisak:

(1) Legyen V tetszőlegesen választott vektortér.

a./ $\mathcal{A}: V \to V, \quad x \mapsto x$ (identikus leképezés)

b./ $\mathcal{A}: V \to V, \quad x \mapsto o$ (azonosan nulla leképezés).

(2) $\mathcal{A}: P_{\mathbb{R}} \to P_{\mathbb{R}}, \quad p \mapsto p'$ (polinom deriválása)

(3) $\mathcal{A}: P_{\mathbb{R}} \to P_{\mathbb{R}}, \quad p \mapsto \int_{x_0} p$ (polinom primitív függvényének előállítása)

($x_0 \in \mathbb{R}$ rögzített)

(4) Legyen $g \in P_{\mathbb{R}}$ rögzített.

$\mathcal{A}: P_{\mathbb{R}} \to P_{\mathbb{R}}, \quad p \mapsto pg$ (szorzás rögzített polinommal)

(5) Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ rögzített

$\mathcal{A}: P_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto p(\alpha)$ (helyettesítési érték képzése)

(6) Legyen V a valós számokból álló konvergens sorozatok vektortere.

$\mathcal{A}: V \to \mathbb{R}, \quad (a_n) \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n$ (határérték képzése)

(7) Legyen $k \in \mathbb{N}$ rögzített:

$\mathcal{A}: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}, \quad (a_n) \mapsto a_k$ (sorozathoz hozzárendeljük annak k-adik tagját)

(8) $\mathcal{A}: S(I) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_I f$ (határozott integrál).

(9) Az (5) és (7) Példák speciális esetei az alábbinak:
Legyen $V = \{f \mid f: H \to X\}$ a 3.4. (8) Példában ismertetett vektortér, és $h \in X$ rögzített. Ekkor a $\hat{h}: V \to X, \quad f \mapsto f(h)$ ún. helyettesítő függvény lineáris.

3.9. Megjegyzések.

(1) Ha V és W véges dimenziós vektorterek, akkor analóg módon ($\mathbb{R}^m$ helyett V-t és $\mathbb{R}^n$ helyett W-t írva) érvényes a 2.3. Állítás, és értelmezhető lineáris leképezés mátrixa (ld. 2.5. Definíciót).

(2) $V \to W$ típusú lineáris leképezésekre a 2. fejezetben leírtakkal analóg módon értelmezhetők a lineáris leképezések közötti műveletek, analóg módon érvényesek a műveletek tulajdonságai.

(3) Legyenek V és W azonos test (Γ) feletti vektorterek. Ekkor a
$\mathcal{L}(V,W) := \{\mathcal{A}: V \to W \mid \mathcal{A}$ lineáris$\}$ $V \to W$ típusú lineáris leképezések halmaza a lineáris leképezések közötti összeadással és a skalárral való szorzással vektortér, melynek nulleleme az
$\mathcal{A}: V \to W, \quad x \mapsto o$ leképezés.
Speciálisan, $W=\Gamma$ esetben a
$\mathcal{L}(V,\Gamma) := \{\mathcal{A}: V \to \Gamma \mid \mathcal{A}$ lineáris$\}$ vektorteret a V vektortér duálisának hívjuk és V^* -gal jelöljük.

3.10. Állítás.

Az $\mathcal{A}: V \to W$ lineáris leképezés pontosan akkor injektív, ha $\ker(\mathcal{A}) = \{o\}$.

Bizonyítás: megegyezik a 2.23. Állítás bizonyításával, $\mathbb{R}^m$ helyett V-t, $\mathbb{R}^n$ helyett W-t véve.

3.11. Állítás.

Legyenek V és W azonos Γ test feletti vektorterek.

(1) Bármely $\mathcal{A}: V \to W$ lineáris leképezésnél lineárisan összefüggő vektorok képei is lineárisan összefüggőek.

(2) Az $\mathcal{A}: V \to W$ lineáris leképezés pontosan akkor injektív, ha lineárisan független vektorhalmaz $\mathcal{A}$ általi képe is lineárisan független.

(3) Az $\mathcal{A}: V \to W$ lineáris leképezés pontosan akkor ráképezés, ha generátorrendszer $\mathcal{A}$ általi képe is generátorrendszer.

(4) Az $\mathcal{A}: V \to W$ lineáris leképezés pontosan akkor bijekció, ha bázis $\mathcal{A}$ általi képe is bázis.

Bizonyítás:

(1) Legyenek $a_1, \ldots, a_k$ lineárisan összefüggő vektorok.
Ekkor léteznek olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ skalárok (melyek között van 0-tól különböző), hogy $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = o$ teljesül. De ekkor $\mathcal{A}$ linearitása miatt $o = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathcal{A}(a_i)$ is teljesül, ami éppen azt jelenti, hogy az $\mathcal{A}(a_1), \ldots, \mathcal{A}(a_k)$ vektorok is lineárisan összefüggőek.

(2) Ha az $\mathcal{A}: V \to W$ lineáris leképezés injektív, akkor lineárisan független vektorhalmaz képe is lineárisan független: a bizonyítás a 2.24. Állítás bizonyításának analógja.

Ha bármely $L \subset V$ lineárisan független vektorhalmaz esetén $\mathcal{A}(L) \subset W$ is lineárisan független, akkor $\mathcal{A}$ injektív:
Legyen $x \in V$, $x \neq o$. Ekkor $\{x\}$ lineárisan független, így a feltétel értelmében $\{\mathcal{A}(x)\}$ is az, ezért $\mathcal{A}(x) \neq o$.
Így $\mathcal{A}(x) = o \iff x = o$, vagyis $\ker(\mathcal{A}) = \{o\}$, ezért a 3.10. Állítás szerint $\mathcal{A}$ injektív.

(3) Ha az $\mathcal{A}: V \to W$ lineáris leképezés ráképezés, akkor generátorrendszer képe is generátorrendszer:
a bizonyítás a 2.25. Állítás bizonyításának analógja.

Ha bármely $G \subset V$ generátorrendszer esetén $\mathcal{A}(G) \subset W$ is generátorrendszer, akkor $\mathcal{A}$ ráképezés:
Legyen $G \subset V$ tetszőlegesen választott generátorrendszer. Ekkor (mivel $\mathcal{A}(G)$ is generátorrendszer), bármely $y \in W$ esetén léteznek olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \Gamma$ skalárok és $g_1, \ldots, g_k \in G$ vektorok, hogy $y = \lambda_1 \mathcal{A}(g_1) + \ldots + \lambda_k \mathcal{A}(g_k)$. Ekkor $\mathcal{A}$ linearitása miatt $y = \mathcal{A}(\lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_k g_k)$, így $y \in \mathrm{im}(\mathcal{A})$. Vagyis $\mathcal{A}$ ráképezés.

(4) a./ Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}: V \to W$ lineáris leképezés bijekció.
Legyen $B \subset V$ bázis.
Mivel $\mathcal{A}$ injektív, így $\mathcal{A}(B)$ lineárisan független, mivel $\mathcal{A}$ ráképezés, így $\mathcal{A}(B)$ generátorrendszer. Tehát $\mathcal{A}(B)$ bázis.

b./ Tegyük fel, hogy bármely $B \subset V$ bázis esetén $\mathcal{A}(B)$ is bázis W-ben.
Legyen $L \subset V$ lineárisan független. Ekkor létezik olyan B bázis. V-ben, hogy $L \subset B$. Mivel $\mathcal{A}(B)$ is bázis W-ben, ezért $\mathcal{A}(L) \subset \mathcal{A}(B)$ miatt $\mathcal{A}(L)$ lineárisan független. Vagyis bármely $L \subset V$ lineárisan független vektorhalmazra $\mathcal{A}(L)$ is lineárisan független, ezért (2) szerint $\mathcal{A}$ injektív.
Legyen $G \subset V$ generátorrendszer. Ekkor létezik olyan B bázis V-ben, hogy $B \subset G$. Mivel $\mathcal{A}(B)$ is bázis W-ben, ezért $\mathcal{A}(B) \subset \mathcal{A}(G)$ miatt $\mathcal{A}(G)$ is generátorrendszer. Vagyis bármely $G \subset V$ generátorrendszer esetén $\mathcal{A}(G)$ is generátorrendszer, ezért (3) szerint $\mathcal{A}$ ráképezés.
Így $\mathcal{A}$ bijekció.

3.12. Megjegyzés.

A bijektív lineáris leképezéseket lineáris izomorfizmusoknak nevezzük. A V és W vektortereket izomorfaknak hívjuk, ha létezik $\mathcal{A}: V \to W$ lineáris izomorfizmus. Jel: $V \cong W$.

3.13. Állítás. Struktúra-tétel

Két azonos test feletti véges dimenziós vektortér pontosan akkor izomorf, ha dimenziójuk megegyezik.

Bizonyítás:

Legyen V és W két, azonos test (pl. $\Gamma = \mathbb{R}$) feletti vektortér.

1./ Tegyük fel, hogy létezik $\mathcal{A}: V \to W$ lineáris izomorfizmus ($V \cong W$). Ekkor a 3.11. (4) Állítás szerint $\mathcal{A}$ bázist bázisba visz át, amiből következik, hogy $\dim(V) = \dim(W)$.

2./ Tegyük fel, hogy $\dim(V) = \dim(W)$. Legyen $E = \{e_1,\dots,e_n\}$ bázisa V-nek. Tekintsük azt az $\mathcal{A}: V \to \mathbb{R}^n$ leképezést, amely minden $x \in V$ -hez hozzárendeli azt az $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ rendezett n -est, melyre $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$. ($V$ minden eleméhez hozzárendeljük annak az E bázisra vonatkozó koordinátáit.) Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{A}$ lineáris és bijektív, így $V \cong \mathbb{R}^n$. Hasonlóan megmutatható, hogy $W \cong \mathbb{R}^n$. De ekkor $V \cong W$ is teljesül.

Példa.

Legyen V és W véges dimenziós valós vektortér, $\dim(V)=m$, $\dim(W)=n$. Ekkor $\mathcal{L}(V,W) \cong \mathbb{R}^{n\times m}$, ugyanis az a leképezés, amely egy $\mathcal{A}: V \to W$ lineáris leképezéshez hozzárendeli annak rögzített bázisokra vonatkozó A mátrixát lineáris és bijekció (ezt $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ típusú leképezések esetén már láttuk a 2. fejezetben). Következésképpen:

$$\dim(\mathcal{L}(V,W)) = \dim(\mathbb{R}^{n\times m}) = n\cdot m = \dim(V)\cdot\dim(W).$$

3.14. Állítás. **Nullitás-rang tétel**

Legyen $\mathcal{A}: V \to W$ lineáris, V véges dimenziós.
Ekkor

$$n(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A}) = \dim(V),$$

azaz $\mathcal{A}$ nullitásának és rangjának összege egyenlő V dimenziójával.

Bizonyítás:

Legyen $\{b_1,\dots,b_k\}$ a $\ker(\mathcal{A})$ egy bázisa. Ekkor léteznek olyan $a_1,\dots,a_r \in V$ vektorok, hogy a $B = \{b_1,\dots,b_k,a_1,\dots,a_r\}$ vektorhalmaz bázis V-ben. Ekkor a $H = \{\mathcal{A}(b_1),\dots,\mathcal{A}(b_k),\mathcal{A}(a_1),\dots,\mathcal{A}(a_r)\} = \{o,\mathcal{A}(a_1),\dots,\mathcal{A}(a_r)\}$ vektorhalmaz generátorrendszer az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés képterében, és a $H' = H \setminus \{o\} = \{\mathcal{A}(a_1),\dots,\mathcal{A}(a_r)\}$ vektorhalmaz is generálja $\mathrm{im}(\mathcal{A})$ -t. Belátjuk, hogy H' lineárisan független is, így bázisa $\mathrm{im}(\mathcal{A})$-nak.

A $\sum_{j=1}^{r} \mu_j \mathcal{A}(a_j) = o$ lineáris kombinációt vizsgálva, $\mathcal{A}$ linearitása miatt

$$o = \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{r} \mu_j a_j\right), \quad \text{vagyis} \quad \sum_{j=1}^{r} \mu_j a_j \in \ker(\mathcal{A}).$$

Ekkor a $\sum_{j=1}^{r} \mu_j a_j$ vektor előáll a $b_1,\dots,b_k$ vektorok lineáris kombinációjaként:

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j a_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i.$$

Így $\sum_{j=1}^{r} \mu_j a_j + \sum_{i=1}^{k} (-\lambda_i) b_i = o$.

Mivel az $a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_k$ vektorok bázist alkotnak V-ben, így lineárisan függetlenek, amiből $\mu_1 = \dots = \mu_r = \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ következik.
Ez azonban azt jelenti, hogy az $\mathcal{A}(a_1),\dots,\mathcal{A}(a_r)$ vektorokból csak triviálisan állítható elő a $o \in W$ vektor, vagyis H' lineárisan független.
Jelöléseink szerint $n(\mathcal{A}) = \dim(\ker(\mathcal{A})) = k$, $r(\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{im}(\mathcal{A})) = r$,
$\dim(V) = r+k$.
Vagyis $n(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A}) = \dim(V)$.

3.15. Következmény.

Legyen V és W n-dimenziós vektortér, $\mathcal{A}: V \to W$ lineáris leképezés. A következő kijelentések ekvivalensek:

(1) $\mathcal{A}$ bijektív
(2) $\mathcal{A}$ injektív
(3) $\mathcal{A}$ ráképezés
(4) $r(\mathcal{A}) = \dim(V) = n$.

4. SKALÁRIS SZORZATOS VEKTORTERETEK

Skaláris szorzatok

4.1. Definíció.

Legyen V és W azonos test (Γ) feletti vektortér. A $\mathcal{B}: V\times V \to W$ leképezést bilineárisnak nevezzük, ha bármely $u,v,w \in V$, $\lambda\in\Gamma$ esetén:

(i) $\mathcal{B}(u,v+w) = \mathcal{B}(u,v) + \mathcal{B}(u,w)$
(ii) $\mathcal{B}(u,\lambda v) = \lambda\cdot\mathcal{B}(u,v)$
(iii) $\mathcal{B}(u+v,w) = \mathcal{B}(u,w) + \mathcal{B}(v,w)$
(iv) $\mathcal{B}(\lambda u,v) = \lambda\cdot\mathcal{B}(u,v)$

A felsorolt tulajdonságokat röviden úgy is mondhatjuk, hogy a $\mathcal{B}$ leképezés "mindkét változójában lineáris".
W=Γ esetben bilineáris formákról beszélünk.

4.2. Definíció.

Legyen V valós vektortér.
A $\mathcal{B}: V\times V \to \mathbb{R}$ függvény

(1) szimmetrikus, ha $\forall u,v \in V$ -re $\mathcal{B}(u,v) = \mathcal{B}(v,u)$,
(2) antiszimmetrikus, ha $\forall u,v \in V$ -re $\mathcal{B}(u,v) = -\mathcal{B}(v,u)$,
(3) pozitív definit, ha $\forall u \in V$ -re $\mathcal{B}(u,u) \geq 0$ és $\mathcal{B}(u,u) = 0 \iff u=o$.

4.3. Definíció.

Legyen V komplex vektortér.
A $\mathcal{B}: V\times V \to \mathbb{C}$ függvényt konjugált bilineárisnak nevezzük, ha bármely $u,v,w \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén:

(i) $\mathcal{B}(u,v+w) = \mathcal{B}(u,v) + \mathcal{B}(u,w)$
(ii) $\mathcal{B}(u,\lambda v) = \overline{\lambda}\cdot\mathcal{B}(u,v)$
(iii) $\mathcal{B}(u+v,w) = \mathcal{B}(u,w) + \mathcal{B}(v,w)$
(iv) $\mathcal{B}(\lambda u,v) = \lambda\cdot\mathcal{B}(u,v)$

A $\mathcal{B}: V\times V \to \mathbb{C}$ függvény Hermite-típusú, ha bármely $u,v \in V$ -re

$$\mathcal{B}(u,v) = \overline{\mathcal{B}(v,u)}.$$

4.4. Állítás.

Ha a $\mathcal{B}: V\times V \to \mathbb{C}$ függvény Hermite-típusú, akkor $\forall u \in V$ -re $\mathcal{B}(u,u) \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás:

$\mathcal{B}$ Hermite-típusú, így $\mathcal{B}(u,u) = \overline{\mathcal{B}(u,u)}$, $\forall u \in V$-re. Ez éppen azt jelenti, hogy $\mathcal{B}(u,u) \in \mathbb{R}$.

4.5. Definíció.

Egy $\mathcal{B}: V\times V \to \mathbb{C}$ Hermite-típusú függvény pozitív definit, ha $\forall u \in V$-re

$$\mathcal{B}(u,u) \geq 0 \quad \text{és} \quad \mathcal{B}(u,u) = 0 \iff u=o.$$

4.6. Definíció.

(1) Egy $S: V\times V \to \mathbb{R}$ függvényt skaláris szorzatnak nevezünk a V valós vektortéren, ha S bilineáris, szimmetrikus és pozitív definit.

(2) Egy $S: V\times V \to \mathbb{C}$ függvényt skaláris szorzatnak nevezünk a V komplex vektortéren, ha S konjugált bilineáris, Hermite-típusú és pozitív definit.

(3) Skaláris szorzatos téren skaláris szorzattal ellátott vektorteret értünk.
A skaláris szorzat jelölése: $\langle\ ,\ \rangle$.

4.7. Megjegyzések.

(1) Könnyen ellenőrizhető, hogy a 4.6. Definíció (1) és (2) része (nem választva külön a valós és a komplex esetet) az alábbi módon is megfogalmazható: Legyen V valós vagy komplex vektortér. $\mathbb{K}$ jelölje $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ valamelyikét.
A $\langle\ ,\ \rangle: V\times V \to \mathbb{K}$ függvényt skaláris szorzatnak nevezzük, ha $\forall u,v,w \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén:
(1) $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$,
(2) $\langle u,u\rangle \geq 0$ és $\langle u,u\rangle = 0 \iff u=o$,
(3) $\langle \lambda u,v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$,
(4) $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$.

(2) A valós skaláris szoratos tereket euklideszi vektortereknek, a komplex skaláris szorzatos tereket unitér vektortereknek is nevezik.

4.8. Példák.

(1) Igazoljuk, hogy a

$$< , > : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (u,v) \mapsto \langle u,v\rangle := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

függvény skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben!

Megjegyezzük, hogy a fenti skaláris szorzattal már találkoztunk a 2. fejezetben (ld. 2.7. Definíciót).

Legyen $u,v,w \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ekkor

$$\langle u, v+w\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i(v_i+w_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i + \sum_{i=1}^{n} u_i w_i = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle,$$

$$\langle u, \lambda v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i(\lambda v_i) = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \lambda \cdot \langle u,v\rangle.$$

$$\langle u+v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} (u_i+v_i)w_i = \sum_{i=1}^{n} u_i w_i + \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle,$$

$$\langle \lambda u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\lambda u_i)v_i = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \lambda \cdot \langle u,v\rangle .$$

Tehát $< , >$ bilineáris.

$\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = \langle v,u\rangle$, így $< , >$ szimmetrikus.

$\langle u,u\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \geq 0$, és

$\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u_i = 0$, $i=1,\dots,n \Leftrightarrow u=o$, vagyis $< , >$ pozitív definit.

Így $< , >$ skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben.

(2) Igazoljuk, hogy a

$< , > : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle := \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v}_i$ függvény skaláris szorzat $\mathbb{C}^n$-ben!

Legyen $u,v,w \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Ekkor

$$\langle u, v+w\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{(v_i+w_i)} = \sum_{i=1}^{n} u_i(\overline{v}_i + \overline{w}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v}_i + \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{w}_i = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle ,$$

$$\langle u, \lambda v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{(\lambda v_i)} = \sum_{i=1}^{n} u_i(\overline{\lambda}\cdot\overline{v}_i) = \overline{\lambda}\cdot \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v}_i =$$

$$= \overline{\lambda}\cdot\langle u,v\rangle ,$$

$$\langle u+v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} (u_i+v_i)\overline{w}_i = \sum_{i=1}^{n} u_i\overline{w}_i + \sum_{i=1}^{n} v_i\overline{w}_i =$$

$$= \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle ,$$

$$\langle \lambda u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\lambda u_i)\overline{v}_i = \lambda\cdot\sum_{i=1}^{n} u_i\overline{v}_i = \lambda\cdot\langle u,v\rangle .$$

Tehát $< , >$ konjugált bilineáris.

$$\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i\overline{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{v}_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{v}_i\cdot\overline{\overline{u}}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i\cdot\overline{u}_i} =$$

$$= \overline{\sum_{i=1}^{n} v_i\overline{u}_i} = \overline{\langle v,u\rangle} , \text{ így } < , > \text{ Hermite-típusú.}$$

$\langle u,u\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i\cdot\overline{u}_i = \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2 \geq 0$, és

$\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow |u_i| = 0$, $i=1,\dots,n \Leftrightarrow u_i=0$, $i=1,\dots,n \Leftrightarrow u=o$,
vagyis $< , >$ pozitív definit.
Így $< , >$ skaláris szorzat $\mathbb{C}^n$-ben.

Megjegyezzük, hogy mindkét példában a megadott függvények skaláris szorzat voltát a 4.7. (1). Megjegyzésben szereplő (1)-(4) kritérium teljesülésével is igazolhatjuk.

(3) További példák skaláris szorzatokra:

a./ A $< , > : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle := \sum_{k=1}^{n} k u_k v_k$ függvény skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben.

b./ A $< , > : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle := \sum_{k=1}^{n} k u_k \overline{v}_k$ függvény skaláris szorzat $\mathbb{C}^n$-ben.

A (3) a, b, példákat az (1), (2) példákkal összevetve láthatjuk, hogy ugyanabban a vektortérben több skaláris szorzat is megadható.

c./ A $< , > : C(I) \times C(I) \to \mathbb{R}$, $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle := \int_I f\cdot g$ függvény skaláris szorzat a $C(I)$ vektortérben. (Itt I véges intervallum $\mathbb{R}$-ben.)

d./ Jelölje V olyan 0-hoz konvergáló valós (a_n) sorozatok halmazát, melyekre $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$.
Igazolható, hogy V altér $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$-ben, így maga is valós vektortér.
$A\ \langle\ ,\ \rangle : V\times V \to \mathbb{R},\ ((a_n),(b_n)) \mapsto \langle (a_n),(b_n)\rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ függvény skaláris szorzat V-ben.

Skaláris szorzatos terek tulajdonságai

4.9. Definíció.

Legyen V skaláris szorzatos tér.
Az $x \in V$ vektor hosszán (vagy normáján) az $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ számot értjük.

4.10. Megjegyzés.

A skaláris szorzat pozitív definitségéből következik, hogy bármely $x \in V$ -re $\|x\| \geq 0$, és $\|x\| = 0 \iff x=o$.

4.11. Állítás.

Legyen V skaláris szorzatos tér, $x \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
Ekkor $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Bizonyítás:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\langle x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\cdot\bar{\lambda}\cdot\langle x,x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\cdot\langle x,x\rangle} = |\lambda|\cdot\sqrt{\langle x,x\rangle} = |\lambda|\cdot\|x\|\ .$$

4.12. Definíció.

Legyen V skaláris szorzatos tér.
Az $x \in V$ vektor egységre normált, ha: $\|x\| = 1$.

4.13. Állítás.

Bármely $x \in V$, $x \neq o$ vektorra az $\frac{x}{\|x\|}$ vektor egységre normált.

Bizonyítás:

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|x\|} \right| \cdot \|x\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|x\| = 1.$$

Példák.

(1) a./ Tekintsük a 4.8.(1). Példában szereplő skaláris szorzatot speciálisan $n=3$ esetben!
$a := (-2,0,3)$
$b := (5,-1,1)$
Határozzuk meg az $\langle a,b\rangle$ skaláris szorzatot!
$$\langle a,b\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = (-2)\cdot 5 + 0\cdot(-1) + 3\cdot 1 = -7$$
Határozzuk meg az "a" vektor hosszát!
$$\|a\| = \sqrt{\langle a,a\rangle} = \sqrt{(-2)^2+0^2+3^2} = \sqrt{13}\ .$$

b./ Tekintsük a 4.8.(3).a., Példában szereplő skaláris szorzatot speciálisan $n=3$ esetben!
$a := (-2,0,3)$
$b := (5,-1,1)$
Határozzuk meg az $\langle a,b\rangle$ skaláris szorzatot!
$$\langle a,b\rangle = \sum_{k=1}^{3} k a_k b_k = 1\cdot(-2)\cdot 5 + 2\cdot 0\cdot(-1) + 3\cdot 3\cdot 1 = -1$$
Határozzuk meg az "a" vektor hosszát!
$$\|a\| = \sqrt{\langle a,a\rangle} = \sqrt{1\cdot(-2)^2+2\cdot 0^2+3\cdot 3^2} = \sqrt{31}$$

(3) Tekintsük a 4.8.(3).c., Példában szereplő skaláris szorzatot $I = [0,1]$ esetben! Legyen
$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$
$g : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Ekkor $f,g \in C([0,1])$.
Határozzuk meg az $\langle f,g\rangle$ skaláris szorzatot!
$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f\cdot g = \int_0^1 x\cdot x^2\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\ .$$

Határozzuk meg f hosszát!
$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^2\,dx} = \sqrt{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ .$$

4.14. Állítás. Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség

Legyen V skaláris szorzatos tér; $x,y \in V$.
Ekkor:
$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle$$

Bizonyítás:

1./ Ha x=y=o, akkor az állítás igaz.

2./ Ha x és y közül legalább az egyik nem nullvektor:

Mivel az egyenlőtlenség x-re és y-ra nézve szimmetrikus, feltehetjük, hogy $y \neq o$.

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ -ra $\langle x-\lambda y,\ x-\lambda y\rangle \geq 0$.

Így $\langle x-\lambda y,\ x-\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle - \lambda\langle y,x\rangle - \bar{\lambda}\langle x,y\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle y,y\rangle \geq 0$,

azaz

$$\langle x,x\rangle + |\lambda|^2\langle y,y\rangle \geq \lambda\cdot\overline{\langle x,y\rangle} + \bar{\lambda}\cdot\langle x,y\rangle .$$

Legyen $\lambda := \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$.

Ekkor

$$\langle x,x\rangle + \left|\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right|^2\cdot\langle y,y\rangle \geq \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\cdot\overline{\langle x,y\rangle} + \overline{\left(\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right)}\,\langle x,y\rangle$$ is teljesül.

Felhasználva, hogy $\langle y,y\rangle \in \mathbb{R}^+$, az alábbiakat kapjuk:

$$\langle x,x\rangle + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} \geq 2\cdot\frac{\langle x,y\rangle\cdot\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle y,y\rangle} = 2\cdot\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} .$$

Rendezve a fenti egyenlőtlenséget:

$\langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle \geq |\langle x,y\rangle|^2$, ami éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség.

4.15. Példák.

A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz tétel speciálisan

(1) a 4.8.(1). Példában szereplő skaláris szorzatos térre;

Legyen $u,v \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right) .$$

(2) a 4.8.(2). Példában szereplő skaláris szorzatos térre:

Legyen $u,v \in \mathbb{C}^n$. Ekkor

$$\left(\left|\sum_{i=1}^{n} u_i\bar{v}_i\right|\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2\right) .$$

(3) a 4.8.(3).c., Példában szereplő skaláris szorzatos térre:

Legyen $f,g \in C(I)$. Ekkor:

$$\left(\int_I f\cdot g\right)^2 \leq \left(\int_I f^2\right)\cdot\left(\int_I g^2\right) .$$

(4) a 4.8.(3).d., Példában szereplő skaláris szorzatos térre:

Legyen $(a_n), (b_n) \in V$. Ekkor:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right) .$$

4.16. Állítás. Minkowsky-(vagy háromszög-)egyenlőtlenség

Legyen V skaláris szorzatos tér, $x,y \in V$.

Ekkor

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Bizonyítás:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \iff \langle x+y,\ x+y\rangle \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2$$

A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség alapján:

$\sqrt{\langle x,x\rangle\ \langle y,y\rangle} \geq |\langle x,y\rangle|$, azaz

$$\|x\|\cdot\|y\| \geq |\langle x,y\rangle| \qquad (*)$$

A (*) egyenlőtlenséget felhasználva és tudva, hogy egy komplex szám valós része kisebb vagy egyenlő mint abszolútértéke, az alábbiakat kapjuk:

$$\langle x+y,\ x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle =$$
$$= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\cdot|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \leq$$
$$\leq \|x\|^2 + 2\cdot\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 .$$

A kapott egyenlőtlenség pedig ekvivalens a bizonyítandó állítással.

4.17. Megjegyzés.

A 4.10. Megjegyzés valamint a 4.11. és a 4.16. Állítás szerint a $\|\ \| : V \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ függvény teljesíti az analízisből ismeretes ún. normatulajdonságokat. Így skaláris szorzatos terekben mindig megadható normafüggvény, amelyet skaláris szorzatból származtatott normának nevezünk.

4.18. Állítás.

Legyen V skaláris szorzatos tér. V bármely két nullvektortól különböző x,y vektorához létezik egyetlen olyan $\varphi \in [0,\pi]$ valós szám, hogy

$\cos\varphi = \mathrm{Re}\left(\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}\right)$. E számot az x és y vektorok szögének nevezzük.

Jel: $\sphericalangle(x,y)$.

Bizonyítás:

A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenségből:

$$\left| \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \right| \le 1, \qquad \text{amiből}$$

$$-1 \le \mathrm{Re}\left(\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \right) \le 1 \qquad \text{következik.}$$

A cos függvény a $[0,\pi]$ intervallumon injektív és ráképez a $[-1,1]$ intervallumra, így egyértelműen létezik olyan $0 \le \varphi \le \pi$ valós szám, hogy

$$\cos\varphi = \mathrm{Re}\left(\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \right) \qquad \text{legyen.}$$

4.19. Megjegyzések.

(1) Ha V valós skaláris szorzatos tér, akkor bármely két $x,y \in V$, $x,y \neq o$ vektor skaláris szorzata az alábbi módon is megkapható:
$\langle x,y\rangle = \|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\varphi$,
ahol $\varphi = \sphericalangle(x,y)$.

(2) A skaláris szorzat tulajdonságaiból következik, hogy x és y szöge ugyanakkora mint y és x szöge.

(3) Legyen V valós skaláris szorzatos tér, x és $y \in V$, melyekre $y=\lambda x$. Tegyük fel, hogy $x \neq o$, $\lambda \neq 0$.
Ekkor

$$\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} = \frac{\langle x,\lambda x\rangle}{\|x\|\cdot\|\lambda x\|} = \frac{\lambda\cdot\langle x,x\rangle}{|\lambda|\cdot\|x\|^2} = \frac{\lambda}{|\lambda|} = \begin{cases} 1, & \text{ha } \lambda>0, \\ -1, & \text{ha } \lambda<0. \end{cases}$$

Ha $\lambda>0$, akkor x és y szöge 0, ilyenkor x-t és y-t egyirányú vektoroknak nevezzük. Ha $\lambda < 0$, akkor x és y szöge π, ilyenkor x-t és y-t ellentétes irányú vektoroknak nevezzük.

4.20. Állítás.

Legyen V skaláris szorzatos tér.

(1) Legyen $x,y \in V$, $x,y \neq o$, $\varphi := \sphericalangle(x,y)$. Ekkor
$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\varphi$ "cosinus-tétel".

(2) Legyen $x,y \in V$, $x,y \neq o$, $\sphericalangle(x,y) = \frac{\pi}{2}$. Ekkor
$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ "Pitagorasz-tétel".

(3) Legyen $x,y \in V$, $x,y \neq o$. Ekkor
$\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ paralelogramma-szabály.
(paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével)

Bizonyítás:

(1) $\|x-y\|^2 = \langle x-y,\ x-y\rangle = \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle =$
$= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle - \overline{\langle x,y\rangle} = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle) =$
$= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\varphi.$

(2) Ha $\sphericalangle(x,y) = \frac{\pi}{2}$, akkor $\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle) = 0$, így az állítás speciálisan adódik az előzőből.

(3) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)$
$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)$.
A két egyenletet összeadva adódik az állítás.

Ortogonalitás

4.21. Definíció

Skaláris szorzatos tér két vektorát ortogonálisnak mondjuk, ha skaláris szorzatuk nulla. Egy vektorhalmaz ortogonális, ha páronként ortogonális, nem nulla vektorok alkotják.
Speciálisan, ortonormált vektorhalmazon egységre normált vektorokból álló ortogonális vektorhalmazt értünk. Ortonormált bázison olyan vektorhalmazt értünk, amely egyidejűleg bázis is és ortonormált is.

Megjegyzések.

(1) x és y ortogonális $\Leftrightarrow \sphericalangle(x,y) = \frac{\pi}{2}$, vagy $x=o$ vagy $y=o$.

(2) Ortogonális vektorhalmazból a vektorok egységre normálásával (ld. 4.13. Állítást) azonnal származik ortonormált vektorhalmaz.

Példák.

(1) Tekintsük $\mathbb{R}^4$-ben a 4.8. (1)-beli skaláris szorzatot.
Ebben a skaláris szorzatos térben $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisa ortonormált.

(2) Tekintsük $\mathbb{R}^n$-ben a 4.8. (3)a.,-beli skaláris szorzatot.
Ebben a skaláris szorzatos térben $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisa ortogonális, de nem ortonormált. A kanonikus bázisból származtatható ortonormált bázis:

$$\left\{(1,0,\dots,0),\ (0,\frac{1}{\sqrt{2}},\dots,0),\ \dots,\ (0,\dots,\frac{1}{\sqrt{n}})\right\}.$$

4.22. Állítás.

Legyen V skaláris szorzatos tér.

(1) Legyen $b \in V$, $b \neq o$ rögzített.
Ekkor $\forall x \in V$ -hez létezik pontosan egy $\alpha \in \mathbb{K}$, hogy $x-\alpha b$ és b ortogonális.
Nevezetesen: $\alpha = \frac{\langle x,b\rangle}{\langle b,b\rangle}$. Ezt az α számot az x vektor b-re vonatkozó Fourier-együtthatójának nevezzük, αb pedig az x vektor b-re való ortogonális vetülete.

(2) Minden ortogonális vektorhalmaz lineárisan független.

(3) Ha a $H = \{e_1,\dots,e_n\} \subset V$ vektorhalmaz ortogonális, és $x \in V$ tetszőlegesen választott, akkor az

$$x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x,e_i\rangle}{\langle e_i,e_i\rangle} e_i \qquad \text{vektor ortogonális az } e_1,\dots,e_n$$

vektorok mindegyikére.
Speciálisan:
$x \in \mathcal{L}(e_1\dots,e_n) \iff x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x,e_i\rangle}{\langle e_i,e_i\rangle} e_i$, azaz x előáll az e_i vektorokra vonatkozó ortogonális vetületek összegeként.

Bizonyítás:

(1) Az alábbi egyenlőségek egyszerre teljesülnek:

$$\langle x-\alpha b, b\rangle = 0$$
$$\langle x,b\rangle-\alpha\langle b,b\rangle = 0$$
$$\alpha = \frac{\langle x,b\rangle}{\langle b,b\rangle}, \qquad \text{azaz } \alpha \text{ egyértelműen létezik.}$$

(2) Elég véges vektorhalmazt vizsgálni.
Legyen $H = \{v_1,\dots,v_n\}$ ortogonális.
Tekintsük a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = o$ lineáris kombinációt. Ekkor
$\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i,\ v_j\rangle = 0, \qquad \forall j = 1,\dots,n$ -re.

Felhasználva H ortogonalitását:
$0 = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i,\ v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\langle v_i,v_j\rangle = \lambda_j\langle v_j,v_j\rangle$.

Mivel $\langle v_j,v_j\rangle \neq 0$, így $\lambda_j = 0$, $\forall j = 1,\dots,n$-re.
Ez pedig azt jelenti, hogy a $v_1,\dots,v_n$ vektorokból a nullvektor csak triviálisan állítható elő, vagyis H lineárisan független.

(3) Felhasználjuk, hogy $\langle e_i,e_j\rangle = 0$, ha $i\neq j$.
Így
$$\langle x-\sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x,e_i\rangle}{\langle e_i,e_i\rangle} e_i, e_j\rangle = \langle x,e_j\rangle - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x,e_i\rangle}{\langle e_i,e_i\rangle}\langle e_i,e_j\rangle =$$
$$= \langle x,e_j\rangle - \langle x,e_j\rangle = 0, \quad \forall j=1,\dots,n\text{-re.}$$
Tehát a felírt vektor valóban ortogonális H minden elemére.
Ha $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x,e_i\rangle}{\langle e_i,e_i\rangle} e_i$, akkor nyilvánvalóan $x \in \mathcal{L}(e_1,\dots,e_n)$.
Megfordítva:
Tegyük fel, hogy $x \in \mathcal{L}(e_1,\dots,e_n)$. Ekkor x előáll $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ alakban.
Minden $j \in \underline{n}$-re:
$\langle x,e_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i,e_j\rangle = \lambda_j\langle e_j,e_j\rangle$.

Innen: $\lambda_j = \frac{\langle x,e_j\rangle}{\langle e_j,e_j\rangle}$.

4.23. Következmény.

Legyen V véges dimenziós skaláris szorzatos tér, $B = \{e_1,\dots,e_n\}$ ortogonális bázis V-ben. Ekkor:

(1) $\forall x \in V$ -re: $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x,\ e_i\rangle}{\langle e_i,e_i\rangle} e_i$

(Vagyis ortogonális bázisra vonatkozó vektorkoordináták a Fourier-együtthatók).

(2) Ha $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ és $b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$, akkor $\langle a,b\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_i$.

4.24. Állítás. **Gram-Schmidt-féle ortogonalizálás**

Véges dimenziós skaláris szorzatos vektortérben létezik ortonormált bázis.

Bizonyítás:

Legyen $E = \{e_1,\dots,e_n\}$ tetszőlegesen választott bázis a V skaláris szorzatos térben. Konstruálunk egy $F = \{f_1,\dots,f_n\}$ ortonormált bázist V-ben.

$$f_1 := \frac{e_1}{\|e_1\|}$$

k-ra vonatkozó indukcióval keressük meg f_k-t!
Tegyük fel, hogy az $f_1,\dots,f_k$ vektorokat ($1\le k<n$) már megtaláltuk úgy, hogy azok ortonormált vektorhalmazt alkotnak.

$g := e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle e_{k+1}, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle} f_1$. Ekkor a 4.22. Állítás (3) része szerint g ortogonális az $f_1,\dots,f_k$ vektorok mindegyikére, és $g\neq o$ (különben $e_{k+1} \in \mathcal{L}(e_1,\dots,e_k)$, ami lehetetlen).

$f_{k+1} := \frac{g}{\|g\|}$. Így $f_1,\dots,f_k,f_{k+1}$ ortonormált.

A leírt módszerrel lépésről lépésre bővíthetjük az ortonormált vektorok halmazát, amíg ortonormált bázist nem kapunk.

Példák:

(1) Legyen $v_1 = (1,-1,1,-1)$
$v_2 = (5,1,1,1)$
$v_3 = (-3,-3,1,-3)$.

Adjuk meg az $\mathcal{L}(v_1,v_2,v_3) \subset \mathbb{R}^4$ altér egy ortonormált bázisát, $\mathbb{R}^4$-ben a 4.8. (1)-beli skaláris szorzatot tekintve!

(Itt induláskor nem tudjuk, hogy a v_1,v_2,v_3 vektorok lineárisan függetlenek-e, azaz bázist alkotnak-e $\mathcal{L}(v_1,v_2,v_3)$-ban. Ha nem, ez az ortogonalizálás során kiderül.)

$$f_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1,-1,1,-1)}{\sqrt{1+1+1+1}} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$g := v_2 - \frac{\langle v_2, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle}\cdot f_1 = (5,1,1,1) - 2\cdot\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = (4,2,0,2)$$

$$\langle v_2, f_1\rangle = 5\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$\langle f_1, f_1\rangle = 1$$

$$f_2 = \frac{g}{\|g\|} = \frac{(4,2,0,2)}{\sqrt{16+4+0+4}} = \left[\frac{2}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}, 0, \frac{1}{\sqrt6}\right]$$

$$h := v_3 - \sum_{i=1}^{2} \frac{\langle v_3, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle}\cdot f_1 = v_3 - \frac{\langle v_3, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle}\cdot f_1 - \frac{\langle v_3, f_2\rangle}{\langle f_2, f_2\rangle}\cdot f_2 =$$

$$= (-3,-3,1,-3) - 2\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \frac{12}{\sqrt6}\left[\frac{2}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}, 0, \frac{1}{\sqrt6}\right] = (0,0,0,0)$$

$$\langle v_2, f_1\rangle = (-3)\cdot\frac{1}{2} + (-3)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\cdot\frac{1}{2} + (-3)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$\langle v_3, f_2\rangle = (-3)\cdot\frac{2}{\sqrt6} + (-3)\cdot\frac{1}{\sqrt6} + 1\cdot 0 + (-3)\cdot\frac{1}{\sqrt6} = -\frac{12}{\sqrt6}$$

Mivel $h=o$, így $\mathcal{L}(v_1,v_2,v_3)$ 2-dimenziós altér $\mathbb{R}^4$-ben (azaz v_1,v_2,v_3 lineárisan összefüggőek), és egy ortonormált bázis $\mathcal{L}(v_1,v_2,v_3)$-ban:
$B = \{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left[\frac{2}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}, 0, \frac{1}{\sqrt6}\right]\}$.

(2) Legendre-polinomok előállítása

Jelölje V a $[-1,1]$ intervallumon értelmezett, valós együtthatós polinomok vektorterét. $A \langle\ ,\ \rangle : V\times V \to \mathbb{R}$, $(p,q) \mapsto \langle p,q\rangle := \int_{-1}^{1} p\cdot q$ függvény skaláris szorzat a V vektortérben.

Az $x_0\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto 1$,
$x_1\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto t$,
$x_2\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto t^2$,
$\vdots$
$x_k\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto t^k$,
$\vdots$

polinomok bázist alkotnak V-ben. Konstruáljuk meg a megfelelő ortogonális (nem normált!) bázis néhány elemét!

$y_0 := x_0\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto 1$

$$y_1 := x_1 - \frac{\langle x_1, y_0\rangle}{\langle y_0, y_0\rangle}\cdot y_0 = x_1\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto t$$

$$\langle y_0, y_0\rangle = \int_{-1}^{1} dt = 2$$

$$\langle x_1, y_0\rangle = \int_{-1}^{1} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$y_2 := x_2 - \frac{\langle x_2, y_0\rangle}{\langle y_0, y_0\rangle} y_0 - \frac{\langle x_2, y_1\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} y_1 = x_2 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\, y_0 =$$

$$= x_2 - \frac{1}{3}\, x_0 : \ [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto t^2 - \frac{1}{3}$$

$$\langle x_2, y_0\rangle = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\langle x_2, y_1\rangle = \int_{-1}^{1} t^3\, dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$y_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, y_0\rangle}{\langle y_0, y_0\rangle} y_0 - \frac{\langle x_3, y_1\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2\rangle}{\langle y_2, y_2\rangle} y_2 =$$

$$= x_3 - \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}\, y_1 = x_3 - \frac{3}{5}\, y_1 : \ [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto t^3 - \frac{3}{5}\, t$$

$$\langle x_3, y_0\rangle = \int_{-1}^{1} t^3\, dt = 0$$

$$\langle x_3, y_1\rangle = \int_{-1}^{1} t^4\, dt = \frac{2}{5}$$

$$\langle y_1, y_1\rangle = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \frac{2}{3}$$

$$\langle x_3, y_2\rangle = \int_{-1}^{1} t^3\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) dt = \int_{-1}^{1} \left(t^5 - \frac{1}{3}t^3\right) dt = \left[\frac{t^6}{6}\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{3}\left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0 - \frac{1}{3}\cdot 0 = 0$$

$$\vdots$$

stb.

A fenti $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$ polinomokat Legendre-polinomoknak hívjuk.

4.25. Definíció.

Legyen V skaláris szorzatos tér, $S \subset V$ tetszőlegesen választott, $S \neq \emptyset$.

V egy vektorát S-re ortogonálisnak mondjuk, ha S minden vektorára ortogonális.

S ortogonális komplementere az összes rá merőleges vektor halmaza:

$S^{\perp} := \{x \in V \mid \forall s \in S : \langle x, s\rangle = 0\}$.

4.26. Állítás.

(1) Skaláris szorzatos tér nem üres vektorhalmazának ortogonális komplementere altér.

(2) Minden altér benne van az ortogonális komplementerének ortogonális komplementerében, azaz ha H altér, akkor $H \subset H^{\perp\perp}$.

Bizonyítás:

(1) Legyen $x, y \in S^{\perp}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
Ekkor $\forall s \in S$-re : $\langle x, s\rangle = 0$ és $\langle y, s\rangle = 0$, de így $\langle x+y, s\rangle = 0$ és $\langle \lambda x, s\rangle = 0$ is teljesül, vagyis $x+y \in S^{\perp}$ és $\lambda x \in S^{\perp}$. $S^{\perp}$ zárt a műveletekre, így altér.

(2) Ha $x \in H$, akkor $\forall y \in H^{\perp}$ esetén $\langle x, y\rangle = 0$.
Ekkor x ortogonális $H^{\perp}$ minden vektorára, tehát $x \in H^{\perp\perp}$. Így $H \subset H^{\perp\perp}$.

4.27. Állítás. **Az ortogonális felbontás tétele**

Legyen V skaláris szorzatos tér, H pedig véges dimenziós altere V-nek. Ekkor

(1) $V = H \oplus H^{\perp}$.

(2) Legyen $x \in V$, $x = h + h^{\perp}$, ahol $h \in H$ és $h^{\perp} \in H^{\perp}$.
Ekkor $\|x\|^2 = \|h\|^2 + \|h^{\perp}\|^2$.

(3) $H^{\perp\perp} = H$.

Bizonyítás:

Legyen $\dim(H) = n$. Ekkor H-ban a 4.24. Állítás szerint létezik $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormált bázis. $\forall x \in V$-re: $h := \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$, $h^{\perp} := x - h$. Ekkor nyilván $h \in H$ és a 4.22. (3) Állítás szerint $h^{\perp} \in H^{\perp}$. Tegyük fel, hogy $x \in H \cap H^{\perp}$. Ekkor $\langle x, x\rangle = 0$, ami a skaláris szorzat definíciója szerint csak $x = o$ esetben lehetséges. Vagyis $H \cap H^{\perp} = \{o\}$, így $V = H \oplus H^{\perp}$.

(2) $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle h+h^{\perp}; h+h^{\perp}\rangle = \langle h, h\rangle + \langle h^{\perp}, h\rangle + \langle h, h^{\perp}\rangle + \langle h^{\perp}, h^{\perp}\rangle =$
$= \langle h, h\rangle + \langle h^{\perp}, h^{\perp}\rangle = \|h\|^2 + \|h^{\perp}\|^2$.

(3) 4.26. (2) szerint $H \subset H^{\perp\perp}$. Így elég megmutatni, hogy $H^{\perp\perp} \subset H$.

Legyen $x \in V$. $x = p+q$, ahol $p \in H$ és $q \in H^{\perp}$.

Ekkor

$$\langle x,p\rangle = \langle p+q,p\rangle = \langle p,p\rangle + \underbrace{\langle q,p\rangle}_{0} = \|p\|^2.$$

Hasonlóan: $\langle x,q\rangle = \|q\|^2$. (*)

Tegyük fel speciálisan, hogy $x \in H^{\perp\perp}$.

Ekkor $\langle x,q\rangle = 0$, ezért (*) alapján $\|q\| = 0 \Rightarrow q = o$.

Így $x = p \in H$, tehát $H^{\perp\perp} \subset H$.

Vagyis $H = H^{\perp\perp}$.

Példa. Tekintsük $\mathbb{R}^3$-ban a 4.8. (1)-beli skaláris szorzatot!

Legyen $a = (1,-1,1)$

$b = (0,1,1)$

$c = (-2,-1,1)$.

$H := \mathcal{L}(a,b)$. Mivel az $\{a,b,c\}$ vektorhalmaz ortogonális, így $H^{\perp} = \mathcal{L}(c)$.

$\mathbb{R}^3 = H \oplus H^{\perp}$.

$\mathbb{R}^3$ egy ortonormált bázisa:

$$B = \left\{\frac{a}{\|a\|}, \frac{b}{\|b\|}, \frac{c}{\|c\|}\right\} = \left\{\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], \left[-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]\right\},$$

ahol $B = B_1 \cup B_2 = \left\{\frac{a}{\|a\|}, \frac{b}{\|b\|}\right\} \cup \left\{\frac{c}{\|c\|}\right\}$, úgy, hogy B_1 ortonormált bázis H-ban, B_2 ortonormált bázis $H^{\perp}$-ben. Legyen $x = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$. Az x B-re vonatkozó koordinátái: $1, 0, \sqrt{2}$. (Ezek a koordináták bázistranszformációval meghatározhatók.)

$$p := 1\cdot\frac{a}{\|a\|} + 0\cdot\frac{b}{\|b\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$q := \sqrt{2}\cdot\frac{c}{\|c\|} = \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

Ekkor $x = p+q$, ahol $p \in H$, $q \in H^{\perp}$.

Ellenőrizhetjük az

$\|x\|^2 = \|p\|^2 + \|q\|^2$ teljesülését is:

$$\|x\|^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 3$$

$$\|p\|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$\|q\|^2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 2, \text{ így valóban } \|x\|^2 = \|p\|^2 + \|q\|^2.$$

4.28. Definíció.

Legyen H véges dimenziós altere a V skaláris szorzatos térnek.
A $\pi: V \to V$, $x \mapsto \pi(x) := h$, ahol $x = h+h^{\perp}$, $h \in H$, $h^{\perp} \in H^{\perp}$ leképezést a H altérre való ortogonális projekciónak (merőleges vetítésnek) nevezzük, $\pi(x)$ -t az x vektor H-ra való ortogonális vetületének hívjuk.

4.29. Állítás.

Megtartva az előző Definíció jelöléseit:
A $\pi: V \to V$ ortogonális projekcióra teljesülnek a következők:

(1) $\pi: V \to V$ lineáris transzformáció, $\pi^2 = \pi$.

(2) $\pi|_H = id_H$, $\pi|_{H^{\perp}} = o$.

(3) $\forall x,y \in V$ -re: $\langle \pi(x),y\rangle = \langle x,\pi(y)\rangle$.

(4) $\forall x \in V$ -re: $\pi(x) = \sum_{i=1}^{3} \langle x,e_i\rangle e_i$, ahol $E = \{e_1,\dots,e_n\}$ ortonormált bázisa a H altérnek.

Bizonyítás:

(1) Legyen $x = h_1+h_1^{\perp}$, $y = h_2+h_2^{\perp}$, ahol $h_1,h_2 \in H$, $h_1^{\perp},h_2^{\perp} \in H^{\perp}$.

Ekkor $x+y = \underbrace{h_1+h_2}_{\in H} + \underbrace{h_1^{\perp}+h_2^{\perp}}_{\in H^{\perp}}$, $\lambda x = \underbrace{\lambda h_1}_{\in H} + \underbrace{\lambda h_1^{\perp}}_{\in H^{\perp}}$.

Így

$\pi(x+y) = h_1+h_2 = \pi(x) + \pi(y)$, és

$\pi(\lambda x) = \lambda h_1 = \lambda\cdot\pi(x)$, $\forall x,y \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$-ra,

tehát π lineáris.

Legyen $x = h+h^{\perp}$ $(h \in H,\ h^{\perp} \in H^{\perp})$.

$\pi^2(x) = \pi(\pi(x)) = \pi(h) = h = \pi(x)$, $\forall x \in V$-re.

(2) Ha $x \in H$: $x = x+o$ $(x \in H,\ o \in H^{\perp})$, így $\pi(x) = x$.

Ha $x \in H^{\perp}$: $x = o+x$ $(o \in H,\ x \in H^{\perp})$, így $\pi(x) = o$.

(3) Legyen $x = h_1+h_1^{\perp}$, $y = h_2+h_2^{\perp}$.

Ekkor

$\langle \pi(x),y\rangle = \langle h_1,h_2+h_2^{\perp}\rangle = \langle h_1,h_2\rangle$,

$\langle x,\pi(y)\rangle = \langle h_1+h_1^{\perp},h_2\rangle = \langle h_1,h_2\rangle$, innen adódik az állítás.

(4) $\pi(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle \pi(x), e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x+\pi(x)-x, e_i \rangle e_i =$

$= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i + \sum_{i=1}^{n} \langle \pi(x)-x, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i,$

mivel minden $i \in \underline{n}$-re $\langle \pi(x)-x, e_i \rangle = 0$.

4.30. Állítás.

(1) **Bessel-egyenlőtlenség**

Skaláris szorzatos tér vektorának véges dimenziós altérre való ortogonális vetülete nem hosszabb a vektornál.

(2) **A legjobb approximáció tétele**

Legyen H véges dimenziós altere a V skaláris szorzatos térnek, π pedig legyen a H-ra való ortogonális projekció.
Adott $x \in V$ esetén a $\pi(x)$ ortogonális vetület az x-hez legközelebbi H-beli vektor, azaz bármely $y \in H$ -ra:

$\|x-\pi(x)\| \le \|x-y\|$, és

egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $y = \pi(x)$.

Bizonyítás.

(1) Közvetlenül adódik a 4.27. Állítás (2) részéből.

(2) Legyen $y \in H$.

4.27. (2) -t felhasználva:

$\|x-y\|^2 = \underbrace{\|x-\pi(x)}_{\in H^\perp} + \underbrace{\pi(x)-y\|^2}_{\in H} = \|x-\pi(x)\|^2 + \underbrace{\|\pi(x)-y\|^2}_{\ge 0}.$

A fenti összeg második tagja nem negatív, és pontosan akkor nulla, ha $\pi(x) = y$. Így:

$\|x-y\| \ge \|x-\pi(x)\|$ és $\|x-y\| = \|x-\pi(x)\| \iff y=\pi(x)$.

Példa.

Legyen V a $[0,2\pi]$ intervallumon értelmezett, komplex értékű, folytonos függvények halmaza: $V := \{f: [0,2\pi] \to \mathbb{C} \mid f \text{ folytonos}\}$.
Értelmezzük a V halmazon az összeadást és a komplex számmal (skalárral) való szorzást a szokásos ún. pontonkénti műveletekkel. Ekkor V komplex vektortér. A $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$, $(f,g) \mapsto \langle f,g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \cdot \bar{g}$ függvény skaláris szorzat V-n.

$\varphi_n(x) := e^{inx}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ -re.

Igazolható, hogy $\{\ldots, \varphi_{-n}, \varphi_{-n+1}, \ldots, \varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n, \ldots\}$ ortonormált V-ben.

Legyen $f \in V$ tetszőlegesen választott.

Jelölje f_n az f függvény ortogonális vetületét az $\mathcal{L}(\varphi_{-n}, \ldots, \varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ 2n+1 dimenziós altérre.

Ekkor

$$f_n = \sum_{i=-n}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k = \langle f, \varphi_0 \rangle \varphi_0 + \sum_{k=1}^{n} (\langle f, \varphi_{-k} \rangle \varphi_{-k} + \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k)$$

Kiszámolható, hogy

$$f_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in [0,2\pi]$$

ahol $$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx \quad k = 1,2,\ldots$$

A 4.30. Állítás (2) része szerint f_n közelíti legjobban az $\mathcal{L}(\varphi_{-n}, \ldots, \varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ altér elemei közül f -t.

5. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK SZERKEZETE

Diagonalizálhatóság, sajátérték, sajátvektor

5.1. Definíció.

Legyen V véges dimenziós vektortér, $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformáció. $\mathcal{A}$-t diagonalizálhatónak nevezzük, ha létezik V-nek olyan bázisa, amelyre vonatkozóan az $\mathcal{A}$ transzformáció mátrixa diagonális.

Megjegyzés.

A 2. fejezetben a 2.32. II. Problémát követő második példában (50. oldal) az $\mathcal{A}$ transzformáció diagonalizálható, ugyanis az F bázisra vonatkozó mátrixa diagonális.

5.2. Állítás.

Legyen V véges dimenziós vektortér a Γ test felett. Az $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformáció pontosan akkor diagonalizálható, ha létezik olyan $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ bázis V-ben, amelyre $\mathcal{A}(b_i) = \lambda_i b_i$, $\forall i \in \underline{n}$ -re. Ekkor az $\mathcal{A}$ transzformáció B bázisra vonatkozó mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás.

1./ Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ diagonalizálható, azaz létezik olyan $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subset V$ bázis, hogy az $\mathcal{A}$ transzformáció B bázisra vonatkozó mátrixa $A_B = (a_{ij})$ diagonális. Az $\mathcal{A}(b_i)$ vektor B bázisra vonatkozó koordinátái az A mátrix i-dik oszlopában találhatók:
$0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-dik}}}{a_{ii}}, 0, \dots, 0$, így

$$\mathcal{A}(b_i) = 0 \cdot b_1 + \dots + 0 \cdot b_{i-1} + a_{ii} \cdot b_i + 0 \cdot b_{i+1} + \dots + 0 \cdot b_n = a_{ii} \cdot b_i.$$

$\lambda_i := a_{ii}$, $\forall i \in \underline{n}$ -re.

Ekkor $\mathcal{A}(b_i) = \lambda_i b_i$ $(i \in \underline{n})$.

2./ Tegyük fel, hogy $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ olyan bázisa V-nek, hogy $\mathcal{A}(b_i) = \lambda_i b_i$, $\forall i \in \underline{n}$ -re.
Ekkor az $\mathcal{A}$ transzformáció B-re vonatkozó mátrixának i-dik oszlopában $0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-dik}}}{\lambda_i}, 0, \dots, 0$ áll, azaz $\mathcal{A}$ B-re vonatkozó mátrixa

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ vagyis } \mathcal{A} \text{ diagonalizálható.}$$

5.3. Definíció.

Legyen V a Γ test feletti vektortér, $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformáció. A $\lambda \in \Gamma$ skalárt az $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció sajátértékének nevezzük, ha valamely $v \in V$, $v \neq o$ vektor esetén $\mathcal{A}(v) = \lambda v$ teljesül. A fenti v vektort a λ sajátértékhez tartozó sajátvektornak, a $H(\lambda) := \ker(\mathcal{A} - \lambda \cdot id_V)$ alteret pedig a λ sajátértékhez tartozó sajátaltérnek nevezzük.
$\dim(H(\lambda))$ a λ sajátérték geometriai multiplicitása. Egy lineáris transzformáció összes sajátértékének halmazát a lineáris transzformáció spektrumának nevezzük.

Megjegyzések.

(1) Egy sajátvektor csak egy sajátértékhez tartozhat.
Legyen ugyanis $v \neq o$ sajátvektora $\mathcal{A}$-nak. Ha $\mathcal{A}(v) = \lambda v$ és $\mathcal{A}(v) = \mu v$ is teljesül, akkor $(\lambda - \mu)v = o$, amiből $v \neq o$ miatt $\lambda - \mu = 0$, így $\lambda = \mu$.

(2) $H(\lambda) = \{v \in V \mid \mathcal{A}(v) = \lambda v\}$.
$H(\lambda)$-nak minden nullvektortól különböző vektora λ sajátértékű sajátvektora $\mathcal{A}$-nak.

5.4. Következmény.

Legyen V véges dimenziós vektortér, $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris. Az $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció pontosan akkor diagonalizálható, ha van V-nek olyan bázisa, amelyet az $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció sajátvektorai alkotnak.

5.5. Példák.

(1) Legyen $\lambda \in \Gamma$ rögzített, V Γ feletti vektortér.
$\mathcal{A}: V \to V, \quad x \mapsto \lambda x$
V minden o-tól különböző vektora sajátvektora $\mathcal{A}$-nak (λ sajátértékkel).
$H(\lambda) = V$.

(2) Legyen $\mathcal{A}$ az az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ típusú lineáris transzformáció, amely egy $\mathbb{R}^2$-beli vektorhoz hozzárendeli annak origó körüli $\frac{\pi}{2}$ -vel való elforgatottját. $E = \{e_1, e_2\}$ legyen a kanonikus bázis $\mathbb{R}^2$-ben.
Ekkor $\mathcal{A}(e_1) = e_2$, $\mathcal{A}(e_2) = -e_1$.
Van-e $\mathcal{A}$-nak sajátvektora?
Legyen $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq o$, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$.
Ha x sajátvektor, akkor $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \mathcal{A}(x) = \lambda x$.
Ekkor $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = \alpha_1 \mathcal{A}(e_1) + \alpha_2 \mathcal{A}(e_2) =$
$= \alpha_1 e_2 - \alpha_2 e_1 = \lambda\alpha_1 e_1 + \lambda\alpha_2 e_2$.
Innen: $-\alpha_2 = \lambda\alpha_1$
$\alpha_1 = \lambda\alpha_2$.
Az első egyenletet $-\alpha_2$ -vel, a másodikat α_1 -gyel szorozva és a két egyenletet összeadva:
$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0 \Rightarrow x = o$, ami ellentmondás. Tehát $\mathcal{A}$-nak nincs sajátvektora.

(3) Legyen $\mathcal{A}$ az az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú lineáris transzformáció, amely egy $\mathbb{R}^3$-beli vektorhoz hozzárendeli annak az x-y síkra vonatkozó tükörképét. $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ legyen a kanonikus bázis $\mathbb{R}^3$-ban. Ekkor $\mathcal{A}(e_1) = e_1$, $\mathcal{A}(e_2) = e_2$, $\mathcal{A}(e_3) = -e_3$. Következésképpen e_1 és e_2 sajátvektorai $\mathcal{A}$-nak $\lambda=1$ -es sajátértékkel, e_3 is sajátvektor, $\lambda = -1$ -es sajátértékkel.
$H(1) = \mathcal{L}(e_1, e_2)$ sajátaltér, geometriai multiplicitása 2,
$H(-1) = \mathcal{L}(e_3)$ sajátaltér, geometriai multiplicitása 1.

5.6. Állítás.

Egy lineáris transzformáció különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai lineárisan függetlenek.

Bizonyítás:

Legyen $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformáció, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ legyenek $\mathcal{A}$ különböző sajátértékei, $v_1, \ldots, v_k$ legyenek a megfelelő sajátértékekhez tartozó sajátvektorok. Teljes indukcióval:

$n = 1$ -re: bármely v sajátvektorra $v \neq o$, így lineárisan független.

Tegyük fel az állítás helyességét $n = \ell$ -re és vizsgáljuk az $n = \ell+1$ esetet $(1 \leq \ell \leq k-1)$:
Tekintsük a $v_1, \ldots, v_{\ell+1}$ sajátvektorok egy olyan lineáris kombinációját, amely o -t eredményez:

$$\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i v_i = o \qquad (1)$$

Ekkor $\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i \mathcal{A}(v_i) = \sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i \lambda_i v_i = o. \qquad (2)$

(1) -t szorozzuk be $\lambda_{\ell+1}$ -gyel, és ezt vonjuk ki (2) -ből:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{\ell+1})v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{\ell+1})v_2 + \ldots + \alpha_\ell(\lambda_\ell - \lambda_{\ell+1})v_\ell = o.$$

Mivel $v_1, \ldots, v_\ell$ lineárisan független, az együtthatók mindegyike 0 kell hogy legyen, ami figyelembe véve, hogy a λ sajátértékek különbözőek, csak úgy lehet, ha $\alpha_1 = \ldots = \alpha_\ell = 0$. Ekkor (1) alapján $\alpha_{\ell+1} v_{\ell+1} = o$ kell hogy legyen. Mivel $v_{\ell=1} \neq o$, így $\alpha_{\ell+1} = 0$.
Így a $v_1, \ldots, v_{\ell+1}$ sajátvektorokból a nullvektor csak triviálisan állítható elő, vagyis $v_1, \ldots, v_{\ell+1}$ lineárisan független.
Az indukciós elv alapján $v_1, \ldots, v_k$ is lineárisan független.

5.7. Következmények.

Legyen V n-dimenziós vektortér.

(1) Minden $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformációnak legfeljebb n db különböző sajátértéke van.

(2) $\mathcal{A}$ diagonalizálhatóságának elegendő feltétele n db különböző sajátérték létezése.
(Ez a feltétel nem szükséges, gondoljunk csak az id_V transzformációra!)

Sajátértékek, sajátvektorok meghatározása

Legyen V n-dimenziós vektortér, $B = \{b_1,\dots,b_n\}$ bázisa V-nek, $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformáció. Ekkor az $\mathcal{A}(v) = \lambda v$ egyenlőség ekvivalens az $Av = \lambda v$ egyenlőséggel, ahol A az $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció B bázisra vonatkozó mátrixa, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ a v vektor B bázisra vonatkozó koordinátáit tartalmazó oszlopvektor. (Itt λ -t az A négyzetes mátrix sajátértékének, $v \neq o$ -t az A mátrix λ-hoz tartozó sajátvektorának hívjuk.)

Az $Av = \lambda v$ egyenlőséget átalakítva:

$Av - \lambda v = o$, illetve

$(A-\lambda E)v = o$, ahol E nxn -es egységmátrix.

Ez egy homogén lineáris egyenletrendszer a $v_1,\dots,v_n$ ismeretlenekre nézve, amelynek nem triviális megoldását keressük ($v \neq o$).

A fenti egyenletrendszernek pontosan akkor létezik nem triviális megoldása, ha az $\mathcal{A}-\lambda\cdot id_V$ transzformáció nem injektív, ez pedig pontosan akkor teljesül, ha az $A-\lambda E$ együtthatómátrix determinánsa 0:

$$\det(A-\lambda E) = 0.$$

Ezen egyenletet λ-ra megoldva megkapjuk az $\mathcal{A}$ transzformáció sajátértékeit, ezután az $(A-\lambda E)v = o$ egyenletrendszert megoldva az adott λ sajátértékhez tartozó v koordináta n-esek, ill. azokból a megfelelő $v \in V$ sajátvektorok meghatározhatók.

5.8. Definíció.

(1) Legyen V véges dimenziós vektortér.
Az $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformáció karakterisztikus polinomján a $P(\lambda) = \det(\mathcal{A}-\lambda id_V)$ polinomot, karakterisztikus egyenletén a $P(\lambda) = \det(\mathcal{A}-\lambda id_V) = 0$ egyenletet értjük.

(2) Az $A \in \Gamma^{n\times n}$ négyzetes mátrix karakterisztikus polinomján a $P(\lambda) = \det(A-\lambda E)$ polinomot, karakterisztikus egyenletén a $P(\lambda) = \det(A-\lambda E) = 0$ egyenletet értjük.

5.9. Megjegyzések.

(1) A 2.50. Állítás alapján lineáris transzformációnak és bármely rögzített bázisra vonatkozó mátrixának karakterisztikus polinomja (karakterisztikus egyenlete) azonos.

(2) Az A nxn -es mátrix karakterisztikus polinomja pontosan n -ed fokú polinom, amelynek főegyütthatója $(-1)^n$, konstans tagja det A.
(Ez a kifejtési tétel alkalmazásával, teljes indukcióval látható be.)

5.10. Következmény.

(1) Legyen V véges dimenziós vektortér a Γ test felett.
Egy $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformáció sajátértékei pontosan az $\mathcal{A}$ transzformáció $P(\lambda) = 0$ karakterisztikus egyenletének (Γ-ba eső) gyökei.

(2) Egy A nxn -es mátrix sajátértékei pontosan az A mátrix $P(\lambda) = 0$ karakterisztikus egyenletének Γ-ba eső gyökei.

Egy-egy ilyen gyök multiplicitását az illető sajátérték algebrai multiplicitásának hívjuk.

Példák.

(1) Legyen $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (z,y,x)$.
Határozzuk meg az $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció sajátértékeit, sajátvektorait, sajátaltereit! Az $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció kanonikus bázisra vonatkozó mátrixa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$P(\lambda) = \det(A-\lambda E) = \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$= -\lambda\cdot(1-\lambda)(-\lambda)-(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1) = 0$$

A sajátértékek:

$\lambda_1 = 1$ (algebrai multiplicitása 2)

$\lambda_2 = -1$ (algebrai multiplicitása 1).

A $\lambda_1=1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok az $Ax=x$ egyenlőséget kielégítő, nullvektortól különböző vektorok.

Mivel $Ax = x \iff (A-E)x = o$, így az alábbi homogén lineáris egyenletrendszer triviálistól különböző megoldásait keressük.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bázistranszformációval megoldva az egyenletrendszert:

bázis	a_1	a_2	a_3	o
e_1	-1	0	1	0
e_2	0	0	0	0
e_3	(1)	0	-1	0

bázis	a_2	a_3	o
e_1	0	0	0
e_2	0	0	0
a_1	0	-1	0

Így $x_1 = 0 - [0 \quad -1] \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3$

A megoldáshalmaz:

$M_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_2,x_3 \in \mathbb{R},\ x_1=x_3\} = \{(t_1,t_2,t_1) | t_1,t_2 \in \mathbb{R}\}$.

A $\lambda_1=1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$V_1 = M_1 \setminus \{o\}$.

A $\lambda_1=1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér: $H(1) = M_1$, ami 2-dimenziós altér az $\mathbb{R}^3$ térben, így λ_1 geometriai multiplicitása 2. A $\lambda_2= -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok az $Ax = -x$ egyenlőséget kielégítő, nullvektortól különböző vektorok.

Mivel $Ax = -x \iff (A+E)x = o$, így az alábbi homogén lineáris egyenletrendszer triviálistól különböző megoldásait keressük:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bázistranszformációval megoldva az egyenletrendszert:

bázis	a_1	a_2	a_3	o
e_1	(1)	0	1	0
e_2	0	2	0	0
e_3	1	0	1	0

bázis	a_2	a_3	o
a_1	0	1	0
e_2	(2)	0	0
e_3	0	0	0

bázis	a_3	o
a_1	1	0
a_2	0	0
e_3	0	0

Így: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3$

A megoldáshalmaz:

$M_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 \in \mathbb{R},\ x_1=-x_3,\ x_2=0\} = \{(t,0-t) | t \in \mathbb{R}\}$.

A $\lambda_2= -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$V_2 = M_2 \setminus \{o\}$.

A $\lambda_2= -1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér: $H(-1) = M_2$, ami 1-dimenziós altér az $\mathbb{R}^3$ térben, így λ_2 geometriai multiplicitása 1.

(2) Legyen az $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció kanonikus bázisra vonatkozó mátrixa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg az $\mathcal{A}$ transzformáció sajátértékeit, sajátvektorait és sajátaltereit! A karakterisztikus egyenlet:

$$P(\lambda) = \det(A-\lambda E) = \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right) =$$

$$= -\lambda(-\lambda\cdot(-\lambda)(1-\lambda)) = \lambda^3(\lambda-1) = 0.$$

A sajátértékek:

$\lambda_1 = 0$ (algebrai multiplicitása 3)

$\lambda_2 = 1$ (algebrai multiplicitása 1).

A $\lambda_1= 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához oldjuk meg az $Ax = o$ egyenletrendszert:

bázis	a_1	a_2	a_3	a_4	o
e_1	0	0	(1)	-1	0
$a_1=$ e_2	1	0	1	-1	0
e_3	0	0	0	0	0
e_4	0	0	0	1	0

bázis	a_2	a_4	o
a_3	0	-1	0
a_1	0	0	0
e_3	0	0	0
e_4	0	(1)	0

bázis	a_2	o
a_3	0	0
a_1	0	0
e_3	0	0
a_4	0	0

Így $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

A megoldáshalmaz:

$M_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) | x_2 \in \mathbb{R},\ x_1=x_3=x_4=0\} = \{(0,t,0,0) | t \in \mathbb{R}\}$.

A $\lambda_1=0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$V_1 = M_1 \setminus \{o\}$.

A $\lambda_1=0$ sajátértékhez tartozó sajátaltér: $H(0) = M_1$, ami 1-dimenziós altér, így λ_1 geometriai multiplicitása 1.

A $\lambda_2=1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához oldjuk meg az $(A-E)x = o$ egyenletrendszert:

bázis	a_1	a_2	a_3	a_4	o
e_1	-1	0	1	-1	0
e_2	1	-1	1	-1	0
e_3	0	0	(-1)	0	0
e_4	0	0	0	0	0

bázis	a_1	a_2	a_4	o
e_1	(-1)	0	-1	0
e_2	1	-1	-1	0
a_3	0	0	0	0
e_4	0	0	0	0

bázis	a_2	a_4	o
a_1	0	1	0
e_2	(-1)	-2	0
a_3	0	0	0
e_4	0	0	0

bázis	a_4	o
a_1	1	0
a_2	2	0
a_3	0	0
e_4	0	0

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 .$$

Így

A megoldáshalmaz:

$M_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) | x_4 \in \mathbb{R},\ x_1=-x_4,\ x_2=-2x_4,\ x_3=0\} =$

$= \{(-t,-2t,0,t) | t \in \mathbb{R}\}$.

A $\lambda_2=1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$V_2 = M_2 \setminus \{o\}$.

A $\lambda_2=1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér: $H(1) = M_2$, ami 1-dimenziós altér, így λ_2 geometriai multiplicitása 1.

5.11. Állítás.

(1) Legyen V véges dimenziós komplex vektortér.
Ekkor minden $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformációnak létezik sajátértéke.

(2) Legyen V páratlan dimenziós valós vektortér. Ekkor az $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformációnak létezik (valós) sajátértéke, mégpedig
$\det(\mathcal{A}) > 0$ esetén biztosan van pozitív,
$\det(\mathcal{A}) < 0$ esetén biztosan van negatív sajátérték.

(3) Legyen V páros dimenziós valós vektortér, $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformáció.
Ha $\det(\mathcal{A}) < 0$, akkor $\mathcal{A}$-nak van pozitív és negatív sajátértéke.

Bizonyítás:

(1) $P(\lambda)$ n-ed fokú komplex együtthatós polinom, ennek az algebra alaptétele szerint létezik komplex gyöke.

(2) Legyen $\dim(V) = 2k+1$
A $P(\lambda)$ karakterisztikus polinom főegyütthatója $(-1)^{2k+1} = -1$, így $\lim_{\lambda\to\infty} P(\lambda) = -\infty$, $\lim_{\lambda\to-\infty} P(\lambda) = \infty$.
Mivel $P(\lambda)$ folytonos, így kell hogy legyen legalább egy zérushelye, mégpedig $P(0)=\det(\mathcal{A}) > 0$ esetén biztoan van pozitív, $P(0)=\det(\mathcal{A}) < 0$ esetén biztosan van negatív zérushely.

(3) Legyen $\dim(V) = 2k$.
A $P(\lambda)$ karakterisztikus polinom főegyütthatója $(-1)^{2k} = 1$, így $\lim_{\lambda\to\infty} P(\lambda) = \infty$, $\lim_{\lambda\to-\infty} P(\lambda) = \infty$.
Ha $P(0) = \det(\mathcal{A}) < 0$, akkor $P(\lambda)$ folytonossága miatt kell hogy legyen negatív és pozitív zérushely is.

5.12. Állítás:

Lineáris transzformáció sajátértékének geometriai multiplicitása az algebrai multiplicitást nem haladhatja meg.
(nem bizonyítjuk)

Skaláris szorzatos terek lineáris transzformációinak diagonalizálhatósága

Jelölés: $\mathbb{K}$ jelölje az $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ számtestek valamelyikét.

5.13. Állítás. (Riesz-féle reprezentációs tétel)

Legyen V véges dimenziós skaláris szorzatos tér, $\mathcal{A}: V \to \mathbb{K}$ lineáris leképezés. Ekkor létezik pontosan egy (kizárólag $\mathcal{A}$-tól függő) $a \in V$ vektor, úgy, hogy $\forall x \in V$ -re $\mathcal{A}(x) = \langle x,a \rangle$ teljesül.

Bizonyítás:

1./ Ha $\mathcal{A}$ az azonosan nulla leképezés, akkor $a=o$, egyértelműen.

2./ Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ nem az azonosan nulla leképezés. Legyen $M = \ker(\mathcal{A})$, és $N = M^{\perp}$. Mivel az N altér biztosan tartalmaz nullvektortól különböző vektort, feltehetjük, hogy létezik olyan $a_0 \in N$, melyre $\|a_0\| = 1$.
Legyen $a = \overline{\mathcal{A}(a_0)} \cdot a_0 \in N$.
Ha $x \in M = \ker(\mathcal{A})$, akkor $\langle x,a \rangle = 0$, így $\mathcal{A}(x) = \langle x,a \rangle$ teljesül.
Másrészt $\langle a_0,a \rangle = \langle a_0, \overline{\mathcal{A}(a_0)} \cdot a_0 \rangle = \mathcal{A}(a_0) \cdot \langle a_0,a_0 \rangle = \mathcal{A}(a_0)$.
Legyen $x \in V$ tetszőlegesen választott.
Tekintsük az $x_0 = x - \lambda \cdot a_0$ vektort, ahol $\lambda = \frac{\mathcal{A}(x)}{\mathcal{A}(a_0)} \in \mathbb{K}$.

Ekkor $\mathcal{A}(x_0) = \mathcal{A}(x-\lambda a_0) = \mathcal{A}(x) - \lambda \cdot \mathcal{A}(a_0) = \mathcal{A}(x) - \frac{\mathcal{A}(x)}{\mathcal{A}(a_0)} \cdot \mathcal{A}(a_0) = 0$,
így $x_0 \in M = \ker(\mathcal{A})$. Ezért a korábbiak szerint $\mathcal{A}(x_0) = \langle x_0,a \rangle$.
Így

$$\langle x,a \rangle = \langle x_0 + \lambda a_0, a \rangle = \langle x_0,a \rangle + \lambda \cdot \langle a_0,a \rangle = \mathcal{A}(x_0) + \lambda \cdot \mathcal{A}(a_0) =$$
$$= \mathcal{A}(x_0 + \lambda a_0) = \mathcal{A}(x), \qquad \forall x \in V \text{ -re.}$$

Vagyis a kívánt tulajdonságú $a \in V$ vektor létezik.
Tegyük fel, hogy $\forall x \in V$ -re $\langle x,a_1 \rangle = \langle x,a_2 \rangle = \mathcal{A}(x)$ teljesül.
Ekkor $\forall x \in V$ -re (és így speciálisan $x = a_1 - a_2$ -re is) $\langle x, a_1 - a_2 \rangle = 0$.
Ezért $\|a_1 - a_2\|^2 = 0$, így $a_1 = a_2$. Vagyis pontosan egy $a \in V$ létezik a kívánt feltétellel.

5.14. Állítás.

Legyen V véges dimenziós skaláris szorzatos tér, $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformáció. Ekkor létezik pontosan egy olyan $\mathcal{A}^* : V \to V$ lineáris transzformáció, hogy $\forall x,y \in V$ -re:

$$\langle \mathcal{A}(x),y \rangle = \langle x, \mathcal{A}^*(y) \rangle \qquad \text{teljesül.}$$

Ezt az $\mathcal{A}^*$ lineáris transzformációt az $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció adjungáltjának nevezzük.

Bizonyítás:

Legyen $y \in V$ rögzített.
Tekintsük az $\mathcal{A}_y : V \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \langle \mathcal{A}(x),y \rangle$ leképezést.

$\mathcal{A}_y$ lineáris:

$\forall x_1,x_2 \in V$ -re: $\mathcal{A}_y(x_1+x_2) = \langle \mathcal{A}(x_1+x_2),y \rangle = \langle \mathcal{A}(x_1)+\mathcal{A}(x_2),y \rangle =$
$= \langle \mathcal{A}(x_1),y \rangle + \langle \mathcal{A}(x_2),y \rangle = \mathcal{A}_y(x_1) + \mathcal{A}_y(x_2)$.

$\forall x \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén: $\mathcal{A}_y(\lambda x) = \langle \mathcal{A}(\lambda x),y \rangle = \langle \lambda \mathcal{A}(x),y \rangle =$
$= \lambda \langle \mathcal{A}(x),y \rangle = \lambda \cdot \mathcal{A}_y(x)$.

Ekkor a Riesz-féle reprezentációs tétel szerint létezik egyetlen olyan $y^* \in V$ vektor, úgy, hogy $\forall x \in V$: $\mathcal{A}_y(x) = \langle x,y^* \rangle$ teljesül.
Definiáljuk a következő leképezést:
$\mathcal{A}^* : V \to V$, $y \mapsto \mathcal{A}^*(y) := y^*$
Ekkor $\forall x,y \in V$ -re
$\langle \mathcal{A}(x),y \rangle = \mathcal{A}_y(x) = \langle x,y^* \rangle = \langle x, \mathcal{A}^*(y) \rangle$ teljesül.

$\mathcal{A}^*$ lineáris:

Legyen $y_1,y_2 \in V$.
$\forall x \in V$ -re: $\langle \mathcal{A}(x),y_1+y_2 \rangle = \langle x, \mathcal{A}^*(y_1+y_2) \rangle$, (*)
másrészt $\langle \mathcal{A}(x),y_1+y_2 \rangle = \langle \mathcal{A}(x),y_1 \rangle + \langle \mathcal{A}(x),y_2 \rangle =$
$= \langle x, \mathcal{A}^*(y_1) \rangle + \langle x, \mathcal{A}^*(y_2) \rangle = \langle x, \mathcal{A}^*(y_1)+\mathcal{A}^*(y_2) \rangle$ (**)
(*) és (**) alapján
$\forall x \in V$ -re: $\langle x, \mathcal{A}^*(y_1+y_2) - \mathcal{A}^*(y_1) - \mathcal{A}^*(y_2) \rangle = 0$,
így $\mathcal{A}^*(y_1+y_2) - \mathcal{A}^*(y_1) - \mathcal{A}^*(y_2) = o$, vagyis
$$\mathcal{A}^*(y_1+y_2) = \mathcal{A}^*(y_1) + \mathcal{A}^*(y_2).$$

Legyen $y \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\forall x \in V$ -re: $\langle \mathcal{A}(x), \lambda y \rangle = \langle x, \mathcal{A}^*(\lambda y) \rangle$,

másrészt $\langle \mathcal{A}(x), \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle \mathcal{A}(x), y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, \mathcal{A}^*(y) \rangle = \langle x, \lambda \mathcal{A}^*(y) \rangle$.

Így $\forall x \in V$ -re: $\langle x, \mathcal{A}^*(\lambda y) - \lambda \mathcal{A}^*(y) \rangle = 0$, ezért

$\mathcal{A}^*(\lambda y) - \lambda \cdot \mathcal{A}^*(y) = o$, vagyis

$$\mathcal{A}^*(\lambda y) = \lambda \cdot \mathcal{A}^*(y).$$

Egyértelműség:

Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ olyan $V \to V$ lineáris transzformációk, hogy

$\forall x, y \in V$ -re: $\langle \mathcal{A}(x), y \rangle = \langle x, \mathcal{A}_1(y) \rangle$ és

$\langle \mathcal{A}(x), y \rangle = \langle x, \mathcal{A}_2(y) \rangle$ is teljesül.

Ekkor $\forall x, y \in V$ esetén $\langle x, (\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2)(y) \rangle = 0$,

vagyis $\forall y \in V$ -re $(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2)(y)$ a V vektortér minden vektorára ortogonális.

Így $\forall y \in V$ -re $(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2)(y) = o$, azaz $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$ az azonosan nulla leképezés, így $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.

5.15. Megjegyzés.

Ha V véges dimenziós skaláris szorzatos tér, $\mathcal{A}, \mathcal{B} : V \to V$ lineáris transzformációk, $c \in \mathbb{K}$, akkor

(1) $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$

(2) $(c\mathcal{A})^* = \overline{c} \cdot \mathcal{A}^*$

(3) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$

(4) $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \circ \mathcal{A}^*$

(5) Ha $\mathcal{A}$ invertálható, akkor $(\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1}$.

Példa.

Legyen $\{e_1, e_2\}$ a kanonikus bázis $\mathbb{R}^2$-ben.

$H := \mathcal{L}(e_1)$

$K := \mathcal{L}(e_1+e_2)$

$\mathcal{A}$ legyen az a lineáris transzformáció, amely egy $\mathbb{R}^2$-beli vektort H-ra vetít, K-val párhuzamosan. Ekkor

$\mathcal{A}(e_1) = e_1$, $\mathcal{A}(e_1+e_2) = o$.

Így $\mathcal{A}(e_2) = \mathcal{A}(-e_1+(e_1+e_2)) = -\mathcal{A}(e_1)+\mathcal{A}(e_1+e_2) = -e_1$.

$\mathcal{A}(x,y) = x \cdot \mathcal{A}(e_1) + y \cdot \mathcal{A}(e_2) = (x-y)e_1$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ -re.

Vagyis: $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x-y, 0)$

Határozzuk meg az $\mathcal{A}$ transzformáció adjungáltját!

$$\mathcal{A}^*(e_1) = \langle \mathcal{A}^*(e_1), e_1 \rangle e_1 + \langle \mathcal{A}^*(e_1), e_2 \rangle e_2 =$$
$$= \langle e_1, \mathcal{A}(e_1) \rangle e_1 + \langle e_1, \mathcal{A}(e_2) \rangle e_2 =$$
$$= \langle e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle e_1, -e_1 \rangle e_2 = e_1 - e_2.$$

$$\mathcal{A}^*(e_2) = \langle \mathcal{A}^*(e_2), e_1 \rangle e_1 + \langle \mathcal{A}^*(e_2), e_2 \rangle e_2 =$$
$$= \langle e_2, \mathcal{A}(e_1) \rangle e_1 + \langle e_2, \mathcal{A}(e_2) \rangle e_2 =$$
$$= \langle e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle e_2, -e_1 \rangle e_2 = o$$

Így $\mathcal{A}^*(x,y) = \mathcal{A}^*(xe_1+ye_2) = x \cdot \mathcal{A}^*(e_1) + y \cdot \mathcal{A}^*(e_2) = xe_1 - xe_2$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ -re.

Vagyis: $\mathcal{A}^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x,-x)$.

($\mathcal{A}^*$ az $\mathcal{L}(e_1-e_2)$ altérre vetít, $\mathcal{L}(e_2)$ -vel párhuzamosan.)

Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{A}^*$ transzformációk kanonikus bázisra vonatkozó mátrixai:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Észrevehetjük, hogy $A^* = A^T$.

5.16. Állítás.

Legyen V véges dimenziós skaláris szorzatos tér, $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformáció, $B \subset V$ ortonormált bázis. Legyen az $\mathcal{A}$ transzformáció B-re vonatkozó mátrixa $M(\mathcal{A}) = (\alpha_{ij})$, az $\mathcal{A}^*$ transzformáció B-re vonatkozó mátrixa $M(\mathcal{A}^*) = (\alpha_{ij}^*)$.

Ekkor

$$\alpha_{ji}^* = \overline{\alpha_{ij}}. \qquad i = 1, \ldots, n \qquad j = 1, \ldots, n$$

Bizonyítás:

Legyen $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ortonormált bázis V-ben.

Ekkor $\forall j \in \underline{n}$ -re:

$$\mathcal{A}(b_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} b_k, \quad \text{ill.} \quad \mathcal{A}^*(b_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}^* b_k.$$

Így $\forall i, j \in \underline{n}$ esetén:

$$\langle \mathcal{A}(b_j), b_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} b_k, b_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle b_k, b_i \rangle = \alpha_{ij}.$$

Másrészt:

$$\langle \mathcal{A}(b_j), b_i \rangle = \langle b_j, \mathcal{A}^*(b_i) \rangle = \langle b_j, \sum_{k=1}^{n} \alpha^*_{ki}\, b_k \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha^*_{ki}} \langle b_j, b_k \rangle = \overline{\alpha^*_{ji}}$$

Vagyis $\alpha_{ij} = \overline{\alpha^*_{ji}}$, ill. ami ezzel ekvivalens:

$$\alpha^*_{ji} = \overline{\alpha_{ij}}, \qquad i = 1,\dots,n \qquad j = 1,\dots,n.$$

5.17. Következmény.

Ha V véges dimenziós valós skaláris szorzatos tér, $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformáció, akkor az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{A}^*$ egy ortonormált bázisra vonatkozó mátrixai között az

$$M(\mathcal{A}^*) = M(\mathcal{A})^T$$

kapcsolat áll fenn.

5.18. Definíció.

Legyen V véges dimenziós skaláris szorzatos tér.
$\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformáció.
Az $\mathcal{A}$ lineáris transzformációt normálisnak nevezzük, ha $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}$.
Az $\mathcal{A}$ lineáris transzformációt önadjungáltnak nevezzük, ha $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. (Ha V valós (komplex) skaláris szorzatos tér, akkor az önadjungált lineáris transzformációkat szimmetrikusnak (Hermite-félének) is nevezzük.)
Az $\mathcal{A}$ lineáris transzformációt ortogonálisnak (komplex esetben unitérnek) nevezzük, ha $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} = id_V$ (azaz, ha $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$).

5.19. Megjegyzések.

(1) Nyilvánvalóan az önadjungált és az ortogonális (unitér) transzformációk normálisak.

(2) Önadjungált transzformációk esetén az ortonormált bázisra vonatkozó mátrixokra igazak az alábbiak:
Ha $\mathcal{A}$ szimmetrikus, akkor $M(\mathcal{A}) = M(\mathcal{A})^T$.
Ha $\mathcal{A}$ Hermite-féle transzformáció, akkor az $M(\mathcal{A}) = (\alpha_{ij})$ mátrixra:
$\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$.

5.20. Állítás.

Ha $\mathcal{A}: V \to V$ normális lineáris transzformáció, akkor x pontosan akkor sajátvektora $\mathcal{A}$-nak, ha sajátvektora $\mathcal{A}^*$-nak is, és ha $\mathcal{A}(x) = \lambda x$, akkor $\mathcal{A}^*(x) = \overline{\lambda} x$.

Bizonyítás:

$$\|\mathcal{A}(x)-\lambda x\|^2 = \langle \mathcal{A}(x)-\lambda x,\ \mathcal{A}(x)-\lambda x\rangle = \langle \mathcal{A}(x),\ \mathcal{A}(x)\rangle - \lambda\langle x, \mathcal{A}(x)\rangle -$$
$$- \overline{\lambda}\langle \mathcal{A}(x), x\rangle + \lambda\cdot\overline{\lambda}\langle x, x\rangle =$$
$$= \langle x, \mathcal{A}^*(\mathcal{A}(x))\rangle - \lambda\langle \mathcal{A}^*(x), x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, \mathcal{A}^*(x)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle x, x\rangle =$$
$$= \langle x, \mathcal{A}(\mathcal{A}^*(x))\rangle - \lambda\langle \mathcal{A}^*(x), x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, \mathcal{A}^*(x)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle x, x\rangle =$$
$$= \langle \mathcal{A}^*(x), \mathcal{A}^*(x)\rangle - \lambda\langle \mathcal{A}^*(x), x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, \mathcal{A}^*(x)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle x, x\rangle =$$
$$= \langle \mathcal{A}^*(x) - \overline{\lambda}x,\ \mathcal{A}^*(x) - \overline{\lambda}x\rangle = \|\mathcal{A}^*(x)-\overline{\lambda}x\|^2,$$

így az $x \in V$ vektor pontosan akkor λ sajátértékű sajátvektora $\mathcal{A}$-nak, ha $\overline{\lambda}$ sajátértékű sajátvektora $\mathcal{A}^*$-nak.

5.21. Állítás.

Ha az $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformáció normális, akkor $\mathcal{A}$ különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai ortogonálisak.

Bizonyítás:

Legyen $x_1 \in V$ λ_1 sajátértékű, $x_2 \in V$ λ_2 sajátértékű sajátvektora $\mathcal{A}$-nak, ahol $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Ekkor

$$\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle = \langle \mathcal{A}(x_1), x_2\rangle = \langle x_1, \mathcal{A}^*(x_2)\rangle = \langle x_1, \overline{\lambda}_2 x_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle.$$

Így $(\lambda_1-\lambda_2)\langle x_1, x_2\rangle = 0$, ahonnan $\lambda_1 \neq \lambda_2$ miatt $\langle x_1, x_2\rangle = 0$ következik.

5.22. Állítás. **Spektrál-tétel.**

Az $\mathcal{A}: V \to V$ transzformáció pontosan akkor diagonalizálható (azaz pontosan akkor létezik olyan ortonormált bázis V-ben, amelyet $\mathcal{A}$ sajátvektorai alkotnak), ha az $\mathcal{A}$ transzformáció normális.
(nem bizonyítjuk)

5.23. Állítás.

Legyen V véges dimenziós skaláris szorzatos tér, $\mathcal{A}: V \to V$ normális lineáris transzformáció. Ekkor:

(1) $\mathcal{A}$ Hermite-féle $\iff$ $\mathcal{A}$ minden sajátértéke valós.

(2) $\mathcal{A}$ unitér $\iff$ $\mathcal{A}$ minden sajátértéke egységnyi abszolút értékű.

Bizonyítás:

(1) a./ Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformáció Hermite-féle. Legyen v az $\mathcal{A}$ transzformáció λ sajátértékű sajátvektora. Ekkor:
$\langle \mathcal{A}(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \cdot \langle x, x\rangle$, másrészt
$\langle \mathcal{A}(x), x\rangle = \langle x, \mathcal{A}^*(x)\rangle = \langle x, \mathcal{A}(x)\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle$, így
$\lambda = \overline{\lambda}$, azaz λ valós.

b./ Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}$ transzformáció sajátértékei valósak. Mivel $\mathcal{A}$ normális, így létezik V-ben olyan $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ortonormált bázis, amely $\mathcal{A}$ sajátvektoraiból áll. Ekkor $\mathcal{A}(v_i) = \lambda_i v_i$, $i \in \underline{n}$, ahol λ_i $(i \in \underline{n})$ sajátértéke $\mathcal{A}$-nak.
Az 5.20. Állítás szerint $\mathcal{A}^*(v_i) = \overline{\lambda}_i v_i = \lambda_i v_i = \mathcal{A}(v_i)$. Vagyis $\mathcal{A}$ és $\mathcal{A}^*$ a B bázis vektoraihoz ugyanazokat a képvektorokat rendeli, így $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$.

(2) a./ Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}: V \to V$ transzformáció unitér.
Legyen v az $\mathcal{A}$ transzformáció λ sajátértékű sajátvektora. Ekkor:
$\langle \mathcal{A}(v), \mathcal{A}(v)\rangle = \langle v, \mathcal{A}^*(\mathcal{A}(v))\rangle = \langle v, v\rangle$,
másrészt:
$\langle \mathcal{A}(v), \mathcal{A}(v)\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda \cdot \overline{\lambda}\langle v, v\rangle = |\lambda|^2 \langle v, v\rangle$.
Így $|\lambda| = 1$.

b./ Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformáció sajátértékei egységnyi abszolútértékűek. Mivel $\mathcal{A}$ normális, így létezik olyan $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortonormált bázis V-ben, amely $\mathcal{A}$ sajátvektoraiból áll. Legyen $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Ekkor:

$$\langle x, \mathcal{A}^*(\mathcal{A}(x))\rangle = \langle \mathcal{A}(x), \mathcal{A}(x)\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i v_i, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k v_k \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda}_i \langle \alpha_i v_i, \alpha_i v_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha_i v_i, \alpha_i v_i\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \right\rangle = \langle x, x\rangle,$$ mivel a különböző sajátvektorok ortogonálisak.

Így $\forall x \in V$ -re: $\langle x, \mathcal{A}^*(\mathcal{A}(x)) - x\rangle = 0$, ezért $\mathcal{A}^*(\mathcal{A}(x)) = x$, azaz $\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} = id_V$, vagyis $\mathcal{A}$ unitér.